

## Лабораторная работа №5 «Решение задач линейного программирования средствами специальных библиотек языка Python<sup>1</sup>»

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Изучить сущность, особенности экономико-математической модели<sup>2</sup> и сферы применения задачи линейного программирования (ЗЛП) с помощью материала лекций или учебных пособий. Ознакомиться с геометрическим методом их решения, а также с применением для этих целей инструмента «Поиск решения MS Excel»<sup>3</sup>.
2. Изучить пример, демонстрирующий процесс решения ЗЛП средствами библиотек SciPy, NumPy и Matplotlib (см. приложения 1, 2).
3. Решить задачу согласно индивидуальному варианту заданий (см. приложение 3).
4. Сравнить результаты решения своей ЗЛП, полученные разными способами, и сделать вывод.
5. Оформить краткий отчет, содержащий: задание для своего варианта, распечатку программного кода для своей задачи со скриншотами результатов работы программ<sup>4</sup>.

---

<sup>1</sup> О способах установки библиотек в Microsoft Visual Studio можно прочесть вот здесь: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/visualstudio/python/tutorial-working-with-python-in-visual-studio-step-05-installing-packages?view=vs-2022>

<sup>2</sup> **Исследование операций в экономике:** Учеб. пособие для И87 вузов /Н.Ш. Кремер, БА Путко, И.М. Тришин, М.Н.Фрид- ман; Под ред. проф. Н.Ж Кремера. - м: юнити, 2002. - 407 с. ISBN 5-85173-092-7. **См. стр. 16-27, 55-62, 59-94.**

<sup>3</sup> см. приложения к ЛР в отдельных документах.

<sup>4</sup> Студенты, сдающие практическую работу №2 в обозначенный преподавателем срок в течение занятия, могут не оформлять отчет (при условии, что полученные результаты совпали с результатами ЛР№1).

## Приложение 1

### Краткие сведения о библиотеке SciPy<sup>5</sup>

SciPy — это библиотека Python с открытым исходным кодом, предназначенная для решения научных и математических проблем. Она построена на базе NumPy и позволяет управлять данными, а также визуализировать их с помощью разных высокоуровневых команд. Если вы импортируете SciPy, то NumPy отдельно импортировать не нужно.

### Пакеты в SciPy

В SciPy есть набор пакетов для разных научных вычислений:

Название	Описание
<code>cluster</code>	Алгоритмы кластерного анализа
<code>constants</code>	Физические и математические константы
<code>fftpack</code>	Быстрое преобразование Фурье
<code>integrate</code>	Решения интегральных и обычных дифференциальных уравнений
<code>interpolate</code>	Интерполяция и сглаживание сплайнов
<code>io</code>	Ввод и вывод
<code>linalg</code>	Линейная алгебра

---

<sup>5</sup> Источники:

<https://pythonru.com/biblioteki/scipy-python>

<https://ru.wikipedia.org/wiki/SciPy>

<https://pythonim.ru/libraries/biblioteka-scipy-v-python>

Название	Описание
<code>ndimage</code>	N-размерная обработка изображений
<code>odr</code>	Метод ортогональных расстояний
<code>optimize</code>	Оптимизация и численное решение уравнений
<code>signal</code>	Обработка сигналов
<code>sparse</code>	Разреженные матрицы
<code>spatial</code>	Разреженные структуры данных и алгоритмы
<code>special</code>	Специальные функции
<code>stats</code>	Статистические распределения и функции

## Для чего нужна SciPy<sup>6</sup>

SciPy используют специалисты по [Data Science](#), [Big Data](#), [аналитики данных](#), а также математики и ученые:

- для сложных математических расчетов, которые тяжело произвести вручную или с помощью калькулятора;
- проведения научных исследований, где требуется использование продвинутой математики;
- глубокого анализа данных, интерполяции и других методов работы с информацией;
- машинного обучения и создания моделей искусственного интеллекта, прогнозирования и построения моделей;

---

<sup>6</sup> на всякий случай ссылка на онлайн-компилятор: [https://www.tutorialspoint.com/execute\\_scipy\\_online.php](https://www.tutorialspoint.com/execute_scipy_online.php)

- формирования двумерных и трехмерных графиков, которые можно потом визуализировать (уже при помощи других библиотек).

## Краткие сведения о библиотеке Matplotlib<sup>7</sup>

[Matplotlib](#) — это библиотека на языке Python для визуализации данных. В ней можно построить двумерные (плоские) и трехмерные графики.

Python Matplotlib — альтернатива модуля визуализации программы для технических вычислений MatLab. У Matplotlib объектно-ориентированный интерфейс, то есть пользователь напрямую взаимодействует с каждым объектом. С помощью кода можно задавать любой элемент диаграммы, в том числе ярлыки и отметки на осях.

Matplotlib используют для отрисовки всевозможных видов графиков. Это незаменимая библиотека для любого [аналитика данных](#). Помимо этого, Matplotlib лежит в основе других библиотек, например Seaborn, которая представляет высокоуровневый интерфейс над Matplotlib. В некоторых случаях мы используем Seaborn, например, когда хотим сделать быстро и красиво, но когда хочется большей детализации и проработки, то смело пользуемся Matplotlib.

Matplotlib.pyplot — самый высокоуровневый интерфейс с набором команд и функций. В высокоуровневом интерфейсе все автоматизировано, поэтому его проще всего осваивать новичкам.

---

<sup>7</sup> <https://pythonworld.ru/novosti-mira-python/scientific-graphics-in-python.html>  
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Matplotlib>  
<https://blog.skillfactory.ru/glossary/matplotlib/>  
<https://pythonim.ru/libraries/biblioteka-matplotlib-v-python>

## Приложение 2<sup>8</sup>

Пример решения ЗЛП с помощью модуля optimize библиотеки SciPy<sup>9</sup>.

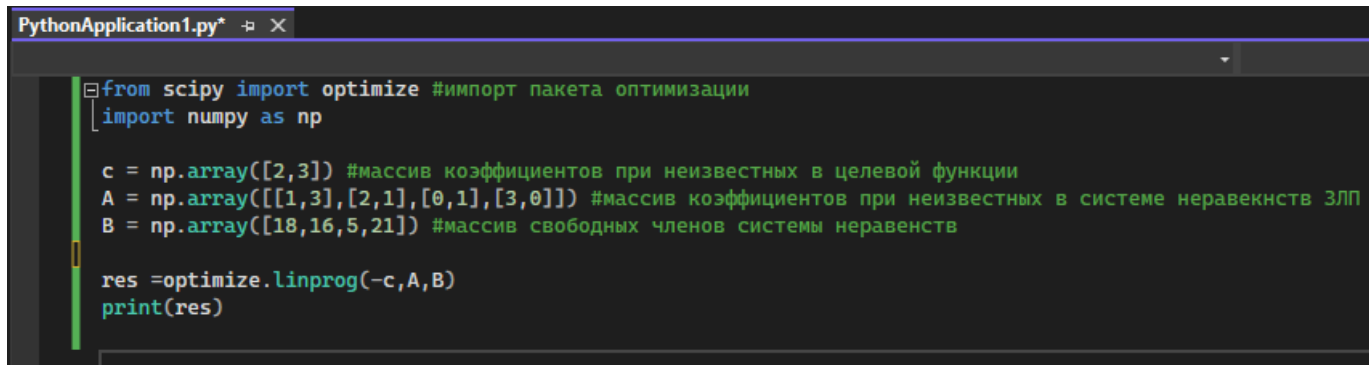
Рассмотрим ЗЛП со следующей экономико-математической моделью:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \text{ (I)} \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \text{ (II)} \\ x_2 \leq 5, \text{ (III)} \\ 3x_1 \leq 21, \text{ (IV)} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \text{ (V, VI)} \end{cases}$$

Листинг ее решения на Python приведен ниже.



```
PythonApplication1.py*
from scipy import optimize #импорт пакета оптимизации
import numpy as np

c = np.array([2,3]) #массив коэффициентов при неизвестных в целевой функции
A = np.array([[1,3],[2,1],[0,1],[3,0]]) #массив коэффициентов при неизвестных в системе неравенств ЗЛП
B = np.array([18,16,5,21]) #массив свободных членов системы неравенств

res = optimize.linprog(-c,A,B)
print(res)
```

<sup>8</sup> Источники примеров решения ЗЛП средствами SciPy:  
[https://russianblogs.com/article/83801544870/#4\\_14](https://russianblogs.com/article/83801544870/#4_14)  
<https://habr.com/ru/post/330648/>

<sup>9</sup> Все приведенные примеры выполнены в IDE Microsoft visual studio.

## Результат работы программы:

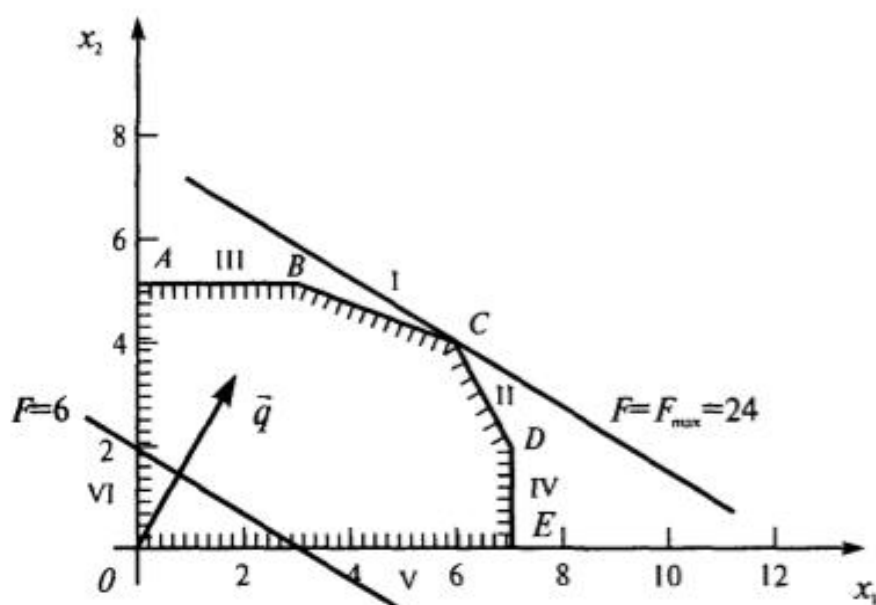
```

C:\Users\Art\AppData\Local\Programs\Python\Python310\python.exe
con: array([], dtype=float64)
crossover_nit: 0
eqclin: marginals: array([], dtype=float64)
residual: array([], dtype=float64)
fun: -24.0
ineqclin: marginals: array([-0.8, -0.6, -0. , -0. ])
residual: array([0., 0., 1., 3.])
lower: marginals: array([0., 0.])
residual: array([6., 4.])
message: 'Optimization terminated successfully. (HiGHS Status 7: Optimal)'
nit: 2
slack: array([0., 0., 1., 3.])
status: 0
success: True
upper: marginals: array([0., 0.])
residual: array([inf, inf])
x: array([6., 4.])
Press any key to continue . . .

```

Можно заметить, что полученный результат совпадает с решением из литературного источника<sup>10</sup>.

Далее обратимся к описанию процесса геометрического решения рассматриваемой задачи в том же учебном пособии:



**Рис. 4.3**

Вспользуемся средствами библиотеки Matplotlib для построения графиков прямых, соответствующих неравенствам системы ограничений задачи:

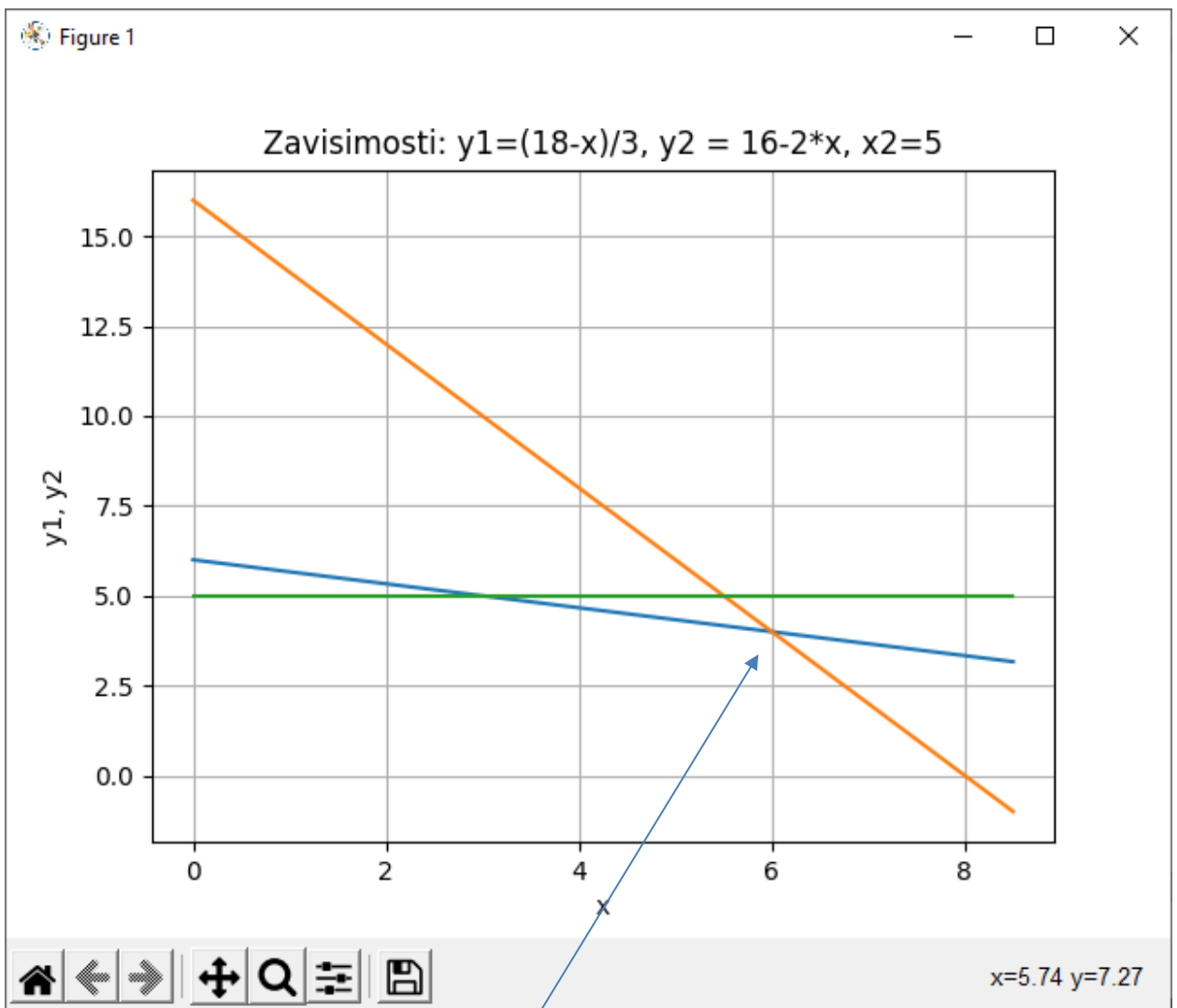
<sup>10</sup> **Исследование операций в экономике:** Учеб. пособие для И87 вузов /Н.Ш. Кремер, БА Путко, И.М. Тришин, М.Н.Фрид- ман; Под рея- проф. НЖ Кремера. - м: юнити, 2002. - 407 с. ISBN 5-85173-092-7. См. стр. 16-27, 55-62, 59-94.

```

import matplotlib.pyplot as plt #подключение библиотек
import numpy as np #подключение библиотек
x = np.linspace(0, 8.5, 50) #формирование массива x: 50 значений в диапазоне от 0 до 8.5
y1 = (18-x)/3
y2 = 16-2*x
y3=5-x*0 #таким образом пришлось схитрить, чтобы построить линию x2=5
# Построение графика
plt.title('Zavisimosti: y1=(18-x)/3, y2 = 16-2*x, x2=5') #подпись
plt.xlabel('x') #метка оси абсцисс
plt.ylabel('y1, y2') #метка оси ординат
plt.grid() #включение отображение сетки
plt.plot(x, y1, x, y2, x, y3) #построение графика

plt.show()

```



Можно заметить, что полученный результат совпадает с решением из литературного источника и с результатом применения средств библиотеки SciPy, представленными ранее.

### Приложение 3

Предположим, что для производства двух видов продукции А и В можно использовать только материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a_1$  кг материала первого сорта,  $a_2$  кг материала второго сорта и  $a_3$  кг материала третьего сорта. На изготовление единицы изделия вида В расходуется  $b_1$  кг материала первого сорта,  $b_2$  кг материала второго сорта,  $b_3$  кг материала третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c_1$  кг, второго сорта –  $c_2$  кг, третьего сорта –  $c_3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль  $\alpha$  тысяч рублей, а от продукции вида В прибыль составляет  $\beta$  тысяч рублей.

Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

1.

$$a_1=4, a_2=5, a_3=3; b_1=3, b_2=2, b_3=6;$$

$$c_1=60, c_2=57, c_3=63; \alpha=1, \beta=1.$$

2.

$$a_1=2, a_2=2, a_3=5; b_1=4, b_2=6, b_3=3;$$

$$c_1=30, c_2=36, c_3=42; \alpha=7, \beta=9.$$

3.

$$a_1=2, a_2=3, a_3=4; b_1=3, b_2=5, b_3=2;$$

$$c_1=35, c_2=49, c_3=42; \alpha=2, \beta=2.$$

4.

$$a_1=5, a_2=4, a_3=2; b_1=2, b_2=3, b_3=4;$$

$$c_1=60, c_2=50, c_3=40; \alpha=6, \beta=7.$$

5.

$$a_1=2, a_2=4, a_3=3; b_1=3, b_2=2, b_3=5;$$



$$c_1=35, c_2=42, c_3=49; \alpha=3, \beta=3.$$

6.

$$a_1=2, a_2=3, a_3=4; b_1=5, b_2=2, b_3=3;$$

$$c_1=45, c_2=27, c_3=38; \alpha=7, \beta=5.$$

7.

$$a_1=2, a_2=4, a_3=0; b_1=3, b_2=2, b_3=2;$$

$$c_1=15, c_2=18, c_3=8; \alpha=10, \beta=8.$$

8.

$$a_1=2, a_2=4, a_3=4; b_1=3, b_2=2, b_3=5;$$

$$c_1=35, c_2=38, c_3=59; \alpha=8, \beta=7.$$

#### Варианты 9-16.

Продукция может производиться двумя технологическими способами  $T_1$  и  $T_2$ . На производство продукции затрачиваются ресурсы трех видов  $R_1; R_2; R_3$ , запасы которых равны:  $c_1, c_2$  и  $c_3$ . Расход ресурсов на производство всей продукции по первому технологическому способу составляет  $a_1; a_2; a_3$ , а по второму -  $b_1; b_2; b_3$ . Выход продукции по способу  $T_1$  равняется  $\alpha$  единицам, по  $T_2$  -  $\beta$ . Определить с какой интенсивностью нужно применять каждый тех. способ, чтобы при этих запасах иметь максимум продукции.

9.

$$a_1=3, a_2=2, a_3=4; b_1=4, b_2=3, b_3=1;$$

$$c_1=40, c_2=28, c_3=26; \alpha=3, \beta=2.$$

10.

$$a_1=5, a_2=4, a_3=3; b_1=2, b_2=2, b_3=3;$$

$$c_1=55, c_2=40, c_3=42; \alpha=7, \beta=5.$$

11.

$$a_1=4, a_2=3, a_3=2; b_1=2, b_2=4, b_3=3;$$

$$c_1=40, c_2=36, c_3=25; \alpha=5, \beta=7.$$

12.

$$a_1=4, a_2=2, a_3=3; b_1=3, b_2=2, b_3=2;$$

$$c_1=55, c_2=30, c_3=37; \alpha=5, \beta=4.$$

13.

$$a_1=6, a_2=3, a_3=4; b_1=2, b_2=5, b_3=2;$$

$$c_1=40, c_2=37, c_3=26; \alpha=1, \beta=1.$$

14.

$$a_1=4, a_2=2, a_3=3; b_1=3, b_2=5, b_3=2;$$

$$c_1=45, c_2=45, c_3=29; \alpha=5, \beta=9.$$

15.

$$a_1=3, a_2=4, a_3=2; b_1=2, b_2=5, b_3=6;$$

$$c_1=30, c_2=48, c_3=38; \alpha=6, \beta=11.$$

16.

$$a_1=3, a_2=5, a_3=2; b_1=2, b_2=3, b_3=4;$$

$$c_1=35, c_2=49, c_3=42; \alpha=1, \beta=1.$$

### Варианты 17-22

Предприятие имеет три производственных фактора в количестве  $c_1, c_2$  и  $c_3$  тыс. единиц и может организовать производство двумя различными способами. Расход производственных факторов по первому способу производства составляет  $a_1; a_2; a_3$  тыс. единиц, по второму -  $b_1; b_2; b_3$  тыс. По первому способу предприятие выпускает в месяц  $\alpha$  тыс. изделий, в по второму -

$\beta$  тыс. изделий. Сколько времени предприятие должно работать каждым способом, чтобы получить максимум продукции?

17.

$$a_1=1, a_2=1, a_3=3; b_1=3, b_2=1, b_3=2;$$

$$c_1=6, c_2=5, c_3=2; \alpha=3, \beta=2.$$

18.

$$a_1=3, a_2=5, a_3=2; b_1=4, b_2=2, b_3=3;$$

$$c_1=45, c_2=45, c_3=29; \alpha=7, \beta=5.$$

19.

$$a_1=2, a_2=3, a_3=4; b_1=3, b_2=5, b_3=4;$$

$$c_1=30, c_2=44, c_3=48; \alpha=7, \beta=9.$$

20.

$$a_1=3, a_2=2, a_3=4; b_1=4, b_2=3, b_3=1;$$

$$c_1=36, c_2=22, c_3=24; \alpha=3, \beta=2.$$