

Khôlles de Mathématiques - Semaine 20

Hugo Vangilluwen, George Ober, Kylian Boyet

10 Mars 2024

1 Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[X]^\times = \{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\} \quad (1)$$

Démonstration. Soit P un élément inversible de $\mathbb{K}[X]$. Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P \cdot Q = Q \cdot P = 1_{\mathbb{K}[X]}$. En prenant les degrés des polynômes, $\deg P + \deg Q = 0$.

Or $\deg : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{N}$ donc $\deg P = \deg Q = 0$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : P = \lambda$.

Ainsi $\mathbb{K}[X]^\times \subset \{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Considérons $P = \lambda$. Posons $Q = \lambda^{-1}$ (car \mathbb{K} est un corps). $P \cdot Q = \lambda \lambda^{-1} = 1$ et $Q \cdot P = \lambda^{-1} \lambda = 1$ donc P est inversible. Ainsi $\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\} \subset \mathbb{K}[X]^\times$. \square

2 Théorème d'interpolation de lagrange

Le problème d'interpolation de Lagrange est, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $a \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $b \in \mathbb{K}^{n+1}$, l'ensemble des polynômes passant par tous les points de coordonnée (a_i, b_i) . C'est-à-dire l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(a_i) = b_i \quad (2)$$

Il existe une unique solution P de degré $\leq n$ au problème d'interpolation de lagrange, et elle s'exprime de la manière suivante en posant

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \quad (3)$$

$$P = \sum_{i=0}^n b_i L_i \quad (4)$$

Démonstration. — Unicité

Supposons qu'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ solutions du problème d'interpolation.

Alors $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{P}(a_i) = \tilde{Q}(a_i) = b_i$

Posons $H = P - Q$, alors, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{H}(a_i) = \tilde{P}(a_i) - \tilde{Q}(a_i) = 0$.

De plus, $\deg H = \deg(P - Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\}$

Donc H est un polynôme de degré $\leq n$ avec $|\llbracket 0, n \rrbracket| = n + 1$ racines.

Donc H est le polynôme nul.

— Existence Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fq Notons L_i une solution de degré $\leq n$ au problème Pb_i suivant :

$$(Pb_i) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}(a_0) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}(a_{i-1}) = 0 \\ \tilde{P}(a_i) = 1 \\ \tilde{P}(a_n) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}(a_n) = 0 \end{array} \right.$$

On remarque que $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ sont n racines deux à deux distinctes de L_i . Or L_i est de degré $\leq n$ et n'est pas le polynôme nul (car $\tilde{L}_i(a_i) = 0$) donc $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ sont les *seules* racines de L_i , toutes simples.

Dès lors,

$$\exists c \in \mathbb{K}^* : L_i = c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$$

Pour trouver le c , remarquons que

$$\begin{aligned} \tilde{L}_i(a_i) = 1 &\iff c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j) = 1 \\ &\iff c = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{1}{a_i - a_j} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, s'il existe une solution au problème Pb_i c'est nécessairement

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$$

Réciproquement, cette solution est correcte puisque

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \neq i, \tilde{L}_i(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{\overbrace{a_k - a_j}^{=0}}{a_i - a_j} \right) = 0$$

Et

$$\tilde{L}_i(a_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} \right) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n 1 = 1$$

Posons donc $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$.

Alors, par construction,

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{P}(a_k) = \sum_{i=0}^n \left(b_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} \right) \right) = \sum_{i=0}^n (b_i \delta_{ki}) = b_k \delta_{kk} = b_k$$

Nous avons donc construit une solution unique au problème d'interpolation de Lagrange \square

3 Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ (caractéristique nulle)

Soient P à coeff dans \mathbb{K} et $a \in \mathbb{K}$. On a :

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\widetilde{P^{(n)}}(a)}{n!} (X - a)^n$$

Démonstration. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{''}\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X - a)^k\text{''}$$

Initialisation : pour $n = 0$, soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.

$\exists p_0 \in \mathbb{K} : P = p_0 X^0$ et $\sum_{k=0}^0 \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X - a)^k = \frac{\widetilde{P^{(0)}}(a)}{1} X^0 = p_0 X^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. On a donc $\deg P' = \deg P - 1 \leq n$ donc $\mathcal{P}(n)$ s'applique à P' :

$$P' = \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P'(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!} \frac{(X-a)^{k+1}}{k+1} \right)',$$

donc :

$$\left(P - \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!} \frac{(X-a)^{k+1}}{k+1} \right)' = 0 \implies \exists \mu \in \mathbb{K} : P - \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!} \frac{(X-a)^{k+1}}{k+1} = \mu,$$

ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{(k+1)!} (X-a)^{k+1} + \mu = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X-a)^k + \mu,$$

donc en a par φ_a :

$$\tilde{P}(a) = \mu \implies P = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X-a)^k + \tilde{P}(a) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X-a)^k,$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai. Ainsi par théorème de récurrence sur \mathbb{N} , $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. \square

4 Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$.

$$a \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité au moins } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$a \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité d'exactly } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^m(a) \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Démonstration. • Supposons que a est une racine de P de multiplicité au moins m .

Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-a)^m Q$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} ((X-a)^m)^{(k-i)} Q^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-(k-i))!} (X-a)^{m-(k-i)} Q^{(i)} \\ &= \underbrace{(X-a)^{(m-k)}}_{\substack{\text{c'est un bien un polynôme} \\ \text{non constant car } k < m}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-(k-i))!} (X-a)^i Q^{(i)} \end{aligned}$$

Donc $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$.

- Supposons que $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$.
Appliquons la formule de Taylor a.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \underbrace{\frac{P^{(n)}(a)}{n!}}_{=0} (X-a)^n + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n \\ &= (X-a)^m \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \underbrace{(X-a)^{n-m}}_{\in \mathbb{K}[X] \text{ car } n-m \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Donc $(X-a)^m | P$. Donc a est racine de P de multiplicité au moins m .

- Supposons que a est une racine de P de multiplicité exactement m .
Nous pouvons appliquer le point précédent car la multiplicité est supérieur à m : $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$.
Par l'absurde, si $P^{(m)}(a) = 0$ alors le point précédent donne que a a une multiplicité supérieur à $m+1$ donc $m \geq m+1$ ce qui est une contradiction.
Par conséquent, $P^{(m)}(a) \neq 0$.
- Supposons $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
En reprenant le calcul précédent, pour $k = m$, en sachant que $(X-a)^{(m-k)} = X^0$,

$$P^{(m)} = \binom{m}{0} \frac{m!}{0!} (X-a)^0 P + \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \frac{m!}{i!} (X-a)^i Q^{(i)}$$

D'où $P^{(m)}(a) = m! Q(a)$ donc $Q(a) = \frac{P^{(m)}(a)}{m!}$. Donc $Q(a) \neq 0$.

Par l'absurde, supposons que $(X-a)^{m+1} | P$. Alors $\exists R \in \mathbb{K}[X] : P = (X-a)^{m+1} R$. Donc $(X-a)^{m+1} R = (X-a)^m Q$ d'où $Q = (X-a)R$. Nous obtenons $Q(a) = 0$ ce qui est une contradiction avec $Q(a) \neq 0$.

Donc a est une racine de P de multiplicité strictement inférieur à $m+1$ et, d'après le point précédent, supérieur à m . Donc a est une racine de P de multiplicité exactement m . □

5 Identification de $\mathbb{K}[X]$ à $\mathbb{K}[x]$, par l'injectivité de Φ

Démonstration. Montrons que l'application Φ définie comme suit est injective :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array} \right.$$

Soit donc $P \in \ker \Phi$, on a :

$$\Phi(P) = \tilde{0} \implies \tilde{P} = \tilde{0} \text{ sur } \mathbb{K} \implies P = 0_{\mathbb{K}[X]},$$

donc $\ker \Phi \subset \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

Réciproquement, on calcule l'image du polynôme nul par Φ :

$$\Phi(0_{\mathbb{K}[X]}) = \tilde{0},$$

donc $0_{\mathbb{K}[X]} \in \ker \Phi$, ainsi on a l'égalité ensembliste et donc cela suffit. □

6 Pour $P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, exprimer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires

Les fonctions symétriques élémentaires $(\sigma_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ pour une famille $(x_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont définies par

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{i_j} \quad (7)$$

Démonstration. Sous forme développée, $P = X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3 = X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3$. Comme x_1, x_2, x_3 sont racines de P , nous avons les trois égalités suivantes :

$$0 = P(x_1) = x_1^3 - \sigma_1x_1^2 + \sigma_2x_1 - \sigma_3$$

$$0 = P(x_2) = x_2^3 - \sigma_1x_2^2 + \sigma_2x_2 - \sigma_3$$

$$0 = P(x_3) = x_3^3 - \sigma_1x_3^2 + \sigma_2x_3 - \sigma_3$$

En sommant ces trois équations,

$$0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \sigma_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sigma_2(x_1 + x_2 + x_3) - 3\sigma_3$$

Cherchons la somme des carrés.

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ \implies x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

□

7 Expression de S_2 , S_{-1} et S_{-2} à l'aide des fonctions élémentaires symétriques.

Les sommes de Newton $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}^*}$ pour une famille $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont définies par (sous réserve d'existence pour $k < 0$) :

$$S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \quad (8)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{S_2} + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}_{\sigma_2} \\ \implies S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

$$S_{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j}{\prod_{i=1}^n x_i} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$$

$$\begin{aligned} S_{-2} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i} \frac{1}{x_j} \\ &= \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n^2} - 2 \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^n x_k}{\sigma_n} \\ &= \frac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-2}\sigma_n}{\sigma_n^2} \end{aligned}$$

□