Khôlles : Maths

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

17 novembre 2024

1 Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, f et g les solutions, définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g | (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Démonstration. La solution s'exprime simplement comme combinaison linéaire de f et g, plus précisément, la combinaison linéaire en α et β. En effet, soient de tels scalaires, et soient f et g de telles solutions, on a :

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'' + a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' + b(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = 0, \text{ par définition des espaces vectoriels.}$$

Et de même, $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(3) = \alpha \cdot f'(3) + \beta \cdot g'(3) = \alpha$, et $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)''(3) = \alpha \cdot f''(3) + \beta \cdot g''(3) = \beta$. Ce qui suffit par unicité des solutions (de la donc) d'un problème de Cauchy dans le cadre du théorème du cours.
Pour ce qui est du plan vectoriel des solutions, noté Ω, notons aussi Φ l'ensemble proposé. L'inclusion $\Phi \subset \Omega$ est triviale par propriété de linéarité des espaces vectoriels. Finalement, pour $\Omega \subset \Phi$, soit $\omega \in \Omega$, forcément, ω vérifie l'EDL_2, mais aussi des conditions de Cauchy bien que celles-ci soient non-spécifiées, ainsi posons $\omega'(3) = \delta$ et $\omega''(3) = \theta$, donc en particulier, $\omega = \delta \cdot f + \theta \cdot g$, d'où l'égalité par double inclusion. ☐