# Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen (relecture)

10 novembre 2023

## 1 Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt}dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$. En Déduire qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.

*Démonstration.* Soit $m \in \mathbb{Z}$ fq. Calculons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}dt$$

Si $m \neq 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}dt &= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{mt}}{im}\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{im}-\frac{1}{im}\Big) = 0\end{aligned}$$

Si $m = 0$ :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = \begin{cases}1 \text{ si } m = 0\\ 0 \text{ si } m \neq 0\end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq

Soient $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ les coefficients de $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, et $s \in \mathbb{Z}$, et $r \in \mathbb{R}_+^*$ fq. tels que P soit nulle lorsqu'elle est évaluée sur $\mathscr{C}(0, r)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it})e^{-imt}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{k=0}^n a_k(re^{it})^k\Big)e^{-imt}dt \\ &= \sum_{k=0}^n a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{e^{it(k-s)}}{2\pi}dt}_{I_k}\end{aligned}$$

On remarque que :

— Si $s \notin [[0, n]], \{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = \emptyset$, Donc

$$\sum_{k\in[[0,n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k\in[[0,n]]\\k=s}} a_k r^k = 0$$

— Si $s \in [[0, n]], \{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = s$, Donc

$$\sum_{k\in[[0,n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k\in[[0,n]]\\k=s}} a_k s^k = a_s r^s$$

Or, puisque $P$ s'annule sur le cercle de rayon $r$ et de centre 0, $\mathscr{C}(0, r)$, ces sommes sont aussi nulles. On en déduit, en particularisant pour un $s \in [[0, n]]$ fixé quelconque que :

$$\sum_{k\in[[0,n]]} a_k s^k I_k = a_s r^s = 0 \implies a_s = 0$$

Donc
$$(\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall \theta \in \mathbb{R}, P(re^{i\theta}) = 0) \implies \forall s \in [[0, n]]$$

Pour la preuve réciproque, soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Soient $(a_0, ..., a_n) \in \{0\}^{n+1}$ les coefficients nuls de la fonction polynomiale $P \in \mathbb{C}[z]$ définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En remarquant que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$, puisque n'importe quel cercle centré en 0 est un sous ensemble de $\mathbb{C}$, $\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall z \in \mathscr{C}(0, r), P(z) = 0$. □

## 2 Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe

*Démonstration.* Définissons les fonctions $f_r$ et $f_i$ comme les parties réelles et imaginaires de $f$.

Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned} f_r &= \mathrm{Re}(f), f_i = \mathrm{Im}(f) & g_r &= \mathrm{Re}(f), g_i = \mathrm{Im}(g) \\ \alpha_r &= \mathrm{Re}(\alpha), \alpha_i = \mathrm{Im}(f) & \beta_r &= \mathrm{Re}(f), \beta_i = \mathrm{Im}(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\alpha f + \beta g) &= \mathrm{Re}((\alpha_r + i\alpha_i)(f_r + if_i) + (\beta_r + i\beta_i)(g_r + ig_i)) \\ &= \underbrace{\alpha_r f_r + \beta_r g_r - \alpha_i f_i - \beta_i g_i}_{\text{Combinaison linéaire de } \underbrace{(f_r, f_i, g_r, g_i) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^4}_{car (f,g) \in D^1(I,\mathbb{R})^2}} \end{aligned}$$

Donc, selon le théorème de stabilité par combinaison linéaire des fonctions à valeurs réelles, $\mathrm{Re}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $\big(\mathrm{Re}(\alpha f + \beta g)\big)' = \alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i'$

On montre de même que $\mathrm{Im}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $\big(\alpha f + \beta g\big)' = \alpha_r f_i' + \alpha f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r'$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \big(\alpha f + \beta g\big)' &= (\alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i') + i(\alpha_r f_i' + \alpha f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r') \\ &= \alpha_r(f_r' + if_i') + \beta_r(g_r' + ig_i') + \alpha_i \underbrace{(-f_i' + if_r')}_{i(f_r' + if_i')} + \beta_i \underbrace{(-g_i' + ig_r')}_{i(g_r' + ig_i')} \\ &= \alpha f' + \beta g' \end{aligned}$$

□

## 3 Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes

*Démonstration.* Soient $f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C})$ et $h \in \mathcal{D}^1(I, J)$ (I et J sont deux intervalles réels) fixés quelconques. Notons $f_r$ et $f_i$ respectivement la partie réelle et imaginaire de $f$.

$$\left.\begin{array}{l} h \in \mathcal{D}^1(I, J) \\ f_r \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R}), \text{ car } f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C}) \end{array}\right\} \implies f_r \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$$

On montre de même que $f_i \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$.

De plus,

$$\begin{aligned} (f \circ h)' &= (f_r \circ h)' + i(f_i \circ h)' \\ &= (f_r' \circ h) \times h' + i((f_i' \circ h) \times h') \\ &= (f_r' \circ h + if_i' \circ h) \times h' \\ &= (f' \circ h) \times h' \end{aligned}$$

□

## 4 Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle

*Démonstration.* Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ où $I$ est un intervalle réel ; Posons $f_r = \mathrm{Re}(f)$ et $f_i = \mathrm{Im}(f)$.

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, f'(t) = 0 &\iff \forall t \in I, f_r'(t) + i f_i'(t) = 0 \\
&\iff \begin{cases} \forall t \in I, f_r'(t) = 0 \\ \forall t \in I, f_i'(t) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists \lambda_r \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_r(t) = \lambda_r \\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_i(t) = \lambda_i \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in I, f(t) = \lambda
\end{aligned}$$

□