

# Programme de Khôlle Semaine 7

Kylian Boyet, George Ober

10 Novembre 2023

Aucune démo de ce document n'apparaît au programme de Khôlle T\_T

## 1 Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$ . En Dédire qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.

*Démonstration.* Soit  $m \in \mathbb{Z}$  fq. Calculons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt$$

Si  $m \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{mt}}{im} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{im} - \frac{1}{im} \right) = 0 \end{aligned}$$

Si  $m = 0$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Soient  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  les coefficients de  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , et  $s \in \mathbb{Z}$ , et  $r \in \mathbb{R}_+^*$  fq. tels que P soit nulle lorsqu'elle est évaluée sur  $\mathcal{C}(0, r)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^n a_k (re^{it})^k \right) e^{-imt} dt \\ &= \sum_{k=0}^n a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it(k-s)}}{2\pi} dt}_{I_k} \end{aligned}$$

On remarque que :

— Si  $s \notin [[0, n]]$ ,  $\{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = \emptyset$ , Donc

$$\sum_{\substack{k \in [[0, n]] \\ k = s}} a_k r^k I_k = 0$$

— Si  $s \in [[0, n]]$ ,  $\{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = s$ , Donc

$$\sum_{\substack{k \in [[0, n]] \\ k = s}} a_k s^k I_k = a_s r^s$$

Supposons maintenant que

□

## 2 Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe

*Démonstration.* Définissons les fonctions  $f_r$  etc. comme les parties réelles et imaginaires de  $f$   
Soient  $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^2$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  fixés quelconques.

$$\begin{aligned} f_r &= \operatorname{Re}(f), f_i = \operatorname{Im}(f) & g_r &= \operatorname{Re}(g), g_i = \operatorname{Im}(g) \\ \alpha_r &= \operatorname{Re}(\alpha), \alpha_i = \operatorname{Im}(\alpha) & \beta_r &= \operatorname{Re}(\beta), \beta_i = \operatorname{Im}(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) &= \operatorname{Re}((\alpha_r + i\alpha_i)(f_r + if_i) + (\beta_r + i\beta_i)(g_r + ig_i)) \\ &= \underbrace{\alpha_r f_r + \beta_r g_r - \alpha_i f_i - \beta_i g_i}_{\text{Combinaison linéaire de } \underbrace{(f_r, f_i, g_r, g_i) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^4}_{\operatorname{car}(f, g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^2}} \end{aligned}$$

Donc, selon le théorème de stabilité par combinaison linéaire des fonctions à valeurs réelles,  $\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$   
et  $(\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g))' = \alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i'$

On montre de même que  $\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  et  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha_r f_i' + \alpha_r' f_r + \beta_r g_i' + \beta_r' g_r$   
Ainsi,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)' &= (\alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i') + i(\alpha_r f_i' + \alpha_r' f_r + \beta_r g_i' + \beta_r' g_r) \\ &= \alpha_r(f_r' + if_i') + \beta_r(g_r' + ig_i') + \underbrace{\alpha_i(-f_i' + if_r')}_{i(f_r' + if_i')} + \underbrace{\beta_i(-g_i' + ig_r')}_{i(g_r' + ig_i')} \\ &= \alpha f' + \beta g' \end{aligned}$$

□

## 3 Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes

*Démonstration.* Soient  $f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C})$  et  $h \in \mathcal{D}^1(I, J)$  ( $I$  et  $J$  sont deux intervalles réels) fixés quelconques. Notons  $f_r$  et  $f_i$  respectivement la partie réelle et imaginaire de  $f$ .

$$\left. \begin{aligned} h &\in \mathcal{D}^1(I, J) \\ f_r &\in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R}), \text{ car } f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C}) \end{aligned} \right\} \implies f_r \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$$

On montre de même que  $f_i \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  donc  $f \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ .  
De plus,

$$\begin{aligned} (f \circ h)' &= (f_r \circ h)' + i(f_i \circ h)' \\ &= (f_r' \circ h) \times h' + i((f_i' \circ h) \times h') \\ &= (f_r' \circ h + if_i' \circ h) \times h' = (f' \circ h) \times h' \end{aligned}$$

□

## 4 Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$  où  $I$  est un intervalle réel ; Posons  $f_r = \operatorname{Re}(f)$  et  $f_i = \operatorname{Im}(f)$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in I, f'(t) = 0 &\iff \forall t \in I, f_r'(t) + if_i'(t) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I, f_r'(t) = 0 \\ \forall t \in I, f_i'(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \lambda_r \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_r(t) = \lambda_r \\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_i(t) = \lambda_i \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in I, f(t) = \lambda \end{aligned}$$

□

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (1)$$