Khôlles de Mathématiques - Semaine 30

Hugo Vangilluwen, George Ober

22 juin 2024

1 Inégalité de Cauchy-Schwartz dans un espace préhilbertien réel, cas d'égalité

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \tag{1}$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\langle \cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. Soient $(x, y) \in E^2$

1. ⋆ Si $y = 0$, l'inégalité est une égalité et est évidente
   ⋆ Sinon, posons
   $$P : \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \langle x + t.y|x + t.y\rangle = t^2\|y\|^2 + 2t\,\langle x|y\rangle + \|x\|^2 \end{array} \right.$$
   Puisque $\|y\|^2 \neq 0$, P est un polynôme de degré 2 à coefficientts réels et positif d'après le caractère positif du produit scalaire (on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geqslant 0$) Le discriminant de cette fonction polynômiale est $\Delta = 4\,\langle x|y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$, qui est obligatoirement négatif ou nul puisque P admet au mieux une racine double. Donc $\langle x|y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$ donc en prenant la racine carrée $|\,\langle x|y\rangle\,| \leqslant \|x\|\|y\|$.
2. ⋆ Supposons que (x, y) est liée, sans perte de généralité, supposons $y = \lambda.x$ alors
   $$|\langle x|\lambda.x\rangle| = |\lambda|\,\langle x|x\rangle = |\lambda|\|x\|^2 = \|x\|\|\lambda.x\|$$
   Donc l'inégalité est une égalité.
   ⋆ Réciproquement, supposons que $|\langle x|y\rangle| = \|x\|\|y\|$
   — Si $y = 0$ alors (x, y) est liée
   — Sinon, $\Delta = 4(\langle x|y\rangle^2 - \|x\|\|y\|) = 0$ P est un polynôme de degré 2 de discriminant nul : il admet une racine double λ Ainsi
   $$P(\lambda) = 0 \implies \langle x + \lambda.y|x + \lambda.y\rangle = 0$$
   Donc $x + \lambda.y = 0_E$ d'après le caractère défini du produit scalaire.

□

2 Isomorphisme entre un espace euclidien et l'espace de ses formes linéaires (Théorème de représentation de Riesz)

L'application

$$\chi \left| \begin{array}{ll} E & \to E^* \\ x & \mapsto \begin{pmatrix} E & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto \langle x|y\rangle \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{2}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. χ est appelé l'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel euclidien et son espace dual.

Démonstration. ⋆ χ est bien définie car, $\forall x \in E$, par linéarité du produit scalaire en sa seconde variable, $\chi(x) : \left| \begin{array}{ll} E & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto \langle x|y\rangle \end{array} \right.$ est une forme linaire sur E.

⋆ Soient $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés quelconques

$$\begin{aligned} \forall y \in E, \chi(x + \lambda.x')(y) &= \langle x + \lambda.x'|y\rangle \\ &= \langle x|y\rangle + \lambda \times \langle x'|y\rangle \\ &= \chi(x)(y) + \lambda \times \chi(x')(y) \\ &= (\chi(x) + \lambda.\chi(x'))(y) \end{aligned}$$

Donc $\chi(x + \lambda x') = \chi(x) + \lambda.\chi(x')$, donc χ est linéaire.

⋆ Soit $x \in \ker \chi$ fixé quelconque. Alors $\chi(x) = 0_{E^*}$

$$\forall y \in E, \langle x|y\rangle = 0$$

Donc $x \in E^{\perp} = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$ Donc χ est injective, or E et E^* sont de même dimension, donc χ est bijective. Donc χ est un isomorphisme.

□

3 Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel, $F^{\perp}$ est son supplémentaire orthogonal

Démonstration. Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, et F un sous espace vectoriel de dimension finie. Alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires orthogonaux, i.e.

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} \tag{3}$$

En notant $r = \dim F$, fixons une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_r)$ de F, possible car F est un espace euclidien (dimension finie et muni du produit scalaire induit par E).

◊ Analyse

Soit $x \in E$ fixé quelconque, supposons que $\exists(x_{/\!/}, x_{\perp}) \in F \times F^{\perp} = x_{/\!/} + x_{\perp}$ D'abord

$$x_{/\!/} \in F \implies \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r : x_{/\!/} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.e_i$$

Soit $j \in [\![1, r]\!]$ fixé quelconque

$$\begin{aligned} \langle x|e_j\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.e_i + x_{\perp} \middle| e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \times \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{\delta_{ij}} + \overbrace{\langle \underbrace{x_{\perp}}_{\in F^{\perp}} | \underbrace{e_j}_{\in F} \rangle}^{=0} \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{/\!/} & = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.e_i = \sum_{i=1}^{r} \langle x|e_i\rangle .e_i \\ x_{\perp} & = x - x_{/\!/} \end{array} \right.$$

◊ Synthèse

Posons donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{/\!/} & = \sum_{i=1}^{r} \langle x|e_i\rangle .e_i \\ x_{\perp} & = x - x_{/\!/} \end{array} \right.$$

⋆ $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de F donc $x_{/\!/} \in F$

⋆ $x_{/\!/} + x_{\perp} = x_{/\!/} + (x - x_{/\!/}) = x$

* Soit $j \in [\![1, r]\!]$ fixé quelconque. Calculons $\langle x_\perp | e_j \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle x_\perp | e_j \rangle &= \langle x | e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=0}^{r} \langle x | e_i \rangle .e_i \middle| e_j \right\rangle \\
&= \langle x | e_j \rangle - \sum_{i=0}^{r} \langle x | e_i \rangle \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{\delta_{ij}} \\
&= \langle x | e_j \rangle - \langle x | e_j \rangle = 0
\end{aligned}$$

Donc $x_\perp \in \{e_1, \dots, e_r\}^\perp$ Donc $x_\perp \in \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}^\perp = F^\perp$

Ainsi, F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux.

De plus

$$\forall x \in E, x = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \langle x | e_i \rangle .e_i}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^{r} \langle x | e_i \rangle .e_i}_{\in F^\perp}$$

Donc

$$p_F^\perp(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x | e_i \rangle .e_i$$

□

4 Orthonormalisation de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

On utilisera le produit scalaire

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(u)Q(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration. Partons de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

* $P_1 = X^0$ est un vecteur unitaire avec ce produit scalaire
* Calcul du second vecteur

$$P_2' = X - \langle X | 1 \rangle .1 = X - \left(\int_0^1 u\,\mathrm{d}u \right) .1 = X - \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \frac{P_2'}{\|P_2'\|} = \frac{P_2'}{\sqrt{\langle P_2' | P_2' \rangle}} = \frac{P_2'}{\sqrt{\int_0^1 \left(u - \frac{1}{2}\right)^2\,\mathrm{d}u}} = \frac{P_2'}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \sqrt{12} P_2'$$

Ce qui donne

$$P_2' = 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$$

* Enfin,

$$\begin{aligned}
P_3' &= X^2 - \left\langle X^2 | 2\sqrt{3}X - \sqrt{3} \right\rangle .(2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) - \left\langle X^2 | 1 \right\rangle .1 \\
&= X^2 - \left(\int_0^1 2\sqrt{3}u^3 - \sqrt{3}u^2\,\mathrm{d}u \right) .(2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) - \left(\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u \right) .1 \\
&= X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}(2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) - \frac{1}{3} \\
&= X^2 - X + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$P_3 = \frac{P_3'}{\|P_3'\|} = \frac{P_3'}{\sqrt{\langle P_3 | P_3 \rangle}} = \frac{P_3'}{\sqrt{\int_0^1 \left(u^2 - u + \frac{1}{6}\right)^2\,\mathrm{d}u}} = \frac{P_3'}{\sqrt{\frac{1}{180}}} = 6\sqrt{5}P_3' = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right)$$

Donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de ce produit scalaire est

$$\left(1,\ 2\sqrt{3}X - \sqrt{3},\ 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)\right)$$

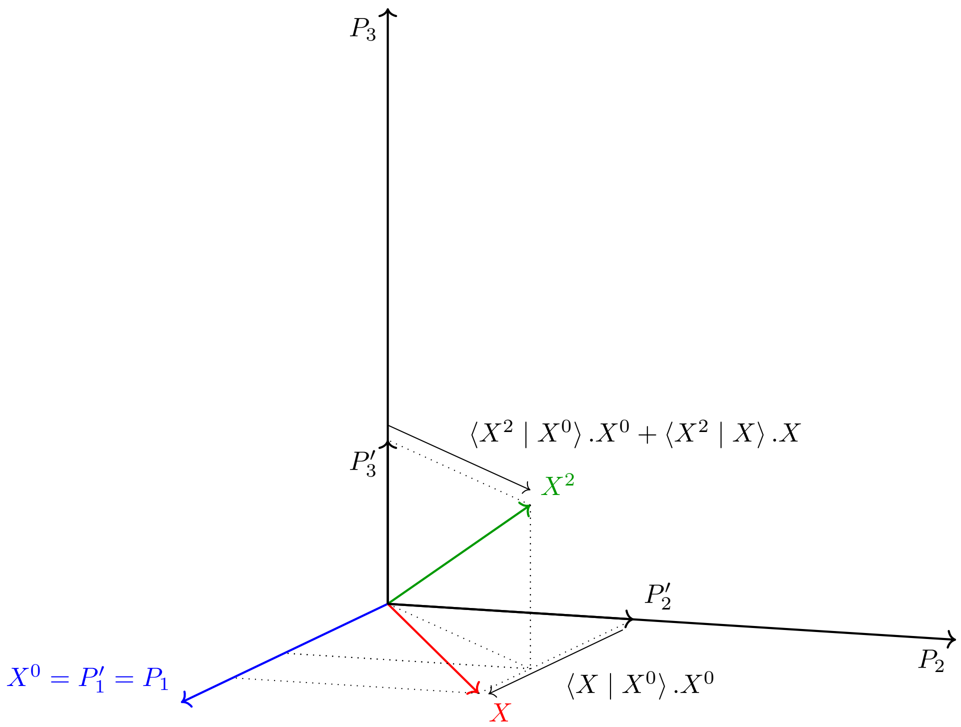

FIGURE 1 – Orthonormalisation de $(1, X, X^2)$ pour ce produit. Ces vecteurs ne sont ni orthogonaux, ni unitaires pour ce produit scalaire, mais engendrent bien $\mathbb{R}_2[X]$. En soustrayant leurs composantes respectives, on crée une base orthogonale que l'on peut ensuite normer.

□

5 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien Réel. Soient F un sous espace vectoriel de dimension finie de E, et $x \in E$.

L'ensemble $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ admet une borne inférieure appelée distance de x à F et notée $d(x, F)$, qui est un plus petit élément, atteinte uniquement pour pour $z = p_F^\perp(x)$

Démonstration. $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide car elle contient $\|x\|$ pour $z \leftarrow 0_F$ d'éléments positifs ou nuls. Elle admet donc une borne inférieure

E est un espace euclidien, donc $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ donc x se décompose selon ces supplémentaires orthogonaux

$$x = \underbrace{p_F^\perp(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F^\perp(x)}_{\in F^\perp}$$

si bien que, pour tout $z \in F$

$$\begin{aligned}
\|x - z\|^2 &= \|p_F^\perp(x) - z + x - p_F^\perp(x)\|^2 \\
&= \|p_F^\perp(x) - z\|^2 + \|x - p_F^\perp(x)\|^2 \text{ d'après le théorème de Pythagore} \\
&\geqslant \|x - p_F^\perp(x)\|^2
\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée,

$$\forall z \in F, \|x - z\| \geqslant \|x - p_F^{\perp}(x)\|$$

D'où $\|x - p_F^{\perp}(x)\|$ minore $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ et donc sa borne inférieure.

Or, en remonant le calcul précédent, il y a égalité pour $z = p_F^{\perp}(x)$ si bien que la borne inférieure est un plus petit élément, et vaut $d(x, F) = \|x - p_F^{\perp}(x)\|$

De plus, si $z' \in F$ atteint ce plus petit élément on a

$$\begin{aligned}
\|x - z'\|^2 &= \|p_F^{\perp}(x) - z' + x - p_F^{\perp}(x)\|^2 \\
\|x - p_F^{\perp}(x)\|^2 &= \|p_F^{\perp}(x) - z'\|^2 + \|x - p_F^{\perp}(x)\|^2 \\
0 &= \|p_F^{\perp}(x) - z'\|^2
\end{aligned}$$

Si bien que $p_F^{\perp}(x) - z' = 0_E$ d'après le caractère défini du produit scalaire. Donc le plus petit élément $d(x, F) = \min\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ est uniquement atteint pour $z = p_F^{\perp}(x)$. □

6 Distance à un sous-espace affine

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i.e_i$ un vecteur de E. Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et H_α l'hyperplan affine d'équation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \alpha$$

Démonstration. Posons $a = \sum_{i=1}^{n} a_i.e_i$ H_0 est un hyperplan vectoriel et, $H_0 = a^{\perp}$ et $H_0^{\perp} = \mathrm{Vect}\{a\}$ Introduisons $h_\alpha \in a^{\perp}$ tel que $H_\alpha = h_\alpha + H_0$ et souvenons nous que $h_\alpha = \frac{\alpha}{\|a\|^2}.a$

Observons que l'égalité $H_\alpha = h_\alpha + H_0$ donne

$$\{\|u - z\| \mid z \in H_\alpha\} = \{\|u - (h_\alpha + z')\| \mid z' \in H_0\} = \{\|(u - h_\alpha) - z'\| \mid z' \in H_0\}$$

or, d'après la caractérisation de la distance à un sous-espace quelconque, on a

- ⋆ L'ensemble $\{\|(u - h_\alpha) - z'\| \mid z' \in H_0\}$ admet une borne inférieure donc $\{\|u - z\| \mid z \in H_\alpha\}$ aussi qui vaut $\mathrm{d}(u - h_\alpha, H_0)$, ce qui prouve que $\mathrm{d}(u, H_\alpha)$ est bien définie
- ⋆ $\inf\{\|(u - h_\alpha) - z'\| \mid z' \in H_0\}$ est un plus petit élément atteint pour l'unique valeur $z' = p_{H_0}^{\perp}(u - h_\alpha) = p_{H_0}^{\perp}(u)$ car $h_\alpha \in H_0^{\perp} = \ker p_{H_0}^{\perp}$, donc $\mathrm{d(u, H_\alpha)} = \inf\{\|u - z\| \mid z \in H_\alpha\}$ est un plus petit élément atteint pour l'unique valeur $z = h_\alpha + p_{H_0}^{\perp}(u - h_\alpha) = h_\alpha + p_{H_0}^{\perp}(u)$

$$\mathrm{d}(u, H_\alpha) = \|u - h_\alpha - p_{H_0}^{\perp}(u)\|$$

Or $u - p_{H_0}^{\perp}(u) = (\mathrm{Id} - p_{H_0}^{\perp})(u) = p_{H_0^{\perp}}^{\perp}(u) = \left\langle u | \frac{a}{\|a\|} \right\rangle . \frac{a}{\|a\|}$ car $H_0^{\perp} = \mathrm{Vect}\{a\}$ d'où, sachant aussi que $h_\alpha = \frac{\alpha}{\|a\|^2}.a$

$$\mathrm{d}(u, H_\alpha) = \|p_{H_0^{\perp}}^{\perp}(u) - h_\alpha\| = \left\| \left\langle a | \frac{a}{\|a\|} \right\rangle . \frac{a}{\|a\|} - \frac{\alpha}{\|a\|^2}.a \right\|$$

□

7 Dénombrement des surjections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; 2]\!]$ et dans $[\![1; 3]\!]$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il y a $|[\![1; 2]\!]|^{|[\![1; n]\!]|} = 2^n$ applications de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; 2]\!]$. Seules les applications constantes $\widetilde{1}$ et $\widetilde{2}$ ne sont pas surjectives. Il y a donc $2^n - 2$ surjections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; 2]\!]$.

Il y a $|[\![1; 3]\!]|^{|[\![1; n]\!]|} = 3^n$ applications de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; 3]\!]$. Les applications non surjectives sont celles dont l'image n'est pas $[\![1; 3]\!]$. C'est-à-dire, celles dont l'image est de cardinal 1 (les fonctions constantes $\widetilde{1}$, $\widetilde{2}$ et $\widetilde{3}$) et celles dont l'image est de cardinal 2. Ces dernières sont les surjections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; 2]\!]$, $\{1; 3\}$ et $\{2; 3\}$. Comme ces trois ensembles ont la même taille, il y a $3 \times (2^n - 2)$ (voir résultat précédent) applications de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; 3]\!]$ dont l'image est de cardinal 2. Ainsi, le nombre de surjections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; 3]\!]$ est $3^n - 3 - 3(2^n - 2) = 3^n - 3 \times 2^n + 3$. □

8 Lemme des bergers

Soient E, F deux ensembles finis non vides et $f : E \to F$ telle que tout élément de F possède le même nombre $k \in \mathbb{N}^*$ d'antécédents par f. Alors $|F| = \frac{|E|}{k}$

"Pour compter les moutons, il faut compter les pattes puis diviser par quatre. "

Démonstration. Considérons la relation binaire définie sur E par :

$$\forall (x,y) \in E^2, x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Elle est réflexive, transitive et symétrique donc c'est bien une relation d'équivalence. Donc les classes d'équivalence réalise une partition de E. Nous avons $E = \displaystyle\bigsqcup_{C \in E/\sim} C$ donc, en passant aux cardinaux, $|E| = \displaystyle\sum_{C \in E/\sim} |C|$.

Soit $x \in E$ fixé quelconque. Alors $\bar{x} = \{y \in E \mid f(x) = f(y)\} = f^{-1}(f(\{x\}))$. Par hypothèse, tous les éléments de F ont le même nombre k d'antécédents, or $f(x)$ est un singleton d'élément de F donc $|\bar{x}| = k$. Ainsi $\forall C \in E/\sim, |C| = k$.

Posons $\varphi \left| \begin{array}{ccc} E/\sim & \mapsto & F \\ C & \to & f(x) \text{ où } x \in C \end{array} \right.$. φ est bien défini car si $(x,y) \in E$ vérifie $\bar{x} = \bar{y}$ alors $f(x) = f(y)$ donc l'image par φ ne dépend pas du représentant de classe choisi. φ est surjective car soit $z \in F$, f est surjective donc $\exists x_z \in E : f(x_z) = z$ et alors $\varphi(\bar{x_z}) = f(x_z) = z$. φ est injective car soient $(C, C') \in (E/\sim)^2, \varphi(C) = \varphi(C')$ alors $\exists (x, x') \in C \times C' : x \sim x'$, comme deux classes d'équivalence sont confondues ou disjointes, $C = C'$. Ainsi φ est une bijection donc $|F| = |E/\sim|$.

Ainsi $|E| = \displaystyle\sum_{C \in E/\sim} |C| = \sum_{C \in E/\sim} k = |E/\sim|\, k = |F|\, k$.

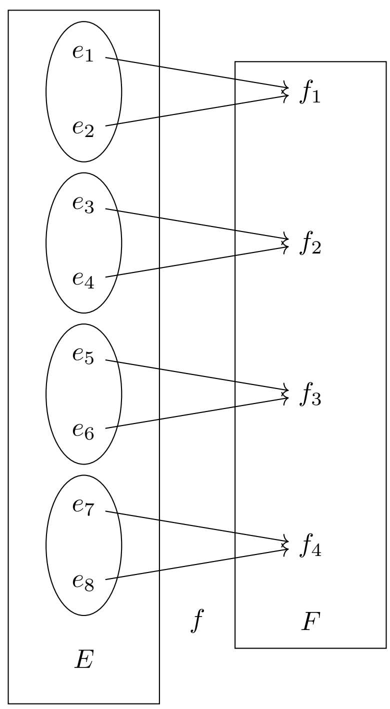

FIGURE 2 – Représentation schématique du lemme des bergers. Les classes d'équivalence de $\sim$ sont les ovales qui contiennent des éléments qui ont la même image par f. Le lemme s'applique ici car tous les éléments de F ont le même nombre d'antécédents par f.

$\square$