

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 10

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen

3 décembre 2023

## 1 Caractérisation de la densité d'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ dans une partie $B$ de $\mathbb{R}$ la contenant avec des $\varepsilon$ .

Soient  $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$  fq.

*Définition de la densité*

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, B \cap ]u; v[ \neq \emptyset \implies A \cap ]u; v[ \neq \emptyset \end{cases} \quad (1)$$

*Caractérisation de la densité par les  $\varepsilon$*

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases} \quad (2)$$

*Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité*

*Sens Direct* Supposons  $A$  dense dans  $B$

— Par déf  $A \subset B$

— Soit  $b \in B$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fq

Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour  $u \leftarrow b - \varepsilon$  et  $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \neq \emptyset \implies A \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \neq \emptyset$$

Or,  $B \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \neq \emptyset$  est vraie donc  $A \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \neq \emptyset$

Ce qui permet de choisir  $a \in A \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ . Un tel  $a$  vérifie  $a \in A$  et  $a \in ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \iff |b - a| < \varepsilon$

*Sens réciproque* Supposons  $\begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases}$

— On a donc  $A \subset B$

— Soient  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  fq tq  $B \cap ]u, v[ \neq \emptyset$

Soit  $b \in B \cap ]u, v[$  fq. Appliquons l'hypothèse pour  $b \leftarrow b$  et  $\varepsilon \leftarrow \min\{v - b, b - u\}$ , qui est autorisé  $v - b$  et  $b - u$  sont positifs

Donc  $\exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$

Fixons un tel  $a$ , alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leq v - b} \leq b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leq b - u} \geq b - (b - u) = u \end{cases}$$

Donc  $a \in ]u, v[$ .

Donc  $A \cap ]u, v[ \neq \emptyset$

□

## 2 Théorème de la division pseudo-euclidienne dans $\mathbb{R}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[ \end{cases} \quad (3)$$

*Démonstration. Unicité* Soient deux tels entiers  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et deux couples  $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})^2$  tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[ \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ r' \in [0; |b|[ \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme  $-|b| < r' - r < |b|$ , il vient en divisant par  $|b|$  l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque  $q$  et  $q'$  sont dans  $\mathbb{Z}$  leur différence est obligatoirement 0, ainsi  $q = q'$  ce qui implique  $r = r'$  et donc on a unicité de ladite écriture de  $a$ .

*Existence* Posons pour  $b > 0$ ,  $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vide car  $-|a| \in \Omega$  ( $\mathbb{Z}$  archimédien suffit ...)
- $\Omega$  est majoré par  $|a|$  car supposons, par l'absurde, que  $\exists k \in \Omega : k > |a|$ , alors  $kb > |a|b > a$  ce qui contradiction avec la définition d' $\Omega$ .

Donc  $\Omega$  admet un plus grand élément, notons-le  $q$ .

Posons  $r = a - bq$ . Par construction,  $a = bq + r$  et comme  $q = \max \Omega$  et  $r \in \mathbb{R}$ .

Par suite,  $q \in \Omega$  donc  $bq \leq a$  d'où  $0 \leq r$ . Et  $q = \max \Omega$  donc  $b(q + 1) > a$  d'où  $b > r$ , c'est-à-dire,  $r \in [0, |b|$ .

Si  $b < 0$ , il suffit de prendre  $q \leftarrow -q$  dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de  $a$ .  $\square$

## 3 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}$  fq. Posons  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq.

- $a_n \in \mathbb{Q}$  car  $\lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$  et  $2^n \in \mathbb{N}$ .

—

$$a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leq a_n \leq x$$

Or  $1/2^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,  
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ .

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité,  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fq.

Alors  $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ . D'après la démonstration précédente,  $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x + \sqrt{2}$ .

Fixons un telle suite  $b$ . Considérons  $c = b - \sqrt{2}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq.

- $c_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  car  $b_n \in \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

—

$$\left. \begin{array}{l} b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{array} \right\} \implies c_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .  $\square$

## 4 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$  Si  $u$  converge vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , alors  $\ell_1 = \ell_2$

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $u$  converge vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , et  $\ell_1 \neq \ell_2$ . On prendra  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$  assez petit pour que les tubes soient disjoints.

Posons donc  $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de  $u$  vers  $\ell_1$ , pour  $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$ , ce qui est autorisé car  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon_0 \quad (4)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon_0 \quad (5)$$

Fixons de tels  $N_1$  et  $N_2$ .

— Posons  $n_0 = N_1 + N_2$

—  $n_0 \geq N_1$ , donc (4) s'applique :  $|u_{n_0} - \ell_1| \leq \varepsilon_0$

—  $n_0 \geq N_2$ , donc (5) s'applique :  $|u_{n_0} - \ell_2| \leq \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\ &\leq \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leq \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leq \varepsilon_0} \\ &\leq 2 \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\ \implies 1 &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Contradiction

□

## 5 Une suite convergente est bornée

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  convergente. Posons  $\ell = \lim u$  Appliquons la définition de la convergence pour  $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| \leq 1$$

Fixons un tel  $N_1$  Posons alors  $M = \max \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ , qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici  $(\mathbb{R}, \leq)$ ) admet un pgE.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq.

— Si  $n \in [0, N_1]$ ,  $|u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$  donc  $|u_n| \leq M$

— Sinon,

$$\begin{aligned} n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leq 1 \\ &\implies |u_n| - |\ell| \leq 1 \\ &\implies |u_n| \leq 1 + |\ell| \leq M \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

□