Khôlles de Mathématiques - Semaine 6

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen (relecture)

19 novembre 2023

1 Montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

Démonstration. Soit $f : I \to F$, avec I, F deux parties non-vides de $\mathbb{R}$, une telle fonction et notons f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est impaire sur I, alors pour tout $x \in I$, $-x \in I$, ainsi I est centré en 0 et on a :

$$\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x).$$

Ainsi, prenons $y \in F$, alors $-y \in F$ par imparité et bijectivité de f. On a donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

D'où l'imparité de f^{-1}.

Pour ce qui est de l'exemple, prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}^{[-1,1]}$ que l'on notera $\widetilde{\sin}$. Sa bijection réciproque est bien entendu $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

De la même manière que dans la démonstration du cas général, prenons $y \in [-1,1]$, comme $[-1,1]$ est centré en 0, $-y \in [-1,1]$, on a dès lors :

$$\begin{aligned} \arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\ &= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\ &= -\arcsin(y). \end{aligned}$$

□

2 Limite (et preuve) lorsque x tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Démonstration. Premièrement, posons :

$$\forall (x, \alpha, \beta) \in [1, +\infty[\times \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}.$$

Deuxièmement, montrons que :

$$\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Soit $x \in [1, +\infty[= \mathcal{A}$. Nous savons que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier sur $\mathcal{A}$. Ainsi, ln est en dessous de toutes ses tangentes, d'où :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Illustration de l'inégalité :

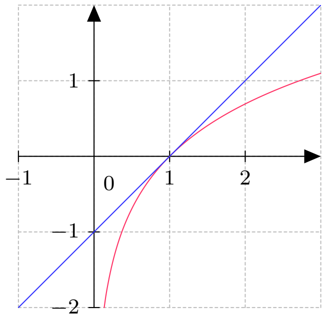

Figure 1. ln en rouge et la première bissectrice en bleu.

On peut alors diviser par x^2 (car $x \neq 0$) :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{f_{1,2}(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}.$$

Donc par théorème d'encadrement $f_{1,2}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Dernièrement, le cas général. Soit $x \in \mathcal{A}$ et soient $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On fait une preuve directe.

$$\begin{aligned}
\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \\
&= \underbrace{\underbrace{\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^\alpha}_{c^{\underline{te}}\ \text{(définie !)}} \cdot \underbrace{\left[\underbrace{\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right)}{\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right)^2}}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{d'après le dernier point}}}\right]^\alpha}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{par composition des limites}}}}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{par produit}}}.
\end{aligned}$$

□

3 Limite en 0 de $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et limite en $+\infty$ suivant n de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Démonstration.
Montrons que $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$.

On fait toujours une preuve directe.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{2x}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}}_{c^{\underline{te}}} \cdot \underbrace{\left[\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}}_{\substack{\xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\ \text{limite usuelle}}}\right]^2}_{\substack{\xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\ \text{par composition}}}}_{\substack{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \\ \text{par produit}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Trouvons la limite, sous réserve d'existence, de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ suivant n en $+\infty$.

Remarquons que si $q \leq 0$, il est ***nécessaire*** d'avoir $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ sinon l'expression n'a tout simplement ***aucun sens***. De fait, on supposera $q > 0$ tout le long, les cas $q < 0$ se font naturellement (convergence pour $q \in \mathbb{R}_-$).

Soit donc $0 < q < 1$, ce cas est immédiat, $((q^n)^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} = ((q^\alpha)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc il s'agit de la suite géométrique de raison $q^\alpha \in]0,1[$ et de premier terme $q^{\min_I(n)\alpha}$ ($\min_I(n)$, avec I une partie non vide de $\mathbb{N}$, car la suite ne démarre pas forcément à 0), donc elle converge vers 0.

Si $q \geq 1$, on montre le cas trivial $\alpha = \beta = 1$:

$$
\forall n \in [\![\lfloor q \rfloor + 1, +\infty[\![, \quad 0 \leq \frac{q^n}{n!} = \underbrace{\frac{q}{1} \times \frac{q}{2} \times \cdots \times \frac{q}{\lfloor q \rfloor}}_{= \lambda \text{ (une constante)}} \times \underbrace{\frac{q}{\lfloor q \rfloor + 1}}_{\leq 1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{q}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{q}{n} \leq \underbrace{\frac{\lambda q}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}
$$

Par théorème d'existence de limite par encadrement, $\left(\frac{q^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$, montrons le cas général pour $q \geq 1$.

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(q^n)^\alpha}{(n!)\beta} = \left(\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!}\right)^\beta = \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!}}_{\substack{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{c'est le cas trivial}}}\right)^\beta}_{\substack{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{par composition des limites } (\beta>0)}}
$$

$\square$

4 Présentation exhaustive de la fonction arcsin.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\sin}$ (voir **1**.). D'où :

$$\arcsin = \begin{cases} [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \left(\widetilde{\sin}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\sin}$:

1. arcsin est impaire.
2. arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
3. $\arcsin \in \mathcal{C}^0\left([-1,1], [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$.
4. $\arcsin \in \mathcal{D}^1\left(]-1,1[,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$.
5. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
6. arcsin admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1.

Graphe de arcsin :

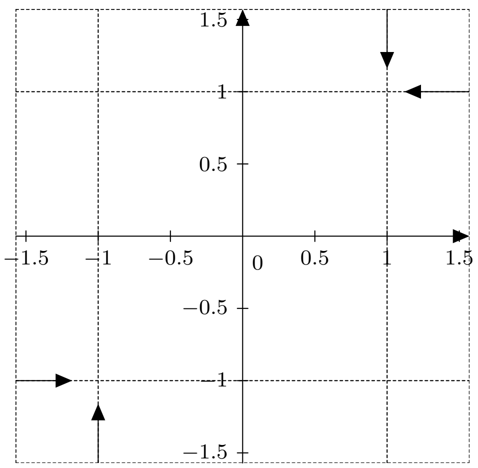

Figure 2. arcsin en bleu, $\widetilde{\sin}$ en vert et la première bissectrice en rouge.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d'arcsin :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0,1], \quad \arcsin(x) \geq x.$$

□

5 Présentation exhaustive de la fonction arccos.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]} := \widetilde{\cos}$. D'où :

$$\arccos = \begin{cases} [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ x & \mapsto & \left(\widetilde{\cos}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1,1]$, $\arccos(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in [0,\pi]$, $\cos(\theta) = x$.
Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\cos}$:

1. arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.
2. $\arccos \in \mathcal{C}^0\left([-1,1],[0,\pi]\right)$.
3. $\arccos \in \mathcal{D}^1\left(]-1,1[,]0,\pi[\right)$.
4. $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
5. arccos admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1.

Graphe de arccos :

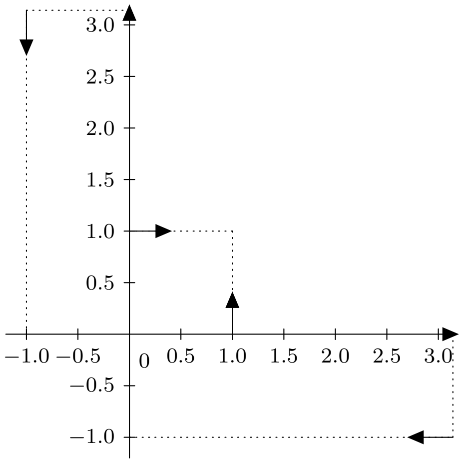

Figure 3. arccos en vert, $\widetilde{\cos}$ en violet, la première bissectrice en rouge et $y = \frac{\pi}{2} - x$ en rose.

□

6 Présentation exhaustive de la fonction arctan.

Démonstration.

Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} := \widetilde{\tan}$. D'où :

$$\arctan = \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x & \mapsto & \left(\widetilde{\tan}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\tan}$:

1. arctan est impaire.
2. $\arctan \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R},\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
3. $\arctan \in \mathcal{D}^1\left(\mathbb{R},\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
4. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Graphe de arctan :

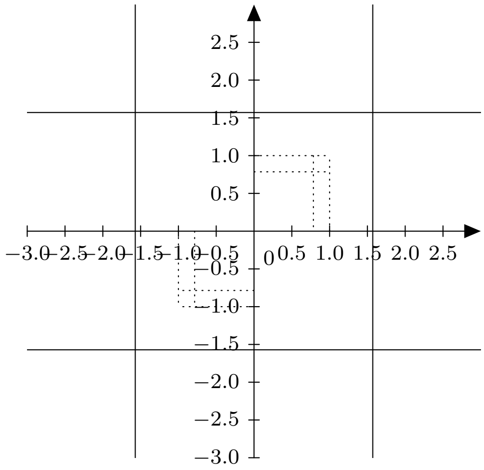

Figure 4. arctan en vert, $\widetilde{\tan}$ en bleu, la première bissectrice en rouge, et les fonctions $y = \pm\frac{\pi}{2}$ et $x = \pm\frac{\pi}{2}$ en noir.

On a aussi (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(x) \leq x.$$

Et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

□

7 2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$, dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.

Démonstration. L'interprétation géométrique sur $[0, 1]$, celle sur $[-1, 0]$ est laissée au lecteur car il s'agit du même principe modulo des détails :

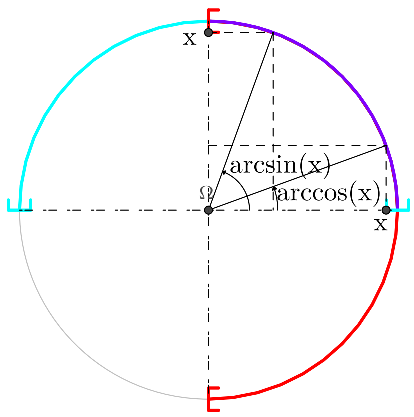

Figure 5.

Preuve formelle :

Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\varphi = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \arccos(\sin(\varphi)) = \varphi + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right),$$

or $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$ d'où $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$ si bien que :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) \;=\; \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

□

8 Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.

Démonstration.

- Domaine de définition et symétries.
  sinh et cosh sont définies sur $\mathbb{R}$.
  De plus,
  (i) $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$,
  $$(ii)\ \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \\ \text{et} \\ \cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh(x). \end{cases}$$
  Donc sinh et cosh sont respectivement impaire et paire.
  Nous les étudierons sur $\mathbb{R}_+$ et pour les obtenir les graphes ($\mathcal{C}_{\sinh}$ et $\mathcal{C}_{\cosh}$) de ces fonctions sur $\mathbb{R}$ à partir de ceux ($\mathcal{C}^+_{\sinh}$ et $\mathcal{C}^+_{\cosh}$) obtenus sur $\mathbb{R}_+$, nous le complèterons en traçant les images de ces graphes par la symétrie centrale s de centre O et par la réflexion r d'axe $(O, \overrightarrow{\jmath})$:
  $$\mathcal{C}_{\sinh} = \mathcal{C}^+_{\sinh} \cup s\left(\mathcal{C}^+_{\sinh}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_{\cosh} = \mathcal{C}^+_{\cosh} \cup r\left(\mathcal{C}^+_{\cosh}\right)$$

- Variations : triviales.

- Branches infinies en $+\infty$ et position relative de $\mathcal{C}_{\sinh}$ et $\mathcal{C}_{\cosh}$.
  $$\frac{\cosh(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty} + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
  Donc le graphe de cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique $(O, \overrightarrow{\jmath})$.
  On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$$
  Donc les graphes des deux fonctions se rapprochent l'un de l'autre arbitrairement près lorsque $x \to +\infty$, et le graphe de cosh est au-dessus de celui de sinh.

- Tangente au graphe de sinh à l'origine et position relative.

Il s'agira d'étudier $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sinh(x) - x$, de remarquer sa dérivabilité d'en étudier les variations puis de conclure, en précisant que cette étude révèle l'inflexion du graphe de sinh en 0.

□