

Khôlles de Mathématiques - Semaine 24

Hugo Vangilluwen, George Ober

22 Avril 2024

Pour cette semaine, \mathbb{K} désigne un corps commutatif, E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels, E' et F' des sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F .

Nous rappelons que $\dim\{0_E\} = 0$ et que $\{0_E\} = \text{Vect } \emptyset$.

1 Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Pour tout sous-espace vectoriel de E , il existe un sous-espace vectoriel complémentaire.

Démonstration.

Théorème de la base incomplète (admis ici mais démontré dans le cours) : pour toute famille libre de E , nous pouvons y adjoindre une partie d'une famille quelconque génératrice de E (généralement une base, la base canonique si elle a un sens) pour en faire une base de E .

Posons $n = \dim E$ et $p = \dim E'$. Ainsi, il existe (e_1, \dots, e_p) base de E' . Appliquons le théorème de la base incomplète pour cette famille. Il existe (e_{p+1}, \dots, e_n) $n - p$ vecteurs de E tel que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

Posons $E'' = \text{Vect } \{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ et vérifions qu'il est complémentaire à E' .

- * Par définition de Vect , E'' est un sous-espace vectoriel.
- * Trivialement, $E' + E'' = E$.
- * $\{0_E\} \subset E' \cap E''$ car E' et E'' sont deux sous-espaces vectoriels.
- * Soit $x \in E' \cap E''$.

$$X \in E' \implies \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$$

$$X \in E'' \implies \exists (\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p} : x = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$$

$$\text{Par différence, } \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^n (-\lambda_i) e_i = 0_E.$$

Or $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de E donc $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.

donc $x = 0_E$. Ainsi, $E' \cap E'' \subset \{0_E\}$.

□

2 Dimension de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = \dim E \times \dim F \quad (1)$$

Démonstration. Notons $n = \dim E$ et $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une base de E . Considérons

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \rightarrow & F^n \\ f & \mapsto & \underbrace{(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}}_{\text{évaluation de } f \text{ en la base choisie}} \end{array} \right.$$

- * φ est linéaire.
- * φ est bijective d'après le théorème de création des applications linéaires qui établit que pour toute famille de n vecteurs de F , il existe une unique application linéaire de E dans F envoyant la base $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sur cette famille.

Ainsi, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et F^n sont isomorphes. F^n est de dimension finie, ce qui conclut.

□

3 Formule de Grassman

Supposons E de dimension finie.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels. Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2 \quad (2)$$

Démonstration. Commençons par prouver une version simplifiée de la somme directe. Supposons que E_1 et E_2 sont en somme directe.

Fixons \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E_1 et E_2 .

Alors $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ engendre $E_1 + E_2$. Or $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est finie donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.

Posons $n = \dim E_1$ et $p = \dim E_2$. Notons $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ la base \mathcal{B}_1 et $(f_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ la base \mathcal{B}_2 .

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}^{n+p}$ fixés quelconques. $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^p \mu_i f_i = 0_E$.

Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^p (-\mu_i) f_i$. Or $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E_1$ et $\sum_{i=1}^p (-\mu_i) f_i \in E_2$ donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Donc $\lambda = \tilde{0}$. De même, $\mu = \tilde{0}$.

Donc $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est libre.

Ainsi, $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de $E_1 \oplus E_2$. Donc $\dim E_1 \oplus E_2 = |(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim E_1 + \dim E_2$.

Enlevons l'hypothèse que E_1 et E_2 sont en somme directe.

$E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E_2 et E_2 est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie donc il existe E'_2 sous-espace vectoriel de E_2 tel que $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$.

Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E'_2$

* E_1 et E'_2 sont en somme directe.

$$\begin{aligned} E_1 \cap E'_2 &= E_1 \cap (E'_2 \cap E_2) \text{ car } E'_2 \subset E_2 \\ &= (E_1 \cap E_2) \cap E'_2 \text{ car } \cap \text{ est associative et commutative} \\ &= 0_E \text{ car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont en somme directe et } E'_2 \text{ sev} \end{aligned}$$

* $E_1 + E_2 \subset E_1 + E'_2$

Soit $x \in E_1 + E_2$. Alors $\exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x = x_1 + x_2$.

Or $x_2 \in E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$ donc $\exists (x_{21}, x'_2) \in E_1 \times E'_2 : x_2 = x_{21} + x'_2$.

D'où $x = \underbrace{x_1 + x_{21}}_{\in E_1} + \underbrace{x'_2}_{\in E'_2} \in E_1 + E'_2$.

* Trivialement, $E_1 + E'_2 \subset E_1 + E_2$ (car $E'_2 \subset E_2$).

Ainsi, E_1 et E'_2 (car sev) étant de dimension finie, $\dim E_1 \oplus E'_2 = \dim E_1 + \dim E'_2$.

De plus, $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) \oplus E'_2 = \dim E_1 \cap E_2 + \dim E'_2$.

Donc $\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$. □

4 Caractérisation injectivité/bijektivité/surjectivité par le rang

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

(i) Si E est de dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \text{rg} f = \dim E \quad (3)$$

(ii) Si F est de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \text{rg} f = \dim F \quad (4)$$

(iii) Si E et F sont de même dimension finie

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

C'est l'accident de la dimension finie !

Démonstration.

- (i) Supposons E de dimension finie, fixons (e_1, \dots, e_n) une base de E (avec $n = \dim E$) Supposons f injective :

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect} \{f(e_1) \dots f(e_n)\}$$

Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice. $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est de plus libre car f est injective. Donc c'est une base, donc

$$\dim \operatorname{Vect} \{f(e_1) \dots f(e_n)\} = n = \dim E$$

donc $\operatorname{rg} f = \dim E$. Réciproquement, supposons que $\operatorname{rg} f = \dim E = n$. Alors

$$n = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Vect} \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de cardinal n , égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré. C'est donc une base du sous-espace vectoriel engendré. Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, donc f est injective.

- (ii) Supposons F de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \operatorname{Im} f = F \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim F$$

- (iii) Supposons E et F de même dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \operatorname{rg} f = \dim E \iff \operatorname{rg} f = \dim F \iff f \text{ surjective}$$

D'où la bijectivité. □

5 Théorème du rang

Si E est de dimension finie alors pour toute $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ application linéaire,

$$\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \ker f \tag{5}$$

Démonstration. Démontrons d'abord le lemme suivant. Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et H un supplémentaire de $\ker f$ dans E . Alors $f|_H^{\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$.

Notons \hat{f} une telle restriction et corestriction. Cette application est bien définie (car $f(H) \subset \operatorname{Im} f$) et $\hat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, \operatorname{Im} f)$.

$\ker \hat{f} = \{x \in H \mid \hat{f}(x) = 0_E\} = \{x \in H \mid x \in \ker f\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$ car H et $\ker f$ sont complémentaires. Donc \hat{f} est injective.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. D'où $\exists x \in E : y = f(x)$.

Décomposons x dans $E = H \oplus \ker f$, $\exists (x_H, x_k) \in H \times \ker f : x = x_H + x_k$.

Ainsi, $y = f(x) = f(x_H) + f(x_k) = f(x_H)$ car $x_k \in \ker f$. Donc y admet un antécédent par \hat{f} (qui est x_H).

Donc \hat{f} est surjective.

Donc $f|_H^{\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$.

Supposons maintenant que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

D'après le théorème d'existence d'un supplémentaire en dimension finie, $\ker f$, étant un sous-espace vectoriel de E , admet un supplémentaire H c'est-à-dire $E = H \oplus \ker f$.

En prenant la dimension sur cette égalité, $\dim E = \dim \ker f + \dim H$. D'après le lemme précédent, $\dim H = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$.

D'où $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \ker f$. □

6 Rang d'une composition d'applications linéaires

Soit G un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(u, v) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Si E et F sont de dimension finie alors

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v \circ u + \dim \ker v \cap \operatorname{Im} u \tag{6}$$

Démonstration. Considérons que E et F sont de dimension finie. Soient de tels objets.
 Appliquons le théorème du rang à $v|_{\text{Im}u}$ ce qui est autorisé puisque $v|_{\text{Im}u}$ est une application linéaire
 et $\text{Im}u$ est un \mathbb{K} -ev de dimension finie (car sev de F).

$$\dim \text{Im}u = \text{rg } v|_{\text{Im}u} + \dim \ker v|_{\text{Im}u}$$

$\ker v|_{\text{Im}u} = \{y \in \text{Im}u \mid v(y) = 0_G\} = \{y \in \text{Im}u \mid y \in \ker v\} = \text{Im}u \cap \ker v$
 $\text{Im } v|_{\text{Im}u} = v(\text{Im}u) = \text{Im } v \circ u$ (cette égalité est vraie pour deux fonctions de E dans F et de F dans G quelconques, pas forcément linéaires.)

Donc

$$\text{rg } f = \text{rg } v \circ u + \dim \ker v \cap \text{Im}u$$

□