Khôlles de Mathématiques - Semaine 20

Hugo Vangilluwen, George Ober, Kylian Boyet

10 Mars 2024

1 Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[X]^{\times} = \left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\} \tag{1}$$

Démonstration. Soit P un élément inversible de $\mathbb{K}[X]$. Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P \cdot Q = Q \cdot P = 1_{\mathbb{K}[X]}$.
En prenant les degrés des polynômes, $\deg P + \deg Q = 0$.
Or $\deg : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{N}$ donc $\deg P = \deg Q = 0$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : P = \lambda$.
Ainsi $\mathbb{K}[X]^{\times} \subset \left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Considérons $P = \lambda$. Posons $Q = \lambda^{-1}$ (car $\mathbb{K}$ est un corps). $P \cdot Q = \lambda\lambda^{-1} = 1$ et $Q \cdot P = \lambda^{-1}\lambda = 1$ donc P est inversible. Ainsi $\left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\} \subset \mathbb{K}[X]^{\times}$. □

2 Théorème d'interpolation de lagrange

Le problème d'interpolation de Lagrange est, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $a \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $b \in \mathbb{K}^{n+1}$, l'ensemble des polynômes passant par tous les points de coordonnée (a_i, b_i). C'est-à-dire l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![0; n]\!], P(a_i) = b_i \tag{2}$$

Il existe une unique solution P de degré $\leqslant n$ au problème d'interpolation de lagrange, et elle s'exprime de la manière suivante en posant

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \tag{3}$$

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i \tag{4}$$

Démonstration.

- Unicité
  Supposons qu'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ solutions du problème d'interpolation.
  Alors $\forall i \in [\![0, n]\!], \tilde{P}(a_i) = \tilde{Q}(a_i) = b_i$
  Posons $H = P - Q$, alors, $\forall i \in [\![0, n]\!], \tilde{H}(a_i) = \tilde{P}(a_i) - \tilde{Q}(a_i) = 0$.
  De plus, $\deg H = \deg(P - Q) \leqslant \max\{\deg P, \deg Q\}$
  Donc H est un polynôme de degré $\leqslant n$ avec $|[\![0, n]\!]| = n + 1$ racines.
  Donc H est le polynôme nul.
- Existence Soit $i \in [\![0, n]\!]$ fq Notons L_i une solution de degré $\leqslant n$ au problème Pb_i suivant :

$$(Pb_i) \begin{cases} \tilde{P}(a_0) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}(a_{i-1}) = 0 \\ \tilde{P}(a_i) = 1 \\ \tilde{P}(a_n) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}(a_n) = 0 \end{cases}$$

On remarque que $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ sont n racines deux à deux distinctes de L_i. Or L_i est de degré $\leqslant n$ et n'est pas le polynôme nul (car $\tilde{L_i}(a_i) = 0$) donc $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ sont les *seules* racines de L_i, toutes simples.
Dès lors,

$$\exists c \in \mathbb{K}^* : L_i = c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j)$$

Pour trouver le c, remarquons que

$$\begin{aligned} \tilde{L_i}(a_i) = 1 &\iff c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j) = 1 \\ &\iff c = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{1}{a_i - a_j} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, s'il existe une solution au problème Pb_i c'est nécéssairement

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$$

Réciproquement, cette solution est correcte puisque

$$\forall k \in [\![0, n]\!], k \neq i, \tilde{L_i}(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{\overbrace{a_k - a_j}^{=0}}{a_i - a_j} \right) = 0$$

Et

$$\tilde{L_i}(a_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} \right) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} 1 = 1$$

Posons donc $P = \sum_{i=0}^{n} b_i Li$.
Alors, par construction,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \tilde{P}(a_k) = \sum_{i=0}^{n} \left(b_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} \right) \right) = \sum_{i=0}^{n} (b_i \delta_{ki}) = b_k \delta_{kk} = b_k$$

Nous avons donc construit une solution unique au problème d'interpolation de Lagrange

□

3 Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ (caractéristique nulle)

Soients P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$. On a :

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\widetilde{P^{(n)}}(a)}{n!} (X - a)^n \tag{5}$$

Démonstration. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) \ : \text{“ } \forall P \in \mathbb{K}_n[X], \ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X - a)^k \text{ ”}$$

Initialisation : pour $n = 0$, soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.
$\exists \ p_0 \in \mathbb{K} \ : \ P = p_0 X^0$ et $\sum_{k=0}^{0} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X - a)^k = \frac{\widetilde{P^{(0)}}(a)}{1} X^0 = p_0 X^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. On a donc $\deg P' = \deg P - 1 \leqslant n$ donc $\mathcal{P}(n)$ s'applique à P' :

$$P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P'^{(k)}}(a)}{k!}(X-a)^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!}\frac{(X-a)^{k+1}}{k+1}\right)',$$

donc :

$$\left(P - \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!}\frac{(X-a)^{k+1}}{k+1}\right)' = 0 \implies \exists\, \mu \in \mathbb{K} \;:\; P - \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!}\frac{(X-a)^{k+1}}{k+1} = \mu,$$

ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{(k+1)!}(X-a)^{k+1} + \mu = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!}(X-a)^k + \mu,$$

donc en a par φ_a :

$$\widetilde{P}(a) = \mu \implies P = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!}(X-a)^k + \widetilde{P}(a) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!}(X-a)^k,$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai. Ainsi par théorème de récurrence sur $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

4 Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$.

$$a \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité au moins } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \dots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$a \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité d'exactement } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \dots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^m(a) \neq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Démonstration. • Supposons que a est une racine de P de multiplicité au moins m.
Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-a)^m Q$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $k \in [\![0; m-1]\!]$,

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left((X-a)^m\right)^{(k-i)} Q^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-(k-i))!}(X-a)^{m-(k-i)} Q^{(i)} \\ &= \underbrace{(X-a)^{(m-k)}}_{\substack{\text{c'est un bien un polynôme} \\ \text{non constant car } k<m}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-(k-i))!}(X-a)^i Q^{(i)} \end{aligned}$$

Donc $\forall k \in [\![0; m-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$.

- Supposons que $\forall k \in [\![0; m-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$.
  Appliquons la formule de Taylor a.

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \underbrace{\frac{P^{(n)}(a)}{n!}}_{=0}(X-a)^n + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geqslant m}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \\
&= (X-a)^m \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geqslant m}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \underbrace{(X-a)^{n-m}}_{\in \mathbb{K}[X] \ car \ n-m \in \mathbb{N}}
\end{aligned}
$$

  Donc $(X-a)^m | P$. Donc a est racine de P de multiplicité au moins m.
- Supposons que a est une racine de P de multiplicité exactement m.
  Nous pouvons appliquer le point précédent car la multiplicité est supérieur à m : $\forall k \in [\![0; m-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$.
  Par l'absurde, si $P^{(m)}(a) = 0$ alors le point précédent donne que a a une multiplicité supérieur à $m+1$ donc $m \geqslant m+1$ ce qui est une contradiction.
  Par conséquent, $P^{(m)}(a) \neq 0$.
- Supposons $\forall k \in [\![0; m-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
  En reprenant le calcul précédent, pour $k = m$, en sachant que $(X-a)^{(m-k)} = X^0$,

$$
P^{(m)} = \binom{m}{0} \frac{m!}{0!}(X-a)^0 P + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \frac{m!}{i!}(X-a)^i Q^{(i)}
$$

  D'où $P^{(m)}(a) = m!\ Q(a)$ donc $Q(a) = \frac{P^{(m)}(a)}{m!}$. Donc $Q(a) \neq 0$.
  Par l'absurde, supposons que $(X-a)^{m+1} | P$. Alors $\exists R \in \mathbb{K}[X] : P = (X-a)^{m+1} R$. Donc $(X-a)^{m+1} R = (X-a)^m Q$ d'où $Q = (X-a)R$. Nous obtenons $Q(a) = 0$ ce qui est une contradiction avec $Q(a) = 0$.
  Donc a est une racine de P de multiplicité strictement inférieur à $m+1$ et, d'après le point précédent, supérieur à m. Donc a est une racine de P de multiplicité exactement m.

$\square$

5 Identification de $\mathbb{K}[X]$ à $\mathbb{K}[x]$, par l'injectivité de Φ

Démonstration. Montrons que l'application Φ définie comme suit est injective :

$$
\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array} \right. .
$$

Soit donc $P \in \ker \Phi$, on a :

$$
\Phi(P) = \widetilde{0} \implies \widetilde{P} = \widetilde{0} \text{ sur } \mathbb{K} \implies P = 0_{\mathbb{K}[X]},
$$

donc $\ker \Phi \subset \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.
Réciproquement, on calcule l'image du polynôme nul par Φ :

$$
\Phi(0_{\mathbb{K}[X]}) = \widetilde{0},
$$

donc $0_{\mathbb{K}[X]} \in \ker \Phi$, ainsi on a l'égalité ensembliste et donc cela suffit. $\square$

6 Pour $P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, exprimer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires

Les fonctions symétriques élémentaires $(\sigma_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ pour une famille $(x_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ sont définies par

$$
\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j} \tag{8}
$$

Démonstration. Sous forme développée, $P = X^3 - (x1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3 = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$. Comme x_1, x_2, x_3 sont racines de P, nous avons les trois égalité suivantes :

$$\begin{aligned} 0 = P(x_1) &= x_1^3 - \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_1 - \sigma_3 \\ 0 = P(x_1) &= x_2^3 - \sigma_1 x_2^2 + \sigma_2 x_2 - \sigma_3 \\ 0 = P(x_1) &= x_3^3 - \sigma_1 x_3^2 + \sigma_2 x_3 - \sigma_3 \end{aligned}$$

En sommant ces trois équation,

$$0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \sigma_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sigma_2(x_1 + x_2 + x_3) - 3\sigma_3$$

Cherchons la somme des carrés.

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ \implies & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

□

7 Expression de S_2, S_{-1} et S_{-2} à l'aide des fonctions élémentaires symétriques.

Les sommes de Newton $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ pour une famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont définies par (sous réserve d'existence pour $k < 0$) :

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \tag{9}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{S_2} + 2 \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j}_{\sigma_2} \\ \implies S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

$$S_{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$$

$$\begin{aligned} S_{-2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{x_i}\frac{1}{x_j} \\ &= \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n^2} - 2\frac{\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\notin\{i,j\}}} \frac{1}{x_j}}{\sigma_n} \\ &= \frac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-2}\sigma_n}{\sigma_n^2} \end{aligned}$$

□