

Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

19 novembre 2023

1 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

Démonstration. Notons $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas $\Delta = 0$ et $\alpha \pm i\beta$ les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \text{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies \text{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de Re

$$a_2 \text{Re}(f)'' + a_1 \text{Re}(f)' + a_0 \text{Re}(f) = \text{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$; $\text{Re}(f(t)) = \text{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$. Qui appartient donc à $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

En suivant le même raisonnement pour $\text{Im}(f)$, $(t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ fq. Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$.

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de f sont réelles, en notant (a_r, a_i, b_r, b_i) les parties réelles et imaginaires respectives de a et b .

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \text{Re}(f(t)) \\ &= \text{Re}(a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \text{Re}((a_r + i a_i) e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + i b_i) e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r \cos(\beta t) e^{\alpha} - a_i \sin(\beta t) e^{\alpha} + b_r \cos(\beta t) e^{\alpha} + b_i \sin(\beta t) e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r) \cos(\beta t) e^{\alpha} + (b_i - a_i) \sin(\beta t) e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion. □

2 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur I (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{où } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$$

Si b est continu sur J , alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur J .

Démonstration. Cas 1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nous savons que sous l'hypothèse de continuité de b sur J , les solutions de (EDL2) définies sur J constituent le plan affine S :

$$S = \{ \lambda f_1 + \mu f_2 + s \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

où s est une solution particulière de (EDL2), (f_1, f_2) sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent S_h . On a :

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} &\iff \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc que (λ, μ) doit être solution d'un système linéaire (2,2). On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est nul.

Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera D .

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) ($a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0$). On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de Δ . Traitons d'abord le cas $\Delta \neq 0$. On peut choisir :

$$\begin{aligned} f_1(t_0) &= e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2 t_0} \\ f_1'(t_0) &= r_1 e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2 e^{r_2 t_0} \end{aligned}$$

Donc (en sachant que $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$) :

$$D = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1 t_0 + r_2 t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a $\Delta = 0$; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0 e^{r_0 t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0 t_0} (r_0 t_0 e^{r_0 t_0} + e^{r_0 t_0}) - r_0 e^{r_0 t_0} \times t_0 e^{r_0 t_0} = e^{2r_0 t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas, $D \neq 0$, donc le système $(2, 2)$ étudié admet une unique solution, donc il existe un unique couple (λ, μ) le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

Cas 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2, b \in C^0(J, \mathbb{R})$

Existence : Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le problème de Cauchy admet, dans \mathbb{R} , une solution à valeurs complexes g . Posons $f = \text{Re}(g)$ et montrons que f est une solution réelle du problème de Cauchy.

★ $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$ donc $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$

★ g vérifie $a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b$ sur J donc en prenant $\text{Re}(\cdot)$:

$$\text{Re}(a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b) = \text{Re}(b) \iff a_2 \text{Re}(g'') + a_1 \text{Re}(g') + a_0 \text{Re}(g) = b$$

$$\iff a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \text{ sur } J$$

★ $f(t_0) = \text{Re}(g(t_0)) = \text{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$

★ $f'(t_0) = \text{Re}(g'(t_0)) = \text{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc f est une solution réelle définie sur J au problème de Cauchy.

Unicité : Soient f_1 et f_2 deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$. \square

3 Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, f et g les solutions, définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} , des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur \mathbb{R} de $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Démonstration. La solution s'exprime simplement comme combinaison linéaire de f et g , plus précisément, la combinaison linéaire en α et β . En effet, soient de tels scalaires, et soient f et g de telles solutions, on a :

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'' + a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' + b(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = 0, \text{ par définition des espaces vectoriels.}$$

Et de même, $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(3) = \alpha \cdot f'(3) + \beta \cdot g'(3) = \alpha$, et

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)''(3) = \alpha \cdot f''(3) + \beta \cdot g''(3) = \beta.$$

Ce qui suffit par unicité des solutions (de la donc) d'un problème de Cauchy dans le cadre du théorème du cours.

Pour ce qui est du plan vectoriel des solutions, noté Ω , notons aussi Φ l'ensemble proposé.

L'inclusion $\Phi \subset \Omega$ est triviale par propriété de linéarité des espaces vectoriels. Finalement, pour $\Omega \subset \Phi$, soit $\omega \in \Omega$, forcément, ω vérifie l'EDL₂, mais aussi des conditions de Cauchy bien que celles-ci soient non-spécifiées, ainsi posons $\omega'(3) = \delta$ et $\omega''(3) = \theta$, donc en particulier, $\omega = \delta \cdot f + \theta \cdot g$, d'où l'égalité par double inclusion. \square