Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

3 décembre 2023

1 Caractérisation de la densité d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans une partie B de $\mathbb{R}$ la contenant avec des ε.

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ fq.
Définition de la densité

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, B \cap]u; v[\neq \emptyset \implies A \cap]u; v[\neq \emptyset \end{cases} \tag{1}$$

Caractérisation de la densité par les ε

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité
Sens Direct Supposons A dense dans B

- Par déf $A \subset B$
- Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq
  Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour $u \leftarrow b - \varepsilon$ et $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset \implies A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$$

  Or, $B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$ est vraie donc $A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$
  Ce qui permet de choisir $a \in A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Un tel a vérifie $a \in A$ et $a \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\iff |b - a| < \varepsilon$

Sens réciproque Supposons $\begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases}$

- On a donc $A \subset B$
- Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fq tq $B \cap]u, v[\neq \emptyset$
  Soit $b \in B \cap]u, v[$ fq. Appliquons l'hypothèse pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \min\{v - b, b - u\}$, qui est autorisé $v - b$ et $b - u$ sont positifs
  Donc $\exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$
  Fixons un tel a, alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

  Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leqslant v - b} \leqslant b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leqslant b - u} \geqslant b - (b - u) = u \end{cases}$$

  Donc $a \in]u, v[$.

Donc $A \cap]u, v[\neq \emptyset$

$\square$

2 Théorème de la division pseudo-euclidienne dans $\mathbb{R}$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \exists ! (q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \tag{3}$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et deux couples $((q,r),(q',r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \qquad \begin{cases} a = bq' + r' \\ r' \in [0; |b|[\end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-|b| < r' - r < |b|$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Existence Posons pour $b > 0$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leqslant a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit ...)
- Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d'Ω.

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $r \in \mathbb{R}$.
Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leqslant a$ d'où $0 \leqslant r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q+1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [0, |b|[$.

Si $b < 0$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. □

3 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fq. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

- $a_n \in \mathbb{Q}$ car $\lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $2^n \in \mathbb{N}$.
- $$a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant x$$

  Or $1/2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fq.
Alors $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration précédente, $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x + \sqrt{2}$.
Fixons un telle suite b. Considérons $c = b - \sqrt{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

- $c_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car $b_n \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- $$\left.\begin{array}{r} b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{array}\right\} \implies c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

4 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit u $\in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$ Si u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, et $\ell_1 \neq \ell_2$. On prendra $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ assez petit pour que les tubes soient disjoints.
Posons donc $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ_1, pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$, ce qui est autorisé car $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0 \tag{4}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0 \tag{5}$$

Fixons de tels N_1 et N_2.

— Posons $n_0 = N_1 + N_2$

  — $n_0 \geqslant N_1$, donc (4) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0$

  — $n_0 \geqslant N_2$, donc (5) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned}
|\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\
&\leqslant \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leqslant \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leqslant \varepsilon_0} \\
&\leqslant 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\
\implies 1 &\leqslant \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Contradiction

□

5 Une suite convergente est bornée

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \lim u$ Appliquons la définition de la convergence pour $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant 1$$

Fixons un tel N_1 Posons alors $M = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$, qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici $(\mathbb{R}, \leqslant)$) admet un pgE.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— Si $n \in [[0, N_1]], |u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ donc $|u_n| \leqslant M$

— Sinon,

$$\begin{aligned}
n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leqslant 1 \\
&\implies |u_n| - |\ell| \leqslant 1 \\
&\implies |u_n| \leqslant 1 + |\ell| \leqslant M
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.

□