Khôlles de Mathématiques - Semaine 29

George Ober

22 juin 2024

1 Définition et cardinal du sous-groupe alternée $\mathcal{A}_n$

Le noyau d'un morphisme de groupe étant toujours un sous-groupe du groupe de départ, le groupe alterné d'indice $n \in \mathbb{N}^*$ est le sous groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ obtenu en considérant le noyau du morphisme signature.

$$\mathcal{A}_n = \ker \varepsilon$$

$\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\frac{n!}{2}$

Démonstration. Fixons $\tau = (1,2)$ Considérons

$$\Phi \left| \begin{array}{ll} \mathcal{A}_n & \to \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto \sigma \circ \tau \end{array} \right.$$

— Φ est bien définie : soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$ fixée quelconque. Par propriété de morphisme de la signature, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau) = 1 \times (-1) = -1$ donc $\sigma \circ \tau \notin \mathcal{A}_n$ donc $\Phi(\sigma) \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$

— De plus, Φ est bijective en considérant

$$\Psi \left| \begin{array}{ll} \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n & \to \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto \sigma \circ \tau \end{array} \right.$$

$\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_n}$ et $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n}$

Ainsi,

$$|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n| - |\mathcal{A}_n|$$

D'où $|\mathcal{A}_n| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{2} = \frac{n!}{2}$ □

2 Caractérisation des bases par le déterminant

Démonstration. ⋆ Supposons que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ est une base de E.

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \times \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} = 1 \implies \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \neq 0$$

⋆ Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \neq 0$ Si $\mathcal{B}'$ était liée, le déterminant serait nul, donc en contraposant, $\mathcal{B}'$ n'est pas liée, et est de cardinal n, c'est une base.

□

3 Définition du déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

$$\exists! \lambda \in \mathbb{K} : \forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$$

On appelle ce λ <u>le</u> déterminant de l'endomorphisme f.

Démonstration. ◊ <u>Existence</u>

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E fixée. L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ll} E^n & \to \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{array} \right.$$

est

— Une forme n-linéaire : soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ fixés quelconques $(u, v, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \varphi(v + \lambda.w, u_2, \dots, u_n) &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v + \lambda.w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v) + \lambda.f(w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \text{ par linéarité de } f \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v), f(u_2), \dots, f(u_n)) + \lambda \times \det_{\mathcal{B}_0}(f(w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\ &\text{par linéarité de } \det_{\mathcal{B}_0} \\ &= \varphi(v, u_2, \dots, u_n) + \lambda \times \varphi(w, u_2, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, φ est linéaire en son premier argument. On prouve de même que φ est linéaire en ses $n-1$ autres arguments, ce qui montre sa n-linéarité.

— Alternée Soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ tels qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \neq j$ et $u_i = u_j$ alors on a aussi $f(u_i) = f(u_j)$, si bien que le caractère alterné de $\det_{\mathcal{B}_0}$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = 0$$

Donc $\varphi \in \wedge_{\mathbb{K}}^n = \mathrm{Vect}\{\det_{\mathcal{B}_0}\}$

Donc

$$\exists \lambda_{\mathcal{B}_0} \in \mathbb{K} : \varphi = \lambda_{\mathcal{B}_0}.\det_{\mathcal{B}'}$$

d'où,

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda_{\mathcal{B}_0} \times \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n)$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E fixée quelconque. Nous savons que

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0.\det_{\mathcal{B}_0}$$

Donc en multipliant la relation précédente par $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0$,

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \underbrace{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0 \times \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n))}_{\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))} = \lambda_{\mathcal{B}_0} \times \underbrace{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0 \times \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n)}_{\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)}$$

Par conséquent, $\lambda_{\mathcal{B}_0}$ convient pour toute base $\mathcal{B}$.

◊ <u>Unicité</u> Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Particularisons pour $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_0$ et $(u_1, \dots, u_n) \leftarrow \mathcal{B}_0$

$$\det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_0 = \lambda \times 1$$

Donc $\lambda = \det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ Or, en particularisant la relation définissant $\lambda_{\mathcal{B}_0}$ pour $(u_1, \dots, u_n) \leftarrow \mathcal{B}_0$

$$\lambda_{\mathcal{B}_0} = \det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

donc $\lambda = \lambda_{\mathcal{B}_0}$

□

4 Démontrer que le déterminant est un morphisme de $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}, \times)$, application à la caractérisation des automorphismes

1. $\forall (f,g) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)^2, \det(f \circ g) = \det f \times \det g$
2. $\forall f \in \mathcal{L}_K(E), f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \iff \det f \neq 0$

Démonstration. Fixons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

1. Soient $(f,g) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)^2$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned}\det(f \circ g) &= \det_{\mathcal{B}}((f \circ g)(e_1), \dots, (f \circ g)(e_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), \dots, f(g(e_n))) \\ &= \det f \times \det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \dots, g(e_n)) \text{ par définition du déterminant d'un endomorphisme} \\ &= \det f \times \det g \times \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det f \times \det g\end{aligned}$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$
   — Supposons $f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ Appliquons la relation de morphisme pour $g \leftarrow f^{-1}$

$$\underbrace{\det(f \circ f^{-1})}_{=\det \mathrm{Id}_E} = \det f \times \det f^{-1}$$

   Or, $\det \mathrm{Id}_E = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ si bien que $\det f \times \det f^{-1} = 1$ on en déduit que $\det f \neq 0$ et d'autre part que $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$
   — Supposons que $\det f \neq 0$ Par définition du déterminant d'un endomorphisme

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det f \times \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det f$$

   Donc $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \neq 0$ si bien que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E, donc f envoie une base sur une base : c'est un automorphisme.

□

5 Produit d'une matrice carrée par la transposée de sa comatrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \times (\mathrm{com}A)^T = (\mathrm{com}A)^T \times A = \det A \times I_n$

Démonstration. ◊ Montrons que $A \times (\mathrm{com}A)^T = \det A \times I_n$ Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ fixés quelconques

$$\begin{aligned}[A \times (\mathrm{com}A)^T]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}[(\mathrm{com}A)^T]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(\mathrm{com}A)_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \times (-1)^{k+j}\Delta_{j,k}\end{aligned}$$

⋆ Supposons que $i = j$ nous obtenons

$$[A \times (\mathrm{com}A)^T]_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \times (-1)^{k+i}\Delta_{i,k} = \det A$$

D'après la formule du développement du déterminant de A selon la i-ième ligne.

⋆ Supposons que $i \neq j$ La formule peut être interprétée comme le développement selon la i-ième ligne du déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j-ième ligne par sa i-ième ligne :

$$\begin{aligned}
\left[A \times (\text{com}A)^T\right]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \times (-1)^{k+j} \Delta_{j,k} \\
&= \begin{vmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_{i-1} \\ \hline L_i \\ \hline L_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline L_{j-1} \\ \hline L_i \\ \hline L_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Car les lignes d'indice i et j sont identiques. Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [A \times (\text{com}A)^T]_{i,j} = \delta_{i,j} \times \det A$ Donc

$$[A \times (\text{com}A)^T]_{i,j} = \det A \times I_n$$

◊ On montre de même le produit dans l'autre sens.

□

6 Formule de Cramer

Le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et de paramètre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit "de Cramer" s'il admet une unique solution, à savoir si A est une matrice inversible. Dans ce cas, la solution peut être exprimée explicitement par la formule $A^{-1}B$ qui donne la formule dite de Cramer :

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} B \mid C_2 \mid \cdots \mid C_n \end{vmatrix}}{\det A}, \dots, \frac{\begin{vmatrix} C_1 \mid \cdots \mid C_{i-1} \mid B \mid C_{i+1} \mid \cdots \mid C_n \end{vmatrix}}{\det A}, \dots, \frac{\begin{vmatrix} C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid B \end{vmatrix}}{\det A} \right)$$

où $(C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n$ sont les colonnes de A.

Démonstration. Partons de l'expression de l'inverse avec la comatrice :

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\text{com}A)^T B$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$
\begin{aligned}
X_{i,1} &= \frac{1}{\det A}[(\mathrm{com} A)^T B]_{i,j} \\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}[(\mathrm{com} A)^T]_{i,k} B_{k,1} \\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{com} A)_{k,i} B_{k,1} \\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}\Delta_{k,i} B_{k,1} \\
&\text{qui s'interprète comme le développement selon la } i\text{-ième colonne de la matrice} \\
&= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} C_1 \end{vmatrix}\dots\begin{vmatrix} C_{i-1} \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} C_{i+1} \end{vmatrix}\dots\begin{vmatrix} C_n \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

□

7 Calcul du déterminant de Vandermonde

Démonstration. Posons

$$
\mathcal{P}(n) : \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)
$$

◊ <u>Initialisation</u> $n \leftarrow 2$ Soient $(a_0, a_1) \in \mathbb{K}^2$

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_0
$$

◊ <u>Hérédité</u>, soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soient $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+2}$ fixés quelconques.

- Supposons que les éléments de $\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ ne sont pas tous deux à deux distincts. Alors le déterminant à calculer possède deux colonnes identiques donc il est nul, et la formule avec laquelle il doit coïncider s'annule également, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie dans ce cas
- Supposons que les éléments de $\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ sont tous distincts. Notons

$$
Q(X) = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & X \\
a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & X^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_0^n & a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & X^n \\
a_0^{n+1} & a_1^{n+1} & a_2^{n+1} & \dots & a_n^{n+1} & X^{n+1}
\end{vmatrix}
$$

Sachant que le déterminant d'une matrice est une somme de produits de coefficients de la matrice, puisque tous les coefficients du déterminant $Q(X)$ sont des polynômes en X, $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ (car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau et donc stable par produit). De plus, en développant le déterminant $Q(X)$ selon sa dernière colonne, on observe d'une part que $\deg Q \leqslant n+1$ et d'autre part que le coefficient de X^{n+1} est le cofacteur de X^{n+1} qui est, d'après $\mathcal{P}(n)$

$$
\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)
$$

Et, comme tous les a_i sont distincts, ce coefficient est non-nul, donc $\deg Q = n+1$

De plus, $Q(a_0) = 0, Q(a_1) = 0, \dots, Q(a_n) = 0$ car le déterminant présente dans chacun des calculs deux colonnes égales. Nous en déduisons que Q admet au moins $(n+1)$ racines deux à deux distinctes, or son degré est exactement $n+1$ donc - il n'y a aucune autre racine - elles sont toutes simples

La forme factorisée de Q est donc

$$Q(X) = \underbrace{\left(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \right)}_{\text{coefficient dominant}} \times \underbrace{\prod_{k=0}^{n} (X - a_k)^1}_{n+1 \text{ racines simples}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) &= Q(a_{n+1}) \\
&= \left(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \right) \times \prod_{k=0}^{n} (a_{n+1} - a_k) \\
&= \left(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \right) \prod_{\substack{0 \leqslant i < j \\ j = n+1}}^{n} (a_j - a_k) \\
&= \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

$\square$