

Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen (relecture)

19 novembre 2023

1 Montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

Démonstration. Soit $f : I \rightarrow F$, avec I, F deux parties non-vides de \mathbb{R} , une telle fonction et notons f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est impaire sur I , alors pour tout $x \in I$, $-x \in I$, ainsi I est centré en 0 et on a :

$$\forall x \in I, f(-x) = -f(x).$$

Ainsi, prenons $y \in F$, alors $-y \in F$ par imparité et bijectivité de f . On a donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

D'où l'imparité de f^{-1} .

Pour ce qui est de l'exemple, prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction \sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ que l'on notera $\widetilde{\sin}$. Sa bijection réciproque est bien entendu $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

De la même manière que dans la démonstration du cas général, prenons $y \in [-1, 1]$, comme $[-1, 1]$ est centré en 0, $-y \in [-1, 1]$, on a dès lors :

$$\begin{aligned} \arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\ &= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\ &= -\arcsin(y). \end{aligned}$$

□

2 Limite (et preuve) lorsque x tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration. Premièrement, posons :

$$\forall (x, \alpha, \beta) \in [1, +\infty[\times (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}.$$

Deuxièmement, montrons que :

$$\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Soit $x \in [1, +\infty[= \mathcal{A}$. Nous savons que la fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* , donc en particulier sur \mathcal{A} . Ainsi, \ln est en dessous de toutes ses tangentes, d'où :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Illustration de l'inégalité :

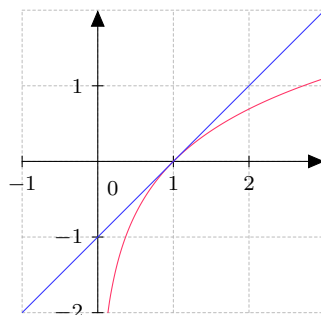


Figure 1. \ln en rouge et la première bissectrice en bleu.

On peut alors diviser par x^2 (car $x \neq 0$) :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{f_{1,2}(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}.$$

Donc par théorème d'encadrement $f_{1,2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Dernièrement, le cas général. Soit $x \in \mathcal{A}$ et soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On fait une preuve directe.

$$\begin{aligned} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \underbrace{\left(\frac{2\alpha}{\beta} \right)^\alpha}_{\substack{\text{cte} \\ \text{(définie!)}}} \cdot \underbrace{\left[\frac{\ln \left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)}{\underbrace{\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)^2}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}} \right]^\alpha}_{\substack{\text{d'après le dernier point} \\ \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}} \\ &\quad \underbrace{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}_{\substack{\text{par composition des limites} \\ \text{par produit}}} \end{aligned}$$

□

3 Limite en 0 de $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et limite en $+\infty$ suivant n de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration.

Montrons que $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.

On fait toujours une preuve directe.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{2x}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{c'est} \\ \text{par produit}}} \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right]^2}_{\substack{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \text{limite usuelle} \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \text{par composition}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Trouvons la limite, sous réserve d'existence, de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ suivant n en $+\infty$.

Remarquons que si $q \leq 0$, il est **nécessaire** d'avoir $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ sinon l'expression n'a tout simplement **aucun sens**. De fait, on supposera $q > 0$ tout le long, les cas $q < 0$ se font naturellement (convergence pour $q \in \mathbb{R}_-$).

Soit donc $0 < q < 1$, ce cas est immédiat, $((q^n)^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} = ((q^\alpha)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc il s'agit de la suite géométrique de raison $q^\alpha \in]0, 1[$ et de premier terme $q^{\min_I(n)\alpha}$ ($\min_I(n)$, avec I une partie non vide de \mathbb{N} , car la suite ne démarre pas forcément à 0), donc elle converge vers 0.

Si $q \geq 1$, on montre le cas trivial $\alpha = \beta = 1$:

$$\forall n \in \llbracket [q] + 1, +\infty \llbracket, \quad 0 \leq \frac{q^n}{n!} = \underbrace{\frac{q}{1} \times \frac{q}{2} \times \cdots \times \frac{q}{[q]}}_{= \lambda \text{ (une constante)}} \times \underbrace{\frac{q}{[q] + 1}}_{\leq 1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{q}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{q}{n} \leq \underbrace{\frac{\lambda q}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

Par théorème d'existence de limite par encadrement, $\left(\frac{q^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$, montrons le cas général pour $q \geq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta} = \left(\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!} \right)^\beta = \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!}}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{c'est le cas trivial}}} \right)^\beta}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{par composition des limites } (\beta > 0)}}$$

□

4 Présentation exhaustive de la fonction arcsin.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\sin}$ (voir 1.). D'où :

$$\arcsin = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto (\widetilde{\sin})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\sin}$:

1. arcsin est impaire.
2. arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
3. $\arcsin \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.
4. $\arcsin \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
5. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
6. arcsin admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1 .

Graphes de arcsin :

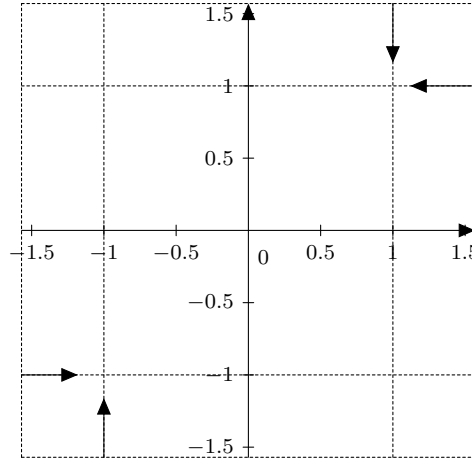


Figure 2. arcsin en bleu, $\widetilde{\sin}$ en vert et la première bissectrice en rouge.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d'arcsin :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(x) \geq x.$$

□

5 Présentation exhaustive de la fonction arccos.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0, \pi]}^{[-1, 1]} := \widetilde{\cos}$. D'où :

$$\arccos = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto (\widetilde{\cos})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in [0, \pi]$, $\cos(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\cos}$:

1. \arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
2. $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [0, \pi])$.
3. $\arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[,]0, \pi[)$.
4. $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
5. \arccos admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1 .

Graphique de \arccos :

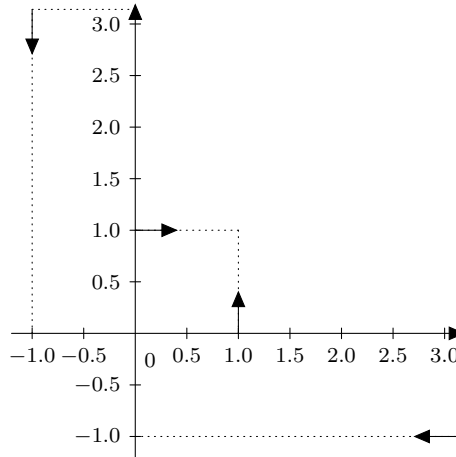


Figure 3. \arccos en vert, $\widetilde{\cos}$ en violet, la première bissectrice en rouge et $y = \frac{\pi}{2} - x$ en rose.

□

6 Présentation exhaustive de la fonction arctan.

Démonstration.

Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} := \widetilde{\tan}$.
D'où :

$$\arctan = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & (\widetilde{\tan})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\tan}$:

1. \arctan est impaire.
2. $\arctan \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
3. $\arctan \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
4. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Graphe de arctan :

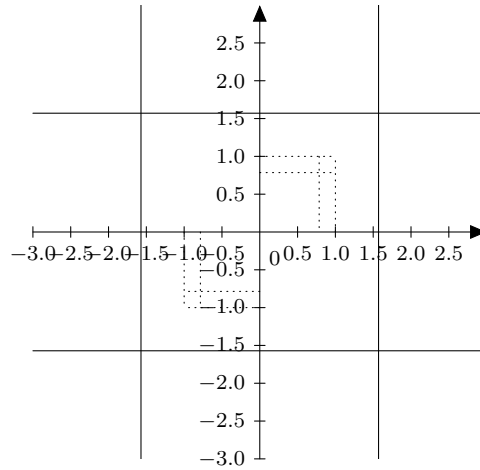


Figure 4. arctan en vert, $\widetilde{\tan}$ en bleu, la première bissectrice en rouge, et les fonctions $y = \pm \frac{\pi}{2}$ et $x = \pm \frac{\pi}{2}$ en noir.

On a aussi (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(x) \leq x.$$

Et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

□

7 2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$, dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.

Démonstration. L'interprétation géométrique sur $[0, 1]$, celle sur $[-1, 0]$ est laissée au lecteur car il s'agit du même principe modulo des détails :

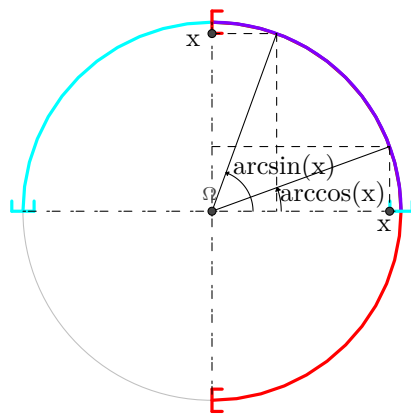


Figure 5.

Preuve formelle :

Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\varphi = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \arccos(\sin(\varphi)) = \varphi + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right),$$

or $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$ d'où $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)) = \frac{\pi}{2} - \varphi$ si bien que :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

□

8 Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.

Démonstration.

- Domaine de définition et symétries.

sinh et cosh sont définies sur \mathbb{R} .

De plus,

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$,

$$(ii) \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sinh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \\ \text{et} \\ \cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x). \end{cases}$$

Donc sinh et cosh sont respectivement impaire et paire.

Nous les étudierons sur \mathbb{R}_+ et pour les obtenir les graphes (\mathcal{C}_{\sinh} et \mathcal{C}_{\cosh}) de ces fonctions sur \mathbb{R} à partir de ceux (\mathcal{C}_{\sinh}^+ et \mathcal{C}_{\cosh}^+) obtenus sur \mathbb{R}_+ , nous le compléterons en traçant les images de ces graphes par la symétrie centrale s de centre O et par la réflexion r d'axe (O, \vec{j}) :

$$\mathcal{C}_{\sinh} = \mathcal{C}_{\sinh}^+ \cup s(\mathcal{C}_{\sinh}^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\cosh} = \mathcal{C}_{\cosh}^+ \cup r(\mathcal{C}_{\cosh}^+)$$

- Variations : triviales.
- Branches infinies en $+\infty$ et position relative de \mathcal{C}_{\sinh} et \mathcal{C}_{\cosh} .

$$\frac{\cosh(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty} + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc le graphe de cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique (O, \vec{j}) .

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$$

Donc les graphes des deux fonctions se rapprochent l'un de l'autre arbitrairement près lorsque $x \rightarrow +\infty$, et le graphe de cosh est au-dessus de celui de sinh.

- Tangente au graphe de sinh à l'origine et position relative.

Il s'agira d'étudier $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sinh(x) - x$, de remarquer sa dérivabilité d'en étudier les variations puis de conclure, en précisant que cette étude révèle l'inflexion du graphe de sinh en 0.

□