Khôlles de Mathématiques - Semaine 12

Kylian Boyet, Hugo Vangilluwen

16 décembre 2023

1 Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur $\mathbb{C}$ est à adapter sans peine.
Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.
Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε.
Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de $\mathbb{N}$. Posons ensuite $\varphi(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \ \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \ \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq M,$$

donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leq M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.
Par ailleurs, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\underbrace{|u_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell'-\ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. □

2 Monotonie de u et des sous-suites des termes pairs et impairs de la suite$u_{n+1} = f(u_n)$ selon la monotonie de f

Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ une intervalle f-stable.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite récurrente associée à la fonction f c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante sur I.
  Si $u_1 \geqslant u_0$ alors u est croissante.
  Si $u_1 \leqslant u_0$ alors u est décroissante.
- Si f est décroissante sur I.
  Les sous-suites $(u_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotone et ont une monotonie opposée (utiliser les premiers termes pour trouver leur monotonie respectives).

Démonstration. Soient de tels f, I et u.

— Supposons que f est croissante sur I.
Supposons $u_1 \geqslant u_0$. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\bullet)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : "u_{n+1} \geqslant u_n"$$

Par hypothèse, $u_1 \geqslant u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $\mathcal{P}(n)$ vrai.

$$u_{n+1} \geqslant u_n \underbrace{\implies}_{f \text{ est croissante sur } I} f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) \implies u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
Si $u_1 \leqslant u_0$, il suffit de changer $\geqslant$ par $\leqslant$ dans la récurrence ci-dessus.

— Supposons que f est décroissante sur I.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$. Or $f \circ f$ est croissante, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
Supposons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Alors

$$u_{2n} \leqslant u_{2(n+1)} \underbrace{\implies}_{f \text{ est décroissante sur } I} f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2(n+1)}) \implies u_{2n+1} \geqslant u_{2(n+1)+1}$$

Donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De même, si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

□

3 L'intérieur de l'ensemble des rationnels est vide.

Montrons que : $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\mathbb{Q}$ possède au moins un point intérieur.
Fixons $r_0 \in \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$. Par définition d'un point intérieur, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]r_0 - \varepsilon,\ r_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$. Or, par densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : r_0 - \varepsilon < \alpha < r_0 + \varepsilon$. On en déduit que $\alpha \in]r_0 - \varepsilon,\ r_0 + \varepsilon[$, or $]r_0 - \varepsilon,\ r_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$ donc $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit le choix de $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Ainsi, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ □

4 Théorème sans nom version continue au voisinage de a

Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathcal{D}}$ tels que $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et g tend vers 0 en a. Alors montrons que f tend vers ℓ en a.

Démonstration. On traite le cas $a \in \mathbb{R}$. Par définition de $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a,

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D},\ |x - a| \leq \varepsilon \implies |f(x) - \ell| \leq g(x).$$

Fixons un tel ε.
Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ pour $\varepsilon \leftarrow \omega$:

$$\exists \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D},\ |x - a| \leq \varepsilon' \implies |g(x)| \leq \omega.$$

Fixons un tel ε'.
Posons $\Omega = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$.
Soit $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x - a| \leq \Omega$.

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \leq \omega,$$

car la définition de Ω permet de remplir les conditions des deux propriétés. □