Khôlles de Mathématiques - Semaine 18

Hugo Vangilluwen, Kylian Boyet

20 Février 2024

1 Interprétation d'un DL en terme de dérivabilité

Soit f définie sur un intervalle contenant x_0. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un $DL_1(x_0)$.

Démonstration.

▷ Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0.

($\Longrightarrow$) Supposons que f admet le $DL_1(x_0)$

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Alors, son existence implique celle du développement limité à l'ordre 0

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + o(1)$$

ce qui permet d'affirmer que $f(x_0) = a_0$.
Par ailleurs, l'existence du $DL_1(x_0)$ garantit qu'il existe une fonction ε définie sur $\mathcal{D}_f$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \underbrace{a_0}_{=f(x_0)} + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

donc

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\},\ \frac{f(x) f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$$

d'où

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$$

ce qui montre que f est dérivable en x_0. On a de plus $f'(x_0) = a_1$.

($\Longleftarrow$) Réciproquement, si f est dérivable en x_0, alors f admet comme $DL_1(x_0)$ son approximation au premier ordre, à savoir

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

La preuve consiste à poser l'application

$$\varepsilon \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

puis à montrer dans un premier temps que cette application convient, et dans un second temps à écrire $|\varepsilon(x)|$ comme la distance entre le taux d'accroissement en x_0 de f et $f'(x_0)$, pour pouvoir conclure en utilisant la définition de la dérivabilité de f en x_0 (limite de son taux d'accroissement) quand à la convergence vers 0 de ε.

▷ *Exemple de fonction admettant un $DL_2(0)$ mais pas de dérivée seconde.*
Considérons la fonction f définie aur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } s \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant |x|^3 \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} o(x^2)$$

ainsi f admet un $DL_1(0)$ et un $DL_2(0)$. Elle est donc dérivable en x_0 et les théorèmes usuels montrent que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{-2}{x^3} = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \underbrace{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{n'as pas de limite en } 0^+}$$

donc $f'(x)$ n'a pas de limite à droite en 0 donc $f'(x)$ n'a pas de limte en 0 donc f' n'est pas continue en 0 donc n'est pas dérivable.

□

2 Calcul du $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$

Démonstration. La fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ donc la formule de Taylor-Young permet d'affirmer qu'elle admet en 0 des DL à tout ordre donnés par

$$f_\alpha(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

or $f_\alpha^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha$, $f_\alpha^{(1)}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f_\alpha^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ et on obtient facilement par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f_\alpha^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

si bien que $f_\alpha^{(0)}(0) = 1$, $f_\alpha^{(1)}(0) = \alpha$, $f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-k+1)$$

Rappelons que, pour $(m,k) \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leqslant k \leqslant m$, le coefficient binomial $\binom{m}{k}$ vaut 1 si $k=0$ et sinon,

$$\forall k \in [\![1, m]\!], \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1) \times \cdots \times (m-k+1)}{k!}$$

si bien qu'il semble assez naturel de généraliser cette notation en posant pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

$$\underbrace{\binom{\alpha}{0} = 1}_{=f_\alpha^{(0)}(0)} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \underbrace{\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-k+1)}{k!}}_{=\frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!}}$$

de sorte que la formule de Taylor Young s'écrive

$$f_\alpha(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

□

3 Théorème d'intégragion d'un développement limité

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I, F une primitive de f définie sur I, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que f admet en x_0 le $DL_n(x_0)$:

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

alors F admet un $DL_{\boldsymbol{n+1}}(x_0)$ qui est

$$F(x) \underset{x\to x_0}{=} F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_0}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1})$$

Démonstration. Posons

$$g \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & F(x) - F(x_0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(x-x_0)^{k+1}}{k+1} \end{array} \right.$$

On souhaite montrer que $g(x) = o((x-x_0)^{n+1})$ *pour avoir* $\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, *i.e.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x-x_0| \leqslant \eta \implies \left| \frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \right| \leqslant \varepsilon$$

Nous allons pour cela utiliser l'inégalité des accroissements finis généralisée à $\mathbb{C}$*.* La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\forall x \in I, g'(x) = F'(x) - 0 - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(k+1)(x-x_0)^{k+1-1} = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

L'hypothèse de l'existence du $DL_n(x_1)$ de f donne l'existence de $\delta : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \delta(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \delta(x) = 0$$

Par conséquent,

$$\forall t \in I, |g'(t)| = |t-x|^n \delta(t)$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur $[x_0, x] \cup [x, x_0]$ à g continue sur cet intervalle et dérivable sur son intérieur :

$$|g(x) - g(x_0)| \leqslant \|g'\|_{\infty,[x,x_0]\cup[x_0,x]} |x-x_0| \tag{1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque. Appliquons la définition de la limite en 0 de δ :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall t \in I, |t-x_0| \leqslant \eta \implies |\delta(t)| \leqslant \varepsilon$$

Fixons un tel η. Soit $x \in I$ fixé quelconque tel que $|x-x_0| \leqslant \eta$. Majorons $\|g'\|_{\infty,[x,x_0]\cup[x_0,x]}$: soit $t \in I$ tel que $t \in [x_0,x] \cup [x, x_0]$. Alors,

$$|g'(t)| = \underbrace{|t-x_0|^n}_{\leqslant |x-x_0|} \times \underbrace{|\delta(t)|}_{\leqslant \varepsilon \text{ car } |t-x_0| \leqslant |x-x_0| \leqslant \eta \text{ donc } (2)} \leqslant |x-x_0|^n \varepsilon$$

ce dernier terme ne dépendant pas de t, il majore $\{|g'(t)| \mid t \in [x_0,x] \cup [x,x_0]\}$, donc

$$\|g'\|_{\infty,[x,x_0]\cup[x_0,x]} \leqslant |x-x_0|^n \times \varepsilon$$

donc par (1),

$$|g(x)| \leqslant |x-x_0|^n \times \varepsilon \times |x-x_0|$$

donc $|g(x)| \leqslant \varepsilon |x-x_0|^{n+1}$ ce qui établit $g(x) \underset{x\to x_0}{=} o((x-x_0)^{n+1})$. □

4 Formule explicite du $DL_{2n+1}(0)$ de arcsin.

Démonstration. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, et

$$\forall u \in]-1,1[\,, \arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{or} \quad \frac{1}{1+t^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^k + o(t^n)$$

donc pour $t \leftarrow -u^2$,

$$\arcsin'(u) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0ntn}^{\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-u^2)^k} + o(u^{2n})$$

La fonction $\arcsin'$ est continue sur $]-1,1[$ donc au voisinage de 0 si bien que par intégration du $DL_{2n}(0)$ ci-dessus,

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\arcsin(0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Or

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}-1\right)\times\left(-\frac{1}{2}-2\right)\times\cdots\times\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\\ &= \frac{\frac{(-1)^k}{2}(1)\times(3)\times(5)\times\cdots\times(2k-1)}{k!}\\ &= \frac{(1)^k(1)\times(2)\times(3)\times\cdots\times(2k-2)\times(2k11)\times(2k)}{2^k k!\times 2\times 4\times 6\times\cdots\times 2k}\\ &= \frac{(1)^k(2k)!}{2^k k! 2^k k!}\\ &= \frac{(1)^k(2k)!}{2^{2k}k!^2}\end{aligned}$$

si bien que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(2k+1)2^{2k}k!^2} x^{2k+1} o(x^{2n+1})$$

□

5 $DL_{10}(0)$ de $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$

Démonstration. Posons pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$. C'est la primitive qui s'annule en 0 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $F\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La formule de Taylor-Young permet alors d'affirmer que F admet des DL est tout point à tout ordre. De plus,

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{3}{8}x^8 + o(x^{11})$$

si bien que d'après le théorème d'intégration des DL (F' est continue au voisinage de 0 sur $\mathbb{R}$),

$$\begin{aligned}F(x) &\underset{x\to 0}{=} F(0) + \int_0^x \left(1 - \frac{t^4}{2} + \frac{3}{8}\right)\mathrm{d}t + o(x12)\\ &\underset{x\to 0}{=} 0 + \left[t - \frac{t^5}{10} + \frac{1}{24}t^9\right]_0^x + o(x^{12})\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + o(x^{12})\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}f(x) &= F(x^2) - F(x)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{17}) - x + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 + o(x^{12})\\ &\underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{18})\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$$

□

6 Deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont le même signe sur un voisinage de a

Démonstration. Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ avec $a \in \mathcal{D}$.
Appliquons la définition de l'équivalence pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2}$, il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2}|g(x)|$$

Fixons un tel voisinage V. Nous obtenons :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, \underbrace{g(x) - \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{g(x) + \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)}$$

Ainsi $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $V \cap \mathcal{D}$. □

7 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ admette un extremum local ou un point d'inflexion

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ et $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Supposons que $E_0 = \left\{p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid f^{(p)}(a) \neq 0\right\}$ est non vide.
Posons $p_0 = \min E_0$.
f admet un extremum local en a si et seulement si $f'(a) = 0$ et p_0 est pair.
f admet un point d'inflexion en a si et seulement si p_0 est impair.

Démonstration. Soient de tels objets. Traitons le cas de l'extremum local.
$f \in \mathcal{C}^\infty$ donc, la formule Taylor-Young donne un $DL_{p_0}(a)$ de f :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p_0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^{p_0}\right)$$

En développant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \underbrace{f'(a)(x-a)}_{=0} + \underbrace{\ldots + \frac{f^{(p_0-1)}(a)}{(p_0-1)!}(x-a)^{p_0-1}}_{=0 \text{ par défintion de } p_0} + \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} + o\left((x-a)^{p_0}\right)$$

Ainsi (car $f^{(p_0)}(a) \neq 0$)

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} \tag{2}$$

Au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ et $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ ont le même signe.

Supposons que f admette un extremum local en a. Or $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ et f est dérivable en 0, donc $f'(a) = 0$. Comme f admette un extremum local en a, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a. Donc $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de a. Par conséquent, p_0 est pair.

Réciproquement, supposons que $f'(a) = 0$ et que p_0 est pair. $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de a. Donc $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a. Ainsi, a est un extremum local de f.

Traitons le cas du point d'inflexion. La formule de Taylor-Young donne :

$$f(x) - \underbrace{(f(a) + (x-a)f'(a))}_{\text{tangente en } (a, f(a))} \underset{x\to a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} \tag{3}$$

Le signe de l'écart courbe/tangente en a est donc celui de $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$. Ce qui conclut de la même manière que l'extremum local. □