

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 20

Hugo Vangilluwen, George Ober, Kylian Boyet

10 Mars 2024

## 1 Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[X]^\times = \{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\} \quad (1)$$

*Démonstration.* Soit  $P$  un élément inversible de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors  $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P \cdot Q = Q \cdot P = 1_{\mathbb{K}[X]}$ . En prenant les degrés des polynômes,  $\deg P + \deg Q = 0$ .

Or  $\deg : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{N}$  donc  $\deg P = \deg Q = 0$ . Donc  $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : P = \lambda$ .

Ainsi  $\mathbb{K}[X]^\times \subset \{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . Considérons  $P = \lambda$ . Posons  $Q = \lambda^{-1}$  (car  $\mathbb{K}$  est un corps).  $P \cdot Q = \lambda \lambda^{-1} = 1$  et  $Q \cdot P = \lambda^{-1} \lambda = 1$  donc  $P$  est inversible. Ainsi  $\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\} \subset \mathbb{K}[X]^\times$ .  $\square$

## 2 Théorème d'interpolation de lagrange

Le problème d'interpolation de Lagrange est, pour  $n \in \mathbb{N}$  avec  $a \in \mathbb{K}^{n+1}$  et  $b \in \mathbb{K}^{n+1}$ , l'ensemble des polynômes passant par tous les points de coordonnée  $(a_i, b_i)$ . C'est-à-dire l'ensemble des  $P \in \mathbb{K}[X]$  vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(a_i) = b_i \quad (2)$$

Il existe une unique solution  $P$  de degré  $\leq n$  au problème d'interpolation de lagrange, et elle s'exprime de la manière suivante en posant

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \quad (3)$$

$$P = \sum_{i=0}^n b_i L_i \quad (4)$$

*Démonstration.* — Unicité

Supposons qu'il existe  $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$  solutions du problème d'interpolation.

Alors  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{P}(a_i) = \tilde{Q}(a_i) = b_i$

Posons  $H = P - Q$ , alors,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{H}(a_i) = \tilde{P}(a_i) - \tilde{Q}(a_i) = 0$ .

De plus,  $\deg H = \deg(P - Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\}$

Donc  $H$  est un polynôme de degré  $\leq n$  avec  $|\llbracket 0, n \rrbracket| = n + 1$  racines.

Donc  $H$  est le polynôme nul.

— Existence Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  fq Notons  $L_i$  une solution de degré  $\leq n$  au problème  $Pb_i$  suivant :

$$(Pb_i) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}(a_0) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}(a_{i-1}) = 0 \\ \tilde{P}(a_i) = 1 \\ \tilde{P}(a_n) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}(a_n) = 0 \end{array} \right.$$

On remarque que  $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$  sont  $n$  racines deux à deux distinctes de  $L_i$ . Or  $L_i$  est de degré  $\leq n$  et n'est pas le polynôme nul (car  $\tilde{L}_i(a_i) = 0$ ) donc  $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$  sont les *seules* racines de  $L_i$ , toutes simples.

Dès lors,

$$\exists c \in \mathbb{K}^* : L_i = c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$$

Pour trouver le  $c$ , remarquons que

$$\begin{aligned} \tilde{L}_i(a_i) = 1 &\iff c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j) = 1 \\ &\iff c = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{1}{a_i - a_j} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, s'il existe une solution au problème  $Pb_i$  c'est nécessairement

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$$

Réciproquement, cette solution est correcte puisque

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \neq i, \tilde{L}_i(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{\overbrace{a_k - a_j}^{=0}}{a_i - a_j} \right) = 0$$

Et

$$\tilde{L}_i(a_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} \right) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n 1 = 1$$

Posons donc  $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$ .

Alors, par construction,

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{P}(a_k) = \sum_{i=0}^n \left( b_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} \right) \right) = \sum_{i=0}^n (b_i \delta_{ki}) = b_k \delta_{kk} = b_k$$

Nous avons donc construit une solution unique au problème d'interpolation de Lagrange □

### 3 Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ (caractéristique nulle)

Soient  $P$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $a \in \mathbb{K}$ . On a :

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\widetilde{P^{(n)}}(a)}{n!} (X - a)^n \tag{5}$$

*Démonstration.* Considérons le prédicat  $\mathcal{P}(\cdot)$  défini sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“ } \forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X - a)^k \text{”}$$

Initialisation : pour  $n = 0$ , soit  $P \in \mathbb{K}_0[X]$ .

$\exists p_0 \in \mathbb{K} : P = p_0 X^0$  et  $\sum_{k=0}^0 \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X - a)^k = \frac{\widetilde{P^{(0)}}(a)}{1} X^0 = p_0 X^0$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  vrai.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$ . Soit  $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ . On a donc  $\deg P' = \deg P - 1 \leq n$  donc  $\mathcal{P}(n)$  s'applique à  $P'$  :

$$P' = \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P'(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = \left( \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!} \frac{(X-a)^{k+1}}{k+1} \right)',$$

donc :

$$\left( P - \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!} \frac{(X-a)^{k+1}}{k+1} \right)' = 0 \implies \exists \mu \in \mathbb{K} : P - \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{k!} \frac{(X-a)^{k+1}}{k+1} = \mu,$$

ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k+1)}}(a)}{(k+1)!} (X-a)^{k+1} + \mu = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X-a)^k + \mu,$$

donc en  $a$  par  $\varphi_a$  :

$$\tilde{P}(a) = \mu \implies P = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X-a)^k + \tilde{P}(a) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X-a)^k,$$

donc  $\mathcal{P}(n+1)$  vrai. Ainsi par théorème de récurrence sur  $\mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 4 Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Soit  $a \in \mathbb{K}$ .

$$a \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité au moins } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$a \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité d'exactly } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^m(a) \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

*Démonstration.* • Supposons que  $a$  est une racine de  $P$  de multiplicité au moins  $m$ .

Alors  $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-a)^m Q$ . D'après la formule de Leibniz, pour tout  $k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} ((X-a)^m)^{(k-i)} Q^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-(k-i))!} (X-a)^{m-(k-i)} Q^{(i)} \\ &= \underbrace{(X-a)^{(m-k)}}_{\substack{\text{c'est un bien un polynôme} \\ \text{non constant car } k < m}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-(k-i))!} (X-a)^i Q^{(i)} \end{aligned}$$

Donc  $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$ .

- Supposons que  $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$ .  
Appliquons la formule de Taylor a.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \underbrace{\frac{P^{(n)}(a)}{n!}}_{=0} (X-a)^n + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n \\ &= (X-a)^m \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \underbrace{(X-a)^{n-m}}_{\in \mathbb{K}[X] \text{ car } n-m \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Donc  $(X-a)^m | P$ . Donc  $a$  est racine de  $P$  de multiplicité au moins  $m$ .

- Supposons que  $a$  est une racine de  $P$  de multiplicité exactement  $m$ .  
Nous pouvons appliquer le point précédent car la multiplicité est supérieur à  $m$  :  $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$ .  
Par l'absurde, si  $P^{(m)}(a) = 0$  alors le point précédent donne que  $a$  a une multiplicité supérieur à  $m+1$  donc  $m \geq m+1$  ce qui est une contradiction.  
Par conséquent,  $P^{(m)}(a) \neq 0$ .
- Supposons  $\forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$  et  $P^{(m)}(a) \neq 0$ .  
En reprenant le calcul précédent, pour  $k = m$ , en sachant que  $(X-a)^{(m-k)} = X^0$ ,

$$P^{(m)} = \binom{m}{0} \frac{m!}{0!} (X-a)^0 P + \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \frac{m!}{i!} (X-a)^i Q^{(i)}$$

D'où  $P^{(m)}(a) = m! Q(a)$  donc  $Q(a) = \frac{P^{(m)}(a)}{m!}$ . Donc  $Q(a) \neq 0$ .

Par l'absurde, supposons que  $(X-a)^{m+1} | P$ . Alors  $\exists R \in \mathbb{K}[X] : P = (X-a)^{m+1} R$ . Donc  $(X-a)^{m+1} R = (X-a)^m Q$  d'où  $Q = (X-a) R$ . Nous obtenons  $Q(a) = 0$  ce qui est une contradiction avec  $Q(a) \neq 0$ .

Donc  $a$  est une racine de  $P$  de multiplicité strictement inférieur à  $m+1$  et, d'après le point précédent, supérieur à  $m$ . Donc  $a$  est une racine de  $P$  de multiplicité exactement  $m$ . □

## 5 Identification de $\mathbb{K}[X]$ à $\mathbb{K}[x]$ , par l'injectivité de $\Phi$

*Démonstration.* Montrons que l'application  $\Phi$  définie comme suit est injective :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array} \right.$$

Soit donc  $P \in \ker \Phi$ , on a :

$$\Phi(P) = \tilde{0} \implies \tilde{P} = \tilde{0} \text{ sur } \mathbb{K} \implies P = 0_{\mathbb{K}[X]},$$

donc  $\ker \Phi \subset \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ .

Réciproquement, on calcule l'image du polynôme nul par  $\Phi$  :

$$\Phi(0_{\mathbb{K}[X]}) = \tilde{0},$$

donc  $0_{\mathbb{K}[X]} \in \ker \Phi$ , ainsi on a l'égalité ensembliste et donc cela suffit. □

## 6 Pour $P = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ , exprimer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires

Les fonctions symétriques élémentaires  $(\sigma_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  pour une famille  $(x_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  sont définies par

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{i_j} \quad (8)$$

*Démonstration.* Sous forme développée,  $P = X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3 = X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3$ . Comme  $x_1, x_2, x_3$  sont racines de  $P$ , nous avons les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= P(x_1) = x_1^3 - \sigma_1x_1^2 + \sigma_2x_1 - \sigma_3 \\ 0 &= P(x_2) = x_2^3 - \sigma_1x_2^2 + \sigma_2x_2 - \sigma_3 \\ 0 &= P(x_3) = x_3^3 - \sigma_1x_3^2 + \sigma_2x_3 - \sigma_3 \end{aligned}$$

En sommant ces trois équations,

$$0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \sigma_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sigma_2(x_1 + x_2 + x_3) - 3\sigma_3$$

Cherchons la somme des carrés.

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ \implies x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

□

## 7 Expression de $S_2$ , $S_{-1}$ et $S_{-2}$ à l'aide des fonctions élémentaires symétriques.

Les sommes de Newton  $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}^*}$  pour une famille  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  sont définies par (sous réserve d'existence pour  $k < 0$ ) :

$$S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \quad (9)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{S_2} + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}_{\sigma_2} \\ \implies S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

$$S_{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j}{\prod_{i=1}^n x_i} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$$

$$\begin{aligned} S_{-2} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i} \frac{1}{x_j} \\ &= \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n^2} - 2 \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^n x_k}{\sigma_n} \\ &= \frac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-2}\sigma_n}{\sigma_n^2} \end{aligned}$$

□