Khôlles de Mathématiques - Semaine 9

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen

29 novembre 2023

1 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Soit $x \in E$.
La classe de x, notée $\bar{x}$, est l'ensemble des éléments de E en relation avec x.

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.
Soient $(x, y) \in E^2$ fixés quelconques

- Si $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, rien à démontrer.
- Sinon $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ donc $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Fixons un tel z.
  Soit $x' \in \bar{x}$ fq.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \underset{\text{symétrie}}{\implies} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \end{array}\right\} \underset{\text{transitivité}}{\implies} x'\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \underset{\text{symétrie}}{\implies} z\mathcal{R}y \end{array}\right\} \underset{\text{transitivité}}{\implies} x'\mathcal{R}y \underset{\text{symétrie}}{\implies} y\mathcal{R}x'$$

  Donc $x' \in \bar{y}$ donc $\bar{x} \subset \bar{y}$.
  En échangeant les rôles de x et y, on montre la deuxième inclusion $\bar{y} \subset \bar{x}$.

Montrons que les classes d'équivalence de E constituent une partition de E.
Soit $\mathcal{S}$ un système de représentant des classes fixé quelconque.

- Soit $s \in \mathcal{S}$ fixé quelconque $\bar{s} \neq \emptyset$ car $s\mathcal{R}s$ par réflexivité.
- Soit $(s, s') \in \mathcal{S}^2$ fq. D'après la démonstration ci-dessus ci-dessus, $\bar{s} \cap \bar{s'} = \emptyset$ ou $\bar{s} = \bar{s'}$. Si $\bar{s} = \bar{s'}$ alors s et s' représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent, $\bar{s}$ et $\bar{s'}$ sont disjoints.
- $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$ car $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \in E$ par définition d'une classe d'équivalence.
  Réciproquement, soit $x \in E$ fq.
  Par réflexivité de $\mathcal{R}$, $x \in \bar{x}$.
  Par définition d'un système de classe $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$ donc $\bar{s_x} = \bar{x}$. Donc $x \in \bar{s_x} \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
  Donc $E \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
  Par double inclusion, $E = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Ainsi,

$$E = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$$

□

2 Définition de l'addition pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la manière suivante

$$+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \left| \begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\bar{x} & , & \bar{y}) & \mapsto & \overline{x +_{\mathbb{Z}} y} \end{array} \right.$$

Démonstration. ⋆ Cette définition n'est pas cohérente à priori, car la valeur attribuée à $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dépend de x et de y alors qu'elle ne doit dépendre que de $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Il faudra bien vérifier que le résultat est le même, peu importe le représentant choisi.

Soient $(x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $\bar{x} = \bar{x}'$ et $\bar{y} = \bar{y}'$.

On a $\exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2 : x = x' + np, y = y' + nq$

$$\overline{x +_{\mathbb{Z}} y} = \overline{x' + np + y' + nq} = \overline{x' + y' + n(p + q)} = \overline{x' + y'}$$

On a donc bien égalité du résultat, peu importe le représentant de classe choisi, ce qui définit bien l'addition $+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

⋆ Montrons que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})$ est un groupe abélien.

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est stable pour la loi $+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ (par définition).
- Cette loi est associative : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^3$, on peut choisir un représentant de classe pour ces trois classes : $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\bar{x} = a, \bar{y} = b, \bar{z} = c$

$$(a+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}b)+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}c = \overline{x +_{\mathbb{Z}} y}+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}c = \underbrace{\overline{(x +_{\mathbb{Z}} y) +_{\mathbb{Z}} z} = \overline{x +_{\mathbb{Z}} (y +_{\mathbb{Z}} z)}}_{\text{associativité de } +_{\mathbb{Z}}} = a+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\overline{y +_{\mathbb{Z}} z} = a+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(b+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}c)$$

- Cette loi est commutative : Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^2$, on choisit, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ des représentants de classe tels que $\bar{x} = a, \bar{y} = b$

$$a +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} b = \underbrace{\overline{x +_{\mathbb{Z}} y} = \overline{y +_{\mathbb{Z}} x}}_{\text{commutativité de } +_{\mathbb{Z}}} = b +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} a$$

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un élément neutre pour $+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$: Soit $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on choisit $x \in \mathbb{Z}$ un représentant de classe tel que $\bar{x} = a$

$$a +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \bar{0} = \overline{x +_{\mathbb{Z}} 0} = \bar{x} = a$$

Donc $\bar{0}$ est un élément neutre à droite, et par commutativité de $+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ prouvée plus haut, $\bar{0}$ est aussi élément neutre à gauche.

Ainsi, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})$ est un Groupe Abélien.

□

3 Dans un ensemble totalement ordonné, toute partie finie non vide possède un plus grand élément et un plus petit élément.

Démonstration. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné, considérons pour tour $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété.

$\mathcal{H}_n$: toute partie de E de cardinal n admet un plus petit et un plus grand élément

⋆ Initialisation $n \leftarrow 1$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ fixée telle que $|A| = 1$ A est non vide, donc $\exists a \in A : A = \{a\}$

a est le plus petit et le plus grand élément, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

⋆ Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ fixée quelconque tel que $|A| = n + 1$

$$A \neq \emptyset \implies \exists a \in A : A = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\}$$

Or, $|A \setminus \{a\}| = n$ donc $\mathcal{H}_n$ s'applique et $A \setminus \{a\}$ possède un plus grand et plus petit élément

$$\left\{ \begin{array}{ll} m & = \min A \setminus \{a\} \\ M & = \max A \setminus \{a\} \end{array} \right.$$

◊ Construisons le plus grand élément de A

- Supposons $M \preccurlyeq a$ D'une part $a \in A$ D'autre part

$$\forall x \in A, \quad \left.\begin{array}{l} \text{si } x = a, x \preccurlyeq a \text{ (réflexivité)} \\ \text{sinon } x \in A \setminus \{a\} \implies x \preccurlyeq M \preccurlyeq a \implies x \preccurlyeq a \end{array}\right\} \implies \forall x \in A, x \preccurlyeq a$$

Donc A admet un plus grand élément, et c'est a.

- Sinon, si $M \succ a$, mais $M \in A$ et

$$\forall x \in A, \quad \left.\begin{array}{l} \text{si } x = a, x \preccurlyeq M \\ \text{sinon } x \in A \setminus \{a\} \implies x \preccurlyeq \max(A \setminus \{a\}) = M \end{array}\right\} \implies \forall x \in A, x \preccurlyeq a$$

Donc A admet un plus grand élément, et c'est M

◊ On procède de même pour construire le le plus petit élément de A avec m.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Donc toute partie finie non vide d'un ensemble totalement ordonné possède un plus petit et un plus grand élément.

Étudions l'importance des hypothèses :

⋆ Importance de la finitude de la partie :
On sait qu'une partie infinie d'un ensemble totalement ordonné n'admet pas de plus grand élément : $[0, 1[$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $\mathbb{N}$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

⋆ Importance du caractère total de l'ordre : on connait des ensembles finis partiellement ordonnés qui n'ont pas de plus grand élément :

— $\{3, 12\}$ dans $(\mathbb{R}, =)$ n'admet pas de plus grand élément
— $\{[1, 2], [3, 4]\}$ dans $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$ n'admet pas de plus grand élément
— $\{2, 3\}$ dans $(\mathbb{N}, |)$ non plus.

□

4 Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est sont plus grand élément.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et A une partie non-vide de E.
Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
Si A admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors A admet un plus grand élément et $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soient un tel ensemble E et une telle partie A et notons M son plus grand élément.
Posons l'ensemble des majorants de A, $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A,\ a \leqslant m\}$.
Par définition :

$$\forall m \in M(A),\ M \leqslant m,$$

car $M \in A$, mais comme $M \in M(A)$, on a directement que $M = \min M(A) = \sup A$.

Pseudo-réciproquement, soit A une partie de E admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne S.
Comme $S \in M(A)$, par définition, S est plus grand que tous les éléments de A mais appartient à A, donc de tous les éléments de A, S est le plus grand. □

5 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists!(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [\![0; |b| - 1]\!] \end{cases} \tag{1}$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et deux couples $((q,r),(q',r')) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r \leqslant |b|-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leqslant r' \leqslant |b|-1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q-q') = r' - r,$$

mais comme $-(|b|-1) \leqslant r' - r \leqslant |b|-1$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Existence Posons pour $b \geqslant 1$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leqslant a\}$

— $\Omega \subset \mathbb{Z}$

— non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit ...)

— Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d'Ω.

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max\Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ donc $r \in \mathbb{Z}$. Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leqslant a$ d'où $0 \leqslant r$. Et $q = \max\Omega$ donc $b(q+1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [\![0, |b|-1]\!]$.

Si $b < 1$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. □

6 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et minorée fixée quelconque.
Considérons $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite u.
A est :

— une partie de $\mathbb{Z}$ car u est à valeur dans $\mathbb{Z}$

— non vide car $u_0 \in A$

— minoré car u est minorée

Donc A admet un plus petit élément. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = minA$. Fixons un tel n_0.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geqslant n_0$.

$$\left.\begin{array}{c} u_n \in A \implies u_n \geqslant \min A = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geqslant n_0 \text{ donc } u_n \leqslant u_{n_0} \end{array}\right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi, u est stationnaire. □

7 Caractérisation par les ε de la borne supérieure

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une partie non vide et majorée. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\sigma = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant \sigma \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{cases}$$

Démonstration. $\star$ Supposons $\sigma = \sup A$

- Par définition $\sup A = \min M(A)$ donc $\sigma \in M(A)$ donc $\forall a \in A, a \leqslant \sigma$
- Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque

$$\begin{aligned} \sigma = \min M(A) &\iff \sigma - \varepsilon \notin M(A)(\text{ sinon } \sigma - \varepsilon \geqslant \min M(A) = \sigma \implies \varepsilon \leqslant 0) \\ &\iff \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{aligned}$$

⋆ Réciproquement, supposons

$$\begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant \sigma \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{cases}$$

- D'après la première propriété, $\sigma \in M(A)$
- Montrons que σ est le plus petit des minorants par l'absurde en supposant qu'il existe $M \in M(A)$ tel que $M < \sigma$. On a $\sigma - M > 0$ donc on peut appliquer la deuxième propriété pour $\varepsilon \leftarrow \sigma - M$

  $$\exists a \in A : \sigma - (\sigma - M) < a$$

  Fixons un tel a. On a donc trouvé un $a \in A$ tel que $M < a$ ce qui contredit le fait que M soit un majorant de A. Donc il n'existe pas de majorant plus petit que σ. Donc A admet une borne supérieure qui est σ.

□

8 Montrer que si A et B sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Démonstration. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B$ l'ensemble

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

C'est aussi une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in (A + B)$ fixé quelconque. Par définition de $A + B$, $\exists (a, b) \in A \times B : x = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant \sup A \\ b \leqslant \sup B \end{array}\right\} \implies x = a + b \leqslant \sup A + \sup B$$

On a donc montré que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$, donc $A + B$ admet un majorant, donc $A + B$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc $A + B$ admet une borne supérieure.

Par définition de la borne supérieure, car $\sup(A + B)$ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants :

$$\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$$

De plus $\sup(A + B)$ est un majorant de $A + B$ donc, pour $(a, b) \in A \times B$ fixés, on a

$$a + b \leqslant \sup(A + B) \iff a \leqslant \sup(A + B) - b$$

en relâchant le caractère fixé de a, on a

$$\forall a \in A, a \leqslant \sup(A + B) - b$$

donc $\sup(A + B) - b$ est un majorant de A, donc plus petit que $\sup A$, d'où

$$\sup A \leqslant \sup(A + B) - b \iff b \leqslant \sup(A + B) - \sup A$$

Donc en relâchant le caractère fixé de b on a

$$\forall b \in B, b \leqslant \sup(A + B) - \sup A$$

donc $\sup(A + B) - \sup A$ est un majorant de B donc plus petit que $\sup B$ d'où

$$\sup B \leqslant \sup(A + B) - \sup A \iff \sup A + \sup B \leqslant \sup(A + B)$$

Donc par double inégalité

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B)$$

□