

Khôlles de Mathématiques - Semaine 11

Kylian Boyet, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

13 décembre 2023

1 Caractérisation séquentielle de la densité.

Soient $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})^2$. Montrons que :

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

Démonstration. Sens indirect : supposons $A \subset B$ et $\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b$:

★ $A \subset B$ par hypothèse.

★ Montrons que $\forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$ (on utilise la caractérisation de la densité avec les ε)

Soient $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques :

Par hypothèse appliquée pour $b \leftarrow b : \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$

Appliquons la définition de la convergence de (a_n) vers b pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons un tel N :

En particulier, $a_N \in A$ et $|a_N - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

Donc A est dense dans B .

Sens direct : supposons A dense dans B :

★ Par définition, $A \subset B$

★ Soit $b \in B$ fixé quelconque.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque :

Appliquons la caractérisation de la densité par les ε pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$ (autorisé car $\frac{1}{2^n} > 0$), et $b \leftarrow b$:

$$\exists a \in A : |a - b| \leq \frac{1}{2^n}$$

Notons a_n un tel élément. Nous venons de construire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème sans nom, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b .

□

2 Théorème de la convergence monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite monotone :

1. Si u est croissante

(i) Soit u est majorée, et dans ce cas, $\lim u = \sup\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$

(ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $+\infty$.

2. Si u est décroissante :

(i) Soit u est minorée, et dans ce cas, $\lim u = \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$

(ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone fq.

1. Supposons que u est croissante.

(i) Supposons que u est majorée.

Alors $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. Fixons un tel M .

$\Omega = \{u_k | k \in \mathbb{N}\}$ est

- une partie de \mathbb{R}
- non vide car u_0 y appartient
- majorée par M

donc elle admet une borne supérieure et notons-la σ .

Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq.

$\sigma - \epsilon < \sigma$ donc $\sigma - \epsilon$ ne majore pas Ω . Donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > \sigma - \epsilon$. Fixons un tel N .

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geq N$.

Alors $u_n \underset{\text{par croissant de } u}{\geq} u_N \geq \sigma - \epsilon$ et $u_n \underset{\text{par définition de } \sigma}{\leq} \sigma$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma - \epsilon \leq u_n \leq \sigma &\implies -\epsilon \leq u_n - \sigma \leq 0 \\ &\implies |u_n - \sigma| \leq \epsilon \end{aligned}$$

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$.

(ii) Supposons que u n'est pas bornée.

Soit $A \in \mathbb{R}$ fq.

u n'est pas bornée donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > A$.

Or u est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A$.

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. Supposons que u est décroissante.

Il suffit dans la preuve ci-dessus de remplacer les inégalités inférieures par des inégalités supérieures et inversement et d'utiliser la notion de borne inférieure plutôt que de borne supérieure.

(i) Si u est minorée, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Si u n'est pas bornée, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

□

3 Théorème de Césaro

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors la moyenne arithmétique des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes (appelée moyenne de Césaro) converge vers ℓ .

Démonstration. Soient u une telle suite, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ladite limite de u . Appliquons la définition de la convergence de u pour $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Fixons un tel N . Posons $\omega = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Calculons :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell|}_{= \omega \in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k - \ell|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} \leq \frac{\omega}{n} + \underbrace{\frac{\epsilon}{2n}}_{\leq \frac{\epsilon}{2}}.$$

Ces majorations sont issues de l'inégalité triangulaire et de la convergence de u . De plus, comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\omega}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on écrit sa définition pour $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$:

$$\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \implies |v_n| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On fixe un tel N' et on pose $\Lambda = \max(N, N')$ qui a bien un sens car $\{N, N'\}$ est une partie finie de \mathbb{N} . De la même manière qu'auparavant, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \Lambda$, on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \underbrace{\frac{\omega}{n}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

C'est le théorème souhaité. □

4 Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- (i) Si $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0 \\ u \text{ converge} \end{cases}$
Alors $\lim u \geq 0$
- (ii) Si $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \\ u \text{ et } v \text{ convergent} \end{cases}$
Alors $\lim u \leq \lim v$

Démonstration.

- (i) L'hypothèse $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0$ permet d'affirmer que u et $|u|$ coïncident à partir d'un certain rang.
Par ailleurs, la convergence de u et la continuité de $|\cdot|$ sur \mathbb{R} donc en $\lim u$ donnent $|u|$ converge vers $|\lim u|$.
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que u et $|u|$ ont la même limite.
Donc $\lim u = |\lim u| \geq 0$
- (ii) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \Rightarrow v_n - u_n \geq 0$
 u et v convergent $\Rightarrow v - u$ converge vers $\lim v - \lim u$.
On applique (i) pour $u \leftarrow v - u$, autorisé car u et v convergent.
On obtient $\lim v - \lim u \geq 0$ d'où $\lim u \leq \lim v$. □

5 Théorème des suites adjacentes

Soient u et v deux suites réelles adjacentes. Alors u et v convergent et ont la même limite.

Démonstration. Soient u et v de telles suites. Quitte à inverser les rôles desdites suites, prenons u croissante et v décroissante.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq v_n \leq \underbrace{v_0}_{\in \mathbb{R}}) \wedge (\underbrace{u_0}_{\in \mathbb{R}} \leq u_n \leq v_n),$$

car la monotonie des suites induit ces inégalités. D'après le théorème de limite monotone, u étant croissante et majorée elle converge, v étant décroissante et minorée elle converge.

Il s'en suit que par définition des suites adjacentes :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \underset{\substack{u, v \\ \text{convergent}}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Ainsi, $\lim u = \lim v$. □

6 *Facultative* Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée réelle admet une sous-suite convergente.

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée est non vide.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ fq bornée.

Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Construisons une suite de segments dans $[-M; M]$ de plus en plus petits par dichotomie.
Posons $a_0 = -M$, $b_0 = M$ et définissons les suites c et I pour tout n dans \mathbb{N} par $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $I_n = [a_n; b_n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons a_n et b_n construits et $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ infini. Construisons les termes d'indices $n+1$.

Posons $\begin{cases} I_n^- = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n; c_n]\} \\ I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [c_n; b_n]\} \end{cases}$

Nous avons $I_n^- \cup I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ donc I_n^- ou I_n^+ est infini.

— Si I_n^- est infini, posons $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$
Ainsi $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^-$ est infini.

— Si I_n^+ est infini, posons $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$
Ainsi $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^+$ est infini.

Étudions la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

— Nous avons toujours $a_n \leq b_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \neq \emptyset$

— Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$

— $|I_{n+1}| = |a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \frac{1}{2}|I_n|$ donc la suite des cardinaux est une suite géométrique de raison $1/2$. Donc $|I_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, d'après le théorème des segments emboîtés, $\exists ! \ell \in \mathbb{R} : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$. Fixons un tel ℓ .

Construisons maintenant une extractrice φ de u .

Posons $\varphi(0) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons $\varphi(n)$ construite.

$$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1} \wedge k > \varphi(n)\}$$

$\varphi(n+1)$ est bien définie car $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\}$ est une partie de \mathbb{N} non bornée (car infinie).

Ainsi, nous avons construit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Nous pouvons extraire une sous-suite de u . Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in I_n$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{a_n}_{n \rightarrow +\infty} \leq u_{\varphi(n)} \leq \underbrace{b_n}_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow \ell$$

Donc, d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Ainsi $\ell \in L_u$. □

7 *Facultative* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur \mathbb{C} est à adapter sans peine.

Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.

Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ , c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε .

Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de \mathbb{N} .

Posons ensuite $\varphi(1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M,$$

donc pour tout n dans \mathbb{N} , $|u_{\varphi(n)}| \leq M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.

Par ailleurs, pour tout n dans \mathbb{N} :

$$\underbrace{|u_{\varphi \circ \psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans \mathbb{N} , $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. \square