Khôlles de Mathématiques - Semaine 4

George Ober, Félix Rondeau

05 octobre 2024

1 Montrer que l'ensemble des similitudes directes du plan complexe est un groupe pour la composition (la preuve de la bijectivité des similitudes fait partie de la question).

Démonstration. Soient s et s' deux similitudes directes. Alors, il existe $(a, a', b, b') \in (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^2$ tels que

$$s : z \longmapsto az + b \quad \text{et} \quad s' : z \longmapsto a'z + b'$$

- ⋆ $s \circ s' : z \longmapsto a(a'z + b') + b = \underbrace{aa'}_{\in\mathbb{C}^*} z + \underbrace{ab' + b}_{\in\mathbb{C}}$ donc $s \circ s'$ est une similitude directe.
  Ainsi, la composition est une LCI sur l'ensemble des similitudes directes.
- ⋆ La composition est associative
- ⋆ La composition admet $id_{\mathbb{C}} : z \longmapsto 1z + 0$ (qui est une similitude) comme neutre.
- ⋆ Les similitudes directes sont des bijection du plan complexe car si f est une similitude directe ($f : z \longmapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}* \times \mathbb{C}$), pour tout $u \in \mathbb{C}$, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

  $$f(z) = u \iff az + b = u \iff z = \frac{1}{a}u - \frac{b}{a}$$

  admet une unique solution. De plus, la bijection réciproque f^{-1} d'une similitude directe f (vérifiant $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{C}}$) est une similitude directe.
  Ainsi, toute similitude directe est symétrisable pour la loi de composition.

L'ensemble des similitudes directes du plan complexe muni de la loi de composition est donc bien un groupe. □

2 Classifier et interpréter une similitude directe donnée sous la forme $z \mapsto az + b$ sur un exemple, donner l'expression complexe d'une similitude dont on connaît les éléments caractéristiques.

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^*$ fixés quelconques. Posons la similitude

$$s \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto az + b \end{array} \right.$$

- ◊ Si $a = 1$, c'est la translation de vecteur d'affixe b.
- ◊ Si $a \neq 1$, s admet un unique point fixe appelé « centre de la similitude » $\omega = \frac{b}{1-a}$
  - ⋆ Si $a \in \mathbb{R}^*$, s est l'homotétie de centre ω et de rapport a.
  - ⋆ Si $a \in (\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R})$, s est la composée de :
    - — La rotation de centre ω et d'angle α, où α est un argument de a.
    - — L'homotétie de centre ω et de rapport $|a|$.

  On nommera alors $|a|$ le rapport de s et α une mesure de l'angle de s.

Exemple : Prenons la similitude $s : z \mapsto (1-i)z - 1$.

$$\begin{aligned} s(z) = z &\iff (1-i)z - 1 = z \\ &\iff -iz = 1 \\ &\iff z = i \end{aligned}$$

De plus,

$$(1-i)z - 1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z - 1$$

On en déduit que s est la similitude directe de centre d'affixe i, de rapport $\sqrt{2}$, et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. $\square$

3 Résolution de $e^z = z_0$ où $z_0 \in \mathbb{C}^*$

L'exponentielle complexe a pour image $\mathbb{C}^*$ et, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$,

$$\exp_{\mathbb{C}}^{-1}(\{z_0\}) = \{\ln|z_0| + i\theta_0 + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

où $\theta_0 \in \arg(z_0)$

Démonstration. La propriété : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = |e^{\mathrm{Re}(z)}| > 0$ montre que $0 \notin \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$.
$z_0 \neq 0$ donc $\exists \theta_0 \in \arg(z_0) : z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$. Résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{C}}(z) = z_0 &\iff e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)} = |z_0|e^{i\theta_0} \\ &\iff \begin{cases} e^{\mathrm{Re}(z)} = |z_0| \\ \text{et} \\ \mathrm{Im}(z) \equiv \theta_0[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \ln|z_0| \\ \text{et} \\ \mathrm{Im}(z) \equiv \theta_0[2\pi] \end{cases} \\ &\iff z \in \{\ln|z_0| + i\theta_0 + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$\square$

4 Montrer l'unicité de l'élément neutre et du symétrique d'un élément sous des hypothèses sur la loi à préciser.

Démonstration.

- ◊ Unicité de l'élément neutre bilatère
  Soient $(e_1, e_2) \in E^2$ fixés quelconques tels que $\begin{cases} \forall x \in E, x * e_1 = e_1 * x = x \\ \forall x \in E, x * e_2 = e_2 * x = x \end{cases}$.
  Particularisons la première relation pour $x \leftarrow e_2$:

  $$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

  En particularisant de même la deuxième relation pour $x \leftarrow e_1$:

  $$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$$

  D'où, par transitivité de l'égalité : $e_1 = e_2$
- ◊ Unicité du symétrique sous réserve d'existence (LCI associative d'unité e).
  Soit $a \in E$ symétrisable

  $$\exists z \in E : a * z = z * a = e$$

  Fixons un tel z pour la suite de la preuve
  - — L'ensemble $\{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ n'est pas vide puisqu'il contient z.

— Soit $b \in \{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ fixé quelconque. Alors

$$\begin{aligned} a * b = e &\implies z * (a * b) = z * e \\ &\implies \underbrace{z * a}_{e} * b = z * e \text{ par associativité} \\ &\implies b = z \end{aligned}$$

Donc l'ensemble $\{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ contient au plus un élément neutre, qui est z.

□

5 Preuve de la caractérisation d'un sous-groupe, application au fait que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Soit $(G, *)$ un groupe, et H une partie de G

$$H \text{ est un sous-groupe de } G \iff \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H \end{cases}$$

Démonstration.

- ⋆ Supposons que H est un sous-groupe de G. Par définition d'un sous-groupe, $H \neq \emptyset$.
  Soient $(x, y) \in H^2$ fixés quelconques.
  H est un sous-groupe donc y est symétrisable dans H : $y^{-1} \in H$.
  De plus, c'est un groupe, donc stable pour la loi $*$, donc $x * y^{-1} \in H$
- ⋆ Supposons que $\begin{cases} H \neq \emptyset & (1) \\ \forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H & (2) \end{cases}$
  - ◊ H est non vide par hypothèse
  - ◊ Puisque $H \neq \emptyset$, $\exists h \in H$.
    Ainsi, en appliquant (2) pour $(x, y) \leftarrow (h, h)$, on obtient $h * h^{-1} \in H$ donc H possède un élément neutre e.
  - ◊ Soient $(x, y) \in H^2$ fixés quelconques. $y \in H$ permet d'appliquer (2) pour $(x, y) \leftarrow (y, e)$:

    $$e * y^{-1} \in H$$

    Donc $y^{-1} \in H$. Ainsi, tout élément est symétrisable dans H
  - ◊ Soient $(x, y) \in H^2$ fixés quelconques. On a montré que y est symétrisable dans H, donc en appliquant (2) pour $x \leftarrow x$ et $y \leftarrow y^{-1}$:

    $$x * (y^{-1})^{-1} \in H \implies x * y \in H$$

    Donc H est stable pour la loi H.

  Donc H est un sous-groupe de G.

□

Application aux racines n-ièmes de l'unité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque

- ⋆ $\forall z \in \mathbb{U}_n, z^n = 1$ donc $1 = |z^n| = |z|^n$. Or $|z| \geqslant 0$ donc $|z| = 1$, si bien que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$
- ⋆ $\mathbb{U}_n \neq \emptyset$ car $1 \in \mathbb{U}_n$
- ⋆ Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n$ fixés quelconques. Calculons

$$(z_1 z_2^{-1})^n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc $z_1 z_2^{-1} \in \mathbb{U}_n$. On a donc montré que $(\mathbb{U}_{n,\times})$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

6 Si φ est un morphisme de groupes de G_1 de neutre e_1 dans G_2 de neutre e_2, calculer $\varphi(e_1)$ et $\varphi(x^{-1})$

Démonstration.

- Soit f un morphisme de groupe de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$
  D'une part $f(e_1 *_1 e_1) = f(e_1)$.
  D'autre part, par propriété de morphisme, $f(e_1 *_1 e_1) = f(e_1) *_2 f(e_1)$, donc

$$f(e_1) *_2 f(e_1) = f(e_1)$$

  Si l'on compose à gauche par $f(e_1)^{-1}$,

$$f(e_1)^{-1} *_2 f(e_1) *_2 f(e_1) = f(e_1)^{-1} *_2 f(e_1) \implies f(e_1) = e_2$$

- Soit $x \in G_1$ fixé quelconque.

$$f(x) *_2 f(x^{-1}) = f(x *_1 x^{-1}) = f(e_1) = e_2$$

  Composons les deux membres à gauche par $f(x)^{-1}$:

$$f(x)^{-1} *_2 f(x) *_2 f(x^{-1}) = f(x)^{-1} *_2 *e_2$$

  Donc

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

□

7 Montrer que l'image directe d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe du groupe d'arrivée

Démonstration. Soit f un morphisme de groupe de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$.
Notons e_1 et e_2 les neutres respectifs de G_1 et G_2.
Soit H_1 un sous-groupe de G_1 fixé quelconque

- $f(H_1)$ est par définition une partie de G_2.
- $f(H_1) \neq \emptyset$ car H_1 est un groupe qui contient e_1 et $f(e_1) = e_2$ donc $e_2 \in f(H_1)$.
- Soient $(g_2, h_2) \in f(H_1)^2$ fixés quelconques, alors $\exists (g_1, h_1) \in H_1 : f(g_1) = g_2$ et $f(h_1) = h_2$.
  Par conséquent,

$$g_2 *_2 h_2^{-1} = f(g_1) *_2 f(h_1^{-1}) = f(\underbrace{g_1 *_1 h_1^{-1}}_{\in H_1 \text{ car sous-groupe de } G_1})$$

  Ainsi, $g_2 *_2 h_2^{-1} \in f(H_1)$ d'où $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2

□

8 Montrer que l'image réciproque par un morphisme de groupes d'un sous-groupe est toujours un sous-groupe du groupe de départ,

Démonstration. Soit f un morphisme de groupe de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$.
Notons e_1 et e_2 les neutres respectifs de G_1 et G_2.
Soit H_2 un sous-groupe de G_2 fixé quelconque.

- $f^{-1}(H_2)$ est par définition une partie de G_1.
- $f(H_2) \neq \emptyset$ car H_2 est un groupe qui contient e_2 et $f(e_1) = e_2$ donc $e_1 \in f^{-1}(H_2)$.
- Soient $(g_1, h_1) \in f^{-1}(H_2)^2$ fixés quelconques, alors $f(g_1) \in H_2$ et $f(h_1) \in H_2$, donc

$$f(g_1 *_1 h_1^{-1}) = \underbrace{f(g_1)}_{\in H_2} *_2 \underbrace{f(h_1)^{-1}}_{\in H_2} \in H_2 \quad \text{car c'est un sous-groupe}$$

  Ainsi, $f(g_1 *_1 h_1^{-1}) \in H_2$ d'où $g_1 *_1 h_1^{-1} \in f^{-1}(H_2)$

$f^{-1}(H_2)$ est donc un sous-groupe de G_1. $\square$

- $\triangleright$ **Application 1 :** Le noyau d'un morphisme est un sous-groupe.
  Le noyau, noté $\ker f$ est par définition égal à $f^{-1}(\{e_2\})$ c'est donc un sous-groupe de G_1.
- $\triangleright$ **Application 2 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$\phi_n \left| \begin{array}{ll} (\mathbb{C}^*, \times) & \to (\mathbb{C}^*, \times) \\ z & \mapsto z^n \end{array} \right.$$

  est un morphisme de groupes. Son noyau est $\ker \phi_n = \{z \in \mathbb{C}^* | z^n = 1\} = \mathbb{U}_n$.
  D'après l'application 1, $\ker \phi_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, donc $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

9 *[non demandée]* Montrer que l'ensemble des similitudes directes du plan complexe est un groupe pour la composition (démonstration alternative)

Démonstration. Montrons donc que $(S, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \circ)$

- $\lozenge$ D'une part, $S \subset \mathcal{S}(\mathbb{C})$. Or l'ensemble des permutations $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe. En effet, les similitudes sont des bijections de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
- $\lozenge$ De plus, S est non vide, par exemple l'application $\mathrm{Id}(\mathbb{C})$ est une similitude pour $a \leftarrow 1$ et $b \leftarrow 1$.
- $\lozenge$ Prenons finalement a et c dans $\mathbb{C}^*$ puis b et d dans $\mathbb{C}$, et posons les deux applications suivantes :

$$s \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto az + b \end{array} \right. \quad \text{et } s' \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto az + b \end{array} \right.$$

  Ainsi, comme toute similitude directe est une bijection, en particulier s' en est une, et

$$s'^{-1} \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{z}{c} - \frac{d}{c} \end{array} \right.$$

  Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque :

$$\begin{aligned} (s \circ s'^{-1})(z) &= s(s'^{-1}(z)) \\ &= s\left(\frac{z}{c} - \frac{d}{c}\right) \\ &= a\left(\frac{z}{c} - \frac{d}{c}\right) + b \\ &= \frac{a}{c}z + \left(b - \frac{ad}{c}\right) \end{aligned}$$

  Qui est une similitude directe, puisque $\frac{a}{c} \neq 0$ donc $s \circ s'^{-1} \in S$. Donc $(S, \circ)$ est bien un sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \circ)$.

$\square$