Khôlles de Mathématiques - Semaine 14

Kylian Boyet, Hugo Vangilluwen

13 Janvier 2024

1 Expression de dérivées successives

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln x}{x} \end{array} \right.$.
Exprimer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{D}_f$.
Considérons le prédicat $P(\cdot)$ définit pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n) \ : \ \text{“ } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right] \text{ ”}$$

Initialisation :
Pour $n = 0$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k!} \right],$$

donc $P(0)$ est vrai.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right] \right)'$$

par véracité de $P(n)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n n! x^n - (-1)^n (n+1)! x^n \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right]}{x^{2(n+1)}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)! \ln(x) - (-1)^{n+1}(n+1)! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}}{x^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \right] \end{aligned}$$

c'est l'expression recherchée, donc $P(n+1)$ est vrai.
Par théorème de récurrence sur $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

2 Théorème de Rolle et formule des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit I le segment a, b.
Soit $f \ : \ I \ \to \ \mathbb{R}$ continue sur ledit segment et dérivable sur l'ouvert associé.

(i) Théroème de Rolle :
Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists \ c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f'(c) = 0$

(ii) Formule des accroissements finis :
$\exists \ c \in \overset{\circ}{I} \ : \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

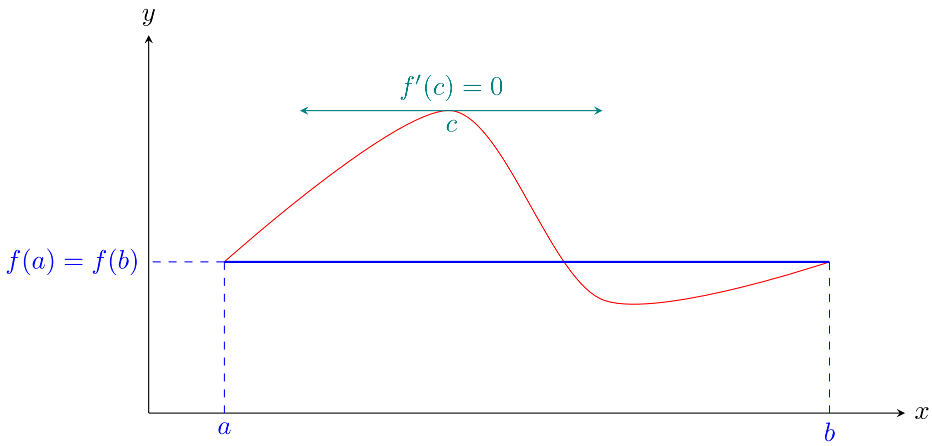


Figure 1 – Théorème de Rolle

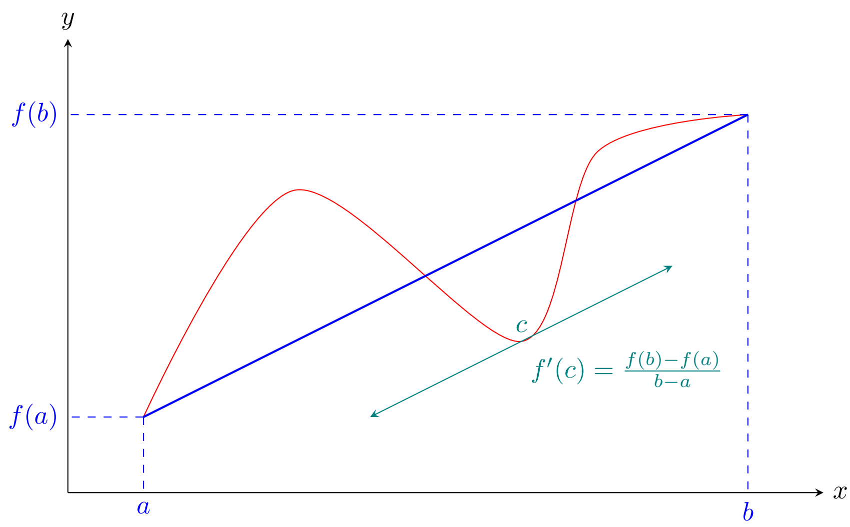


Figure 2 – Formule des accroissements finis

Démonstration. Soient de tels objets.
Prouvons (i), donc supposons $f(a) = f(b)$.
f est continue sur I donc par le théorème de Weierstraß, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment :

$$\exists\ (x_m, x_M) \in I^2 \ : \ (f(x_m) = \min f(I)) \wedge (f(x_M) = \max f(I))$$

donc, si $(x_m, x_M) \in \{a, b\}^2$, alors,

$$\forall x \in I,\ f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(a)$$

donc $\forall x \in I, f(x) = f(a)$ c'est-à-dire que f est constante et donc tous les points intermédiaires à I sont des c valides.
Sinon, $(x_m \notin \{a, b\}) \vee (x_M \notin \{a, b\})$, quitte à prendre l'autre valeur, supposons que $x_M \notin \{a, b\}$, ainsi, $x_M \in \mathring{I}$ et $f(x_M)$ est un maximum global donc, f étant dérivable sur $\mathring{I}$ elle est dérivable en x_M donc $f'(x_M) = 0$, on pose $c = x_M$, ce qui conclut.

Prouvons (ii).
Posons $d\ :\ I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right)$. d est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. On a $d(a) = 0$ et $d(b) = 0$ donc $d(a) = 0 = d(b)$.
On peut alors appliquer le Théorème de Rolle pour $f \leftarrow d, a \leftarrow a$ et $b \leftarrow b$: il existe $c \in \mathring{I}$ tel que $d'(c) = 0$, c'est le résultat. $\square$

3 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I},\mathbb{R})$ et $x_0 \in I$, posons $X_- =]-\infty; x_0]$ la demi-droite fermée en x_0 et vers $-\infty$, de même $X_+ = [x_0; +\infty[$ la demi-droite fermée en x_0 et vers $+\infty$.

(*i*) $\star$ Si $\exists\, m \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in \overset{\circ}{I},\ m \leq f'(x)$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

$\star$ Si $\exists\, M \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \leq M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x)$$

$\star$ Si $\exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall x \in \overset{\circ}{I},\ m \leq f'(x) \leq M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

(*ii*) Si $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in \overset{\circ}{I},\ |f'(x)| \leq M$, alors,

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$

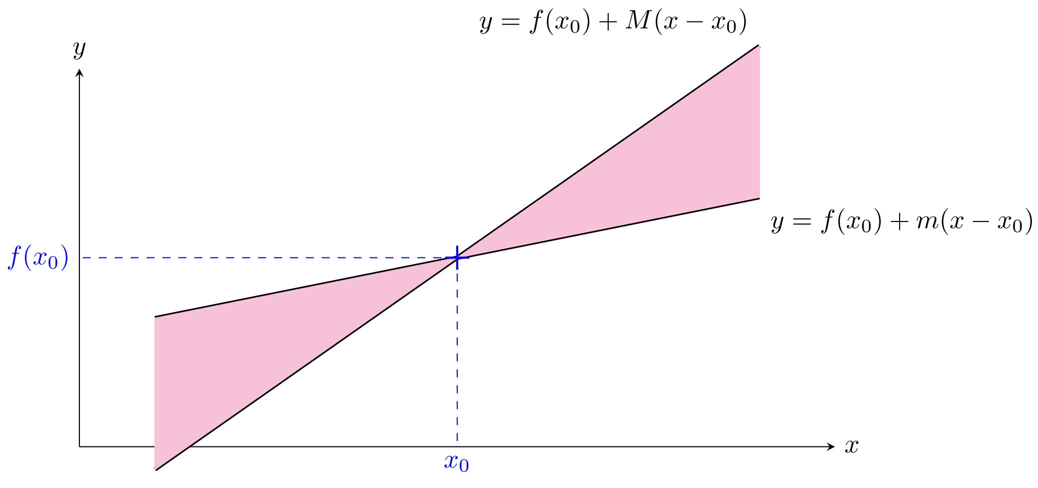


FIGURE 3 – Interprétation géométrique des accroissements finis

Démonstration. (*i*) Soit $x \in I$ et posons S le segment d'extrémités x et x_0.

$\star$ Si $x \neq x_0$, f est continue sur S et dérivable sur $\overset{\circ}{S}$, la formule des accroissements finis donne alors l'existence d'un c appartenant à $\overset{\circ}{S}$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$$

Si $x > x_0,\ x - x_0 > 0$, or $m \leq f'(c) \leq M$ donc

$$m(x - x_0) \leq (x - x_0)f'(c) \leq M(x - x_0)$$

si bien que

$$m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0)$$

d'où

$$f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0).$$

Si $x < x_0$, il suffit de retourner l'inégalité lors de la première multiplication et (i) est prouvé.

(ii) Soit $y \in I$.
L'hypothèse $\forall x \in \mathring{I},\ |f'(x)| \leq M$ équivaut à $\forall x \in \mathring{I},\ -M \leq f'(x) \leq M$, donc on peut appliquer (i) pour $x_0 \leftarrow y,\ M \leftarrow M$ et $m \leftarrow -M$:

$$\forall x \in I \cap [y, +\infty[,\ f(y) - M(x - y) \leq f(x) \leq f(y) + M(x - y)$$

Or $x - y > 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Et

$$\forall x \in I \cap]-\infty, y],\ f(y) + M(x - y) \leq f(x) \leq f(y) - M(x - y)$$

Or $x - y < 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.
Par conséquent, $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$. □

4 Caractère lipschitzien d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un segment

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, I le segment a, b. Alors f est $||f'||_{\infty,I}$-lipschitzienne sur I.

Démonstration. Soient de tels objets.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{D}^1(\mathring{I}, \mathbb{R})$.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc f' est continue sur I donc le réel $||f'||_{\infty,I}$ est bien défini et

$$\forall x \in \mathring{I},\ |f'(x)| \leq ||f'||_{\infty,I}.$$

Ces propriétés permettent d'appliquer le corollaire du TAF qui conclut que f est $||f'||_{\infty,I}$-lipschitzienne. □

5 Théorème du prolongement de la propriété de la dérivabilité

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Lemme :

$$\text{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \backslash \{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I\backslash\{a\}} \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } a \end{cases}, \text{ alors } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Théorème :

$$\text{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \backslash \{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I\backslash\{a\}} \text{ admet une limite } \textbf{finie } \ell \in \mathbb{R} \text{ en } a \end{cases}, \text{ alors} \begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) = \ell \ (\textbf{donc } f' \textbf{ est continue en } a) \end{cases}$$

Démonstration. Prouvons le lemme pour $\ell \in \mathbb{R}$, c'est le cas qui nous intéresse.
Soient de tels objets. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'_{|I\backslash\{a\}}(x) = \ell$ pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$:

$$\exists\ \eta \in \mathbb{R}_+^*\ :\ \forall x \in I \backslash \{a\},\ |x - a| \leq \eta \implies |f'_{|I\backslash\{a\}}(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Fixons un tel η.
Soit $x \in I \backslash \{a\}$ tel que $|x - a| \leq \eta$.
La fonction f est continue sur I donc f est continue sur le segment d'extrémités a et x qui est par ailleurs inclus dans I par convexité d'un intervalle.
La fonction f est dérivable sur I donc f est dérivable sur l'intervalle ouvert a, x qui est aussi inclus

dans $\overset{\circ}{I}$ par convexité.
L'égalité des accroissements finis s'applique à f sur l'intervalle a et x :

$$\exists\ c_x \in]a, x[\cup]x, a[\ :\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

Or $|c_x - a| \leq |x - a| \leq \eta$ donc ladite définition de la limite s'applique pour $x \leftarrow c_x$: $|f'(c_x) - \ell| \leq \varepsilon$ si bien que

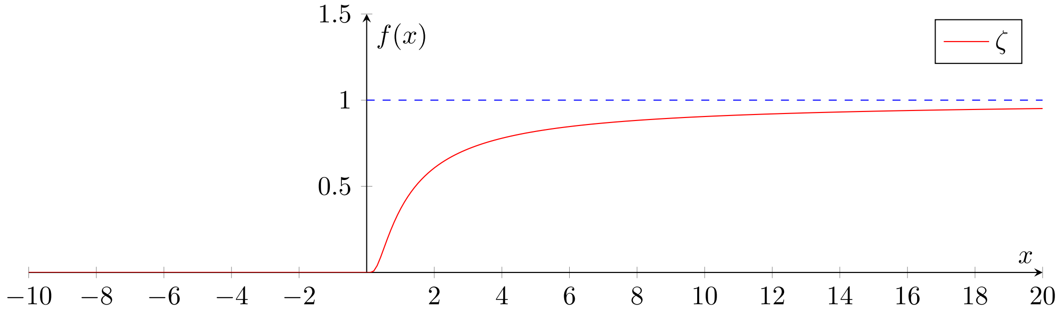
$$|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell| \leq \varepsilon.$$

D'où le lemme.

Prouvons alors le théorème.
Sous ces hypothèses, le lemme s'applique donc $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$, or $\ell \in \mathbb{R}$, donc le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a ce qui prouve la dérivabilité de f en a et $f'(a) = \ell$.
Ce qui suffit. □

6 La fonction ζ (pas celle-là une autre) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Posons $\zeta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$. Montrons que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.



Démonstration.

* $\zeta_{]-\infty;0[}$ est constante donc $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]0; -\infty[, \mathbb{R})$.
* $x \mapsto -\frac{1}{x} \in \mathcal{C}^\infty(]0; -\infty[, \mathbb{R})$ et $\exp \in \mathcal{C}^\infty(]0; -\infty[, \mathbb{R})$ donc, par stabilité de $\mathcal{C}^\infty$ par composition, $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]0; -\infty[, \mathbb{R})$.

Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P} : \text{“ } \exists P_n \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \zeta^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ ”} \tag{1}$$

* $\mathcal{P}(0)$ est vrai par définition de ζ en posant $P_0(x) = 1$
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconquetel que $\mathcal{P}$ est vrai. D'une part, $\forall x \in] - \infty; 0[, \zeta^{(n)}(x) = 0$ donc

  $$\forall x \in] - \infty; 0[, \zeta^{(n+1)}(x) = 0$$

  D'autre part, $\forall x \in]0; +\infty[, \zeta^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ ce qui est un produit de trois expressions dérivables. D'où :

  $$\begin{aligned} \forall x \in] - \infty; 0[, \zeta^{(n+1)}(x) &= \left(P_n'(x) \frac{1}{x^{2n}} + P_n(x) \frac{-2n}{x^{2n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 P_n'(x) - 2nxP_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Si bien qu'en posant $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - 2nxP_n(x) + P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, on obtient :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \zeta^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(x)$ est vrai.
Appliquons maintenant le théorème de prolongement du caractère $\mathcal{C}^\infty$.

- $\star$ Nous avons montré que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$.
- $\star$ Calculons les limites à gauche et à droite de 0. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
  - $\star\star$ $\zeta^{(k)}$ est nulle sur $]-\infty;0[$, $\zeta^{(k)} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$.
  - $\star\star$ De plus, $\exists P_n \in \mathbb{R}[x]$: $\forall x \in]0;+\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{2k}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Posons $u = \frac{1}{x}$, ainsi $\zeta^{(k)}(x) = u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ et $u \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

    Le théorème des croissances comparées donne $u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc $\zeta^{(k)} = 0$.

Donc $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\square$