

Khôlles de Mathématiques - Semaine 5

Kylian Boyet, George Ober, Felix Rondeau

12 Octobre 2024

1 Montrer qu'une combinaison linéaire de deux fonctions bornées (respectivement lipschitziennes) est bornée (resp. lipschitzienne)

Démonstration. Soit I un intervalle réel. Soient f et g deux fonctions de I dans \mathbb{R} et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

◇ Supposons que f et g sont respectivement bornées par A et par B . Soit $x \in I$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} |(\lambda.f + \mu.g)(x)| &= |\lambda.f(x) + \mu.g(x)| \\ &\leq |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \\ &\leq |\lambda|A + |\mu|B \end{aligned}$$

Donc $\lambda.f + \mu.g$ est bornée.

◇ Supposons que f et g sont respectivement K et L lipschitziennes. Soient $(x, y) \in I^2$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned} |(\lambda.f + \mu.g)(x) - (\lambda.f + \mu.g)(y)| &= |\lambda.f(x) + \mu.g(x) - \lambda.f(y) - \mu.g(y)| \\ &= |\lambda(f(x) - f(y)) + \mu(g(x) - g(y))| \\ &\leq |\lambda||f(x) - f(y)| + |\mu||g(x) - g(y)| \\ &\leq |\lambda|K|x - y| + |\mu|L|x - y| \\ &\leq (|\lambda|K + |\mu|L)|x - y| \end{aligned}$$

□

2 Montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

Démonstration. Soient I et J deux parties non-vides de \mathbb{R} et f une application bijective impaire de I dans J . Notons f^{-1} sa bijection réciproque.

L'imparité de f impose la symétrie de I par rapport à l'origine. De plus, pour tout $y \in J$,

$$\exists x \in I : f(x) = y$$

donc par imparité de la fonction f , le domaine I étant centré en 0,

$$f(-x) = -f(x) = -y$$

Ainsi, J est centré en 0. On a alors, pour tout $y \in J$,

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

D'où l'imparité de f^{-1} .

▷ **Exemple :** Prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ que l'on notera $\widetilde{\sin}$. Sa bijection réciproque est $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme dans la démonstration, prenons $y \in [-1, 1]$. Comme $[-1, 1]$ est centré en 0, $-y \in [-1, 1]$, et dès lors,

$$\begin{aligned}\arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\ &= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\ &= -\arcsin(y).\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'impairité de la fonction \arcsin . □

3 Montrer que les graphes d'une fonction et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Démonstration. Calculons les coordonnées (x', y') du point M' , image de M de coordonnées (x, y) par la réflexion r d'axe la première bissectrice.

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} \perp (\vec{i} + \vec{j}) \\ \text{le milieu de } [MM'] \text{ appartient à } \Delta. \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 0 \\ \text{le milieu de } [MM'] \text{ vérifie l'équation } y = x. \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \end{pmatrix} \text{ vérifie l'équation } y = x. \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x' - x + y' - y = 0 \\ \frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x' + y' = x + y \\ x' - y' = -x + y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array} \right.\end{aligned}$$

L'expression de la réflexion r d'axe la première bissectrice est ainsi

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$$

Les graphes de f et f^{-1} étant respectivement

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\} \quad \text{et} \quad G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in J\}$$

on a bien

$$\begin{aligned}r(G_f) &= \{(f(x), x) \mid x \in I\} \\ &= \{(k, f^{-1}(y)) \mid y \in J\} \quad \text{en posant } y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \\ &= G_{f^{-1}}\end{aligned}$$

□

4 Limite (et preuve) lorsque x tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration. La fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* , donc au dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier à celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x - 1$. On a donc

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Ce qui permet d'affirmer, en divisant par x^2 , que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x^2} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0}$$

Ainsi, le théorème d'existence de limite par encadrement permet de conclure que $\frac{\ln x}{x^2}$ admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est nulle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On en déduit alors le cas général :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\frac{2\alpha}{\beta} \ln \left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \left(\frac{2\alpha}{\beta} \right)^\alpha \underbrace{\left[\frac{\ln \left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)}{\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)^2} \right]^\alpha}_{\substack{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0 \\ \text{v. ci-dessus} \\ x \rightarrow +\infty \rightarrow 0 \\ \text{par composition des limites}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

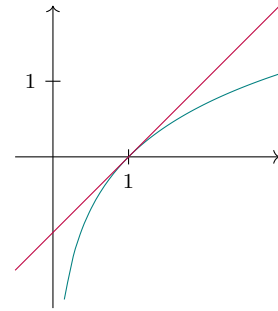


FIGURE 1 – \ln en bleu et $y = x - 1$ en violet.

□

5 Limite en 0 de $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ et de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Démonstration.

* Le taux d'accroissement en x_0 d'une fonction f dérivable en x_0 est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (*)$$

— En appliquant (*) pour $f \leftarrow (x \mapsto (1+x)^\alpha)$ et $x_0 \leftarrow 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = f'(0) = \alpha$$

car $f' : x \mapsto 1 \cdot \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$ vaut α en 0.

— De même, en appliquant (*) pour $f \leftarrow \sin$ et $x_0 \leftarrow 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \sin' 0 = \cos 0 = 1$$

* Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé quelconque.

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} = - \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}_{x \rightarrow 0 \rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\cos x + 1} \right)}_{x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2}$$

□

6 Présentation exhaustive de la fonction arcsin.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ (voir 1.). D'où :

$$\arcsin = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin(\theta) = x$$

. Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$:

1. arcsin est impaire.
2. arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
3. $\arcsin \in \mathcal{C}^0\left([-1, 1], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
4. $\arcsin \in \mathcal{D}^1\left(]-1, 1[, \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.
5. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
6. arcsin admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1 .

Graphe de arcsin :

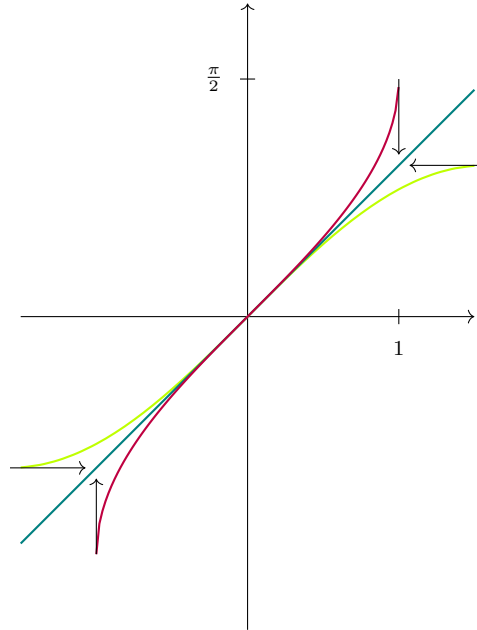


FIGURE 2 – arcsin en violet, sin en vert et la première bissectrice en bleu.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d'arcsin :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(x) \geq x.$$

□

7 Étude et tracé de $\sin \circ \arcsin$ (avec réduction du domaine d'étude à $[0, \pi/4]$).

Démonstration.

□