Khôlles de Mathématiques - Semaine 7

Kylian Boyet, George Ober, Elijah Gaillard, Hugo Vangilluwen (relecture)

10 novembre 2023

1 Résolution de l'ED $\forall t \in J, y' + a_0(t) = b(t)$ par équivalences avec la méthode du facteur intégral.

Démonstration. Pour cette preuve, il est nécessaire de supposer a_0 et b continus. Ainsi, on note A la primitive de a_0 définie sur J.

$$f : J \to \mathbb{C} \text{ est sol. de } y' + a_0 = b \text{ sur J} \iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ f' + a_0 = b \text{ sur J} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ f'e^A + \underset{(=A')}{a_0} fe^A = be^A \text{ sur J } (e^A \text{ est le facteur intégrant}) \end{cases}$$

Notons B une primitive de be^A definie sur J (car b et e^A sont continues)

$$\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ (fe^A)' = B' \text{ sur J} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ (fe^A - B)' = 0 \text{ sur J} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} : fe^A - B = \lambda \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : f = \lambda e^{-A} + Be^{-A}$$

$$\iff f \in \left\{ \lambda e^{-A} + Be^{-A} \right\}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \underset{\text{sol. particluière}}{Be^{-A}} + \underset{\text{droite vectorielle des sol. de l'EDLH}}{\left\{ \lambda e^{-A} | \lambda \in \mathbb{K} \right\}}$

□

2 Théorème de résolution des EDLH d'ordre 2 à coefficients constants complexes.

Démonstration. □

3 Caractérisation des fonctions exponentielles et de la fonction nulle par la propriété de dérivabilité en 0 et celle de morphisme de ($\mathbb{R}$, +) dans ($\mathbb{C}$, $\times$).

Démonstration. □

4 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

Démonstration. Notons $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas $\Delta < 0$ et $\alpha \pm i\beta$ les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \implies \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de Re

$$a_2\mathrm{Re}(f)'' + a_1\mathrm{Re}(f)' + a_0\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$; $\mathrm{Re}(f(t)) = \mathrm{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$. Qui appartient donc à $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

En suivant le même raisonnement pour $\mathrm{Im}(f)$, $(t \mapsto e^{\alpha}\sin(\beta t)) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ fq. Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$.

$$\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de f sont réelles, en notant (a_r, a_i, b_r, b_i) les parties réelles et imaginaires respectives de a et b.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \mathrm{Re}(f(t)) \\ &= \mathrm{Re}(a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \mathrm{Re}((a_r + i a_i) e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + i b_i) e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r\cos(\beta t)e^{\alpha} - a_i\sin(\beta t)e^{\alpha} + b_r\cos(\beta t)e^{\alpha} + b_i\sin(\beta t)e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r)\cos(\beta t)e^{\alpha} + (b_i - a_i)\sin(\beta t)e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion.

$\square$

5 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur I (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \qquad \text{où } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$$

Si b est continu sur J, alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur J.

Démonstration. **Cas 1.** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Nous savons que sous l'hyphothèse de continuité de b sur J, les solutions de (EDL2) définies sur J constituent le plan affine S :

$$S = \left\{ \lambda f_1 + \mu f_2 + s | (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

où s est une solution particulière de (EDL2), (f_1, f_2) sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent S_h. On a :

$$\begin{aligned}
f : J \to \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} \quad &\iff \quad \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que (λ, μ) doit être solution d'un système linéaire $(2, 2)$. On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est non nul.
Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera D.

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) $(a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0)$. On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de Δ. Traitons d'abord le cas $\Delta \neq 0$. On peut choisir :

$$f_1(t_0) = e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2 t_0}$$

$$f_1'(t_0) = r_1 e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2 e^{r_2 t_0}$$

Donc (en sachant que $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$) :

$$D = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1 t_0 + r_2 t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a $\Delta = 0$; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0 e^{r_0 t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0 t_0} \left(r_0 t_0 e^{r_0 t_0} + e^{r_0 t_0} \right) - r_0 e^{r_0 t_0} \times t_0 e^{r_0 t_0} = e^{2 r_0 t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas, $D \neq 0$, donc le système $(2, 2)$ étudié admet une unique solution, donc il existe un unique couple (λ, μ) le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

Cas 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2, b \in C^0(J, \mathbb{R})$
Existence : Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le problème de Cauchy admet, dans $\mathbb{R}$, une solution à valeurs complexes g. Posons $f = \mathrm{Re}(g)$ et montrons que f est une solution réelle du problème de Cauchy.

- ⋆ $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$ donc $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$
- ⋆ g vérifie $a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b$ sur J donc en prenant $\mathrm{Re}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b) = \mathrm{Re}(b) \quad &\iff \quad a_2 \mathrm{Re}(g'') + a_1 \mathrm{Re}(g') + a_0 \mathrm{Re}(g) = b \\ &\iff \quad a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \text{ sur } J \end{aligned}$$

- ⋆ $f(t_0) = \mathrm{Re}(g(t_0)) = \mathrm{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$
- ⋆ $f'(t_0) = \mathrm{Re}(g(t_0))' = \mathrm{Re}(g'(t_0)) = \mathrm{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc f est une solution réelle définie sur J au problème de Cauchy.

Unicité : Soient f_1 et f_2 deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$. □