

Khôlles de Mathématiques - Semaine 7

Kylian Boyet, George Ober, Elijah Gaillard, Hugo Vangilluwen (relecture)

10 novembre 2023

1 Résolution de l'ED $\forall t \in J, y' + a_0(t)y = b(t)$ par équivalences avec la méthode du facteur intégral.

Démonstration. Pour cette preuve, il est nécessaire de supposer a_0 et b continus. Ainsi, on note A la primitive de a_0 définie sur J .

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. de } y' + a_0(t)y = b \text{ sur } J &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ f' + a_0 y = b \text{ sur } J \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ f'e^A + \underset{=(A')}{a_0} f e^A = b e^A \text{ sur } J \text{ (} e^A \text{ est le facteur intégrant)} \end{cases} \end{aligned}$$

Notons B une primitive de $b e^A$ définie sur J (car b et e^A sont continues)

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ (f e^A)' = B' \text{ sur } J \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ (f e^A - B)' = 0 \text{ sur } J \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} : f e^A - B = \lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : f = \lambda e^{-A} + B e^{-A} \\ &\iff f \in \{ \lambda e^{-A} + B e^{-A} \} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \underset{\text{sol. particulière}}{B e^{-A}} + \underset{\text{droite vectorielle des sol. de l'EDLH}}{\{ \lambda e^{-A} | \lambda \in \mathbb{K} \}}$

□

2 Théorème de résolution des EDLH d'ordre 2 à coefficients constants complexes.

Démonstration.

□

3 Caractérisation des fonctions exponentielles et de la fonction nulle par la propriété de dérivabilité en 0 et celle de morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathbb{C}, \times) .

Démonstration.

□

4 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

Démonstration. Notons $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas $\Delta < 0$ et $\alpha \pm i\beta$ les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \text{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$
Soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies \text{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de Re

$$a_2 \text{Re}(f)'' + a_1 \text{Re}(f)' + a_0 \text{Re}(f) = \text{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$; $\text{Re}(f(t)) = \text{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$. Qui appartient donc à $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$
En suivant le même raisonnement pour $\text{Im}(f)$, $(t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ fq. Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$.

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de f sont réelles, en notant (a_r, a_i, b_r, b_i) les parties réelles et imaginaires respectives de a et b .

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \text{Re}(f(t)) \\ &= \text{Re}(a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \text{Re}((a_r + i a_i) e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + i b_i) e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r \cos(\beta t) e^{\alpha} - a_i \sin(\beta t) e^{\alpha} + b_r \cos(\beta t) e^{\alpha} + b_i \sin(\beta t) e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r) \cos(\beta t) e^{\alpha} + (b_i - a_i) \sin(\beta t) e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion. □

5 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur I (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{où } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$$

Si b est continu sur J , alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur J .

Démonstration. Cas 1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nous savons que sous l'hypothèse de continuité de b sur J , les solutions de (EDL2) définies sur J constituent le plan affine S :

$$S = \{ \lambda f_1 + \mu f_2 + s \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

où s est une solution particulière de (EDL2), (f_1, f_2) sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent S_h . On a :

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} &\iff \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc que (λ, μ) doit être solution d'un système linéaire $(2, 2)$. On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est non nul.

Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera D .

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) ($a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0$). On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de Δ . Traitons d'abord le cas $\Delta \neq 0$. On peut choisir :

$$\begin{aligned} f_1(t_0) &= e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2 t_0} \\ f_1'(t_0) &= r_1 e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2 e^{r_2 t_0} \end{aligned}$$

Donc (en sachant que $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$) :

$$D = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1 t_0 + r_2 t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a $\Delta = 0$; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0 e^{r_0 t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0 t_0} (r_0 t_0 e^{r_0 t_0} + e^{r_0 t_0}) - r_0 e^{r_0 t_0} \times t_0 e^{r_0 t_0} = e^{2r_0 t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas, $D \neq 0$, donc le système (2, 2) étudié admet une unique solution, donc il existe un unique couple (λ, μ) le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

Cas 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2, b \in C^0(J, \mathbb{R})$

Existence : Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le problème de Cauchy admet, dans \mathbb{R} , une solution à valeurs complexes g . Posons $f = \operatorname{Re}(g)$ et montrons que f est une solution réelle du problème de Cauchy.

★ $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$ donc $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$

★ g vérifie $a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b$ sur J donc en prenant $\operatorname{Re}(\cdot)$:

$$\operatorname{Re}(a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b) = \operatorname{Re}(b) \iff a_2 \operatorname{Re}(g'') + a_1 \operatorname{Re}(g') + a_0 \operatorname{Re}(g) = b$$

$$\iff a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \text{ sur } J$$

★ $f(t_0) = \operatorname{Re}(g(t_0)) = \operatorname{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$

★ $f'(t_0) = \operatorname{Re}(g(t_0))' = \operatorname{Re}(g'(t_0)) = \operatorname{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc f est une solution réelle définie sur J au problème de Cauchy.

Unicité : Soient f_1 et f_2 deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$. \square