

Khôlles de Mathématiques - Semaine 22

Hugo Vangilluwen, George Ober, Kylian Boyet

25 Mars 2024

Pour cette semaine, \mathbb{K} désigne un corps commutatif, E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels, E' et F' des sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F , I un ensemble quelconque non vide.

1 Caractérisation d'une famille liée

Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille.

$$(x_i)_{i \in I} \text{ est liée } \iff \exists i_0 \in I : \exists (\lambda_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I \setminus \{i_0\})} : x_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot x_i \quad (1)$$

Démonstration. Supposons que $(x_i)_{i \in I}$ est liée.

Par définition, $\exists (\mu_i) \in \mathbb{K}^{(I)} : \begin{cases} \sum_{i \in I} \mu_i x_i = 0_E \\ (\mu_i)_{i \in I} \neq (0_{\mathbb{K}})_{i \in I} \end{cases}$

Donc $\exists i_0 \in I : \mu_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Fixons un tel i_0 .

$$\mu_{i_0} x_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i x_i = 0_E$$

$$\text{Or } \mu_{i_0} \neq 0, \text{ donc } x_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} (\mu_{i_0}^{-1} \times (-\mu_i)) \cdot x_i.$$

$$\text{En posant } \lambda_i = \mu_{i_0}^{-1} \times (-\mu_i), \text{ on obtient } x_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i \cdot x_i.$$

$$\text{Supposons maintenant que } \exists i_0 \in I : \exists (\lambda_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I \setminus \{i_0\})} : x_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot x_i.$$

Alors $-x_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot x_i = 0_E$. Posons $\mu_{i_0} = -1_{\mathbb{K}}$ et $\forall i \in I \setminus \{i_0\}, \mu_i = \lambda_i$. Ainsi, $(\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $\sum_{i \in I} \mu_i \cdot x_i = 0_{\mathbb{K}}$. Or $\mu_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $(\mu_i)_{i \in I} \neq (0_{\mathbb{K}})_{i \in I}$.
Donc $(\mu_i)_{i \in I}$ est liée. □

2 Caractérisations d'une base

Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{F} est une base.
- (ii) Tout vecteur de E se décompose de manière unique dans \mathcal{F} .
- (iii) \mathcal{F} est génératrice minimale (au sens de l'inclusion)
- (iv) \mathcal{F} est libre maximale (au sens de l'inclusion)

Démonstration. Notons $(e_i)_{i \in I}$ la famille \mathcal{F} .

(i) \implies (ii) Supposons que \mathcal{F} est une base de E .

Soit $x \in E$ fixé quelconque. Montrons que x s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} .

\mathcal{F} est une base donc elle est une famille génératrice et libre de E . La propriété génératrice donne, par définition, l'existence d'une telle écriture tandis que la propriété libre donne l'unicité d'une telle écriture.

(ii) \implies (iii) Supposons que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{F} .

L'existence d'une telle décomposition permet d'affirmer que \mathcal{F} est génératrice.

Supposons que \mathcal{F} ne soit pas génératrice minimale c'est-à-dire qu'il existe une famille \mathcal{F}' de vecteurs de E telle que $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$ et \mathcal{F}' engendre E .

Alors $\exists i_0 \in I : e_{i_0} \notin \mathcal{F}'$. Comme \mathcal{F}' est génératrice, $\exists (\lambda_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I \setminus \{i_0\})} : e_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot e_i$.

Donc

$$\begin{aligned} e_{i_0} &= 0_{\mathbb{K}} \cdot e_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot e_i \\ e_{i_0} &= 1_{\mathbb{K}} \cdot e_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} 0_{\mathbb{K}} \cdot e_i \end{aligned}$$

e_{i_0} peut donc s'écrire de deux manières différentes au moins comme combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{F} ce qui contredit le caractère libre de \mathcal{F} .

Par conséquent, \mathcal{F} est génératrice et minimale parmi les familles génératrices.

(iii) \implies (iv) Supposons que \mathcal{F} est une famille génératrice minimale. Par l'absurde, supposons que \mathcal{F} est liée. Alors il existe un $i_0 \in I$ tel que e_{i_0} s'écrit comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs de \mathcal{F} donc $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est génératrice de E . Or cette famille est strictement incluse dans \mathcal{F} ce qui contredit la propriété de génératrice minimale.

Donc \mathcal{F} est libre.

Par l'absurde, supposons que \mathcal{F} n'est pas libre maximale c'est-à-dire qu'il existe une famille \mathcal{F}' de vecteurs de E telle que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ et \mathcal{F}' est libre.

Alors $\exists x \in \mathcal{F}' : x \notin \mathcal{F}$. Or \mathcal{F} est génératrice d'où :

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i + \sum_{\substack{y \in \mathcal{F}' \\ y \notin \mathcal{F} \\ y \neq x}} 0_{\mathbb{K}} \cdot y$$

Puisque $x \in \mathcal{F}'$,

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x + \sum_{i \in I} 0_{\mathbb{K}} \cdot x_i + \sum_{\substack{y \in \mathcal{F}' \\ y \notin \mathcal{F} \\ y \neq x}} 0_{\mathbb{K}} \cdot y$$

Donc x s'écrit de deux manières différentes au moins comme combinaison linéaire de vecteurs \mathcal{F}' , ce qui contredit la liberté de \mathcal{F}' .

Par conséquent, \mathcal{F} est libre maximale.

(iv) \implies (i) Supposons que \mathcal{F} est une famille libre maximale.

Par hypothèse même, \mathcal{F} est libre. Par l'absurde, supposons que \mathcal{F} n'est pas génératrice. Alors il existe $x \in E$ tel que $x \notin \text{Vect } \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est libre et contient strictement \mathcal{F} , ce qui contredit la propriété de liberté maximale.

Par conséquent, \mathcal{F} est aussi génératrice, donc une base.

$$\begin{array}{ccc} (i) & \implies & (ii) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (iv) & \longleftarrow & (iii) \end{array}$$

□

3 Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}) \\ \text{Im } f &= \{y \in F \mid \exists x \in E : f(x) = y\} \end{aligned} \tag{2}$$

Nous démontrerons le résultat plus général suivant :

- (i) $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F .
- (ii) $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. (i) $0_E \in E'$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E')$ d'où $f(E') \neq \emptyset$
 Soit $(\alpha, \beta, y, y') \in \mathbb{K}^2 \times f(E')^2$ fixés quelconques.
 Par définition, $\exists(x, x') \in E'^2 : f(x) = y \wedge f(x') = y$.

$$\begin{aligned}\alpha y + \beta y' &= \alpha f(x) + \beta f(x') \\ &= f(\alpha x + \beta x') \quad \text{car } f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \\ &\in f(E') \quad \text{car } \alpha x + \beta x' \in E' \text{ puisque } E' \text{ est un sous-espace vectoriel}\end{aligned}$$

Donc $f(E')$ est un sous-espace vectoriel .

(ii) $0_F \in F'$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in f^{-1}(F')$ d'où $f^{-1}(F') \neq \emptyset$
 Soit $(\alpha, \beta, x, x') \in \mathbb{K}^2 \times f^{-1}(F')^2$ fixés quelconques.
 Par définition, $\exists(y, y') \in F'^2 : f(x) = y \wedge f(x') = y$.
 Or F' est sous-espace vectoriel donc $\alpha y + \beta y' \in F'$. $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ d'où $f(\alpha x + \beta x') = \alpha y + \beta y'$.
 Donc $\alpha x + \beta x' \in f^{-1}(F')$.
 Ainsi, $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel .

En appliquant pour $E' = E$ et $F' = \{0_F\}$, nous obtenons que $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels . \square

4 L'image par une application linéaire d'une partie génératrice engendre l'image de l'application linéaire

Soient (E, F) deux \mathbb{K} -espaces vectoriels $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une base de E .

Alors

$$\text{Vect } \underbrace{f(\mathcal{F})}_{\{f(x_i) | i \in I\}} = f(\text{Vect } \mathcal{F}) \quad (3)$$

Démonstration. Soit $y \in \text{Vect} f(\mathcal{F})$ Alors $\exists(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ tel que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$ Mais

$$\begin{aligned}y &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \implies y \in f(\text{Vect } \mathcal{F})\end{aligned}$$

Réciproquement soit $y \in f(\text{Vect } \mathcal{F})$ fq.

$$\exists x \in \text{Vect } \mathcal{F} : f(x) = y \implies \exists(x_i)_{i \in I} : x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned}y &= f(x) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \in \text{Vect} f(\mathcal{F})\end{aligned}$$

\square

5 Caractérisation inj/surj/bij d'une application linéaire par l'image d'une base de l'espace de départ.

Nous donnerons les caractérisations au fur et à mesure de la démonstration.

Démonstration. Soient donc pour la suite, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E , $\mathcal{B}' = (e'_i)_{i \in I}$ une base de F , $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille libre de E et $\mathcal{G} = (y_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E , ces objets servent ici de notation et seront utilisés indépendamment lors de la preuve.

Montrons que l'image d'une base \mathcal{B} par une application injective est une famille libre \mathcal{F} .
Supposons f injective, donc pour $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$,

$$0_F = \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = f \left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i \right) \xrightarrow{f \text{ inj}} \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E \xrightarrow{\mathcal{B} \text{ base donc libre}} (\lambda_i)_{i \in I} = \widetilde{0}_{\mathbb{K}},$$

donc $f(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$ libre.

Supposons qu'il existe \mathcal{B} telle que $f(\mathcal{B})$ soit libre, montrons qu'alors f est injective.

Soit $x \in \ker f$:

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : 0_F = f(x) = f \left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) \xrightarrow{f(\mathcal{B}) \text{ libre}} (\lambda_i)_{i \in I} = \widetilde{0}_{\mathbb{K}},$$

donc $x = 0_E$ donc $\ker f = \{0_E\}$ et f injective.

Montrons que l'image d'une base \mathcal{B} par une application surjective est une famille génératrice \mathcal{G} .

Supposons f surjective. Ainsi, $\text{Im} f = F$, or \mathcal{B} est une base donc est génératrice donc :

$$\text{Vect } f(\mathcal{B}) = f(\text{Vect } \mathcal{B}) = f(E) = \text{Im} f = F,$$

donc $f(\mathcal{B}) = \mathcal{G}$ est génératrice.

Supposons qu'il existe \mathcal{B} telle que $f(\mathcal{B})$ soit génératrice, montrons que f est surjective.

On a ainsi,

$$F = \text{Vect } f(\mathcal{B}) = f(\text{Vect } \mathcal{B}) = f(E) = \text{Im} f,$$

donc f surjective.

Montrons que l'image d'une base \mathcal{B} par un isomorphisme est une base \mathcal{B}' .

Supposons que f soit un isomorphisme. f est injective et \mathcal{B} est une base donc $f(\mathcal{B})$ est libre. f est surjective et \mathcal{B} est une base donc $f(\mathcal{B})$ est génératrice. Ainsi, $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ est une base.

Réciproquement, supposons qu'il existe \mathcal{B} telle que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ soit une base, montrons que f est un isomorphisme.

\mathcal{B}' est une base donc est libre donc f est injective. \mathcal{B}' est une base donc est génératrice donc f est surjective. Ainsi, f est un isomorphisme. \square

6 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Il existe une unique application linéaire de E dans F qui envoie une base donnée de E sur une famille de F imposée.

Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(y_i)_{i \in I}$ une famille de F .

$$\exists! f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) : \forall i \in I, f(e_i) = y_i \quad (4)$$

Nous pouvons expliciter une telle application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i & \mapsto & \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot y_i \end{array} \right. \quad (5)$$

Démonstration.

Analyse Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ tel que $\forall i \in I, f(e_i) = y_i$.

Tout vecteur de E peut se décomposer de manière unique dans la base $(e_i)_{i \in I}$, ce qui détermine son image. Ainsi, f est unique.

Synthèse Posons une telle application f .

- $(e_i)_{i \in I}$ est une base donc $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle et unique donc $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot y_i$ existe et unique. Ainsi, f est bien définie.
- Soient $(\alpha, \beta, x, x') \in \mathbb{K}^2 \times E^2$ fixés quelconques. Notons $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\lambda'_i)_{i \in I}$ les coordonnées de x et x' dans $(e_i)_{i \in I}$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha x + \beta x') &= f\left(\alpha \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i + \beta \sum_{i \in I} \lambda'_i \cdot e_i\right) \\
&= f\left(\sum_{i \in I} (\alpha \lambda_i + \beta \lambda'_i) \cdot e_i\right) \\
&= \sum_{i \in I} (\alpha \lambda_i + \beta \lambda'_i) \cdot y_i \quad \text{par définition de } f \\
&= \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i y_i + \beta \sum_{i \in I} \lambda'_i y_i \\
&= \alpha f(x) + \beta f(x')
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

- Soit $j \in I$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
f(e_j) &= f\left(\sum_{i \in I} \delta_{i,j} \cdot e_i\right) \\
&= \sum_{i \in I} \delta_{i,j} \cdot y_i \\
&= y_j
\end{aligned}$$

□