

Khôlles de Mathématiques - Semaine 25

George Ober

1 Juillet 2024

1 S'il existe un inverse à droite (ou à gauche) pour une matrice carrée, alors celle ci est inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$
- S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : B \times A = I_n$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$

Démonstration. Supposons $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$. Notons $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ les endomorphismes canoniquement associés à A et à B .

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}(\hat{a} \circ \hat{b}) &= \text{mat}(\hat{a} \circ \hat{b}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \\ &= \text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \times_{\mathcal{M}_{\setminus}(\mathbb{K})} \text{mat}(\hat{b}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \\ &= A \times B \\ &= I_n \\ &= \text{mat}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) = \Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n})\end{aligned}$$

D'où, par injectivité de $\Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}$, $\hat{a} \circ \hat{b} = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$.

Ainsi, $\hat{a} \circ \hat{b}$ est surjective, donc \hat{a} est surjective, mais par l'accident de la dimension finie, \hat{a} est bijective, donc c'est un automorphisme, donc toutes ses matrices associées sont inversibles. On effectue un même raisonnement pour l'inversibilité à gauche, en utilisant cette fois l'injectivité. \square

2 Lien composée des applications linéaires et produit des matrices les représentant vis-à-vis de certaines bases

Soient E, F, G , trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases respectives de ces trois espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$.

Alors

$$\text{mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \text{mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \times \text{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \quad (1)$$

Démonstration. Posons $W = \text{mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, $V = \text{mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, $U = \text{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

Donc $V \times U$ a un sens et $V \times U \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$

Pour montrer l'égalité matricielle, nous allons utiliser la propriété suivante :

Soient $(M, M') \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})^2$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) : MX = M'X$, alors $M = M'$. (Cela se prouve facilement en particulierisant pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$)

Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, montrons que $W \times X = V \times U \times X$. Posons $x \in E$ de sorte que $X = \text{mat}(x, \mathcal{B}_E)$.

$$\begin{aligned}
WX &= \text{mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) \times \text{mat}(x, \mathcal{B}_E) \\
&= \text{mat}((v \circ u)(x), \mathcal{B}_G) \\
&= \text{mat}(v(u(x)), \mathcal{B}_G) \\
&= \text{mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \times \text{mat}(u(x), \mathcal{B}_F) \\
&\text{d'après l'expression matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire} \\
&= V \times \text{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \times \text{mat}(x, \mathcal{B}_E) \\
&= V \times U \times X
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité matricielle □

3 Montrer qu'une famille de d vecteurs d'un espace de dimension d est une base si et seulement si la matrice de ces vecteurs dans une base (donc dans toute) est inversible.

Soit H un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$. \mathcal{B}_H , une base de H et (h_1, \dots, h_d) , d vecteurs de H .

$$(h_1, \dots, h_d) \text{ base de } H \iff \text{mat}((h_1, \dots, h_d), \mathcal{B}_H) \in GL_n(\mathbb{K}) \quad (2)$$

Démonstration. Notons (e_1, \dots, e_d) la base de H . Cherchons à interpréter $\text{mat}((h_1, \dots, h_d), \mathcal{B}_H)$ comme la matrice d'une application linéaire. Notons u l'unique endomorphisme de H dans H tel que $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, u(e_i) = h_i$

$$\begin{aligned}
\text{mat}(u, \mathcal{B}_H) &= \left[\text{mat}(u(e_1), \mathcal{B}_H) \mid \text{mat}(u(e_2), \mathcal{B}_H) \mid \dots \mid \text{mat}(u(e_d), \mathcal{B}_H) \right] \\
&= \left[\text{mat}(h_1, \mathcal{B}_H) \mid \text{mat}(h_2, \mathcal{B}_H) \mid \dots \mid \text{mat}(h_d, \mathcal{B}_H) \right] \\
&= \text{mat}((h_1, \dots, h_d), \mathcal{B}_H)
\end{aligned}$$

Si bien que

$$\begin{aligned}
(h_1, \dots, h_d) \text{ base de } H &\iff (u(e_1), \dots, u(e_d)) \text{ base de } H \\
&\iff u \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(H) \\
&\iff \text{mat}(u, \mathcal{B}_H) \in GL_d(\mathbb{K}) \\
&\iff \text{mat}((h_1, \dots, h_d), \mathcal{B}_H) \in GL_d(\mathbb{K})
\end{aligned}$$

□

4 Preuve de la formule de changement de base pour une application linéaire, cas particulier d'un endomorphisme lu dans la même base au départ et à l'arrivée.

Soient (E, F) deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, \mathcal{B}_E et \mathcal{B}'_E deux bases de E , \mathcal{B}_F et \mathcal{B}'_F deux bases de F

Posons $U = \text{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ et $U' = \text{mat}(u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$, $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E)$, et $Q = \mathcal{P}(\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F)$

Alors

$$U' = Q^{-1}UP \quad (3)$$

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, où $\dim E = n$. Posons $x = \Psi_{\mathcal{B}_E}^{-1}(X)$ et $Y = \Psi_{\mathcal{B}_F}(u(x))$.

Puisque $U = \text{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, $Y = UX$

Posons $X' = \Psi_{\mathcal{B}'_E}(x)$ et $Y' = \Psi_{\mathcal{B}'_F}(u(x))$. La formule pour le changement de base pour les vecteurs donne $X = P X'$ et $Y = Q Y'$ Donc, puisque $U' = \text{mat}(u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$

$$\begin{aligned} Y' &= U' X' \\ \implies Q^{-1} Y &= U' P^{-1} X \\ &\text{puisque } Y = UX \\ \implies Q^{-1} UX &= U' P^{-1} X \\ &\text{en particulierisant pour } I_n \\ \implies Q^{-1} U &= U' P^{-1} \\ \implies U' &= Q^{-1} U P \end{aligned}$$

□

5 Montrer que la trace de AB est égale à la trace de BA (deux matrices carrées), et application à la définition de la trace de deux endomorphismes

Démonstration. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

◇ Preuve de l'égalité de la trace

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n [A \times B]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,i} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n B_{k,i} A_{i,k} = \sum_{k=1}^p [B \times A]_{k,k} = \text{Tr}(BA)$$

◇ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soit \mathcal{B}_0 une base de E fixée quelconque Posons $\lambda = \text{Tr}(\text{mat}(u, \mathcal{B}_0))$ Soit \mathcal{B} une autre base de E fixée quelconque, considérons $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})$ la matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B} . D'après la formule de changement de base

$$\text{mat}(u, \mathcal{B}) = P^{-1} \times \text{mat}(u, \mathcal{B}_0) \times P$$

donc

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{mat}(u, \mathcal{B})) &= \text{Tr}(P^{-1} \text{mat}(u, \mathcal{B}_0) P) \\ &= \text{Tr}(\text{mat}(u, \mathcal{B}_0) P P^{-1}) \text{ d'après la preuve précédente} \\ &= \text{Tr}(\text{mat}(u, \mathcal{B}_0)) \end{aligned}$$

D'où l'existence de la trace λ commune à toutes les matrices représentant u dans la même base au départ et à l'arrivée. On a évidemment unicité de ce scalaire, que l'on appelle la trace de l'endomorphisme u .

□

6 Égalité rang trace pour un projecteur

Démonstration. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et p un projecteur de E .

Puisque p est un projecteur, on peut l'explicitier selon son image et son noyau

$$\begin{array}{lcl} p \Big| \begin{array}{l} E \\ x \end{array} & = & \begin{array}{l} \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) \\ x_I + x_K \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} E \\ x_I \end{array} \end{array}$$

Notons donc $r = \dim \text{Im}(p) = \text{rg}(p)$. Le théorème d'existence de base assure l'existence de (e_1, \dots, e_r) base de $\text{Im}(p)$, de même, en notant (e_{r+1}, \dots, e_n) une base de $\text{Ker}(p)$, puisque les espaces sont supplémentaires, on sait que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de E .

Ainsi

$$\text{mat}(p, \mathcal{B}) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{array} \right] = J_r(n, n)$$

Donc $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(\text{mat}(p, \mathcal{B})) = r = \text{rg}(p)$

□

7 Décomposition PJ_rQ

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Posons $r = \text{rg} A$.

$$\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) : A = PJ_rQ \quad (4)$$

où J_r (avec $r \in \llbracket 0; \min(n, p) \rrbracket$) est la notation raccourcie de $J_r(n, p)$ définie par

$$J_r(n, p) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, p-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r, p-r} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]$$

Démonstration. Commençons par démontrer le lemme suivant, $\forall r \in \llbracket 0; \min(n, p) \rrbracket$, $\text{rg}(J_r(n, p)) = r$

$$\text{rg}(J_r(n, p)) = \dim \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1} \right\} = \dim \text{Vect} \underbrace{\{E^{1,1}, E^{2,1}, \dots, E^{r,1}\}}_{\substack{\text{sous-famille de la base canonique de} \\ \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ donc famille libre}}} = r$$

Notons \hat{a} l'application linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n canoniquement associée à A de sorte que $A = \text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_c, \mathbb{K}^p, \mathcal{B}_c, \mathbb{K}^n)$. Nous devons chercher deux bases \mathcal{B}_1 de \mathbb{K}^p et \mathcal{B}_2 de \mathbb{K}^n telles que

$$\text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] = J_r$$

Le théorème du rang appliqué à \hat{a} donne $\dim \mathbb{K}^p = \text{rg} \hat{a} + \dim \ker \hat{a}$. Or $\text{rg} \hat{a} = \text{rg} A = r$. Donc $\dim \ker \hat{a} = p - r$. Fixons E_1 un sous-espace de \mathbb{K}^p supplémentaire de $\ker \hat{a}$ ainsi $\mathbb{K}^p = E_1 \oplus \ker \hat{a}$ et $\dim E_1 = \dim \mathbb{K}^p - \dim \ker \hat{a} = p - (p - r) = r$.

Choisissons (f_1, \dots, f_r) une base de E_1 et (f_{r+1}, \dots, f_p) une base $\ker \hat{a}$. Posons $\mathcal{B}_1 = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_p)$ ce qui est bien une base car E_1 et $\ker \hat{a}$ sont supplémentaires.

$$\text{Im}\hat{a} = \text{Vect} \left\{ \hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r), \underbrace{\hat{a}(f_{r+1}), \dots, \hat{a}(f_p)}_{=0_{\mathbb{K}^n}} \right\} = \text{Vect} \{ \hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r) \}. \text{ Donc } (\hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r))$$

est une famille génératrice de cardinal r de $\text{Im}\hat{a}$ qui est un espace de dimension r . Donc $(\hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r))$ est une base de $\text{Im}\hat{a}$.

D'après le théorème de la base incomplète dans \mathbb{K}^n , il existe une famille $(g_{r+1}, \dots, g_n) \in (\mathbb{K}^n)^{n-r}$ telle que $(\hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r), g_{r+1}, \dots, g_n)$ est une base de \mathbb{K}^n que l'on notera \mathcal{B}_2 .

Ainsi

$$\text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, p-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r, p-r} \end{array} \right] = J_r(n, p)$$

Posons $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_{c, \mathbb{K}^n} \rightarrow \mathcal{B}_2) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q = \mathcal{P}(\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_{c, \mathbb{K}^p}) \in GL_p(\mathbb{K})$. Appliquons la formule de changement de base : $\text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_{c, \mathbb{K}^p}, \mathcal{B}_{c, \mathbb{K}^n}) = \mathcal{P}(\mathcal{B}_{c, \mathbb{K}^n} \rightarrow \mathcal{B}_2) \times \text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times \mathcal{P}(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_{c, \mathbb{K}^p})$. Ainsi

$$A = P \times J_r(n, p) \times Q$$

□

8 Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le mêmes rangs. Système de représentants des classes de la relation d'équivalence "être équivalente à"

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. A est équivalente à B s'il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ tels que $B = Q^{-1}AP$.

Montrons que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le mêmes rangs, que "être équivalente à" est une relation d'équivalence, qu'il y a $\min(n, p) + 1$ classes et que $(J_r(n, p))_{r \in [0; \min(n, p)]}$ est un système de représentants de classes.

Démonstration. Notons \sim la relation "être équivalente à".

\sim est :

- réflexive car $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A = I_n^{-1}AI_p$ et $(I_n, I_p) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$.
- symétrique car soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ telles que $A \sim B$. Alors $\exists (Q, P) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) : B = Q^{-1}AP$. D'où $A = QB P^{-1}$. Donc $A = (Q^{-1})^{-1}B P^{-1}$. Or $(Q^{-1}, P^{-1}) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$. Ainsi $B \sim A$.
- transitive car soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ telles que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors $\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) : B = Q^{-1}AP$ et $\exists (S, R) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) : C = S^{-1}BR$. D'où $C = S^{-1}(Q^{-1}AP)R = (QS)^{-1}A(PR)$. Or $(QS, PR) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$. Donc $A \sim C$.

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ telles que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r$. La multiplication par une matrice à droite et à gauche par des matrices inversibles ne modifie pas le rang donc, d'après la décomposition PJ_rQ , $J_r \sim A$ et $J_r \sim B$. Par symétrie et par transitivité, $A \sim B$.

Ainsi, $(J_r(n, p))_{r \in [0; \min(n, p)]}$ est bien un système de représentants de classes. Cette famille a pour cardinal $\min(n, p) + 1$. □