Khôlles de Mathématiques - Semaine 27

Vangilluwen Hugo

5 Mai 2024

1 Norme uniforme d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b], \mathbb{R})$.
L'ensemble $\{|f(t)| \mid t \in [a;b]\}$ admet une borne supérieur notée $||f||_{\infty,[a;b]}$.

Démonstration. Montrons que sur chaque morceau, f est bornée.

Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant N} \in \mathcal{S}([a;b])$ adaptée à f. Soit $i \in [\![0; N-1]\!]$. Posons $f_i = f_{|]x_i;x_{i+1}[}$. f étant continue par morceaux, $\exists (l_i^+, l_{i-1}^-) \in \mathbb{R}^2 : \lim\limits_{x \to x_i^+} f_i(x) = l_i^+ \wedge \lim\limits_{x \to x_{i+1}^-} f_i(x) = l_{i+1}^-$. Nous pouvons donc prolonger f_i en $\tilde{f}_i$ par continuité en x_i et en x_{i+1}. Comme $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, le théorème de Weierstrass s'applique : $\mathrm{Im}\tilde{f}_i$ est bornée (donc f_i aussi). Ainsi $||f_i||_{\infty,[a;b]}$ est bien défini.
$\{|f(t)| \mid t \in [a;b]\}$ est :

- une partie de $\mathbb{R}$
- non vide car contenant $|f(x)|$.
- majorée par $\max\left(\{||f_i||_{\infty,[a;b]} \,|i \in [\![0;N-1]\!]\} \cup \{||f_i||_{\infty,[a;b]} \,|i \in [\![0;N-1]\!]\}\right)$ (ensemble admettant bien un plus grand élément puisque fini)

Donc $||f||_{\infty,[a;b]}$ est bien définie.

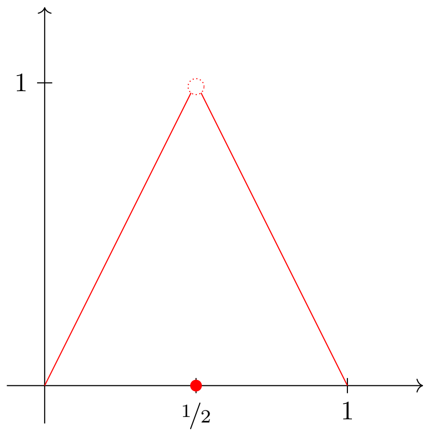

Figure 1 – $||f||_{\infty,[a;b]}$ peut ne pas être atteinte

$\square$