Khôlles de Mathématiques - Semaine 20

Hugo Vangilluwen

10 Mars 2024

1 Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[X]^\times = \left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\} \tag{1}$$

Démonstration. Soit P un élément inversible de $\mathbb{K}[X]$. Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P \cdot Q = Q \cdot P = 1_{\mathbb{K}[X]}$.
En prenant les degrés des polynômes, $\deg P \times \deg Q = 0$.
Si $\deg P = 0$ alors $P \neq O_{\mathbb{K}[X]}$ (sinon $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]}$). Donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : P = \lambda$.
Si $\deg P \neq 0$. Or $\deg : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est intègre donc $\deg Q = 0$. D'où $\exists \mu \in \mathbb{K} : Q = \mu (= \mu X^0)$. Par définition de $\mathbb{K}[X]$, $\exists p \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}} : P = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k X^k$. Or $P \cdot Q = X^0$ donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu p_k X^k = X^0$.
Par unicité des coefficients, $\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = 0$ et $p_0 = \mu^{-1} \in \mathbb{K}^*$. Donc, en posant $\lambda = \mu^{-1}$, $P = \lambda$.
Ainsi $\mathbb{K}[X]^\times \subset \left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Considérons $P = \lambda$. Posons $Q = \lambda^{-1}$ (car $\mathbb{K}$ est un corps). $P \cdot Q = \lambda\lambda^{-1}$ et $Q \cdot P = \lambda^{-1}\lambda$ donc P est inversible. Ainsi $\left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\} \subset \mathbb{K}[X]^\times$. □

2 Pour $P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, exprimer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires

Les fonctions symétriques élémentaires $(\sigma_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ pour une famille $(x_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ sont définies par

$$\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j} \tag{2}$$

Démonstration. Sous forme développée, $P = X^3 - (x1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3 = X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3$. Comme x_1, x_2, x_3 sont racines de P, nous avons les trois égalité suivantes :

$$\begin{aligned}
0 = P(x_1) = x_1^3 - \sigma_1x_1^2 + \sigma_2x_1 - \sigma_3 \\
0 = P(x_1) = x_2^3 - \sigma_1x_2^2 + \sigma_2x_2 - \sigma_3 \\
0 = P(x_1) = x_3^3 - \sigma_1x_3^2 + \sigma_2x_3 - \sigma_3
\end{aligned}$$

En sommant ces trois équation,

$$0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \sigma_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sigma_2(x_1 + x_2 + x_3) - 3\sigma_3$$

Cherchons la somme des carrés.

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
\implies\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

□

3 Expression de S_2, S_{-1} et S_{-2} à l'aide des fonctions élémentaires symétriques.

Les sommes de Newton $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ pour une famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont définies par (sous réserve d'existence pour $k<0$) :

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \tag{3}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{S_2} + 2 \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j}_{\sigma_2} \\
\Longrightarrow\ S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2
\end{aligned}$$

$$S_{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$$

$$\begin{aligned}
S_{-2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{x_i}\frac{1}{x_j} \\
&= \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n} - 2\frac{\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\notin\{i,j\}}} \frac{1}{x_j}}{\sigma_n} \\
&= \frac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-2}\sigma_n}{\sigma_n^2}
\end{aligned}$$

□