Khôlles de Mathématiques - Semaine 19

Hugo Vangilluwen, George Ober, Kylian Boyet, Félix Rondeau

15 février 2025

1 Caractérisation d'une famille liée

Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaires d'autres vecteurs de la famille.

$$(x_i)_{i\in I} \text{ est liée } \iff \exists i_0 \in I : \exists (\lambda_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I\setminus\{i_0\})} : x_{i_0} = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \lambda_i . x_i \tag{1}$$

Démonstration. Supposons que $(x_i)_{i\in I}$ est liée. Par définition,

$$\exists (\mu_i)\mathbb{K}^{(I)} : \begin{cases} \sum_{i\in I} \mu_i x_i & = 0_E \\ (\mu_i)_{i\in I} & \neq (0_\mathbb{K})_{i\in I} \end{cases}$$

Donc $\exists i_0 \in I : \mu_{i_0} \neq 0_\mathbb{K}$. Fixons un tel i_0.

$$\mu_{i_0} x_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i x_i = 0_E$$

Or $\mu_{i_0} \neq 0$, donc

$$x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \left(\mu_{i_0}^{-1} \times (-\mu_i)\right) . x_i$$

En posant $\lambda_i = \mu_{i_0}^{-1} \times (-\mu_i)$, on obtient

$$x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i . x_i$$

Supposons maintenant qu'il existe $i_0 \in I$ et $(\lambda_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I\setminus\{i_0\})}$ tels que

$$x_{i_0} = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \lambda_i . x_i$$

Alors $-x_{i_0} + \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \lambda_i . x_i = 0_E$. Posons $\mu_{i_0} = -1_\mathbb{K}$ et $\forall i \in I\setminus\{i_0\}, \mu_i = \lambda_i$. Ainsi, $(\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $\sum_{i\in I} \mu_i . x_i = 0_\mathbb{K}$. Or $\mu_{i_0} \neq 0_\mathbb{K}$ donc $(\mu_i)_{i\in I} \neq (0_\mathbb{K})_{i\in I}$.
Ainsi, $(\mu_i)_{i\in I}$ est liée. $\square$

2 Définition et existence du sous-espace engendré par une partie d'un espace vectoriel.

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A. En ordonnant (partiellement) $\mathcal{P}(E)$ par l'inclusion, l'ensemble $\mathcal{A}$ admet un plus petit élément, noté $\text{Vect}_E(A)$, et appelé **le sous-espace vectoriel engendré par A dans E.**

Démonstration. Posons $\mathcal{F} = \{\text{F sous-espace vectoriel de } E \mid A \subset F\}$ et $V = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ (qui est bien défini car $\mathcal{F} \neq \emptyset$ puisque $E \in \mathcal{F}$). Montrons que $V = \min \mathcal{F}$ pour l'inclusion.

— $V \in \mathcal{F}$ car V est une intersection de sous-espaces vectoriels de E donc est un sous-espace vectoriel de E, et
$$\forall F \in \mathcal{F}, A \subset F \implies A \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \implies A \subset V$$

— Soit $F_0 \in \mathcal{F}$ fixé quelconque.
$$V = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = F \cap \left(\bigcap_{F\in\mathcal{F}\setminus F_0} \right) \subset F_0$$
donc V est plus petit que tous les autres éléments de $\mathcal{F}$ pour l'inclusion.

□

3 Description explicite du sous-espace vectoriel engendré par une partie.

Le sous-espace vectoriel engendré dane E par la famille $(a_i)_{i\in I}$ est
$$\text{Vect }_E\{a_i \mid i \in I\} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i a_i \,\middle|\, (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}$$
On note cet ensemble W pour la démonstration.

Démonstration.

▷ *W est un sous-espace vectoriel de E.*
- ⋆ $W \subset E$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
- ⋆ $W \neq \emptyset$ car $0_E \in W$ (pour $(\lambda_i)_{i\in I} \leftarrow (O_\mathbb{K})_{i\in I}$).
- ⋆ Soient $(x, y) \in W^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé quelconque. Il existe (λ_i) et (μ_i) deux familles presque nulles de $\mathbb{K}$ telles que
$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i\in I} \mu_i a_i$$
Ainsi,
$$x + y = \sum_{i\in I} (\lambda \times \lambda_i + \mu_i) \cdot a_i$$

□

4 Stabilité de la liberté d'une famille par adjonction d'un vecteur n'appartenant pas au sous-espace qu'elle engendre.

Démonstration. □

5 Équivalence $\mathcal{F}$ base, tout vecteur se décompose de manière unique dans $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ générarice minimale et $\mathcal{F}$ libre maximale.

Démonstration. □

6 Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}) \\ \mathrm{Im} f &= \{y \in F \mid \exists x \in E : f(x) = y\} \end{aligned} \tag{2}$$

Nous démontrerons le résultat plus général suivant :

(i) $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

(ii) $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. (i) $0_E \in E'$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E')$ d'où $f(E') \neq \emptyset$
Soit $(\alpha, \beta, y, y') \in \mathbb{K}^2 \times f(E')^2$ fixés quelconques.
Par définition, $\exists (x, x') \in E'^2 : f(x) = y \wedge f(x') = y$.

$$\begin{aligned} \alpha y + \beta y' &= \alpha f(x) + \beta f(x') \\ &= f(\alpha x + \beta x') \quad \text{car } f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \\ &\in f(E') \quad \text{car } \alpha x + \beta x' \in E' \text{ puisque } E' \text{ est un sous-espace vectoriel} \end{aligned}$$

Donc $f(E')$ est un sous-espace vectoriel .
(ii) $0_F \in F'$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in f^{-1}(F')$ d'où $f(F') \neq \emptyset$
Soit $(\alpha, \beta, x, x') \in \mathbb{K}^2 \times f^{-1}(F')^2$ fixés quelconques.
Par définition, $\exists (y, y') \in F'^2 : f(x) = y \wedge f(x') = y$.
Or F' est sous-espace vectoriel donc $\alpha y + \beta y' \in F'$. $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ d'où $f(\alpha x + \beta x') = \alpha y + \beta y'$.
Donc $\alpha x + \beta x' \in f^{-1}(F')$.
Ainsi, $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel .

En appliquant pour $E' = E$ et $F' = \{0_F\}$, nous obtenons que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels . $\square$