

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 11

Kylian Boyet, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

13 décembre 2023

## 1 Caractérisation séquentielle de la densité.

Soient  $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})^2$ . Montrons que :

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

*Démonstration.* Sens indirect : supposons  $A \subset B$  et  $\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b$  :

★  $A \subset B$  par hypothèse.

★ Montrons que  $\forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$  (on utilise la caractérisation de la densité avec les  $\varepsilon$ )

Soient  $b \in B$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fixés quelconques :

Par hypothèse appliquée pour  $b \leftarrow b : \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$

Appliquons la définition de la convergence de  $(a_n)$  vers  $b$  pour  $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$  :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons un tel  $N$  :

En particulier,  $a_N \in A$  et  $|a_N - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

Donc  $A$  est dense dans  $B$ .

Sens direct : supposons  $A$  dense dans  $B$  :

★ Par définition,  $A \subset B$

★ Soit  $b \in B$  fixé quelconque.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé quelconque :

Appliquons la caractérisation de la densité par les  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$  (autorisé car  $\frac{1}{2^n} > 0$ ), et  $b \leftarrow b$  :

$$\exists a \in A : |a - b| \leq \frac{1}{2^n}$$

Notons  $a_n$  un tel élément. Nous venons de construire  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème sans nom,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b$ .

□

## 2 Théorème de la convergence monotone

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite monotone :

1. Si  $u$  est croissante

(i) Soit  $u$  est majorée, et dans ce cas,  $\lim u = \sup\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$

(ii) Soit  $u$  n'est pas bornée, et dans ce cas,  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

2. Si  $u$  est décroissante :

(i) Soit  $u$  est minorée, et dans ce cas,  $\lim u = \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$

(ii) Soit  $u$  n'est pas bornée, et dans ce cas,  $u$  diverge vers  $-\infty$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  monotone fq.

1. Supposons que  $u$  est croissante.

(i) Supposons que  $u$  est majorée.

Alors  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ . Fixons un tel  $M$ .

$\Omega = \{u_k | k \in \mathbb{N}\}$  est

- une partie de  $\mathbb{R}$
- non vide car  $u_0$  y appartient
- majorée par  $M$

donc elle admet une borne supérieure et notons-la  $\sigma$ .

Soit  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fq.

$\sigma - \epsilon < \sigma$  donc  $\sigma - \epsilon$  ne majore pas  $\Omega$ . Donc  $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > \sigma - \epsilon$ . Fixons un tel  $N$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq tq  $n \geq N$ .

Alors  $u_n \underset{\text{par croissant de } u}{\geq} u_N \geq \sigma - \epsilon$  et  $u_n \underset{\text{par définition de } \sigma}{\leq} \sigma$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma - \epsilon \leq u_n \leq \sigma &\implies -\epsilon \leq u_n - \sigma \leq 0 \\ &\implies |u_n - \sigma| \leq \epsilon \end{aligned}$$

Donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$ .

(ii) Supposons que  $u$  n'est pas bornée.

Soit  $A \in \mathbb{R}$  fq.

$u$  n'est pas bornée donc  $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > A$ .

Or  $u$  est croissante donc  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A$ .

Donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

2. Supposons que  $u$  est décroissante.

Il suffit dans la preuve ci-dessus de remplacer les inégalités inférieures par des inégalités supérieures et inversement et d'utiliser la notion de borne inférieure plutôt que de borne supérieure.

(i) Si  $u$  est minorée,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$ .

(ii) Si  $u$  n'est pas bornée,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ .

□

### 3 Théorème de Césaro

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Alors la moyenne arithmétique des  $n \in \mathbb{N}$  premiers termes (appelée moyenne de Césaro) converge vers  $\ell$ .

*Démonstration.* Soient  $u$  une telle suite,  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\ell \in \mathbb{R}$  ladite limite de  $u$ . Appliquons la définition de la convergence de  $u$  pour  $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$  :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Fixons un tel  $N$ . Posons  $\omega = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N$ . Calculons :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell|}_{= \omega \in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k - \ell|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} \leq \frac{\omega}{n} + \underbrace{\frac{\epsilon}{2n}}_{\leq \frac{\epsilon}{2}}.$$

Ces majorations sont issues de l'inégalité triangulaire et de la convergence de  $u$ . De plus, comme la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\omega}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, on écrit sa définition pour  $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$  :

$$\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \implies |v_n| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On fixe un tel  $N'$  et on pose  $\Lambda = \max(N, N')$  qui a bien un sens car  $\{N, N'\}$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$ . De la même manière qu'auparavant, pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq \Lambda$ , on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \underbrace{\frac{\omega}{n}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

C'est le théorème souhaité. □

## 4 Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

Soient  $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  :

- (i) Si  $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0 \\ u \text{ converge} \end{cases}$   
Alors  $\lim u \geq 0$
- (ii) Si  $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \\ u \text{ et } v \text{ convergent} \end{cases}$   
Alors  $\lim u \leq \lim v$

*Démonstration.*

- (i) L'hypothèse  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0$  permet d'affirmer que  $u$  et  $|u|$  coïncident à partir d'un certain rang.  
Par ailleurs, la convergence de  $u$  et la continuité de  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{R}$  donc en  $\lim u$  donnent  $|u|$  converge vers  $|\lim u|$ .  
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que  $u$  et  $|u|$  ont la même limite.  
Donc  $\lim u = |\lim u| \geq 0$
- (ii)  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \Rightarrow v_n - u_n \geq 0$   
 $u$  et  $v$  convergent  $\Rightarrow v - u$  converge vers  $\lim v - \lim u$ .  
On applique (i) pour  $u \leftarrow v - u$ , autorisé car  $u$  et  $v$  convergent.  
On obtient  $\lim v - \lim u \geq 0$  d'où  $\lim u \leq \lim v$ .

□

## 5 Théorème des suites adjacentes

Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles adjacentes. Alors  $u$  et  $v$  convergent et ont la même limite.

*Démonstration.* Soient  $u$  et  $v$  de telles suites. Quitte à inverser les rôles desdites suites, prenons  $u$  croissante et  $v$  décroissante.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq v_n \leq \underbrace{v_0}_{\in \mathbb{R}}) \wedge (\underbrace{u_0}_{\in \mathbb{R}} \leq u_n \leq v_n),$$

car la monotonie des suites induit ces inégalités. D'après le théorème de limite monotone,  $u$  étant croissante et majorée elle converge,  $v$  étant décroissante et minorée elle converge.

Il s'en suit que par définition des suites adjacentes :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \underset[u, v \text{ convergent}]{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Ainsi,  $\lim u = \lim v$ . □

## 6 \*Facultative\* Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée réelle admet une sous-suite convergente.

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée est non vide.

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  fq bornée.

Alors  $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

Construisons une suite de segments dans  $[-M; M]$  de plus en plus petits par dichotomie.  
Posons  $a_0 = -M$ ,  $b_0 = M$  et définissons les suites  $c$  et  $I$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  par  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $I_n = [a_n; b_n]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Supposons  $a_n$  et  $b_n$  construits et  $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$  infini. Construisons les termes d'indices  $n+1$ .

Posons  $\begin{cases} I_n^- = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n; c_n]\} \\ I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [c_n; b_n]\} \end{cases}$

Nous avons  $I_n^- \cup I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$  donc  $I_n^-$  ou  $I_n^+$  est infini.

— Si  $I_n^-$  est infini, posons  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$   
Ainsi  $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^-$  est infini.

— Si  $I_n^+$  est infini, posons  $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$   
Ainsi  $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^+$  est infini.

Étudions la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

— Nous avons toujours  $a_n \leq b_n$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \neq \emptyset$

— Par construction,  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$

—  $|I_{n+1}| = |a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \frac{1}{2}|I_n|$  donc la suite des cardinaux est une suite géométrique de raison  $1/2$ . Donc  $|I_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc, d'après le théorème des segments emboîtés,  $\exists ! \ell \in \mathbb{R} : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ . Fixons un tel  $\ell$ .

Construisons maintenant une extractrice  $\varphi$  de  $u$ .

Posons  $\varphi(0) = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Supposons  $\varphi(n)$  construite.

$$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1} \wedge k > \varphi(n)\}$$

$\varphi(n+1)$  est bien définie car  $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\}$  est une partie de  $\mathbb{N}$  non bornée (car infinie).

Ainsi, nous avons construit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante. Nous pouvons extraire une sous-suite de  $u$ . Or  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in I_n$  donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{a_n}_{n \rightarrow +\infty} \leq u_{\varphi(n)} \leq \underbrace{b_n}_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow \ell$$

Donc, d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,  $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

Ainsi  $\ell \in L_u$ . □

## 7 \*Facultative\* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit  $u$  une suite bornée.  $u$  converge si et seulement si il existe  $\ell \in \mathbb{K}$  tel que  $L(u)$  est le singleton  $\ell$

*Démonstration.* Traitons le cas réel, celui sur  $\mathbb{C}$  est à adapter sans peine.

Supposons que  $u$  converge et posons  $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$ . Toutes les sous-suites de  $u$  convergent vers  $\ell$  donc  $L(u) = \{\ell\}$ .

Supposons maintenant qu'il existe un unique  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $L(u) = \{\ell\}$ . Par l'absurde, supposons que  $u$  ne converge pas vers  $\ell$ , c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel  $\varepsilon$ .

Posons  $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$ , ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de  $\mathbb{N}$ .

Posons ensuite  $\varphi(1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(0) < k\}$ , ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé  $\varphi(n)$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse  $u$  est bornée, donc il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M,$$

donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $|u_{\varphi(n)}| \leq M$ , donc  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe  $\psi$  une extractrice et  $\ell' \in \mathbb{R}$ , avec  $\varphi \circ \psi$  qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc  $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $u$  et  $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$ .

Par ailleurs, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\underbrace{|u_{\varphi \circ \psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$ , ce qui n'est pas possible car  $\ell$  est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle.  $\square$