

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 25

George Ober

27 Avril 2024

## 1 S'il existe un inverse à droite (ou à gauche) pour une matrice carrée, alors celle ci est inversible

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- S'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$ , alors  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $A^{-1} = B$
- S'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : B \times A = I_n$ , alors  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $A^{-1} = B$

*Démonstration.* Supposons  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$ . Notons  $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  les endomorphismes canoniquement associés à  $A$  et à  $B$ .

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}(\hat{a} \circ \hat{b}) &= \text{mat}(\hat{a} \circ \hat{b}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \\ &= \text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \times_{\mathcal{M}_\setminus(\mathbb{K})} \text{mat}(\hat{b}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \\ &= A \times B \\ &= I_n \\ &= \text{mat}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) = \Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n})\end{aligned}$$

D'où, par injectivité de  $\Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}$ ,  $\hat{a} \circ \hat{b} = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$ .

Ainsi,  $\hat{a} \circ \hat{b}$  est surjective, donc  $\hat{a}$  est surjective, mais par l'accident de la dimension finie,  $\hat{a}$  est bijective, donc c'est un automorphisme, donc toutes ses matrices associées sont inversibles. On effectue un même raisonnement pour l'inversibilité à gauche, en utilisant cette fois l'injectivité.  $\square$