Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

16 décembre 2023

1 Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur $\mathbb{C}$ est à adapter sans peine.
Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.
Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε.
Posons $\varphi(0) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de $\mathbb{N}$. Posons ensuite $\varphi(1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \ \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \ \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq M,$$

donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leq M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc$(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.
Par ailleurs, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\underbrace{|u_{\varphi \circ \psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. □

2 Montrons que l'intérieur de l'ensemble des rationnels est vide.

Montrons que : $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\mathbb{Q}$ possède au moins un point intérieur.
Fixons $r_0 \in \mathring{\mathbb{Q}}$. Par définition d'un point intérieur, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: $]r_0 - \varepsilon, \ r_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$. Or, par densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$: $r_0 - \varepsilon < \alpha < r_0 + \varepsilon$. On en déduit que $\alpha \in]r_0 - \varepsilon, \ r_0 + \varepsilon[$, or $]r_0 - \varepsilon, \ r_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$ donc $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit le choix de $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Ainsi, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ □

3 Théorème sans nom version continue au voisinage de a

Soient $f, g \ : \ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathcal{D}}$ tels que $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et g tend vers 0 en a. Alors montrons que f tend vers ℓ en a.

Démonstration. On traite le cas $a \in \mathbb{R}$. Par définition de $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a,

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall x \in \mathcal{D}, \ |x - a| \leq \varepsilon \implies |f(x) - \ell| \leq g(x).$$

Fixons un tel ε.
Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ pour $\varepsilon \leftarrow \omega$:

$$\exists \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall x \in \mathcal{D}, \ |x - a| \leq \varepsilon' \implies |g(x)| \leq \omega.$$

Fixons un tel ε'.
Posons $\Omega = \min \{\varepsilon, \varepsilon'\}$.
Soit $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x - a| \leq \Omega$.

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \leq \omega,$$

car la définition de Ω permet de remplir les conditions des deux propriétés. $\square$