Khôlles de Mathématiques - Semaine 11

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

9 décembre 2023

1 Caractérisation séquentielle de la densité.

Soient $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\})^2$. Montrons que :

$$A \text{ est dense dans } B \iff \left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ \forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b \end{array} \right.$$

Démonstration. Sens indirect : supposons $A \subset B$ et $\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n)$ converge vers b :

- $\star$ $A \subset B$ par hypothèse.
- $\star$ Montrons que $\forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$ (on utilise la caractérisation de la densité avec les ε)
  Soient $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques :
  Par hypothèse appliquée pour $b \leftarrow b$: $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$
  Appliquons la définition de la convergence de (a_n) vers b pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

  Fixons un tel N :
  En particulier, $a_N \in A$ et $|a_N - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$
  Donc A est dense dans B.

Sens direct : supposons A dense dans B :

- $\star$ Par définition, $A \subset B$
- $\star$ Soit $b \in B$ fixé quelconque.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque :
  Appliquons la caractérisation de la densité par les ε pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$ (autorisé car $\frac{1}{2^n} > 0$), et $b \leftarrow b$:

$$\exists a \in A : |a - b| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

  Notons a_n un tel élément. Nous venons de construire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b| \leqslant \frac{1}{2^n}$
  Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
  Ainsi, d'après le théorème sans nom, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b.

□

2 Théorème de Césarò

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors la moyenne arithmérique des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes (appelée moyenne de Césarò) converge vers ℓ.

Démonstration. Soient u une telle suite, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ladite limite de u. Appliquons la définition de la convergence de u pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons un tel N. Posons $\omega = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Calculons :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - \ell)\right| \leq \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}|u_k - \ell|}_{=\ \omega\in\mathbb{R}} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=N}^{n}|u_k - \ell|}_{\leq\ \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{\omega}{n} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2n}}_{\leq\ \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Ces majorations sont issues de l'inégalité triangulaire et de la convergence de u. De plus, comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\omega}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on écrit sa définition pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N' \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N' \implies |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe un tel N' et on pose $\Lambda = \max(N, N')$ qui a bien un sens car $\{N,\ N'\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$. De la même manière qu'auparavant, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \Lambda$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell\right| \leq \underbrace{\frac{\omega}{n}}_{\leq\ \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

C'est le théorème souhaité. □

3 Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(i) Si $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant 0 \\ u \text{ converge} \end{array} \right.$
Alors $\lim u \geqslant 0$

(ii) Si $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \\ u \text{ et } v \text{ convergent} \end{array} \right.$
Alors $\lim u \leqslant \lim v$

Démonstration.

(i) L'hypothèse $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant 0$ permet d'affirmer que u et $|u|$ coïncident à partir d'un certain rang.
Par ailleurs, la convergence de u et la continuité de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ donc en $\lim u$ donnent $|u|$ converge vers $|\lim u|$.
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que u et $|u|$ ont la même limite.
Donc $\lim u = |\lim u| \geqslant 0$

(ii) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \Rightarrow v_n - u_n \geqslant 0$
u et v convergent $\Rightarrow v - u$ converge vers $\lim v - \lim u$.
On applique (i) pour $u \leftarrow v - u$, autorisé car u et v convergent.
On obtient $\lim v - \lim u \geqslant 0$ d'où $\lim u \leqslant \lim v$.

□

4 Théorème des suites adjacentes

Soient u et v deux suites réelles adjacentes. Alors u et v convergent et ont la même limite.

Démonstration. Soient u et v de telles suites. Quitte à inverser les rôles desdites suites, prenons u croissante et v décroissante.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n \leq v_n \leq \underbrace{v_0}_{\in\mathbb{R}}) \wedge (\underbrace{u_0}_{\in\mathbb{R}} \leq u_n \leq v_n),$$

car la monotonie des suites induit ces inégalités. D'après le théorème de limite monotone, u étant croissante et majorée elle converge, v étant décroissante et minorée elle converge.
Il s'en suit que par définition des suites adjacentes :

$$0 \ = \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) \underbrace{=}_{u,v \text{ convergent}} \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Ainsi, $\lim u = \lim v$. □

5 *Facultative* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur $\mathbb{C}$ est à adapter sans peine.
Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.
Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε.
Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de $\mathbb{N}$. Posons ensuite $\varphi(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon,\ \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon,\ \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M,$$

donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leq M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.
Par ailleurs, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\underbrace{|u_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell'-\ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. □