

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 7

Kylian Boyet, George Ober, Elijah Gaillard, Hugo Vangilluwen (relecture)

10 novembre 2023

## 1 Résolution de l'ED $\forall t \in J, y' + a_0(t) = b(t)$ par équivalences avec la méthode du facteur intégral.

*Démonstration.* Pour cette preuve, il est nécessaire de supposer  $a_0$  et  $b$  continus. Ainsi, on note  $A$  la primitive de  $a_0$  définie sur  $J$ .

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. de } y' + a_0 = b \text{ sur } J &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ f' + a_0 = b \text{ sur } J \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ f'e^A + \underset{=(A')}{a_0} fe^A = be^A \text{ sur } J \text{ (} e^A \text{ est le facteur intégrant)} \end{cases} \end{aligned}$$

Notons  $B$  une primitive de  $be^A$  définie sur  $J$  (car  $b$  et  $e^A$  sont continues)

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ (fe^A)' = B' \text{ sur } J \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ (fe^A - B)' = 0 \text{ sur } J \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} : fe^A - B = \lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : f = \lambda e^{-A} + Be^{-A} \\ &\iff f \in \{\lambda e^{-A} + Be^{-A}\} \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathcal{S} = \underset{\text{sol. particulière}}{Be^{-A}} + \underset{\text{droite vectorielle des sol. de l'EDLH}}{\{\lambda e^{-A} | \lambda \in \mathbb{K}\}}$

□

## 2 Théorème de résolution des EDLH d'ordre 2 à coefficients constants complexes.

*Démonstration.*

□

## 3 Caractérisation des fonctions exponentielles et de la fonction nulle par la propriété de dérivabilité en 0 et celle de morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$ .

*Démonstration.*

□

#### 4 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$  les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas  $\Delta < 0$  et  $\alpha \pm i\beta$  les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que  $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \text{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$   
Soit  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$  fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies \text{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de Re

$$a_2 \text{Re}(f)'' + a_1 \text{Re}(f)' + a_0 \text{Re}(f) = \text{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec  $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$  ;  $\text{Re}(f(t)) = \text{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ . Qui appartient donc à  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$   
En suivant le même raisonnement pour  $\text{Im}(f)$ ,  $(t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$  fq. Puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ .

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de  $f$  sont réelles, en notant  $(a_r, a_i, b_r, b_i)$  les parties réelles et imaginaires respectives de  $a$  et  $b$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \text{Re}(f(t)) \\ &= \text{Re}(a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \text{Re}((a_r + i a_i) e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + i b_i) e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r \cos(\beta t) e^{\alpha} - a_i \sin(\beta t) e^{\alpha} + b_r \cos(\beta t) e^{\alpha} + b_i \sin(\beta t) e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r) \cos(\beta t) e^{\alpha} + (b_i - a_i) \sin(\beta t) e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion. □

## 5 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur $I$ (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{où } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$$

Si  $b$  est continu sur  $J$ , alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur  $J$ .

*Démonstration. Cas 1.*  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nous savons que sous l'hypothèse de continuité de  $b$  sur  $J$ , les solutions de (EDL2) définies sur  $J$  constituent le plan affine  $S$  :

$$S = \{ \lambda f_1 + \mu f_2 + s \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

où  $s$  est une solution particulière de (EDL2),  $(f_1, f_2)$  sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent  $S_h$ . On a :

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} &\iff \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $(\lambda, \mu)$  doit être solution d'un système linéaire  $(2, 2)$ . On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est nul.

Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera  $D$ .

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) ( $a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0$ ). On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de  $\Delta$ . Traitons d'abord le cas  $\Delta \neq 0$ . On peut choisir :

$$\begin{aligned} f_1(t_0) &= e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2 t_0} \\ f_1'(t_0) &= r_1 e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2 e^{r_2 t_0} \end{aligned}$$

Donc (en sachant que  $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$ ) :

$$D = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1 t_0 + r_2 t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a  $\Delta = 0$ ; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0 e^{r_0 t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0 t_0} (r_0 t_0 e^{r_0 t_0} + e^{r_0 t_0}) - r_0 e^{r_0 t_0} \times t_0 e^{r_0 t_0} = e^{2r_0 t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas,  $D \neq 0$ , donc le système (2, 2) étudié admet une unique solution, donc il existe un unique couple  $(\lambda, \mu)$  le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

**Cas 2.**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2, b \in C^0(J, \mathbb{R})$

**Existence :** Puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , le problème de Cauchy admet, dans  $\mathbb{R}$ , une solution à valeurs complexes  $g$ . Posons  $f = \operatorname{Re}(g)$  et montrons que  $f$  est une solution réelle du problème de Cauchy.

★  $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$  donc  $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$

★  $g$  vérifie  $a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b$  sur  $J$  donc en prenant  $\operatorname{Re}(\cdot)$  :

$$\operatorname{Re}(a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b) = \operatorname{Re}(b) \iff a_2 \operatorname{Re}(g'') + a_1 \operatorname{Re}(g') + a_0 \operatorname{Re}(g) = b$$

$$\iff a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \text{ sur } J$$

★  $f(t_0) = \operatorname{Re}(g(t_0)) = \operatorname{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$

★  $f'(t_0) = \operatorname{Re}(g(t_0))' = \operatorname{Re}(g'(t_0)) = \operatorname{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc  $f$  est une solution réelle définie sur  $J$  au problème de Cauchy.

**Unicité :** Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc  $f_1 = f_2$  dans  $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$ , donc  $f_1 = f_2$  dans  $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ .  $\square$