Khôlles de Mathématiques - Semaine 21

Kylian Boyet

13 avril 2024

1 Caractériser les polynômes irréductibles de degré 1, 2 et 3 dans $\mathbb{K}[X]$.

Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles, les polynômes irréductibles de degré 2 ou 3 sont les polynômes sans racine.s dans le corps de base.

Démonstration. Un polynôme de degré 1 ne peut s'écrire comme produit de 2 polynômes de degré ≥ 1 donc il est irréductible.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible de degré 2 ou 3.
Par définition, P n'a pas de racine.s dans $\mathbb{K}$, donc la première inclusion.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = 2$ et P n'ayant pas de racines dans $\mathbb{K}$.
Montrons que P est irréductible. Montrons la contraposée. Supposons P non-irréductible.

$$\exists\ A,\ B \in \mathbb{K}[X]\ :\ P = AB \text{ et } \deg A,\ \deg B \geq 1,$$

On a alors, $P = AB \implies 2 = \deg A + \deg B \implies \deg A,\ \deg B = 1$ donc :

$$\exists\ \alpha,\ \gamma \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}\ :\ A = \alpha X + \gamma,$$

ainsi, $P = (\alpha X + \gamma)B = \alpha\left(X + \frac{\gamma}{\alpha}\right)B$, donc P admet $-\frac{\gamma}{\alpha} \in \mathbb{K}$ comme racine, ce qui montre la contraposée.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = 3$ et P n'ayant pas de racines dans $\mathbb{K}$.
Montrons la contraposée. Supposons P non-irréductible. De même, on a :

$$\exists\ A,\ B \in \mathbb{K}[X]\ :\ P = AB \text{ et } \deg A,\ \deg B \geq 1,$$

Puis encore, $P = AB \implies 3 = \deg A + \deg B \implies \deg A,\ \deg B \in \{2, 1\}$ (l'un n'étant pas l'autre). Donc l'un des deux est de degré 1 donc P admet une racine dans $\mathbb{K}$, donc encore une fois cela montre la contraposée, ce qui démontre l'inclusion réciproque. □

2 Décrire les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Démonstration. Le premier point est immédiat, les polynômes irréductibles d'un corps contiennent les polynômes de degré 1 et par le théorème de D'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ($\deg \geq 2$) est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc non-irréductible.

Pour le second point, le cas du degré 1 est réglé. Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$.
Supposons que P soit de degré supérieur ou égal à 3. Si son degré est impair, le TVI conclut quant à l'existence d'une racine, donc non-irréductible. Si son degré est pair, par D'Alembert-Gauss, on obtient $\deg P$ couples de racines possiblement égaux.
Or, $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0 \implies P(\overline{z}) = 0$ donc les racines se rassemblent 2 à 2 pour former un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$, donc non-irréductible. Ainsi, $\deg P = 2$, immédiatement, si le discriminant de P est positif ou nul, P admet une ou deux racines dans $\mathbb{R}$, donc non irréductible. Enfin, son discriminant est alors négatif, de cette manière P n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ et est donc irréductible. Ce qui achève la preuve. □

3 Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Il s'agit donc de montrer que racine cubique de 2 n'est pas un rationnel.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r^3 - 2 = 0$. Prenons $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *le* représentant irréductible de r dans $\mathbb{Q}$. On a alors, $p^3 = 2q^3$ donc $2 \mid p^3$ or $2 \in \mathcal{P}$ donc $2 \mid p$, ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. Par conséquent, $2(2k^3) = q^3$ donc $2 \mid q^3$ or $2 \in \mathcal{P}$ donc $2 \mid q$ donc ceci contredit p et q premiers entre eux, par définition d'un représentant irréductible. Ainsi, $P = X^3 - 2$ n'admet pas de racine.s dans $\mathbb{Q}$, c'est donc un polynôme irréductible. $\square$

4 Pour $P = \prod_{k=1}^{p}(X - z_k)^{m_k} \in \mathbb{C}[X]$ avec $m_k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, montrer que $P \wedge P' = \prod_{k=1}^{p}(X - z_k)^{m_k - 1}$.

C'est une conséquence de la définition du pgcd de deux polynômes $P \wedge Q = \prod_{i \in I} P_i^{\min\{m_i, p_i\}}$, où les P_i sont les facteurs irréductibles de P et Q dans leur décomposition.

Démonstration. Soit P un tel polynôme et p un entier naturel non nul. Naturellement, P' hérite de P, $\deg P - p$ racines, lesquelles sont les z_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, de multiplicité $m_k - 1$. Ainsi,

$$\exists\ B \in \mathbb{C}[X]\ :\ \left[P' = \left(\prod_{k=1}^{p}(X - z_k)^{m_k - 1}\right) B\right] \ \wedge\ [\deg B = p]\,,$$

de cette manière on peut écrire :

$$P' = \left(\left(\prod_{k=1}^{p}(X - z_k)^{m_k - 1}\right) B\right) P^0 \text{ et } P = \left(\prod_{k=1}^{p}(X - z_k)^{m_k}\right)(P')^0,$$

de façon à faire apparaître dans les deux décompositions les mêmes facteurs, possiblement avec une puissance 0, histoire de coller à la définition de manière explicite. Ceci fait, il ne reste plus qu'à appliquer la définition du pgcd et de remarquer que seuls les $(X - z_k)^{m_k - 1}$ subsistent, notons $\mathfrak{I}$ l'ensemble des facteurs de leur décomposition, on a alors :

$$P \wedge P' = \prod_{D \in \mathfrak{I}} D^{\min\{\nu_D(P), \nu_D(P')\}} = \prod_{k=1}^{p}(X - z_k)^{m_k - 1},$$

où $\nu_D(\cdot)$ est la valuation D-adique au sens des polynômes irréductibles. Ce qui conclut. $\square$

5 Justifier la bonne définition de la dérivée d'une fraction rationnelle.

Il s'agit là de vérifier que la définition que l'on souhaiterai le plus, c'est-à-dire la même que pour la dérivée d'une fraction de fonctions, s'applique effectivement aux fractions rationnelles, c'est-à-dire que cette définition ne dépend pas du représentant choisi.

Démonstration. Montrons que pour $A,\ B \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \backslash \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, on a :

$$\left(\frac{A}{B}\right)' = \frac{A'B - B'A}{B^2}.$$

Soient A et B de tels polynômes et $C,\ D \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \backslash \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tels que $AD = BC$, en dérivant on obtient $A'D + D'A = B'C + C'B$. Calculons :

$$\begin{aligned}
(A'B - B'A)D^2 &= D(A'BD - (AD)B') \\
&= D(A'BD - BCB') \\
&= BD(A'D - CB') \\
&= BD(C'B - D'A) \\
&= B(C'BD - (AD)D') \\
&= B(C'BD - BCD') \\
&= B^2(C'D - D'C),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que le résultat ne dépend pas du représentant, par définition de $\mathbb{K}(X)$ comme structure quotient. $\square$

6 Théorème de Gauss-Lucas et interprétation graphique.

Montrer que les racines du polynôme dérivée sont dans l'enveloppe convexe des racines du polynôme.

Démonstration. Pour ce qui est de l'interprétation graphique, elle n'est pas prévue à l'heure qu'il est dans ce pdf, pour la faire soi-même dessiner des points et les "clôturer" dans un polygone convexe, ou même faire ceci avec un cas concret.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au moins 2 et notons $z_1, \ldots, z_n$ ses racines répétées avec multiplicité.
Soit u une racine de P'. Notre but est :

$$\exists\ (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}_+^* \ :\ \sum_{k=1}^{n} c_k z_k = u \text{ et } \sum_{k=1}^{n} c_k = 1.$$

→ Si u est une racine de P alors noter son indice et utiliser le symbole de Kronecker.
→ Sinon, u n'appartient pas aux racines de P, donc u n'est pas pôle de $\frac{P'}{P}$ ce qui permet de prendre l'image par le morphisme d'évaluation en u de cette même fraction rationnelle :

$$0_{\mathbb{K}} = \frac{P'(u)}{P(u)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{u} - \overline{z_k}}{|u - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{u}}{|u - z_k|^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|u - z_k|^2}.$$

Donc en passant la seconde somme à gauche et en prenant le conjugué :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u}{|u - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|u - z_k|^2} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|u-z_k|^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|u-z_k|^2}} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\frac{1}{|u-z_k|^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|u-z_i|^2}}}_{=\ c_k} z_k = \sum_{k=1}^{n} c_k z_k,$$

ce qui démontre la première partie du résultat, il est immédiat de vérifier que $\sum_{k=1}^{n} c_k = 1$, vérification laissée aux lecteurs. Ce qui achève la preuve. □

7 Donner deux expressions du coefficient associé à un pôle simple dans une décomposition en éléments simples.

Démonstration. Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \left(\mathbb{K}[X] \backslash \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\right)$ tels que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ soit irréductible et en prenant $\deg P < \deg Q$. En appliquant le théorème de décomposition en éléments simples on obtient un expression de la forme :

$$\exists\ R \in \mathbb{K}(X)\ :\ \frac{P}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - z_k} + R,$$

où les z_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont racines de Q. Ainsi, en prenant $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que z_{k_0} soit racine simple,

$$\frac{P(X - z_{k_0})}{Q} = a_{k_0} + \sum_{k=0 \text{ et } k \neq k_0} \frac{a_k (X - z_{k_0})}{X - z_{k_0}} + R(X - z_{k_0}),$$

une première expression se trouvera en notant $\widetilde{Q} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} (X - z_k)^{\nu_{(X - z_k)}(Q)}$, on a alors :

$$\frac{P(z_{k_0})}{\widetilde{Q}(z_{k_0})} = a_{k_0}.$$

Une autre expression est possible en explicitant $\widetilde{Q}$. Pour ce faire, remarquons plutôt :

$$Q' = \sum_{k=1}^{n} \nu_{(X-z_k)}(Q)(X - z_k)^{\nu_{(X-z_k)}(Q)-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X - z_i)^{\nu_{(X-z_i)}(Q)},$$

donc en prenant l'image par le morphisme d'évaluation en z_{k_0} on obtient :

$$Q'(z_{k_0}) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^{n} (z_{k_0} - z_i)^{\nu_{(X-z_i)}(Q)},$$

il s'agit exactement de $\widetilde{Q}(z_{k_0})$. Ainsi,

$$\frac{P(z_{k_0})}{Q'(z_{k_0})} = a_{k_0},$$

ce qui suffit. $\square$

8 Donner des expressions des deux coefficients associés à un pôle double dans une décomposition en éléments simples.

Démonstration. Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \left(\mathbb{K}[X] \backslash \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\right)$ tels que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ soit irréductible et en prenant $\deg P < \deg Q$. En appliquant le théorème de décomposition en éléments simples on obtient un expression de la forme suivante en considérant z_{k_0}, une racine double de Q :

$$\exists\ R \in \mathbb{K}(X)\ :\ \frac{P}{Q} = \frac{a_1}{X - z_{k_0}} + \frac{a_2}{(X - z_{k_0})^2} + R, \qquad (\star)$$

puis de même,

$$\frac{P(X - z_{k_0})^2}{Q} = a_2 + \left(\frac{a_1}{X - z_{k_0}} + R\right)(X - z_{k_0})^2,$$

donc en notant $\widetilde{Q} = \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} (X - z_k)^{\nu_{(X - z_k)}(Q)}$, on a :

$$\frac{P(z_{k_0})}{\widetilde{Q}(z_{k_0})} = a_2,$$

c'est une première expression. Pour la suivante, encore une fois, explicitons $\widetilde{Q}$. Remarquons que :

$$\exists\ A \in \mathbb{K}[X]\ :\ \left[Q'' = 2\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} (X - z_k)^{\nu_{(X - z_k)}(Q)} + A\right]\ \wedge\ \left[A(z_{k_0}) = 0\right],$$

donc, en remarquant que :

$$2\widetilde{Q}(z_{k_0}) = Q''(z_{k_0}),$$

on a finalement :

$$\frac{2P(z_{k_0})}{Q''(z_{k_0})} = a_2.$$

Pour récupérer a_1, on multiplie $(\star)$ par $(X - z_{k_0})^2$ puis on dérive :

$$\left(\frac{P(X - z_{k_0})^2}{Q}\right)' = a_1 + R'(X - z_{k_0})^2 + 2R(X - z_{k_0}),$$

soit,

$$\frac{((P'(X - z_{k_0}) + 2P)Q - Q'P)(X - z_{k_0})}{Q^2} = a_1 + R'(X - z_{k_0})^2 + 2R(X - z_{k_0})$$

$\square$