Khôlles de Mathématiques - Semaine 22

Hugo Vangilluwen, George Ober, Kylian Boyet

25 Mars 2024

Pour cette semaine, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' et F' des sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F, I un ensemble quelconque non vide.

1 Caractérisation d'une famille liée

Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaires d'autres vecteurs de la famille.

$$(x_i)_{i\in I} \text{ est liée } \iff \exists i_0 \in I : \exists (\lambda_i)_{i\in I\backslash\{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I\backslash\{i_0\})} : x_{i_0} = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \lambda_i . x_i \tag{1}$$

Démonstration. Supposons que $(x_i)_{i\in I}$ est liée.
Par définition, $\exists(\mu_i)\mathbb{K}^{(I)} : \begin{cases} \sum_{i\in I} \mu_i x_i & = O_E \\ ({}_m u_i)_{i\in I} & \neq (0_\mathbb{K})_{i\in I} \end{cases}$
Donc $\exists i_0 \in I : \mu_{i_0} \neq 0_\mathbb{K}$. Fixons un tel i_0.
$\mu_{i_0} x_{i_0} + \sum_{i\in I\backslash\{i_0\}} \mu_i x_i = 0_E$
Or $\mu_{i_0} \neq 0$, donc $x_{i_0} = \sum_{i\in I\backslash\{i_0\}} \left(\mu_{i_0}^{-1} \times (-\mu_i)\right) . x_i$.
En posant $\lambda_i = \mu_{i_0}^{-1} \times (-\mu_i)$, on obtient $\sum_{i\in I\backslash\{i_0\}} \lambda_i . x_i$.

Supposons $\exists i_0 \in I : \exists (\lambda_i)_{i\in I\backslash\{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I\backslash\{i_0\})} : x_{i_0} = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \lambda_i . x_i$.
Alors $-x_{i_0} + \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \lambda_i . x_i = 0_E$.
Posons $\mu_{i_0} = -1_\mathbb{K}$ et $\forall i \in I\backslash\{i_0\}, \mu_i = \lambda_i$.
Ainsi, $(\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $\sum_{i\in I} \mu_i . x_i$. Or $\mu_{i_0} \neq 0_\mathbb{K}$ donc $(\mu_i)_{i\in I} \neq (0_\mathbb{K})_{i\in I}$.
Donc $(\mu_i)_{i\in I}$ est liée. $\square$

2 Caractérisations d'une base

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\mathcal{F}$ est une base.
(*ii*) Tout vecteur de E se décompose de manière unique dans $\mathcal{F}$.
(*iii*) $\mathcal{F}$ est génératrice minimale (au sens de l'inclusion)
(*iv*) $\mathcal{F}$ est libre maximale (au sens de l'inclusion)

Démonstration. Notons $(e_i)_{i\in I}$ la famille $\mathcal{F}$.
(*i*) $\implies$ (*ii*) Supposons que $\mathcal{F}$ est une base de E.
Soit $x \in E$ fixé quelconque . Montrons que x s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.
$\mathcal{F}$ est une base donc elle est une famille génératrice et libre de E. La propriété génératrice donne, par définition, l'existence d'une telle écriture tandis que la propriété libre donne l'unicité d'une telle écriture.
(*ii*) $\implies$ (*iii*) Supposons que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.

L'existence d'un telle décomposition permet d'affirmer que $\mathcal{F}$ est génératrice.
Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas génératrice minimale c'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathcal{F}'$ de vecteurs de E telle que $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ engendre E.
Alors $\exists i_0 \in I : e_{i_0} \notin \mathcal{F}'$. Comme $\mathcal{F}'$ est génératrice, $\exists (\lambda_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I \setminus \{i_0\})} : e_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i . e_i$.
Donc

$$\begin{aligned} e_{i_0} &= 0_{\mathbb{K}} . e_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i . e_i \\ e_{i_0} &= 1_{\mathbb{K}} . e_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} 0_{\mathbb{K}} . e_i \end{aligned}$$

e_{i_0} peut donc s'écrire de deux manières différentes au moins comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ ce qui contredit le caractère libre de $\mathcal{F}$.
Par conséquent, $\mathcal{F}$ est génératrice et minimale parmi les familles génératrices.

$(iii) \implies (iv)$ Supposons que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{F}$ est liée. Alors il existe un $i_0 \in I$ tel que e_{i_0} s'écrit comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs de $\mathcal{F}$ donc $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est génératrice de E . Or cette famille est strictement incluse dans $\mathcal{F}$ ce qui contredit la propriété de génératrice minimale.
Donc $\mathcal{F}$ est libre.
Par l'absurde, supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas libre maximale c'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathcal{F}'$ de vecteurs de E telle que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'$ est libre.
Alors $\exists x \in \mathcal{F}' : x \notin \mathcal{F}$. Or $\mathcal{F}$ est génératrice d'où :

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : x = \sum_{i \in I} \lambda_i . x_i = 0_{\mathbb{K}} . x + \sum_{i \in I} \lambda_i . x_i + \sum_{\substack{y \in \mathcal{F}' \\ y \notin \mathcal{F} \\ y \neq x}} 0_{\mathbb{K}} . y$$

Puisque $x \in \mathcal{F}'$,

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : x = 1_{\mathbb{K}} . x + \sum_{i \in I} 0_{\mathbb{K}} . x_i + \sum_{\substack{y \in \mathcal{F}' \\ y \notin \mathcal{F} \\ y \neq x}} 0_{\mathbb{K}} . y$$

Donc x s'écrit de deux manières différentes au moins comme combinaison linéaire de vecteurs $\mathcal{F}'$, ce qui contredit la liberté de $\mathcal{F}'$.
Par conséquent, $\mathcal{F}$ est libre maximale.

$(iv) \implies (i)$ Supposons que $\mathcal{F}$ est une famille libre maximale.
Par hypothèse même, $\mathcal{F}$ est libre. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice. Alors il existe $x \in E$ tel que $x \notin \mathrm{Vect}\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F} \wedge \{x\}$ est libre et contient strictement $\mathcal{F}$, ce qui contredit la propriété de liberté maximale.
Par conséquent, $\mathcal{F}$ est aussi génératrice, donc une base.

$$\begin{array}{ccc} (i) & \implies & (ii) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (iv) & \impliedby & (iii) \end{array}$$

□

3 Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\ f &= \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}) \\ \mathrm{Im} f &= \{y \in F \mid \exists x \in E : f(x) = y\} \end{aligned} \tag{2}$$

Nous démontrerons le résultat plus général suivant :

(i) $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

(ii) $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. (i) $0_E \in E'$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E')$ d'où $f(E') \neq \emptyset$
Soit $(\alpha, \beta, y, y') \in \mathbb{K}^2 \times f(E')^2$ fixés quelconques .
Par définition, $\exists (x, x') \in E'^2 : f(x) = y \wedge f(x') = y$.

$$\begin{aligned}\alpha y + \beta y' &= \alpha f(x) + \beta f(x') \\ &= f(\alpha x + \beta x') \quad \text{car } f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \\ &\in f(E') \quad \text{car } \alpha x + \beta x' \in E' \text{ puisque } E' \text{ est un sous-espace vectoriel}\end{aligned}$$

Donc $f(E')$ est un sous-espace vectoriel .

(ii) $0_F \in F'$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in f^{-1}(F')$ d'où $f(F') \neq \emptyset$
Soit $(\alpha, \beta, x, x') \in \mathbb{K}^2 \times f^{-1}(F')^2$ fixés quelconques .
Par définition, $\exists (y, y') \in F'^2 : f(x) = y \wedge f(x') = y$.
Or F' est sous-espace vectoriel donc $\alpha y + \beta y' \in F'$. $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ d'où $f(\alpha x + \beta x') = \alpha y + \beta y'$.
Donc $\alpha x + \beta x' \in f^{-1}(F')$.
Ainsi, $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel .

En appliquant pour $E' = E$ et $F' = \{0_F\}$, nous obtenons que Ker f et Im f sont des sous-espaces vectoriels . □

4 L'image par une application linéaire d'une partie génératrice engendre l'image de l'application linéaire

Soient (E, F) deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une base de E.

Alors

$$\text{Vect } \underbrace{f(\mathcal{F})}_{\{x_i | i \in I\}} = f(\text{Vect}\mathcal{F})$$

Démonstration. Soit $y \in \text{Vect} f(\mathcal{F})$ Alors $\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ tel que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$ Mais

$$\begin{aligned}y &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \implies y \in f(\text{Vect}\mathcal{F})\end{aligned}$$

Réciproquement soit $y \in f(\text{Vect}\mathcal{F})$ fq.

$$\exists x \in \text{Vect}\mathcal{F} : f(x) = y \implies \exists (x_i)_{i \in I} : x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned}y = f(x) &= f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \in \text{Vect} f(\mathcal{F})\end{aligned}$$

□

5 Caractérisation inj/surj/bij d'une application linéaire par l'image d'une base de l'espace de départ.

Nous donnerons les caractérisations au fur et à mesure de la démonstration.

Démonstration. Soient donc pour la suite, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_i)_{i\in I}$ une base de F,$\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille libre de E et $\mathcal{G} = (y_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, ces objets servent ici de notation et seront utilisés indépendamment lors de la preuve.

Montrons que l'image d'une base $\mathcal{B}$ par une application injective est une famille libre $\mathcal{F}$.
Supposons f injective, donc pour $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$,

$$0_F = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) \overset{f \text{ inj}}{\Longrightarrow} \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E \overset{\mathcal{B} \text{ base donc libre}}{\Longrightarrow} (\lambda_i)_{i\in I} = \widetilde{0_{\mathbb{K}}},$$

donc $f(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$ libre.
Supposons qu'il existe $\mathcal{B}$ telle que $f(\mathcal{B})$ soit libre, montrons qu'alors f est injective.
Soit $x \in \ker f$:

$$\exists\ (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}\ :\ 0_F = f(x) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) \overset{f(\mathcal{B}) \text{ libre}}{\Longrightarrow} (\lambda_i)_{i\in I} = \widetilde{0_{\mathbb{K}}},$$

donc $x = 0_E$ donc $\ker f = \{0_E\}$ et f injective.

Montrons que l'image d'une base $\mathcal{B}$ par une application surjective est une famille génératrice $\mathcal{G}$.
Supposons f surjective. Ainsi, $\mathrm{Im} f = F$, or $\mathcal{B}$ est une base donc est génératrice donc :

$$\mathrm{Vect} f(\mathcal{B}) = f\left(\mathrm{Vect}\mathcal{B}\right) = f(E) = \mathrm{Im} f = F,$$

donc $f(\mathcal{B}) = \mathcal{G}$ est génératrice.
Supposons qu'il existe $\mathcal{B}$ telle que $f(\mathcal{B})$ soit génératrice, montrons que f est surjective.
On a ainsi,

$$F = \mathrm{Vect} f(\mathcal{B}) = f\left(\mathrm{Vect}\mathcal{B}\right) = f(E) = \mathrm{Im} f,$$

donc f surjective.

Montrons que l'image d'une base $\mathcal{B}$ par un isomorphisme est une base $\mathcal{B}'$.
Supposons que f soit un isomorphisme. f est injective et $\mathcal{B}$ est une base donc $f(\mathcal{B})$ est libre. f est surjective et $\mathcal{B}$ est une base donc $f(\mathcal{B})$ est génératrice. Ainsi, $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ est une base.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\mathcal{B}$ telle que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ soit une base, montrons que f est un isomorphisme.
$\mathcal{B}'$ est une base donc est libre donc f est injective. $\mathcal{B}'$ est une base donc est génératrice donc f est surjective. Ainsi, f est un isomorphisme. □

6 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Il existe une unique application linéaire de E dans F qui envoie une base donnée de E sur une famille de F imposée.
Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de F.

$$\exists! f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) : \forall i \in I, f(e_i) = y_i \tag{3}$$

Nous pouvons expliciter une telle application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i.\, e_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i.\, y_i \end{array} \right. \tag{4}$$

Démonstration.
Analyse Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ tel que $\forall i \in I, f(e_i) = y_i$.
Tout vecteur de E peut se décomposer de manière unique dans la base $(e_i)_{i\in I}$, ce qui détermine son image. Ainsi, f est unique.

Synthèse Posons une telle application f.

— $(e_i)_{i\in I}$ est une base donc $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle et unique donc $\sum_{i\in I} \lambda_i .\, y_i$ existe et unique. Ainsi, f est bien définie.

— Soient $(\alpha, \beta, x, x') \in \mathbb{K}^2 \times E^2$ fixés quelconques. Notons $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\lambda'_i)_{i\in I}$ les coordonnées de x et x' dans $(e_i)_{i\in I}$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha x + \beta x') &= f\left(\alpha \sum_{i\in I} \lambda_i .\, e_i + \beta \sum_{i\in I} \lambda'_i .\, e_i\right) \\
&= f\left(\sum_{i\in I} \left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda'_i\right) .\, e_i\right) \\
&= \sum_{i\in I} \left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda'_i\right) .\, y_i \qquad \text{par définiton de } f \\
&= \alpha \sum_{i\in I} \lambda_i y_i + \beta \sum_{i\in I} \lambda'_i y_i \\
&= \alpha f(x) + \beta f(x')
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

— Soit $j \in I$ fixé quelconque .

$$\begin{aligned}
f(e_j) &= f\left(\sum_{i\in I} \delta_{i,j} .\, e_i\right) \\
&= \sum_{i\in I} \delta_{i,j} .\, y_i \\
&= y_j
\end{aligned}$$

□