

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 8

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen

19 novembre 2023

## 1 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$  les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas  $\Delta < 0$  et  $\alpha \pm i\beta$  les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que  $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \text{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$   
Soit  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$  fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies \text{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de  $\text{Re}$

$$a_2 \text{Re}(f)'' + a_1 \text{Re}(f)' + a_0 \text{Re}(f) = \text{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec  $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$  ;  $\text{Re}(f(t)) = \text{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ . Qui appartient donc à  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$   
En suivant le même raisonnement pour  $\text{Im}(f)$ , ( $t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ )  $\in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$  fq. Puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ .

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de  $f$  sont réelles, en notant  $(a_r, a_i, b_r, b_i)$  les parties réelles et imaginaires respectives de  $a$  et  $b$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \text{Re}(f(t)) \\ &= \text{Re}(a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \text{Re}((a_r + i a_i) e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + i b_i) e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r \cos(\beta t) e^{\alpha} - a_i \sin(\beta t) e^{\alpha} + b_r \cos(\beta t) e^{\alpha} + b_i \sin(\beta t) e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r) \cos(\beta t) e^{\alpha} + (b_i - a_i) \sin(\beta t) e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion. □

## 2 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur $I$ (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{où } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$$

Si  $b$  est continu sur  $J$ , alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur  $J$ .

*Démonstration. Cas 1.*  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nous savons que sous l'hypothèse de continuité de  $b$  sur  $J$ , les solutions de (EDL2) définies sur  $J$  constituent le plan affine  $S$  :

$$S = \{ \lambda f_1 + \mu f_2 + s \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

où  $s$  est une solution particulière de (EDL2),  $(f_1, f_2)$  sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent  $S_h$ . On a :

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} &\iff \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $(\lambda, \mu)$  doit être solution d'un système linéaire  $(2, 2)$ . On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est nul.

Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera  $D$ .

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) ( $a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0$ ). On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de  $\Delta$ . Traitons d'abord le cas  $\Delta \neq 0$ . On peut choisir :

$$\begin{aligned} f_1(t_0) &= e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2 t_0} \\ f_1'(t_0) &= r_1 e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2 e^{r_2 t_0} \end{aligned}$$

Donc (en sachant que  $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$ ) :

$$D = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1 t_0 + r_2 t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a  $\Delta = 0$ ; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0 e^{r_0 t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0 t_0} (r_0 t_0 e^{r_0 t_0} + e^{r_0 t_0}) - r_0 e^{r_0 t_0} \times t_0 e^{r_0 t_0} = e^{2r_0 t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas,  $D \neq 0$ , donc le système (2, 2) étudié admet une unique solution, donc il existe un unique couple  $(\lambda, \mu)$  le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

**Cas 2.**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2, b \in C^0(J, \mathbb{R})$

**Existence :** Puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , le problème de Cauchy admet, dans  $\mathbb{R}$ , une solution à valeurs complexes  $g$ . Posons  $f = \operatorname{Re}(g)$  et montrons que  $f$  est une solution réelle du problème de Cauchy.

★  $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$  donc  $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$

★  $g$  vérifie  $a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b$  sur  $J$  donc en prenant  $\operatorname{Re}(\cdot)$  :

$$\operatorname{Re}(a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b) = \operatorname{Re}(b) \iff a_2 \operatorname{Re}(g'') + a_1 \operatorname{Re}(g') + a_0 \operatorname{Re}(g) = b$$

$$\iff a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \text{ sur } J$$

★  $f(t_0) = \operatorname{Re}(g(t_0)) = \operatorname{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$

★  $f'(t_0) = \operatorname{Re}(g(t_0))' = \operatorname{Re}(g'(t_0)) = \operatorname{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc  $f$  est une solution réelle définie sur  $J$  au problème de Cauchy.

**Unicité :** Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc  $f_1 = f_2$  dans  $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$ , donc  $f_1 = f_2$  dans  $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ .  $\square$

### 3 Les solutions d'une EDL<sub>2</sub> constituent un espace vectoriel.

Soient  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $f$  et  $g$  les solutions, définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur  $\mathbb{R}$  de  $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$  pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  de  $y'' + ay' + by = 0$  est  $\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$

*Démonstration.* La solution s'exprime simplement comme combinaison linéaire de  $f$  et  $g$ , plus précisément, la combinaison linéaire en  $\alpha$  et  $\beta$ . En effet, soient de tels scalaires, et soient  $f$  et  $g$  de telles solutions, on a :

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'' + a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' + b(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = 0, \text{ par définition des espaces vectoriels.}$$

Et de même,  $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(3) = \alpha \cdot f'(3) + \beta \cdot g'(3) = \alpha$ , et  $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)''(3) = \alpha \cdot f''(3) + \beta \cdot g''(3) = \beta$ . Ce qui suffit par unicité des solutions ( de la donc ) d'un problème de Cauchy dans le cadre du théorème du cours.

Pour ce qui est du plan vectoriel des solutions, noté  $\Omega$ , notons aussi  $\Phi$  l'ensemble proposé. L'inclusion  $\Phi \subset \Omega$  est triviale par propriété de linéarité des espaces vectoriels. Finalement, pour  $\Omega \subset \Phi$ , soit  $\omega \in \Omega$ , forcément,  $\omega$  vérifie l'EDL<sub>2</sub>, mais aussi des conditions de Cauchy bien que celles-ci soient non-spécifiées, ainsi posons  $\omega'(3) = \delta$  et  $\omega''(3) = \theta$ , donc en particulier,  $\omega = \delta \cdot f + \theta \cdot g$ , d'où l'égalité par double inclusion.  $\square$

### 4 Formules de Cramer pour les systèmes $2 \times 2$

Résolution générale des systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues en fonction du déterminant du systèmes (**tous les cas ne sont pas nécessairement à envisager**)

Considérons le système linéaire à deux équations et à deux inconnues  $(x, y)$  :

$$(S) \begin{cases} ax + by = b_1 & (E_1) \\ cx + dy = b_2 & (E_2) \end{cases} \quad (1)$$

dont  $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$  sont les coefficients et  $(b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$  sont les seconds membres.

1. (S) admet une unique solution si et seulement si  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ . De plus, dans ce cas, la solution est

$$\left( \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right) \quad (2)$$

2. Si  $ad - bc = 0$ , alors l'ensemble des solutions est soit vide, soit une droite affine de  $\mathbb{K}^2$ , soit  $\mathbb{K}^2$ .

*Démonstration.* Procédons par disjonction de cas.

- Supposons que  $ad - bc \neq 0$ .
- Supposons que  $a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} ax + by &= b_1 \\ (d - \frac{bc}{a})y &= b_2 - \frac{c}{a}b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a}L_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ax + by &= b_1 \\ (ad - bc)y &= ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ax &= \frac{1}{a} \left( b_1 - b \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \right) = \frac{1}{a} \frac{adb_1 - bcb_1 + abb_2 - bcb_2}{ad - bc} \\ y &= \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ax &= \frac{db_1 - bb_2}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y &= \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

- Supposons que  $a = 0$ . L'hypothèse  $ad - bc \neq 0$  implique  $bc \neq 0$  donc  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$ .

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} by &= b_1 \\ cx + dy &= b_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{c} \left( b_2 - d \frac{b_1}{b} \right) \\ y &= \frac{b_1}{b} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ax &= \frac{db_1 - bb_2}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y &= \frac{-cb_1}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

$ad - bc = 0$ .

- Supposons  $a \neq 0$ . En reprenant la méthode pivot de Gauss,

$$(S) \iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (d - \frac{bc}{a})y = b_2 - \frac{c}{a}b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a}L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ \underbrace{(ad - bc)}_0 y = ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases}$$

Donc le système est de rang 1 avec une condition de compatibilité.

Si  $ab_2 - cb_1 \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.

Sinon  $ab_2 - cb_1 = 0$

$$(S) \iff ax + by = b_1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a} - \frac{b}{a}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\} \quad (3)$$

Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Supposons  $a = 0$ . Puisque  $ad - bc = 0$ , alors  $bc = 0$  donc  $b$  ou  $c$  est nul.

- Si  $c = 0$ ,

$$(S) \iff \begin{cases} by = b_1 \\ dy = b_2 \end{cases}$$

- Si  $b = 0$ ,

$$(S) \iff \begin{cases} by = b_1 \\ 0 = b_2 \end{cases}$$

- Si  $b_2 = 0$ , (S) n'admet aucune solution.

- Si  $b_2 \neq 0$ , (S)  $\iff dy = b_2$

- Si  $d = 0$ , (S)  $\iff 0 = b_2$ . (S) n'admet aucune solution ( $b_2 \neq 0$ ) ou admet  $\mathbb{K}^2$  comme ensemble des solutions ( $b_2 = 0$ ).

- Si  $d \neq 0$ , (S)  $\iff y = \frac{b_2}{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_2}{d} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ . Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si  $b \neq 0$

$$(S) \iff \begin{cases} y = \frac{b_1}{b} \\ 0 = b_2 - \frac{db_1}{b} \end{cases}$$

- Si  $b_2 - \frac{db_1}{b} \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.

- Si  $b_2 - \frac{db_1}{b} = 0$ , (S)  $\iff y = \frac{b_1}{b} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_1}{b} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$  donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si  $c \neq 0$  alors  $b = 0$

$$(S) \iff \begin{cases} 0 = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases}$$

- Si  $b_1 \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.

- Si  $b_1 = 0$ , (S)  $\iff x = \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$  donc (S) admet une droite affine de solutions.

□