Khôlles de Mathématiques - Semaine 30

Hugo Vangilluwen

8 juin 2024

Pour cette semaine, E est un ensemble fini de cardianl $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

1 p-partage d'un ensemble E et leur dénombrement

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-partage de E est un p-liste $(A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{P}(E)^p$ de parties de E (éventuellement vide), deux à deux disjointes qui recouvrent E c'est-à-dire telles que t :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!], i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{p} A_i = E \tag{1}$$

Soient $(n_1, \ldots n_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $n = n_1 + \ldots + n_p$ est un p-partage de E tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!],\ |A_i| = n_i$$

Le nombre de p-partage de type $(n_1, \ldots, n_p)$ est :

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{p} n_i!} \tag{2}$$

Démonstration. Considérons les p-partages de type $(n_1, \ldots, n_p)$ et appliquons le principe des choix successifs :

$$\left(\underbrace{A_1}_{\binom{n}{n_1} \text{ choix}}, \underbrace{A_2}_{\binom{n}{n_2} \text{ choix}}, \underbrace{A_3}_{\binom{n}{n_3} \text{ choix}}, \ldots, \underbrace{A_p}_{\binom{n}{n_p} \text{ choix}} \right)$$

donc il y a

$$\frac{n!}{n_1! \cancel{(n-n_1)!}} \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2! \cancel{(n-n_1-n_2)!}} \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_2! \cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdots \cancel{\frac{(n-(n_1+\ldots+n_{p-1}))!}{n_p! \underbrace{(n_1+\ldots+n_p)!}_{=0!}}}$$

Donc, au total, il y a $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_p!}$ p-partages. $\square$

2 Une probabilité conditionnelle est une probabilité

Soit B un évènement de probabilité non nulle. L'application $\mathbb{P}_B$

$$\mathbb{P}_B \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \mapsto & [0;1] \\ A & \to & \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array} \right. \tag{3}$$

est une probabilité sur sur Ω.

Démonstration.

- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ fixé quelconque.
  On a $\emptyset \subset A \cap B \ \subset B$ donc par croissance de la probabilité, $0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$. En divisant par $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $0 \leqslant \mathbb{P}_B(A) \leqslant 1$. Donc $\mathbb{P}_B$ est *bien définie.*
- $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cup B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
- Soient $(A, A') \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ fixés quelconques tels que A et A' sont incompatibles.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_B(A \amalg A') &= \frac{\mathbb{P}(B \cap (A \amalg A'))}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}((B \cap A) \amalg (B \cap A'))}{\mathbb{P}(B)} \text{ car } (B \cap A) \cap (B \cap A') \subset A \cap A' = \emptyset \\
&= \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A')}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A')
\end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi, $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité sur Ω. $\square$