Khôlles de Mathématiques - Semaine 13

Hugo Vangilluwen, George Ober, Kylian Boyet, Felix Rondeau

02 Janvier 2025

1 Montrer que $(A \times B)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} \times A^\mathsf{T}$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$, la matrice transposée est définie par :

$$\forall (k,l) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ \left[A^\mathsf{T}\right]_{kl} = A_{lk}$$

Formellement, la transposition est une application de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soient n, p et q trois entiers naturels. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
$A \times B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $(A \times B)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\left[(A \times B)^\mathsf{T}\right]_{i,j} &= [A \times B]_{j,i} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(A_{j,k} \times_{\mathbb{K}} B_{k,i}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(B_{k,i} \times_{\mathbb{K}} A_{j,k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\left[B^\mathsf{T}\right]_{i,k} \times_{\mathbb{K}} \left[A^\mathsf{T}\right]_{k,j}\right) \\
&= \left[\left(B^\mathsf{T}\right) \times \left(A^\mathsf{T}\right)\right]_{i,j}
\end{aligned}$$

□

2 Calculer $E^{i,j} \times E^{k,l}$ en fonction de i, j, k, l et des symboles de Kronecker

Le symbole de Kronecker est défini de la manière suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \delta_{xy} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq y \\ 1 \text{ si } x = y \end{cases}$$

La matrice $E^{i,j} \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ avec $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ ne possède que des coefficients nuls sauf le coefficient de la i^e ligne et j^e colonne qui vaut 1. Formellement :

$$\forall (r,s) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ \left[E^{i,j}\right]_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js}$$

Démonstration. Calculons $E^{i,j}(n,p) \times E^{k,l}(p,q)$.
Soient $(r,s) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$ fixées quelconques.

$$\begin{aligned}
\left[E^{i,j} \times E^{k,l}\right]_{rs} &= \sum_{t=1}^{n} E^{i,j}_{r,t} E^{k,l}_{t,s} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \delta_{ir}\delta_{jt}\delta_{kt}\delta_{ls} \\
&= \delta_{jk}\delta_{ir}\delta_{ls} \\
&= \delta_{jk} \left[E^{i,l}\right]_{rs}
\end{aligned}$$

Donc $E^{i,j} \times E^{k,l} = \delta_{jk} E^{i,l}$.
Ainsi, pour le calcul de $(E^{i,j})^2$, $q \leftarrow n$, $k \leftarrow i$, $l \leftarrow j$:

$$(E^{i,j})^2 = \delta_{ji} E^{i,j} = \begin{cases} E^{i,j} \text{ si } i = j \\ 0_{n,p} \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

□

3 Les matrices triangulaires supérieures forment un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Démonstration.

- ⋆ $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \subset (M)_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.
- ⋆ Le neutre mutiplicatif I_n de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appartient à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
- ⋆ $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ car $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
- ⋆ Soient $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i > j$.

$$(A - B)_{i,j} = \underbrace{A_{i,j}}_{=0 \text{ car } A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} - \underbrace{B_{i,j}}_{=0 \text{ car } B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} = 0$$

  Donc, $A - B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
- ⋆ Soient $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i > j$.

$$\begin{aligned}(A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \times_{\mathbb{K}} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{j} \underbrace{A_{i,k}}_{=0 \text{ car } i > j \geqslant k \text{ et } A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \times_{\mathbb{K}} B_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{i,k} \times_{\mathbb{K}} \underbrace{B_{k,j}}_{=0 \text{ car } k > j \text{ et } B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \\ &= 0\end{aligned}$$

  Donc, $A \times B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Ainsi, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \subset (M)_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

4 Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que A^T et λA sont également dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Démonstration. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. D'une part,

$$A^\mathsf{T} \times (A^{-1})^\mathsf{T} = (A^{-1} \times A)^\mathsf{T} = I_n^\mathsf{T} = I_n$$

Et d'autre part,

$$(A^{-1})^\mathsf{T} \times A^\mathsf{T} = (A \times A^{-1})^\mathsf{T} = I_n^\mathsf{T} = I_n$$

Ainsi, A^T est inversible et $(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}$. De même,

$$\lambda \cdot A \times A^{-1} = \lambda \cdot I_n \iff (\lambda A) \times A^{-1} = \lambda \cdot I_n \iff (\lambda \cdot A)\left(\frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}\right) = I_n$$

et

$$\lambda \cdot A^{-1} \times A = \lambda \cdot I_n \iff A^{-1} \times (\lambda A) = \lambda \cdot I_n \iff \left(\frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}\right)(\lambda \cdot A) = I_n$$

donc λA est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$. □

5 Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ est une matrice nilpotente, alors $I_n + \lambda N$ est inversible.

Démonstration. Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $k \in \mathbb{K}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On remarque que

$$(\lambda N)^k = (-\lambda)^k N^k = 0 \quad \text{car } N^k = 0$$

On a donc, comme I_n et $-\lambda N$ commutent,

$$I_n = I_n^k - (-\lambda N)^k = (I_n - (-\lambda N)) \sum_{j=0}^{k-1} I_n^j (-\lambda N)^{k-j-1} = (I_n + \lambda N) \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda N)^{k-j-1}$$

ce qui signifie que $I_n + \lambda N$ est inversible à droite, donc inversible et d'inverse

$$(I_n + \lambda N)^{-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-\lambda N)^{k-j-1}$$

□

6 Caractérisation de l'inversibilité pour les matrices

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ admet une unique solution.

Démonstration.

($\implies$) Supposons que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ fixé quelconque.

$$AX = Y \iff A^{-1}AX = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y$$

donc l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ admet une unique solution.

($\impliedby$) Supposons maintenant que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons X_i la solution de $AX = E^{i,1}$.

Posons $B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{array}\right]$.

Calculons $AB = \left[\begin{array}{c|c|c|c} AX_1 & AX_2 & \dots & AX_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} E^{1,1} & E^{2,1} & \dots & E^{n,1} \end{array}\right] = I_n$.

Ainsi A est inversible à droite donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$.

□

7 Caractérisation des matrices diagonales inversibles

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Démonstration. Soit $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ de coefficients diagonaux $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{K}^n$.

Soit $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Étudions l'équation $DX = Y$ d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$DX = Y \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} d_1x_1 & & & & = & y_1 & & & \\ & d_2x_2 & & & = & & y_2 & & \\ & & \ddots & & = & & & \ddots & \\ & & & d_nx_n & = & & & & y_n \end{array}\right.$$

— Si il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $d_{i_0} = 0$, la i_0-ème ligne du système ci-dessus deviens une condition de compatibilité $0 = y_{i_0}$ qui ne sera pas respectée pour $Y = E^{i_0,1}$.
Donc $D \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

— Sinon $\forall i \in [\![1; n]\!] : d_i \neq 0$, le système est donc triangulaire à coefficients diagonaux non nuls. Il admet donc une unique solution. Ainsi $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. De plus,

$$DX = Y \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & = & d_1^{-1}y_1 & & & \\ & x_2 & & & = & & d_2^{-1}y_2 & & \\ & & \ddots & & = & & & \ddots & \\ & & & x_n & = & & & & d_n^{-1}y_n \end{array}\right.$$

Ainsi $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots, d_n^{-1}\right)$.

$\square$