Khôlles de Mathématiques - Semaine 1

George Ober

17 avril 2024

1 Preuve formelle de la somme des entiers et des termes d'une suite géométrique

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k$$

En posant la symétrie d'indice $i = n - k$, on a aussi

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (n-i) = (n \times \mathrm{card}[\![0, n]\!]) - \sum_{i=0}^{n} i$$

Or, puisque $\mathrm{card}[\![0, n]\!] = n + 1$ et que $\sum_{i=0}^{n} i = S_n$

$$S_n = n \times (n+1) + S_n$$

Donc

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soient $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ fixés quelconques. Si $q = 1$,

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \sum_{i=0}^{k} 1 = k + 1$$

Avec l'identité algébrique, on a

$$q^{k+1} - 1^{k+1} = (q-1) \sum_{i=0}^{k} q^i \times 1^{k-i}$$

Ainsi, si $q \neq 1$ on a, par multiplication par $(q-1)^{-1}$

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

Nous avons donc établi que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \begin{cases} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ k+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\square$

2 Preuve de la factorisation de $a^n - b^n$ puis de celle de $a^{2m+1} + b^{2m+1}$

Démonstration. Calculons

$$
\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} &= a\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} - b\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k}
\end{aligned}
$$

Si bien qu'en posant le changement d'indice $j = k+1$ on reconnait le téléscopage.

$$
\sum_{j=1}^{m} a^j b^{m-j} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} = a^m - b^m
$$

□

3 Développement d'une somme

$$
\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j = 2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} x_i^2
$$

Démonstration.

$$
\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j = 2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} x_i^2
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k \times \sum_{j=1}^{n} x_j\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_k \times x_j\right) \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j
\end{aligned}
$$

On peut aussi séparer cette somme

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ k<j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ k=j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ k>j}} x_k x_j \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ k<j}} x_k x_j + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}_{\text{somme sur les indices } (k,j) \text{ tels que } k=j} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ k>j}} x_k x_j
\end{aligned}
$$

On remarque aussi qu'en permutant les indices des deux sommes (les variables sont muettes)

$$
\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ k<j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant n \\ j<k}} x_j x_k
$$

Qui, par commutativité du produit dans $\mathbb{C}$ nous donne cette égalité

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n\\k<j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n\\k>j}} x_k x_j$$

On a donc bien l'identité attendue :

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j = 2\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n\\k<j}} x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

□

4 Preuve de la formule du binôme de Newton

Démonstration. □

5 Montrer que tout entier $n > 2$ admet un diviseur premier

Démonstration. Raisonnons par récurrence forte avec la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n > 2$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{´}\forall k \in [\![2, n]\!], k \text{ admet un diviseur premier ˇ}$$

- Initialisation : $n \leftarrow 2$
  Soit $k \in [\![2, 2]\!]$ fixé quelconque. Nécéssairement, $k = 2$. or, 2 admet 2 pour diviseur premier. Donc $\forall k \in [\![2, 2]\!], k$ admet un diviseur premier, ce qui prouve $\mathcal{P}(2)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$, il nous faudra montrer que $\forall k \in [\![2, n+1]\!], k$ admet un diviseur premier
  Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$ fixé quelconque.
  - ⋆ Si $k \in [\![2, n]\!]$, alors la véracité de $\mathcal{P}(n)$ nous permet de conclure, et de dire que k admet un diviseur premier.
  - ⋆ Sinon $k = n + 1$
    - ◊ Si $n + 1$ est premier, alors il admet k comme diviseur premier
    - ◊ Sinon, $\exists d \in [\![2, n]\!] : d \mid n + 1$
      Mais, puisque $d \in [\![2, n]\!]$, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ nous permet d'affirmer que d admet un diviseur premier p. Donc par transitivité de la relation de divisibilité

$$(p \mid d \text{ et } d \mid n) \implies p \mid n$$

□

6 Montrer par récurrence qu'une fonction polynomiale à coefficients réels est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls

Démonstration. □

7 Montrer par analyse/synthèse qu'une fonction réelle d'une variable réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fixée quelconque.

◊ Analyse : Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique en $f = g + h$ avec g paire et h impaire (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$). Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

Par demi somme, nous avons donc

$$\begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$$

Ainsi, si une telle décomposition existe, c'est

$$\begin{cases} g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

◊ Synthèse : Posons

$$g \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et } h \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right. \tag{1}$$

Remarquons, d'une part que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Vérifions si les fonctions g et h vérifient les conditions de parité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \text{ ainsi } g \text{ est paire.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \text{ ainsi } h \text{ est impaire}$$

□

8 Illustration graphique de certaines identités trigonométriques

Démonstration. □

9 Technique de résolution des équations trigonométriques du type $A \cos x + B \sin x = C$

Démonstration. □

10 Étude complète de la fonction tangente, tracé du graphe et en déduire celui de cotangente.

Démonstration. □

11 Expression $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$

Démonstration. □

12 Preuve des formules du type $\cos p + \cos q = \ldots$

Démonstration. □