Khôlles de Mathématiques - Semaine 28

George Ober, Hugo Vangilluwen

30 juin 2024

1 Condition nécessaire de convergence de $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{[\![n_0,+\infty[\![}$. Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge, alors la suite u converge vers 0.
Supposons que la série converge. Notons $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles.

$$\forall n \in [\![n_0+1,+\infty[\![, u_n = S_n - S_{n-1}$$

Puisque S converge, on en déduit que u converge vers 0. □

2 Condition nécessaire et suffisante de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ pour $q \in \mathbb{C}$ et calcul de la somme et du reste lorsqu'ils existent.

$$\forall q \in \mathbb{C}, \sum_{n\geqslant 0} q^n \text{ cv.} \iff |q| < 1 \tag{1}$$

Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ et $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration. ⋆ Si $|q| < 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

De plus, $|q^{n+1}| = |q|^{n+1} = \begin{cases} 0 \text{ si } q = 0 \\ e^{(n+1)\ln|q|} \text{ si } q \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 \\ e^{(n+1)\ln|q|} \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \implies R_n = S_n - \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

⋆ Si $|q| = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |q|^n = 1^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Ainsi, $|q|^n$ ne converge pas vers 0 donc $(q^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente.

⋆ Si $|q| > 1$ $|q|^n = \exp(n\ln|q|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ Donc $(q^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0. Donc la série est grossièrement divergente.

□

3 Caractérisation de la convergence des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1 \tag{2}$$

Démonstration. ◊ Supposons $\alpha < 0$ alors, $\frac{1}{n^\alpha} = n^{|\alpha|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série est grossièrement divergente.

◊ Supposons $\alpha = 0$ alors $\frac{1}{n^\alpha} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ donc la série est grossièrement divergente.

◊ Supposons $\alpha > 0$ Cherchons un équivalent de

$$\frac{1}{(n+1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta}$$

en fonction de $\beta \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} &= \frac{1}{n^\beta}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta} - 1\right) \\
&= \frac{1}{n^\beta}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} - 1\right] \\
&\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta} \times \left(-\frac{\beta}{n}\right) \\
&\underset{\infty}{\sim} -\frac{\beta}{n^{\beta+1}}
\end{aligned}$$

⋆ Pour $\alpha \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$ Appliquons le calcul ci-dessus pour $\beta \leftarrow \alpha - 1$ (autorisé car $\alpha \neq 1 \implies \alpha - 1 \neq 0$)

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{\infty}{\sim} -\frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

De plus, $\left(-\frac{\alpha-1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est de signe constant donc, d'après le critère d'équivalence, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{-(\alpha-1)}{n^\alpha}$ est de même nature que la série télescopique $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$. Or, la série télescopique est de même nature que $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)_{n\geqslant 1}$.

Donc par transitivité, puisque $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{-(\alpha-1)}{n^\alpha}$, la série de Riemann est de même nature que $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)_{n\geqslant 1}$ Or, $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \in]0,1[$.

⋆ Si $\alpha = 1$ Appliquons la comparaison série intégrale pour $f \leftarrow (x \mapsto \frac{1}{x})\begin{cases} \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[,\mathbb{R}) \\ \text{décroissante sur } [1,+\infty[\end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{\ln(n+1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Donc la série diverge.

□

4 Comparaison série-intégrale

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $f : [n_0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Nous avons l'encadrement suivant :

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Démonstration. Soit $k \in [\![n_0, +\infty[\![$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) &\leqslant f(t) \leqslant f(k)\\ \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t\\ f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant f(k)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(t)\\ \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![n_0+1,\ +\infty[\![, f(k) &\leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t\\ \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) &\leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t\\ \sum_{k=n_0}^{n} f(k) &\leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où l'encadrement. □

5 Pour f continue sur $[n_0, +\infty[$, décroissante et minorée, $\sum_{n\geqslant n_0}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(u)\,\mathrm{d}u\right)$ converge. Application au DA en $o(1)$ de la somme partielle de la série harmonique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et minorée par $m \in \mathbb{R}$. Alors la série de terme général

$$\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(u)\,\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant n_0}$$

est à termes positifs ou nuls et converge.

Démonstration. Montrons que la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée, et que la suite est à termes $\geqslant 0$

La décroissance de f donne l'encadrement suivant

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

La comparaison série intégrale s'applique donc à f qui est décroissante et continue et donne

$$\begin{aligned}\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) &\implies -f(n+1) \geqslant -\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &\implies f(n) - f(n+1) \geqslant f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0\end{aligned}$$

En sommant sur $k \in [\![n_0, n]\!]$

$$\sum_{k=n_0}^{n} (f(k) - f(k+1)) \geqslant \sum_{k=n_0}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right) = S_n$$

En reconnaissant un phénomène télescopique

$$S_n \leqslant f(n_0) - f(n+1) \leqslant f(n_0) - m$$

Donc $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante et majorée, elle converge.

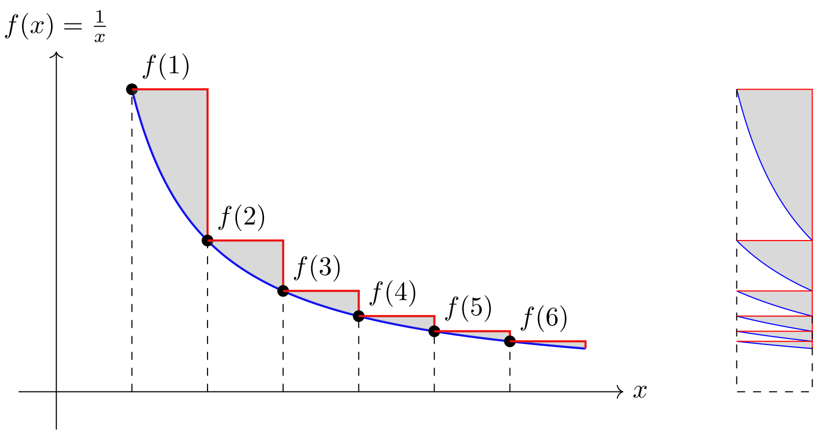


FIGURE 1 – Une visualisation graphique de la bornitude de $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ pour le cas particulier de $f \leftarrow (x \mapsto {}^1\!/_x), m \leftarrow 0, n_0 \leftarrow 1$. On interprète chaque terme de la somme comme l'aire du rectangle à laquelle on retranche l'aire sous la courbe : cela correspond à l'aire grise, qui peut être aisément installée dans un rectangle d'aire $f(1)$.

Application au DA en $o(1)$ de la somme partielle de la série harmonique. Appliquons ce qui précède pour $f = x \mapsto {}^1\!/_x$ et $n_0 = 1$. f est bien continue, décroissante et minorée (par 0). sur $[1; +\infty[$. Donc $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \right)$ converge.

Notons γ sa somme. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \right) \underset{n \to +\infty}{=} \gamma + o(1)$.

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \right) = H_n - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = H_n - \ln(n+1) + \ln 1 = H_n - \ln(n+1)$.

Donc $H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n+1) + \gamma + o(1) = \ln n + \ln(1 + {}^1\!/_n) + \gamma + o(1)$.

$$H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

La constante γ est appelé la constante d'Euler-Mascheroni et vaut environ $0,5772156649$. □

6 Théorème des séries alternées

Soit $(a_n)_{n \geqslant n_0} \in \mathbb{R}^{[\![n_0, +\infty [\![}$ une suite réelle. Si

$$\begin{cases} \forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, a_n \geqslant 0 \\ (a_n)_{n \geqslant n_0} \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \end{cases}$$

alors $\sum_{n \geqslant n_0} (-1)^n a_n$

Démonstration. ◊ Traitons le cas $n_0 \equiv 0[2]$ il existe $p_0 \in \mathbb{N} : n_0 = 2p_0$

- $\star$ Les suites $(S_{2p})_{p\geqslant p_0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geqslant p_0}$ sont adjacentes :

$$\begin{aligned}\forall p \in [\![p_0, +\infty[\![, S_{2(p+1)} - S_{2p} &= S_{2p+2} - S_{2p}\\ &= \sum_{k=2p_0}^{2p+2} (-1)^k a_k + \sum_{k=2p_0}^{2p} (-1)^k a_k\\ &= -a_{2p+1} + a_{2p+2} \leqslant 0 \text{ car } a \downarrow\end{aligned}$$

$$S_{2(p+1)+1} - S_{2p+1} = S_{2p+3} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} a_{2p+2} + (-1)^{2p+3} a_{2p+3} = a_{2p+2} - a_{2p+3} \geqslant 0 \text{ car } a \downarrow$$

Donc (S_{2p}) est décroissante et (S_{2p+1}) est croissante. De plus

$$S_{2p+1} - S_{2p} = (-1)^{2p+2} a_{2p+1} = \underbrace{-a_{2p+1}}_{\xrightarrow[p\to\infty]{} 0} \leqslant 0 \text{ car a positive}$$

Ainsi $(S_{2p})_{p\geqslant p_0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geqslant p_0}$ sont adjacentes.
- $\star$ Donc d'après le théorème des suites adjacentes, (S_{2p}) et (S_{2p+1}) convergent vers une même limite ℓ, si bien que (S_n) converge vers ℓ.
- $\star$ De plus, les suites $(S_{2p})_{p\geqslant p_0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geqslant p_0}$ étant adjacentes, pour $n \geqslant n_0$ posons $R_n = \ell - S_n$
  - — Si $n \equiv 0[2]$, $\exists p \in [\![p_0, +\infty[\![: n = 2p$ donc, puisque (S_{2p}) est décroissante et (S_{2p+1}) est croissante, on a

$$S_{2p+1} \leqslant \ell \leqslant S_{2p} \implies S_{2p+1} - S_{2p} \leqslant \ell - S_{2p} \leqslant 0 \implies |R_{2p}| = |\ell - S_{2p}| \leqslant a_{2p+1}$$

  - — Si $n \equiv 1[2]$ $\exists p \in [\![p_0, +\infty[\![: n = 2p+1$

$$S_{2p+1} \leqslant \ell \leqslant S_{2p+2} \implies 0 \leqslant \ell - S_{2p+1} \leqslant S_{2p+2} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} a_{2p+2} = a_{2p+2}$$

donc $|R_{2p+1}| = |\ell - S_{2p+1}| \leqslant a_{2p+2}$

Bonus, par croissance de (S_{2p+1}) qui converge vers ℓ, $S_{2p+1} \leqslant \ell$ donc $a_{2p_0} - a_{2p_0+1} \leqslant \ell$ Donc $\ell \geqslant 0$ qui est bien le signe du premier terme de la série $(-1)^{n_0} a_{n_0}$ car $n_0 \equiv 0[2]$.

$\Diamond$ Le cas $n_0 \equiv 1[2]$ se traite de la même manière

□

7 L'absolue convergence implique la convergence

Soit $u \in \mathbb{K}^{[\![n_0,+\infty[\![}$ Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

Démonstration. $\Diamond$ Supposons que u est le terme général réel d'une série absolument convergente. Posons, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = -\min(u_n, 0)$ Avec ces notations, $u_n^+ - u_n^- = u_n$ et $u_n^+ + u_n^- = |u_n|$.

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, u_n^+ \geqslant 0 \text{ et } u_n^- \geqslant 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| = u_n^+ + u_n^-\\ \sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ est ACV} \implies \sum_{n\geqslant n_0} |u_n| \text{ CV}\\ \forall n \geqslant n_0, u_n^+ \geqslant 0 \text{ et } |u_n| \geqslant 0\end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant n_0} u_n^+ \text{ converge}$$

On montre de même que $\sum_{n\geqslant n_0} u_n^-$ converge, donc, par structure vectorielle de l'ensemble des termes généraux de suites convergentes, $\sum_{n\geqslant n_0} (u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge

◊ Cas d'une série complexe,
Posons, $\forall n \geqslant n_0, x_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(u_n)$ Alors,

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geqslant n_0, |x_n| \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \\ \forall n \geqslant n_0, |x_n| \geqslant 0 \text{ et } |u_n| \geqslant 0 \\ \sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ ACV } \implies \sum_{n\geqslant n_0} |u_n| \text{ CV} \end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant n_0} |x_n| \text{ converge}$$

Donc d'après le cas réel, $\sum_{n\geqslant n_0} x_n$ converge On montre de même que $\sum_{n\geqslant n_0} y_n$ converge Donc, par structure vectorielle, $\sum_{n\geqslant n_0}(x_n + iy_n)$ converge. Donc u_n est le terme général d'une série convergente.

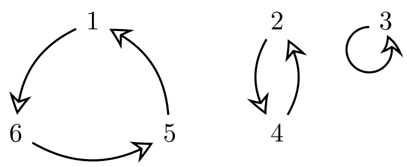
□

8 Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints puis en produit de transposition et calcul de son ordre

Démonstration. Prenons pour illustrer la décomposition

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \mapsto & 6 \\ 2 & \mapsto & 4 \\ 3 & \mapsto & 3 \\ 4 & \mapsto & 2 \\ 5 & \mapsto & 1 \\ 6 & \mapsto & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_6$$

Il faut réaliser un "graphe des images". Chaque sommet est un nombre de $[\![1;6]\!]$ et pointe vers son image.



Nous pouvons voir que $\sigma = (1,6,5) \circ (2,4)$. De plus, $(1,6,5) = (1,6) \circ (6,5) \circ (5,1)$. Donc $\sigma = (1,6) \circ (6,5) \circ (5,1) \circ (2,4)$.

L'ordre d'une permutation est définit par $p(\sigma) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^n = Id\}$. $p(\sigma)$ est aussi le PPCM des ordres des permutations de sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Ici, $p(\sigma) = 2 \vee 3 = 6$. □