

# Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

29 novembre 2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Semaine 6</b>	<b>4</b>
1.1	Montrer que si $f$ est impaire et bijective, alors $f^{-1}$ est aussi impaire. Donnez un/des exemples.	4
1.2	Limite (et preuve) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .	4
1.3	Limite en 0 de $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et limite en $+\infty$ suivant $n$ de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .	5
1.4	Présentation exhaustive de la fonction arcsin.	7
1.5	Présentation exhaustive de la fonction arccos.	7
1.6	Présentation exhaustive de la fonction arctan.	8
1.7	2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$ , dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.	9
1.8	Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.	10
<b>2</b>	<b>Semaine 7</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Semaine 8</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Semaine 9</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Semaine 10</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Semaine 11</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Semaine 12</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Semaine 13</b>	<b>11</b>
<b>9</b>	<b>Semaine 14</b>	<b>11</b>
<b>10</b>	<b>Semaine 15</b>	<b>11</b>
<b>11</b>	<b>Semaine 16</b>	<b>11</b>
<b>12</b>	Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$ . En Dédurre qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.	<b>11</b>
<b>13</b>	Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe	<b>12</b>
<b>14</b>	Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes	<b>12</b>
<b>15</b>	Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle	<b>13</b>
<b>16</b>	Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).	<b>13</b>
<b>17</b>	Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur $I$ (cas complexe puis cas réel).	<b>14</b>

18 Les solutions d'une EDL <sub>2</sub> constituent un espace vectoriel.	15
19 Formules de Cramer pour les systèmes $2 \times 2$	16
20 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.	18
21 Si $A$ admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si $A$ admet une borne supérieure dans $A$ c'est son plus grand élément.	19
22 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$	19
23 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire	19

## Résumé

Ce pdf sera vraisemblablement sujet à de nombreuses maj. Je vais essayer à partir de maintenant de faire un pdf contenant toutes les khôlles de la 6-ième semaine à la dernière (j'espère avoir le temps). De plus, il peut arriver que je propose une solution originale à une question, seulement ladite solution n'aura sans doute été vérifiée par personne, si vous constatez une ou plusieurs erreur.s tachez de m'en faire part, d'ailleurs si vous relevez une erreur quelconque dans ce document je vous prie de faire de même. Enfin, les semaines 3 et 5 resteront hors de ce document car leur insertion est **BEAUCOUP TROP** compliquée pour moi donc j'ai laissé tombé... Si vous les voulez, faites moi signe. Aussi, si plusieurs démonstrations sont présentes dans le cours et que nous avons la possibilité de choisir celle.s que nous voulons, je prendrai toujours celle.s qui me paraît.ssent la.es plus naturelle.s et "facile.s" car je n'aime pas apprendre des choses inutilement compliquées, tout comme je prendrai parfois la liberté de laisser certaines choses au lecteur car certains passages sont trop évidents pour être traités. Finalement, si vous avez des questions sur ce que j'ai écrit ou si vous voulez des informations sur le code L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, (ou Tikz), n'hésitez pas. Bonne lecture.

## Table des matières

## 1 Semaine 6

### 1.1 Montrer que si $f$ est impaire et bijective, alors $f^{-1}$ est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

Soit  $f : I \rightarrow F$ , avec  $I, F$  deux parties non-vides de  $\mathbb{R}$ , une telle fonction et notons  $f^{-1}$  sa bijection réciproque. Si  $f$  est impaire sur  $I$ , alors pour tout  $x \in I$ ,  $-x \in I$ , ainsi  $I$  est centré en 0 et on a :

$$\forall x \in I, f(-x) = -f(x).$$

Ainsi, prenons  $y \in F$ , alors  $-y \in F$  par imparité et bijectivité de  $f$ . On a donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

D'où l'imparité de  $f^{-1}$ .

Pour ce qui est de l'exemple, prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction  $\sin$   $\left| \begin{smallmatrix} [-1,1] \\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{smallmatrix} \right|$  que l'on notera  $\widetilde{\sin}$ . Sa bijection réciproque est bien entendu  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

De la même manière que dans la démonstration du cas général, prenons  $y \in [-1, 1]$ , comme  $[-1, 1]$  est centré en 0,  $-y \in [-1, 1]$ , on a dès lors :

$$\begin{aligned} \arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\ &= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\ &= -\arcsin(y). \end{aligned}$$

Ce qui suffit.

### 1.2 Limite (et preuve) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .

Premièrement, posons :

$$\forall (x, \alpha, \beta) \in [1, +\infty[ \times (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}.$$

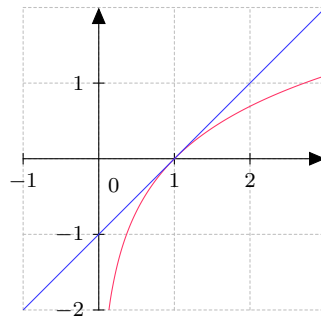
Deuxièmement, montrons que :

$$\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit  $x \in [1, +\infty[ = \mathcal{A}$ . Nous savons que la fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc en particulier sur  $\mathcal{A}$ . Ainsi,  $\ln$  est en dessous de toutes ses tangentes, d'où :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Illustration de l'inégalité :



**Figure 1.**  $\ln$  en rouge et la première bissectrice en bleu.

On peut alors diviser par  $x^2$  (car  $x \neq 0$ ) :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{f_{1,2}(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}.$$

Donc par théorème d'encadrement  $f_{1,2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Dernièrement, le cas général. Soit  $x \in \mathcal{A}$  et soient  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . On fait une preuve directe.

$$\begin{aligned} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= \left( \frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \underbrace{\left( \frac{2\alpha}{\beta} \right)^\alpha}_{c^{te} \text{ (définie!)}} \cdot \underbrace{\left[ \frac{\ln \left( x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)}{\left( x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)^2} \right]^\alpha}_{\substack{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{d'après le dernier point}}} \\ &\quad \underbrace{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}_{\substack{\text{par composition des limites} \\ \text{par produit}}} \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

**1.3 Limite en 0 de  $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$  et limite en  $+\infty$  suivant  $n$  de  $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$  pour  $q \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .**

Montrons que  $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ .

On fait toujours une preuve directe.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{2x}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{c'est}} \cdot \underbrace{\left[ \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right]^2}_{\substack{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \text{limite usuelle}}} \\
&\quad \underbrace{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1}_{\text{par composition}} \\
&\quad \underbrace{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}}_{\text{par produit}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Trouvons la limite, sous réserve d'existence, de  $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$  pour  $q \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  suivant  $n$  en  $+\infty$ .

Remarquons que si  $q \leq 0$ , il est **nécessaire** d'avoir  $\alpha \in \mathbb{Z}^*$  sinon l'expression n'a tout simplement **aucun sens**. De fait, on supposera  $q > 0$  tout le long, les cas  $q < 0$  se font naturellement (convergence pour  $q \in \mathbb{R}_-$ ).

Soit donc  $0 < q < 1$ , ce cas est immédiat,  $((q^n)^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} = ((q^\alpha)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donc il s'agit de la suite géométrique de raison  $q^\alpha \in ]0, 1[$  et de premier terme  $q^{\min_I(n)\alpha}$  ( $\min_I(n)$ , avec  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , car la suite ne démarre pas forcément à 0), donc elle converge vers 0.

Si  $q \geq 1$ , on montre le cas trivial  $\alpha = \beta = 1$  :

$$\forall n \in \llbracket [q] + 1, +\infty \llbracket, \quad 0 \leq \frac{q^n}{n!} = \underbrace{\frac{q}{1} \times \frac{q}{2} \times \cdots \times \frac{q}{[q]}}_{= \lambda \text{ (une constante)}} \times \underbrace{\frac{q}{[q] + 1}}_{\leq 1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{q}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{q}{n} \leq \underbrace{\frac{\lambda q}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

Par théorème d'existence de limite par encadrement,  $\left(\frac{q^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et sa limite est 0.

Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$ , montrons le cas général pour  $q \geq 1$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta} = \left( \frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!} \right)^\beta = \underbrace{\left( \underbrace{\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \right)^\beta}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{par composition des limites } (\beta > 0)}}$$

c'est le cas trivial

Ce qui termine la preuve.

## 1.4 Présentation exhaustive de la fonction arcsin.

Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\widetilde{\sin}$  (voir 1.). D'où :

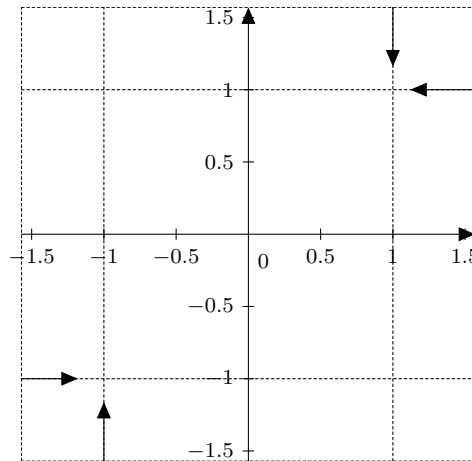
$$\arcsin = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto (\widetilde{\sin})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arcsin(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(\theta) = x$ .

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\widetilde{\sin}$  :

1. arcsin est impaire.
2. arcsin est strictement croissante sur  $[-1, 1]$ .
3.  $\arcsin \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ .
4.  $\arcsin \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ .
5.  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
6. arcsin admet deux demi-tangentes verticales en  $-1$  et  $1$ .

Graphe de arcsin :



**Figure 2.** arcsin en bleu,  $\widetilde{\sin}$  en vert et la première bissectrice en rouge.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d'arcsin :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(x) \geq x.$$

## 1.5 Présentation exhaustive de la fonction arccos.

Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\cos|_{[0, \pi]}^{[-1, 1]} := \widetilde{\cos}$ . D'où :

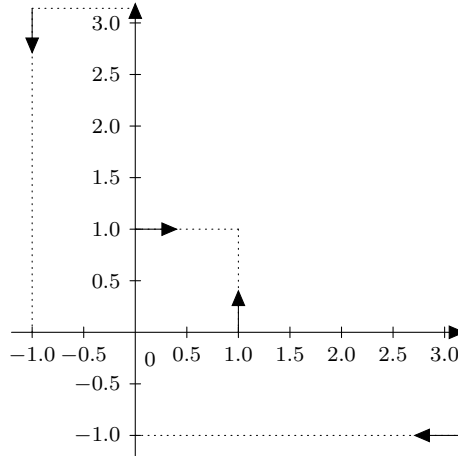
$$\arccos = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto (\widetilde{\cos})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arccos(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\cos(\theta) = x$ .

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\widetilde{\cos}$  :

1.  $\arccos$  est strictement décroissante sur  $[-1, 1]$ .
2.  $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [0, \pi])$ .
3.  $\arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, ]0, \pi[)$ .
4.  $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
5.  $\arccos$  admet deux demi-tangentes verticales en  $-1$  et  $1$ .

Graphe de  $\arccos$  :



**Figure 3.**  $\arccos$  en vert,  $\widetilde{\cos}$  en violet, la première bissectrice en rouge et  $y = \frac{\pi}{2} - x$  en rose.

## 1.6 Présentation exhaustive de la fonction arctan.

Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} := \widetilde{\tan}$ . D'où :

$$\arctan = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x & \mapsto & (\widetilde{\tan})^{-1}(x) \end{cases}$$

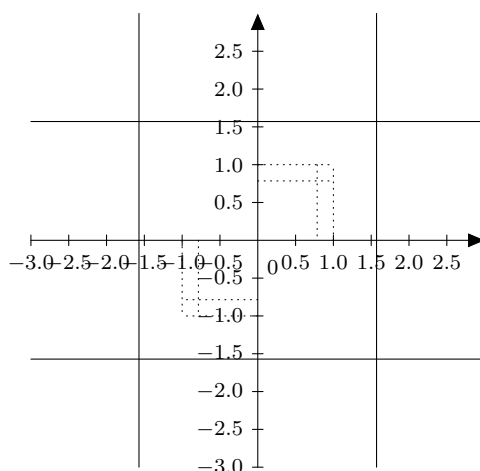
Ainsi, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arctan(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan(\theta) = x$ .

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\widetilde{\tan}$  :

1.  $\arctan$  est impaire.
2.  $\arctan \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ .
3.  $\arctan \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ .
4.  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .



Graphe de arctan :



**Figure 4.** arctan en vert,  $\widetilde{\tan}$  en bleu, la première bissectrice en rouge, et les fonctions  $y = \pm \frac{\pi}{2}$  et  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  en noir.

On a aussi (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(x) \leq x.$$

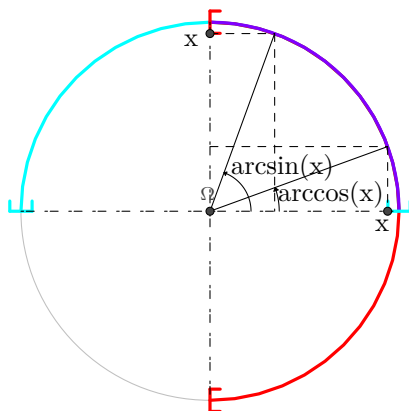
Et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ce qui conclut les présentations exhaustives.

### 1.7 2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$ , dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.

L'interprétation géométrique sur  $[0, 1]$ , celle sur  $[-1, 0]$  est laissée au lecteur car il s'agit du même principe modulo des détails :



**Figure 5.**

Preuve formelle :

Soit  $x \in [-1, 1]$ . Posons  $\varphi = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Ainsi :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \arccos(\sin(\varphi)) = \varphi + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right),$$

or  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$  d'où  $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$  si bien que :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

## 1.8 Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.

- Domaine de définition et symétries.

sinh et cosh sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,

(i)  $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ ,

$$(ii) \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \\ \text{et} \\ \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x). \end{cases}$$

Donc sinh et cosh sont respectivement impaire et paire.

Nous les étudierons sur  $\mathbb{R}_+$  et pour les obtenir les graphes ( $\mathcal{C}_{\sinh}$  et  $\mathcal{C}_{\cosh}$ ) de ces fonctions sur  $\mathbb{R}$  à partir de ceux ( $\mathcal{C}_{\sinh}^+$  et  $\mathcal{C}_{\cosh}^+$ ) obtenus sur  $\mathbb{R}_+$ , nous le compléterons en traçant les images de ces graphes par la symétrie centrale  $s$  de centre  $O$  et par la réflexion  $r$  d'axe  $(O, \vec{j})$  :

$$\mathcal{C}_{\sinh} = \mathcal{C}_{\sinh}^+ \cup s(\mathcal{C}_{\sinh}^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\cosh} = \mathcal{C}_{\cosh}^+ \cup r(\mathcal{C}_{\cosh}^+)$$

- Variations : triviales.

- Branches infinies en  $+\infty$  et position relative de  $\mathcal{C}_{\sinh}$  et  $\mathcal{C}_{\cosh}$ .

$$\frac{\cosh(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow +\infty} + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc le graphe de cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique  $(O, \vec{j})$ .

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$$

Donc les graphes des deux fonctions se rapprochent l'un de l'autre arbitrairement près lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , et le graphe de cosh est au-dessus de celui de sinh.

- Tangente au graphe de sinh à l'origine et position relative.

Cette étude est aussi triviale, il s'agira d'étudier  $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sinh(x) - x$ , de remarquer sa dérivabilité d'en étudier les variations puis de conclure, en précisant que cette étude révèle l'inflexion du graphe de sinh en 0.

- 2 Semaine 7
- 3 Semaine 8
- 4 Semaine 9
- 5 Semaine 10
- 6 Semaine 11
- 7 Semaine 12
- 8 Semaine 13
- 9 Semaine 14
- 10 Semaine 15
- 11 Semaine 16

Aucune démo de ce document n'apparaît au programme de Khôlle T\_T

## 12 Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$ . En Dédurre qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.

*Démonstration.* Soit  $m \in \mathbb{Z}$  fq. Calculons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt$$

Si  $m \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{mt}}{im} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{im} - \frac{1}{im} \right) = 0 \end{aligned}$$

Si  $m = 0$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq

Soient  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  les coefficients de  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , et  $s \in \mathbb{Z}$ , et  $r \in \mathbb{R}_+^*$  fq. tels que  $P$  soit nulle lorsqu'elle est évaluée sur  $\mathcal{C}(0, r)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^n a_k (re^{it})^k \right) e^{-imt} dt \\ &= \sum_{k=0}^n a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it(k-s)}}{2\pi} dt}_{I_k} \end{aligned}$$

On remarque que :

— Si  $s \notin [[0, n]]$ ,  $\{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = \emptyset$ , Donc

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k \in [[0, n]] \\ k = s}} a_k r^k = 0$$

— Si  $s \in [[0, n]]$ ,  $\{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = s$ , Donc

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k \in [[0, n]] \\ k = s}} a_k s^k = a_s r^s$$

Or, puisque  $P$  s'annule sur le cercle de rayon  $r$  et de centre  $0$ ,  $\mathcal{C}(0, r)$ , ces sommes sont aussi nulles. On en déduit, en particulierisant pour un  $s \in [[0, n]]$  fixé quelconque que :

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = a_s r^s = 0 \implies a_s = 0$$

Donc

$$(\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall \theta \in \mathbb{R}, P(re^{i\theta}) = 0) \implies \forall s \in [[0, n]]$$

Pour la preuve réciproque, soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Soient  $(a_0, \dots, a_n) \in \{0\}^{n+1}$  les coefficients nuls de la fonction polynomiale  $P \in \mathbb{C}[z]$  définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

En remarquant que  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$ , puisque n'importe quel cercle centré en  $0$  est un sous ensemble de  $\mathbb{C}$ ,  $\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall z \in \mathcal{C}(0, r), P(z) = 0$ .  $\square$

### 13 Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe

*Démonstration.* Définissons les fonctions  $f_r$  etc. comme les parties réelles et imaginaires de  $f$   
Soient  $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^2$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  fixés quelconques.

$$\begin{aligned} f_r &= \operatorname{Re}(f), f_i = \operatorname{Im}(f) & g_r &= \operatorname{Re}(g), g_i = \operatorname{Im}(g) \\ \alpha_r &= \operatorname{Re}(\alpha), \alpha_i = \operatorname{Im}(\alpha) & \beta_r &= \operatorname{Re}(\beta), \beta_i = \operatorname{Im}(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) &= \operatorname{Re}((\alpha_r + i\alpha_i)(f_r + if_i) + (\beta_r + i\beta_i)(g_r + ig_i)) \\ &= \underbrace{\alpha_r f_r + \beta_r g_r - \alpha_i f_i - \beta_i g_i}_{\text{Combinaison linéaire de } \underbrace{(f_r, f_i, g_r, g_i) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^4}_{\operatorname{car}(f, g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^2}} \end{aligned}$$

Donc, selon le théorème de stabilité par combinaison linéaire des fonctions à valeurs réelles,  $\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  et  $(\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g))' = \alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i'$

On montre de même que  $\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  et  $(\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g))' = \alpha_r f_i' + \alpha_i f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r'$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)' &= (\alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i') + i(\alpha_r f_i' + \alpha_i f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r') \\ &= \alpha_r (f_r' + if_i') + \beta_r (g_r' + ig_i') + \alpha_i \underbrace{(-f_i' + if_r')}_{i(f_r' + if_i')} + \beta_i \underbrace{(-g_i' + ig_r')}_{i(g_r' + ig_i')} \\ &= \alpha f' + \beta g' \end{aligned}$$

$\square$

### 14 Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes

*Démonstration.* Soient  $f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C})$  et  $h \in \mathcal{D}^1(I, J)$  ( $I$  et  $J$  sont deux intervalles réels) fixés quelconques. Notons  $f_r$  et  $f_i$  respectivement la partie réelle et imaginaire de  $f$ .

$$\left. \begin{array}{l} h \in \mathcal{D}^1(I, J) \\ f_r \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R}), \text{ car } f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C}) \end{array} \right\} \implies f_r \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$$

On montre de même que  $f_i \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  donc  $f \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ .  
De plus,

$$\begin{aligned} (f \circ h)' &= (f_r \circ h)' + i(f_i \circ h)' \\ &= (f_r' \circ h) \times h' + i((f_i' \circ h) \times h') \\ &= (f_r' \circ h + i f_i' \circ h) \times h' = (f' \circ h) \times h' \end{aligned}$$

□

## 15 Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$  où  $I$  est un intervalle réel ; Posons  $f_r = \text{Re}(f)$  et  $f_i = \text{Im}(f)$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in I, f'(t) = 0 &\iff \forall t \in I, f_r'(t) + i f_i'(t) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I, f_r'(t) = 0 \\ \forall t \in I, f_i'(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \lambda_r \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_r(t) = \lambda_r \\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_i(t) = \lambda_i \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in I, f(t) = \lambda \end{aligned}$$

□

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (1)$$

## 16 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{S}_{H, \mathbb{C}}$  et  $\mathcal{S}_{H, \mathbb{R}}$  les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas  $\Delta < 0$  et  $\alpha \pm i\beta$  les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H, \mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que  $\forall f \in \mathcal{S}_{H, \mathbb{C}}, \text{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H, \mathbb{R}}$

Soit  $f \in \mathcal{S}_{H, \mathbb{C}}$  fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies \text{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de  $\text{Re}$

$$a_2 \text{Re}(f)'' + a_1 \text{Re}(f)' + a_0 \text{Re}(f) = \text{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec  $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$  ;  $\text{Re}(f(t)) = \text{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ . Qui appartient donc à  $\mathcal{S}_{H, \mathbb{R}}$   
En suivant le même raisonnement pour  $\text{Im}(f)$ ,  $(t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)) \in \mathcal{S}_{H, \mathbb{R}}$

Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H, \mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{S}_{H, \mathbb{R}}$  fq. Puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{S}_{H, \mathbb{C}}$ .

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de  $f$  sont réelles, en notant  $(a_r, a_i, b_r, b_i)$  les parties réelles et imaginaires respectives de  $a$  et  $b$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \text{Re}(f(t)) \\ &= \text{Re}(a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \text{Re}((a_r + i a_i) e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + i b_i) e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r \cos(\beta t) e^\alpha - a_i \sin(\beta t) e^\alpha + b_r \cos(\beta t) e^\alpha + b_i \sin(\beta t) e^\alpha \\ &= (a_r + b_r) \cos(\beta t) e^\alpha + (b_i - a_i) \sin(\beta t) e^\alpha \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion.  $\square$

## 17 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur $I$ (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{array} \right. \quad \text{où } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$$

Si  $b$  est continu sur  $J$ , alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur  $J$ .

*Démonstration. Cas 1.*  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nous savons que sous l'hypothèse de continuité de  $b$  sur  $J$ , les solutions de (EDL2) définies sur  $J$  constituent le plan affine  $S$  :

$$S = \{ \lambda f_1 + \mu f_2 + s \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

où  $s$  est une solution particulière de (EDL2),  $(f_1, f_2)$  sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent  $S_h$ . On a :

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} &\iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{array} \right. \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \left\{ \begin{array}{l} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{array} \right. \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \left\{ \begin{array}{l} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $(\lambda, \mu)$  doit être solution d'un système linéaire  $(2, 2)$ . On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est nul. Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera  $D$ .

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) ( $a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0$ ). On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de  $\Delta$ . Traitons d'abord le cas  $\Delta \neq 0$ . On peut choisir :

$$\begin{aligned} f_1(t_0) &= e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2 t_0} \\ f_1'(t_0) &= r_1 e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2 e^{r_2 t_0} \end{aligned}$$

Donc (en sachant que  $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$ ) :

$$D = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1 t_0 + r_2 t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a  $\Delta = 0$  ; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0 e^{r_0 t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0 t_0} (r_0 t_0 e^{r_0 t_0} + e^{r_0 t_0}) - r_0 e^{r_0 t_0} \times t_0 e^{r_0 t_0} = e^{2r_0 t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas,  $D \neq 0$ , donc le système  $(2, 2)$  étudié admet une unique solution, donc il existe un unique couple  $(\lambda, \mu)$  le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

**Cas 2.**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2, b \in C^0(J, \mathbb{R})$

**Existence :** Puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , le problème de Cauchy admet, dans  $\mathbb{R}$ , une solution à valeurs complexes  $g$ . Posons  $f = \text{Re}(g)$  et montrons que  $f$  est une solution réelle du problème de Cauchy.

★  $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$  donc  $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$

★  $g$  vérifie  $a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b$  sur  $J$  donc en prenant  $\text{Re}(\cdot)$  :

$$\begin{aligned} \text{Re}(a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b) &= \text{Re}(b) \iff a_2 \text{Re}(g'') + a_1 \text{Re}(g') + a_0 \text{Re}(g) = b \\ &\iff a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \text{ sur } J \end{aligned}$$

★  $f(t_0) = \text{Re}(g(t_0)) = \text{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$

★  $f'(t_0) = \text{Re}(g(t_0))' = \text{Re}(g'(t_0)) = \text{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc  $f$  est une solution réelle définie sur  $J$  au problème de Cauchy.

**Unicité :** Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc  $f_1 = f_2$  dans  $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$ , donc  $f_1 = f_2$  dans  $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ .  $\square$

## 18 Les solutions d'une EDL<sub>2</sub> constituent un espace vectoriel.

Soient  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $f$  et  $g$  les solutions, définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur  $\mathbb{R}$  de  $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$  pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  de  $y'' + ay' + by = 0$  est  $\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$

*Démonstration.* La solution s'exprime simplement comme combinaison linéaire de  $f$  et  $g$ , plus précisément, la combinaison linéaire en  $\alpha$  et  $\beta$ . En effet, soient de tels scalaires, et soient  $f$  et  $g$  de telles solutions, on a :

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'' + a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' + b(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = 0, \text{ par définition des espaces vectoriels.}$$

Et de même,  $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(3) = \alpha \cdot f'(3) + \beta \cdot g'(3) = \alpha$ , et  $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)''(3) = \alpha \cdot f''(3) + \beta \cdot g''(3) = \beta$ .

Ce qui suffit par unicité des solutions (de la donc) d'un problème de Cauchy dans le cadre du théorème du cours.

Pour ce qui est du plan vectoriel des solutions, noté  $\Omega$ , notons aussi  $\Phi$  l'ensemble proposé.

L'inclusion  $\Phi \subset \Omega$  est triviale par propriété de linéarité des espaces vectoriels. Finalement, pour  $\Omega \subset \Phi$ , soit  $\omega \in \Omega$ , forcément,  $\omega$  vérifie l'EDL<sub>2</sub>, mais aussi des conditions de Cauchy bien que celles-ci soient non-spécifiées, ainsi posons  $\omega'(3) = \delta$  et  $\omega''(3) = \theta$ , donc en particulier,  $\omega = \delta \cdot f + \theta \cdot g$ , d'où l'égalité par double inclusion.  $\square$

## 19 Formules de Cramer pour les systèmes $2 \times 2$

Résolution générale des systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues en fonction du déterminant du systèmes (**tous les cas ne sont pas nécessairement à envisager**)

Considérons le système linéaire à deux équations et à deux inconnues  $(x, y)$  :

$$(S) \begin{cases} ax + by = b_1 & (E_1) \\ cx + dy = b_2 & (E_2) \end{cases} \quad (2)$$

dont  $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$  sont les coefficients et  $(b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$  sont les seconds membres.

1. (S) admet une unique solution si et seulement si  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ . De plus, dans ce cas, la solution est

$$\left( \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right) \quad (3)$$

2. Si  $ad - bc = 0$ , alors l'ensemble des solutions est soit vide, soit une droite affine de  $\mathbb{K}^2$ , soit  $\mathbb{K}^2$ .

*Démonstration.* Procédons par disjonction de cas.

- Supposons que  $ad - bc \neq 0$ .
- Supposons que  $a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (d - \frac{bc}{a})y = b_2 - \frac{c}{a}b_1 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a}L_2) \\ &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (ad - bc)y = ab_2 - cb_1 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \\ &\iff \begin{cases} ax = \frac{1}{a} \left( b_1 - b \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \right) = \frac{1}{a} \frac{adb_1 - bcb_1 + abb_2 - bcb_2}{ad - bc} \\ y = \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ax = \frac{db_1 - bb_2}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y = \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.



- Supposons que  $a = 0$ . L'hypothèse  $ad - bc \neq 0$  implique  $bc \neq 0$  donc  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} by &= b_1 \\ cx + dy &= b_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{c} (b_2 - d \frac{b_1}{b}) \\ y &= \frac{b_1}{b} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax &= \frac{db_1 - bb_2}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y &= \frac{-cb_1}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

$$ad - bc = 0.$$

- Supposons  $a \neq 0$ . En reprenant la méthode pivot de Gauss,

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} ax + by &= b_1 \\ (d - \frac{bc}{a})y &= b_2 - \frac{c}{a}b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a}L_2) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax + by &= b_1 \\ \underbrace{(ad - bc)}_0 y &= ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système est de rang 1 avec une condition de compatibilité.

Si  $ab_2 - cb_1 \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.

Sinon  $ab_2 - cb_1 = 0$

$$(S) \iff ax + by = b_1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a} - b \frac{t}{a} \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\} \quad (4)$$

Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Supposons  $a = 0$ . Puisque  $ad - bc = 0$ , alors  $bc = 0$  donc  $b$  ou  $c$  est nul.

- Si  $c = 0$ ,

$$(S) \iff \begin{cases} by &= b_1 \\ dy &= b_2 \end{cases}$$

- Si  $b = 0$ ,

$$(S) \iff \begin{cases} by &= b_1 \\ 0 &= b_2 \end{cases}$$

- Si  $b_2 = 0$ , (S) n'admet aucune solution.

- Si  $b_2 \neq 0$ , (S)  $\iff dy = b_2$

• Si  $d = 0$ , (S)  $\iff 0 = b_2$ . (S) n'admet aucune solution ( $b_2 \neq 0$ ) ou admet  $\mathbb{K}^2$  comme ensemble des solutions ( $b_2 = 0$ ).

• Si  $d \neq 0$ , (S)  $\iff y = \frac{b_2}{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_2}{d} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ . Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si  $b \neq 0$

$$(S) \iff \begin{cases} y &= \frac{b_1}{b} \\ 0 &= b_2 - \frac{db_1}{b} \end{cases}$$

- Si  $b_2 - \frac{db_1}{b} \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.

• Si  $b_2 - \frac{db_1}{b} = 0$ , (S)  $\iff y = \frac{b_1}{b} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_1}{b} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$  donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si  $c \neq 0$  alors  $b = 0$

$$(S) \iff \begin{cases} 0 &= b_1 \\ cx + dy &= b_2 \end{cases}$$

- Si  $b_1 \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.
- Si  $b_1 = 0$ ,  $(S) \iff x = \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$  donc (S) admet une droite affine de solutions.

□

## 20 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

Soit  $x \in E$ .

La classe de  $x$ , notée  $\bar{x}$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  en relation avec  $x$ .

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \quad (5)$$

*Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.*

Soit  $(x, y) \in E^2$  fq.

- Si  $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ , rien à démontrer.
- Sinon  $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$  donc  $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ . Fixons un tel  $z$ .  
Soit  $x' \in \bar{x}$  fq.

$$\left. \begin{array}{l} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \xRightarrow{\text{symétrie}} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \xRightarrow{\text{symétrie}} z\mathcal{R}y \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}z \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}y \xRightarrow{\text{symétrie}} y\mathcal{R}x'$$

Donc  $x' \in \bar{y}$  donc  $\bar{x} \subset \bar{y}$ .

En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on montre la deuxième inclusion  $\bar{y} \subset \bar{x}$ .

*Montrons que les classes d'équivalence de  $E$  constituent une partition de  $E$ .*

Soit  $\mathcal{S}$  un système de représentant des classes fixé quelconque.

- Soit  $s \in \mathcal{S}$  fq.  $\bar{s} \neq \emptyset$  car  $s\mathcal{R}s$  par réflexivité.
- Soit  $(s, s') \in \mathcal{S}^2$  fq. D'après la démonstration ci-dessus ci-dessus,  $\bar{s} \cap \bar{s'} = \emptyset$  ou  $\bar{s} = \bar{s'}$ . Si  $\bar{s} = \bar{s'}$  alors  $s$  et  $s'$  représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent,  $\bar{s}$  et  $\bar{s'}$  sont disjoints.
- $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$  car  $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \subset E$  par définition d'une classe d'équivalence.  
Réciproquement, soit  $x \in E$  fq.  
Par réflexivité de  $\mathcal{R}$ ,  $x \in \bar{x}$ .  
Par définition d'un système de classe  $\exists ! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$  donc  $\bar{s}_x = \bar{x}$ . Donc  $x \in \bar{s}_x \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .  
Donc  $E \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .  
Par double inclusion,  $E = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .

Ainsi,

$$E = \coprod_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \quad (6)$$

□

## 21 Si $A$ admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si $A$ admet une borne supérieure dans $A$ c'est son plus grand élément.

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné, et  $A$  une partie non-vidée de  $E$ .

Si  $A$  admet un plus grand élément alors  $A$  admet une borne supérieure et  $\sup A = \max A$ .

Si  $A$  admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors  $A$  admet un plus grand élément et  $\max A = \sup A$ .

*Démonstration.* Soient un tel ensemble  $E$  et une telle partie  $A$  et notons  $M$  son plus grand élément.

Posons l'ensemble des majorants de  $A$ ,  $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A, a \leq m\}$ .

Par définition :

$$\forall m \in M(A), M \leq m,$$

car  $M \in A$ , mais comme  $M \in M(A)$ , on a directement que  $M = \min M(A) = \sup A$ .

Pseudo-réciproquement, soit  $A$  une partie de  $E$  admettant une borne supérieure dans elle-même, notons cette borne  $S$ .

Comme  $S \in M(A)$ , par définition,  $S$  est plus grand que tous les éléments de  $A$  mais appartient à  $A$ , donc de tous les éléments de  $A$ ,  $S$  est le plus grand.  $\square$

## 22 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Pour tout couple d'entiers relatifs  $a$  et  $b$ ,  $b$  non nul, il existe un unique couple d'entiers relatifs  $q$  et  $r$  tel que  $a = bq + r$  et  $0 \leq r \leq |b| - 1$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in \llbracket 0; |b| - 1 \rrbracket \end{cases} \quad (7)$$

*Démonstration. Existence* Soient deux tels entiers  $(a, b)$  et deux couples  $((q, r), (q', r'))$  tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r \leq |b| - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' \leq |b| - 1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme  $-(|b| - 1) \leq r' - r \leq |b| - 1$ , il vient en divisant par  $|b|$  l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque  $q$  et  $q'$  sont dans  $\mathbb{Z}$  leur différence est obligatoirement 0, ainsi  $q = q'$  ce qui implique  $r = r'$  et donc on a unicité de ladite écriture de  $a$ .

*Unicité* Posons pour  $b \geq 1$ ,  $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$ , non-vidé car  $-|a| \in \Omega$  ( $\mathbb{Z}$  archimédien suffit...), ainsi  $\Omega \subset \mathbb{Z}$ . Supposons qu'il existe un  $k$  dans  $\Omega$  tel que  $k > |a|$ , si tel est le cas alors  $k \notin \Omega$  (multiplier par  $b$ ). De fait,  $\Omega$  est majoré par  $|a|$ , il admet donc un plus grand élément noté  $q$ .

Posons  $r = a - bq$ . Par construction,  $a = bq + r$  et comme  $q = \max \Omega$  et  $\Omega \subset \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  donc  $r \in \mathbb{Z}$ . Par suite,  $q \in \Omega$  donc  $bq \leq a$  d'où  $0 \leq r$  et  $q = \max \Omega$  donc  $b(q + 1) > a$  d'où  $b > r$ , c'est-à-dire,  $r \in \llbracket 0, |b| - 1 \rrbracket$ .

Si  $b < 1$ , il suffit de prendre  $q \leftarrow -q$  dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de  $a$ .  $\square$

## 23 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  une suite décroissante et minorée fixée quelconque.

Considérons  $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite  $u$ .

$A$  est :

- une partie de  $\mathbb{Z}$  car  $u$  est à valeur dans  $\mathbb{Z}$
- non vide car  $u_0 \in A$
- minoré car  $u$  est minorée

Donc  $A$  admet un plus petit élément. Donc  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = \min A$ . Fixons un tel  $n_0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq tq  $n \geq n_0$ .

$$\left. \begin{array}{l} u_n \in A \implies u_n \geq \min A = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geq n_0 \text{ donc } u_n \leq u_{n_0} \end{array} \right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi,  $u$  est stationnaire.

□