

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 13

Hugo Vangilluwen, Ober George

28 décembre 2023

## 1 Théorème de composition des limites

Soient  $g$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$  telle que  $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ .

Si  $\left. \begin{array}{l} g \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } b \in \overline{\mathcal{D}_g} \\ f \text{ admet } b \text{ comme limite en } a \in \overline{\mathcal{D}_f} \end{array} \right\}$  alors  $g \circ f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$ .

*Démonstration.* Traitons le cas où  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fq.

Appliquons la définition de  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$  pour cet  $\varepsilon$  :

$$\exists \eta_g \in \mathbb{R}_+^* : \forall y \in \mathcal{D}_g, |y - b| \leq \eta_g \implies |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$$

Appliquons la définition de  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  pour cet  $\eta_g$  :

$$\exists \eta_f \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \eta_f \implies |f(x) - b| \leq \eta_g$$

Posons  $\eta = \eta_f$ .

Soit  $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$  fq tq  $|x - a| \leq \eta$ . Or  $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$  donc  $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathcal{D}_f$ .

Ainsi,  $x \in \mathcal{D}_f$  et  $|x - a| \leq \eta_f$  d'où  $|f(x) - b| \leq \eta_g$  d'où  $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$ . Donc

$$g \circ f \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

□

## 2 Caractérisation séquentielle de la limite

Soit  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \overline{\mathcal{D}_f}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f \text{ admet } \ell \text{ pour limite en } a \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite } u \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}}, \\ \text{si } u \text{ tend vers } a, \text{ alors } f(u) \text{ tend vers } \ell \end{array} \right.$$

*Démonstration.* ★ Supposons que  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$ . Traitons le cas  $a \in \mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Soit  $u \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}}$  fixée quelconque telle que  $u$  tend vers  $a$ . Soit  $\varepsilon > 0$  fixé quelconque. Appliquons la définition de la limite de  $f$  en  $a$  pour  $\varepsilon$

$$\exists \eta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Fixons un tel  $\eta$  et appliquons la définition de la convergence de  $u$  pour  $\varepsilon \leftarrow \eta$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n - a| \leq \eta$$

Fixons un tel  $N$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N$ . On a, bien entendu

$$|u_n - a| \leq \eta \implies |f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$$

Ce qui montre la convergence de  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\ell$ .

★ Réciproquement, raisonnons par contraposée et montrons l'implication suivante

$$\text{non}(f \text{ admet } \ell \text{ pour limite en } a) \implies \text{non} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite } u \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}}, \\ \text{si } u \text{ tend vers } a, \text{ alors } f(u) \text{ tend vers } \ell \end{array} \right\}}_{\exists u \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}} : u \text{ tend vers } a \text{ et } f(u) \text{ ne tend pas vers } \ell}$$

Supposons donc

$$\begin{aligned} \text{non}(f \text{ admet } \ell \text{ pour limite en } a) &\iff \text{non}(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon) \\ &\iff \exists \varepsilon > 0 : \forall \eta > 0, \exists x \in \mathcal{D}_f : |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

Fixons donc un tel  $\varepsilon$  et construisons une suite  $u \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}}$  telle que  $u$  tend vers  $a$  et  $f(u)$  ne tend pas vers  $\ell$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé quelconque. Appliquons l'hypothèse (2) pour  $\eta \leftarrow \frac{1}{2^n}$ .

$$\exists x_n \in \mathcal{D}_f : |x_n - a| \leq \frac{1}{2^n} \text{ et } |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

En relâchant le caractère fixé de  $n$ , on a constuit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $a$ .

La suite vérifie aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

ce qui montre que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers  $\ell$  car

$$\begin{aligned} \text{non}((f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell) &\iff \text{non}(\forall \varepsilon_1 > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon_1) \\ &\iff \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ et } |f(x_n) - \ell| > \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Ce qui est immédiat en posant  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  et pour n'importe quel  $N$  en posant  $n = N$ . □

### 3 Deux stratégies pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en un point

*Démonstration.* • Soit en exhibant une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $a$  et telle que  $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de limite en  $a$ .

Par exemple  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en zéro : observons que la suite  $y = (\frac{1}{n\pi})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 tandis que la suite  $f(y) = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge.

- Soit en exhibant deux suites  $y, z$  qui tendent vers  $a$  et telles que  $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  admettent deux limites différentes.

Par exemple, pour montrer que  $f(x) = \sin x$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ , il suffit d'observer que les suites  $y = (n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $z = (2n\pi + \frac{\pi}{2})_{n \in \mathbb{N}}$  tendent vers  $+\infty$  et ont respectivement pour suites images  $\tilde{0}$  et  $\tilde{1}$  qui convergent respectivement vers 0 et 1. □

### 4 Passage à la limite dans une inégalité

Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathcal{D}$  et  $a \in \overline{\mathcal{D}}$ . Si

- $f \leq g$  sur un voisinage de  $a$
- $f$  et  $g$  admettent une limite finie en  $a$

alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

*Démonstration.* ★ **En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite**

Traisons le cas  $a = +\infty$ .

Posons  $\ell_f \in \mathbb{R}$  et  $\ell_g \in \mathbb{R}$  les limites finies respectives de  $f$  et  $g$ .

Par définition de  $a \in \overline{\mathcal{D}}$ ,  $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = +\infty$

Par définition de voisinage de  $a$  en  $+\infty$ ,  $\exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathcal{D}, x \geq A \implies f(x) \leq g(x)$

Fixons un tel  $A$  et appliquons la définition de la divergence de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $+\infty$  pour  $A$ .

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, a_n \geq A$$

Fixons un tel  $N$ . On a alors

$$\forall n \geq N, a_n \geq A \implies f(a_n) \leq g(a_n)$$

Donc par passage à la limite dans l'inégalité pour les suites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$$

donc par caractérisation séquentielle de la limite

$$\lim_{x \rightarrow a = +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a = +\infty} g(x)$$

★ **En utilisant le caractère local de la limite** Tout d'abord  $f \leq g$  sur un voisinage de  $a$ , donc  $g - f \geq 0$  sur un voisinage de  $a$  donc  $g - f = |g - f|$  sur un voisinage de  $a$ . Or,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_g \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_f \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow a} |g(x) - f(x)| = |\ell_g - \ell_f|$$

Donc, avec le caractère local de la limite, puisque  $g - f$  et  $|g - f|$  coïncident sur un voisinage de  $a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) - f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |g(x) - f(x)| = |\ell_g - \ell_f|$$

Or, on a aussi  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) - f(x) = \ell_g - \ell_f$ . Donc

$$\ell_g - \ell_f = |\ell_g - \ell_f| \geq 0 \implies \ell_g \geq \ell_f$$

□

## 5 Limite de fonctions monotones sur un segment.

Soit  $f$  une fonction croissante définie sur  $]a, b[$  avec  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2, a < b$ .

- Si  $f$  est majorée, alors  $f$  admet une limite finie en  $b$  qui vaut  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup f(]a, b[)$ .
- Si  $f$  n'est pas majorée, alors  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $b$ .

*Démonstration.* ★ Supposons que  $f$  est majorée sur  $]a, b[$ . L'ensemble  $f(]a, b[)$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , non vide et majorée, donc admet une borne supérieure  $S \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = S$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé quelconque. On veut construire un  $\eta > 0$  tel que  $\forall x \in ]b - \eta, b[, |f(x) - S| \leq \varepsilon$ . D'après la caractérisation de la borne supérieure par les epsilon appliquée pour  $\varepsilon$ ,

$$\exists y_\varepsilon \in f(]a, b[) : S - \varepsilon < y_\varepsilon \leq S$$

Or,  $y_\varepsilon \in f(]a, b[) \implies \exists x_\varepsilon \in ]a, b[ : y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$  Posons  $\eta = b - x_\varepsilon > 0$  et vérifions qu'il convient. Soit  $x \in ]b - \eta, b[$  fixé quelconque. on a

$$b - \eta < x \implies b - (b - x_\varepsilon) < x \implies x_\varepsilon < x \implies \underbrace{f(x_\varepsilon)}_{y_\varepsilon} \leq f(x)$$

De plus,  $f(x) \leq S$  par définition de la borne supérieure, donc

$$S - \varepsilon < y_\varepsilon \leq f(x) \leq S$$

Donc  $|f(x) - S| \leq \varepsilon$  ce qui prouve la convergence.

★ Supposons que  $f$  n'est pas majorée sur  $]a, b[$ . On veut montrer que  $f$  tend vers  $+\infty$ , autrement dit que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in ]b - \eta, b[, f(x) \geq A$$

Soit  $A \in \mathbb{R}$  fixé quelconque.  $f$  n'est pas majorée, donc  $\exists x_0 \in ]a, b[ : f(x_0) \geq A$ . Posons  $\eta = b - x_0 > 0$ . Soit  $x \in ]b - \eta, b[$  fixé quelconque.

$$b - \eta < x \implies b - (b - x_0) < x \implies x_0 < x \implies f(x_0) \leq f(x)$$

Donc  $f(x) \geq f(x_0) \geq A$ . Donc  $\forall x \in ]b - \eta, b[, f(x) \geq A$ . Donc  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $b$ . □

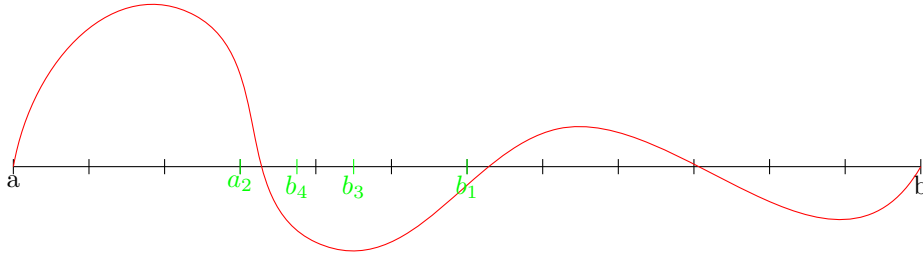
## 6 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction continue  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $a < b$ .

Si  $f(a)f(b) \leq 0$  alors  $\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$ .

On rencontre aussi : Si  $f(a)f(b) < 0$  alors  $\exists c \in ]a; b[ : f(c) = 0$ .

*Démonstration.* La démonstration repose sur la technique de la dichotomie.



Soient  $a, b, f$  de tels objets. Procédons à la construction des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Posons  $a_0 = a, b_0 = b$  et  $c_0 = \frac{a+b}{2}$  (le milieu du segment  $[a; b]$ ). Nous avons, par hypothèse  $f(a_0)f(b_0) \leq 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Supposons les trois suites construites au rang  $n$  telles que  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$  et  $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$  (milieu de  $[a_n; b_n]$ ).

— Si  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ , posons  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \\ c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{cases}$

— Sinon  $f(a_n)f(b_n) > 0$ . Or  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ , donc  $f(a_n)^2 f(b_n)f(c_n) \leq 0$ . Donc  $f(b_n)f(c_n) \leq 0$ .

Posons  $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \\ c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{cases}$

Ainsi, nous avons bien construits  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  telles que  $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$  et  $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$  (milieu de  $[a_{n+1}; b_{n+1}]$ ).

Par récurrence immédiate,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  d'où  $b_n - a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Donc les suites  $a$  et  $b$  sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite. Notons la  $c$ .

D'après le bonus de ce même théorème,  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c \leq b_n$  donc pour  $n = 0, a \leq c \leq b$ . Ainsi,

$$c \in [a; b]$$

Par ailleurs,  $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n)f(b_n) \leq 0$ . Par continuité de  $f$  sur  $[a; b]$  donc en  $c, f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(c)$  et  $f(b_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(c)$ . Par passage à limite dans l'inégalité,

$$f(c) \times f(c) \leq 0$$

Or  $f(c)^2 \geq 0$ , d'où  $f(c)^2 = 0$ . Ainsi,

$$f(c) = 0$$

Donc  $c$  est un point fixe. □

## 7 Théorème de Weierstraß

L'image d'un segment par une fonction continue sur ce segment est un segment : soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  alors  $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f([a, b]) = [f(x_1), f(x_2)]$

*Démonstration.* — *Étape 1* Montrons que  $f([a, b])$  est majoré.

Par l'absurde, supposons que  $f([a, b])$  n'est pas majoré

Alors

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b] : f(x) > A \quad (3)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Appliquons (3) pour  $A \leftarrow n : \exists x \in [a, b] : f(x) > n$ , et fixons un tel  $x$  que l'on note  $x_n$ . Nous venons de créer la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  qui vérifie :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{théorème de divergence par minoration}} f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée (à valeurs dans  $[a, b]$ ) donc, selon le théorème de Bolzano-Weierstraß :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \text{strict. croissante tel que } (x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \ell$$

Donc, en passant à la limite :  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b \implies a \leq \ell \leq b \implies \ell \in [a, b]$

Par continuité de  $f$  sur  $[a, b]$ , donc en  $\ell$ ,  $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ .

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une sous suite de } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right.$$

donc  $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ , tend vers  $+\infty$ , ce qui est absurde, donc  $f$  est majorée.

On fait de même pour la minoration.

— *Étape 2* : Montrons que  $f([a, b])$  admet un pge et un ppe.

Montrons donc que  $f([a, b])$  admet une borne sup, qui, puisque c'est une valeur atteinte, deviendra un max.

$$f([a, b]) \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{une partie de } \mathbb{R} \\ \text{non vide car contient } f(a) \\ \text{majorée d'après l'étape 1} \end{array} \right.$$

$f([a, b])$  admet donc une borne supérieure  $\sigma$ .

Appliquons la caractérisation séquentielle de la borne supérieure :

$$\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \in f([a, b])^{\mathbb{N}} : (y_n) \text{ converge vers } \sigma$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in f([a, b]) \implies \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) = y_n$$

Fixons un tel  $x_n$  pour tout  $y_n$ . On a donc construit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}} : f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$

De plus,  $(x_n)$  est bornée (à valeurs dans  $[a, b]$ ) donc, selon le théorème de Bolzano-Weierstraß :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \text{strict. croissante tel que } (x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \ell$$

Donc, en passant à la limite :  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b \implies a \leq \ell \leq b \implies \ell \in [a, b]$

Par continuité de  $f$  sur  $[a, b]$ , donc en  $\ell$ ,  $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ .

Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une sous suite de } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma \end{array} \right.$$

Par unicité de la limite,  $\sigma = f(\ell)$ .

On montre de même qu'il existe  $\ell' \in [a, b] : f(\ell') = \inf f([a, b])$

Ainsi,  $f(\ell) = \max f([a, b])$  et  $f(\ell') = \min f([a, b])$

— *Étape 3* : Montrons que  $f([a, b]) = [f(\ell'), f(\ell)]$ .

Par la construction précédente,  $\forall y \in f([a, b]), y \in [f(\ell'), f(\ell)]$ .

Ainsi,  $f([a, b]) \subset [f(\ell'), f(\ell)]$ .

Réciproquement, l'image par la fonction continue  $f$  du segment  $[a, b]$  qui est un intervalle est un intervalle :

$$\left. \begin{array}{l} f([a, b]) \text{ est un intervalle} \\ f(\ell) \in f([a, b]) \\ f(\ell') \in f([a, b]) \end{array} \right\} \implies [f(\ell'), f(\ell)] \subset f([a, b])$$

D'où  $[f(\ell'), f(\ell)] = f([a, b])$

□