

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 1

George Ober, Félix Rondeau

19 septembre 2024

## 1 Preuve formelle de la somme des entiers et des termes d'une suite géométrique

*Démonstration.*     $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^n k$$

En posant la symétrie d'indice  $i = n - k$ , on a aussi

$$S_n = \sum_{i=0}^n (n - i) = \sum_{i=0}^n n - \sum_{i=0}^n i = (n \times \text{card}[[0, n]]) - \sum_{i=0}^n i$$

Or, puisque  $\text{card}[[0, n]] = n + 1$  et que  $\sum_{i=0}^n i = S_n$

$$S_n = n \times (n + 1) - S_n$$

Donc

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$\diamond$  Soient  $q \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  fixés quelconques.

★ Si  $q = 1$ ,

$$\sum_{i=0}^k q^i = \sum_{i=0}^k 1 = k + 1$$

★ Sinon, avec l'identité algébrique, on a

$$q^{k+1} - 1^{k+1} = (q - 1) \sum_{i=0}^k q^i \times 1^{k-i}$$

Ainsi, puisque  $q \neq 1$  on a, par multiplication par  $(q - 1)^{-1}$

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

Nous avons donc établi que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \begin{cases} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ k + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

## 2 Preuve de la factorisation de $a^n - b^n$ puis de celle de $a^{2m+1} + b^{2m+1}$

*Démonstration.* Soient  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$  fixés quelconques.

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} &= a \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} - b \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} \end{aligned}$$

Si bien qu'en posant le changement d'indice  $j = k + 1$  on reconnait le télescope.

$$\sum_{j=1}^m a^j b^{m-j} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} = a^m - b^m$$

Soit  $m$  un entier naturel fixé quelconque. En particulierisant la relation pour  $n \leftarrow 2m + 1$  et  $b \leftarrow (-b)$ , on obtient

$$\begin{aligned} a^{2m+1} - (-b)^{2m+1} &= a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a - (-b)) \sum_{k=0}^{2m} a^k (-b)^{2m-k} \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^{2m} a^k (-1)^{2m} (-1)^{-k} b^{2m-k} \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a^k b^{2m-k} \end{aligned}$$

□

## 3 Preuve de la formule du binôme de Newton

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

*Démonstration.* Soient  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  fixés quelconques. Posons le prédicat  $\mathcal{P}(\cdot)$  défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$\mathcal{P}(n) : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

★ Initialisation,  $n \leftarrow 0$  D'une part  $(a + b)^0 = 0$ , même si les deux sont nuls (par convention  $0^0 = 0$ ) D'autre part

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 0$$

Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vérifiée.

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé quelconque tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \times (a + b)^n \\ &= (a + b) \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\text{(en posant } j = k+1) = a^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left( \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \right) + b^{n+1} \\
&\text{(en utilisant la relation de Pascal)} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

□

## 4 Développement d'une somme

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j = 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j + \sum_{k=1}^n x_k^2$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 &= \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \times \left( \sum_{j=1}^n x_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ x_k \times \sum_{j=1}^n x_j \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_k \times x_j \right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j
\end{aligned}$$

On peut aussi séparer cette somme

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j && + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k=j}} x_k x_j && + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j && + \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k^2}_{\text{somme sur les indices } (k,j) \text{ tels que } k=j} && + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j
\end{aligned}$$

On remarque aussi qu'en permutant les indices des deux sommes (les variables sont muettes)

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n \\ j < k}} x_j x_k$$

Qui, par commutativité du produit dans  $\mathbb{C}$  nous donne cette égalité

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j$$

On a donc bien l'identité attendue :

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = 2 \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j + \sum_{k=1}^n x_k^2$$

□

## 5 Montrer que tout entier $n > 2$ admet un diviseur premier

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence forte avec la propriété  $\mathcal{P}(\cdot)$  définie pour tout  $n > 2$  par

$$\mathcal{P}(n) : \ll \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, k \text{ admet un diviseur premier} \gg$$

— Initialisation :  $n \leftarrow 2$

Soit  $k \in \llbracket 2, 2 \rrbracket$  fixé quelconque. Nécessairement,  $k = 2$ . or, 2 admet 2 pour diviseur premier.

Donc  $\forall k \in \llbracket 2, 2 \rrbracket, k$  admet un diviseur premier, ce qui prouve  $\mathcal{P}(2)$ .

— Hérité : Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$  fixé quelconque tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

Pour montrer  $\mathcal{P}(n+1)$ , il nous faudra montrer que  $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, k$  admet un diviseur premier

Soit  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$  fixé quelconque.

★ Si  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , alors la véracité de  $\mathcal{P}(n)$  nous permet de conclure, et de dire que  $k$  admet un diviseur premier.

★ Sinon  $k = n+1$

◇ Si  $n+1$  est premier, alors il admet  $k$  comme diviseur premier

◇ Sinon,  $\exists d \in \llbracket 2, n \rrbracket : d \mid n+1$

Mais, puisque  $d \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , la véracité de  $\mathcal{P}(n)$  nous permet d'affirmer que  $d$  admet un diviseur premier  $p$ . Donc par transitivité de la relation de divisibilité

$$(p \mid d \text{ et } d \mid n) \implies p \mid n$$

□

## 6 Montrer par récurrence qu'une fonction polynomiale à coefficients réels est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls

*Démonstration.* Considérons le prédicat  $\mathcal{P}(\cdot)$  défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(n)$  : toute fonction polynômiale identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$  a tous ses coefficients nuls

Autrement dit

$$\mathcal{P}(n) : \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \left( \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \right) \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0$$

◇ Pour  $n \leftarrow 0$  Soit  $a_0 \in \mathbb{R}$  fixé quelconque tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, a_0 x^0 = 0$  Alors  $a_0 = 0$

◇ Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé quelconque tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie Soient  $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$  Posons  $Q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = 0$  D'une part

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{Q(2x)}_{=0} - 2^{n+1} \underbrace{Q(x)}_{=0} = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, Q(2x) - 2^{n+1}Q(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k (2x)^k - 2^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k (2^k - 2^{n+1}) x^k\end{aligned}$$

Le terme d'indice  $n+1$  s'annule, si bien que l'on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(2x) - 2^{n+1}Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k (2^k - 2^{n+1}) x^k$$

Qui est une fonction polynômiale de degré  $\leq n$ , ce qui permet d'appliquer  $\mathcal{P}(n)$  pour  $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \leftarrow (a_k (2^k - 2^{n+1}))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

Donc  $\forall x \in \llbracket 0, n \rrbracket : a_k (2^k - 2^{n+1}) = 0$  et puisque  $2^k - 2^{n+1} \neq 0$ , on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0$$

L'expression de  $Q$  devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k x^k}_{=0} + a_{n+1} x^{n+1} = 0$$

Donc en particulierisant pour  $x \leftarrow 1$ , on en déduit que  $a_{n+1} = 0$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

□

## 7 Montrer par analyse/synthèse qu'une fonction réelle d'une variable réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  fixée quelconque.

◇ Analyse : Supposons que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se décompose de manière unique en  $f = g + h$  avec  $g$  paire et  $h$  impaire (i.e.  $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$  et  $h(-x) = -h(x)$ ). Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé quelconque. Calculons  $f(-x)$  :

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

Par demi somme, nous avons donc

$$\begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$$

Ainsi, si une telle décomposition existe, c'est

$$\begin{cases} g : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

◇ Synthèse : Posons

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

Remarquons, d'une part que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Vérifions si les fonctions  $g$  et  $h$  vérifient les conditions de parité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \text{ ainsi } g \text{ est paire.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \text{ ainsi } h \text{ est impaire}$$

□

## 8 Illustration graphique de certaines identités trigonométriques

*Démonstration.*

□

## 9 Technique de résolution des équations trigonométriques du type $A \cos x + B \sin x = C$

*Démonstration.* Étudions l'équation d'inconnue  $x$

$$A \cos x + B \sin x = C$$

★ Si  $A = 0$  et  $B = 0$

◇ Si  $C = 0$  l'équation admet  $\mathbb{R}$  pour ensemble de solutions

◇ Sinon, l'équation n'admet pas de solutions

★ Sinon,

Factorisons par  $\sqrt{A^2 + B^2}$  (ce qui a un sens car  $(A, B) \neq (0, 0) \implies \sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$ )

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Le nombre complexe  $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + i \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  est de module 1, donc  $\exists \varphi \in \mathbb{R}$  tel que

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\cos \varphi} + i \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\sin \varphi}$$

Ainsi,

$$(\cos \varphi \cos x - \sin \varphi \sin x) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donc

$$\cos(\varphi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\diamond \text{ Si } \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leq 1$$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} &\iff \begin{cases} \phi + x \equiv \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} [2\pi] \\ \text{ou} \\ \phi + x \equiv -\arccos \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \bigcup \left\{ \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ -\arccos \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

◇ Sinon, l'équation n'admet aucune solution

□

## 10 Étude complète de la fonction tangente, tracé du graphe et en déduire celui de cotangente.

*Démonstration.*

□

## 11 Expression de $\sin \theta$ , $\cos \theta$ , $\tan \theta$ en fonction de $\tan \frac{\theta}{2}$

*Démonstration.* Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Posons  $u = \tan \frac{\theta}{2}$

$$\diamond \tan \theta = \frac{2u}{1-u^2}$$

En utilisant la formule classique de trigonométrie

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

On obtient, avec  $(a, b) \leftarrow (\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$\diamond \cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + u^2} - 1 \\ &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{aligned}$$

$$\diamond \sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \cos \theta \tan \theta \\ &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \times \frac{2u}{1-u^2} \\ &= \frac{2u}{1+u^2} \end{aligned}$$

□

## 12 Preuve des formules du type $\cos p + \cos q = \dots$

*Démonstration.* Partons des formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \quad (\spadesuit)$$

Si bien qu'en posant

$$\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

D'où, en injectant dans ()

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

□