

Khôlles de Mathématiques - Semaine 29

George Ober

22 juin 2024

1 Définition et cardinal du sous-groupe alternée \mathcal{A}_n

Le noyau d'un morphisme de groupe étant toujours un sous-groupe du groupe de départ, le groupe alterné d'indice $n \in \mathbb{N}^*$ est le sous groupe de (\mathcal{S}_n, \circ) obtenu en considérant le noyau du morphisme signature.

$$\mathcal{A}_n = \ker \varepsilon$$

\mathcal{A}_n est de cardinal $\frac{n!}{2}$.

Démonstration. Fixons $\tau = (1, 2)$ Considérons

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \rightarrow & \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ \tau \end{array} \right.$$

- Φ est bien définie : soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$ fixée quelconque. Par propriété de morphisme de la signature, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau) = 1 \times (-1) = -1$ donc $\sigma \circ \tau \notin \mathcal{A}_n$ donc $\Phi(\sigma) \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$
- De plus, Φ est bijective en considérant

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n & \rightarrow & \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ \tau \end{array} \right.$$

$$\Psi \circ \Phi = \text{Id}_{\mathcal{A}_n} \text{ et } \Phi \circ \Psi = \text{Id}_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n}$$

Ainsi,

$$|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n| - |\mathcal{A}_n|$$

$$\text{D'où } |\mathcal{A}_n| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{2} = \frac{n!}{2}$$

□

2 Caractérisation des bases par le déterminant

Démonstration.

- ★ Supposons que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ est une base de E .

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \times \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} = 1 \implies \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \neq 0$$

- ★ Supposons qu'il existe une base \mathcal{B} telle que $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \neq 0$ Si \mathcal{B}' était liée, le déterminant serait nul, donc en contraposant, \mathcal{B}' n'est pas liée, et est de cardinal n , c'est une base.

□

3 Définition du déterminant d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

$$\exists! \lambda \in \mathbb{K} : \forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

On appelle ce λ le déterminant de l'endomorphisme f .

Démonstration. \diamond Existence

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E fixée. L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ll} E^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{array} \right.$$

est

— Une forme n -linéaire : soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ fixés quelconques $(u, v, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \varphi(v + \lambda.w, u_2, \dots, u_n) &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v + \lambda.w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v) + \lambda.f(w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \text{ par linéarité de } f \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v), f(u_2), \dots, f(u_n)) + \lambda \times \det_{\mathcal{B}_0}(f(w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\ &\quad \text{par linéarité de } \det_{\mathcal{B}_0} \\ &= \varphi(v, u_2, \dots, u_n) + \lambda \times \varphi(w, u_2, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, φ est linéaire en son premier argument. On prouve de même que φ est linéaire en ses $n - 1$ autres arguments, ce qui montre sa n -linéarité.

— Alternée Soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ tels qu'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i \neq j$ et $u_i = u_j$ alors on a aussi $f(u_i) = f(u_j)$, si bien que le caractère alterné de $\det_{\mathcal{B}_0}$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = 0$$

Donc $\varphi \in \wedge^n_{\mathbb{K}} = \text{Vect}\{\det_{\mathcal{B}_0}\}$

Donc

$$\exists \lambda_{\mathcal{B}_0} \in \mathbb{K} : \varphi = \lambda_{\mathcal{B}_0} \cdot \det_{\mathcal{B}_0}$$

d'où,

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda_{\mathcal{B}_0} \times \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, \dots, u_n)$$

Soit \mathcal{B} une base de E fixée quelconque. Nous savons que

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0 \cdot \det_{\mathcal{B}_0}$$

Donc en multipliant la relation précédente par $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0$,

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \underbrace{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0 \times \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n))}_{\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))} = \lambda_{\mathcal{B}_0} \times \underbrace{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0 \times \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, \dots, u_n)}_{\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)}$$

Par conséquent, $\lambda_{\mathcal{B}_0}$ convient pour toute base \mathcal{B} .

\diamond Unicité Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Particularisons pour $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_0$ et $(u_1, \dots, u_n) \leftarrow \mathcal{B}_0$

$$\det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_0 = \lambda \times 1$$

Donc $\lambda = \det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ Or, en particulierisant la relation définissant $\lambda_{\mathcal{B}_0}$ pour $(u_1, \dots, u_n) \leftarrow \mathcal{B}_0$

$$\lambda_{\mathcal{B}_0} = \det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

donc $\lambda = \lambda_{\mathcal{B}_0}$

□

4 Le déterminant est un morphisme de $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ dans (\mathbb{K}, \times) , application à la caractérisation des automorphismes

- (i) $\forall (f, g) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)^2, \det(f \circ g) = \det f \times \det g$
(ii) $\forall f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \iff \det f \neq 0$

Démonstration. Fixons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

1. Soient $(f, g) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)^2$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) &= \det_{\mathcal{B}}((f \circ g)(e_1), \dots, (f \circ g)(e_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), \dots, f(g(e_n))) \\ &= \det f \times \det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \dots, g(e_n)) \text{ par définition du déterminant d'un endomorphisme} \\ &= \det f \times \det g \times \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det f \times \det g \end{aligned}$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

— Supposons $f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ Appliquons la relation de morphisme pour $g \leftarrow f^{-1}$

$$\underbrace{\det(f \circ f^{-1})}_{=\det \text{Id}_E} = \det f \times \det f^{-1}$$

Or, $\det \text{Id}_E = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ si bien que $\det f \times \det f^{-1} = 1$ on en déduit que $\det f \neq 0$ et d'autre part que $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$

— Supposons que $\det f \neq 0$ Par définition du déterminant d'un endomorphisme

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det f \times \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det f$$

Donc $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \neq 0$ si bien que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E , donc f envoie une base sur une base : c'est un automorphisme. □

5 Produit d'une matrice carrée par la transposée de sa co-matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \times (\text{com}A)^T = (\text{com}A)^T \times A = \det A \times I_n \quad (1)$$

Démonstration. \diamond Montrons que $A \times (\text{com}A)^T = \det A \times I_n$ Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixés quelconques

$$\begin{aligned} [A \times (\text{com}A)^T]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} [(\text{com}A)^T]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} (\text{com}A)_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} \times (-1)^{k+j} \Delta_{j,k} \end{aligned}$$

★ Supposons que $i = j$ nous obtenons

$$[A \times (\text{com}A)^T]_{i,i} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} \times (-1)^{k+i} \Delta_{i,k} = \det A$$

D'après la formule du développement du déterminant de A selon la i -ième ligne.

- ★ Supposons que $i \neq j$ La formule peut être interprétée comme le développement selon la i -ième ligne du déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j -ième ligne par sa i -ième ligne :

$$[A \times (\text{com}A)^T]_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} \times (-1)^{k+j} \Delta_{j,k}$$

$$= \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Car les lignes d'indice i et j sont identiques. Ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $[A \times (\text{com}A)^T]_{i,j} = \delta_{i,j} \times \det A$ Donc

$$[A \times (\text{com}A)^T]_{i,j} = \det A \times I_n$$

◇ On montre de même le produit dans l'autre sens. □

6 Formule de Cramer

Le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et de paramètre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit "de Cramer" s'il admet une unique solution, à savoir si A est une matrice inversible. Dans ce cas, la solution peut être exprimée explicitement par la formule $A^{-1}B$ qui donne la formule dite de Cramer :

$$\left(\frac{|B | C_2 | \cdots | C_n|}{\det A}, \dots, \frac{|C_1 | \cdots | C_{i-1} | B | C_{i+1} | \cdots | C_n|}{\det A}, \dots, \frac{|C_1 | C_2 | \cdots | B|}{\det A} \right) \quad (2)$$

où $(C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n$ sont les colonnes de A .

Démonstration. Partons de l'expression de l'inverse avec la comatrice :

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} (\text{com}A)^T B$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
X_{i,1} &= \frac{1}{\det A} [(\text{com} A)^T B]_{i,j} \\
&= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n [(\text{com} A)^T]_{i,k} B_{k,1} \\
&= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n (\text{com} A)_{k,i} B_{k,1} \\
&= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \Delta_{k,i} B_{k,1}
\end{aligned}$$

qui s'interprète comme le développement selon la i -ième colonne de la matrice

$$= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_{i-1} & B & C_{i+1} & \dots & C_n \end{vmatrix}$$

□

7 Calcul du déterminant de Vandermonde

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, V(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \quad (3)$$

Démonstration. Posons

$$\mathcal{P}(n) : \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

◇ Initialisation $n \leftarrow 2$ Soient $(a_0, a_1) \in \mathbb{K}^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_0$$

◇ Hérédité, soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soient $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+2}$ fixés quelconques.

- Supposons que les éléments de $\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ ne sont pas tous deux à deux distincts. Alors le déterminant à calculer possède deux colonnes identiques donc il est nul, et la formule avec laquelle il doit coïncider s'annule également, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie dans ce cas
- Supposons que les éléments de $\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ sont tous distincts. Notons

$$Q(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & X \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & X^n \\ a_0^{n+1} & a_1^{n+1} & a_2^{n+1} & \dots & a_n^{n+1} & X^{n+1} \end{vmatrix}$$

Sachant que le déterminant d'une matrice est une somme de produits de coefficients de la matrice, puisque tous les coefficients du déterminant $Q(X)$ sont des polynômes en X , $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ (car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau et donc stable par produit). De plus, en développant le déterminant $Q(X)$ selon sa dernière colonne, on observe d'une part que $\deg Q \leq n+1$ et d'autre part que le coefficient de X^{n+1} est le cofacteur de X^{n+1} qui est, d'après $\mathcal{P}(n)$

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Et, comme tous les a_i sont distincts, ce coefficient est non-nul, donc $\deg Q = n + 1$
De plus, $Q(a_0) = 0, Q(a_1) = 0, \dots, Q(a_n) = 0$ car le déterminant présente dans chacun des calculs deux colonnes égales. Nous en déduisons que Q admet au moins $(n + 1)$ racines deux à deux distinctes, or son degré est exactement $n + 1$ donc - il n'y a aucune autre racine - elles sont toutes simples

La forme factorisée de Q est donc

$$Q(X) = \underbrace{\left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right)}_{\text{coefficient dominant}} \times \underbrace{\prod_{k=0}^n (X - a_k)}_{n+1 \text{ racines simples}}^1$$

Donc

$$\begin{aligned} V(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) &= Q(a_{n+1}) \\ &= \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right) \times \prod_{k=0}^n (a_{n+1} - a_k) \\ &= \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right) \prod_{\substack{0 \leq i < j \\ j=n+1}}^n (a_j - a_k) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie

□