Khôlles de Mathématiques - Semaine 24

Hugo Vangilluwen, George Ober

22 Avril 2024

Pour cette semaine, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' et F' des sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F.
Nous rappelons que $\dim\{0_E\} = 0$ et que $\{0_E\} = \mathrm{Vect}\emptyset$.

1 Existence d'un supplémentaire en base finie

Pour tout sous-espace vectoriel de E, il existe un sous-espace vectoriel complémentaire.

Démonstration.
Théorème de la base incomplète (admis ici mais démontré dans le cours) : pour toute famille libre de E, nous pouvons y adjoindre une partie d'une famille quelconque génératrice de E (généralement une base, la base canonique si elle a un sens) pour en faire une base de E.

Posons $n = \dim E$ et $p = \dim E'$. Ainsi, il existe $(e_1, \dots, e_p)$ base de E'.
Appliquons le théorème de la base incomplète pour cette famille. Il existe $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ $n-p$ vecteurs de E tel que $(e_1, \dots, e_n)$ est un base de E.
Posons $E'' = \mathrm{Vect}\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ et vérifions qu'il est complémentaire à E'.

- Par définition de Vect, E'' est un sous-espace vectoriel .
- Trivialement, $E' + E'' = E$.
- $\{0_E\} \subset E' \cap E''$ car E' et E'' sont deux sous-espaces vectoriels .
- Soit $x \in E' \cap E''$.
  $X \in E' \implies \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$
  $X \in E'' \implies \exists(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p} : x = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$
  Par différence, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} (-\lambda_i)\, e_i = 0_E$.
  Or $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base de E donc $\forall i \in [\![1;p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.
  donc $x = 0_E$. Ainsi, $E' \cap E'' \subset \{0_E\}$.

□

2 Dimension de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = \dim E \times \dim F \tag{1}$$

Démonstration. Notons $n = \dim E$ et $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de E. Considérons

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \to & F^n \\ f & \mapsto & \underbrace{(f(e_i)))_{1\leqslant i\leqslant n}}_{\text{évaluation de f en la base choisie}} \end{array} \right.$$

- φ est linéaire.
- φ est bijective d'après le théorème de création des applications linéaires qui établit que pour toute famille de n vecteurs de F, il existe une unique application linéaire de E dans F envoyant la base $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sur cette famille.

Ainsi, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et F^n sont isomorphes. F^n est de dimension finie, ce qui conclut. □

3 Formule de Grassman

Supposons E de dimension finie.
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels . Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2 \tag{2}$$

Démonstration. Commençons par prouver une version simplifier de la somme directe. Supposons que E_1 et E_2 sont en somme directe.
Fixons $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2.

Alors $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ engendre $E_1 + E_2$. Or $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est finie donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Posons $n = \dim E_1$ et $p = \dim E_2$. Notons $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ la base $\mathcal{B}_1$ et $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ la base $\mathcal{B}_2$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p}$ fixés quelconquesfixés quelconques $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i = 0_E$.
Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} (-\mu_i) f_i$. Or $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E_1$ et $\sum_{i=1}^{n} (-\mu_i) e_i \in E_2$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Donc $\lambda = \tilde{0}$. De même, $\mu = \tilde{0}$.
Donc $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est libre.

Ainsi, $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de $E_1 \oplus E_2$. Donc $\dim E_1 \oplus E_2 = |(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim E_1 + \dim E_2$.

Enlevons l'hypothèse que E_1 et E_2 sont en somme directe.
$E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E_2 et E_2 est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie donc il existe E_2' sous-espace vectoriel de E_2 tel que $E_2 = (E1 \cap E_2) \oplus E_2'$.
Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$

* E_1 et E_2' sont en somme directe.

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2' &= E_1 \cap (E_2' \cap E_2) \text{ car } E_2' \subset E_2 \\ &= (E_1 \cap E_2) \cap E_2' \text{ car } \cap \text{ est associative et commutative} \\ &= 0_E \text{ car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont en somme directe et } E_2' \text{ sev} \end{aligned}$$

* $E_1 + E_2 \subset E_1 + E_2'$
  Soit $x \in E_1 + E_2$. Alors $\exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x = x_1 + x_2$.
  Or $x_2 \in E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$ donc $\exists (x_{21}, x_2') \times E_2' : x_2 = x_{21} + x_2'$.
  D'où $x = \underbrace{x_1 + x_{21}}_{\in E_1} + \underbrace{x_2'}_{\in E_2} \in E_1 + E_2$.
* Trivialement, $E_1 + E_2' \subset E_1 + E_2$ (car $E_2' \subset E_2$).

Ainsi, E_1 et E_2' (car sev) étant de dimension finie, $\dim E_1 \oplus E_2' = \dim E_1 + \dim E_2'$.
De plus, $\dim E_2 = \dim (E_1 \cap E_2) \oplus E_2' = \dim E_1 \cap E_2 + \dim E_2'$.
Donc $\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$. □

4 Caractérisation injectivité/bijectivité/surjectivité par le rang

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

(i) Si E est de dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{rg} f = \dim E$$

(ii) Si F est de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{rg} f = \dim F$$

(iii) Si E et F sont de même dimension finie

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ sujective}$$

Démonstration.

(i) Supposons E de dimension finie, fixons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E (avec $n = \dim E$) Supposons f injective :

$$\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Vect}\,\{f(e_1) \dots f(e_n)\}$$

Donc $(f(e_1), \dots f(e_n))$ est génératrice. $(f(e_1), \dots f(e_n))$ est de plus libre car f est injective. Donc c'est une base, donc

$$\dim \mathrm{Vect}\,\{f(e_1) \dots f(e_n)\} = n = \dim E$$

donc $\mathrm{rg} f = \dim E$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{rg} f = \dim E = n$. Alors

$$n = \mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Vect}\,\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

Donc $(f(e_1), \dots f(e_n))$ est génératrice de cardinal n, égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré. C'est donc une base du sous-espace vectoriel engendré. Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, donc f est injective.

(ii) Supposons F de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im} f = F \iff \dim \mathrm{Im} f = \dim F$$

(iii) Supposons E et F de même dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{rg} f = \dim E \iff \mathrm{rg} f = \dim F \iff f \text{ surjective}$$

D'où la bijectivité.

$\square$