

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 13

Hugo Vangilluwen, Ober George

28 décembre 2023

## 1 Théorème de composition des limites

Soient  $g$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$  telle que  $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ .

Si  $\left. \begin{array}{l} g \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } b \in \overline{\mathcal{D}_g} \\ f \text{ admet } b \text{ comme limite en } a \in \mathcal{D}_f \end{array} \right\}$  alors  $g \circ f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$ .

*Démonstration.* Traitons le cas où  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fq.

Appliquons la définition de  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$  pour cet  $\varepsilon$  :

$$\exists \eta_g \in \mathbb{R}_+^* : \forall y \in \mathcal{D}_g, |y - b| \leq \eta_g \implies |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$$

Appliquons la définition de  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  pour cet  $\eta_g$  :

$$\exists \eta_f \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \eta_f \implies |f(x) - b| \leq \eta_g$$

Posons  $\eta = \eta_f$ .

Soit  $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$  fq tq  $|x - a| \leq \eta$ . Or  $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$  donc  $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathcal{D}_f$ .

Ainsi,  $x \in \mathcal{D}_f$  et  $|x - a| \leq \eta_f$  d'où  $|f(x) - b| \leq \eta_g$  d'où  $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$ . Donc

$$g \circ f \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

□

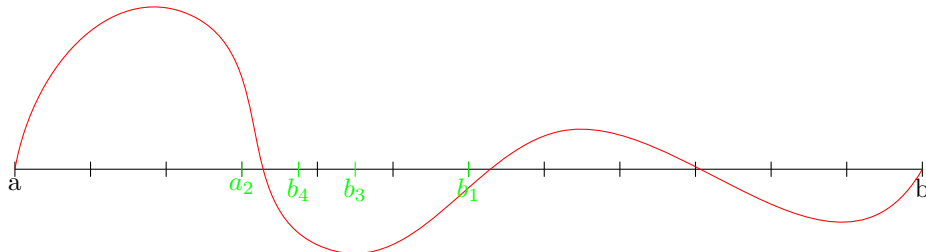
## 2 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction continue  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $a < b$ .

Si  $f(a)f(b) \leq 0$  alors  $\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$ .

On rencontre aussi : Si  $f(a)f(b) < 0$  alors  $\exists c \in ]a; b[ : f(c) = 0$ .

*Démonstration.* La démonstration repose sur la technique de la dichotomie.



Soient  $a, b, f$  de tels objets. Procédons à la construction des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Posons  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et  $c_0 = \frac{a+b}{2}$  (le milieu du segment  $[a; b]$ ). Nous avons, par hypothèse  $f(a_0)f(b_0) \leq 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Supposons les trois suites construites au rang  $n$  telles que  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$  et  $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$  (milieu de  $[a_n; b_n]$ ).

- Si  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ , posons 
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \\ c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{cases}$$
- Sinon  $f(a_n)f(b_n) > 0$ . Or  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ , donc  $f(a_n)^2 f(b_n)f(c_n) \leq 0$ . Donc  $f(b_n)f(c_n) \leq 0$ .  
Posons 
$$\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \\ c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{cases}$$

Ainsi, nous avons bien construits  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  telles que  $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$  et  $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$  (milieu de  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ ).

Par récurrence immédiate,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  d'où  $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc les suites  $a$  et  $b$  sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite. Notons la  $c$ .

D'après le bonus de ce même théorème,  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c \leq b_n$  donc pour  $n = 0$ ,  $a \leq c \leq b$ . Ainsi,

$$c \in [a; b]$$

Par ailleurs,  $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n)f(b_n) \leq 0$ . Par continuité de  $f$  sur  $[a; b]$  donc en  $c$ ,  $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$  et  $f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ . Par passage à limite dans l'inégalité,

$$f(c) \times f(c) \leq 0$$

Or  $f(c)^2 \geq 0$ , d'où  $f(c)^2 = 0$ . Ainsi,

$$f(c) = 0$$

Donc  $c$  est un point fixe.

□

### 3 Théorème de Weierstraß

L'image d'un segment par une fonction continue sur ce segment est un segment : soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  alors  $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f([a, b]) = [f(x_1), f(x_2)]$

*Démonstration.* — *Étape 1* Montrons que  $f([a, b])$  est majoré.

Par l'absurde, supposons que  $f([a, b])$  n'est pas majoré

Alors  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b] : f(x) > A$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Appliquons (3) pour  $A \leftarrow n : \exists x \in [a, b] : f(x) > n$ , et fixons un tel  $x$  que l'on note  $x_n$ . Nous venons de créer la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  qui vérifie :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{théorème de divergence par minoration}} f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée (à valeurs dans  $[a, b]$ ) donc, selon le théorème de Bolzano-Weierstraß :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strict. croissante tel que } (x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \ell$$

Donc, en passant à la limite :  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b \implies a \leq \ell \leq b \implies \ell \in [a, b]$

Par continuité de  $f$  sur  $[a, b]$ , donc en  $\ell$ ,  $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ .

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une sous suite de } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right.$$

donc  $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ , tend vers  $+\infty$ , ce qui est absurde, donc  $f$  est majorée.

On fait de même pour la minoration.

— *Étape 2* : Montrons que  $f([a, b])$  admet un pge et un ppe.

Montrons donc que  $f([a, b])$  admet une borne sup, qui, puisque c'est une valeur atteinte, deviendra un max.

$$f([a, b]) \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{une partie de } \mathbb{R} \\ \text{non vide car contient } f(a) \\ \text{majorée d'après l'étape 1} \end{array} \right.$$

$f([a, b])$  admet donc une borne supérieure  $\sigma$ .

Appliquons la caractérisation séquentielle de la borne supérieure :

$$\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \in f([a, b])^{\mathbb{N}} : (y_n) \text{ converge vers } \sigma$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in f([a, b]) \implies \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) = y_n$$

Fixons un tel  $x_n$  pour tout  $y_n$ . On a donc construit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}} : f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$

De plus,  $(x_n)$  est bornée (à valeurs dans  $[a, b]$ ) donc, selon le théorème de Bolzano-Weierstraß :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \text{strict. croissante tel que } (x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \ell$$

Donc, en passant à la limite :  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b \implies a \leq \ell \leq b \implies \ell \in [a, b]$

Par continuité de  $f$  sur  $[a, b]$ , donc en  $\ell$ ,  $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ .

Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une sous suite de } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma \end{array} \right.$$

Par unicité de la limite,  $\sigma = f(\ell)$ .

On montre de même qu'il existe  $\ell' \in [a, b] : f(\ell') = \inf f([a, b])$

Ainsi,  $f(\ell) = \max f([a, b])$  et  $f(\ell') = \min f([a, b])$

— *Étape 3* : Montrons que  $f([a, b]) = [f(\ell'), f(\ell)]$ .

Par la construction précédente,  $\forall y \in f([a, b]), y \in [f(\ell'), f(\ell)]$ .

Ainsi,  $f([a, b]) \subset [f(\ell'), f(\ell)]$ .

Réciproquement, l'image par la fonction continue  $f$  du segment  $[a, b]$  qui est un intervalle est un intervalle :

$$\left. \begin{array}{l} f([a, b]) \text{ est un intervalle} \\ f(\ell) \in f([a, b]) \\ f(\ell') \in f([a, b]) \end{array} \right\} \implies [f(\ell'), f(\ell)] \subset f([a, b])$$

D'où  $[f(\ell'), f(\ell)] = f([a, b])$

□