

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 24

Hugo Vangilluwen, George Ober

22 Avril 2024

Pour cette semaine,  $\mathbb{K}$  désigne un corps commutatif,  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $E'$  et  $F'$  des sous-espaces vectoriels respectivement de  $E$  et de  $F$ .

Nous rappelons que  $\dim\{0_E\} = 0$  et que  $\{0_E\} = \text{Vect } \emptyset$ .

## 1 Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Pour tout sous-espace vectoriel de  $E$ , il existe un sous-espace vectoriel complémentaire.

*Démonstration.*

*Théorème de la base incomplète* (admis ici mais démontré dans le cours) : pour toute famille libre de  $E$ , nous pouvons y adjoindre une partie d'une famille quelconque génératrice de  $E$  (généralement une base, la base canonique si elle a un sens) pour en faire une base de  $E$ .

Posons  $n = \dim E$  et  $p = \dim E'$ . Ainsi, il existe  $(e_1, \dots, e_p)$  base de  $E'$ . Appliquons le théorème de la base incomplète pour cette famille. Il existe  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$   $n - p$  vecteurs de  $E$  tel que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .

Posons  $E'' = \text{Vect } \{e_{p+1}, \dots, e_n\}$  et vérifions qu'il est complémentaire à  $E'$ .

- \* Par définition de  $\text{Vect}$ ,  $E''$  est un sous-espace vectoriel.
- \* Trivialement,  $E' + E'' = E$ .
- \*  $\{0_E\} \subset E' \cap E''$  car  $E'$  et  $E''$  sont deux sous-espaces vectoriels.
- \* Soit  $x \in E' \cap E''$ .

$$X \in E' \implies \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$$

$$X \in E'' \implies \exists (\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p} : x = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$$

$$\text{Par différence, } \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^n (-\lambda_i) e_i = 0_E.$$

$$\text{Or } (e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \text{ est une base de } E \text{ donc } \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}.$$

$$\text{donc } x = 0_E. \text{ Ainsi, } E' \cap E'' \subset \{0_E\}.$$

□

## 2 Dimension de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  est dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = \dim E \times \dim F \quad (1)$$

*Démonstration.* Notons  $n = \dim E$  et  $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  une base de  $E$ . Considérons

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \rightarrow & F^n \\ f & \mapsto & (f(e_i))_{1 \leq i \leq n} \end{array} \right.$$

$\varphi$  est linéaire et, d'après le théorème de création des applications linéaires, bijective. Ainsi,  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  et  $F^n$  sont isomorphes.  $F^n$  est de dimension finie, ce qui conclut. □

### 3 Formule de Grassman

Supposons  $E$  de dimension finie.

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels. Alors  $E_1 + E_2$  est de dimension finie et

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2 \quad (2)$$

*Démonstration.* Commençons par prouver une version simplifiée de la somme directe. Supposons que  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe.

Fixons  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E_1$  et  $E_2$ . Alors  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  engendre  $E_1 + E_2$ . Or  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  est finie donc  $E_1 + E_2$  est de dimension finie.

Posons  $n = \dim E_1$  et  $p = \dim E_2$ . Notons  $(e_i)_{i \in [1;n]}$  la base  $\mathcal{B}_1$  et  $(f_i)_{i \in [1;p]}$  la base  $\mathcal{B}_2$ .

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}^{n+p}$  fixés quelconques tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^p \mu_i f_i = 0_E$ . Alors

$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^p (-\mu_i) f_i$ . Or  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E_1$  et  $\sum_{i=1}^p (-\mu_i) f_i \in E_2$  donc  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ . Donc  $\lambda = 0$ . De même,  $\mu = 0$ . Donc  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  est libre.

Ainsi,  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  est une base de  $E_1 \oplus E_2$ . Donc  $\dim E_1 \oplus E_2 = |(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim E_1 + \dim E_2$ .

Enlevons l'hypothèse que  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe.  $E_1 \cap E_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E_2$ . Comme  $E_2$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, il existe  $E'_2$  sous-espace vectoriel de  $E_2$  tel que  $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$ .

Montrons que  $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E'_2$ .

$$\begin{aligned} E_1 \cap E'_2 &= E_1 \cap (E'_2 \cap E_2) \text{ car } E'_2 \subset E_2 \\ &= (E_1 \cap E_2) \cap E'_2 \text{ car } \cap \text{ est associative et commutative} \\ &= 0_E \text{ car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont en somme directe et } E'_2 \text{ sev} \end{aligned}$$

Donc  $E_1$  et  $E'_2$  sont en somme directe.

$E'_2 \subset E_2$  donc  $E_1 + E'_2 \subset E_1 + E_2$ . Soit  $x \in E_1 + E_2$ . Alors  $\exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x = x_1 + x_2$ . Or  $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$  donc  $\exists (x_{21}, x'_2) \in (E_1 \cap E_2) \times E'_2 : x_2 = x_{21} + x'_2$ . D'où  $x = x_1 + x_{21} + x'_2$ . Or  $x_1 + x_{21} \in E_1$  et  $x'_2 \in E'_2$  donc  $x \in E_1 + E'_2$ .

Ainsi,  $E_1$  et  $E'_2$  étant des sous-espaces vectoriels de dimension finie,  $\dim E_1 \oplus E'_2 = \dim E_1 + \dim E'_2$ . De plus,  $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) \oplus E'_2 = \dim E_1 \cap E_2 + \dim E'_2$ . Donc  $\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$ .  $\square$

### 4 Caractérisation injectivité/bijektivité/surjectivité par le rang

Soit  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ .

(i) Si  $E$  est de dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \text{rg} f = \dim E \quad (3)$$

(ii) Si  $F$  est de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \text{rg} f = \dim F \quad (4)$$

(iii) Si  $E$  et  $F$  sont de même dimension finie

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

C'est l'accident de la dimension finie !

*Démonstration.*

- (i) Supposons  $E$  de dimension finie, fixons  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  (avec  $n = \dim E$ ) Supposons  $f$  injective :

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect} \{f(e_1) \dots f(e_n)\}$$

Donc  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice.  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est de plus libre car  $f$  est injective. Donc c'est une base, donc

$$\dim \operatorname{Vect} \{f(e_1) \dots f(e_n)\} = n = \dim E$$

donc  $\operatorname{rg} f = \dim E$ . Réciproquement, supposons que  $\operatorname{rg} f = \dim E = n$ . Alors

$$n = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Vect} \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

Donc  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de cardinal  $n$ , égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré. C'est donc une base du sous-espace vectoriel engendré. Donc  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre, donc  $f$  est injective.

- (ii) Supposons  $F$  de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \operatorname{Im} f = F \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim F$$

- (iii) Supposons  $E$  et  $F$  de même dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \operatorname{rg} f = \dim E \iff \operatorname{rg} f = \dim F \iff f \text{ surjective}$$

D'où la bijectivité. □

## 5 Théorème du rang

Si  $E$  est de dimension finie alors pour toute  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  application linéaire,

$$\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \ker f \tag{5}$$

*Démonstration.* Démontrons d'abord le lemme suivant. Soient  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  et  $H$  un supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$ . Alors  $f|_H^{\operatorname{Im} f}$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $\operatorname{Im} f$ .

Notons  $\hat{f}$  une telle restriction et corestriction. Cette application est bien définie (car  $f(H) \subset \operatorname{Im} f$ ) et  $\hat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, \operatorname{Im} f)$ .

Calculons son noyau.  $\ker \hat{f} = \{x \in H \mid \hat{f}(x) = 0_E\} = \{x \in H \mid x \in \ker f\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$  car  $H$  et  $\ker f$  sont complémentaires. Donc  $\hat{f}$  est injective.

Soit  $y \in \operatorname{Im} f$ . D'où  $\exists x \in E : y = f(x)$ . Décomposons  $x$  dans  $E = H \oplus \ker f$ ,  $\exists (x_H, x_k) \in H \times \ker f : x = x_H + x_k$ . Ainsi,  $y = f(x) = f(x_H) + f(x_k) = f(x_H)$  car  $x_k \in \ker f$ . Donc  $y$  admet un antécédent par  $\hat{f}$  (qui est  $x_H$ ). Donc  $\hat{f}$  est surjective.

Donc  $f|_H^{\operatorname{Im} f}$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $\operatorname{Im} f$ .

Supposons maintenant que  $E$  est de dimension finie. Soit  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ . D'après le théorème d'existence d'un supplémentaire en dimension finie,  $\ker f$ , étant un sous-espace vectoriel de  $E$ , admet un supplémentaire  $H$  c'est-à-dire  $E = H \oplus \ker f$ . En prenant la dimension sur cette égalité,  $\dim E = \dim \ker f + \dim H$ . D'après le lemme précédent,  $\dim H = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$ . D'où  $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \ker f$ . □

## 6 Rang d'une composition d'applications linéaires

Soit  $G$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u, v) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ . Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie alors

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v \circ u + \dim \ker v \cap \operatorname{Im} u \tag{6}$$

*Démonstration.* Considérons que  $E$  et  $F$  sont de dimension finie. Soient de tels objets. Appliquons le théorème du rang à  $v|_{\operatorname{Im} u}$  ce qui est autorisé puisque  $v|_{\operatorname{Im} u}$  est une application linéaire et  $\operatorname{Im} u$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie (car sev de  $F$ ).

$$\dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg} v|_{\operatorname{Im} u} + \dim \ker v|_{\operatorname{Im} u}$$

Ainsi,  $\ker v|_{\operatorname{Im} u} = \{y \in \operatorname{Im} u \mid v(y) = 0_G\} = \{y \in \operatorname{Im} u \mid y \in \ker v\} = \operatorname{Im} u \cap \ker v$  et  $\operatorname{Im} v|_{\operatorname{Im} u} = v(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} v \circ u$  (cette égalité est vraie pour deux fonctions de  $E$  dans  $F$  et de  $F$  dans  $G$  quelconques, pas forcément linéaires). Ce qui conclut. □

## 7 Caractérisation des hyperplans

Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $H$  est un hyperplan de  $E : \exists \varphi \in E^* : H = \ker \varphi$
- (ii)  $H$  admet une droite vectorielle comme supplémentaire :  $\exists a \in E \setminus \{0_E\} : H \oplus \text{Vect } \{a\} = E$

*Démonstration.* (i)  $\implies$  (ii) Supposons que  $H$  est un hyperplan de  $E$ . Appliquons la définition de l'hyperplan,  $\exists \varphi \in E^* : H = \ker \varphi$ . Par l'absurde, supposons que  $E \setminus H = \emptyset$ . Or  $H \subset E$  donc  $E = H$ . Donc  $\varphi = 0_{E^*}$  ce qui est une contradiction.

Ainsi fixons  $a \in E \setminus H$  quelconque. Montrons que  $E = H \oplus \text{Vect } \{a\}$ . Trivialement,  $\{0_E\} \subset H \cap \text{Vect } \{a\}$ . Soit  $x \in H \cap \text{Vect } \{a\}$ .  $x \in \text{Vect } \{a\}$  donc  $\exists \lambda \in \mathbb{K} : x = \lambda \cdot a$ . De plus,  $x \in H = \ker \varphi$  donc  $0_{\mathbb{K}} = \varphi(x) = \lambda \varphi(a)$ . Si  $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ , alors  $a \in \ker \varphi$  ce qui est impossible car  $a \notin H$ . Donc  $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ , d'où  $x = 0_E$ . Ainsi,  $H \cap \text{Vect } \{a\} = \{0_E\}$ .  $H$  et  $\text{Vect } \{a\}$  sont en somme directe.

Trivialement,  $H + \text{Vect } \{a\} \subset E$ . Soit  $x \in E$  fixé quelconque.  $a \notin H$  donc  $\varphi(a) \neq 0_{\mathbb{K}}$ .  $\varphi(a)$  est inversible dans  $\mathbb{K}$  d'où :

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot \varphi(a) = \varphi\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \times a\right)$$

Donc  $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \in H$ . D'où

$$x = \underbrace{x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a}_{\in H} + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a}_{\in \text{Vect } \{a\}}$$

Ainsi,  $E = H + \text{Vect } \{a\}$ .

(ii)  $\implies$  (i) Supposons maintenant que  $H$  soit un sous-espace vectoriel tel que  $\exists a \in E \setminus \{0_E\} : E = H \oplus \text{Vect } \{a\}$ . Posons  $\varphi : \begin{matrix} E \\ x = h_x + \lambda_x \cdot a \end{matrix} \rightarrow \mathbb{K} \begin{matrix} \\ \mapsto \lambda_x \end{matrix}$ . Montrons que  $\varphi$  est une forme linéaire non triviale dont  $H$  est le noyau.

$\varphi$  est bien définie (car  $h_x$  et  $\lambda_x$  sont uniques), linéaire, à valeur dans le corps de base  $\mathbb{K}$  donc  $\varphi$  est une forme linéaire.  $\varphi \neq 0_{E^*}$  car  $\varphi(a) = 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ . Soit  $x \in E$  fixé quelconque. Alors  $\exists (h_x, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K} : x = h_x + \lambda_x \cdot a$ .

$$x \in \ker \varphi \iff \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}} \iff \lambda_x = 0_{\mathbb{K}} \iff x \in H$$

donc  $\ker \varphi = H$ . Donc  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

Si  $E$  est de dimension finie, alors les deux conditions sont équivalentes à

(iii)  $H$  est de codimension 1 c'est-à-dire de dimension  $n - 1$ .

(ii)  $\implies$  (iii) Il faut prendre la dimension de l'égalité  $H \oplus \text{Vect } \{a\}$ .

(iii)  $\implies$  (ii) Supposons que  $\dim H = n - 1$ . Comme  $E$  est de dimension finie,  $H$  admet un supplémentaire  $I$  dans  $E : H \oplus I = E$ . En prenant la dimension,  $\dim I = 1$ . Donc  $I$  est une droite vectorielle. D'où  $\exists a \in E : I = \text{Vect } \{a\}$ .  $a \notin H$  car sinon  $I \subset H$  ce qui contredit  $I \cap H = \{0_E\}$  ( $I$  et  $H$  sont en somme directe).  $\square$

## 8 Proportionnalité des formes linéaires ayant le même noyau

*Lemme fondamental dans l'étude des formes linéaires* Soit  $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ .

Tout vecteur de  $E$  n'appartenant pas au noyau de  $\varphi$  engendre une droite qui est supplémentaire au noyau de  $\varphi$  dans  $E$ .

$$\forall a \in E \setminus \ker \varphi, E = \ker \varphi \oplus \text{Vect } \{a\} \quad (7)$$

Deux formes linéaires non nulles  $\varphi$  et  $\psi$  ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles ce qui revient à dire que la famille  $(\varphi, \psi)$  est liée.

$$\forall (\varphi, \psi) \in (E^* \setminus \{0_{E^*}\})^2, \ker \varphi = \ker \psi \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \varphi = \lambda \cdot \psi \quad (8)$$

*Démonstration.* Commençons par prouver le lemme. Soit  $a \in E \setminus \ker \varphi$ .

Soit  $x \in E$  fixé quelconque. Exhibons la décomposition unique de  $x$  dans  $\ker \varphi + \text{Vect } \{a\}$ .

*Analyse* Supposons qu'il existe  $(x_k, \lambda) \in \ker \varphi \times \mathbb{K}$  tel que  $x = x_k + \lambda a$ . Puisque  $x_k \in \ker \varphi$ ,  $\varphi(x) = \lambda \cdot \varphi(a)$ . Or  $\varphi(a) \neq 0_{\mathbb{K}}$  (car  $a \notin \ker \varphi$ ) donc  $\varphi(a)$  est inversible dans  $\mathbb{K}$ . D'où  $\lambda = \varphi(x)/\varphi(a)$  et  $x_k = x - \varphi(x)/\varphi(a)$ .

Ainsi, sous réserve d'existence,  $\lambda$  et  $x_k$  sont uniques.

*Synthèse* Posons  $\begin{cases} \lambda &= \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \\ x_k &= x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \end{cases}$  Nous avons bien  $x = x_k + \lambda \cdot a$ ,  $\lambda \cdot a \in \text{Vect } \{a\}$  (car  $\lambda \in \mathbb{K}$ )

et  $x_k \in \ker \varphi$  (car  $\varphi(x_k) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0_{\mathbb{K}}$ ). Ainsi  $E = \ker \varphi \oplus \text{Vect } \{a\}$ .

Soient  $(\varphi, \psi) \in (E^* \setminus \{0_{E^*}\})^2$  fixés quelconques.

*Sens direct* Supposons que  $\ker \varphi = \ker \psi$ .  $\varphi \neq 0_{E^*}$  donc  $\ker \varphi \neq E$  donc  $\exists a \in E : a \notin \ker \varphi$ . Appliquons la lemme ci-dessus :

$$\begin{aligned} E &= \begin{matrix} \ker \varphi \\ \parallel \\ \ker \psi \end{matrix} \oplus \text{Vect } \{a\} \rightarrow \mathbb{K} \\ \varphi : x &= \left( x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \mapsto \varphi(x) \\ \psi : x &= \left( x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \mapsto \psi(x) \end{aligned}$$

Or  $\left( x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \right) \in \ker \psi$  donc  $\psi(x) = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\varphi(x)$ . Ainsi,  $\psi = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\varphi$ . Donc  $\varphi$  et  $\psi$  sont proportionnelles.

*Sens réciproque* Supposons que  $\varphi$  et  $\psi$  sont proportionnelles. Alors  $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \varphi = \lambda\psi$ .  $\varphi = \lambda\psi \implies \ker \psi \subset \ker \varphi$  et  $\psi = \lambda^{-1}\varphi \implies \ker \varphi \subset \ker \psi$ . Ce qui donne l'égalité.  $\square$

## 9 Intersection d'hyperplans

Soit  $\varphi \in E^*$  une forme linéaire *non nulle*. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $p \in \mathbb{N}$ , alors

$$\dim_{\mathbb{K}} F \cap \ker \varphi = \begin{cases} p & \text{si } F \subset \ker \varphi \\ p-1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

En particulier, on a toujours  $\dim_{\mathbb{K}} F \cap \ker \varphi \geq p-1$

Supposons que  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $(H_i)_{i \in [1, m]}$ ,  $m$  hyperplans de  $E$ . Alors

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^m H_i \geq n - m \quad (10)$$

*Démonstration.* Si  $F \subset \ker \varphi$ ,  $F \cap \ker \varphi = F$  donc  $\dim F \cap \ker \varphi = p$

Sinon, il existe  $a \in F$  tel que  $a \notin \ker \varphi$ . Ainsi,

$$\text{Vect } \{a\} \oplus \ker \varphi = E$$

Montrons alors que  $F = \text{Vect } \{a\} \oplus (F \cap \ker \varphi)$ .

$$\text{Vect } \{a\} \cap (F \cap \ker \varphi) = \underbrace{\text{Vect } \{a\} \cap F \cap \ker \varphi}_{=\text{Vect } \{a\}} = \text{Vect } \{a\} \cap \ker \varphi = \{0_E\}$$

car les deux espaces sont supplémentaires donc en somme directe.

Par double inclusion, montrons que  $\text{Vect } \{a\} + (F \cap \ker \varphi) = F$ . Pour l'inclusion directe, remarquons que  $a \in F$  donc  $\text{Vect } \{a\} \subset F$  or  $F \cap \ker \varphi \subset F$  donc leur somme est bien incluse  $\text{Vect } \{a\} + (F \cap \ker \varphi) \subset F$ . Réciproquement, soit  $x \in F$  fixé quelconque. Puisque  $\text{Vect } \{a\} \oplus \ker \varphi = E$

$$\exists (\lambda, x_K) \in \mathbb{K} \times \ker \varphi : x = \lambda \cdot a + x_K$$

De plus,  $x_K = x - \lambda \cdot a \in F$  car  $(a, x) \in F^2$  donc

$$x = \underbrace{\lambda \cdot a}_{\in \text{Vect } \{a\}} + \underbrace{x_K}_{\in F \cap \ker \varphi} \in \text{Vect } \{a\} + (F \cap \ker \varphi)$$

D'où l'inclusion réciproque.

Donc  $F = \text{Vect}\{a\} \oplus (F \cap \ker \varphi)$  en passant à la dimension :

$$\underbrace{\dim F}_{=p} = \underbrace{\dim \text{Vect}\{a\}}_{=1} + \dim(F \cap \ker \varphi)$$

Donc  $\dim(F \cap \ker \varphi) = p - 1$ .

Considérons la propriété  $\mathcal{P}(\cdot)$  définie pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  par :

$$\mathcal{P}(m) : \text{“ pour tous } H_1, \dots, H_m \text{ hyperplans de } E, \dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^m H_i \geq n - m \text{”}$$

Soit  $H_1$  un hyperplan de  $E$  fixé quelconque. D'après la caractérisation des hyperplans en dimension finie,

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^1 H_i = \dim_{\mathbb{K}} H_1 = n - 1 \geq n - 1$$

Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  fixé quelconque tel que  $\mathcal{P}(m)$  est vraie. Soient  $H_1, \dots, H_m$  et  $H_{m+1}$   $m + 1$  hyperplans de  $E$ . D'après la définition d'un hyperplan, il existe  $\varphi \in E^*$  non nulle telle que  $H_{m+1} = \ker \varphi$ .

Appliquons donc le lemme précédent pour  $F \leftarrow \bigcap_{i=1}^m H_i$  (autorisé car c'est un sous espace de l'espace  $E$ , qui est de dimension finie, donc ses sous espaces les sont aussi) et  $\varphi \leftarrow \varphi$  (autorisé car c'est une forme linéaire non nulle) :

$$\dim_{\mathbb{K}} \underbrace{\left( \bigcap_{i=1}^m H_i \right) \cap \ker \varphi}_{= \left( \bigcap_{i=1}^m H_i \right) \cap H_{m+1}} \geq \dim_{\mathbb{K}} \left( \bigcap_{i=1}^m H_i \right) - 1 \quad \underbrace{\geq n - m - 1}_{\text{en appliquant } \mathcal{P}(m) \text{ pour } H_1, \dots, H_m}$$

Donc par associativité de l'intersection,  $\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{m+1} H_i \geq n - (m + 1)$ . Donc  $\mathcal{P}(m + 1)$  est vraie.  $\square$