# Khôlles de Mathématiques - Semaine 30

Hugo Vangilluwen, George Ober

8 juin 2024

Pour cette semaine, $E$ est un ensemble fini de cardianl $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

## 1 $p$-partage d'un ensemble $E$ et leur dénombrement

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un $p$-partage de $E$ est un $p$-liste $(A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{P}(E)^p$ de parties de $E$ (éventuellement vide), deux à deux disjointes qui recouvrent $E$ c'est-à-dire telles que t :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!], i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{p} A_i = E \tag{1}$$

Soient $(n_1, \dots n_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $n = n_1 + \dots + n_p$ est un $p$-partage de $E$ tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!],\ |A_i| = n_i$$

Le nombre de $p$-partage de type $(n_1, \dots, n_p)$ est :

$$\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{p} n_i!} \tag{2}$$

*Démonstration.* Considérons les $p$-partages de type $(n_1, \dots, n_p)$ et appliquons le principe des choix successifs :

$$\left( \underbrace{A_1}_{\binom{n}{n_1} \text{ choix}}, \underbrace{A_2}_{\binom{n}{n_2} \text{ choix}}, \underbrace{A_3}_{\binom{n}{n_3} \text{ choix}}, \dots, \underbrace{A_p}_{\binom{n}{n_p} \text{ choix}} \right)$$

donc il y a

$$\frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdots \frac{\cancel{(n-(n_1+\dots+n_{p-1})!}}{n_p!\underbrace{(n_1+\dots+n_p)!}_{=0!}}$$

Donc, au total, il y a $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_p!}$ $p$-partages. $\square$

## 2 Une probabilité conditionnelle est une probabilité

Soit $B$ un évènement de probabilité non nulle. L'application $\mathbb{P}_B$

$$\mathbb{P}_B \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \mapsto & [0;1] \\ A & \to & \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array} \right. \tag{3}$$

est une probabilité sur sur $\Omega$.

*Démonstration.*

- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ fixé quelconque.
  On a $\emptyset \subset A \cap B \ \subset B$ donc par croissance de la probabilité, $0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$. En divisant par $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $0 \leqslant \mathbb{P}_B(A) \leqslant 1$. Donc $\mathbb{P}_B$ est *bien définie.*
- $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cup B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
- Soient $(A, A') \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ fixés quelconques tels que $A$ et $A'$ sont incompatibles.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_B(A \sqcup A') &= \frac{\mathbb{P}(B \cap (A \sqcup A'))}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}((B \cap A) \sqcup (B \cap A'))}{\mathbb{P}(B)} \text{ car } (B \cap A) \cap (B \cap A') \subset A \cap A' = \emptyset \\
&= \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A')}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A')
\end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi, $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité sur $\Omega$. □

# 3 Si $A$ et $B$ sont des événements indépendants, alors $A$ et $\overline{B}$ aussi

*Démonstration.* Supposons donc que $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ et $0 \leqslant \mathbb{P}(B) \leqslant 1$. D'une part, $\{B, \bar{B}\}$ constitue un système complet donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\
\iff \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\
\iff \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\
\iff \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) &= \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\
\iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\bar{B}\right) &= \mathbb{P}(A \cap \bar{B})
\end{aligned}$$

Donc $A$ et $\bar{B}$ sont indépendants □

# 4 Formule des probabilités composées

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \tag{5}$$

*Démonstration.* Procédons par récurrence. Soient $(A_1, \dots, A_n)$, $n$ événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \neq 0$. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, posons

$$\mathcal{H}_k : \text{"}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)\text{"}$$

⋆ Initialisation, $k \leftarrow 2$ d'une part, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset A_1$, donc par croissance de $\mathbb{P}$,

$$0 < \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \mathbb{P}(A_1)$$

Si bien que $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$ donc la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{A_1}$ a un sens. D'où, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)$$

Donc $\mathcal{H}_2$ est vérifiée.

⋆ Hérédité, Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$ fixé quelconque tel que $\mathcal{H}_k$ est vérifiée.
D'abord, remarquons que $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset \bigcap_{i=1}^k A_i$ donc par croissance de $\mathbb{P}$,

$$0 < \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)$$

Si bien que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \neq 0$ donc la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_k}$ a un sens.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \cap A_{k+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^k A_i}(A_{k+1}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)\mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(A_{k+1})
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est aussi vérifiée

□

# 5 Formule des probabilités totales et formule de Bayes

*Démonstration.* Formule des probabilités totales

Soit $(A_1, \dots A_n)$ un système complet d'événements. Comme ils sont incompatibles

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$$

Le système est de plus complet donc $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = \Omega$. Donc $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = 1$.

$(A_1, \dots, A_n)$ sont aussi deux à deux incompatibles, donc $(B \cap A_1, \dots B \cap A_n)$ aussi. De plus $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \bigsqcup_{k=1}^n (B \cap A_k)$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^n (B \cap A_k)\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

De plus, en passant aux probabilités conditionnelles $(\mathbb{P}_{A_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B) \tag{6}$$

Formule de Bayes

Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilité non nulle, on a alors :

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$$

donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)} \tag{7}$$

□

# 6 Loi d'une fonction de $X$

Soit $X$ une variable alétoire sur $\Omega$ et $g$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. La loi de probabilité $Y = g(X)$ est donnée par $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) \tag{8}$$

*Démonstration.* Utilisons le système complet $(X = x)_{x\in X(\Omega)}$ associé à la variable aléatoire $X$ et la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}(Y = y) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}((Y = y)\cap(X = x))\\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}} \mathbb{P}((g(X) = y)\cap(X = x)) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)\neq y}} \mathbb{P}((g(X) = y)\cap(X = x))\end{aligned}$$

Remarquons ainsi que

⋆ Si $g(x) = y$

$$\omega \in (X = x) \implies X(\omega) = x \implies g(X(\omega)) = g(x) \implies \omega \in (g(X) = y)$$

D'où $(X = x) \subset (g(X) = y)$ donc $(g(X) = y)\cap(X = x) = (X = x)$

⋆ Sinon, si $g(x) \neq y$

$$\omega \in (X = x) \implies X(\omega) = x \implies g(X(\omega)) = g(x) \neq y \implies \omega \notin (g(X) = y)$$

Dans ce cas, $(g(X) = y)\cap(X = x) = \emptyset$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_y(\{y\}) &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}} \mathbb{P}(\underbrace{(g(X) = y)\cap(X = x)}_{=(X=x)}) + \underbrace{\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)\neq y}} \mathbb{P}((g(X) = y)\cap(X = x))}_{=0}\\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}} \mathbb{P}(X = x)\\ &= \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

□

# 7 Si $X \geqslant 0$ presque sûrement, $\mathbb{E}(X) = 0 \iff X = 0$ presque sûrement

*Démonstration.* Soit $X \geqslant 0$ presque sûrement

— Supposons que $\mathbb{E}(X) = 0$ Par hypothèse, l'évènement $(X < 0)$ est négligeable donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= \sum_{\omega\in(X=0)} \underbrace{X(\omega)}_{=0}\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in(X<0)} X(\omega)\underbrace{\mathbb{P}(\{\omega\})}_{=0} + \sum_{\omega\in(X>0)} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= \sum_{\omega\in(X>0)} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\end{aligned}$$

Soit $\omega_0 \in (X > 0)$ fixé quelconque La nullité de l'espérance donne

$$0 \leqslant X(\omega_0)\mathbb{P}(\{\omega_0\}) \leqslant \sum_{\omega\in(X>0)} X(\omega)P(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X) = 0$$

donc $X(\omega_0)\mathbb{P}(\{\omega_0\}) = 0$, or $X(\omega_0) > 0$ donc $\mathbb{P}(\{\omega_0\}) = 0$ donc

$$\mathbb{P}(X > 0) = \sum_{\omega_0\in(X>0)} \mathbb{P}(\{\omega_0\}) = 0$$

Donc $(X > 0)$ est négligeable, mais $(X < 0)$ est négligeable aussi, donc

$$0 \leqslant \mathbb{P}((X > 0)\cup(X < 0)) \leqslant \mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) = 0$$

Ainsi l'évènement contraire de $(X > 0)\cup(X < 0)$, qui est $(X = 0)$ est certain.

— Supposons $X = 0$ presque sûrement.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in(X=0)} \underbrace{X(\omega)}_{=0}\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in(X\neq 0)} X(\omega)\underbrace{\mathbb{P}(\{\omega\})}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

## 8 Calcul de l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{\omega\in X(\Omega)} \omega\mathbb{P}(X=\omega) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
\\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}p^{j+1}(1-p)^{n-1-j} \\
&= np\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}p^{j}(1-p)^{n-1-j} \\
\\
&= np(p+(1-p))^{n-1} = np
\end{aligned}$$

Pour la variance, calculons d'abord $\mathbb{E}(X^2)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \underbrace{k\binom{n}{k}}_{n\binom{n-1}{k-1}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k}_{(k-1)+1} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} (k-1)\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=2}^{n} \underbrace{(k-1)\binom{n-1}{k-1}}_{(n-1)\binom{n-2}{k-2}} p^k (1-p)^{n-k} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1) \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^{i+2} (1-p)^{(n-2)-i}}_{\text{en posant } i=k-2} + n \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} (i-p)^{(n-1)-i}}_{\text{en posant } i=k-1} \\
&= n(n-1)p^2 (p + (1-p))^{n-2} + np(p + (1-p))^{n-1} \\
&= n(n-1)p^2 + np \\
&= np((n-1)p + 1)
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np((n-1)p + 1) - n^2p^2 = np(1-p)
$$

**Calcul alternatif de $\mathbf{E^2}$** En utilisant la formule de transfert pour $f \leftarrow \begin{pmatrix} X(\Omega) = [\![0;n]\!] & \to & [\![0; n(n-1)]\!] \\ x & \mapsto & x(x-1) \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{n-2-j} \\
&= n(n-1)p^2 (p + (1-p))^{n-2} \\
&= n(n-1)p^2
\end{aligned}
$$

Donc en remarquant que

$$
\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1) + X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = n(n-1)p^2 + np
$$

Donc

$$
\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)
$$

$\square$