Khôlles de Mathématiques - Semaine 30

Hugo Vangilluwen

2 juin 2024

7 Dénombrement des surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$ et dans $[\![1;3]\!]$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il y a $|[\![1;2]\!]|^{|[\![1;n]\!]|} = 2^n$ applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$. Seules les applications constantes $\widetilde{1}$ et $\widetilde{2}$ ne sont pas surjectives. Il y a donc $2^n - 2$ surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$.

Il y a $|[\![1;3]\!]|^{|[\![1;n]\!]|} = 3^n$ applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;3]\!]$. Les applications non surjectives sont celles dont l'image n'est pas $[\![1;3]\!]$. C'est-à-dire, celles dont l'image est de cardinal 1 (les fonctions constantes $\widetilde{1}$, $\widetilde{2}$ et $\widetilde{3}$) et celles dont l'image est de cardinal 2. Ces dernières sont les surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$, $\{1;3\}$ et $\{2;3\}$. Comme ces trois ensembles ont la même taille, il y a $3 \times (2^n - 2)$ (voir résultat précédent) applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;3]\!]$ dont l'image est de cardinal 2. Ainsi, le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;3]\!]$ est $3^n - 3 - 3(2^n - 2) = 3^n - 3 \times 2^n + 3$. □

8 Lemme des bergers

Soient E, F deux ensembles finis non vides et $f : E \to F$ telle que tout élément de F possède le même nombre $k \in \mathbb{N}^*$ d'antécédents par f.
Alors $|F| = \frac{|E|}{k}$

"Pour compter les moutons, il faut compter les pattes puis diviser par quatre. "

Démonstration. Considérons la relation binaire définie sur E par :

$$\forall (x,y) \in E^2, x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Elle est réflexive, transitive et symétrique donc c'est bien une relation d'équivalence. Donc les classes d'équivalence réalise une partition de E. Nous avons $E = \coprod_{C \in E/\sim} C$ donc, en passant aux cardinaux, $|E| = \sum_{C \in E/\sim} |C|$.

Soit $x \in E$ fixé quelconque. Alors $\bar{x} = \{y \in E \mid f(x) = f(y)\} = f^{-1}(f(\{x\}))$. Par hypothèse, tous les éléments de F ont le même nombre k d'antécédents, or $f(x)$ est un singleton d'élément de F donc $|\bar{x}| = k$. Ainsi $\forall C \in E/\sim, |C| = k$.

Posons $\varphi \left| \begin{array}{ccc} E/\sim & \to & F \\ C & \mapsto & f(x) \text{ où } x \in C \end{array} \right.$. φ est bien défini car si $(x,y) \in E$ vérifie $\bar{x} = \bar{y}$ alors $f(x) = f(y)$ donc l'image par φ ne dépend pas du représentant de classe choisi. φ est surjective car soit $z \in F$, f est surjective donc $\exists x_z \in E : f(x_z) = z$ et alors $\varphi(\bar{x_z}) = f(x_z) = z$. φ est surjective car soient $(C, C') \in (E/\sim)^2, \varphi(C) = \varphi(C')$ alors $\exists (x,x') \in C \times C' : x \sim x'$, comme deux classes d'équivalence sont confondues ou disjointes, $C = C'$. Ainsi φ est une bijection donc $|F| = |E/\sim|$.

Ainsi $|E| = \sum_{C \in E/\sim} |C| = \sum_{C \in E/\sim} k = |E/\sim| \, k = |F| \, k$. □