Khôlles de Mathématiques - Semaine 3

George Ober

17 avril 2024

1 Preuve de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité montrant que le module est 1-lipschitzien + dessin et interprétation géométrique

Démonstration. □

2 Caractérisation du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$

Démonstration. □

3 Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

Démonstration. □

4 Si z_0 est racine de la fonction polynômiale P, alors P se factorise par $(z - z_0)$

Soient $n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ Posons pour tout $z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$
(i) Si $P(z_0) = 0$, alors $\exists Q \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_0)Q(z)$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque,

$$\begin{aligned}
P(z) &= P(z) - P(z_0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (z^k - z_0^k) && \text{nul pour } k = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(a_k (z - z_0) \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \right) \\
&= (z - z_0) \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right)
\end{aligned}$$

Donc en posant $Q(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right), \in \mathbb{C}[z]$, on a montré que P se factorise. □

5 Si $z_1, \dots, z_n$ sont n racines distinctes de la fonction polynômiale P de degré n, alors $P(z)$ se factorise en ...

Soient $n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ Posons pour tout $z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

(ii) Si $\exists p \in \mathbb{N}^* : \exists (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ deux à deux distincts tels que $\forall k \in [\![1, p]\!], P(z_k) = 0$ alors, $\exists Q \in \mathbb{C}[x] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q(z) \times \prod_{k=1}^{p} (z - z_k)$.

Démonstration. Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(p) : \forall P \in \mathbb{C}[z], (\exists (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p,\ 2 \text{ à } 2 \text{ distincts } : \forall i \in [\![1, p]\!], P(z_i) = 0) \implies \exists Q \in \mathbb{C}[z] : P(z) = Q(z) \prod_{i=1}^{p} (z - z_i)$$

- ◊ $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la preuve précédente.
- ◊ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ fq tq $\exists (z_1, \dots, z_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}$ deux à deux distincts tels que $\forall i \in [\![1, p+1]\!], P(z_i) = 0$. Appliquons $\mathcal{P}(p)$ à $P \in \mathbb{C}[z]$ dont $(z_1, \dots, z_p)$ sont les p racines deux à deux distinctes.

  $$\exists Q_1 \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q_1(z) \prod_{i=1}^{p} (z - z_i)$$

  Évaluons cette expression en z_{p+1}

  $$\underbrace{P(z_{p+1})}_{=0} = Q_1(z_{p+1}) \prod_{i=1}^{p} \underbrace{(z_{p+1} - z_i)}_{\neq 0 \text{ car distincts}}$$

  Donc $Q_1(z_{p+1}) = 0$, ce qui permet d'appliquer (i) pour $P \leftarrow Q_1$, $z_0 \leftarrow z_{p+1}$.

  $$\exists Q \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, Q_1(z) = (z - z_{p+1}) Q(z)$$

  Donc

  $$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_{p+1}) Q(z) \prod_{i=1}^{p} (z - z_i) = Q(z) \prod_{i=1}^{p+1} (z - z_i)$$

  Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

□