Khôlles de Mathématiques - Semaine 31

Hugo Vangilluwen, George Ober

30 juin 2024

Pour cette semaine, E est un ensemble fini de cardianl $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

1 p-partage d'un ensemble E et leur dénombrement

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-partage de E est un p-liste $(A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{P}(E)^p$ de parties de E (éventuellement vide), deux à deux disjointes qui recouvrent E c'est-à-dire telles que t :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!], i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{p} A_i = E \tag{1}$$

Soient $(n_1, \ldots n_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $n = n_1 + \ldots + n_p$ est un p-partage de E tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!],\ |A_i| = n_i$$

Le nombre de p-partage de type $(n_1, \ldots, n_p)$ est :

$$\frac{n!}{\displaystyle\prod_{i=1}^{p} n_i!} \tag{2}$$

Démonstration. Considérons les p-partages de type $(n_1, \ldots, n_p)$ et appliquons le principe des choix successifs :

$$\left(\underbrace{A_1}_{\binom{n}{n_1} \text{ choix}}, \underbrace{A_2}_{\binom{n}{n_2} \text{ choix}}, \underbrace{A_3}_{\binom{n}{n_3} \text{ choix}}, \ldots, \underbrace{A_p}_{\binom{n}{n_p} \text{ choix}} \right)$$

donc il y a

$$\frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdots \frac{\cancel{(n-(n_1+\ldots+n_{p-1})!}}{n_p!\underbrace{(n_1+\ldots+n_p)!}_{=0!}}$$

Donc, au total, il y a $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_p!}$ p-partages. □

2 Une probabilité conditionnelle est une probabilité

Soit B un évènement de probabilité non nulle. L'application $\mathbb{P}_B$

$$\mathbb{P}_B \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \mapsto & [0;1] \\ A & \to & \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array} \right. \tag{3}$$

est une probabilité sur sur Ω.

Démonstration.

- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ fixé quelconque.
  On a $\emptyset \subset A \cap B \subset B$ donc par croissance de la probabilité, $0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$. En divisant par $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $0 \leqslant \mathbb{P}_B(A) \leqslant 1$. Donc $\mathbb{P}_B$ est *bien définie.*
- $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cup B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
- Soient $(A, A') \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ fixés quelconques tels que A et A' sont incompatibles.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(A \sqcup A') &= \frac{\mathbb{P}(B \cap (A \sqcup A'))}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}((B \cap A) \sqcup (B \cap A'))}{\mathbb{P}(B)} \text{ car } (B \cap A) \cap (B \cap A') \subset A \cap A' = \emptyset \\ &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A')}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A') \end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi, $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité sur Ω. □

3 Si A et B sont des événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ aussi

Démonstration. Supposons donc que $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ et $0 \leqslant \mathbb{P}(B) \leqslant 1$. D'une part, $\{B, \bar{B}\}$ constitue un système complet donc

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\ \iff &\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\ \iff &\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\ \iff &\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\ \iff &\mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\bar{B}\right) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

Donc A et $\bar{B}$ sont indépendants □

4 Formule des probabilités composées

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \tag{5}$$

Démonstration. Procédons par récurrence. Soient $(A_1, \dots, A_n)$, n événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \neq 0$. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, posons

$$\mathcal{H}_k : \text{"}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)\text{"}$$

⋆ Initialisation, $k \leftarrow 2$ d'une part, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset A_1$, donc par croissance de $\mathbb{P}$,

$$0 < \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \mathbb{P}(A_1)$$

Si bien que $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$ donc la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{A_1}$ a un sens. D'où, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)$$

Donc $\mathcal{H}_2$ est vérifiée.

- ⋆ Hérédité, Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$ fixé quelconque tel que $\mathcal{H}_k$ est vérifiée.

  D'abord, remarquons que $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset \bigcap_{i=1}^k A_i$ donc par croissance de $\mathbb{P}$,

$$0 < \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)$$

  Si bien que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \neq 0$ donc la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_k}$ a un sens.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^k A_i}(A_{k+1}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)\mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(A_{k+1})
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est aussi vérifiée

□

5 Formule des probabilités totales et formule de Bayes

Démonstration. Formule des probabilités totales

Soit $(A_1, \dots A_n)$ un système complet d'événements. Comme ils sont incompatibles

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Le système est de plus complet donc $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = \Omega$. Donc $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = 1$.

$(A_1, \dots, A_n)$ sont aussi deux à deux incompatibles, donc $(B \cap A_1, \dots B \cap A_n)$ aussi. De plus $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \bigsqcup_{k=1}^n (B \cap A_k)$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

De plus, en passant aux probabilités conditionnelles $(\mathbb{P}_{A_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B) \tag{6}$$

Formule de Bayes

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, on a alors :

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$$

donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)} \tag{7}$$

□

6 Loi d'une fonction de X

Soit X une variable alétoire sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. La loi de probabilité $Y = g(X)$ est donnée par $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) \tag{8}$$

Démonstration. Utilisons le système complet $(X = x)_{x\in X(\Omega)}$ associé à la variable aléatoire X et la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}(Y = y) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}((Y = y) \cap (X = x))\\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}} \mathbb{P}((g(X) = y) \cap (X = x)) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)\neq y}} \mathbb{P}((g(X) = y) \cap (X = x))\end{aligned}$$

Remarquons ainsi que

⋆ Si $g(x) = y$

$$\omega \in (X = x) \implies X(\omega) = x \implies g(X(\omega)) = g(x) \implies \omega \in (g(X) = y)$$

D'où $(X = x) \subset (g(X) = y)$ donc $(g(X) = y) \cap (X = x) = (X = x)$

⋆ Sinon, si $g(x) \neq y$

$$\omega \in (X = x) \implies X(\omega) = x \implies g(X(\omega)) = g(x) \neq y \implies \omega \notin (g(X) = y)$$

Dans ce cas, $(g(X) = y) \cap (X = x) = \emptyset$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_y(\{y\}) &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}} \mathbb{P}(\underbrace{(g(X) = y) \cap (X = x)}_{=(X=x)}) + \underbrace{\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)\neq y}} \mathbb{P}((g(X) = y) \cap (X = x))}_{=0}\\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}} \mathbb{P}(X = x)\\ &= \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

□

7 Si $X \geqslant 0$ presque sûrement, $\mathbb{E}(X) = 0 \iff X = 0$ presque sûrement

Démonstration. Soit $X \geqslant 0$ presque sûrement

— Supposons que $\mathbb{E}(X) = 0$ Par hypothèse, l'évènement $(X < 0)$ est négligeable donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= \sum_{\omega\in(X=0)} \underbrace{X(\omega)}_{=0}\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in(X<0)} X(\omega)\underbrace{\mathbb{P}(\{\omega\})}_{=0} + \sum_{\omega\in(X>0)} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= \sum_{\omega\in(X>0)} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\end{aligned}$$

Soit $\omega_0 \in (X > 0)$ fixé quelconque La nullité de l'espérance donne

$$0 \leqslant X(\omega_0)\mathbb{P}(\{\omega_0\}) \leqslant \sum_{\omega\in(X>0)} X(\omega)P(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X) = 0$$

donc $X(\omega_0)\mathbb{P}(\{\omega_0\}) = 0$, or $X(\omega_0) > 0$ donc $\mathbb{P}(\{\omega_0\}) = 0$ donc

$$\mathbb{P}(X > 0) = \sum_{\omega_0\in(X>0)} \mathbb{P}(\{\omega_0\}) = 0$$

Donc $(X > 0)$ est négligeable, mais $(X < 0)$ est négligeable aussi, donc

$$0 \leqslant \mathbb{P}((X > 0) \cup (X < 0)) \leqslant \mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) = 0$$

Ainsi l'évènement contraire de $(X > 0) \cup (X < 0)$, qui est $(X = 0)$ est certain.

— Supposons $X = 0$ presque sûrement.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in (X=0)} \underbrace{X(\omega)}_{=0} \mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in (X \neq 0)} X(\omega) \underbrace{\mathbb{P}(\{\omega\})}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

8 Calcul de l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{\omega \in X(\Omega)} \omega \mathbb{P}(X = \omega) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-1-j} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} = np\end{aligned}$$

Pour la variance, calculons d'abord $\mathbb{E}(X^2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \underbrace{k\binom{n}{k}}_{n\binom{n-1}{k-1}} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \underbrace{k}_{(k-1)+1} \binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=2}^{n}\underbrace{(k-1)\binom{n-1}{k-1}}_{(n-1)\binom{n-2}{k-2}}p^k(1-p)^{n-k} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)\underbrace{\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}p^{i+2}(1-p)^{(n-2)-i}}_{\text{en posant } i=k-2} + n\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i+1}(i-p)^{(n-1)-i}}_{\text{en posant } i=k-1} \\
&= n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} + np(p+(1-p))^{n-1} \\
&= n(n-1)p^2 + np \\
&= np((n-1)p+1)
\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np((n-1)p+1) - n^2p^2 = np(1-p)$$

Calcul alternatif de $\mathbf{E^2}$ En utilisant la formule de transfert pour $f \leftarrow \begin{pmatrix} X(\Omega) = [\![0;n]\!] & \to & [\![0;n(n-1)]\!] \\ x & \mapsto & x(x-1) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j(1-p)^{n-2-j} \\
&= n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} \\
&= n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

Donc en remarquant que

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)+X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = n(n-1)p^2 + np$$

Donc

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

□