

Khôlles de Mathématiques - Semaine 18

Hugo Vangilluwen, Kylian Boyet

20 Février 2024

1 L'ensemble des nombres premiers est infini

Démonstration. Notons l'ensemble des nombres premiers $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid |\mathcal{D}(n) \cup \mathbb{N}| = 2\}$. Par l'absurde, supposons que \mathcal{P} est fini.

Posons $m = 1 + \prod_{p \in \mathcal{P}} p \in \mathbb{N}$.

Comme $2 \in \mathcal{P}$, $m \geq 2$. Donc m admet un diviseur premier, $\exists q \in \mathcal{P} : q \mid m$. Donc $q \wedge m = q$.

Par ailleurs, $m = 1 + q \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \neq q}} p \right)$. Donc $m - q \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \neq q}} p \right) = 1$. D'après le théorème de Bézout,

$q \wedge m = 1$.

Donc $q = 1$ ce qui est une contradiction avec $q \in \mathcal{P}$. \square

2 Caractérisation de la valuation p -adique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}$, $k_0 \in \mathbb{N}$.

$$\nu_p(n) = k_0 \iff \exists m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = p^{k_0} \\ m \wedge p = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Démonstration. \implies Supposons que $\nu_p(n) = k_0$.

Par définition de la valuation p -adique, $p^{\nu_p(n)} \mid n$ donc $p^{k_0} \mid n$. Notons $m \in \mathbb{Z}$ le quotient de la division euclidienne de n par p^{k_0} . Nous avons $n = p^{k_0}m$.

Comme $m \wedge p \in \mathcal{D}(p) \cap \mathbb{N}$, $m \wedge p \in \{1, p\}$. Par l'absurde, supposons que $m \wedge p = p$.

$$\begin{aligned} p \mid m &\implies \exists m' \in \mathbb{Z} : m = pm' \\ &\implies \exists m' \in \mathbb{Z} : n = pp^{k_0}m' = p^{k_0+1}m' \\ &\implies k_0 + 1 \in \{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid n\} \\ &\implies k_0 + 1 \leq \max \{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid n\} = \nu_p(n) = k_0 \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction donc $m \wedge p = 1$.

$$\iff \text{Supposons } \exists m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = p^{k_0} \\ m \wedge p = 1 \end{cases}$$

Par définition de la valuation p -adique, $p^{\nu_p(n)} \mid n$ donc $p^{\nu_p(n)} \mid p^{k_0}m$. Or $m \wedge p = 1$ donc $m \wedge p^{\nu_p(n)} = 1$. D'après le théorème de Gauss, $p_{\nu_p(n)} \mid p^{k_0}$. Donc $\exists \alpha \in \mathbb{Z} : \alpha p_{\nu_p(n)} = p^{k_0}$

$$\begin{aligned} \alpha p_{\nu_p(n)} = p^{k_0} &\implies p^{k_0} - \alpha p_{\nu_p(n)} = 0 \\ &\implies p^{k_0} (1 - \alpha p^{\nu_p(n)-k_0}) = 0 \text{ car } k_0 \leq \nu_p(n) \\ &\implies \alpha p^{\nu_p(n)-k_0} = 1 \text{ car } \mathbb{Z} \text{ est int\`egre} \\ &\implies p^{\nu_p(n)-k_0} \in \mathcal{D}(1) \cap \mathbb{N} \\ &\implies p^{\nu_p(n)-k_0} = 1 \\ &\implies \nu_p(n) - k_0 = 0 \\ &\implies \nu_p(n) = k_0 \end{aligned}$$

\square

3 Caractérisation de $a|b$ par les valuations p -adiques et preuve de leur propriété de morphisme.

Démonstration. Montrons que : $a|b \iff \forall p \in \mathcal{P}, \nu_p(a) \leq \nu_p(b)$.

Premièrement, montrons que la valuation p -adique est un morphisme de (\mathbb{Z}^*, \times) dans $(\mathbb{N}, +)$.

Soient de tels entiers relatifs a, b .

$$\exists m, n \in (\mathbb{Z}^*)^2 : \left((a = p^{\nu_p(a)} m) \wedge (m \wedge p = 1) \right) \wedge \left((b = p^{\nu_p(b)} n) \wedge (n \wedge p = 1) \right),$$

donc $ab = p^{\nu_p(a) + \nu_p(b)} mn$ et $mn \wedge p = 1$, par la réciproque de la caractérisation des valuations p -adiques :

$$\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b).$$

Prouvons le sens réciproque de la susdite caractérisation. Supposons le membre de droite.

D'après le théorème de décomposition en facteurs premiers,

$$|b| = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)} (p^{\nu_p(b) - \nu_p(a)}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)} \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b) - \nu_p(a)} = |a| \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b) - \nu_p(a)},$$

la première manipulation se justifie par hypothèse et la seconde peut se justifier par le calcul.

Ainsi, $|a||b|$ donc $a|b$.

Prouvons le sens direct. Supposons le membre de gauche.

Soit $p \in \mathcal{P}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ak = b$ car $a|b$. Ainsi,

$$\nu_p(b) = \nu_p(ak) = \nu_p(a) + \nu_p(k) \geq \nu_p(a).$$

Ce qui suffit. □

4 Expression du pgcd et du ppcm à partir des décomposition en facteurs premiers de a et b .

Le pgcd comme produit des p à la puissance du minimum des ν_p et le ppcm comme le produit des p à la puissance du maximum des ν_p .

Démonstration. Prouvons la formule du pgcd et déduisons-en la formule du ppcm.

Soient $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$. Soit $p \in \mathcal{P}$. Il faut et il suffit de montrer que $\nu_p(a \wedge b) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$ pour obtenir le résultat. On a $a \wedge b | a$ et $a \wedge b | b$ donc d'après la caractérisation de la divisibilité par les valuations p -adiques, $\nu_p(a \wedge b) \leq \nu_p(a)$ et $\nu_p(a \wedge b) \leq \nu_p(b)$ donc $\nu_p(a \wedge b) \leq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$. Posons $m = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$. On a

$$|a| = \prod_{q \in \mathcal{P}} q^{\nu_q(a)} = p^m \left((p^{\nu_p(a) - m}) \prod_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} q^{\nu_q(a)} \right),$$

car par définition, $m \leq \nu_p(a)$, donc $p^m | a$, on montrerait de même que $p^m | b$, donc par définition, $p^m | a \wedge b$, donc une nouvelle fois en appliquant la caractérisation de la divisibilité par les valuations p -adiques, $m \leq \nu_p(a \wedge b)$. Finalement, $\nu_p(a \wedge b) = m$.

On en déduit la formule du ppcm :

$$|a||b| = (a \wedge b)(a \vee b) \implies a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a) + \nu_p(b) - \min(\nu_p(a), \nu_p(b))} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(\nu_p(a), \nu_p(b))}$$

□

5 Pour p premier, $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$, en déduire le petit Th. de Fermat (2 versions), expression du résultat dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Petit Th. de Fermat :

- (i) $\forall a \in \mathbb{Z}, a^p \equiv a \pmod{p}$
 $\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, x^p = x$
- (ii) $\forall a \in \mathbb{Z}, p \nmid a, \implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
 $\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, x^{p-1} = 1$

Démonstration. Soient a, b de tels entiers relatifs et soit p un nombre premier. Calculons,

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{p-k} b^k = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k \equiv a^p + b^p \pmod{p},$$

car $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $p \mid \binom{p}{k}$ (élémentaire), d'où le résultat.

Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ce résultat s'énonce comme suit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2, (x+y)^p = x^p + y^p.$$

En guise d'application, démontrons le petit Th. de Fermat énoncé plus haut.

Démonstration du (i). Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(a) : "a^p \equiv a \pmod{p}."$$

Initialisation : Pour $a = 0$, rien à faire, donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

Hérédité : Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(a)$. Calculons,

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p} \stackrel{\mathcal{P}(a)}{\equiv} a + 1 \pmod{p},$$

donc $\mathcal{P}(a+1)$ vrai.

Par Th. de récurrence sur \mathbb{N} , $\mathcal{P}(a)$ est vrai pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Il faut maintenant étendre le résultat à \mathbb{Z} . Soit $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$, ainsi p est impair. Soit $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Calculons,

$$a^p \equiv (-|a|)^p \pmod{p} \equiv -|a|^p \pmod{p} \stackrel{\text{Th. de Fermat pour } a \leftarrow |a|}{\equiv} -|a| \pmod{p} \equiv a \pmod{p}.$$

Si $p = 2$, $a^2 \equiv |a|^2 \pmod{2} \equiv |a| \pmod{2} \equiv -|a| \pmod{2} \equiv a \pmod{2}$.

Le (ii), soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $p \nmid a$.

$$(p \nmid a) \wedge (p \in \mathcal{P}) \implies p \wedge a = 1,$$

d'après le (i), $p \mid a^p - a \implies p \mid a(a^{p-1} - 1) \stackrel{\text{Th. de Gauss}}{\implies} p \mid a^{p-1} - 1 \implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Les écritures dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ne posent pas de problème.s, ce qui conclut. \square

6 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Démonstration. Montrons le sens réciproque, supposons $n \in \mathcal{P}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $x \neq \bar{0}$.

$\exists a \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket : c = \bar{a}, I = \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ étant un système de représentant des classes.

Comme $a \in I$, $n \nmid a$, or $n \in \mathcal{P}$, donc $n \wedge a = 1$. Par Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + nv = 1$, donc u est l'inverse de a modulo n donc $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$, dès lors, tout élément non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible, or c'est un anneau commutatif, donc c'est un corps.

Montrons le sens direct en raisonnant par contraposition, supposons $n \notin \mathcal{P}$.

Comme n n'est pas premier et est plus grand que 2, il admet un diviseur, d , dans $I \setminus \{0, 1\} = J$. Notons d' le quotient de la division euclidienne de n par d , on a alors $a = dd'$ et $d' \in J$. Donc $\bar{d}\bar{d}' = \bar{0}$ et comme $d, d' \in J$, on a $d, d' \neq 0$, donc \bar{d} est un diviseur de zéro de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc \bar{d} est un élément non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ non inversible, donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. En contraposant ce que nous venons de démontrer on a le résultat. Ce qui conclut. \square

7 Les éléments inversibles d'un anneau A forment un groupe multiplicatif noté (A^\times, \times)

Démonstration. Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

Un élément inversible (ou unité) est un élément de A symétrisable pour la loi \times . Posons l'ensemble des éléments inversibles $A^\times = \{a \in A \mid \exists b \in A : a \times b = b \times a = 1_A\}$.

- ★ Montrons que la LCI \times se restreint bien à A^\times en un LCI \times_{A^\times} .
Soient $(a_1, a_2) \in A^{\times 2}$. Par définition de A^\times , $\exists (b_1, b_2) \in A^2 : a_1 \times b_1 = b_1 \times a_1 = 1_A$ et $a_2 \times b_2 = b_2 \times a_2 = 1_A$.

$$\begin{aligned} (a_1 \times a_2) \times (b_2 \times b_1) & \underbrace{=}_{\text{loi associative}} a_1 \times \underbrace{a_2 \times b_2}_{= 1_A} \times b_1 = a_1 \times b_1 = 1_A \\ (b_2 \times b_1) \times (a_1 \times a_2) & \underbrace{=}_{\text{loi associative}} b_2 \times \underbrace{b_1 \times a_1}_{= 1_A} \times a_2 = b_2 \times a_2 = 1_A \end{aligned}$$

Donc $(a_1 \times a_2) \in A^\times$.

- ★ La loi \times est associative donc la loi \times_{A^\times} l'est aussi.
- ★ 1_A vérifie $1_A \times 1_A = 1_A$ donc $1_A \in A^\times$.
De plus, $\forall a \in A^\times, 1_A \times_{A^\times} a = a \times_{A^\times} 1_A = a$ donc \times_{A^\times} admet 1_A comme élément neutre.
- ★ Soit $a \in A^\times$. Par définition de A^\times , $\exists b \in A : a \times b = b \times a = 1_A$.
D'où $b \in A^\times$. En pensant les égalités ci-dessus dans A^\times ,

$$a \times_{A^\times} b = b \times_{A^\times} a = 1_A$$

Donc a est inversible dans A^\times .

Ainsi, $(A^\times, \times_{A^\times})$ est un groupe. □

8 L'image directe par un morphisme d'anneau d'un sous-anneau de l'anneau de départ est un sous anneau de l'anneau d'arrivée. De même pour l'image réciproque.

Démonstration. Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux et $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneau. Soit A' un sous-anneau de A . Montrons que $f(A')$ est un sous-anneau de B .

- ★ Par définition de f , $f(A') \subset B$ et $(B, +, \times)$ est un anneau.
- ★ Soient $(u, v) \in f(A')^2$. Alors $\exists (a, b) \in A'^2 : f(a) = u$ et $f(b) = v$. f est un morphisme d'anneau donc un morphisme de groupe de $(A, +)$ dans $(B, +)$ donc

$$u - v = f(a) - f(b) = f(a - b)$$

Comme A' est un sous-anneau, $a - b \in A'$. Donc $u - v \in f(A')$.

De même, f est un morphisme d'anneau donc un morphisme de monoïde de (A, \times) dans (B, \times) donc

$$u \times v = f(a) \times f(b) = f(a \times b)$$

Comme A' est un sous-anneau, $a \times b \in A'$. Donc $u \times v \in f(A')$.

- ★ f est un morphisme d'anneau donc $1_B = f(1_A)$. Or A' est un sous-anneau donc $1_A \in A'$. D'où $1_B \in f(A')$.

Soit B' un sous-anneau de B . Montrons que $f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de A .

- ★ Par définition de f , $f^{-1}(B') \subset A$ et $(A, +, \times)$ est un anneau.
- ★ Soient $(a, b) \in f^{-1}(B')^2$. f est un morphisme d'anneau donc un morphisme de groupe de $(A, +)$ dans $(B, +)$ donc

$$f(a - b) = \underbrace{f(a)}_{\in B'} - \underbrace{f(b)}_{\in B'} \in B'$$

Donc $a - b \in f^{-1}(B')$.

De même, f est un morphisme d'anneau donc un morphisme de monoïde de (A, \times) dans (B, \times) donc

$$f(ab) = \underbrace{f(a)}_{\in B'} \underbrace{f(b)}_{\in B'} \in B'$$

Donc $ab \in f^{-1}(B')$.

- ★ f est un morphisme d'anneau donc $1_B = f(1_A)$. Or B' est un sous-anneau donc $1_B \in B'$. D'où $1_A \in f^{-1}(B')$.

□