Khôlles de Mathématiques - Semaine 23

Hugo Vangilluwen

31 Mars 2024

Pour cette semaine, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' et F' des sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F, I un ensemble quelconque non vide.

1 L'ensemble des automorphisme d'un espace vectoriel muni de la loi de composition forme un groupe

Démonstration. Montrons que $(\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(E), \circ)$.

— $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \subset \mathcal{S}(E)$ et $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est bien un groupe.

— $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \neq \emptyset$ puisque $Id_E \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}$.

— Soit $(f, g) \in \mathcal{GL}(E)$. Montrons que $f \circ g^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$.
Soit $(\alpha, \beta, x, y) \in \mathbb{K}^2 \times E^2$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned}
\left(f \circ g^{-1}\right)(\alpha x + \beta y) &= f\left(g^{-1}\left(\alpha x + \beta y\right)\right) \\
&= f\left(g^{-1}\left(\alpha g^{-1}(g(x)) + \beta g^{-1}(g(y))\right)\right) \\
&= f\left(g^{-1}\left(\alpha g\left(g^{-1}(x)\right) + \beta g\left(g^{-1}(y)\right)\right)\right) \\
&= f\left(g^{-1}\left(g\left(\alpha g^{-1}(x) + \beta g^{-1}(y)\right)\right)\right) \quad \text{car } g \text{ est linéaire} \\
&= f\left(\alpha g^{-1}(x) + \beta g^{-1}(y)\right) \\
&= \alpha f\left(g^{-1}(x)\right) + \beta f\left(g^{-1}(y)\right) \\
&= \alpha\left(f \circ g^{-1}\right)(x) + \beta\left(f \circ g^{-1}\right)(y)
\end{aligned}$$

□

2 Caractérisation de la somme directe de p sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in E^p$ p sous-espace vectoriel de E avec $p \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.
Par définition, cette famille est en somme directe si tout vecteur de $E_1 + E_2 + \ldots + E_p$ peut s'écrire comme une somme unique d'élément de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$. Formellement :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i, \exists! x \in \bigtimes_{i=1}^{p} E_i : x = \sum_{i=1}^{p} x_i \tag{1}$$

Nous allons démontrer que $E_1, E_2, \ldots$ et E_p sont en somme directe si et seulement si

$$\forall x \in \bigtimes_{i=1}^{p} E_i, \left(\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1;p]\!], x_i = 0_E\right) \tag{2}$$

Démonstration. Supposons que $E_1, E_2, \ldots E_p$ sont en somme directe.
Soient $x \in \bigtimes_{i=1}^{p} E_i$ fixés quelconquestels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = 0_E$.
Or $0_E = \underbrace{0_E}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2} + \ldots + \underbrace{0_E}_{\in E_p}$. Par unicité de l'écriture de x comme somme d'éléments de $\bigtimes_{i=1}^{p} E_i$, $\forall i \in [\![1;p]\!], x_i = 0_E$.

Supposons maintenant l'équation de la caractérisation.
Soit $x \in \bigtimes_{i=1}^{p} E_i$ tel que x puisse s'écrire comme somme de $x' \in \bigtimes_{i=1}^{p} E_i$ et somme de $x'' \in \bigtimes_{i=1}^{p} E_i$. Montrons que $x' = x''$.

$$\sum_{i=1}^{p} x'_i = x = \sum_{i=1}^{p} x''_i$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{p} (x''_i - x''_i) = 0_E$$

D'après l'équation de la caractérisation, $\forall i \in [\![1; p]\!], x'_i - x''_i = 0_E$.
Donc $\forall i \in [\![1; p]\!], x'_i = x''_i$ $\square$