Khôlles de Mathématiques - Semaine 1

George Ober, Félix Rondeau

19 septembre 2024

1 Preuve formelle de la somme des entiers et des termes d'une suite géométrique

Démonstration. $\diamondsuit$ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k$$

En posant la symétrie d'indice $i = n - k$, on a aussi

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (n-i) = \sum_{i=0}^{n} n - \sum_{i=0}^{n} i = (n \times \text{card}[\![0, n]\!]) - \sum_{i=0}^{n} i$$

Or, puisque $\text{card}[\![0, n]\!] = n + 1$ et que $\sum_{i=0}^{n} i = S_n$

$$S_n = n \times (n+1) + S_n$$

Donc

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\diamondsuit$ Soient $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ fixés quelconques.

$\star$ Si $q = 1$,

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \sum_{i=0}^{k} 1 = k + 1$$

$\star$ Sinon, avec l'identité algébrique, on a

$$q^{k+1} - 1^{k+1} = (q-1) \sum_{i=0}^{k} q^i \times 1^{k-i}$$

Ainsi, puisque $q \neq 1$ on a, par multiplication par $(q-1)^{-1}$

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

Nous avons donc établi que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{k+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ k + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\square$

2 Preuve de la factorisation de $a^n - b^n$ puis de celle de $a^{2m+1} + b^{2m+1}$

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} &= a\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} - b\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k}\end{aligned}$$

Si bien qu'en posant le changement d'indice $j = k + 1$ on reconnait le téléscopage.

$$\sum_{j=1}^{m} a^j b^{m-j} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} = a^m - b^m$$

Soit m un entier naturel fixé quelconque. En particularisant la relation pour $n \leftarrow 2m + 1$ et $b \leftarrow (-b)$, on obtient

$$\begin{aligned}a^{2m+1} - (-b)^{2m+1} = a^{2m+1} + b^{2m+1} &= (a - (-b))\sum_{k=0}^{2m} a^k (-b)^{2m-k} \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{2m} a^k (-1)^{2m} (-1)^{-k} b^{2m-k} \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a^k b^{2n-k}\end{aligned}$$

□

3 Preuve de la formule du binôme de Newton

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques. Posons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- ⋆ Initialisation, $n \leftarrow 0$ D'une part $(a + b)^0 = 0$, même si les deux sont nuls (par convention $0^0 = 0$) D'autre part

  $$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 0$$

  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifée.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\ &= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{j} b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} \\
\text{(en posant } j=k+1\text{)} &= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{j} b^{n+1-j} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^{k} b^{n+1-k} \right) + b^{n+1} \\
\text{(en utilisant la relation de Pascal)} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$\square$

4 Développement d'une somme

$$
\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} x_k x_j = 2 \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} x_i^2
$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k \times \sum_{j=1}^{n} x_j \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_k \times x_j \right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} x_k x_j
\end{aligned}
$$

On peut aussi séparer cette somme

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} x_k x_j &= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ k<j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ k=j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ k>j}} x_k x_j \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ k<j}} x_k x_j + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}_{\text{somme sur les indices } (k,j) \text{ tels que } k=j} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ k>j}} x_k x_j
\end{aligned}
$$

On remarque aussi qu'en permutant les indices des deux sommes (les variables sont muettes)

$$
\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ k<j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ j<k}} x_j x_k
$$

Qui, par commutativité du produit dans $\mathbb{C}$ nous donne cette égalité

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n\\k<j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n\\k>j}} x_k x_j$$

On a donc bien l'identité attendue :

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j = 2\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n\\k<j}} x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

□

5 Montrer que tout entier $n > 2$ admet un diviseur premier

Démonstration. Raisonnons par récurrence forte avec la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n > 2$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } \forall k \in [\![2, n]\!], k \text{ admet un diviseur premier »}$$

- Initialisation : $n \leftarrow 2$
  Soit $k \in [\![2, 2]\!]$ fixé quelconque. Nécéssairement, $k = 2$. or, 2 admet 2 pour diviseur premier. Donc $\forall k \in [\![2, 2]\!], k$ admet un diviseur premier, ce qui prouve $\mathcal{P}(2)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$, il nous faudra montrer que $\forall k \in [\![2, n+1]\!], k$ admet un diviseur premier
  Soit $k \in [\![2, n + 1]\!]$ fixé quelconque.
  - ⋆ Si $k \in [\![2, n]\!]$, alors la véracité de $\mathcal{P}(n)$ nous permet de conclure, et de dire que k admet un diviseur premier.
  - ⋆ Sinon $k = n + 1$
    - ◇ Si $n + 1$ est premier, alors il admet k comme diviseur premier
    - ◇ Sinon, $\exists d \in [\![2, n]\!] : d \mid n + 1$
      Mais, puisque $d \in [\![2, n]\!]$, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ nous permet d'affirmer que d admet un diviseur premier p. Donc par transitivité de la relation de divisibilité

$$(p \mid d \text{ et } d \mid n) \implies p \mid n$$

□

6 Montrer par récurrence qu'une fonction polynomiale à coefficients réels est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls

Démonstration. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(n)$: toute fonction polynômiale identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ a tous ses coefficients nuls

Autrement dit

$$\mathcal{P}(n) : \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \right) \implies \forall k \in [\![0, n]\!], a_k = 0$$

- ◇ Pour $n \leftarrow 0$ Soit $a_0 \in \mathbb{R}$ fixé quelconque tel que $\forall x \in \mathbb{R}, a_0 x^0 = 0$ Alors $a_0 = 0$
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie Soient $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ Posons $Q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = 0$ D'une part

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{Q(2x)}_{=0} - 2^{n+1} \underbrace{Q(x)}_{=0} = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, Q(2x) - 2^{n+1}Q(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k(2x)^k - 2^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k(2^k - 2^{n+1})x^k\end{aligned}$$

Le terme d'indice $n+1$ s'annule, si bien que l'on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(2x) - 2^{n+1}Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(2^k - 2^{n+1})x^k$$

Qui est une fonction polynômiale de degré $\leqslant n$, ce qui permet d'appliquer $\mathcal{P}(n)$ pour $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \leftarrow (a_k(2^k - 2^{n+1}))_{k\in[\![0,n]\!]}$.
Donc $\forall x \in [\![0,n]\!] : a_k(2^k - 2^{n+1}) = 0$ et puisque $2^k - 2^{n+1} \neq 0$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], a_k = 0$$

L'expression de Q devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + a_{n+1}x^{n+1} = 0$$

Donc en particularisant pour $x \leftarrow 1$, on en déduit que $a_{n+1} = 0$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

□

7 Montrer par analyse/synthèse qu'une fonction réelle d'une variable réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fixée quelconque.

◊ Analyse : Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique en $f = g + h$ avec g paire et h impaire (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$). Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque
Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

Par demi somme, nous avons donc

$$\begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$$

Ainsi, si une telle décomposition existe, c'est

$$\begin{cases} g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

◊ Synthèse : Posons

$$g \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et } h \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right. \tag{1}$$

Remarquons, d'une part que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Vérifions si les fonctions g et h vérifient les conditions de parité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \text{ ainsi } g \text{ est paire.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \text{ ainsi } h \text{ est impaire}$$

□

8 Illustration graphique de certaines identités trigonométriques

Démonstration.

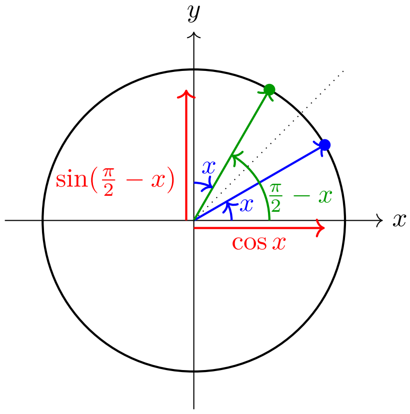

Figure 1 – Illustration de $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$. On retrouve l'égalité par réflexion sur la première bissectrice.

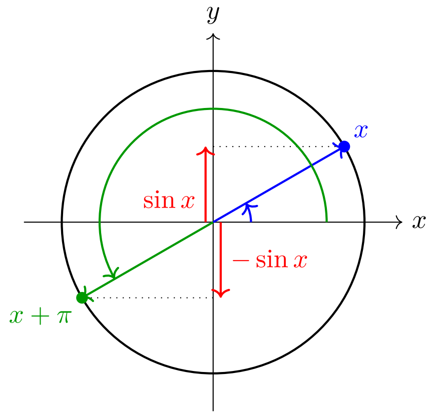

Figure 2 – Illustration de $\sin(x + \pi) = -\sin x$. On retrouve l'égalité par symétrie centrale.

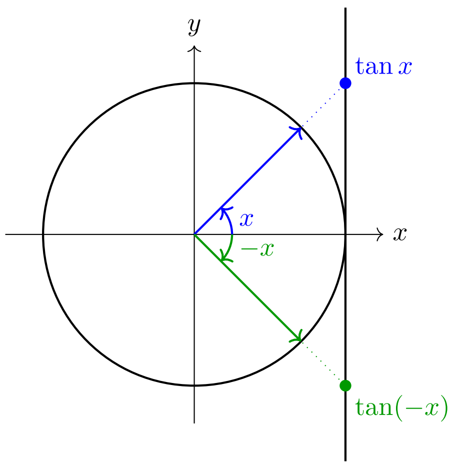

Figure 3 – Illustration de $\tan(-x) = -\tan x$. On retrouve l'égalité par réflexion sur l'axe des abscisses.

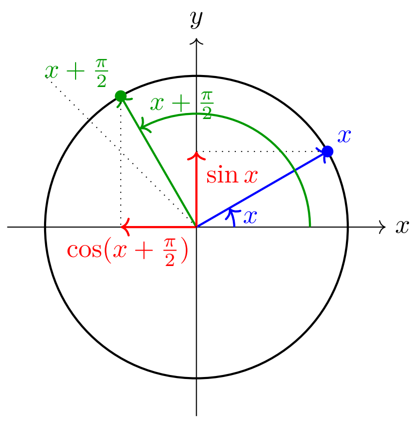

Figure 4 – Illustration de $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$. On retrouve l'égalité par réflexion sur la deuxième bissectrice.

□

9 Technique de résolution des équations trigonométriques du type $A \cos x + B \sin x = C$

Démonstration. Étudions l'équation d'inconnue x

$$A \cos x + B \sin x = C$$

- ⋆ Si $A = 0$ et $B = 0$
  - ◊ Si $C = 0$ l'équation admet $\mathbb{R}$ pour ensemble de solutions
  - ◊ Sinon, l'équation n'admet pas de solutions
- ⋆ Sinon,

  Factorisons par $\sqrt{A^2 + B^2}$ (ce qui a un sens car $(A, B) \neq (0, 0) \implies \sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$)

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

  Le nombre complexe $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + i \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ est de module 1, donc $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\varphi} + i \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin\varphi}$$

Ainsi,

$$(\cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

donc

$$\cos(\varphi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

◊ Si $\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \leqslant 1$

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} &\iff \begin{cases} \phi + x \equiv \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} [2\pi] \\ \text{ou} \\ \phi + x \equiv -\arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} [2\pi] \end{cases} \\
&\iff x \in \begin{array}{l} \left\{ \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \cup \\ \left\{ -\arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{array} \\
&\iff x \in \left\{ \varepsilon \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

◊ Sinon, l'équation n'admet aucune solution

□

10 Étude complète de la fonction tangente, tracé du graphe et en déduire celui de cotangente.

Démonstration. □

11 Expression de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Posons $u = \tan\dfrac{\theta}{2}$

◊ $\tan\theta = \dfrac{2u}{1-u^2}$

En utilisant la formule classique de trigonométrie

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

On obtient, avec $(a, b) \leftarrow (\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2u}{1-u^2}$$

◊ $\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \\
&= \frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - 1 \\
&= \frac{2}{1+u^2} - 1 \\
&= \frac{1-u^2}{1+u^2}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$ $\sin\theta \dfrac{2u}{1+u^2}$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \cos\theta\tan\theta \\ &= \frac{1-u^2}{1+u^2}\times\frac{2u}{1-u^2} \\ &= \frac{2u}{1+u^2}\end{aligned}$$

□

12 Preuve des formules du type $\cos p + \cos q = \dots$

Démonstration. Partons des formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b \qquad (\spadesuit)$$

Si bien qu'en posant

$$\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

D'où, en injectant dans (**??**)

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

□

13 Limite de fonctions monotones sur un segment.

Soit f une fonction croissante définie sur $]a,b[$ avec $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2, a<b$.

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b qui vaut $\lim_{x\to b} f(x) = \sup f(]a,b[)$.
- Si f n'est pas majorée, alors f tend vers $+\infty$ en b.

Démonstration. $\star$ Supposons que f est majorée sur $]a,b[$. L'ensemble $f(]a,b[)$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, donc admet une borne supérieure $S\in\mathbb{R}$. Montrons que $\lim_{x\to b} f(x) = S$.

Soit $\varepsilon>0$ fixé quelconque. On veut construire un $\eta>0$ tel que $\forall x\in]b-\eta,b[, |f(x)-S|\leqslant\varepsilon$. D'après la caractérisation de la borne supérieure par les epsilon appliquée pour ε,

$$\exists y_\varepsilon \in f(]a,b[) : S-\varepsilon < y_\varepsilon \leqslant \varepsilon$$

Or, $y_\varepsilon \in f(]a,b[) \implies \exists x_\varepsilon \in]a,b[\colon y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$ Posons $\eta = b - x_\varepsilon > 0$ et vérifions qu'il convient. Soit $x\in]b-\eta,b[$ fixé quelconque. on a

$$b-\eta < x \implies b-(b-x_\varepsilon) < x \implies x_\varepsilon < x \implies \underbrace{f(x_\varepsilon)}_{y_\varepsilon} \leqslant f(x)$$

De plus, $f(x)\leqslant S$ par définition de la borne supérieure, donc

$$S-\varepsilon < y_\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant S$$

Donc $|f(x)-S|\leqslant\varepsilon$ ce qui prouve la convergence.

⋆ Supposons que f n'est pas majorée sur $]a, b[$. On veut montrer que f tend vers $+\infty$, autrement dit que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in]b-\eta, b[, f(x) \geqslant A$$

Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. f n'est pas majorée, donc $\exists x_0 \in]a, b[$: $f(x_0) \geqslant A$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$ Soit $x \in]b-\eta, b[$ fixé quelconque.

$$b - \eta < x \implies b - (b - x_0) < x \implies x_0 < x \implies f(x_0) \leqslant f(x)$$

Donc $f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant A$ Donc $\forall x \in]b-\eta, b[, f(x) \geqslant A$. Donc f tend vers $+\infty$ en b.

□