Programme de Khôlle Semaine 7

Kylian Boyet, George Ober

10 Novembre 2023

1 Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe

Définissons les fonctions f_r etc. comme les parties réelles et imaginaires de f
Soient $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})^2$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques.

$$f_r = \mathrm{Re}(f), f_i = \mathrm{Im}(f) \qquad g_r = \mathrm{Re}(f), g_i = \mathrm{Im}(g)$$
$$\alpha_r = \mathrm{Re}(\alpha), \alpha_i = \mathrm{Im}(f) \qquad \beta_r = \mathrm{Re}(f), \beta_i = \mathrm{Im}(g)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\alpha f + \beta g) &= \mathrm{Re}((\alpha_r + i\alpha_i)(f_r + if_i) + (\beta_r + i\beta_i)(g_r + ig_i)) \\ &= \underbrace{\alpha_r f_r + \beta_r g_r - \alpha_i f_i - \beta_i g_i}_{\text{Combinaison linéaire de } \underbrace{(f_r, f_i, g_r, g_i) \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})^4}_{car(f,g)\in D^1(I,\mathbb{R})^2}}\end{aligned}$$

Donc, selon le théorème de stabilité par combinaison linéaire des fonctions à valeurs réelles, $\mathrm{Re}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ et $\big(\mathrm{Re}(\alpha f + \beta g)\big)' = \alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i'$
On montre de même que $\mathrm{Im}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ et $\big(\alpha f + \beta g\big)' = \alpha_r f_i' + \alpha f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r'$
Ainsi,

$$\begin{aligned}\big(\alpha f + \beta g\big)' &= (\alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i') + i(\alpha_r f_i' + \alpha f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r') \\ &= \alpha_r(f_r' + if_i') + \beta_r(g_r' + ig_i') + \alpha_i \underbrace{(-f_i' + if_r')}_{i(f_r'+if_i')} + \beta_i \underbrace{(-g_i' + ig_r')}_{i(g_r'+ig_i')} \\ &= \alpha f' + \beta g'\end{aligned}$$

2 Dérivée composée

Soient $f \in \mathcal{D}^1(J,\mathbb{C})$ et $h \in \mathcal{D}^1(I,J)$ (I et J sont deux intervalles réels) fixés quelconques. Notons f_r et f_i respectivement la partie réelle et imaginaire de f.

$$\left.\begin{array}{l} h \in \mathcal{D}^1(I,J) \\ f_r \in \mathcal{D}^1(J,\mathbb{R}), \text{ car } f \in \mathcal{D}^1(J,\mathbb{C}) \end{array}\right\} \implies f_r \circ h \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) \tag{1}$$

On montre de même que $f_i \circ h \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ donc $f \circ h \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{C})$.
De plus,

$$\begin{aligned}(f \circ h)' &= (f_r \circ h)' + i(f_i \circ h)' \\ &= (f_r' \circ h) \times h' + i((f_i' \circ h) \times h') \\ &= (f_r' \circ h + if_i' \circ h) \times h' = (f' \circ h) \times h'\end{aligned}$$

3 Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{C})$ où I est un intervalle réel ; Posons $f_r = \mathrm{Re}(f)$ et $f_i = \mathrm{Im}(f)$.

$$
\begin{aligned}
\forall t \in I, f'(t) = 0 &\iff \forall t \in I, f_r'(t) + i f_i'(t) = 0 \\
&\iff \begin{cases} \forall t \in I, f_r'(t) = 0 \\ \forall t \in I, f_i'(t) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists \lambda_r \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_r(t) = \lambda_r \\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_i(t) = \lambda_i \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in I, f(t) = \lambda
\end{aligned}
$$