Khôlles de Mathématiques - Semaine 2

George Ober

17 avril 2024

1 Montrer qu'une composée d'applications inj/surj/bij est inj/surj/bij

Démonstration. Soients $u : E \to F$ et $v : F \to G$

- ◊ Supposons u et v injectives.
  Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ fq tels que $(v \circ u)(x_1) = (v \circ u)(x_2)$.
  Alors $v(u(x_1)) = v(u(x_2))$, mais v est injective donc, $u(x_1) = u(x_2)$ mais u est injective donc $x_1 = x_2$. Ainsi $v \circ u$ est injective.
- ◊ Supposons u et v surjectives Soit $y \in G$ fixé quelconque.
  v est surjective donc $\exists t \in F : v(t) = y$
  u est surjective, donc $\exists x \in E : u(x) = t$ Ainsi,
  $$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(t) = y$$
  Donc $v \circ u$ est surjective.
- ◊ Supposons u et v bijectives.
  Le fait que $v \circ u$ est une bijection est une conséquence des deux points précédents.

□

2 Montrer que, si u est une application de E dans F, si v est une application de F dans E telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ alors u est bijective (v aussi) et sa bijection réciproque est v

Démonstration. Soient $(u, v) \in \mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(F, E)$ qui satisfont les conditions de l'énnoncé.

- ◊ u est injective
  Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ fixés quelconques tels que $u(x_1) = u(x_2)$. Alors $v(u(x_1)) = v(u(x_2))$. Donc $x_1 = x_2$ puisque $v \circ u = \mathrm{Id}_E$
- ◊ u est surjective Soit $y \in F$ fixé quelconque. Posons $t = v(y)$. Ainsi, $u(t) = u(v(y)) = y$ car $u \circ v = \mathrm{Id}_F$

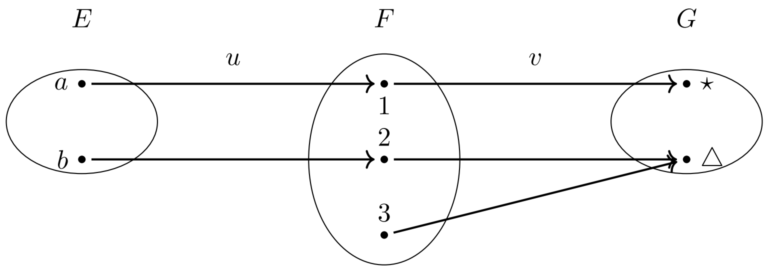
Ainsi, u est bijective, notons u^{-1} sa bijection réciproque

$$\begin{gathered} u^{-1} \circ (u \circ v) = (u^{-1} \circ u) \circ v \\ u^{-1} \circ \mathrm{Id}_F = \mathrm{Id}_E \circ v \\ u^{-1} = v \end{gathered}$$

□

3 Montrer que $v \circ u$ injective implique u injective + montrer que cela n'implique pas v injective.

Démonstration. Soient $(u, v) \in \mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(F, G)$.



Supposons $v \circ u$ est injective Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ fixés quelconques tels que $u(x_1) = u(x_2)$. Composons par v à gauche : $v \circ u(x_1) = v \circ u(x_2)$ Puisque $v \circ u$ est injective, cela implique que $x_1 = x_2$.

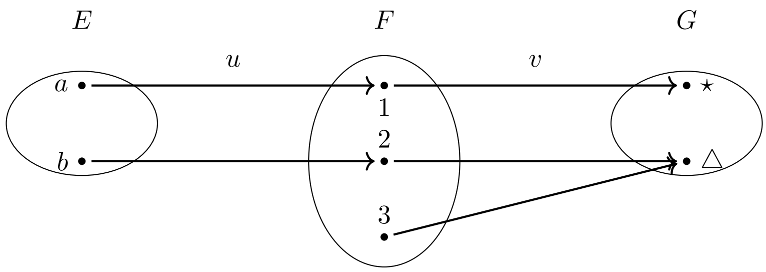
Ici, $v \circ u$ est injective, on a montré que cela impliquait u injective. Pourtant, v n'est pas injective.

$\square$

4 Montrer que $v \circ u$ surjective implique v surjective + montrer que cela n'implique pas u surjective.

Démonstration. Soient $(u, v) \in \mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(F, G)$.

Supposons $v \circ u$ est surjective Soit $y \in G$ fixé quelconque. Puisque $v \circ u$ est surjective, $\exists x \in E$: $(v \circ u)(x) = y$ Donc $v(u(x)) = y$. Donc, en posant $t = u(x)$, on a $v(t) = y$. Ainsi, v est surjective.



Ici, $v \circ u$ est surjective, on a montré que cela impliquait v surjective. Pourtant, u n'est pas surjective.

$\square$

Remarque : Les deux contre contre-exemples exhibés ici sont les mêmes, mais il y en a bien d'autres où $v \circ u$ n'est pas bijective.

5 Soit u une application de E dans F. Si A et A' sont des parties de E, y'a-t-il égalité entre $u(A \cap A')$ et $u(A) \cap u(A')$? (On justifiera les réponses aux deux inclusions suggérées par la question)

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{F}(E, F)$ fixée quelconque, $(A, A') \in \mathcal{P}(E)^2$, deux parties de E.

- ◊ Soit $y \in u(A \cap A')$ fixé quelconque. Par définition $\exists x \in (A \cap A') : u(x) = y$. Ainsi, $x \in A \implies u(x) \in u(A)$ $x \in A' \implies u(x) \in u(A')$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \in u(A) \\ u(x) \in u(A') \end{array}\right\} \implies u(x) \in u(A) \cap u(A')$$

  Donc $u(A \cap A') \subset u(A) \cap u(A')$.

- ◊ En revanche l'inclusion réciproque est fausse : considérons

$$u \left| \begin{array}{ll} \{1,2,3,4\} & \to \{a,b,c,d\} \\ 1 & \mapsto a \\ 2 & \mapsto b \\ 3 & \mapsto a \\ 4 & \mapsto d \end{array}\right.$$

Si on choisit $A = \{1, 2\}$ et $A' = \{2, 3\}$.
Alors, $u(A) = \{a, b\}$, et $u(A') = \{a, b\}$ $u(A \cap A') = u(\{2\}) = \{b\}$
et $u(A) \cap u(A') = \{a, b\} \not\subset \{b\}$

□

6 Montrer que, si u est une application de E dans F. Si B est une partie de F, alors $u^{-1}(F \setminus B) = E \setminus u^{-1}(B)$.

Démonstration. Soit $x \in u^{-1}(F \setminus B)$. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned} x \in u^{-1}(F \setminus B) &\iff u(x) \in F \setminus B \\ &\iff \mathrm{non}(u(x) \in B) \\ &\iff \mathrm{non}(x \in u^{-1}(B)) \\ &\iff x \in E \setminus u^{-1}(B) \end{aligned}$$

□

7 Montrer que, parmi les entiers ne s'écrivant qu'avec des 7, il existe au moins un multiple de 61.

Démonstration. Posons s la suite des entiers tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \underbrace{7\dots7}_{n \text{ fois}}$. Considérons les 62 premiers termes de la suite.

Puisqu'il y a 61 classes de congruences modulo 61, le principe des tiroirs de Dirichlet nous permet d'affirmer que $\exists (k, l) \in [\![1, 62]\!]^2, k < l : s_k \equiv s_l [61]$.

Remarquons maintenant que $s_l - s_k \equiv 0[61]$, autrement dit que $61 \mid s_l - s_k$.

Cependant,

$$s_l - s_k = \underbrace{7\dots7}_{l \text{ fois}} - \underbrace{7\dots7}_{k \text{ fois}} = \underbrace{7\dots7}_{l-k \text{ fois}}\underbrace{0\dots0}_{k \text{ fois}} = s_{l-k} \times 10^k$$

Donc $61 \mid 10^k \times s_{l-k}$, mais $\mathrm{pgcd}(61, 10^k) = 1$ donc le théorème de Gauss donne $61 \mid s_{l-k}$.

Ainsi, parmi les entiers ne s'écrivant qu'avec des 7, il existe au moins un multiple de 61. □