

Khôlles de Mathématiques - Semaine 1

George Ober, Félix Rondeau

19 septembre 2024

1 Preuve formelle de la somme des entiers et des termes d'une suite géométrique

Démonstration. \diamond Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^n k$$

En posant la symétrie d'indice $i = n - k$, on a aussi

$$S_n = \sum_{i=0}^n (n - i) = \sum_{i=0}^n n - \sum_{i=0}^n i = (n \times \text{card}[[0, n]]) - \sum_{i=0}^n i$$

Or, puisque $\text{card}[[0, n]] = n + 1$ et que $\sum_{i=0}^n i = S_n$

$$S_n = n \times (n + 1) - S_n$$

Donc

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

\diamond Soient $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ fixés quelconques.

★ Si $q = 1$,

$$\sum_{i=0}^k q^i = \sum_{i=0}^k 1 = k + 1$$

★ Sinon, avec l'identité algébrique, on a

$$q^{k+1} - 1^{k+1} = (q - 1) \sum_{i=0}^k q^i \times 1^{k-i}$$

Ainsi, puisque $q \neq 1$ on a, par multiplication par $(q - 1)^{-1}$

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

Nous avons donc établi que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \begin{cases} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ k + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

2 Preuve de la factorisation de $a^n - b^n$ puis de celle de $a^{2m+1} + b^{2m+1}$

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} &= a \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} - b \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} \end{aligned}$$

Si bien qu'en posant le changement d'indice $j = k + 1$ on reconnait le télescopage.

$$\sum_{j=1}^m a^j b^{m-j} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} = a^m - b^m$$

Soit m un entier naturel fixé quelconque. En particulierisant la relation pour $n \leftarrow 2m + 1$ et $b \leftarrow (-b)$, on obtient

$$\begin{aligned} a^{2m+1} - (-b)^{2m+1} &= a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a - (-b)) \sum_{k=0}^{2m} a^k (-b)^{2m-k} \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^{2m} a^k (-1)^{2m} (-1)^{-k} b^{2m-k} \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a^k b^{2m-k} \end{aligned}$$

□

3 Preuve de la formule du binôme de Newton

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques. Posons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

★ Initialisation, $n \leftarrow 0$ D'une part $(a + b)^0 = 0$, même si les deux sont nuls (par convention $0^0 = 0$) D'autre part

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 0$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \times (a + b)^n \\ &= (a + b) \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\text{(en posant } j = k+1) = a^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \right) + b^{n+1} \\
&\text{(en utilisant la relation de Pascal)} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

□

4 Développement d'une somme

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j = 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j + \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \times \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left[x_k \times \sum_{j=1}^n x_j \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_k \times x_j \right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j
\end{aligned}$$

On peut aussi séparer cette somme

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k=j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j + \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k^2}_{\text{somme sur les indices } (k,j) \text{ tels que } k=j} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j
\end{aligned}$$

On remarque aussi qu'en permutant les indices des deux sommes (les variables sont muettes)

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n \\ j < k}} x_j x_k$$

Qui, par commutativité du produit dans \mathbb{C} nous donne cette égalité

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j$$

On a donc bien l'identité attendue :

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = 2 \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j + \sum_{k=1}^n x_k^2$$

□

5 Montrer que tout entier $n > 2$ admet un diviseur premier

Démonstration. Raisonnons par récurrence forte avec la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n > 2$ par

$$\mathcal{P}(n) : \llcorner \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, k \text{ admet un diviseur premier} \llcorner$$

— Initialisation : $n \leftarrow 2$

Soit $k \in \llbracket 2, 2 \rrbracket$ fixé quelconque. Nécessairement, $k = 2$. or, 2 admet 2 pour diviseur premier.

Donc $\forall k \in \llbracket 2, 2 \rrbracket, k$ admet un diviseur premier, ce qui prouve $\mathcal{P}(2)$.

— Hérité : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$, il nous faudra montrer que $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, k$ admet un diviseur premier

Soit $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ fixé quelconque.

★ Si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, alors la véracité de $\mathcal{P}(n)$ nous permet de conclure, et de dire que k admet un diviseur premier.

★ Sinon $k = n+1$

◇ Si $n+1$ est premier, alors il admet k comme diviseur premier

◇ Sinon, $\exists d \in \llbracket 2, n \rrbracket : d \mid n+1$

Mais, puisque $d \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ nous permet d'affirmer que d admet un diviseur premier p . Donc par transitivité de la relation de divisibilité

$$(p \mid d \text{ et } d \mid n) \implies p \mid n$$

□

6 Montrer par récurrence qu'une fonction polynomiale à coefficients réels est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls

Démonstration. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(n)$: toute fonction polynômiale identiquement nulle sur \mathbb{R} a tous ses coefficients nuls

Autrement dit

$$\mathcal{P}(n) : \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \right) \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0$$

◇ Pour $n \leftarrow 0$ Soit $a_0 \in \mathbb{R}$ fixé quelconque tel que $\forall x \in \mathbb{R}, a_0 x^0 = 0$ Alors $a_0 = 0$

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie Soient $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ Posons $Q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = 0$ D'une part

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{Q(2x)}_{=0} - 2^{n+1} \underbrace{Q(x)}_{=0} = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, Q(2x) - 2^{n+1}Q(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k (2x)^k - 2^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k (2^k - 2^{n+1}) x^k\end{aligned}$$

Le terme d'indice $n+1$ s'annule, si bien que l'on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(2x) - 2^{n+1}Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k (2^k - 2^{n+1}) x^k$$

Qui est une fonction polynômiale de degré $\leq n$, ce qui permet d'appliquer $\mathcal{P}(n)$ pour $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \leftarrow (a_k (2^k - 2^{n+1}))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

Donc $\forall x \in \llbracket 0, n \rrbracket : a_k (2^k - 2^{n+1}) = 0$ et puisque $2^k - 2^{n+1} \neq 0$, on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0$$

L'expression de Q devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k x^k}_{=0} + a_{n+1} x^{n+1} = 0$$

Donc en particulierisant pour $x \leftarrow 1$, on en déduit que $a_{n+1} = 0$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. □

7 Montrer par analyse/synthèse qu'une fonction réelle d'une variable réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fixée quelconque.

◇ Analyse : Supposons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose de manière unique en $f = g + h$ avec g paire et h impaire (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$). Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

Par demi somme, nous avons donc

$$\begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$$

Ainsi, si une telle décomposition existe, c'est

$$\begin{cases} g : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

◇ Synthèse : Posons

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

Remarquons, d'une part que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Vérifions si les fonctions g et h vérifient les conditions de parité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \text{ ainsi } g \text{ est paire.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \text{ ainsi } h \text{ est impaire}$$

□

8 Illustration graphique de certaines identités trigonométriques

Démonstration.

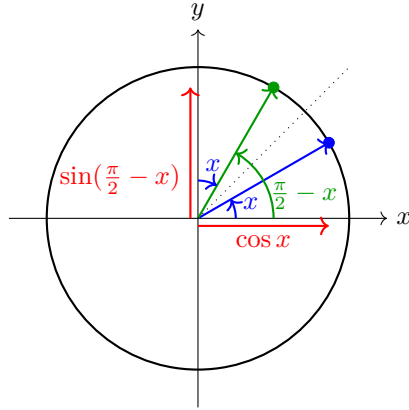


FIGURE 1 – Illustration de $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$. On retrouve l'égalité par réflexion sur la première bissectrice.

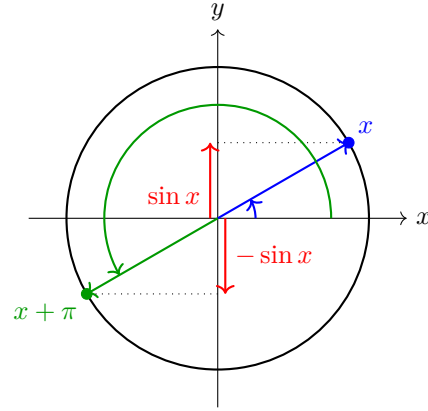


FIGURE 2 – Illustration de $\sin(x + \pi) = -\sin x$. On retrouve l'égalité par symétrie centrale.

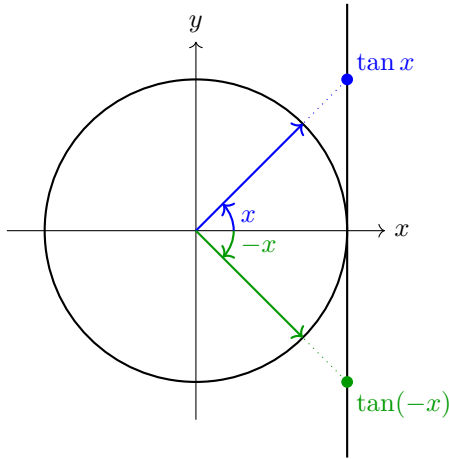


FIGURE 3 – Illustration de $\tan(-x) = -\tan x$. On retrouve l'égalité par réflexion sur l'axe des abscisses.

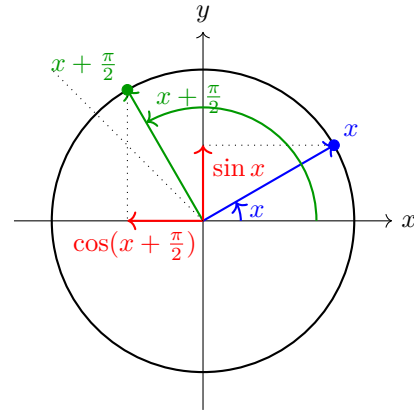


FIGURE 4 – Illustration de $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$. On retrouve l'égalité par réflexion sur la deuxième bissectrice.

□

9 Technique de résolution des équations trigonométriques du type $A \cos x + B \sin x = C$

Démonstration. Étudions l'équation d'inconnue x

$$A \cos x + B \sin x = C$$

★ Si $A = 0$ et $B = 0$

- ◇ Si $C = 0$ l'équation admet \mathbb{R} pour ensemble de solutions
- ◇ Sinon, l'équation n'admet pas de solutions

★ Sinon,

Factorisons par $\sqrt{A^2 + B^2}$ (ce qui a un sens car $(A, B) \neq (0, 0) \implies \sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$)

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Le nombre complexe $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + i \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ est de module 1, donc $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos \varphi} + i \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin \varphi}$$

Ainsi,

$$(\cos \varphi \cos x - \sin \varphi \sin x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

donc

$$\cos(\varphi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\diamond \text{ Si } \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \leq 1$$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} &\iff \begin{cases} \phi + x \equiv \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} [2\pi] \\ \text{ou} \\ \phi + x \equiv -\arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \bigcup \begin{cases} \left\{ \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \left\{ -\arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{cases} \\ &\iff x \in \left\{ \varepsilon \arccos \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

\diamond Sinon, l'équation n'admet aucune solution

□

10 Étude complète de la fonction tangente, tracé du graphe et en déduire celui de cotangente.

Démonstration.

□

11 Expression de $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ en fonction de $\tan \frac{\theta}{2}$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Posons $u = \tan \frac{\theta}{2}$

$$\diamond \tan \theta = \frac{2u}{1-u^2}$$

En utilisant la formule classique de trigonométrie

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

On obtient, avec $(a, b) \leftarrow (\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$\diamond \cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + u^2} - 1 \\ &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{aligned}$$

$$\diamond \sin \theta \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \cos \theta \tan \theta \\ &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \times \frac{2u}{1-u^2} \\ &= \frac{2u}{1+u^2} \end{aligned}$$

□

12 Preuve des formules du type $\cos p + \cos q = \dots$

Démonstration. Partons des formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{aligned}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \quad (\spadesuit)$$

Si bien qu'en posant

$$\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

D'où, en injectant dans (??)

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

□

13 Limite de fonctions monotones sur un segment.

Soit f une fonction croissante définie sur $]a, b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2, a < b$.

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b qui vaut $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup f(]a, b[)$.
- Si f n'est pas majorée, alors f tend vers $+\infty$ en b .

Démonstration. ★ Supposons que f est majorée sur $]a, b[$. L'ensemble $f(]a, b[)$ est une partie de \mathbb{R} , non vide et majorée, donc admet une borne supérieure $S \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = S$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. On veut construire un $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]b-\eta, b[, |f(x) - S| \leq \varepsilon$. D'après la caractérisation de la borne supérieure par les epsilon appliquée pour ε ,

$$\exists y_\varepsilon \in f(]a, b[) : S - \varepsilon < y_\varepsilon \leq S$$

Or, $y_\varepsilon \in f(]a, b[) \implies \exists x_\varepsilon \in]a, b[: y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$ Posons $\eta = b - x_\varepsilon > 0$ et vérifions qu'il convient. Soit $x \in]b-\eta, b[$ fixé quelconque. on a

$$b - \eta < x \implies b - (b - x_\varepsilon) < x \implies x_\varepsilon < x \implies \underbrace{f(x_\varepsilon)}_{y_\varepsilon} \leq f(x)$$

De plus, $f(x) \leq S$ par définition de la borne supérieure, donc

$$S - \varepsilon < y_\varepsilon \leq f(x) \leq S$$

Donc $|f(x) - S| \leq \varepsilon$ ce qui prouve la convergence.

★ Supposons que f n'est pas majorée sur $]a, b[$. On veut montrer que f tend vers $+\infty$, autrement dit que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in]b - \eta, b[, f(x) \geq A$$

Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. f n'est pas majorée, donc $\exists x_0 \in]a, b[: f(x_0) \geq A$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$ Soit $x \in]b - \eta, b[$ fixé quelconque.

$$b - \eta < x \implies b - (b - x_0) < x \implies x_0 < x \implies f(x_0) \leq f(x)$$

Donc $f(x) \geq f(x_0) \geq A$ Donc $\forall x \in]b - \eta, b[, f(x) \geq A$. Donc f tend vers $+\infty$ en b .

□