

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 11

Félix Rondeau

08 décembre 2024

## 1 Preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes à partir du cas réel.

*Démonstration.*

**Résultat préliminaire : existence d'une sous-suite convergente commune.**

— La suite  $a$  étant bornée, on peut lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass :

$\exists a_\infty \in \mathbb{R} : \exists \phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(b_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b_\infty$ .

— La suite  $(b_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  étant bornée (en tant que sous-suite d'une suite bornée), on peut lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass :

$\exists b_\infty \in \mathbb{R} : \exists \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(b_{\phi \circ \psi})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b_\infty$

Observons alors que  $(a_{\phi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $(a_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  donc elle converge vers  $a_\infty$ . Ainsi, l'extractrice  $\chi = \phi \circ \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante est telle que les deux sous-suites  $(a_{\chi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_{\chi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent.

**Preuve du théorème.**

Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite bornée. Par définition,

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Posons  $x = (\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $y = (\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq |u_n| \leq M \quad \text{et} \quad |y_n| \leq |u_n| \leq M$$

Par conséquent,  $x$  et  $y$  sont deux suites réelles bornées, donc le résultat précédemment prouvé permet de construire une extractrice  $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites qui convergent dans  $\mathbb{R}$  vers leur limites respectives  $x_\infty$  et  $y_\infty$ . Ainsi, la suite  $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , extraite de  $u$ , converge vers  $x_\infty + iy_\infty$ . □

## 2 Illustrer par des exemples que la convergence de la suite complexe $(u_n) = (e^{i\theta_n})$ n'implique pas la convergence de $(\theta_n)$ même si on impose à $(\theta_n)$ d'être dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour la rendre unique et bornée.

*Démonstration.* Considérons la suite  $(\theta_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

Alors, la suite  $(u_n) = (e^{i\theta_n}) = (i)_{n \in \mathbb{N}}$  converge mais  $(\theta_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

Considérons à présent une seconde définition de la suite  $(\theta_n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \equiv 0[2] \\ 2\pi - \frac{1}{n+1} & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases}$$

Cette définition impose à la suite  $(\theta)$  d'être à valeurs dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , et selon elle, la suite  $(u_n) = (e^{i\theta_n})$  converge vers 1. Cependant,  $(\theta_n)$  diverge car elle a deux valeurs d'adhérence qui sont 0 et  $2\pi$ . □

### 3 Calculer la limite de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de $z \in \mathbb{C}$ .

*Démonstration.*

Si  $z \neq 0$ ,

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right)} = e^{n \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}} \cdot \frac{z}{n}} = e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}} \cdot z}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

— Si  $z = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 = e^0$$

Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

□

### 4 Résolution explicite (sur un exemple) d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants avec un second membre produit d'un polynôme et d'une suite géométrique.

*Démonstration.*

— **Résolution d'une relation d'ordre 1.**

Considérons une équation de récurrence linéaire d'ordre 1 de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = v_n$$

L'ensemble des suites la vérifiant est la droite affine passant par une solution particulière et dirigée par la droite vectorielle des solutions de l'équation homogène associée. Cette droite vectorielle vaut, **dans le cas où  $a$  est nul**

$$\{\lambda \cdot \gamma^0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

et **dans le cas où  $a$  est non nul**

$$\{(\lambda \cdot a^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Si le second membre est de la forme  $v_n = P(n)c^n$  avec  $P$  un polynôme, on cherche une solution particulière de la forme  $Q(n)c^n$  avec, **si  $c \neq a$** ,  $Q$  un polynôme de  $\mathbb{K}$  tel que

$$\deg Q = \deg P$$

et **si  $c = a$** ,  $Q$  un polynôme tel que

$$\deg Q = \deg P + 1$$

— **Résolution d'une relation d'ordre 2.** Considérons une équation de récurrence linéaire d'ordre 2 de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = v_n$$

avec  $(a_0, a_1) \in \mathbb{K}^2$ . L'ensemble des suites la vérifiant est le plan affine passant par une solution particulière  $w$  et dirigé par le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène.

— Si  $\mathbb{K}$  désigne le corps des complexes, on distingue en fonction du discriminant  $\Delta$  de l'équation caractéristique deux cas :

- Lorsque  $\Delta = 0$ , l'équation caractéristique possède une racine double  $r_0 \in \mathbb{C}$  et dans le cas où  $a_0$  et  $a_1$  ne sont pas tous deux nuls, le plan vectoriel des solutions de la relation de récurrence homogène est

$$\{((\lambda + \mu n)r_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

et sinon, il vaut

$$\{\lambda \gamma^0 + \mu \gamma^1 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

- Lorsque  $\Delta \neq 0$ , l'équation caractéristique possède deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  et l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène est

$$\{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

- Si  $\mathbb{K}$  désigne le corps des réels, on distingue en fonction du discriminant  $\Delta$  de l'équation caractéristique trois cas :

- Lorsque  $\Delta = 0$ , l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène est similaire à celui du cas complexe.
- De même lorsque  $\Delta > 0$ , l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène est similaire du cas  $\Delta \neq 0$  dans le cas complexe.
- Enfin, lorsque  $\Delta < 0$ , l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène est

$$\{(\rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)))_{n \in \mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On cherche une solution particulière de la forme  $Q(n)a^n$  avec,  $Q$  un polynôme de degré égal à celui de  $P$  si  $a$  n'est pas racine de l'équation caractéristique et du degré de  $P$  augmenté d'un nombre égal à la multiplicité de la racine  $a$  sinon.

□

## 5 Existence d'une relation de Bezout

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = a \wedge b$$

*Démonstration.*

- **Démonstration pour**  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .

Considérons la propriété de récurrence définie pour tout  $b \in \mathbb{N}$  par

$$\mathcal{P}(b) : \forall a \in \mathbb{Z}, \forall c \in \llbracket 0, b \rrbracket, \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + cv = a \wedge c$$

- Supposons que  $b = 0$ .  
Soit  $a \in \mathbb{Z}$  fixé quelconque.  
Si  $a = 0$ ,  $a \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$  donc  $a \wedge 0 = 0 \times a + 232 \times b$ .  
Sinon,  $a \neq 0$ ,  $u = \frac{a}{|a|} \in \{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$  et

$$ua + 232 \times 0 = \frac{a^2}{|a|} = \frac{|a|^2}{|a|} = |a| = a \wedge 0$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(0)$  est vraie

- Soit  $b \in \mathbb{N}$  fixé quelconque tel que  $\mathcal{P}(b)$  est vraie.  
Soient  $a \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \llbracket 0, b + 1 \rrbracket$  fixés quelconques.

- Si  $c \in \llbracket 0, b \rrbracket$ , la véracité de  $\mathcal{P}(b)$  permet d'affirmer que  $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + cv = a \wedge c$ .
- Sinon,  $c = b + 1$ . Effectuons la division euclidienne de  $a$  par  $b + 1$  :

$$\exists!(q, r) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, b \rrbracket : a = (b + 1)q + r$$

Or, d'après le lemme d'Euclide,

$$a \wedge (b + 1) = r \wedge (b + 1)$$

Or  $r \in \llbracket 0, b \rrbracket$  donc  $\mathcal{P}(b)$  s'applique pour  $a \leftarrow b + 1$  et  $c \leftarrow r$  :

$$\exists (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 : (b + 1)u_0 + rv_0 = (b + 1) \wedge r$$

si bien que

$$a \wedge (b + 1) = (b + 1)u_0 + rv_0 = (b + 1)u_0 + (a - q(b + 1))v_0 = av_0 + (b + 1)(u_0 - qv_0)$$

d'où le résultat attendu en posant  $u = v_0$  et  $v = u_0 - qv_0$ .

Par conséquent,  $\mathcal{P}(b + 1)$  est vraie.

— **Démonstration du cas général :**  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ .

Appliquons le résultat prouvé dans le cas précédent à  $(a, |b|) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  :

$$\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2 : au_1 + bv_1 = a \wedge |b|$$

Posons  $u = u_1$  et  $v = -v_1$ . On a  $(u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$  et

$$au + bv = au_1 + |b|v_1 = a \wedge |b| = a \wedge b$$

□

## 6 Théorème de Gauss

Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ .

$$\left. \begin{array}{l} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right\} \implies a \mid c$$

*Démonstration.* Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  fixés quelconques.

$a$  divise  $bc$  donc

$$\exists k \in \mathbb{Z} : ka = bc \tag{1}$$

$a$  et  $b$  sont premiers entre eux donc

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1 \tag{2}$$

En multipliant la première relation par  $c$ , nous obtenons

$$auc + bvc = c$$

donc, en utilisant la deuxième relation,

$$auc + akv = c \iff a(\underbrace{uc + kv}_{\in \mathbb{Z}}) = c$$

ce qui montre que  $a$  divise  $c$ . □

## 7 Si $a \wedge c = b \wedge c = 1$ alors $ab \wedge c = 1$ et sa généralisation au cas de $n$ entiers premiers avec un même entier.

*Démonstration.* Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{Z}^{p+1}$   $n + 1$  entiers fixés quelconques premiers entre eux deux à deux. Le théorème d'existence d'une relation de bezout assure donc que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists (u_i, v_i) \in \mathbb{Z}^2 : au_i + b_i v_i = 1$$

donc que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists (u_i, v_i) \in \mathbb{Z}^2 : b_i v_i = 1 - au_i$$

si bien qu'en effectuant le produit membre à membre de ces  $p$  égalités,

$$\prod_{i=1}^p (b_i v_i) = \prod_{i=1}^p (1 - au_i)$$

En développant le membre de droite, on obtient que

$$\exists U \in \mathbb{Z} : \prod_{i=1}^p (b_i v_i) = 1 - aU$$

si bien qu'en posant  $V = \prod_{i=1}^p v_i$ ,

$$\left( \prod_{i=1}^p b_i \right) V = 1 - aU$$

ainsi, il existe deux entiers relatifs  $U$  et  $V$  tels que

$$aU + \left( \prod_{i=1}^p b_i \right) V = 1$$

Le théorème de caractérisation de la propriété «deux entiers sont premiers entre eux» par une relation de Bezout permet donc de conclure que

$$a \wedge \left( \prod_{i=1}^p b_i \right) = 1$$

□

## 8 $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$

*Démonstration.* Soient  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  fixés quelconques. Nous savons que

$$\exists (a', b') \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \quad \text{où } d = a \wedge b$$

Observons alors que

$$\begin{aligned} (a \wedge b)(a \vee b) &= (da' \wedge db')(da' \vee db') \\ &= d(\underbrace{a' \wedge b'}_{=1}) \times d(a' \vee b') \\ &= d^2(a' \vee b') \end{aligned} \tag{*}$$

Calculons  $a' \vee b'$  :

- $a'b'$  est un multiple commun à  $a'$  et  $b'$  donc  $a' \vee b' | a'b'$ .
- $a' \vee b'$  est un multiple commun à  $a'$  et  $b'$  donc

$$\left. \begin{array}{l} a' \wedge b' = 1 \\ a' | a' \vee b' \\ b' | a' \vee b' \end{array} \right\} \implies a'b' | a' \vee b'$$

Ainsi,  $a' \vee b'$  et  $a'b'$  se divisent l'un l'autre donc ils sont associés (égaux ou opposés), or  $a' \vee b' \geq 0$  donc  $a' \vee b' = |a'b'|$ .

Par conséquent, en reprenant l'égalité (\*),

$$(a \wedge b)(a \vee b) = d^2 a' \vee b' = d^2 |a'b'| = |da' \times db'| = |ab|$$

□