Khôlles de Mathématiques - Semaine 14

Kylian Boyet

13 Janvier 2024

1 Expression de dérivées successives

Exprimer : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{D}_f$.
Considérons le prédicat $P(\cdot)$ définit pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n)\ :\ \text{"}\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right]\ \text{"}$$

Initialisation :
Pour $n = 0$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}}\left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{0}\frac{1}{k!}\right],$$

donc $P(0)$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right]\right)'$$

par véracité de $P(n)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n n! x^n - (-1)^n (n+1)! x^n \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right]}{x^{2(n+1)}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!\ln(x) - (-1)^{n+1}(n+1)!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}}{x^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}\left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\right] \end{aligned}$$

c'est l'expression recherchée, donc $P(n+1)$.
Par théorème de récurrence sur $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2 Théorème de Rolle et formule des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit I le segment a, b.
Soit $f\ :\ I\ \to\ \mathbb{R}$ continue sur ledit segment et dérivable sur l'ouvert associé.

(i) Théroème de Rolle :
Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists\ c \in \mathring{I}$ tel que $f'(c) = 0$

(ii) Formule des accroissements finis :
$\exists\ c \in \mathring{I}\ :\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration. Soient de tels objets.
Prouvons (i), donc supposons $f(a) = f(b)$.
f est continue sur I donc par le théorème de Weierstraß elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment :

$$\exists\ (x_m, x_M) \in I^2\ :\ (f(x_m) = \min f(I)) \wedge (f(x_M) = \max f(I))$$

donc, si $(x_m, x_M) \in \{a, b\}^2$, alors,

$$\forall x \in I,\ f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(a)$$

donc $f(x) = f(a)$ et donc tous les points intermédiaires à I sont des c valident.
Sinon, $(x_m \notin \{a, b\}) \vee (x_M \notin \{a, b\})$, quitte à prendre l'autre valeur, supposons que $x_M \notin \{a, b\}$, ainsi, $x_M \in \mathring{I}$ et $f(x_M)$ est un maximum global donc, f étant dérivable sur $\mathring{I}$ elle est dérivable en x_M donc $f'(x_M) = 0$, on pose $c = x_M$, ce qui conclut.

Prouvons (ii).
Posons $d\ :\ I\ \to\ \mathbb{R},\ x\ \mapsto\ f(x)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$. d est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. On a $d(a) = 0$ et $d(b) = 0$ donc $d(a) = 0 = d(b)$. On peut alors appliquer le Théorème de Rolle pour $f \leftarrow d, a \leftarrow a$ et $b \leftarrow b$: il existe $c \in \mathring{I}$ tel que $d'(c) = 0$, c'est le résultat. □

3 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\mathring{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$, posons X_- la demi-droite fermée en x_0 et vers $-\infty$, de même X_+ la demi-droite fermée en x_0 et vers $+\infty$.

(i) $\star$ Si $\exists\ m \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \mathring{I},\ m \leq f'(x)$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

$\star$ Si $\exists\ M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x)$$

$\star$ Si $\exists\ (m, M) \in \mathbb{R}^2\ :\ \forall x \in \mathring{I},\ m \leq f'(x) \leq M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

(ii) Si $\exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \mathring{I},\ |f'(x)| \leq M$, alors,

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$

Démonstration. (i) Soit $x \in I$ et posons S le segment d'extrémités x et x_0.
$\star$ Si $x \neq x_0$, f est continue sur S et dérivable sur $\mathring{S}$, la formule des accroissements finis donne alors l'existence d'un c appartenant à $\mathring{S}$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$$

Si $x > x_0,\ x - x_0 > 0$, or $m \leq f'(c) \leq M$ donc

$$m(x - x_0) \leq (x - x_0)f'(c) \leq M(x - x_0)$$

si bien que
$$m(x-x_0) \leq f(x)-f(x_0) \leq M(x-x_0)$$
d'où
$$f(x_0)+m(x-x_0) \leq f(x) \leq f(x_0)+M(x-x_0).$$
Si $x < x_0$, il suffit de retourner l'inégalité lors de la première multiplication et (i) est prouvé.

(ii) Soit $y \in I$.
L'hypothèse $\forall x \in \overset{\circ}{I},\ |f'(x)| \leq M$ équivaut à $\forall x \in \overset{\circ}{I},\ -M \leq f'(x) \leq M$, donc on peut appliquer (i) pour $x_0 \leftarrow y,\ M \leftarrow M$ et $m \leftarrow -M$:
$$\forall x \in I \cap [y,+\infty[,\ f(y)-M(x-y) \leq f(x) \leq f(y)+M(x-y) \implies |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$
car $x-y>0$, et
$$\forall x \in I \cap]-\infty,y],\ f(y)+M(x-y) \leq f(x) \leq f(y)-M(x-y) \implies |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$
car $x-y<0$. Par conséquent, $\forall (x,y) \in I^2,\ |f(y)-f(x)| \leq M|y-x|$. □

4 Caractère lipschitzien d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un segment

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, I le segment a,b. Alors f est $||f'||_{\infty,I}$-lipschitzienne sur I.

Démonstration. Soient de tels objets.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I},\mathbb{R})$.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ donc f' est continue sur I donc le réel $||f'||_{\infty,I}$ est bien défini et
$$\forall x \in \overset{\circ}{I},\ |f'(x)| \leq ||f'||_{\infty,I}.$$
Ces propriétés permettent d'appliquer le corollaire du TAF qui conclut que f est $||f'||_{\infty,I}$-lipschitzienne. □

*

5 Théorème du prolongement de la propriété de la dérivabilité

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

Lemme :
Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I\backslash\{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I\backslash\{a\}} \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } a \end{cases}$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$

Théorème :
Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I\backslash\{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I\backslash\{a\}} \text{ admet une limite } \textbf{finie } \ell \in \mathbb{R} \text{ en } a \end{cases}$, alors $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) = \ell \ (\textbf{donc } f' \textbf{ est continue en } a) \end{cases}$

Démonstration. Prouvons le lemme pour $\ell \in \mathbb{R}$, c'est le cas qui nous intéresse.
Soient de tels objets. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f'_{|I\backslash\{a\}}(x) = \ell$ pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$:
$$\exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^* \ :\ \forall x \in I\backslash\{a\},\ |x-a| \leq \eta \implies |f'_{|I\backslash\{a\}}(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$
Fixons un tel η.
Soit $x \in I\backslash\{a\}$ tel que $|x-a| \leq \eta$.
La fonction f est continue sur I donc f est continue sur le segment d'extrémités a et x qui est par ailleurs inclus dans I par convexité d'un intervalle.

La fonction f est dérivable sur I donc f est dérivable sur l'intervalle ouvert a, x qui est aussi inclus dans $\mathring{I}$ par convexité.
L'égalité des accroissements finis s'applique à f sur l'intervalle a et x :

$$\exists\ c_x \in]a,x[\cup]x,a[\ :\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$$

Or $|c_x - a| \leq |x-a| \leq \eta$ donc ladite définition de la limite s'applique pour $x \leftarrow c_x$: $|f'(c_x) - \ell| \leq \varepsilon$ si bien que

$$|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell| \leq \varepsilon.$$

D'où le lemme.

Prouvons alors le théorème.
Sous ces hypothèses, le lemme s'applique donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$, or $\ell \in \mathbb{R}$, donc le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a ce qui prouve la dérivabilité de f en a et $f'(a) = \ell$.
Ce qui suffit. $\square$