Khôlles de Mathématiques - Semaine 15

Hugo Vangilluwen

20 Janvier 2024

1 Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x \in I^n$, $\lambda \in [0;1]^n$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I \wedge f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \tag{1}$$

Démonstration. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}\forall x \in I^n, \forall \lambda \in [0;1]^n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I \wedge f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)\text{”}$$

* Soient $x \in I^1$ et $\lambda \in [0;1]^1$ tel que $\sum_{k=1}^{1} \lambda_k = 1$.
  Alors $\lambda_1 = 1$. Trivialement, $\sum_{k=1}^{1} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 = x_1 \in I$.
  De plus, $f\left(\sum_{k=1}^{1} \lambda_k x_k\right) = f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1) = \sum_{k=1}^{1} \lambda_k f(x_k)$.
  Donc $\mathcal{P}(1)$ vrai.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vrai.
  Soient $x \in I^{n+1}$ et $\lambda \in [0;1]^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.
  $\{x_k \mid ; k \in [\![1; n+1]\!]\}$ est une partie non vide ($n \geqslant 1$) d'un ensemble totalement ordonnée $(\mathbb{R}, \leqslant)$.
  Posons $a = \min\{x_k \mid ; k \in [\![1; n+1]\!]\}$ et $b = \max\{x_k \mid ; k \in [\![1; n+1]\!]\}$. D'où

$$a \underbrace{=}_{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a \underbrace{\leqslant}_{a \leqslant x_k} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \underbrace{\leqslant}_{x_k \leqslant b} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k b \underbrace{=}_{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1} b$$

  Or $\{x_k \mid ; k \in [\![1; n]\!]\} \subset I$ (car $x \in I^n$) donc $a \in I \wedge b \in I$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \in [a;b] \underbrace{\subset}_{\substack{\text{par convexité} \\ \text{de l'intervalle } I}} I$$

  $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ donc $\exists i_0 \in [\![1; n+1]\!] : \lambda_{i_0} \neq 1$ (sinon $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = n+1 \neq 1$ car $n \neq 0$).

Fixons un tel i_0.

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n+1} \lambda_k x_k + \lambda_{i_0} x_{i_0}\right)\\
&= f\left(\lambda_{i_0} x_{i_0} + (1-\lambda_{i_0}) \sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{i_0}} x_k\right)\\
&\underbrace{\leqslant}_{\substack{\text{Par convexité}\\\text{de } f}} \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + (1-\lambda_{i_0})\, f\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{i_0}} x_k\right)
\end{aligned}$$

Or $\forall i \in [\![1; n+1]\!] \lambda_i \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n+1} \lambda_k = 1-\lambda_{i_0}$ Donc $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i_0}} \in [0;1]$ et $\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{i_0}} = 1$. Nous pouvons appliquer $\mathcal{P}(n)$ pour $\lambda_i \to \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i_0}}$:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leqslant \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + (1-\lambda_{i_0}) \sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{i_0}} f\left(x_k\right)\\
&\leqslant \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n+1} \lambda_k f\left(x_k\right)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f\left(x_k\right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.

□

2 Inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^{*n}$.

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \tag{2}$$

Démonstration. Soit de tels objets. Posons $\forall k \in [\![1; n]\!], \lambda_k = 1/n$.
Sachant que l'exponentielle est convexe, appliquons l'inégalité de Jensen pour $x_k \leftarrow ln(x_k)$ (autorisé car $x_k \in \mathbb{R}_+^*$) :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(x_k\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \exp\left(\ln\left(x_k\right)\right)$$

L'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme népérien et est un morphisme additif. Nous obtenons ainsi l'inégalité recherchée. □