

Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

27 février 2024

Table des matières

1	Semaine 6	3
1.1	Montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire. Donnez un/des exemples.	3
1.2	Limite (et preuve) lorsque x tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.	3
1.3	Limite en 0 de $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et limite en $+\infty$ suivant n de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.	4
1.4	Présentation exhaustive de la fonction arcsin.	6
1.5	Présentation exhaustive de la fonction arccos.	6
1.6	Présentation exhaustive de la fonction arctan.	7
1.7	2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$, dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.	8
1.8	Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.	9
2	Semaine 7	10
2.1	Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$. En Dédurre qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.	10
2.2	Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe	11
2.3	Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes	11
2.4	Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle	11
3	Semaine 8	12
3.1	Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDL2 à coeff. constants).	12
3.2	Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur I (cas complexe puis cas réel).	12
3.3	Les solutions d'une EDL ₂ constituent un espace vectoriel.	14
3.4	Formules de Cramer pour les systèmes 2×2	14
4	Semaine 9	17
4.1	Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.	17
4.2	Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est son plus grand élément.	17
4.3	Théorème de la division Euclidienne dans \mathbb{Z}	18
4.4	Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire	18
5	Semaine 10	19
5.1	Caractérisation de la densité d'une partie A de \mathbb{R} dans une partie B de \mathbb{R} la contenant avec des ε .	19
5.2	Théorème de la division pseudo-euclidienne dans \mathbb{R}	19
5.3	\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans \mathbb{R}	20
5.4	Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente	20
5.5	Une suite convergente est bornée	21

6	Semaine 11	22
6.1	Caractérisation séquentielle de la densité.	22
6.2	Théorème de la convergence monotone	22
6.3	Théorème de Césarò	23
6.4	Théorème de passage à la limite dans une inégalité.	24
6.5	Théorème des suites adjacentes	24
6.6	*Facultative* Théorème de Bolzano-Weierstrass	24
6.7	*Facultative* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.	25
7	Semaine 12	27
7.1	Résolution d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et avec second membre	27
7.2	Résolution d'une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dans \mathbb{C} lorsque l'équation caractéristique possède un discriminant non nul	27
7.3	Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.	28
7.4	Monotonie de u et des sous-suites des termes pairs et impairs de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la monotonie de f	29
7.5	L'intérieur de l'ensemble des rationnels est vide.	29
7.6	Théorème sans nom version continue au voisinage de a	29
8	Semaine 13	31
8.1	Théorème de composition des limites	31
8.2	Théorème des valeurs intermédiaires	31
8.3	Théorème de Weierstraß	32
9	Semaine 14	34
9.1	Expression de dérivées successives	34
9.2	Dérivé d'une bijection réciproque	34
9.3	Dérivée d'un extremum local intérieur au domaine de définition	35
9.4	Théorème de Rolle et formule des accroissements finis	35
9.5	Inégalité des accroissements finis	36
9.6	Caractère lipschitzien d'une fonction \mathcal{C}^1 sur un segment	38
9.7	Théorème du prolongement de la propriété de la dérivabilité	38
9.8	La fonction ζ (pas celle-là une autre) est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}	38
10	Semaine 15	40
10.1	Inégalité de Jensen	40
10.2	Inégalité arithmético-géométrique	41
11	Semaine 16	42
11.1	Deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont le même signe sur un voisinage de a	42
11.2	Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction \mathcal{C}^∞ admette un extremum local ou un point d'inflexion	42
12	Semaine 17	43
12.1	Théorème de Bézout	43
12.2	Théorème de Gauss	43
12.3	Résoudre une équation du type $ax + yb = c$	43
13	Semaine 18	45
13.1	L'ensemble des nombres premiers est infini	45
13.2	Caractérisation de la valuation p -adique	45
13.3	Caractérisation de $a b$ par les valuations p -adiques et preuve de leur propriété de morphisme.	45
13.4	Expression du pgcd et du ppcm à partir des décomposition en facteurs premiers de a et b	46
13.5	Pour p premier, $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$, en déduire le petit Th. de Fermat (2 versions), expression du résultat dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	46
13.6	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.	47
13.7	Les éléments inversibles d'un anneau A forment un groupe multiplicatif noté (A^\times, \times)	47

13.8 L'image directe par un morphisme d'anneau d'un sous-anneau de l'anneau de départ est un sous anneau de l'anneau d'arrivée. De même pour l'image réciproque.	48
---	----

1 Semaine 6

1.1 Montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

Démonstration. Soit $f : I \rightarrow F$, avec I, F deux parties non-vides de \mathbb{R} , une telle fonction et notons f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est impaire sur I , alors pour tout $x \in I$, $-x \in I$, ainsi I est centré en 0 et on a :

$$\forall x \in I, f(-x) = -f(x).$$

Ainsi, prenons $y \in F$, alors $-y \in F$ par imparité et bijectivité de f . On a donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

D'où l'imparité de f^{-1} .

Pour ce qui est de l'exemple, prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction \sin $\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ que l'on notera $\widetilde{\sin}$. Sa bijection réciproque est bien entendu $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

De la même manière que dans la démonstration du cas général, prenons $y \in [-1, 1]$, comme $[-1, 1]$ est centré en 0, $-y \in [-1, 1]$, on a dès lors :

$$\begin{aligned} \arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\ &= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\ &= -\arcsin(y). \end{aligned}$$

□

1.2 Limite (et preuve) lorsque x tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration. Premièrement, posons :

$$\forall (x, \alpha, \beta) \in [1, +\infty[\times (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}.$$

Deuxièmement, montrons que :

$$\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit $x \in [1, +\infty[= \mathcal{A}$. Nous savons que la fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* , donc en particulier sur \mathcal{A} . Ainsi, \ln est en dessous de toutes ses tangentes, d'où :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Illustration de l'inégalité :



Figure 1. \ln en rouge et la première bissectrice en bleu.

On peut alors diviser par x^2 (car $x \neq 0$) :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{f_{1,2}(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}.$$

Donc par théorème d'encadrement $f_{1,2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Dernièrement, le cas général. Soit $x \in \mathcal{A}$ et soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On fait une preuve directe.

$$\begin{aligned} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \underbrace{\left(\frac{2\alpha}{\beta} \right)^\alpha}_{\substack{\text{cte} \\ \text{(définie!)}}} \cdot \underbrace{\left[\frac{\ln \left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)}{\underbrace{\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)^2}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}} \right]^\alpha}_{\substack{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{d'après le dernier point}}} \\ &\quad \underbrace{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}_{\substack{\text{par composition des limites} \\ \text{par produit}}} \end{aligned}$$

□

1.3 Limite en 0 de $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et limite en $+\infty$ suivant n de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration.

Montrons que $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.

On fait toujours une preuve directe.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{2x}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{c'est} \\ \text{par produit}}} \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right]^2}_{\substack{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \text{limite usuelle} \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \text{par composition}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Trouvons la limite, sous réserve d'existence, de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ suivant n en $+\infty$.

Remarquons que si $q \leq 0$, il est **nécessaire** d'avoir $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ sinon l'expression n'a tout simplement **aucun sens**. De fait, on supposera $q > 0$ tout le long, les cas $q < 0$ se font naturellement (convergence pour $q \in \mathbb{R}_-$).

Soit donc $0 < q < 1$, ce cas est immédiat, $((q^n)^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} = ((q^\alpha)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc il s'agit de la suite géométrique de raison $q^\alpha \in]0, 1[$ et de premier terme $q^{\min_I(n)\alpha}$ ($\min_I(n)$, avec I une partie non vide de \mathbb{N} , car la suite ne démarre pas forcément à 0), donc elle converge vers 0.

Si $q \geq 1$, on montre le cas trivial $\alpha = \beta = 1$:

$$\forall n \in \llbracket [q] + 1, +\infty \llbracket, \quad 0 \leq \frac{q^n}{n!} = \underbrace{\frac{q}{1} \times \frac{q}{2} \times \cdots \times \frac{q}{[q]}}_{= \lambda \text{ (une constante)}} \times \underbrace{\frac{q}{[q] + 1}}_{\leq 1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{q}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{q}{n} \leq \underbrace{\frac{\lambda q}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

Par théorème d'existence de limite par encadrement, $\left(\frac{q^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$, montrons le cas général pour $q \geq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta} = \left(\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!} \right)^\beta = \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!}}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{c'est le cas trivial}}} \right)^\beta}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{par composition des limites } (\beta > 0)}}$$

□

1.4 Présentation exhaustive de la fonction arcsin.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\sin}$ (voir 1.). D'où :

$$\arcsin = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto (\widetilde{\sin})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\sin}$:

1. arcsin est impaire.
2. arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
3. $\arcsin \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.
4. $\arcsin \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
5. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
6. arcsin admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1 .

Graphes de arcsin :



Figure 2. arcsin en bleu, $\widetilde{\sin}$ en vert et la première bissectrice en rouge.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d'arcsin :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(x) \geq x.$$

□

1.5 Présentation exhaustive de la fonction arccos.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0, \pi]}^{[-1, 1]} := \widetilde{\cos}$. D'où :

$$\arccos = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto (\widetilde{\cos})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in [0, \pi]$, $\cos(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\cos}$:

1. \arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
2. $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [0, \pi])$.
3. $\arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[,]0, \pi[)$.
4. $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
5. \arccos admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1 .

Graphes de \arccos :



Figure 3. \arccos en vert, $\widetilde{\cos}$ en violet, la première bissectrice en rouge et $y = \frac{\pi}{2} - x$ en rose.

□

1.6 Présentation exhaustive de la fonction arctan.

Démonstration.

Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} := \widetilde{\tan}$.
D'où :

$$\arctan = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & (\widetilde{\tan})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\tan}$:

1. \arctan est impaire.
2. $\arctan \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
3. $\arctan \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
4. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Graphe de arctan :



Figure 4. arctan en vert, $\widetilde{\tan}$ en bleu, la première bissectrice en rouge, et les fonctions $y = \pm \frac{\pi}{2}$ et $x = \pm \frac{\pi}{2}$ en noir.

On a aussi (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(x) \leq x.$$

Et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

□

1.7 2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$, dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.

Démonstration. L'interprétation géométrique sur $[0, 1]$, celle sur $[-1, 0]$ est laissée au lecteur car il s'agit du même principe modulo des détails :

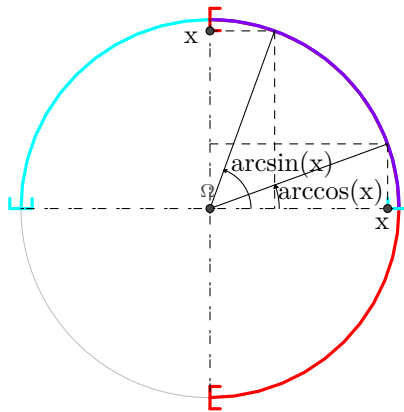


Figure 5.

Preuve formelle :

Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\varphi = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \arccos(\sin(\varphi)) = \varphi + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right),$$

or $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$ d'où $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)) = \frac{\pi}{2} - \varphi$ si bien que :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

□

1.8 Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.

Démonstration.

- Domaine de définition et symétries.

sinh et cosh sont définies sur \mathbb{R} .

De plus,

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$,

$$(ii) \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sinh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \\ \text{et} \\ \cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x). \end{cases}$$

Donc sinh et cosh sont respectivement impaire et paire.

Nous les étudierons sur \mathbb{R}_+ et pour les obtenir les graphes (\mathcal{C}_{\sinh} et \mathcal{C}_{\cosh}) de ces fonctions sur \mathbb{R} à partir de ceux (\mathcal{C}_{\sinh}^+ et \mathcal{C}_{\cosh}^+) obtenus sur \mathbb{R}_+ , nous le compléterons en traçant les images de ces graphes par la symétrie centrale s de centre O et par la réflexion r d'axe (O, \vec{j}) :

$$\mathcal{C}_{\sinh} = \mathcal{C}_{\sinh}^+ \cup s(\mathcal{C}_{\sinh}^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\cosh} = \mathcal{C}_{\cosh}^+ \cup r(\mathcal{C}_{\cosh}^+)$$

- Variations : triviales.
- Branches infinies en $+\infty$ et position relative de \mathcal{C}_{\sinh} et \mathcal{C}_{\cosh} .

$$\frac{\cosh(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty} + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc le graphe de cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique (O, \vec{j}) .

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$$

Donc les graphes des deux fonctions se rapprochent l'un de l'autre arbitrairement près lorsque $x \rightarrow +\infty$, et le graphe de cosh est au-dessus de celui de sinh.

- Tangente au graphe de sinh à l'origine et position relative.

Il s'agira d'étudier $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sinh(x) - x$, de remarquer sa dérivabilité d'en étudier les variations puis de conclure, en précisant que cette étude révèle l'inflexion du graphe de sinh en 0.

□

2 Semaine 7

2.1 Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$. En Dédire qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{Z}$ fq. Calculons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt$$

Si $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{imt}}{im} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{im} - \frac{1}{im} \right) = 0 \end{aligned}$$

Si $m = 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq

Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ les coefficients de $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, et $s \in \mathbb{Z}$, et $r \in \mathbb{R}_+^*$ fq. tels que P soit nulle lorsqu'elle est évaluée sur $\mathcal{C}(0, r)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^n a_k (re^{it})^k \right) e^{-imt} dt \\ &= \sum_{k=0}^n a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it(k-s)}}{2\pi} dt}_{I_k} \end{aligned}$$

On remarque que :

— Si $s \notin [[0, n]]$, $\{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = \emptyset$, Donc

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k \in [[0, n]] \\ k=s}} a_k r^k = 0$$

— Si $s \in [[0, n]]$, $\{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = s$, Donc

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k \in [[0, n]] \\ k=s}} a_k s^k = a_s r^s$$

Or, puisque P s'annule sur le cercle de rayon r et de centre 0, $\mathcal{C}(0, r)$, ces sommes sont aussi nulles. On en déduit, en particulierisant pour un $s \in [[0, n]]$ fixé quelconque que :

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = a_s r^s = 0 \implies a_s = 0$$

Donc

$$(\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall \theta \in \mathbb{R}, P(re^{i\theta}) = 0) \implies \forall s \in [[0, n]]$$

Pour la preuve réciproque, soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \{0\}^{n+1}$ les coefficients nuls de la fonction polynomiale $P \in \mathbb{C}[z]$ définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En remarquant que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$, puisque n'importe quel cercle centré en 0 est un sous ensemble de \mathbb{C} , $\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall z \in \mathcal{C}(0, r), P(z) = 0$. \square

2.2 Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe

Démonstration. Définissons les fonctions f_r et f_i comme les parties réelles et imaginaires de f .

Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned} f_r &= \operatorname{Re}(f), f_i = \operatorname{Im}(f) & g_r &= \operatorname{Re}(g), g_i = \operatorname{Im}(g) \\ \alpha_r &= \operatorname{Re}(\alpha), \alpha_i = \operatorname{Im}(\alpha) & \beta_r &= \operatorname{Re}(\beta), \beta_i = \operatorname{Im}(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) &= \operatorname{Re}((\alpha_r + i\alpha_i)(f_r + if_i) + (\beta_r + i\beta_i)(g_r + ig_i)) \\ &= \underbrace{\alpha_r f_r + \beta_r g_r - \alpha_i f_i - \beta_i g_i}_{\text{Combinaison linéaire de } \underbrace{(f_r, f_i, g_r, g_i) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^4}_{\operatorname{car}(f, g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^2}} \end{aligned}$$

Donc, selon le théorème de stabilité par combinaison linéaire des fonctions à valeurs réelles, $\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $(\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g))' = \alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i'$

On montre de même que $\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $(\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g))' = \alpha_r f_i' + \alpha_i f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r'$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)' &= (\alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i') + i(\alpha_r f_i' + \alpha_i f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r') \\ &= \alpha_r (f_r' + if_i') + \beta_r (g_r' + ig_i') + \alpha_i \underbrace{(-f_i' + if_r')}_{i(f_r' + if_i')} + \beta_i \underbrace{(-g_i' + ig_r')}_{i(g_r' + ig_i')} \\ &= \alpha f' + \beta g' \end{aligned}$$

□

2.3 Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C})$ et $h \in \mathcal{D}^1(I, J)$ (I et J sont deux intervalles réels) fixés quelconques. Notons f_r et f_i respectivement la partie réelle et imaginaire de f .

$$\left. \begin{aligned} h &\in \mathcal{D}^1(I, J) \\ f_r &\in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R}), \text{ car } f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C}) \end{aligned} \right\} \implies f_r \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$$

On montre de même que $f_i \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$.

De plus,

$$\begin{aligned} (f \circ h)' &= (f_r \circ h)' + i(f_i \circ h)' \\ &= (f_r' \circ h) \times h' + i((f_i' \circ h) \times h') \\ &= (f_r' \circ h + if_i' \circ h) \times h' \\ &= (f' \circ h) \times h' \end{aligned}$$

□

2.4 Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ où I est un intervalle réel; Posons $f_r = \operatorname{Re}(f)$ et $f_i = \operatorname{Im}(f)$.

$$\begin{aligned} \forall t \in I, f'(t) = 0 &\iff \forall t \in I, f_r'(t) + if_i'(t) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I, f_r'(t) = 0 \\ \forall t \in I, f_i'(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \lambda_r \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_r(t) = \lambda_r \\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_i(t) = \lambda_i \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in I, f(t) = \lambda \end{aligned}$$

□

3 Semaine 8

3.1 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

Démonstration. Notons $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas $\Delta < 0$ et $\alpha \pm i\beta$ les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \text{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$
Soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies \text{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de Re

$$a_2 \text{Re}(f)'' + a_1 \text{Re}(f)' + a_0 \text{Re}(f) = \text{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$; $\text{Re}(f(t)) = \text{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$. Qui appartient donc à $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$
En suivant le même raisonnement pour $\text{Im}(f)$, ($t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)$) $\in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ fq. Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$.

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de f sont réelles, en notant (a_r, a_i, b_r, b_i) les parties réelles et imaginaires respectives de a et b .

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \text{Re}(f(t)) \\ &= \text{Re}(a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \text{Re}((a_r + i a_i) e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + i b_i) e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r \cos(\beta t) e^{\alpha} - a_i \sin(\beta t) e^{\alpha} + b_r \cos(\beta t) e^{\alpha} + b_i \sin(\beta t) e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r) \cos(\beta t) e^{\alpha} + (b_i - a_i) \sin(\beta t) e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion. □

3.2 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur I (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{array} \right. \quad \text{où } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$$

Si b est continu sur J , alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur J .

Démonstration. Cas 1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nous savons que sous l'hypothèse de continuité de b sur J , les solutions de (EDL2) définies sur J constituent le plan affine S :

$$S = \{\lambda f_1 + \mu f_2 + s \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

où s est une solution particulière de (EDL2), (f_1, f_2) sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent S_h . On a :

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} &\iff \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc que (λ, μ) doit être solution d'un système linéaire (2,2). On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est nul.

Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera D .

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) ($a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0$). On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de Δ . Traitons d'abord le cas $\Delta \neq 0$. On peut choisir :

$$\begin{aligned} f_1(t_0) &= e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2 t_0} \\ f_1'(t_0) &= r_1 e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2 e^{r_2 t_0} \end{aligned}$$

Donc (en sachant que $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$) :

$$D = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1 t_0 + r_2 t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a $\Delta = 0$; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0 e^{r_0 t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0 t_0} (r_0 t_0 e^{r_0 t_0} + e^{r_0 t_0}) - r_0 e^{r_0 t_0} \times t_0 e^{r_0 t_0} = e^{2r_0 t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas, $D \neq 0$, donc le système (2,2) étudié admet une unique solution, donc il existe un unique couple (λ, μ) le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

Cas 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$, $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$, $b \in C^0(J, \mathbb{R})$

Existence : Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le problème de Cauchy admet, dans \mathbb{R} , une solution à valeurs complexes g . Posons $f = \text{Re}(g)$ et montrons que f est une solution réelle du problème de Cauchy.

$$\star \quad g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C}) \text{ donc } f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$$

★ g vérifie $a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b$ sur J donc en prenant $\text{Re}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \text{Re}(a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b) &= \text{Re}(b) \iff a_2 \text{Re}(g'') + a_1 \text{Re}(g') + a_0 \text{Re}(g) = b \\ &\iff a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \text{ sur } J \end{aligned}$$

★ $f(t_0) = \text{Re}(g(t_0)) = \text{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$

★ $f'(t_0) = \text{Re}(g(t_0))' = \text{Re}(g'(t_0)) = \text{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc f est une solution réelle définie sur J au problème de Cauchy.

Unicité : Soient f_1 et f_2 deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$. \square

3.3 Les solutions d'une EDL₂ constituent un espace vectoriel.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, f et g les solutions, définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} , des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur \mathbb{R} de $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Démonstration. La solution s'exprime simplement comme combinaison linéaire de f et g , plus précisément, la combinaison linéaire en α et β . En effet, soient de tels scalaires, et soient f et g de telles solutions, on a :

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'' + a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' + b(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = 0, \text{ par définition des espaces vectoriels.}$$

Et de même, $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(3) = \alpha \cdot f'(3) + \beta \cdot g'(3) = \alpha$, et $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)''(3) = \alpha \cdot f''(3) + \beta \cdot g''(3) = \beta$. Ce qui suffit par unicité des solutions (de la donc) d'un problème de Cauchy dans le cadre du théorème du cours.

Pour ce qui est du plan vectoriel des solutions, noté Ω , notons aussi Φ l'ensemble proposé. L'inclusion $\Phi \subset \Omega$ est triviale par propriété de linéarité des espaces vectoriels. Finalement, pour $\Omega \subset \Phi$, soit $\omega \in \Omega$, forcément, ω vérifie l'EDL₂, mais aussi des conditions de Cauchy bien que celles-ci soient non-spécifiées, ainsi posons $\omega'(3) = \delta$ et $\omega''(3) = \theta$, donc en particulier, $\omega = \delta \cdot f + \theta \cdot g$, d'où l'égalité par double inclusion. \square

3.4 Formules de Cramer pour les systèmes 2×2

Résolution générale des systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues en fonction du déterminant du systèmes (**tous les cas ne sont pas nécessairement à envisager**)

Considérons le système linéaire à deux équations et à deux inconnues (x, y) :

$$(S) \begin{cases} ax + by = b_1 & (E_1) \\ cx + dy = b_2 & (E_2) \end{cases} \quad (1)$$

dont $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ sont les coefficients et $(b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$ sont les seconds membres.

1. (S) admet une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. De plus, dans ce cas, la solution est

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right) \quad (2)$$

2. Si $ad - bc = 0$, alors l'ensemble des solutions est soit vide, soit une droite affine de \mathbb{K}^2 , soit \mathbb{K}^2 .

Démonstration. Procédons par disjonction de cas.

- Supposons que $ad - bc \neq 0$.
- Supposons que $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (d - \frac{bc}{a})y = b_2 - \frac{c}{a}b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a}L_2) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (ad - bc)y = ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax = \frac{1}{a} \left(b_1 - b \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \right) = \frac{1}{a} \frac{adb_1 - bcb_1 + abb_2 - bcb_2}{ad - bc} \\ y = \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax = \frac{db_1 - bb_2}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y = \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

- Supposons que $a = 0$. L'hypothèse $ad - bc \neq 0$ implique $bc \neq 0$ donc $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{c} \left(b_2 - d \frac{b_1}{b} \right) \\ y = \frac{b_1}{b} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax = \frac{db_1 - bb_2}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y = \frac{-cb_1}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

$$ad - bc = 0.$$

- Supposons $a \neq 0$. En reprenant la méthode pivot de Gauss,

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (d - \frac{bc}{a})y = b_2 - \frac{c}{a}b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a}L_2) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax + \underbrace{(ad - bc)}_0 y = ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système est de rang 1 avec une condition de compatibilité.

Si $ab_2 - cb_1 \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.

Sinon $ab_2 - cb_1 = 0$

$$(S) \iff ax + by = b_1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a} - b \frac{t}{a} \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\} \quad (3)$$

Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Supposons $a = 0$. Puisque $ad - bc = 0$, alors $bc = 0$ donc b ou c est nul.
- Si $c = 0$,

$$(S) \iff \begin{cases} by = b_1 \\ dy = b_2 \end{cases}$$

- Si $b = 0$,

$$(S) \iff \begin{cases} by &= b_1 \\ 0 &= b_2 \end{cases}$$

- Si $b_2 = 0$, (S) n'admet aucune solution.

- Si $b_2 \neq 0$, $(S) \iff dy = b_2$

- Si $d = 0$, $(S) \iff 0 = b_2$. (S) n'admet aucune solution ($b_2 \neq 0$) ou admet \mathbb{K}^2 comme ensemble des solutions ($b_2 = 0$).

- Si $d \neq 0$, $(S) \iff y = \frac{b_2}{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_2}{d} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$. Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si $b \neq 0$

$$(S) \iff \begin{cases} y &= \frac{b_1}{b} \\ 0 &= b_2 - \frac{db_1}{b} \end{cases}$$

- Si $b_2 - \frac{db_1}{b} \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.

- Si $b_2 - \frac{db_1}{b} = 0$, $(S) \iff y = \frac{b_1}{b} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_1}{b} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si $c \neq 0$ alors $b = 0$

$$(S) \iff \begin{cases} 0 &= b_1 \\ cx + dy &= b_2 \end{cases}$$

- Si $b_1 \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.

- Si $b_1 = 0$, $(S) \iff x = \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ donc (S) admet une droite affine de solutions.

□

4 Semaine 9

4.1 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E .

Soit $x \in E$.

La classe de x , notée \bar{x} , est l'ensemble des éléments de E en relation avec x .

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \quad (4)$$

Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.

Soit $(x, y) \in E^2$ fq.

- Si $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, rien à démontrer.
- Sinon $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ donc $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Fixons un tel z .
Soit $x' \in \bar{x}$ fq.

$$\left. \begin{array}{l} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \xRightarrow{\text{symétrie}} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \xRightarrow{\text{symétrie}} z\mathcal{R}y \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}z \left\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}y \xRightarrow{\text{symétrie}} y\mathcal{R}x'$$

Donc $x' \in \bar{y}$ donc $\bar{x} \subset \bar{y}$.

En échangeant les rôles de x et y , on montre la deuxième inclusion $\bar{y} \subset \bar{x}$.

Montrons que les classes d'équivalence de E constituent une partition de E .

Soit \mathcal{S} un système de représentant des classes fixé quelconque.

- Soit $s \in \mathcal{S}$ fq. $\bar{s} \neq \emptyset$ car $s\mathcal{R}s$ par réflexivité.
- Soit $(s, s') \in \mathcal{S}^2$ fq. D'après la démonstration ci-dessus, $\bar{s} \cap \bar{s}' = \emptyset$ ou $\bar{s} = \bar{s}'$. Si $\bar{s} = \bar{s}'$ alors s et s' représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent, \bar{s} et \bar{s}' sont disjoints.
- $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$ car $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \subset E$ par définition d'une classe d'équivalence.
Réciproquement, soit $x \in E$ fq.
Par réflexivité de \mathcal{R} , $x \in \bar{x}$.
Par définition d'un système de classe $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$ donc $\bar{s}_x = \bar{x}$. Donc $x \in \bar{s}_x \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
Donc $E \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
Par double inclusion, $E = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Ainsi,

$$E = \coprod_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \quad (5)$$

□

4.2 Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est son plus grand élément.

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, et A une partie non-vidée de E .

Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.

Si A admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors A admet un plus grand élément et $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soient un tel ensemble E et une telle partie A et notons M son plus grand élément. Posons l'ensemble des majorants de A , $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A, a \leq m\}$. Par définition :

$$\forall m \in M(A), M \leq m,$$

car $M \in A$, mais comme $M \in M(A)$, on a directement que $M = \min M(A) = \sup A$.

Pseudo-réciproquement, soit A une partie de E admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne S .

Comme $S \in M(A)$, par définition, S est plus grand que tous les éléments de A mais appartient à A , donc de tous les éléments de A , S est le plus grand. \square

4.3 Théorème de la division Euclidienne dans \mathbb{Z}

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in \llbracket 0; |b| - 1 \rrbracket \end{cases} \quad (6)$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et deux couples $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r \leq |b| - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' \leq |b| - 1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-(|b| - 1) \leq r' - r \leq |b| - 1$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans \mathbb{Z} leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a .

Existence Posons pour $b \geq 1$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vidé car $-|a| \in \Omega$ (\mathbb{Z} archimédien suffit ...)
- Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d' Ω .

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q .

Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ donc $r \in \mathbb{Z}$. Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leq a$ d'où $0 \leq r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q + 1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in \llbracket 0, |b| - 1 \rrbracket$.

Si $b < 1$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de a . \square

4.4 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et minorée fixée quelconque.

Considérons $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite u .

A est :

- une partie de \mathbb{Z} car u est à valeur dans \mathbb{Z}
- non vide car $u_0 \in A$
- minoré car u est minorée

Donc A admet un plus petit élément. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = \min A$. Fixons un tel n_0 .

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geq n_0$.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \in A \implies u_n \geq \min A = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geq n_0 \text{ donc } u_n \leq u_{n_0} \end{array} \right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi, u est stationnaire. \square

5 Semaine 10

5.1 Caractérisation de la densité d'une partie A de \mathbb{R} dans une partie B de \mathbb{R} la contenant avec des ε .

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ fq.

Définition de la densité

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, B \cap]u, v[\neq \emptyset \implies A \cap]u, v[\neq \emptyset \end{cases} \quad (7)$$

Caractérisation de la densité par les ε

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases} \quad (8)$$

Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité

Sens Direct Supposons A dense dans B

— Par déf $A \subset B$

— Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq

Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour $u \leftarrow b - \varepsilon$ et $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset \implies A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$$

Or, $B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$ est vraie donc $A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$

Ce qui permet de choisir $a \in A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Un tel a vérifie $a \in A$ et $a \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\iff |b - a| < \varepsilon$

$$\text{Sens réciproque Supposons } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases}$$

— On a donc $A \subset B$

— Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fq tq $B \cap]u, v[\neq \emptyset$

Soit $b \in B \cap]u, v[$ fq. Appliquons l'hypothèse pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \min\{v - b, b - u\}$, qui est autorisé $v - b$ et $b - u$ sont positifs

Donc $\exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$

Fixons un tel a , alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leq v - b} \leq b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leq b - u} \geq b - (b - u) = u \end{cases}$$

Donc $a \in]u, v[$.

Donc $A \cap]u, v[\neq \emptyset$

□

5.2 Théorème de la division pseudo-euclidienne dans \mathbb{R}

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \exists ! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \quad (9)$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et deux couples $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ r' \in [0; |b|[\end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-|b| < r' - r < |b|$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans \mathbb{Z} leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a .

Existence Posons pour $b > 0$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$

— $\Omega \subset \mathbb{Z}$

— non-vidé car $-|a| \in \Omega$ (\mathbb{Z} archimédien suffit ...)

— Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d' Ω .

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q .

Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $r \in \mathbb{R}$.

Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leq a$ d'où $0 \leq r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q + 1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [0, |b|$.

Si $b < 0$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de a . \square

5.3 \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans \mathbb{R}

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fq. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— $a_n \in \mathbb{Q}$ car $\lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $2^n \in \mathbb{N}$.

—

$$a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leq a_n \leq x$$

Or $1/2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{n \rightarrow +\infty} x$.

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$ fq.

Alors $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration précédente, $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x + \sqrt{2}$.

Fixons une telle suite b . Considérons $c = b - \sqrt{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— $c_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car $b_n \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

—

$$\left. \begin{array}{l} b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{array} \right\} \implies c_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} . \square

5.4 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$ Si u converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , et $\ell_1 \neq \ell_2$. On prendra $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ assez petit pour que les tubes soient disjoints. Posons donc $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ_1 , pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$, ce qui est autorisé car $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon_0 \quad (10)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon_0 \quad (11)$$

Fixons de tels N_1 et N_2 .

— Posons $n_0 = N_1 + N_2$

— $n_0 \geq N_1$, donc (14) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_1| \leq \varepsilon_0$

— $n_0 \geq N_2$, donc (11) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_2| \leq \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\ &\leq \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leq \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leq \varepsilon_0} \\ &\leq 2 \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\ \implies 1 &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Contradiction

□

5.5 Une suite convergente est bornée

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \lim u$ Appliquons la définition de la convergence pour $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| \leq 1$$

Fixons un tel N_1 Posons alors $M = \max \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$, qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici (\mathbb{R}, \leq)) admet un pgE.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— Si $n \in [0, N_1]$, $|u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ donc $|u_n| \leq M$

— Sinon,

$$\begin{aligned} n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leq 1 \\ &\implies |u_n| - |\ell| \leq 1 \\ &\implies |u_n| \leq 1 + |\ell| \leq M \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

□

6 Semaine 11

6.1 Caractérisation séquentielle de la densité.

Soient $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})^2$. Montrons que :

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

Démonstration. Sens indirect : supposons $A \subset B$ et $\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b$:

★ $A \subset B$ par hypothèse.

★ Montrons que $\forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$ (on utilise la caractérisation de la densité avec les ε)

Soient $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques :

Par hypothèse appliquée pour $b \leftarrow b : \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$

Appliquons la définition de la convergence de (a_n) vers b pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons un tel N :

En particulier, $a_N \in A$ et $|a_N - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

Donc A est dense dans B .

Sens direct : supposons A dense dans B :

★ Par définition, $A \subset B$

★ Soit $b \in B$ fixé quelconque.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque :

Appliquons la caractérisation de la densité par les ε pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$ (autorisé car $\frac{1}{2^n} > 0$), et $b \leftarrow b$:

$$\exists a \in A : |a - b| \leq \frac{1}{2^n}$$

Notons a_n un tel élément. Nous venons de construire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème sans nom, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b .

□

6.2 Théorème de la convergence monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite monotone :

1. Si u est croissante

(i) Soit u est majorée, et dans ce cas, $\lim u = \sup\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$

(ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $+\infty$.

2. Si u est décroissante :

(i) Soit u est minorée, et dans ce cas, $\lim u = \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$

(ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone fq.

1. Supposons que u est croissante.

(i) Supposons que u est majorée.

Alors $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. Fixons un tel M .

$\Omega = \{u_k | k \in \mathbb{N}\}$ est

— une partie de \mathbb{R}

— non vide car u_0 y appartient

— majorée par M

donc elle admet une borne supérieure et notons-la σ .

Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq.

$\sigma - \epsilon < \sigma$ donc $\sigma - \epsilon$ ne majore pas Ω . Donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > \sigma - \epsilon$. Fixons un tel N .

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geq N$.

Alors $u_n \underset{\text{par croissant de } u}{\geq} u_N \geq \sigma - \epsilon$ et $u_n \underset{\text{par définition de } \sigma}{\leq} \sigma$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma - \epsilon \leq u_n \leq \sigma &\implies -\epsilon \leq u_n - \sigma \leq 0 \\ &\implies |u_n - \sigma| \leq \epsilon \end{aligned}$$

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$.

(ii) Supposons que u n'est pas bornée.

Soit $A \in \mathbb{R}$ fq.

u n'est pas bornée donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > A$.

Or u est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A$.

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. Supposons que u est décroissante.

Il suffit dans la preuve ci-dessus de remplacer les inégalités inférieures par des inégalités supérieures et inversement et d'utiliser la notion de borne inférieure plutôt que de borne supérieure.

(i) Si u est minorée, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Si u n'est pas bornée, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

□

6.3 Théorème de Césaro

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors la moyenne arithmétique des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes (appelée moyenne de Césaro) converge vers ℓ .

Démonstration. Soient u une telle suite, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ladite limite de u . Appliquons la définition de la convergence de u pour $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Fixons un tel N . Posons $\omega = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Calculons :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell|}_{= \omega \in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n-1} |u_k - \ell|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} \leq \frac{\omega}{n} + \underbrace{\frac{\epsilon}{2n}}_{\leq \frac{\epsilon}{2}}.$$

Ces majorations sont issues de l'inégalité triangulaire et de la convergence de u . De plus, comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\omega}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on écrit sa définition pour $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$:

$$\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \implies |v_n| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On fixe un tel N' et on pose $\Lambda = \max(N, N')$ qui a bien un sens car $\{N, N'\}$ est une partie finie de \mathbb{N} . De la même manière qu'auparavant, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \Lambda$, on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \underbrace{\frac{\omega}{n}}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

C'est le théorème souhaité.

□

6.4 Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- (i) Si $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0 \\ u \text{ converge} \end{array} \right|$
Alors $\lim u \geq 0$
- (ii) Si $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \\ u \text{ et } v \text{ convergent} \end{array} \right|$
Alors $\lim u \leq \lim v$

Démonstration.

- (i) L'hypothèse $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0$ permet d'affirmer que u et $|u|$ coïncident à partir d'un certain rang.
Par ailleurs, la convergence de u et la continuité de $|\cdot|$ sur \mathbb{R} donc en $\lim u$ donnent $|u|$ converge vers $|\lim u|$.
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que u et $|u|$ ont la même limite.
Donc $\lim u = |\lim u| \geq 0$
- (ii) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \Rightarrow v_n - u_n \geq 0$
 u et v convergent $\Rightarrow v - u$ converge vers $\lim v - \lim u$.
On applique (i) pour $u \leftarrow v - u$, autorisé car u et v convergent.
On obtient $\lim v - \lim u \geq 0$ d'où $\lim u \leq \lim v$.

□

6.5 Théorème des suites adjacentes

Soient u et v deux suites réelles adjacentes. Alors u et v convergent et ont la même limite.

Démonstration. Soient u et v de telles suites. Quitte à inverser les rôles desdites suites, prenons u croissante et v décroissante.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq v_n \leq \underbrace{v_0}_{\in \mathbb{R}}) \wedge (\underbrace{u_0}_{\in \mathbb{R}} \leq u_n \leq v_n),$$

car la monotonie des suites induit ces inégalités. D'après le théorème de limite monotone, u étant croissante et majorée elle converge, v étant décroissante et minorée elle converge.

Il s'en suit que par définition des suites adjacentes :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \underset{\substack{u, v \\ \text{convergent}}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Ainsi, $\lim u = \lim v$.

□

6.6 *Facultative* Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée réelle admet une sous-suite convergente.

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée est non vide.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ fq bornée.

Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Construisons une suite de segments dans $[-M; M]$ de plus en plus petits par dichotomie.

Posons $a_0 = -M$, $b_0 = M$ et définissons les suites c et I pour tout n dans \mathbb{N} par $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $I_n = [a_n; b_n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons a_n et b_n construits et $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ infini. Construisons les termes d'indices $n+1$.

$$\text{Posons } \left| \begin{array}{l} I_n^- = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n; c_n]\} \\ I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [c_n; b_n]\} \end{array} \right|$$

Nous avons $I_n^- \cup I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ donc I_n^- ou I_n^+ est infini.

- Si I_n^- est infini, posons $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$.
Ainsi $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^-$ est infini.
- Si I_n^+ est infini, posons $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$.
Ainsi $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^+$ est infini.

Étudions la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Nous avons toujours $a_n \leq b_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \neq \emptyset$
- Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$
- $|I_{n+1}| = |a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \frac{1}{2}|I_n|$ donc la suite des cardinaux est une suite géométrique de raison $1/2$. Donc $|I_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, d'après le théorème des segments emboîtés, $\exists ! \ell \in \mathbb{R} : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$. Fixons un tel ℓ .

Construisons maintenant une extractrice φ de u .

Posons $\varphi(0) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ f.q. Supposons $\varphi(n)$ construite.

$$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1} \wedge k > \varphi(n)\}$$

$\varphi(n+1)$ est bien définie car $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\}$ est une partie de \mathbb{N} non bornée (car infinie).

Ainsi, nous avons construit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Nous pouvons extraire une sous-suite de u . Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in I_n$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{a_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell} \leq u_{\varphi(n)} \leq \underbrace{b_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell}$$

Donc, d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Ainsi $\ell \in L_u$. □

6.7 *Facultative* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur \mathbb{C} est à adapter sans peine.

Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.

Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ , c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε .

Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de \mathbb{N} . Posons ensuite $\varphi(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M,$$

donc pour tout n dans \mathbb{N} , $|u_{\varphi(n)}| \leq M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est

aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.
Par ailleurs, pour tout n dans \mathbb{N} :

$$\underbrace{|u_{\varphi \circ \psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans \mathbb{N} , $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. \square

7 Semaine 12

7.1 Résolution d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et avec second membre

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ où \mathbb{K} peut être \mathbb{C} ou \mathbb{R} . L'ensemble des solutions de l'équation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + v_n$ est la droite affine :

$$\{w + \lambda (a^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \quad (12)$$

Démonstration. Posons w la suite définie par

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + v_n \end{cases}$$

w est "évidemment" solution de particulière de l'équation"

Maintenant que nous disposons d'une solution particulière, et ayant observé que l'équation est linéaire, mettons en œuvre l'artillerie classique pour exprimer l'ensemble des solutions par l'habituelle technique.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + v_n &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = v_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = w_{n+1} - aw_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u - w)_{n+1} = a(u - w)_n \\ &\iff u - w \in \text{Vect} \{(a^n)_{n \in \mathbb{N}}\} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : u - w = \lambda (a^n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n + \lambda a^n \\ &\iff u \in \{(w_n + \lambda a^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

□

7.2 Résolution d'une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dans \mathbb{C} lorsque l'équation caractéristique possède un discriminant non nul

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. L'ensemble des solutions S_H de l'équation d'inconnue $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (13)$$

est le plan vectoriel $\text{Vect}\{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique ($r^2 = ar + b$) quand $\Delta \neq 0$.

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ fq.

Lemme Soit $r \in \mathbb{C}$. $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de l'équation de récurrence si et seulement si $r^2 = ar + b$.

$$\begin{aligned} (r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est solution} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, r^n (r^2 - ar - b) = 0 \\ &\iff r^2 - ar - b = 0 \end{aligned}$$

En particulier pour $n \leftarrow 0$

$$\iff r^2 = ar + b$$

Considérons le cas où l'équation $r^2 = ar + b$ admet deux racines distinctes ($\Delta \neq 0$) r_1 et r_2 . D'après le lemme, $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont solutions. Par linéarité de l'équation, toute combinaison linéaire est solution de l'équation homogène. Donc $\text{Vect}\{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\} \subset S_H$.

Réciproquement, soit $u \in S_H$ fq. Étudions le système à deux inconnues $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{cases} \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 = u_0 \\ \lambda r_1^1 + \mu r_2^1 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$ Donc d'après les formules de Cramer, ce système admet une unique solution.

Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \text{ et } u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$$

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai par construction de λ et μ .
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $\mathcal{P}(n)$ vrai. D'après $\mathcal{P}(n)$, $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \\ &= a (\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b (\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) \\ &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \quad \text{car } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont racine de } r^2 = ar + b \end{aligned}$$

Ainsi $S_H \subset \text{Vect}\{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$.

Par double inclusion, $S_H = \text{Vect}\{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$. □

7.3 Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur \mathbb{C} est à adapter sans peine.

Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.

Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ , c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε .

Posons $\varphi(0) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vidée de \mathbb{N} . Posons ensuite $\varphi(1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M,$$

donc pour tout n dans \mathbb{N} , $|u_{\varphi(n)}| \leq M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.

Par ailleurs, pour tout n dans \mathbb{N} :

$$\underbrace{|u_{\varphi \circ \psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans \mathbb{N} , $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. □

7.4 Monotonie de u et des sous-suites des termes pairs et impairs de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la monotonie de f

Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ une intervalle f -stable.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite récurrente associée à la fonction f c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

— Si f est croissante sur I .

Si $u_1 \geq u_0$ alors u est croissante.

Si $u_1 \leq u_0$ alors u est décroissante.

— Si f est décroissante sur I .

Les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotone et ont une monotonie opposée (utiliser les premiers termes pour trouver leur monotonie respectives).

Démonstration. Soient de tels f, I et u .

— Supposons que f est croissante sur I .

Supposons $u_1 \geq u_0$. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : "u_{n+1} \geq u_n"$$

Par hypothèse, $u_1 \geq u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $\mathcal{P}(n)$ vrai.

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \underbrace{\implies}_{f \text{ est croissante sur } I} \quad f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \implies u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

Si $u_1 \leq u_0$, il suffit de changer \geq par \leq dans la récurrence ci-dessus.

— Supposons que f est décroissante sur I .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$. Or $f \circ f$ est croissante, donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

Supposons que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Alors

$$u_{2n} \leq u_{2(n+1)} \quad \underbrace{\implies}_{f \text{ est décroissante sur } I} \quad f(u_{2n}) \geq f(u_{2(n+1)}) \implies u_{2n+1} \geq u_{2(n+1)+1}$$

Donc $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De même, si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante alors $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

□

7.5 L'intérieur de l'ensemble des rationnels est vide.

Montrons que : $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que \mathbb{Q} possède au moins un point intérieur.

Fixons $r_0 \in \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$. Par définition d'un point intérieur, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$. Or, par densité des irrationnels dans \mathbb{R} , il existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : r_0 - \varepsilon < \alpha < r_0 + \varepsilon$. On en déduit que $\alpha \in]r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon[$, or $]r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$ donc $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit le choix de $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ainsi, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$

□

7.6 Théorème sans nom version continue au voisinage de a

Soient $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathcal{D}}$ tels que $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et g tend vers 0 en a . Alors f tend vers ℓ en a .

Démonstration. On traite le cas $a \in \mathbb{R}$. Par définition de $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a ,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq g(x).$$

Fixons un tel η .

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ pour $\varepsilon \leftarrow \omega$:

$$\exists \eta' \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \eta' \implies |g(x)| \leq \omega.$$

Fixons un tel η' .

Posons $\Omega = \min \{\eta, \eta'\}$.

Soit $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x - a| \leq \Omega$.

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \leq \omega,$$

car la définition de Ω permet de remplir les conditions des deux propriétés. □

8 Semaine 13

8.1 Théorème de composition des limites

Soient g une fonction définie sur $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ telle que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.

Si $\left. \begin{array}{l} g \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } b \in \overline{\mathcal{D}_g} \\ f \text{ admet } b \text{ comme limite en } a \in \mathcal{D}_f \end{array} \right\}$ alors $g \circ f$ admet ℓ comme limite en a .

Démonstration. Traitons le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq.

Appliquons la définition de $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$ pour cet ε :

$$\exists \eta_g \in \mathbb{R}_+^* : \forall y \in \mathcal{D}_g, |y - b| \leq \eta_g \implies |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$$

Appliquons la définition de $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ pour cet η_g :

$$\exists \eta_f \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \eta_f \implies |f(x) - b| \leq \eta_g$$

Posons $\eta = \eta_f$.

Soit $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$ fq tq $|x - a| \leq \eta$. Or $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ donc $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathcal{D}_f$.

Ainsi, $x \in \mathcal{D}_f$ et $|x - a| \leq \eta_f$ d'où $|f(x) - b| \leq \eta_g$ d'où $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$. Donc

$$g \circ f \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

□

8.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction continue $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

Si $f(a)f(b) \leq 0$ alors $\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$.

On rencontre aussi : Si $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a; b[: f(c) = 0$.

Démonstration. La démonstration repose sur la technique de la dichotomie.



Soient a, b, f de tels objets. Procédons à la construction des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \frac{a+b}{2}$ (le milieu du segment $[a; b]$). Nous avons, par hypothèse $f(a_0)f(b_0) \leq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons les trois suites construites au rang n telles que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ et $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ (milieu de $[a_n; b_n]$).

— Si $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, posons $\left| \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n \\ b_{n+1} & = & c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{array} \right.$

— Sinon $f(a_n)f(b_n) > 0$. Or $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, donc $f(a_n)^2 f(b_n)f(c_n) \leq 0$. Donc $f(b_n)f(c_n) \leq 0$.

Posons $\left| \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & c_n \\ b_{n+1} & = & b_n \\ c_{n+1} & = & \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{array} \right.$

Ainsi, nous avons bien construits $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ telles que $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$ et $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$ (milieu de $[a_{n+1}; b_{n+1}]$).

Par récurrence immédiate, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ d'où $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc les suites a et b sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite. Notons la c .

D'après le bonus de ce même théorème, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c \leq b_n$ donc pour $n = 0$, $a \leq c \leq b$. Ainsi,

$$c \in [a; b]$$

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n)f(b_n) \leq 0$. Par continuité de f sur $[a; b]$ donc en c , $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)$ et $f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(c)$. Par passage à limite dans l'inégalité,

$$f(c) \times f(c) \leq 0$$

Or $f(c)^2 \geq 0$, d'où $f(c)^2 = 0$. Ainsi,

$$f(c) = 0$$

Donc c est un point fixe. □

8.3 Théorème de Weierstraß

L'image d'un segment par une fonction continue sur ce segment est un segment : soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ alors $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f([a, b]) = [f(x_1), f(x_2)]$

Démonstration. — *Étape 1* Montrons que $f([a, b])$ est majoré.

Par l'absurde, supposons que $f([a, b])$ n'est pas majoré

Alors

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b] : f(x) > A \quad (14)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Appliquons (14) pour $A \leftarrow n : \exists x \in [a, b] : f(x) > n$, et fixons un tel x que l'on note x_n . Nous venons de créer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{théorème de divergence par minoration}} f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (à valeurs dans $[a, b]$) donc, selon le théorème de Bolzano-Weierstraß :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \text{strict. croissante tel que } (x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \ell$$

Donc, en passant à la limite : $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b \implies a \leq \ell \leq b \implies \ell \in [a, b]$

Par continuité de f sur $[a, b]$, donc en ℓ , $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une sous suite de } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right.$$

donc $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$, tend vers $+\infty$, ce qui est absurde, donc f est majorée.

On fait de même pour la minoration.

— *Étape 2* : Montrons que $f([a, b])$ admet un pge et un ppe.

Montrons donc que $f([a, b])$ admet une borne sup, qui, puisque c'est une valeur atteinte, deviendra un max.

$$f([a, b]) \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{une partie de } \mathbb{R} \\ \text{non vide car contient } f(a) \\ \text{majorée d'après l'étape 1} \end{array} \right.$$

$f([a, b])$ admet donc une borne supérieure σ .

Appliquons la caractérisation séquentielle de la borne supérieure :

$$\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \in f([a, b])^{\mathbb{N}} : (y_n) \text{ converge vers } \sigma$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in f([a, b]) \implies \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) = y_n$$

Fixons un tel x_n pour tout y_n . On a donc construit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}} : f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sigma$

De plus, (x_n) est bornée (à valeurs dans $[a, b]$) donc, selon le théorème de Bolzano-Weierstraß :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \text{strict. croissante tel que } (x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \ell$$

Donc, en passant à la limite : $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b \implies a \leq \ell \leq b \implies \ell \in [a, b]$

Par continuité de f sur $[a, b]$, donc en ℓ , $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une sous suite de } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sigma \end{array} \right.$$

Par unicité de la limite, $\sigma = f(\ell)$.

On montre de même qu'il existe $\ell' \in [a, b] : f(\ell') = \inf f([a, b])$

Ainsi, $f(\ell) = \max f([a, b])$ et $f(\ell') = \min f([a, b])$

— *Étape 3* : Montrons que $f([a, b]) = [f(\ell'), f(\ell)]$.

Par la construction précédente, $\forall y \in f([a, b]), y \in [f(\ell'), f(\ell)]$.

Ainsi, $f([a, b]) \subset [f(\ell'), f(\ell)]$.

Réciproquement, l'image par la fonction continue f du segment $[a, b]$ qui est un intervalle est un intervalle :

$$\left. \begin{array}{l} f([a, b]) \text{ est un intervalle} \\ f(\ell) \in f([a, b]) \\ f(\ell') \in f([a, b]) \end{array} \right\} \implies [f(\ell'), f(\ell)] \subset f([a, b])$$

D'où $[f(\ell'), f(\ell)] = f([a, b])$

□

9 Semaine 14

9.1 Expression de dérivées successives

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln x}{x} \end{array} \right.$.

Exprimer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{D}_f$.

Considérons le prédicat $P(\cdot)$ définit pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n) : " f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] "$$

Initialisation :

Pour $n = 0$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^0 \frac{1}{k} \right],$$

donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] \right)'$$

par véracité de $P(n)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n n! x^n - (-1)^n (n+1)! x^n [\ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}]}{x^{2(n+1)}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! \ln(x) - (-1)^{n+1} (n+1)! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{x^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right] \end{aligned}$$

c'est l'expression recherchée, donc $P(n+1)$ est vrai.

Par théorème de récurrence sur \mathbb{N} , $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

9.2 Dérivé d'une bijection réciproque

Soit $f : I \rightarrow f(I) \subset \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I et dérivable en $a \in I$. Si $f'(a) \neq 0$ alors f est bijective, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Démonstration. Soient de tels objets.

Rappelons le lemme inattendu. Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ monotone (où J est un intervalle). Nous avons l'équivalence suivante :

$$f(J) \text{ est un intervalle} \iff f \text{ est continue sur } J$$

Par définition, f est surjective. Comme elle est strictement monotone, f est injective. Ainsi f est bijective.

D'après le lemme inattendu, $f(I)$ est un intervalle. Nous avons $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ avec $f(I)$ et I des intervalles donc f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Calculons la limite du taux d'accroissement de f^{-1} en $f(a)$:

$$\forall x \in f(I), \tau_{f^{-1}, f(a)} = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(a))}{x - f(a)}$$

Posons $u = f^{-1}(x)$. D'où :

$$\tau_{f^{-1}, f(a)} = \frac{u - a}{f(u) - f(a)}$$

De plus, par continuité de f^{-1} , $u \xrightarrow{x \rightarrow f(a)} f^{-1}(f(a)) = a$. Par dérivabilité en a et par continuité

de $x \mapsto x^{-1}$ en $f(a) \neq 0$, $\frac{u-a}{f(u)-f(a)} \xrightarrow{u \rightarrow a} \frac{1}{f'(a)}$.

Ainsi, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$. □

9.3 Dérivée d'un extremum local intérieur au domaine de définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $a \in \overset{\circ}{I}$ et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$



Démonstration. Soient de tels objets.

$a \in \overset{\circ}{I} \implies \exists \eta_1 \in \mathbb{R}_+^* : [a - \eta_1; a + \eta_1] \subset I$ Fixons un tel η_1 .

Calculons le taux d'accroissement en a .

$$\forall x \in [a - \eta_1; a + \eta_1], \tau_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Or f est dérivable en a donc $\tau_{f,a}(x)$ admet une limite lorsque $x \rightarrow a$. Traitons le cas où a est maximum local. Par définition :

$$\exists \eta_2 \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in [a - \eta_2; a + \eta_2], f(x) \leq f(a)$$

Fixons un tel η_2 . Soit $x \in [a - \eta_2; a + \eta_2] \setminus \{a\}$ fq.

Alors $f(x) - f(a) \leq 0$.

Si $x > a$, $x - a > 0$. Alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \leq 0$.

Sinon $x < a$, $x - a < 0$. Alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \geq 0$.

Ainsi $0 \leq \lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \leq 0$. Donc $f'(a) = 0$. □

9.4 Théorème de Rolle et formule des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit I le segment a, b .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur ledit segment et dérivable sur l'ouvert associé.

(i) Théorème de Rolle :

Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f'(c) = 0$



FIGURE 1 – Théorème de Rolle

(ii) Formule des accroissements finis :

$$\exists c \in \overset{\circ}{I} : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

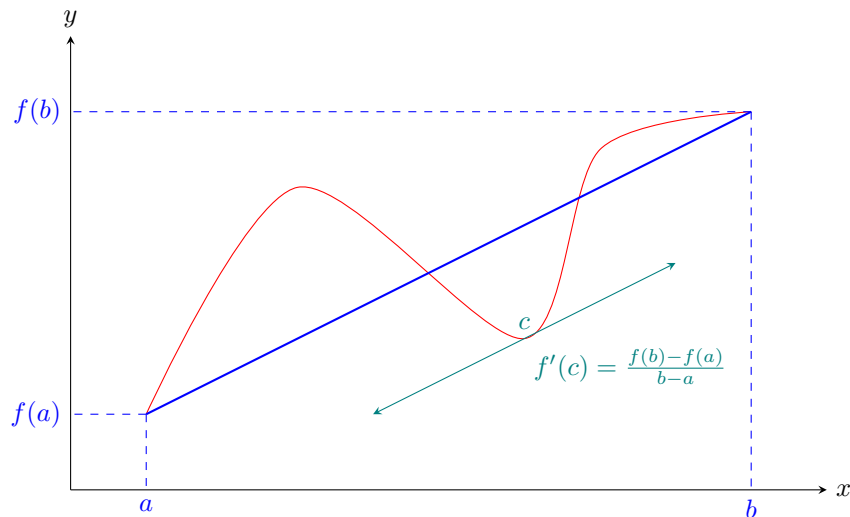


FIGURE 2 – Formule des accroissements finis

Démonstration. Soient de tels objets.

Prouvons (i), donc supposons $f(a) = f(b)$.

f est continue sur I donc par le théorème de Weierstraß, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment :

$$\exists (x_m, x_M) \in I^2 : (f(x_m) = \min f(I)) \wedge (f(x_M) = \max f(I))$$

donc, si $(x_m, x_M) \in \{a, b\}^2$, alors,

$$\forall x \in I, f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(a)$$

donc $\forall x \in I, f(x) = f(a)$ c'est-à-dire que f est constante et donc tous les points intermédiaires à I sont des c valides.

Sinon, $(x_m \notin \{a, b\}) \vee (x_M \notin \{a, b\})$, quitte à prendre l'autre valeur, supposons que $x_M \notin \{a, b\}$, ainsi, $x_M \in \overset{\circ}{I}$ et $f(x_M)$ est un maximum global donc, f étant dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ elle est dérivable en x_M donc $f'(x_M) = 0$, on pose $c = x_M$, ce qui conclut.

Prouvons (ii).

Posons $d : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right)$. d est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. On a $d(a) = 0$ et $d(b) = 0$ donc $d(a) = 0 = d(b)$.

On peut alors appliquer le Théorème de Rolle pour $f \leftarrow d, a \leftarrow a$ et $b \leftarrow b$: il existe $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $d'(c) = 0$, c'est le résultat. \square

9.5 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$, posons $X_- =]-\infty; x_0]$ la demi-droite fermée en x_0 et vers $-\infty$, de même $X_+ = [x_0; +\infty[$ la demi-droite fermée en x_0 et vers $+\infty$.

(i) \star Si $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, m \leq f'(x)$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

\star Si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x)$$

★ Si $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \overset{\circ}{I}, m \leq f'(x) \leq M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

(ii) Si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq M$, alors,

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$



FIGURE 3 – Interprétation géométrique des accroissements finis

Démonstration. (i) Soit $x \in I$ et posons S le segment d'extrémités x et x_0 .

★ Si $x \neq x_0$, f est continue sur S et dérivable sur $\overset{\circ}{S}$, la formule des accroissements finis donne alors l'existence d'un c appartenant à $\overset{\circ}{S}$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$$

Si $x > x_0$, $x - x_0 > 0$, or $m \leq f'(c) \leq M$ donc

$$m(x - x_0) \leq (x - x_0)f'(c) \leq M(x - x_0)$$

si bien que

$$m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0)$$

d'où

$$f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0).$$

Si $x < x_0$, il suffit de retourner l'inégalité lors de la première multiplication et (i) est prouvé.

(ii) Soit $y \in I$.

L'hypothèse $\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq M$ équivaut à $\forall x \in \overset{\circ}{I}, -M \leq f'(x) \leq M$, donc on peut appliquer (i) pour $x_0 \leftarrow y$, $M \leftarrow M$ et $m \leftarrow -M$:

$$\forall x \in I \cap [y, +\infty[, f(y) - M(x - y) \leq f(x) \leq f(y) + M(x - y)$$

Or $x - y > 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Et

$$\forall x \in I \cap]-\infty, y], f(y) + M(x - y) \leq f(x) \leq f(y) - M(x - y)$$

Or $x - y < 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Par conséquent, $\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$. □

9.6 Caractère lipschitzien d'une fonction \mathcal{C}^1 sur un segment

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, I le segment a, b . Alors f est $\|f'\|_{\infty, I}$ -lipschitzienne sur I .

Démonstration. Soient de tels objets.

★ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

★ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$.

★ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc f' est continue sur I donc le réel $\|f'\|_{\infty, I}$ est bien défini et

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq \|f'\|_{\infty, I}.$$

Ces propriétés permettent d'appliquer le corollaire du TAF qui conclut que f est $\|f'\|_{\infty, I}$ -lipschitzienne. \square

9.7 Théorème du prolongement de la propriété de la dérivabilité

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Lemme :

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I \setminus \{a\}} \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } a \end{array} \right. , \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$

Théorème :

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I \setminus \{a\}} \text{ admet une limite finie } \ell \in \mathbb{R} \text{ en } a \end{array} \right. , \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) = \ell \text{ (donc } f' \text{ est continue en } a) \end{array} \right.$

Démonstration. Prouvons le lemme pour $\ell \in \mathbb{R}$, c'est le cas qui nous intéresse.

Soient de tels objets. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in I \setminus \{a\}, |x - a| \leq \eta \implies |f'_{|I \setminus \{a\}}(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Fixons un tel η .

Soit $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x - a| \leq \eta$.

La fonction f est continue sur I donc f est continue sur le segment d'extrémités a et x qui est par ailleurs inclus dans I par convexité d'un intervalle.

La fonction f est dérivable sur I donc f est dérivable sur l'intervalle ouvert a, x qui est aussi inclus dans $\overset{\circ}{I}$ par convexité.

L'égalité des accroissements finis s'applique à f sur l'intervalle a et x :

$$\exists c_x \in]a, x[\cup]x, a[: \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

Or $|c_x - a| \leq |x - a| \leq \eta$ donc ladite définition de la limite s'applique pour $x \leftarrow c_x : |f'(c_x) - \ell| \leq \varepsilon$ si bien que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

D'où le lemme.

Prouvons alors le théorème.

Sous ces hypothèses, le lemme s'applique donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, or $\ell \in \mathbb{R}$, donc le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a ce qui prouve la dérivabilité de f en a et $f'(a) = \ell$. Ce qui suffit. \square

9.8 La fonction ζ (pas celle-là une autre) est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

Posons $\zeta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right. . \text{ Montrons que } \zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$



Démonstration.

- ★ $\zeta|_{]-\infty;0[}$ est constante donc $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty;0[, \mathbb{R})$.
- ★ $x \mapsto -\frac{1}{x} \in \mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[,]-\infty;0[)$ et $\exp \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty;0[, \mathbb{R})$ donc, par stabilité de \mathcal{C}^∞ par composition, $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[, \mathbb{R})$.

Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P} : \text{“} \exists P_n \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in \mathbb{R}^*, \zeta^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{”} \quad (15)$$

- ★ $\mathcal{P}(0)$ est vrai par définition de ζ en posant $P_0(x) = 1$
- ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconquetel que \mathcal{P} est vrai. D’une part, $\forall x \in]-\infty;0[, \zeta^{(n)}(x) = 0$ donc

$$\forall x \in]-\infty;0[, \zeta^{(n+1)}(x) = 0$$

D’autre part, $\forall x \in]0;+\infty[, \zeta^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ ce qui est un produit de trois expressions dérivables. D’où :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty;0[, \zeta^{(n+1)}(x) &= \left(P'_n(x) \frac{1}{x^{2n}} + P_n(x) \frac{-2n}{x^{2n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 P'_n(x) - 2nx P_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Si bien qu’en posant $P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) - 2nx P_n(x) + P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, on obtient :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \zeta^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(x)$ est vrai.

Appliquons maintenant le théorème de prolongement du caractère \mathcal{C}^∞ .

- ★ Nous avons montré que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$.
 - ★ Calculons les limites à gauche et à droite de 0. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
 - ★★ $\zeta^{(k)}$ est nulle sur $]-\infty;0[, \zeta^{(k)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$.
 - ★★ De plus, $\exists P_k \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in]0;+\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{2k}} e^{-\frac{1}{x}}$. Posons $u = \frac{1}{x}$, ainsi $\zeta^{(k)}(x) = u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) e^{-\frac{1}{x}}$ et $u \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.
- Le théorème des croissances comparées donne $u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) e^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$ donc $\zeta^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Donc $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

□

10 Semaine 15

10.1 Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur I .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x \in I^n$, $\lambda \in [0; 1]^n$ telle que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I \wedge f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \quad (16)$$

Démonstration. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}(n) : “\forall x \in I^n, \forall \lambda \in [0; 1]^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \implies \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I \wedge f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)”$$

* Soient $x \in I^1$ et $\lambda \in [0; 1]^1$ tel que $\sum_{k=1}^1 \lambda_k = 1$.

Alors $\lambda_1 = 1$. Trivialement, $\sum_{k=1}^1 \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 = x_1 \in I$.

De plus, $f\left(\sum_{k=1}^1 \lambda_k x_k\right) = f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1) = \sum_{k=1}^1 \lambda_k f(x_k)$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ vrai.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vrai.

Soient $x \in I^{n+1}$ et $\lambda \in [0; 1]^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

$\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$ est une partie non vide ($n \geq 1$) d'un ensemble totalement ordonné (\mathbb{R}, \leq) .

Posons $a = \min\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$ et $b = \max\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$. D'où

$$\underbrace{a}_{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1} \underbrace{\leq}_{\substack{a \leq x_k \\ k=1, \dots, n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a \underbrace{\leq}_{\substack{x_k \leq b \\ k=1, \dots, n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \underbrace{\leq}_{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k b \underbrace{=}_b b$$

Or $\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\} \subset I$ (car $x \in I^n$) donc $a \in I \wedge b \in I$. Donc

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k}_{\substack{\text{par convexité} \\ \text{de l'intervalle } I}} \in [a; b] \subset I$$

$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ donc $\exists i_0 \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket : \lambda_{i_0} \neq 1$ (sinon $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = n+1 \neq 1$ car $n \neq 0$).
Fixons un tel i_0 .

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k x_k + \lambda_{i_0} x_{i_0}\right) \\ &= f\left(\lambda_{i_0} x_{i_0} + (1 - \lambda_{i_0}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} x_k\right) \\ &\underbrace{\leq}_{\substack{\text{Par convexité} \\ \text{de } f}} \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + (1 - \lambda_{i_0}) f\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} x_k\right) \end{aligned}$$

Or $\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \lambda_i \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k = 1 - \lambda_{i_0}$ Donc $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{i_0}} \in [0; 1]$ et $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} = 1$. Nous pouvons appliquer $\mathcal{P}(n)$ pour $\lambda_i \rightarrow \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{i_0}}$:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leq \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + (1 - \lambda_{i_0}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} f(x_k) \\ &\leq \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k f(x_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai. □

10.2 Inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^{*n}$.

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (17)$$

Démonstration. Soit de tels objets. Posons $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = 1/n$.

Sachant que l'exponentielle est convexe, appliquons l'inégalité de Jensen pour $x_k \leftarrow \ln(x_k)$ (autorisé car $x_k \in \mathbb{R}_+^*$) :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_k)\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \exp(\ln(x_k))$$

L'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme népérien et est un morphisme additif. Nous obtenons ainsi l'inégalité recherchée. □

11 Semaine 16

11.1 Deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont le même signe sur un voisinage de a

Démonstration. Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ avec $a \in \mathcal{D}$.

Appliquons la définition de l'équivalence pour $\epsilon \leftarrow \frac{1}{2}$, il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, |f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)|$$

Fixons un tel voisinage V . Nous obtenons :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, \underbrace{g(x) - \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{g(x) + \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)}$$

Ainsi $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $V \cap \mathcal{D}$. □

11.2 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction \mathcal{C}^∞ admette un extremum local ou un point d'inflexion

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ et $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Supposons que $E_0 = \{p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid f^{(p)}(a) \neq 0\}$ est non vide. Posons $p_0 = \min E_0$.

f admet un extremum local en a si et seulement si $f'(a) = 0$ et p_0 est pair.

f admet un point d'inflexion en a si et seulement si p_0 est impair.

Démonstration. Soient de tels objets. Traitons le cas de l'extremum local. $f \in \mathcal{C}^\infty$ donc, la formule Taylor-Young donne un $DL_{p_0}(a)$ de f :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{p_0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{p_0})$$

En développant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \underbrace{f'(a)(x-a)}_{=0} + \underbrace{\dots + \frac{f^{(p_0-1)}(a)}{(p_0-1)!} (x-a)^{p_0-1}}_{=0 \text{ par définition de } p_0} + \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0} + o((x-a)^{p_0})$$

Ainsi (car $f^{(p_0)}(a) \neq 0$)

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0} \quad (18)$$

Au voisinage de a , $f(x) - f(a)$ et $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0}$ ont le même signe.

Supposons que f admette un extremum local en a . Or $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ et f est dérivable en 0, donc $f'(a) = 0$. Comme f admette un extremum local en a , $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a . Donc $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de a . Par conséquent, p_0 est pair.

Réciproquement, supposons que $f'(a) = 0$ et que p_0 est pair. $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de a . Donc $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a . Ainsi, a est un extremum local de f .

Traitons le cas du point d'inflexion. La formule de Taylor-Young donne :

$$f(x) - \underbrace{(f(a) + (x-a)f'(a))}_{\text{tangente en } (a, f(a))} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0} \quad (19)$$

Le signe de l'écart courbe/tangente en a est donc celui de $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0}$. Ce qui conclut de la même manière que l'extremum local. □

12 Semaine 17

12.1 Théorème de Bézout

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{Z}$. Il existe des entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + yb = c$ si et seulement si c est multiple du pgcd de a et b .

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On suppose l'algorithme d'Euclide réalisé pour a, b , ainsi à la fin de ce dernier on a un entier naturel r_n tel que $r_n = a \wedge b$. Comme l'algorithme est terminé, on peut remonter chaque ligne de proche en proche, on aurait, à titre d'exemple, pour une première itération, $r_n = r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1}$. En réalisant toutes les étapes nécessaires, on obtient une relation entre r_n et a, b , cette relation s'écrit :

$$\exists (x_0, y_0) \in (\mathbb{Z}^*)^2 : a \wedge b = r_n = ax_0 + y_0b.$$

Si c est un multiple de $a \wedge b$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $c = k(a \wedge b)$, donc en multipliant le résultat montré au dessus par k , on a le sens indirect. Si pour $c \in \mathbb{Z}$, il existe des entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + yb = c$, alors le pgcd de a et b divise le membre de gauche et donc par égalité le membre de droite aussi donc c est multiple de $a \wedge b$, ce qui suffit. \square

12.2 Théorème de Gauss

Soient a, b, c trois entiers naturels non nuls. Si c est premier avec a et divise le produit ab , alors il divise b .

Démonstration. Soient a, b, c des entiers naturels vérifiant les hypothèses.

Comme c est premier avec a on écrit une relation de Bézout pour 1, leur pgcd et on multiplie le tout par b :

$$\exists (u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2 : au + vc = 1 \implies abu + vbc = b,$$

or c divise ab et lui-même donc aussi le membre de gauche donc par égalité, le membre droite, c'est le théorème. \square

12.3 Résoudre une équation du type $ax + yb = c$

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Résoudre l'équation

$$ax + yb = c,$$

d'inconnues x et y dans \mathbb{Z} .

Démonstration. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et une telle équation, notée (i), en lesdites inconnues.

Si $a \wedge b \nmid c$, alors le théorème de Bézout, affirme que l'équation n'a pas de solution.

Supposons le contraire. Posons $d = a \wedge b$. Le lemme technique affirme l'existence de a' et b' dans \mathbb{Z} , tels que $a'd = a$, $b'd = b$ et $a' \wedge b' = 1$. Donc, comme d divise c , il existe c' tel que $c = c'd$. On réécrit l'équation, notée (ii) :

$$a'x + yb' = c'.$$

On sait d'après le théorème de Bézout qu'il existe des solutions, en particulier grâce à l'algorithme d'Euclide on construit (x_0, y_0) , une solution de la nouvelle équation, puis on l'injecte et on raisonne par équivalence, on note ω l'ensemble des solutions de (ii) et Ω celui de (i) :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Omega &\iff (x, y) \in \omega \\ &\iff a'x + yb' = c' \\ &\iff a'x + yb' = a'x_0 + y_0b' \\ &\iff a'(x - x_0) = b'(y_0 - y) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a'(x - x_0) &= b'(y_0 - y) \\ y_0 - y &= a'k \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a'(x - x_0) &= b'(y_0 - y) \\ y &= y_0 - a'k \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x &= x_0 + b'k \\ y &= y_0 - a'k \end{cases} \\ &\iff (x, y) \in \{(x_0 + b'k, y_0 - a'k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

La première ligne découle de la divisibilité des coefficients par d , la deuxième est la définition d'appartenance à ω , la troisième est une réécriture du fait que (x_0, y_0) soit solution de (ii), la quatrième est une factorisation banale, la cinquième une utilisation du théorème de Gauss pour le sens direct et le sens indirect ne pose pas de problème, la sixième est une réécriture de la deuxième relation, la septième découle de l'expression de y pour le sens direct et le sens indirect s'obtient en multipliant avec parcimonie l'équation, la huitième est une réécriture de la septième qui ne pose pas de problème. C'est Ω , par équivalence.

□

13 Semaine 18

13.1 L'ensemble des nombres premiers est infini

Démonstration. Notons l'ensemble des nombres premiers $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid |\mathcal{D}(n) \cup \mathbb{N}| = 2\}$. Par l'absurde, supposons que \mathcal{P} est fini.

Posons $m = 1 + \prod_{p \in \mathcal{P}} p \in \mathbb{N}$.

Comme $2 \in \mathcal{P}$, $m \geq 2$. Donc m admet un diviseur premier, $\exists q \in \mathcal{P} : q \mid m$. Donc $q \wedge m = q$.

Par ailleurs, $m = 1 + q \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \neq q}} p \right)$. Donc $m - q \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \neq q}} p \right) = 1$. D'après le théorème de Bézout,

$q \wedge m = 1$.

Donc $q = 1$ ce qui est une contradiction avec $q \in \mathcal{P}$. □

13.2 Caractérisation de la valuation p -adique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}$, $k_0 \in \mathbb{N}$.

$$\nu_p(n) = k_0 \iff \exists m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = p^{k_0} m \\ m \wedge p = 1 \end{cases} \quad (20)$$

Démonstration. \implies Supposons que $\nu_p(n) = k_0$.

Par définition de la valuation p -adique, $p^{\nu_p(n)} \mid n$ donc $p^{k_0} \mid n$. Notons $m \in \mathbb{Z}$ le quotient de la division euclidienne de n par p^{k_0} . Nous avons $n = p^{k_0} m$.

Comme $m \wedge p \in \mathcal{D}(p) \cap \mathbb{N}$, $m \wedge p \in \{1, p\}$. Par l'absurde, supposons que $m \wedge p = p$.

$$\begin{aligned} p \mid m &\implies \exists m' \in \mathbb{Z} : m = pm' \\ &\implies \exists m' \in \mathbb{Z} : n = pp^{k_0} m' = p^{k_0+1} m' \\ &\implies k_0 + 1 \in \{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid n\} \\ &\implies k_0 + 1 \leq \max \{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid n\} = \nu_p(n) = k_0 \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction donc $m \wedge p = 1$.

$$\Leftarrow \text{Supposons } \exists m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = p^{k_0} m \\ m \wedge p = 1 \end{cases}$$

Par définition de la valuation p -adique, $p^{\nu_p(n)} \mid n$ donc $p^{\nu_p(n)} \mid p^{k_0} m$. Or $m \wedge p = 1$ donc $m \wedge p^{\nu_p(n)} = 1$. D'après le théorème de Gauss, $p_{\nu_p(n)} \mid p^{k_0}$. Donc $\exists \alpha \in \mathbb{Z} : \alpha p_{\nu_p(n)} = p^{k_0}$

$$\begin{aligned} \alpha p_{\nu_p(n)} = p^{k_0} &\implies p^{k_0} - \alpha p_{\nu_p(n)} = 0 \\ &\implies p^{k_0} (1 - \alpha p^{\nu_p(n)-k_0}) = 0 \text{ car } k_0 \leq \nu_p(n) \\ &\implies \alpha p^{\nu_p(n)-k_0} = 1 \text{ car } \mathbb{Z} \text{ est intègre} \\ &\implies p^{\nu_p(n)-k_0} \in \mathcal{D}(1) \cap \mathbb{N} \\ &\implies p^{\nu_p(n)-k_0} = 1 \\ &\implies \nu_p(n) - k_0 = 0 \\ &\implies \nu_p(n) = k_0 \end{aligned}$$

□

13.3 Caractérisation de $a \mid b$ par les valuations p -adiques et preuve de leur propriété de morphisme.

Démonstration. Montrons que : $a \mid b \iff \forall p \in \mathcal{P}, \nu_p(a) \leq \nu_p(b)$.

Premièrement, montrons que la valuation p -adique est un morphisme de (\mathbb{Z}^*, \times) dans $(\mathbb{N}, +)$.

Soient de tels entiers relatifs a, b .

$$\exists m, n \in (\mathbb{Z}^*)^2 : \left((a = p^{\nu_p(a)} m) \wedge (m \wedge p = 1) \right) \wedge \left((b = p^{\nu_p(b)} n) \wedge (n \wedge p = 1) \right),$$

donc $ab = p^{\nu_p(a)+\nu_p(b)}mn$ et $mn \wedge p = 1$, par la réciproque de la caractérisation des valuations p -adiques :

$$\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b).$$

Prouvons le sens réciproque de la susdite caractérisation. Supposons le membre de droite. D'après le théorème de décomposition en facteurs premiers,

$$|b| = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)} (p^{\nu_p(b)-\nu_p(a)}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)} \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b)-\nu_p(a)} = |a| \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b)-\nu_p(a)},$$

la première manipulation se justifie par hypothèse et la seconde peut se justifier par le calcul. Ainsi, $|a| \mid |b|$ donc $a \mid b$.

Prouvons le sens direct. Supposons le membre de gauche. Soit $p \in \mathcal{P}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ak = b$ car $a \mid b$. Ainsi,

$$\nu_p(b) = \nu_p(ak) = \nu_p(a) + \nu_p(k) \geq \nu_p(a).$$

Ce qui suffit. □

13.4 Expression du pgcd et du ppcm à partir des décomposition en facteurs premiers de a et b .

Le pgcd comme produit des p à la puissance du minimum des ν_p et le ppcm comme le produit des p à la puissance du maximum des ν_p .

Démonstration. Prouvons la formule du pgcd et déduisons-en la formule du ppcm.

Soient $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$. Soit $p \in \mathcal{P}$. Il faut et il suffit de montrer que $\nu_p(a \wedge b) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$ pour obtenir le résultat. On a $a \wedge b \mid a$ et $a \wedge b \mid b$ donc d'après la caractérisation de la divisibilité par les valuations p -adiques, $\nu_p(a \wedge b) \leq \nu_p(a)$ et $\nu_p(a \wedge b) \leq \nu_p(b)$ donc $\nu_p(a \wedge b) \leq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$. Posons $m = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$. On a

$$|a| = \prod_{q \in \mathcal{P}} q^{\nu_q(a)} = p^m \left((p^{\nu_p(a)-m}) \prod_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} q^{\nu_q(a)} \right),$$

car par définition, $m \leq \nu_p(a)$, donc $p^m \mid a$, on montrerait de même que $p^m \mid b$, donc par définition, $p^m \mid a \wedge b$, donc une nouvelle fois en appliquant la caractérisation de la divisibilité par les valuations p -adiques, $m \leq \nu_p(a \wedge b)$. Finalement, $\nu_p(a \wedge b) = m$.

On en déduit la formule du ppcm :

$$|a||b| = (a \wedge b)(a \vee b) \implies a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)+\nu_p(b)-\min(\nu_p(a), \nu_p(b))} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p \max(\nu_p(a), \nu_p(b))}$$

□

13.5 Pour p premier, $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$, en déduire le petit Th. de Fermat (2 versions), expression du résultat dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Petit Th. de Fermat :

- (i) $\forall a \in \mathbb{Z}, a^p \equiv a \pmod{p}$
 $\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, x^p = x$
- (ii) $\forall a \in \mathbb{Z}, p \nmid a, \implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
 $\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, x^{p-1} = 1$

Démonstration. Soient a, b de tels entiers relatifs et soit p un nombre premier. Calculons,

$$(a + b)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{p-k} b^k = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k \equiv a^p + b^p \pmod{p},$$

car $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, p \mid \binom{p}{k}$ (élémentaire), d'où le résultat.

Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ce résultat s'énonce comme suit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2, (x + y)^p = x^p + y^p.$$

En guise d'application, démontrons le petit Th. de Fermat énoncé plus haut.
Démonstration du (i). Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(a) : "a^p \equiv a \pmod{p}."$$

Initialisation : Pour $a = 0$, rien à faire, donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

Hérédité : Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(a)$. Calculons,

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p} \stackrel{\mathcal{P}(a)}{\equiv} a + 1 \pmod{p},$$

donc $\mathcal{P}(a+1)$ vrai.

Par Th. de récurrence sur \mathbb{N} , $\mathcal{P}(a)$ est vrai pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Il faut maintenant étendre le résultat à \mathbb{Z} . Soit $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$, ainsi p est impair. Soit $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Calculons,

$$a^p \equiv (-|a|)^p \pmod{p} \equiv -|a|^p \pmod{p} \stackrel{\text{Th. de Fermat pour } a \leftarrow |a|}{\equiv} -|a| \pmod{p} \equiv a \pmod{p}.$$

Si $p = 2$, $a^2 \equiv |a|^2 \pmod{2} \equiv |a| \pmod{2} \equiv -|a| \pmod{2} \equiv a \pmod{2}$.

Le (ii), soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $p \nmid a$.

$$(p \nmid a) \wedge (p \in \mathcal{P}) \implies p \wedge a = 1,$$

d'après le (i), $p|a^p - a \implies p|a(a^{p-1} - 1) \stackrel{\text{Th. de Gauss}}{\implies} p|a^{p-1} - 1 \implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Les écritures dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ne posent pas de problèmes, ce qui conclut. \square

13.6 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Démonstration. Montrons le sens réciproque, supposons $n \in \mathcal{P}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $x \neq \bar{0}$.

$\exists a \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket : c = \bar{a}$, $I = \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ étant un système de représentant des classes.

Comme $a \in I$, $n \nmid a$, or $n \in \mathcal{P}$, donc $n \wedge a = 1$. Par Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + nv = 1$, donc u est l'inverse de a modulo n donc $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$, dès lors, tout élément non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible, or c'est un anneau commutatif, donc c'est un corps.

Montrons le sens direct en raisonnant par contraposition, supposons $n \notin \mathcal{P}$.

Comme n n'est pas premier et est plus grand que 2, il admet un diviseur, d , dans $I \setminus \{0, 1\} = J$. Notons d' le quotient de la division euclidienne de n par d , on a alors $a = dd'$ et $d' \in J$. Donc $\overline{dd'} = \bar{0}$ et comme $d, d' \in J$, on a $d, d' \neq 0$, donc \bar{d} est un diviseur de zéro de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc \bar{d} est un élément non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ non inversible, donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. En contraposant ce que nous venons de démontrer on a le résultat. Ce qui conclut. \square

13.7 Les éléments inversibles d'un anneau A forment un groupe multiplicatif noté (A^\times, \times)

Démonstration. Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

Un élément inversible (ou unité) est un élément de A symétrisable pour la loi \times . Posons l'ensemble des éléments inversibles $A^\times = \{a \in A \mid \exists b \in A : a \times b = b \times a = 1_A\}$.

★ Montrons que la LCI \times se restreint bien à A^\times en un LCI \times_{A^\times} .

Soient $(a_1, a_2) \in A^{\times 2}$. Par définition de A^\times , $\exists (b_1, b_2) \in A^2 : a_1 \times b_1 = b_1 \times a_1 = 1_A$ et $a_2 \times b_2 = b_2 \times a_2 = 1_A$.

$$\begin{aligned} (a_1 \times a_2) \times (b_2 \times b_1) &\stackrel{\text{loi associative}}{=} a_1 \times \underbrace{a_2 \times b_2}_{= 1_A} \times b_1 = a_1 \times b_1 = 1_A \\ (b_2 \times b_1) \times (a_1 \times a_2) &\stackrel{\text{loi associative}}{=} b_2 \times \underbrace{b_1 \times a_1}_{= 1_A} \times a_2 = b_2 \times a_2 = 1_A \end{aligned}$$

Donc $(a_1 \times a_2) \in A^\times$.

★ La loi \times est associative donc la loi \times_{A^\times} l'est aussi.

★ 1_A vérifie $1_A \times 1_A = 1_A$ donc $1_A \in A^\times$.

De plus, $\forall a \in A^\times$, $1_A \times_{A^\times} a = a \times_{A^\times} 1_A = a$ donc \times_{A^\times} admet 1_A comme élément neutre.

- ★ Soit $a \in A^\times$. Par définition de A^\times , $\exists b \in A : a \times b = b \times a = 1_A$.
D'où $b \in A^\times$. En pensant les égalités ci-dessus dans A^\times ,

$$a \times_{A^\times} b = b \times_{A^\times} a = 1_A$$

Donc a est inversible dans A^\times .

Ainsi, $(A^\times, \times_{A^\times})$ est un groupe. □

13.8 L'image directe par un morphisme d'anneau d'un sous-anneau de l'anneau de départ est un sous anneau de l'anneau d'arrivée. De même pour l'image réciproque.

Démonstration. Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux et $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneau. Soit A' un sous-anneau de A . Montrons que $f(A')$ est un sous-anneau de B .

- ★ Par définition de f , $f(A') \subset B$ et $(B, +, \times)$ est un anneau.
- ★ Soient $(u, v) \in f(A')^2$. Alors $\exists (a, b) \in A'^2 : f(a) = u$ et $f(b) = v$. f est un morphisme d'anneau donc un morphisme de groupe de $(A, +)$ dans $(B, +)$ donc

$$u - v = f(a) - f(b) = f(a - b)$$

Comme A' est un sous-anneau, $a - b \in A'$. Donc $u - v \in f(A')$.

De même, f est un morphisme d'anneau donc un morphisme de monoïde de (A, \times) dans (B, \times) donc

$$u \times v = f(a) \times f(b) = f(a \times b)$$

Comme A' est un sous-anneau, $a \times b \in A'$. Donc $u \times v \in f(A')$.

- ★ f est un morphisme d'anneau donc $1_B = f(1_A)$. Or A' est un sous-anneau donc $1_A \in A'$. D'où $1_B \in f(A')$.

Soit B' un sous-anneau de B . Montrons que $f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de A .

- ★ Par définition de f , $f^{-1}(B') \subset A$ et $(A, +, \times)$ est un anneau.
- ★ Soient $(a, b) \in f^{-1}(B')^2$. f est un morphisme d'anneau donc un morphisme de groupe de $(A, +)$ dans $(B, +)$ donc

$$f(a - b) = \underbrace{f(a)}_{\in B'} - \underbrace{f(b)}_{\in B'} \in B'$$

Donc $a - b \in f^{-1}(B')$.

De même, f est un morphisme d'anneau donc un morphisme de monoïde de (A, \times) dans (B, \times) donc

$$f(ab) = \underbrace{f(a)}_{\in B'} \underbrace{f(b)}_{\in B'} \in B'$$

Donc $ab \in f^{-1}(B')$.

- ★ f est un morphisme d'anneau donc $1_B = f(1_A)$. Or B' est un sous-anneau donc $1_B \in B'$. D'où $1_A \in f^{-1}(B')$. □