Khôlles de Mathématiques - Semaine 25

George Ober

1 Juillet 2024

1 S'il existe un inverse à droite (ou à gauche) pour une matrice carrée, alors celle ci est inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

— S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$

— S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : B \times A = I_n$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$

Démonstration. Supposons $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$. Notons $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ les endomorphismes canoniquement associés à A et à B.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}(\hat{a} \circ \hat{b}) &= \text{mat}(\hat{a} \circ \hat{b}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \\
&= \text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \times_{\mathcal{M}_\backslash(\mathbb{K})} \text{mat}(\hat{b}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) \\
&= A \times B \\
&= I_n \\
&= \text{mat}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}) = \Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n})
\end{aligned}$$

D'où, par injectivité de $\Phi_{\mathcal{B}_{\text{can } \mathbb{K}^n}}$, $\hat{a} \circ \hat{b} = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$.

Ainsi, $\hat{a} \circ \hat{b}$ est surjective, donc $\hat{a}$ est surjective, mais par l'accident de la dimension finie, $\hat{a}$ est bijective, donc c'est un automorphisme, donc toutes ses matrices associées sont inversibles. On effectue un même raisonnement pour l'inversibilité à gauche, en utilisant cette fois l'injectivité. □

2 Lien composée des applications linéaires et produit des matrices les représentant vis-à-vis de certaines bases

Soient E, F, G, trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases respectives de ces trois espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$.

Alors
$$\text{mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \text{mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \times \text{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \tag{1}$$

Démonstration. Posons $W = \text{mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, $V = \text{mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, $U = \text{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

Donc $V \times U$ a un sens et $V \times U \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$

Pour montrer l'égalité matricielle, nous allons utiliser la propriété suivante :

Soient $(M, M') \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})^2$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) : MX = M'X$, alors $M = M'$. (Cela se prouve facilement en particularisant pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$)

Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, montrons que $W \times X = V \times U \times X$. Posons $x \in E$ de sorte que $X = \text{mat}(x, \mathcal{B}_E)$.

$$\begin{aligned}
WX &= \operatorname{mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) \times \operatorname{mat}(x, \mathcal{B}_E) \\
&= \operatorname{mat}((v \circ u)(x), \mathcal{B}_G) \\
&= \operatorname{mat}(v(u(x)), \mathcal{B}_G) \\
&= \operatorname{mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \times \operatorname{mat}(u(x), \mathcal{B}_F) \\
&\text{d'après l'expression matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire} \\
&= V \times \operatorname{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \times \operatorname{mat}(x, \mathcal{B}_E) \\
&= V \times U \times X
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité matricielle □

3 Montrer qu'une famille de d vecteurs d'un espace de dimension d est une base si et seulement si la matrice de ces vecteurs dans une base (donc dans toute) est inversible.

Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{B}_H$, une base de H et $(h_1, \dots, h_d)$, d vecteurs de H.

$$(h_1, \dots, h_d) \text{ base de } H \iff \operatorname{mat}((h_1, \dots, h_d), \mathcal{B}_H) \in GL_n(\mathbb{K}) \tag{2}$$

Démonstration. Notons $(e_1, \dots, e_d)$ la base de H Cherchons à interpréter $\operatorname{mat}((h_1, \dots, h_d), \mathcal{B}_H)$ comme la matrice d'une application linéaire. Notons u l'unique endomorphisme de H dans H tel que $\forall i \in [\![1, d]\!], u(e_i) = h_i$

$$\begin{aligned}
\operatorname{mat}(u, \mathcal{B}_H) &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \operatorname{mat}(u(e_1), \mathcal{B}_H) & \operatorname{mat}(u(e_2), \mathcal{B}_H) & \dots & \operatorname{mat}(u(e_d), \mathcal{B}_H) \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \operatorname{mat}(h_1, \mathcal{B}_H) & \operatorname{mat}(h_2, \mathcal{B}_H) & \dots & \operatorname{mat}(h_d, \mathcal{B}_H) \end{array} \right] \\
&= \operatorname{mat}((h_1, \dots, h_d), \mathcal{B}_H)
\end{aligned}$$

Si bien que

$$\begin{aligned}
(h_1, \dots, h_d) \text{ base de } H &\iff (u(e_1), \dots, u(e_d)) \text{ base de } H \\
&\iff u \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(H) \\
&\iff \operatorname{mat}(u, \mathcal{B}_H) \in GL_d(\mathbb{K}) \\
&\iff \operatorname{mat}((h_1, \dots, h_d), \mathcal{B}_H) \in GL_d(\mathbb{K})
\end{aligned}$$

□

4 Preuve de la formule de changement de base pour une application linéaire, cas particulier d'un endomorphisme lu dans la même base au départ et à l'arrivée.

Soient (E, F) deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F

Posons $U = \operatorname{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ et $U' = \operatorname{mat}(u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$, $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E)$, et $Q = \mathcal{P}(\mathcal{B}_F \to \mathcal{B}'_F)$

Alors

$$U' = Q^{-1} U P \tag{3}$$

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, où $\dim E = n$. Posons $x = \Psi_{\mathcal{B}_E}^{-1}(X)$ et $Y = \Psi_{\mathcal{B}_F}(u(x))$.

Puisque $U = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, $Y = UX$

Posons $X' = \Psi_{\mathcal{B}'_E}(x)$et $Y' = \Psi_{\mathcal{B}'_F}(u(x))$. La formule pour le changement de base pour les vecteurs donne $X = PX'$ et $Y = QY'$ Donc, puisque $U' = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$

$$\begin{aligned}
& Y' = U'X' \\
\implies & Q^{-1}Y = U'P^{-1}X \\
& \text{puisque } Y = UX \\
\implies & Q^{-1}UX = U'P^{-1}X \\
& \text{en particularisant pour } I_n \\
\implies & Q^{-1}U = U'P^{-1} \\
\implies & U' = Q^{-1}UP
\end{aligned}$$

□

5 Montrer que la trace de AB est égale à la trace de BA (deux matrices carrées), et application à la définition de la trace de deux endomorphismes

Démonstration. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

◊ Preuve de l'égalité de la trace

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}[A \times B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,i} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} B_{k,i}A_{i,k} = \sum_{k=1}^{p}[B \times A]_{kk} = \mathrm{Tr}(BA)$$

◊ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soit $\mathcal{B}_0$ une base de E fixée quelconque Posons $\lambda = \mathrm{Tr}(\mathrm{mat}(u, \mathcal{B}_0))$ Soit $\mathcal{B}$ une autre base de E fixée quelconque, considérons $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. D'après la formule de changement de base

$$\mathrm{mat}(u, \mathcal{B}) = P^{-1} \times \mathrm{mat}(u, \mathcal{B}_0) \times P$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{mat}(u, \mathcal{B})) &= \mathrm{Tr}(P^{-1}\mathrm{mat}(u, \mathcal{B}_0)P) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{mat}(u, \mathcal{B}_0)PP^{-1}) \text{ d'après la preuve précédente} \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{mat}(u, \mathcal{B}_0))
\end{aligned}$$

D'où l'existence de la trace λ commune à toutes les matrices représentant u dans la même base au départ et à l'arrivée. On a évidemment unicité de ce scalaire, que l'on apelle la trace de l'endomorphisme u.

□

6 Égalité rang trace pour un projecteur

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et p un projecteur de E.

Puisque p est un projecteur, on peut l'expliciter selon son image et son noyau

$$p \left| \begin{array}{ccccccc} E & = & \mathrm{Im}(p) & \oplus & \mathrm{Ker}(p) & \to & E \\ x & = & x_I & + & x_K & \mapsto & x_I \end{array} \right.$$

Notons donc $r = \dim \mathrm{Im}(p) = \mathrm{rg}(p)$. Le théorème d'existence de base assure l'existence de $(e_1, \dots, e_r)$ base de $\mathrm{Im}(p)$, de même, en notant $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$, puisque les espaces sont supplémentaires, on sait que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de E.

Ainsi

$$\operatorname{mat}(p,\mathcal{B}) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right] = J_r(n,n)$$

Donc $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{Tr}(\operatorname{mat}(p,\mathcal{B})) = r = \operatorname{rg}(p)$

□

7 Décomposition PJ_rQ

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Posons $r = \operatorname{rg}A$.

$$\exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) :\ A = PJ_rQ \tag{4}$$

où J_r (avec $r \in [\![0;\min(n,p)]\!]$) est la notation raccourcie de $J_r(n,p)$ définie par

$$J_r(n,p) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$$

Démonstration. Commençons par démontrer le lemme suivant, $\forall r \in [\![0;\min(n,p)]\!],\ \operatorname{rg}(J_r(n,p)) = r$

$$\operatorname{rg}(J_r(n,p)) = \dim\ \operatorname{Vect}\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1} \right\} = \dim\ \operatorname{Vect}\ \underbrace{\left\{E^{1,1}, E^{2,1}, \dots, E^{r,1}\right\}}_{\substack{\text{sous-famille de la base canonique de} \\ \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ donc famille libre}}} = r$$

Notons $\hat{a}$ l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A de sorte que $A = \operatorname{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_{c,\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}_{c,\mathbb{K}^n})$. Nous devons chercher deux bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{K}^n$ telles que

$$\operatorname{mat}(\hat{a},\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] = J_r$$

Le théorème du rang appliqué à $\hat{a}$ donne $\dim \mathbb{K}^p = \operatorname{rg}\hat{a} + \dim\ker\hat{a}$. Or $\operatorname{rg}\hat{a} = \operatorname{rg}A = r$. Donc $\dim\ker\hat{a} = p - r$. Fixons E_1 un sous-espace de $\mathbb{K}^p$ supplémentaire de $\ker\hat{a}$ ainsi $\mathbb{K}^p = E_1 \oplus \ker\hat{a}$ et $\dim E_1 = \dim\mathbb{K}^p - \dim\ker\hat{a} = p - (p-r) = r$.

Choisissons $(f_1,\dots,f_r)$ une base de E_1 et $(f_{r+1},\dots,f_p)$ une base $\ker\hat{a}$. Posons $\mathcal{B}_1 = (f_1,\dots,f_r,f_{r+1},\dots f_p)$ ce qui est bien une base car E_1 et $\ker\hat{a}$ sont supplémentaires.

$$\mathrm{Im}\hat{a} = \mathrm{Vect}\ \left\{ \hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r), \underbrace{\hat{a}(f_{r+1})}_{=0_{\mathbb{K}^n}}, \dots, \underbrace{\hat{a}(f_p)}_{=0_{\mathbb{K}^n}} \right\} = \mathrm{Vect}\ \{\hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r)\}.$$ Donc $(\hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r))$ est un famile génératrice de cardinal r de $\mathrm{Im}\hat{a}$ qui est un espace de dimension r. Donc $(\hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\hat{a}$.

D'après le théorème de la base incomplète dans $\mathbb{K}^n$, il existe une famille $(g_{r+1}, \dots, g_n) \in (\mathbb{K}^n)^{n-r}$ telle que $(\hat{a}(f_1), \dots, \hat{a}(f_r), g_{r+1}, \dots, g_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ que l'on notera $\mathcal{B}_2$.

Ainsi

$$\mathrm{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array} \right] = J_r(n,p)$$

Posons $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_{c,\mathbb{K}^n} \to \mathcal{B}_2) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q = \mathcal{P}(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_{c,\mathbb{K}^p}) \in GL_p(\mathbb{K})$. Appliquons la formule de changement de base : $\mathrm{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_{c,\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}_{c,\mathbb{K}^n}) = \mathcal{P}(\mathcal{B}_{c,\mathbb{K}^n} \to \mathcal{B}_2) \times \mathrm{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times \mathcal{P}(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_{c,\mathbb{K}^p})$. Ainsi

$$A = P \times J_r(n,p) \times Q$$

□

8 Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le mêmes rangs. Système de représentants des classes de la relation d'équivalence "être équivalente à"

Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. A est équivalente à B s'il existe $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ tels que $B = Q^{-1}AP$.

Montrons que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le mêmes rangs, que "être équivalente à" est une relation d'équivalence, qu'il y a $\min(n,p) + 1$ classes et que $(J_r(n,p))_{r \in [\![0;\min(n,p)]\!]}$ est un système de représentants de classes.

Démonstration. Notons $\sim$ la relation "être équivalente à".

$\sim$ est :

- réflexive car $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A = I_n^{-1} A I_p$ et $(I_n, I_p) \in Gl_n(\mathbb{K}) \times Gl_p(\mathbb{K})$.
- symétrique car soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ telles que $A \sim B$. Alors $\exists (Q,P) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$: $B = Q^{-1}AP$.D'où $A = QBP^{-1}$. Donc $A = \left(Q^{-1}\right)^{-1} Bp^{-1}$. Or $\left(Q^{-1}, P^{-1}\right) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$. Ainsi $B \sim A$.
- transitive car soient $A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ telles que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors $\exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$: $B = Q^{-1}AP$ et $\exists (S,R) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$: $C = S^{-1}BR$. D'où $C = S^{-1}\left(Q^{-1}AP\right)R = (QS)^{-1}A(PR)$. Or $(QS, PR) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$. Donc $A \sim C$.

Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ telles que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = r$. La multiplication par une matrice à droite et à gauche par des matrices inversibles ne modifie pas le rang donc, d'après la décomposition PJ_rQ, $J_r \sim A$ et $J_r \sim B$. Par symétrie et par transitivité, $A \sim B$.

Ainsi, $(J_r(n,p))_{r \in [\![0;\min(n,p)]\!]}$ est bien un système de représentants de classes. Cette famille a pour cardinal $\min(n,p) + 1$. □