

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 28

George Ober

22 juin 2024

## 1 Condition nécessaire de convergence de $\sum_{n \geq n_0} u_n$

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{K}^{\llbracket n_0, +\infty \rrbracket}$ . Si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge, alors la suite  $u$  converge vers 0. Supposons que la série converge. Notons  $(S_n)_{n \geq n_0}$  la suite des sommes partielles.

$$\forall n \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \rrbracket, u_n = S_n - S_{n-1}$$

Puisque  $S$  converge, on en déduit que  $u$  converge vers 0.  $\square$

## 2 Condition nécessaire et suffisante de convergence de $\sum_{n \geq 0} q^n$ pour $q \in \mathbb{C}^*$ et calcul de la somme et du reste lorsqu'ils existent.

*Démonstration.*  $\star$  Supposons  $|q| < 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{De plus, } |q^{n+1}| = |q|^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } q = 0 \\ e^{(n+1) \ln |q|} & \text{si } q \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \\ e^{(n+1) \ln |q|} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $\sum_{n \geq 0} q^n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \implies R_n = S_n - \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n+1}}{1 - q}$$

$\star$  Si  $|q| = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |q|^n = 1^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Ainsi,  $|q|^n$  ne converge pas vers 0 donc  $(q^n)_{n \geq 0}$  ne converge pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente.

$\star$  Si  $|q| > 1$   $|q|^n = \exp(n \ln |q|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  Donc  $(q^n)_{n \geq 0}$  ne converge pas vers 0. Donc la série est grossièrement divergente  $\square$

## 3 Caractérisation de la convergence des séries de Riemann

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge  $\iff \alpha > 1$

*Démonstration.* ◇ Supposons  $\alpha < 0$  alors,  $\frac{1}{n^\alpha} = n^{|\alpha|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc la série est grossièrement divergente.

◇ Supposons  $\alpha = 0$  alors  $\frac{1}{n^\alpha} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  donc la série est grossièrement divergente.

◇ Supposons  $\alpha > 0$  Cherchons un équivalent de

$$\frac{1}{(n+1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta}$$

en fonction de  $\beta \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} &= \frac{1}{n^\beta} \left( \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^\beta} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{n^\beta} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} - 1 \right] \\ &\approx \frac{1}{n^\beta} \times \left( -\frac{\beta}{n} \right) \\ &\approx -\frac{\beta}{n^{\beta+1}} \end{aligned}$$

★ Pour  $\alpha \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  Appliquons le calcul ci-dessus pour  $\beta \leftarrow \alpha - 1$  (autorisé car  $\alpha \neq 1 \implies \alpha - 1 \neq 0$ )

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \approx -\frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

De plus,  $(-\frac{\alpha-1}{n^\alpha})_{n \geq 1}$  est de signe constant donc, d'après le critère d'équivalence,  $\sum_{n \geq 1} \frac{-(\alpha-1)}{n^\alpha}$  est de même nature que la série télescopique  $\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}})$ . Or, la série télescopique est de même nature que  $(\frac{1}{n^{\alpha-1}})_{n \geq 1}$ .

Donc par transitivité, puisque  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est de même nature que  $\sum_{n \geq 1} \frac{-(\alpha-1)}{n^\alpha}$ , la série de Riemann est de même nature que  $(\frac{1}{n^{\alpha-1}})_{n \geq 1}$ . Or,  $(\frac{1}{n^{\alpha-1}})_{n \geq 1}$  converge pour  $\alpha > 1$  et diverge pour  $\alpha \in ]0, 1[$ .

★ Si  $\alpha = 1$  Appliquons la comparaison série intégrale pour  $f \leftarrow (x \mapsto \frac{1}{x}) \begin{cases} \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R}) \\ \text{décroissante sur } [1, +\infty[ \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} \frac{du}{u} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{\ln(n+1)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Donc la série diverge.

□

## 4 Comparaison série-intégrale

*Démonstration.* Soit  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et décroissante Soit  $j \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$  fixé quelconque.

$$\begin{aligned} \forall t \in [k, k+1], f(k+1) &\leq f(t) \leq f(k) \\ \int_k^{k+1} f(k+1) dt &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt \\ f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^n \int_k^{k+1} f(t) dt &\leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \\ \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt &\leq \sum_{k=n_0}^n f(k)\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\forall k \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \llbracket, f(k) &\leq \int_{k-1}^k f(t) dt \\ \sum_{k=n_0+1}^n f(k) &\leq \sum_{k=n_0+1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \\ \sum_{k=n_0}^n f(k) &\leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t) dt\end{aligned}$$

D'où l'encadrement.  $\square$

## 5 Pour $f$ continue sur $[n_0, +\infty[$ , décroissante et minorée, $\sum_{n \geq n_0} (f(n) - \int_n^{n+1} f(u) du)$

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, décroissante et minorée par  $m \in \mathbb{R}$ . Alors la série de terme général

$$\left( f(n) - \int_n^{n+1} f(u) du \right)_{n \geq n_0}$$

est à termes positifs ou nuls et converge.

*Démonstration.* Montrons que la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est majorée, et que la suite est à termes  $\geq 0$ . La décroissance de  $f$  donne l'encadrement suivant

$$\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \geq 0$$

La comparaison série intégrale s'applique donc à  $f$  qui est décroissante et continue et donne

$$\begin{aligned}\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, f(n+1) &\leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \implies -f(n+1) \geq -\int_n^{n+1} f(t) dt \\ \implies f(n) - f(n+1) &\geq f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \geq 0\end{aligned}$$

En sommant sur  $k \in \llbracket n_0, n \rrbracket$

$$\sum_{k=n_0}^n (f(k) - f(k+1)) \geq \sum_{k=n_0}^n \left( f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt \right) = S_n$$

En reconnaissant un phénomène télescopique

$$S_n \leq f(n_0) - f(n+1) \leq f(n_0) - n$$

Donc  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est majorée, et croissante, elle converge donc.  $\square$

## 6 Théorème des séries alternées

Soit  $(a_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{R}^{\llbracket n_0, +\infty \rrbracket}$  une suite réelle. Si

$$\begin{cases} \forall n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket, a_n \geq 0 \\ (a_n)_{n \geq n_0} \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases}$$

alors  $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n a_n$

*Démonstration.*  $\diamond$  Traitons le cas  $n_0 \equiv 0[2]$  il existe  $p_0 \in \mathbb{N} : n_0 = 2p_0$

★ Les suites  $(S_{2p})_{p \geq p_0}$  et  $(S_{2p+1})_{p \geq p_0}$  sont adjacentes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \llbracket p_0, +\infty \rrbracket, S_{2(p+1)} - S_{2p} &= S_{2p+2} - S_{2p} \\ &= \sum_{k=2p_0}^{2p+2} (-1)^k a_k + \sum_{k=2p_0}^{2p} (-1)^k a_k \\ &= -a_{2p+1} + a_{2p+2} \leq 0 \text{ car } a \downarrow \end{aligned}$$

$$S_{2(p+1)+1} - S_{2p+1} = S_{2p+3} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} a_{2p+2} + (-1)^{2p+3} a_{2p+3} = a_{2p+2} - a_{2p+3} \geq 0 \text{ car } a \downarrow$$

Donc  $(S_{2p})$  est décroissante et  $(S_{2p+1})$  est croissante. De plus

$$S_{2p+1} - S_{2p} = (-1)^{2p+2} a_{2p+1} = \underbrace{-a_{2p+1}}_{\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0} \leq 0 \text{ car } a \text{ positive}$$

Ainsi  $(S_{2p})_{p \geq p_0}$  et  $(S_{2p+1})_{p \geq p_0}$  sont adjacentes.

★ Donc d'après le théorème des suites adjacentes,  $(S_{2p})$  et  $(S_{2p+1})$  convergent vers une même limite  $\ell$ , si bien que  $(S_n)$  converge vers  $\ell$ .

★ De plus, les suites  $(S_{2p})_{p \geq p_0}$  et  $(S_{2p+1})_{p \geq p_0}$  étant adjacentes, pour  $n \geq n_0$  posons  $R_n = \ell - S_n$

— Si  $n \equiv 0[2]$ ,  $\exists p \in \llbracket p_0, +\infty \rrbracket : n = 2p$  donc, puisque  $(S_{2p})$  est décroissante et  $(S_{2p+1})$  est croissante, on a

$$S_{2p+1} \leq \ell \leq S_{2p} \implies S_{2p+1} - S_{2p} \leq \ell - S_{2p} \leq 0 \implies |R_{2p}| = |\ell - S_{2p}| \leq a_{2p+1}$$

— Si  $n \equiv 1[2]$   $\exists p \in \llbracket p_0, +\infty \rrbracket : n = 2p+1$

$$S_{2p+1} \leq \ell \leq S_{2p+2} \implies 0 \leq \ell - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} a_{2p+2} = a_{2p+2}$$

$$\text{donc } |R_{2p+1}| = |\ell - S_{2p+1}| \leq a_{2p+2}$$

Bonus, par croissance de  $(S_{2p+1})$  qui converge vers  $\ell$ ,  $S_{2p+1} \leq \ell$  donc  $a_{2p_0} - a_{2p_0+1} \leq \ell$  Donc  $\ell \geq 0$  qui est bien le signe du premier terme de la série  $(-1)^{n_0} a_{n_0}$  car  $n_0 \equiv 0[2]$ .

$\diamond$  Le cas  $n_0 \equiv 1[2]$  se traite de la même manière

□

## 7 L'absolue convergence implique la convergence

Soit  $u \in \mathbb{K}^{\llbracket n_0, +\infty \rrbracket}$  Si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est absolument convergente, alors la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est convergente.

*Démonstration.*  $\diamond$  Supposons que  $u$  est le terme général réel d'une série absolument convergente. Posons, pour tout  $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$ ,  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = -\min(u_n, 0)$ . Avec ces notations,  $u_n^+ - u_n^- = u_n$  et  $u_n^+ + u_n^- = |u_n|$ .

$$\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket, u_n^+ \geq 0 \text{ et } u_n^- \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| = u_n^+ + u_n^- \\ \sum_{n \geq n_0} u_n \text{ est ACV} \implies \sum_{n \geq n_0} |u_n| \text{ CV} \\ \forall n \geq n_0, u_n^+ \geq 0 \text{ et } |u_n| \geq 0 \end{array} \right\} \implies \sum_{n \geq n_0} u_n^+ \text{ converge}$$

On montre de même que  $\sum_{n \geq n_0} u_n^-$  converge, donc, par structure vectorielle de l'ensemble des termes généraux de suites convergentes,  $\sum_{n \geq n_0} (u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n \geq n_0} u_n$  converge

$\diamond$  Cas d'une série complexe,

Posons,  $\forall n \geq n_0$ ,  $x_n = \operatorname{Re}(u_n)$  et  $y_n = \operatorname{Im}(u_n)$ . Alors,

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \geq n_0, |x_n| \leq |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n| \\ \forall n \geq n_0, |x_n| \geq 0 \text{ et } |u_n| \geq 0 \\ \sum_{n \geq n_0} u_n \text{ ACV} \implies \sum_{n \geq n_0} |u_n| \text{ CV} \end{array} \right\} \implies \sum_{n \geq n_0} |x_n| \text{ converge}$$

Donc d'après le cas réel,  $\sum_{n \geq n_0} x_n$  converge. On montre de même que  $\sum_{n \geq n_0} y_n$  converge. Donc, par structure vectorielle,  $\sum_{n \geq n_0} (x_n + iy_n)$  converge. Donc  $u_n$  est le terme général d'une série convergente.

□