Khôlles de Mathématiques - Semaine 24

Hugo Vangilluwen, George Ober

22 Avril 2024

Pour cette semaine, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' et F' des sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F.
Nous rappelons que $\dim\{0_E\} = 0$ et que $\{0_E\} = \text{Vect } \emptyset$.

1 Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Pour tout sous-espace vectoriel de E, il existe un sous-espace vectoriel complémentaire.

Démonstration.
Théorème de la base incomplète (admis ici mais démontré dans le cours) : pour toute famille libre de E, nous pouvons y adjoindre une partie d'une famille quelconque génératrice de E (généralement une base, la base canonique si elle a un sens) pour en faire une base de E.

Posons $n = \dim E$ et $p = \dim E'$. Ainsi, il existe $(e_1, \dots, e_p)$ base de E'.
Appliquons le théorème de la base incomplète pour cette famille. Il existe $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ $n - p$ vecteurs de E tel que $(e_1, \dots, e_n)$ est un base de E.
Posons $E'' = \text{Vect }\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ et vérifions qu'il est complémentaire à E'.

- Par définition de Vect, E'' est un sous-espace vectoriel .
- Trivialement, $E' + E'' = E$.
- $\{0_E\} \subset E' \cap E''$ car E' et E'' sont deux sous-espaces vectoriels .
- Soit $x \in E' \cap E''$.
  $X \in E' \implies \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$
  $X \in E'' \implies \exists(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p} : x = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$
  Par différence, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} (-\lambda_i)\, e_i = 0_E$.
  Or $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base de E donc $\forall i \in [\![1;p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.
  donc $x = 0_E$. Ainsi, $E' \cap E'' \subset \{0_E\}$.

□

2 Dimension de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = \dim E \times \dim F \tag{1}$$

Démonstration. Notons $n = \dim E$ et $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de E. Considérons

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \to & F^n \\ f & \mapsto & \underbrace{(f(e_i)))_{1\leqslant i\leqslant n}}_{\text{évaluation de f en la base choisie}} \end{array} \right.$$

- φ est linéaire.
- φ est bijective d'après le théorème de création des applications linéaires qui établit que pour toute famille de n vecteurs de F, il existe une unique application linéaire de E dans F envoyant la base $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sur cette famille.

Ainsi, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et F^n sont isomorphes. F^n est de dimension finie, ce qui conclut. □

3 Formule de Grassman

Supposons E de dimension finie.
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels . Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2 \tag{2}$$

Démonstration. Commençons par prouver une version simplifier de la somme directe. Supposons que E_1 et E_2 sont en somme directe.
Fixons $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2.

Alors $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ engendre $E_1 + E_2$. Or $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est finie donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Posons $n = \dim E_1$ et $p = \dim E_2$. Notons $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ la base $\mathcal{B}_1$ et $(f_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ la base $\mathcal{B}_2$.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p}$ fixés quelconquesfixés quelconques $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i = 0_E$.
Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} (-\mu_i) f_i$. Or $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E_1$ et $\sum_{i=1}^{n} (-\mu_i) e_i \in E_2$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Donc $\lambda = \tilde{0}$. De même, $\mu = \tilde{0}$.
Donc $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est libre.

Ainsi, $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de $E_1 \oplus E_2$. Donc $\dim E_1 \oplus E_2 = |(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim E_1 + \dim E_2$.

Enlevons l'hypothèse que E_1 et E_2 sont en somme directe.
$E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E_2 et E_2 est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie donc il existe E_2' sous-espace vectoriel de E_2 tel que $E_2 = (E1 \cap E_2) \oplus E_2'$.
Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$

* E_1 et E_2' sont en somme directe.

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2' &= E_1 \cap (E_2' \cap E_2) \text{ car } E_2' \subset E_2 \\ &= (E_1 \cap E_2) \cap E_2' \text{ car } \cap \text{ est associative et commutative} \\ &= 0_E \text{ car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont en somme directe et } E_2' \text{ sev} \end{aligned}$$

* $E_1 + E_2 \subset E_1 + E_2'$
  Soit $x \in E_1 + E_2$. Alors $\exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x = x_1 + x_2$.
  Or $x_2 \in E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$ donc $\exists (x_{21}, x_2') \times E_2' : x_2 = x_{21} + x_2'$.
  D'où $x = \underbrace{x_1 + x_{21}}_{\in E_1} + \underbrace{x_2'}_{\in E_2} \in E_1 + E_2$.
* Trivialement, $E_1 + E_2' \subset E_1 + E_2$ (car $E_2' \subset E_2$).

Ainsi, E_1 et E_2' (car sev) étant de dimension finie, $\dim E_1 \oplus E_2' = \dim E_1 + \dim E_2'$.
De plus, $\dim E_2 = \dim (E_1 \cap E_2) \oplus E_2' = \dim E_1 \cap E_2 + \dim E_2'$.
Donc $\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$. □

4 Caractérisation injectivité/bijectivité/surjectivité par le rang

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

(*i*) Si E est de dimension finie

$$f \text{ injective } \iff \mathrm{rg} f = \dim E \tag{3}$$

(*ii*) Si F est de dimension finie

$$f \text{ surjective } \iff \mathrm{rg} f = \dim F \tag{4}$$

(*iii*) Si E et F sont de même dimension finie

$$f \text{ bijective } \iff f \text{ injective } \iff f \text{ sujective}$$

C'est *l'accident de la dimension finie* !

Démonstration.

(i) Supposons E de dimension finie, fixons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (avec $n = \dim E$) Supposons f injective :

$$\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Vect}\left\{f(e_1) \ldots f(e_n)\right\}$$

Donc $(f(e_1), \ldots f(e_n))$ est génératrice. $(f(e_1), \ldots f(e_n))$ est de plus libre car f est injective. Donc c'est une base, donc

$$\dim \mathrm{Vect}\left\{f(e_1) \ldots f(e_n)\right\} = n = \dim E$$

donc $\mathrm{rg} f = \dim E$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{rg} f = \dim E = n$. Alors

$$n = \mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Vect}\left\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\right\}$$

Donc $(f(e_1), \ldots f(e_n))$ est génératrice de cardinal n, égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré. C'est donc une base du sous-espace vectoriel engendré. Donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre, donc f est injective.

(ii) Supposons F de dimension finie

$$f \text{ surjective } \iff \mathrm{Im} f = F \iff \dim \mathrm{Im} f = \dim F$$

(iii) Supposons E et F de même dimension finie

$$f \text{ injective } \iff \mathrm{rg} f = \dim E \iff \mathrm{rg} f = \dim F \iff f \text{ surjective}$$

D'où la bijectivité.

□

5 Théorème du rang

Si E est de dimension finie alors pour toute $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ application linéaire,

$$\dim E = \mathrm{rg}\ f + \dim \ker f \tag{5}$$

Démonstration. Démontrons d'abord le lemme suivant. Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et H un supplémentaire de $\ker f$ dans E. Alors $f_{|H}^{|\mathrm{Im} f}$ est un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im} f$.

Notons $\hat{f}$ un telle restriction et corestriction. Cette application est bien définie (car $f(H) \subset \mathrm{Im} f$) et $\hat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, \mathrm{Im} f)$.

$\ker \hat{f} = \{x \in H \mid \hat{f}(x) = 0_E\} = \{x \in H | x \in \ker f\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$ car H et $\ker f$ sont complémentaire. Donc $\hat{f}$ est injective.

Soit $y \in \mathrm{Im} f$. D'où $\exists x \in E : y = f(x)$.

Décomposons x dans $E = H \oplus \ker f$, $\exists (x_H, x_k) \in H \times \ker f : x = x_H + x_k$.

Ainsi, $y = f(x) = f(x_H) + f(x_k) = f(x_H)$ car $x_k \in \ker f$. Donc y admet un antécédent par $\hat{f}$ (qui est x_H).

Donc $\hat{f}$ est surjective.

Donc $f_{|H}^{|\mathrm{Im} f}$ est un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im} f$.

Supposons maintenant que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

D'après le théorème d'existence d'un supplémentaire en dimension finie, $\ker f$, étant un sous-espace vectoriel de E, admet un supplémentaire H c'est-à-dire $E = H \oplus \ker f$.

En prenant la dimension sur cette égalité, $\dim E = \dim \ker f + \dim H$. D'après le lemme précédent, $\dim H = \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg}\ f$.

D'où $\dim E = \mathrm{rg}\ f + \dim \ker f$. □

6 Rang d'une composition d'applications linéaires

Soit G un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(u, v) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Si E et F sont de dimension finie alors

$$\mathrm{rg}\ u = \mathrm{rg}\ v \circ u + \dim \ker v \cap \mathrm{Im} u \tag{6}$$

Démonstration. Considérons que E et F sont de dimension finie. Soient de tels objets.
Appliquons le théorème du rang à $v_{|\mathrm{Im}u}$ ce qui est autorisé puisque $v_{|\mathrm{Im}u}$ est une application linéaire et $\mathrm{Im}u$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie (car sev de F).

$$\dim \mathrm{Im}u = \mathrm{rg}\ v_{|\mathrm{Im}u} + \dim \ker v_{|\mathrm{Im}u}$$

$\ker v_{|\mathrm{Im}u} = \{y \in \mathrm{Im}u \mid v(y) = 0_G\} = \{y \in \mathrm{Im}u \mid y \in \ker v\} = \mathrm{Im}u \cap \ker v$
$\mathrm{Im}v_{|\mathrm{Im}u} = v(Imu) = \mathrm{Im}v \circ u$ (cette égalité est vraie pour deux fonctions de E dans F et de F dans G quelconques, pas forcément linéaires.)
Donc

$$\mathrm{rg}\ f = \mathrm{rg}\ v \circ u + \dim \ker v \cap \mathrm{Im}u$$

□

7 Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est un hyperplan de E : $\exists \varphi \in E^* : H = \ker \varphi$

(ii) H admet une droite vectorielle comme supplémentaire : $\exists a \in E \setminus \{0_E\} : H \oplus \mathrm{Vect}\ \{a\} = E$

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) Supposons que H est un hyperplan de E.
Appliquons la définition de l'hyperplan, $\exists \varphi \in E^* : H = \ker \varphi$.
Par l'absurde, supposons que $E \setminus H = \emptyset$. Or $H \subset E$ donc $E = H$. Donc $\varphi = 0_{E^*}$ ce qui est une contradiction.

Ainsi fixons $a \in E \setminus H$ quelconque. Montrons que $E = H \oplus \mathrm{Vect}\ \{a\}$.

⋆ Trivialement, $\{0_E\} \subset H \cap \mathrm{Vect}\ \{a\}$. Soit $x \in H \cap \mathrm{Vect}\ \{a\}$.
$x \in \mathrm{Vect}\ \{a\}$ donc $\exists \lambda \in\ \mathbb{K} : x = \lambda$. De plus, $x \in H = \ker \varphi$ donc $0_{\mathbb{K}} = \varphi(x) = \lambda\varphi(a)$.
Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors $a \in \ker \varphi$ ce qui est impossible car $a \notin H$.
Donc $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, d'où $x = 0_E$.
Ainsi, $H \cap \mathrm{Vect}\ \{a\} = \{0_E\}$. H et $\mathrm{Vect}\ \{a\}$ sont en somme directe.

⋆ Trivialement, $H + \mathrm{Vect}\ \{a\} \subset E$. Soit $x \in E$ fixé quelconque.
$a \notin H$ donc $\varphi(a) \neq 0_{\mathbb{K}}$. $\varphi(a)$ est ainsi symétrisable par la multiplication dans $\mathbb{K}$ d'où :

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot \varphi(a) = \varphi\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \times a\right)$$

Donc $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \in H$. D'où

$$x = \underbrace{x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a}_{\in H} + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a}_{\in \mathrm{Vect}\ \{a\}}$$

Ainsi, $E = H + \mathrm{Vect}\ \{a\}$.

(ii) $\implies$ (i) Supposons maintenant que H soit un sous-espace vectoriel tel que $\exists a \in E \setminus \{0_E\}$: $E = H \oplus \mathrm{Vect}\ \{a\}$.
Posons $\varphi : \begin{array}{ccccc} E & = & H \oplus \mathrm{Vect}\ \{a\} & \to & \mathbb{K} \\ x & = & h_x + \lambda_x \cdot a & \mapsto & \lambda_x \end{array}$. Montrons que φ est une forme linéaire non triviale dont H est le noyau.

— φ est bien définie car h_x et λ_x sont uniques.

— φ est linéaire.

— φ est à valeur dans le corps de base $\mathbb{K}$ donc φ est un forme linéaire.

— $\varphi \neq 0_{E^*}$ car $\varphi(a) = 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

— Soit $x \in E$ fixé quelconque. Alors $\exists (h_x, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K} : x = h_x + \lambda_x \cdot a$.

$$x \in \ker \varphi \iff \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}} \iff \lambda_x = 0_{\mathbb{K}} \iff x \in H$$

donc $\ker \varphi = H$.

Donc H est un hyperplan de E.

Si E est de dimension finie, alors les deux conditions sont équivalentes à

(iii) H est de codimension 1 c'est-à-dire de dimension $n-1$.

$(ii) \implies (iii)$ Il faut prendre la dimension de l'égalité $H \oplus \text{Vect }\{a\}$.
$(iii) \implies (ii)$ Supposons que $\dim H = n-1$.
Comme E est de dimension finie, H admet un supplémentaire I dans E : $H \oplus I = E$. En prenant la dimension, $\dim I = 1$. Donc I est une droite vectorielle. D'où $\exists a \in E : I = \text{Vect }\{a\}$.
$a \notin H$ car sinon $I \subset H$ ce qui contredit $I \cap H = \{0_E\}$ (I et H sont en somme directe). □

8 Proportionnalité des formes linéaires ayant le même noyau

Lemme fondamental dans l'étude des formes linéaires Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.
Tout vecteur de E n'appartenant pas au noyau de φ engendre une droite qui est supplémentaire au noyau de φ dans E.

$$\forall a \in E \setminus \ker\varphi, E = \ker\varphi \oplus \text{Vect }\{a\} \tag{7}$$

Deux formes linéaires non nulles φ et ψ ont le même noyau si est seulement si elles sont proportionnelles ce qui revient à dire que la famille (φ, ψ) est liée.

$$\forall (\varphi, \psi) \in (E^* \setminus \{0_{E^*}\})^2, \ker\varphi = \ker\psi \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \varphi = \lambda \cdot \psi \tag{8}$$

Démonstration. Commençons par prouver le lemme. Soit $a \in E \setminus \ker\varphi$.
Soit $x \in E$ fixé quelconque. Exhibons la décomposition unique de x dans $\ker\varphi + \text{Vect }\{a\}$.

Analyse Supposons qu'il existe $(x_k, \lambda) \in \ker\varphi \times \mathbb{K}$ tel que $x = x_k + \lambda a$.
Puisque $x_k \in \ker\varphi$, $\varphi(x) = \lambda \cdot \varphi(a)$. Or $\varphi(a) \neq 0_{\mathbb{K}}$ (car $a \notin \ker\varphi$) donc $\varphi(a)$ est inversible dans $\mathbb{K}$.
D'où $\lambda = \varphi(x)/\varphi(a)$ et $x_k = x - \varphi(x)/\varphi(a)$.
Ainsi, sous réserve d'existence, λ et x_k sont unique.

Synthèse Posons $\begin{cases} \lambda &= \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \\ x_k &= x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \end{cases}$

∗ $x = x_k + \lambda \cdot a$

∗ $\lambda \in \mathbb{K}$ donc $\lambda \cdot a \in \text{Vect }\{a\}$

∗ $\varphi(x_k) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0_{\mathbb{K}}$ donc $x_k \in \ker\varphi$

Ainsi $E = \ker\varphi \oplus \text{Vect }\{a\}$.

Soient $(\varphi, \psi) \in (E^* \setminus \{0_{E^*}\})^2$ fixés quelconques.

$\implies$ Supposons que $\ker\varphi = \ker\psi$.
$\varphi \neq 0_{E^*}$ donc $\ker\varphi \neq E$ donc $\exists a \in E : a \notin \ker\varphi$. Appliquons la lemme ci-dessus :

$$\begin{array}{rcccccccc} & E & = & \underset{\ker\psi}{\overset{\ker\varphi}{\shortparallel}} & \oplus & \text{Vect }\{a\} & \to & \mathbb{K} \\ \varphi : & x & = & \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a\right) & + & \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a & \mapsto & \varphi(x) \\ \psi : & x & = & \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a\right) & + & \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a & \mapsto & \psi(x) \end{array}$$

Or $\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a\right) \in \ker\psi$ donc $\psi(x) = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\varphi(x)$.
Ainsi, $\psi = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\varphi$. Donc φ et ψ sont proportionnelles.

$\impliedby$ Supposons que φ et ψ sont proportionnelles. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \varphi = \lambda\psi$.
$\varphi = \lambda\psi \implies \ker\psi \subset \ker\varphi$ et $\psi = \lambda^{-1}\varphi \implies \ker\varphi \subset \ker\psi$. Ce qui donne l'égalité. □

9 Intersection d'hyperplans

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire *non nulle*. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \in \mathbb{N}$, alors

$$\dim_{\mathbb{K}} F \cap \ker\varphi = \begin{cases} p & \text{si } F \subset \ker\varphi \\ p-1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9}$$

En particulier, on a toujours $\dim_{\mathbb{K}} F \cap \ker F \geqslant p-1$

Démonstration. Si $F \subset \ker \varphi$, $F \cap \ker \varphi = F$ donc $\dim F \cap \ker \varphi = p$

Sinon, il existe $a \in F$ tel que $a \notin \ker \varphi$. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus \ker \varphi = E$$

Montrons alors que $F = \mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus (F \cap \ker \varphi)$.

$$\mathrm{Vect}\,\{a\} \cap (F \cap \ker \varphi) = \underbrace{\mathrm{Vect}\,\{a\} \cap F}_{=\mathrm{Vect}\{a\}} \cap \ker \varphi = \mathrm{Vect}\,\{a\} \cap \ker \varphi = \{0_E\}$$

car les deux espaces sont supplémentaires donc en somme directe.

Donc $\mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus (F \cap \ker \varphi)$.

Par double inclusion, montrons que $\mathrm{Vect}\,\{a\} + (F \cap \ker \varphi) = F$

Pour l'inclusion directe, remarquons que $a \in F$ donc $\mathrm{Vect}\,\{a\} \subset F$ or $F \cap \ker \varphi \subset F$ donc leur somme est bien incluse $\mathrm{Vect}\,\{a\} + (F \cap \ker \varphi) \subset F$ Réciproquement, soit $x \in F$ fq. Puisque $\mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus \ker \varphi = E$

$$\exists (\lambda, x_K) \in \mathbb{K} \times \ker \varphi : x = \lambda.a + x_K$$

De plus, $x_K = x - \lambda.a \in F$ car $(a, x) \in F^2$ donc

$$x = \underbrace{\lambda.a}_{\in \mathrm{Vect}\{a\}} + \underbrace{x_K}_{\in F \cap \ker \varphi} \in \mathrm{Vect}\,\{a\} + (F \cap \ker \varphi)$$

D'où l'inclusion réciproque.

Donc $F = \mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus (F \cap \ker \varphi)$ en passant à la dimension :

$$\underbrace{\dim F}_{=p} = \underbrace{\dim \mathrm{Vect}\,\{a\}}_{=1} + \dim(F \cap \ker \varphi)$$

Donc $\dim(F \cap \ker \varphi) = p - 1$.

Appliquons ce lemme pour la démonstration de la propriété suivante

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(H_i)_{n \in [\![1,m]\!]}$, m hyperplans de E.
Alors

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - m$$

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ par.

$$\mathcal{P}(m) : \text{´ pour tous } H_1, \ldots, H_m \text{ hyperplans de } E, \dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - m\text{ˇ}$$

Soit H_1 un hyperplan de E fixé quelconque. D'après la caractérisation des hyperplans en dimension finie,

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{1} H_i = \dim_{\mathbb{K}} H_1 = n - 1 \geqslant n - 1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(m)$ est vraie. Soient $H_1, \ldots, H_m$ et H_{m+1} $m + 1$ hyperplans de E. D'après la définition d'un hyperplan, il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H_{m+1} = \ker \varphi$.

Appliquons donc le lemme précédent pour $F \leftarrow \bigcap_{i=1}^{m} H_i$ (autorisé car c'est un sous espace de l'espace E, qui est de dimension finie, donc ses sous espaces les sont aussi) et $\varphi \leftarrow \varphi$ (autorisé car c'est une forme linéaire non nulle) :

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{K}} \left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i \right) \cap \ker \varphi}_{=(\bigcap_{i=1}^{m} H_i) \cap H_{m+1}} \geqslant \dim_{\mathbb{K}} \left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i \right) - 1 \qquad \underbrace{\geqslant n - m - 1}_{\text{en appliquant } \mathcal{P}(\Updownarrow) \text{ pour } H_1, \ldots, H_m}$$

Donc par associativité de l'intersection, $\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{m+1} H_i \geqslant n - (m + 1)$

Donc $\mathcal{P}(m + 1)$ est vraie. □