

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 9

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen

29 novembre 2023

## 1 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

Soit  $x \in E$ .

La classe de  $x$ , notée  $\bar{x}$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  en relation avec  $x$ .

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \quad (1)$$

*Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.*

Soit  $(x, y) \in E^2$  fq.

- Si  $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ , rien à démontrer.
- Sinon  $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$  donc  $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ . Fixons un tel  $z$ .  
Soit  $x' \in \bar{x}$  fq.

$$\left. \begin{array}{l} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \xRightarrow{\text{symétrie}} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \xRightarrow{\text{symétrie}} z\mathcal{R}y \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}z \left\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}y \xRightarrow{\text{symétrie}} y\mathcal{R}x'$$

Donc  $x' \in \bar{y}$  donc  $\bar{x} \subset \bar{y}$ .

En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on montre la deuxième inclusion  $\bar{y} \subset \bar{x}$ .

*Montrons que les classes d'équivalence de  $E$  constituent une partition de  $E$ .*

Soit  $\mathcal{S}$  un système de représentant des classes fixé quelconque.

- Soit  $s \in \mathcal{S}$  fq.  $\bar{s} \neq \emptyset$  car  $s\mathcal{R}s$  par réflexivité.
- Soit  $(s, s') \in \mathcal{S}^2$  fq. D'après la démonstration ci-dessus,  $\bar{s} \cap \bar{s}' = \emptyset$  ou  $\bar{s} = \bar{s}'$ . Si  $\bar{s} = \bar{s}'$  alors  $s$  et  $s'$  représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent,  $\bar{s}$  et  $\bar{s}'$  sont disjoints.
- $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$  car  $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \subset E$  par définition d'une classe d'équivalence.

Réciproquement, soit  $x \in E$  fq.

Par réflexivité de  $\mathcal{R}$ ,  $x \in \bar{x}$ .

Par définition d'un système de classe  $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$  donc  $\bar{s}_x = \bar{x}$ . Donc  $x \in \bar{s}_x \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .

Donc  $E \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .

Par double inclusion,  $E = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .

Ainsi,

$$E = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \quad (2)$$

□

## 2 Si $A$ admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si $A$ admet une borne supérieure dans $A$ c'est son plus grand élément.

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné, et  $A$  une partie non-vidée de  $E$ .

Si  $A$  admet un plus grand élément alors  $A$  admet une borne supérieure et  $\sup A = \max A$ .

Si  $A$  admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors  $A$  admet un plus grand élément et  $\max A = \sup A$ .

*Démonstration.* Soient un tel ensemble  $E$  et une telle partie  $A$  et notons  $M$  son plus grand élément. Posons l'ensemble des majorants de  $A$ ,  $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A, a \leq m\}$ .

Par définition :

$$\forall m \in M(A), M \leq m,$$

car  $M \in A$ , mais comme  $M \in M(A)$ , on a directement que  $M = \min M(A) = \sup A$ .

Pseudo-réciproquement, soit  $A$  une partie de  $E$  admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne  $S$ .

Comme  $S \in M(A)$ , par définition,  $S$  est plus grand que tous les éléments de  $A$  mais appartient à  $A$ , donc de tous les éléments de  $A$ ,  $S$  est le plus grand.  $\square$

## 3 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in \llbracket 0; |b| - 1 \rrbracket \end{cases} \quad (3)$$

*Démonstration. Unicité* Soient deux tels entiers  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  et deux couples  $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})^2$  tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r \leq |b| - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' \leq |b| - 1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme  $-(|b| - 1) \leq r' - r \leq |b| - 1$ , il vient en divisant par  $|b|$  l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque  $q$  et  $q'$  sont dans  $\mathbb{Z}$  leur différence est obligatoirement 0, ainsi  $q = q'$  ce qui implique  $r = r'$  et donc on a unicité de ladite écriture de  $a$ .

*Existence* Posons pour  $b \geq 1$ ,  $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$

—  $\Omega \subset \mathbb{Z}$

— non-vidé car  $-|a| \in \Omega$  ( $\mathbb{Z}$  archimédien suffit . . .)

—  $\Omega$  est majoré par  $|a|$  car supposons, par l'absurde, que  $\exists k \in \Omega : k > |a|$ , alors  $kb > |a|b > a$  ce qui contradiction avec la définition d' $\Omega$ .

Donc  $\Omega$  admet un plus grand élément, notons-le  $q$ .

Posons  $r = a - bq$ . Par construction,  $a = bq + r$  et comme  $q = \max \Omega$  et  $\Omega \subset \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  donc  $r \in \mathbb{Z}$ . Par suite,  $q \in \Omega$  donc  $bq \leq a$  d'où  $0 \leq r$ . Et  $q = \max \Omega$  donc  $b(q + 1) > a$  d'où  $b > r$ , c'est-à-dire,  $r \in \llbracket 0, |b| - 1 \rrbracket$ .

Si  $b < 1$ , il suffit de prendre  $q \leftarrow -q$  dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de  $a$ .  $\square$

## 4 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  une suite décroissante et minorée fixée quelconque.  
Considérons  $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite  $u$ .  
 $A$  est :

- une partie de  $\mathbb{Z}$  car  $u$  est à valeur dans  $\mathbb{Z}$
- non vide car  $u_0 \in A$
- minoré car  $u$  est minorée

Donc  $A$  admet un plus petit élément. Donc  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = \min A$ . Fixons un tel  $n_0$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq tq  $n \geq n_0$ .

$$\left. \begin{array}{l} u_n \in A \implies u_n \geq \min A = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geq n_0 \text{ donc } u_n \leq u_{n_0} \end{array} \right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi,  $u$  est stationnaire.

□