Khôlles de Mathématiques - Semaine 29

George Ober

22 juin 2024

1 Définition et cardinal du sous-groupe alternée $\mathcal{A}_n$

Le noyau d'un morphisme de groupe étant toujours un sous-groupe du groupe de départ, le groupe alterné d'indice $n \in \mathbb{N}^*$ est le sous groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ obtenu en considérant le noyau du morphisme signature.

$$\mathcal{A}_n = \ker \varepsilon$$

$\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\frac{n!}{2}$

Démonstration. Fixons $\tau = (1, 2)$ Considérons

$$\Phi \left| \begin{array}{ll} \mathcal{A}_n & \to \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto \sigma \circ \tau \end{array} \right.$$

— Φ est bien définie : soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$ fixée quelconque. Par propriété de morphisme de la signature, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau) = 1 \times (-1) = -1$ donc $\sigma \circ \tau \notin \mathcal{A}_n$ donc $\Phi(\sigma) \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$

— De plus, Φ est bijective en considérant

$$\Psi \left| \begin{array}{ll} \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n & \to \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto \sigma \circ \tau \end{array} \right.$$

$\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_n}$ et $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n}$

Ainsi,

$$|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n| - |\mathcal{A}_n|$$

D'où $|\mathcal{A}_n| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{2} = \frac{n!}{2}$ □

2 Caractérisation des bases par le déterminant

Démonstration. ⋆ Supposons que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ est une base de E.

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \times \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} = 1 \implies \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \neq 0$$

⋆ Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \neq 0$ Si $\mathcal{B}'$ était liée, le déterminant serait nul, donc en contraposant, $\mathcal{B}'$ n'est pas liée, et est de cardinal n, c'est une base.

□

3 Définition du déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

$$\exists! \lambda \in \mathbb{K} : \forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$$

On appelle ce λ le déterminant de l'endomorphisme f.

Démonstration. ◊ Existence

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E fixée. L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ll} E^n & \to \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{array} \right.$$

est

— Une forme n-linéaire : soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ fixés quelconques $(u, v, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \varphi(v + \lambda.w, u_2, \dots, u_n) &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v + \lambda.w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v) + \lambda.f(w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \text{ par linéarité de } f \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}(f(v), f(u_2), \dots, f(u_n)) + \lambda \times \det_{\mathcal{B}_0}(f(w), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\ &\text{par linéarité de } \det_{\mathcal{B}_0} \\ &= \varphi(v, u_2, \dots, u_n) + \lambda \times \varphi(w, u_2, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, φ est linéaire en son premier argument. On prouve de même que φ est linéaire en ses $n-1$ autres arguments, ce qui montre sa n-linéarité.

— Alternée Soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ tels qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \neq j$ et $u_i = u_j$ alors on a aussi $f(u_i) = f(u_j)$, si bien que le caractère alterné de $\det_{\mathcal{B}_0}$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = 0$$

Donc $\varphi \in \wedge^n_{\mathbb{K}} = \mathrm{Vect}\{\det_{\mathcal{B}_0}\}$

Donc

$$\exists \lambda_{\mathcal{B}_0} \in \mathbb{K} : \varphi = \lambda_{\mathcal{B}_0}. \det_{\mathcal{B},}$$

d'où,

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda_{\mathcal{B}_0} \times \det_{\mathcal{B},}(u_1, \dots, u_n)$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E fixée quelconque. Nous savons que

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0. \det_{\mathcal{B}_0}$$

Donc en multipliant la relation précédente par $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0$,

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \underbrace{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0 \times \det_{\mathcal{B}_0}(f(u_1), \dots, f(u_n))}_{\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))} = \lambda_{\mathcal{B}_0} \times \underbrace{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_0 \times \det_{\mathcal{B},}(u_1, \dots, u_n)}_{\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)}$$

Par conséquent, $\lambda_{\mathcal{B}_0}$ convient pour toute base $\mathcal{B}$.

◊ Unicité Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Particularisons pour $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_0$ et $(u_1, \dots, u_n) \leftarrow \mathcal{B}_0$

$$\det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \lambda \times \det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_0 = \lambda \times 1$$

Donc $\lambda = \det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ Or, en particularisant la relation définissant $\lambda_{\mathcal{B}_0}$ pour $(u_1, \dots, u_n) \leftarrow \mathcal{B}_0$

$$\lambda_{\mathcal{B}_0} = \det_{\mathcal{B}_0}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

donc $\lambda = \lambda_{\mathcal{B}_0}$

□