

Khôlles de Mathématiques - Semaine 22

Hugo Vangilluwen

24 Mars 2024

Pour cette semaine, \mathbb{K} désigne un corps commutatif, E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels et I un ensemble quelconque non vide.

1 Caractérisation d'une famille liée

Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille.

$$(x_i)_{i \in I} \text{ est liée} \iff \exists i_0 \in I : \exists (\lambda_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I \setminus \{i_0\})} : x_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot x_i \quad (1)$$

Démonstration. Supposons que $(x_i)_{i \in I}$ est liée.

Par définition, $\exists (\mu_i) \in \mathbb{K}^{(I)} : \begin{cases} \sum_{i \in I} \mu_i x_i = 0_E \\ (\mu_i)_{i \in I} \neq (0_{\mathbb{K}})_{i \in I} \end{cases}$

Donc $\exists i_0 \in I : \mu_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Fixons un tel i_0 .

$$\mu_{i_0} x_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i x_i = 0_E$$

$$\text{Or } \mu_{i_0} \neq 0, \text{ donc } x_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} (\mu_{i_0}^{-1} \times (-\mu_i)) \cdot x_i.$$

$$\text{En posant } \lambda_i = \mu_{i_0}^{-1} \times (-\mu_i), \text{ on obtient } \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i \cdot x_i.$$

$$\text{Supposons } \exists i_0 \in I : \exists (\lambda_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I \setminus \{i_0\})} : x_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot x_i.$$

$$\text{Alors } -x_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot x_i = 0_E.$$

Posons $\mu_{i_0} = -1_{\mathbb{K}}$ et $\forall i \in I \setminus \{i_0\}, \mu_i = \lambda_i$.

Ainsi, $(\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $\sum_{i \in I} \mu_i \cdot x_i = 0_E$. Or $\mu_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $(\mu_i)_{i \in I} \neq (0_{\mathbb{K}})_{i \in I}$.

Donc $(\mu_i)_{i \in I}$ est liée. □

2 Caractérisations d'une base

Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{F} est une base.
- (ii) Tout vecteur de E se décompose de manière unique dans \mathcal{F} .
- (iii) \mathcal{F} est génératrice minimale (au sens de l'inclusion)
- (iv) \mathcal{F} est libre maximale (au sens de l'inclusion)

Démonstration. Notons $(e_i)_{i \in I}$ la famille \mathcal{F} .

(i) \implies (ii) Supposons que \mathcal{F} est une base de E .

Soit $x \in E$ fixé quelconque. Montrons que x s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} .

\mathcal{F} est une base donc elle est une famille génératrice et libre de E . La propriété génératrice donne, par définition, l'existence d'une telle écriture tandis que la propriété libre donne l'unicité d'une telle écriture.

(ii) \implies (iii) Supposons que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{F} .

L'existence d'une telle décomposition permet d'affirmer que \mathcal{F} est génératrice.

Supposons que \mathcal{F} ne soit pas génératrice minimale c'est-à-dire qu'il existe une famille \mathcal{F}' de vecteurs de E telle que $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$ et \mathcal{F}' engendre E .

Alors $\exists i_0 \in I : e_{i_0} \notin \mathcal{F}'$. Comme \mathcal{F}' est génératrice, $\exists (\lambda_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \mathbb{K}^{(I \setminus \{i_0\})} : e_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot e_i$.

Donc

$$e_{i_0} = 0_{\mathbb{K}} \cdot e_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot e_i$$

$$e_{i_0} = 1_{\mathbb{K}} \cdot e_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} 0_{\mathbb{K}} \cdot e_i$$

e_{i_0} peut donc s'écrire de deux manières différentes au moins comme combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{F} ce qui contredit le caractère libre de \mathcal{F} .

Par conséquent, \mathcal{F} est génératrice et minimale parmi les familles génératrices.

(iii) \implies (iv) Supposons que \mathcal{F} est une famille génératrice minimale. Par l'absurde, supposons que \mathcal{F} est liée. Alors il existe un $i_0 \in I$ tel que e_{i_0} s'écrit comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs de \mathcal{F} donc $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est génératrice de E . Or cette famille est strictement incluse dans \mathcal{F} ce qui contredit la propriété de génératrice minimale.

Donc \mathcal{F} est libre.

Par l'absurde, supposons que \mathcal{F} n'est pas libre maximale c'est-à-dire qu'il existe une famille \mathcal{F}' de vecteurs de E telle que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ et \mathcal{F}' est libre.

Alors $\exists x \in \mathcal{F}' : x \notin \mathcal{F}$. Or \mathcal{F} est génératrice d'où :

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i + \sum_{\substack{y \in \mathcal{F}' \\ y \notin \mathcal{F} \\ y \neq x}} 0_{\mathbb{K}} \cdot y$$

Puisque $x \in \mathcal{F}'$,

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x + \sum_{i \in I} 0_{\mathbb{K}} \cdot x_i + \sum_{\substack{y \in \mathcal{F}' \\ y \notin \mathcal{F} \\ y \neq x}} 0_{\mathbb{K}} \cdot y$$

Donc x s'écrit de deux manières différentes au moins comme combinaison linéaire de vecteurs \mathcal{F}' , ce qui contredit la liberté de \mathcal{F}' .

Par conséquent, \mathcal{F} est libre maximale.

(iv) \implies (i) Supposons que \mathcal{F} est une famille libre maximale.

Par hypothèse même, \mathcal{F} est libre. Par l'absurde, supposons que \mathcal{F} n'est pas génératrice. Alors il existe $x \in E$ tel que $x \notin \text{Vect} \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est libre et contient strictement \mathcal{F} , ce qui contredit la propriété de liberté maximale.

Par conséquent, \mathcal{F} est aussi génératrice, donc une base. \square