# Khôlles de Mathématiques - Semaine 16

Hugo Vangilluwen

8 Mai 2024

## 1 Unicité de la partie régulière d'un développement limité

*Démonstration.* Soit $f$ une fonction admettant un $DL_n(x_0)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.
Supposons que $f$ admette deux développements limités. C'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $b \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Posons $u = x - x_0$ et $\tilde{f}(u) = f(x_0 + u)$ de sorte que les hypothèses sur $f$ se traduise par l'existence d'un $DL_n(0)$ pour $\tilde{f}$ :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k u^k + o\left(u^n\right) \text{ et } f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k u^k + o\left(u^n\right)$$

Appliquons la définition d'un $DL_n(0)$. Il existe deux fonctions $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ définies sur $\mathcal{D}_{\tilde{f}}$ tels que

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}},\ \tilde{f}(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k + u^n \varepsilon_1$$

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}},\ \tilde{f}(u) = \sum_{k=0}^{n} b_k u^k + u^n \varepsilon_2$$

$$\lim_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0 \text{ et } \lim_{u \to 0} \varepsilon_2(u) = 0$$

Donc

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}},\ \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) u^k = u^n \left(\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u)\right)$$

Par l'absurde, supposons que $\exists k_0 \in [\![0; n]\!] : a_{k_0} \neq b_{k_0}$. Posons $k_1$ le plus petit entier dont les coefficients $a$ et $b$ sont différents :

$$k_1 = \min\left\{k \in [\![0; n]\!] \mid a_k \neq b_k\right\}$$

Nous obtenons alors

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}},\ \sum_{k=0}^{k_1 - 1} \underbrace{(a_k - b_k)}_{=0} u^k + (a_{k_1} - b_{k_1}) u^{k_1} + \sum_{k=k_1+1}^{n} (a_k - b_k) u^k = u^n \left(\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u)\right)$$

Multiplions par $u^{-k_1}$ puis calculons la limite en $u \to 0$. D'un coté, pour $k > k_1$, nous avons $k - k_1 \leqslant 1$ donc $(a_k - b_k) u^{k - k_1} \xrightarrow[u \to 0]{} 0$. De l'autre coté, $u^{n - k_1}$ tend vers 0 ou 1 selon si $k_1 < n$ ou $k_1 = n$. Et, par hypothèse, $\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u) \xrightarrow[u \to 0]{}$ . Par unicité de la limite, $a_{k_1} - b_{k_1} = 0$. Ce qui contredit la définition de $k_1$.

Par conséquent $\forall k \in [\![0; n]\!],\ a_k = b_k$. Ainsi, la partie régulière d'un $DL$ est unique. □

## 6 Deux fonctions équivalentes au voisinage de $a$ ont le même signe sur un voisinage de $a$

*Démonstration.* Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ avec $a \in \mathcal{D}$.
Appliquons la définition de l'équivalence pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2}$, il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2}|g(x)|$$

Fixons un tel voisinage $V$. Nous obtenons :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, \underbrace{g(x) - \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{g(x) + \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)}$$

Ainsi $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $V \cap \mathcal{D}$. □

## 7 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ admette un extremum local ou un point d'inflexion

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ et $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Supposons que $E_0 = \left\{p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid f^{(p)}(a) \neq 0\right\}$ est non vide.
Posons $p_0 = \min E_0$.
$f$ admet un extremum local en $a$ si et seulement si $f'(a) = 0$ et $p_0$ est pair.
$f$ admet un point d'inflexion en $a$ si et seulement si $p_0$ est impair.

*Démonstration.* Soient de tels objets. Traitons le cas de l'extremum local.
$f \in \mathcal{C}^\infty$ donc, la formule Taylor-Young donne un $DL_{p_0}(a)$ de $f$ :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{p_0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^{p_0}\right)$$

En développant :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \underbrace{f'(a)(x-a)}_{=0} + \underbrace{\ldots + \frac{f^{(p_0-1)}(a)}{(p_0-1)!}(x-a)^{p_0-1}}_{=0 \text{ par défintion de } p_0} + \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} + o\left((x-a)^{p_0}\right)$$

Ainsi (car $f^{(p_0)}(a) \neq 0$)

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} \tag{1}$$

Au voisinage de $a$, $f(x) - f(a)$ et $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ ont le même signe.

Supposons que $f$ admette un extremum local en $a$. Or $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ et $f$ est dérivable en 0, donc $f'(a) = 0$. Comme $f$ admette un extremum local en $a$, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de $a$. Donc $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de $a$. Par conséquent, $p_0$ est pair.

Réciproquement, supposons que $f'(a) = 0$ et que $p_0$ est pair. $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de $a$. Donc $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de $a$. Ainsi, $a$ est un extremum local de $f$.

Traitons le cas du point d'inflexion. La formule de Taylor-Young donne :

$$f(x) - \underbrace{(f(a) + (x-a)f'(a))}_{\text{tangente en } (a, f(a))} \underset{x \to a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} \tag{2}$$

Le signe de l'écart courbe/tangente en $a$ est donc celui de $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$. Ce qui conclut de la même manière que l'extremum local. □