

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 6

Kylian Boyet, George Ober, Félix Rondeau, Elijah Gaillard, Hugo Vangilluwen (relecture)

19 novembre 2023

## 1 Liens entre le graphe de $f$ et ceux de $g$ et $h$ définies par $g(x) = af(x)$ et $h(x) = f(x + a)$ .

*Démonstration.*

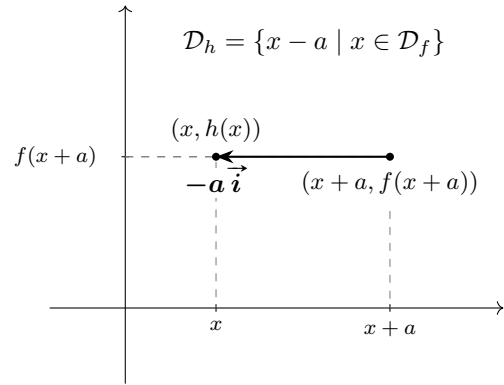
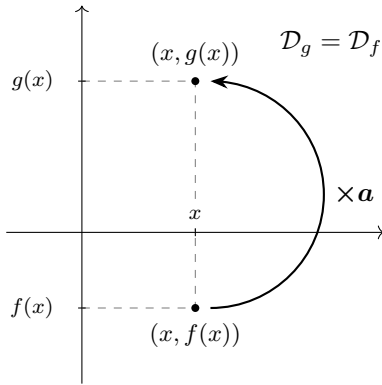


FIGURE 1 – Lien entre le graphe de  $f$  et de  $g$ . FIGURE 2 – Lien entre le graphe de  $f$  et de  $h$ . □

## 2 Liens entre le graphe de $f$ et ceux de $g$ et $h$ définies par $g(x) = f(ax)$ et $h(x) = f(a - x)$ .

*Démonstration.*

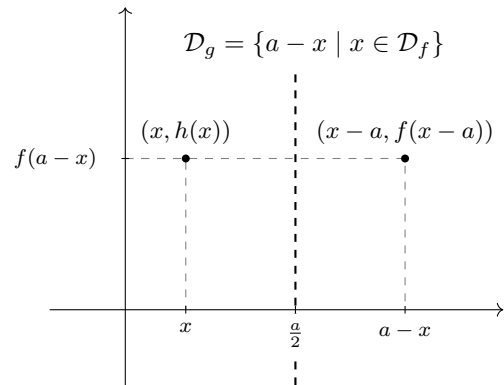
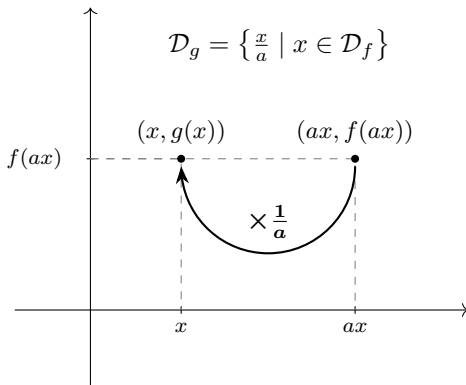


FIGURE 3 – Lien entre le graphe de  $f$  et de  $g$ . FIGURE 4 – Lien entre le graphe de  $f$  et de  $h$ . □

### 3 Présentation exhaustive de la fonction arccos.

*Démonstration.* Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$ .  
D'où :

$$\arccos = \left| \begin{array}{ll} [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto \left( \cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]} \right)^{-1}(x) \end{array} \right.$$

Ainsi, pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arccos(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in [0, \pi]$ ,

$$\cos(\theta) = x$$

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$  :

1.  $\arccos$  est strictement décroissante sur  $[-1, 1]$ .
2.  $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [0, \pi])$ .
3.  $\arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, ]0, \pi[)$ .
4.  $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
5.  $\arccos$  admet deux demi-tangentes verticales en  $-1$  et  $1$ .

Graphe de  $\arccos$  :

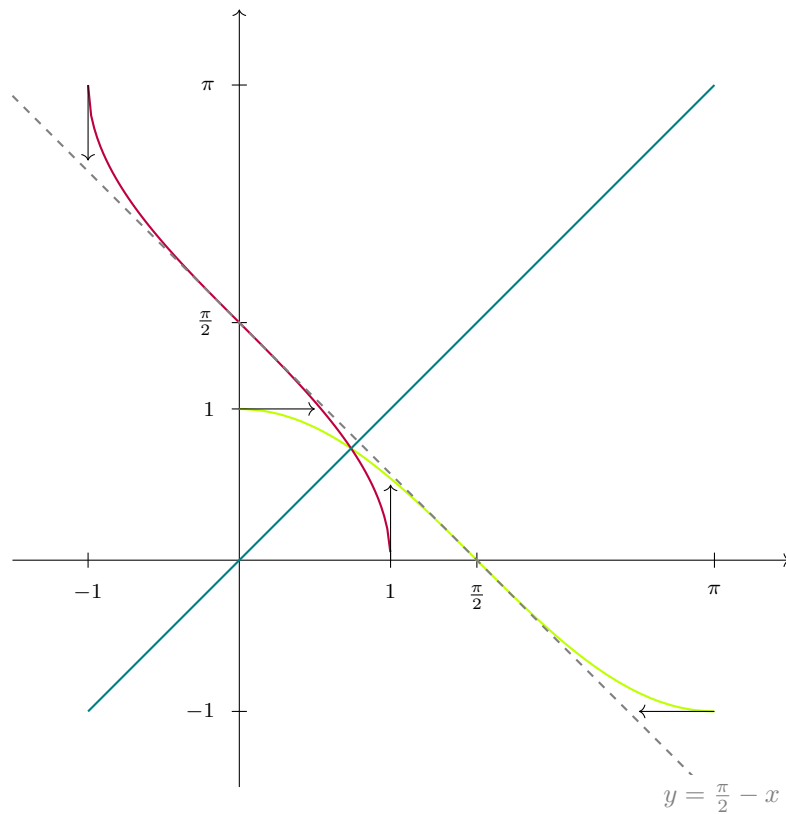


FIGURE 5 –  $\arccos$  en violet,  $\cos$  en vert et la première bissectrice en bleu.

□

## 4 Présentation exhaustive de la fonction arctan.

*Démonstration.* Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ .  
D'où :

$$\arctan = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x & \mapsto & \left( \tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arctan(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$\tan(\theta) = x$$

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$  :

1.  $\arctan$  est impaire.
2.  $\arctan \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ .
3.  $\arctan \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ .
4.  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Graphe de  $\arctan$  :

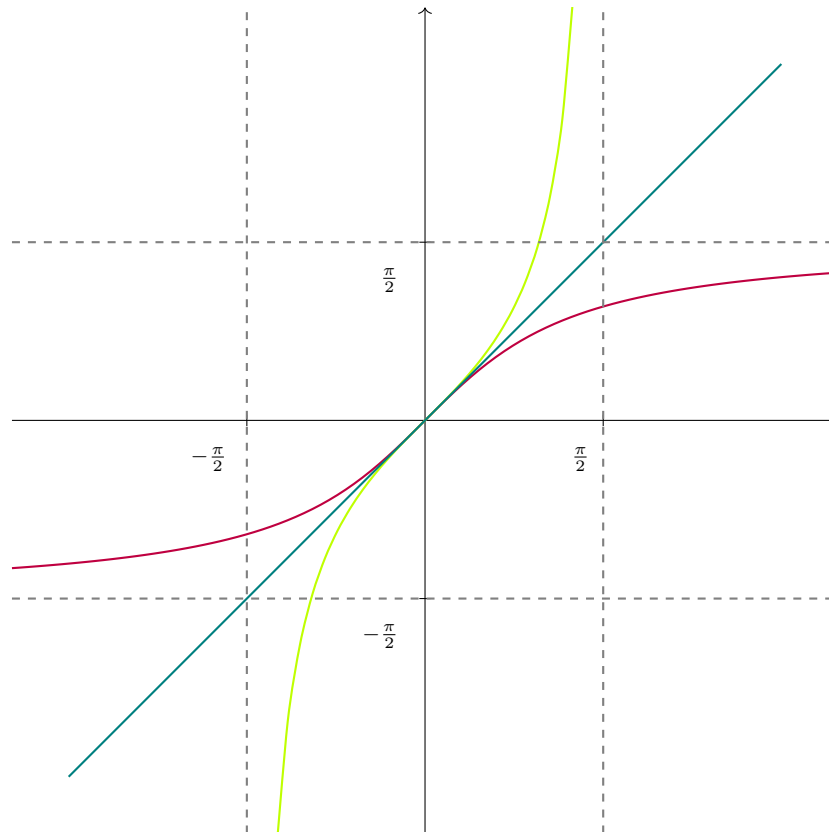


FIGURE 6 –  $\arctan$  en violet,  $\tan$  en vert et la première bissectrice en bleu.

On a aussi (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(x) \leq x.$$

Et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

□

## 5 2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$ , dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.

*Démonstration.* On remarque sur la [figure 7](#) que la droite d'équation polaire  $\theta = \frac{\pi}{4}$  est axe de symétrie de la figure. On a donc

$$\frac{\arcsin x + \arccos x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

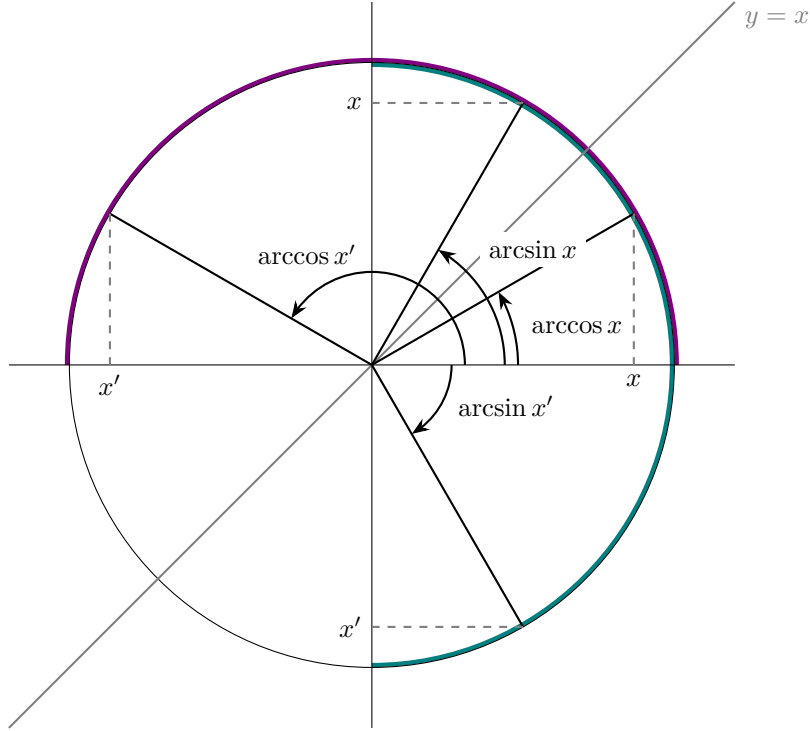


FIGURE 7 – Illustration de la relation  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$  pour  $x \geq 0$  et  $x' \leq 0$ . En violet le domaine de définition de  $\arccos$  et en bleu celui de  $\arcsin$ .

**Preuve formelle :** Soit  $x \in [-1, 1]$ . Posons  $\varphi = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Ainsi :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \arccos(\sin(\varphi)) = \varphi + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right),$$

or  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  donc  $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$  d'où  $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)) = \frac{\pi}{2} - \varphi$  si bien que :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

□

## 6 Étude analytique rapide des fonctions cosh et sinh.

*Démonstration.*

- *Domaine de définition et symétries* : sinh et cosh sont définies sur  $\mathbb{R}$ . De plus,

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \\ \text{et} \\ \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x). \end{cases}$$

Donc sinh et cosh sont respectivement impaire et paire.

Nous les étudierons sur  $\mathbb{R}_+$  et pour les obtenir les graphes ( $\mathcal{C}_{\sinh}$  et  $\mathcal{C}_{\cosh}$ ) de ces fonctions sur  $\mathbb{R}$  à partir de ceux ( $\mathcal{C}_{\sinh}^+$  et  $\mathcal{C}_{\cosh}^+$ ) obtenus sur  $\mathbb{R}_+$ , nous le compléterons en traçant les images de ces graphes par la symétrie centrale  $s$  de centre  $O$  et par la réflexion  $r$  d'axe  $(O, \vec{j})$  :

$$\mathcal{C}_{\sinh} = \mathcal{C}_{\sinh}^+ \cup s(\mathcal{C}_{\sinh}^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\cosh} = \mathcal{C}_{\cosh}^+ \cup r(\mathcal{C}_{\cosh}^+)$$

- *Variations* : La fonction  $\sinh' = \cosh$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  donc sinh est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit alors le signe de  $\sinh = \cosh'$  et donc les variations de cosh :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\cosh' x = \sinh x$	$-$	$0$	$+$
cosh	$+\infty$	$1$	$+\infty$
$\sinh'(x) = \cosh x$	$+$	$+$	$+$
sinh	$-\infty$	$0$	$+\infty$

- *Branches infinies en  $+\infty$  et position relative de  $\mathcal{C}_{\sinh}$  et  $\mathcal{C}_{\cosh}$ .*

$$\frac{\cosh(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow +\infty} + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc le graphe de cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique  $(O, \vec{j})$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$$

Ainsi, les graphes des deux fonctions se rapprochent l'un de l'autre arbitrairement près lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , et le graphe de cosh est au-dessus de celui de sinh.

- *Tangente au graphe de sinh à l'origine et position relative.*

Posons l'application

$$g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sinh(x) - x \end{cases}$$

Elle est dérivable sur son ensemble de définition, sa dérivée est positive sur cet intervalle ( $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \cosh x - 1 \geq 0$ ), et  $g(0) = 0$  donc le graphe de sinh est situé au dessus de sa tangente sur  $\mathbb{R}_+$ .

Par imparité de la fonction sinh, la position relative courbe / tangente s'inverse si bien que l'origine est un point d'inflexion du graphe de sinh.

□

**7 Calcul de  $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$  en fonction de  $m \in \mathbb{Z}$ . En Dédire qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.**

*Démonstration.* Soit  $m \in \mathbb{Z}$  fixé quelconque. Calculons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt$$

★ Si  $m \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{imt}}{im} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{im} - \frac{1}{im} \right) = 0 \end{aligned}$$

★ Si  $m = 0$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases} = \delta_{m,1}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  fixés quelconques. Posons, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ . Soient  $s \in \mathbb{Z}$  et  $R \in \mathbb{R}_+^*$  fixés quelconques.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{it}) e^{-ist} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^n a_k (Re^{it})^k \right) e^{-ist} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \left( \int_0^{2\pi} a_k R^k e^{it(k-s)} dt \right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{a_k R^k}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{it(k-s)} dt}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq s \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } s \notin \llbracket 0, n \rrbracket \\ \frac{a_s R^s}{2\pi} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Supposons à présent qu'il existe un cercle centré en l'origine sur lequel  $P$  est identiquement nulle. Notons  $R \in \mathbb{R}_+^*$  le rayon d'un tel cercle. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(Re^{it}) = 0$$

donc

$$\forall s \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{it}) e^{-ist} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 dt = \frac{1}{2\pi} [1]_0^{2\pi} = 0$$

or, nous avons vu que

$$\forall s \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{it}) e^{-ist} dt = \frac{a_s R^s}{2\pi}$$

donc

$$\forall s \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{a_s R^s}{2\pi} = 0 \quad \text{donc} \quad \forall z \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_s = 0$$

ainsi,  $P$  est la fonction polynomiale nulle sur  $\mathbb{C}$ . □

## 8 Technique de l'intégration par parties.

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

*Démonstration.* Il suffit de reconnaître un terme issu de la dérivée d'un produit de fonctions :

$$(uv)' = u'v + uv' \implies u'v = (uv)' - uv'$$

d'où :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(t)v(t)dt &= \int_a^b ((uv)'(t) - u(t)v'(t))dt \\ &= \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u(t)v'(t)dt \text{ (linéarité de l'intégrale)} \\ &= \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt\end{aligned}$$

La preuve sera suivie d'exemples explicites aux choix de l'examineur.

□

## 9 Technique du changement de variable.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds \underset{\substack{ds=\varphi'(u)du \\ s=\varphi(u)}}{=} \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

*Démonstration.* Il suffit de reconnaître la dérivée d'une composée de fonctions. En effet, en notant  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$  (ce qui a bien un sens car  $f$  est continue sur  $I$ ),

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du &= [(F \circ \varphi)(u)]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds\end{aligned}$$

La preuve sera suivie d'exemples explicites aux choix de l'examineur.

□

**10 Montrer que pour  $f$   $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,**  

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

*Démonstration.* Il existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $a \leq k_0 T < a + T$  car

$$a \leq k_0 T < a + T \iff \frac{a}{T} \leq K_0 < \frac{a}{T} + 1 \iff k_0 = \left\lceil \frac{a}{T} \right\rceil$$

Fixons un tel  $k_0$ . Ainsi,

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{k_0 T} f(t)dt + \int_{k_0 T}^{a+T} f(t)dt \quad (1)$$

Or,

$$\int_{k_0 T}^{a+T} f(t)dt \underset{\substack{u=t-k_0 T \\ du=dt}}{=} \int_0^{a+T-k_0 T} f(u+k_0 T)du = \int_0^{a-(k_0-1)T} f(u)du \quad (2)$$

Et

$$\int_a^{k_0 T} f(t)dt \underset{\substack{u=t-(k_0-1)T \\ du=dt}}{=} \int_{a-(k_0-1)T}^{k_0 T} f(u+(k_0-1)T)du = \int_{a-(k_0-1)T}^T f(u)du \quad (3)$$

La relation (1) donne alors, en utilisant (2) et (3),

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^{a-(k_0-1)T} f(t)dt + \int_{a-(k_0-1)T}^T f(t)dt = \int_0^T f(t)dt \quad (4)$$

On peut visualiser cette démonstration sur un graphe :

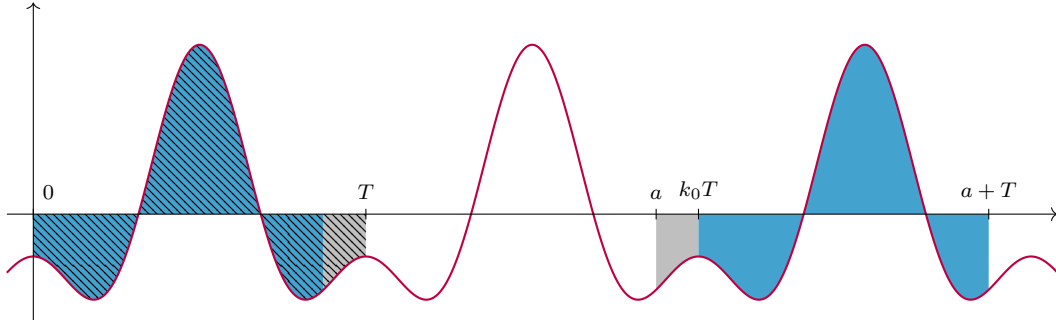


FIGURE 8 – Illustration de la relation (4).  
 En bleu (2) et en gris (3)

□