Khôlles de Mathématiques - Semaine 3

George Ober, Félix Rondeau

29 septembre 2024

1 Preuve de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité montrant que le module est 1-lipschitzien + dessin et interprétation géométrique

Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

(i) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

(ii) $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leqslant |z_1 - z_2|$

Démonstration. Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques.

◊ Si $z_2 = 0$ l'inégalité est évidente.
Sinon, $z_2 \neq 0$ alors $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \iff \left|1 + \frac{z_1}{z_2}\right| \leqslant 1 + \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.
Posons $u = \frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} |1+u|^2 - (1+|u|)^2 &= (1+u)(\overline{1+u}) - (1 + 2|u| + |u|^2) \\ &= (1+u)(1+\overline{u}) - 1 - 2|u| - |u|^2 \\ &= u + \overline{u} - 2|u| \\ &= 2(\mathrm{Re}(u) - u) \leqslant 0 \end{aligned}$$

◊ Appliquons l'inégalité triangulaire

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2| \implies |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$$

Puisque z_1 et z_2 jouent de rôles symétriques on a aussi

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

Donc

$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leqslant |z_1 - z_2|$$

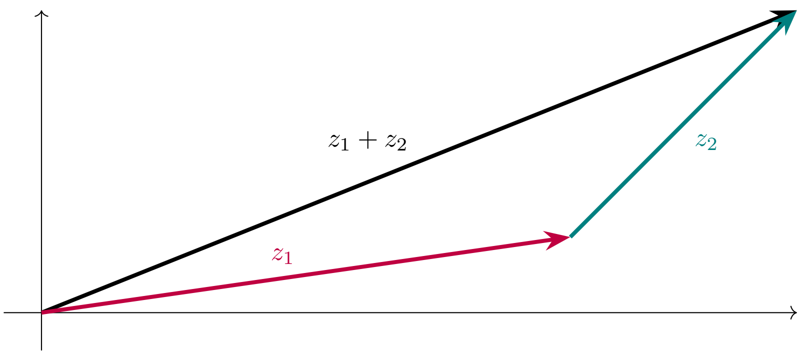

Figure 1 – Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire.

□

2 Caractérisation du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$

Démonstration.

- $\star$ ($\Longrightarrow$) Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire
  - $\lozenge$ Si $z_2 = 0$ alors z_1 et z_2 sont positivement liés
  - $\lozenge$ Sinon, $|1+u|^2 - (1+|u|)^2 = 0$ donc $\mathrm{Re}(u) - |u| = 0$.
    Donc $u \in \mathbb{R}_+$, et comme $z_1 = uz_2$, alors z_1 et z_2 sont positivement liés.
- $\star$ ($\Longleftarrow$) Supposons que z_1 et z_2 sont positivement liés. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$.
  Si $z_1 = \lambda z_2$,

$$|z_1 + z_2| = |(\lambda+1)z_2| = |\lambda+1||z_2| = (\lambda+1)|z_2| = \lambda|z_2| + |z_2| = |\lambda z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$$

  Donc l'inégalité est une égalité.
  Si $z_2 = \lambda z_1$, en échangeant les rôles joués par z_1 et z_2 on obtient que l'inégalité est une égalité.

□

3 Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque, $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ik\theta}) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k\right) \quad \text{par les formules de moivre} \end{aligned}$$

Ainsi, si $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0[2\pi]$,

$$C_n(\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (1)^k\right) = \mathrm{Re}(n+1) = n+1$$

Sinon,

$$C_n(\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}}\right)$$

Simplifions donc ce quotient.

$$\begin{aligned} \frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}} = \frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta(n+1)}{2}} - e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= e^{i\frac{\theta n}{2}}\left(\frac{-2i\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta n}{2} + i\sin\frac{\theta n}{2}\right) \end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

En prenant la partie réelle de ce résultat, on a

$$C_n(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta n}{2} + i\sin\frac{\theta n}{2}\right)\right] = \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}$$

Donc
$$C_n(\theta) = \begin{cases} n+1 & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\frac{n\theta}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Remarque En prenant la partie imaginaire de (♣), on peut retrouver la somme $S_n(\theta)$:
$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin\frac{n\theta}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

4 Si z_0 est racine de la fonction polynômiale P, alors P se factorise par $(z - z_0)$

Soient $n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ Posons pour tout $z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

(*i*) Si $P(z_0) = 0$, alors $\exists Q \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_0)Q(z)$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque,
$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(z_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (z^k - z_0^k) && \text{nul pour } k = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(a_k (z - z_0) \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \right) \\ &= (z - z_0) \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \end{aligned}$$

Donc en posant $Q(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right), \in \mathbb{C}[z]$, on a montré que P se factorise. □

5 Si $z_1, \dots, z_n$ sont n racines distinctes de la fonction polynômiale P de degré n, alors $P(z)$ se factorise en ...

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^*$ fixés quelconques. Posons, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{1}$$

Supposons que $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ sont n racines deux à deux distinctes de la fonction polynomiale P. Alors, il existe $Q \in \mathbb{C}[z]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$P(z) = Q(z) \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

On note d le degré de Q et $(b_0, b_d) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^*$ ses coefficients. On a alors
$$Q(z) = \sum_{k=0}^{d} b_d z^d$$

Ainsi, $P(z)$ s'écrit

$$P(z) = \sum_{k=0}^{d} b_d z^d \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) = b_d z^{n+d} + \textit{termes de degré inférieur à } n+d. \tag{2}$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale, $n + d = n$ (sinon, z^{n+d} aurait un coefficient b_d non nul à droite mais un coefficient nul à gauche).
Donc $d = 0$ d'où Q est une fonction constante de valeur $b_d = b_0$, et en identifiant les termes en z^n de (1) et (2), on obtient $a_n = b_0$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

□

6 Calculer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$ en fonction de $\theta \in [0, 2\pi[$

Démonstration. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\times 0} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Cette dernière notation est une notation exponentielle seulement si $2\cos\frac{\theta}{2} \geqslant 0$.

⋆ Si $\theta \in [0, \pi[$,

$$\begin{cases} |z| = 2\cos\frac{\theta}{2} \\ \frac{\theta}{2} \in \operatorname{Arg}(z) \end{cases}$$

⋆ Si $\theta = \pi$, $z = 0$ donc $|z| = 0$

⋆ Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$,

$$\begin{aligned} z = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} &= -2 \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -2 \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} |z| = -2|\cos\frac{\theta}{2}| \\ \frac{\theta}{2} + \pi \in \operatorname{Arg}(z) \end{cases}$$

□

7 Résolution des équations algébriques de degré 2 dans $\mathbb{C}$ et algorithme de recherche d'une racine carrée sous forme cartésienne (sur un exemple explicite).

Considérons l'équation algébrique de degré 2 :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Où $z \in L$ est l'inconnue et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ sont des paramètres. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ que l'on appelle le discriminant de l'équation.

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution dite double qui est $-\frac{b}{2a}$ et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$$

— Si $\Delta \neq 0$, notons δ une racine carrée de Δ, l'équation admet deux solutions distinctes $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$ dites simples et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)$$

Démonstration. La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c &= a\Bigg[\underbrace{z^2+\frac{b}{a}z}_{\text{But : Absorber ces termes dans un carré}}+\frac{c}{a}\Bigg] = a\left[z^2+2\frac{b}{2a}z+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

— Si $\Delta=0$

$$az^2+bz+c = a\left(z-\frac{-b}{2a}\right)^2$$

de sorte que

$$az^2+bz+c=0 \iff a\left(z-\frac{-b}{2a}\right)^2=0 \iff z=-\frac{b}{2a}$$

— Sinon

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] &= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right) \\
&= a\left(z-\frac{-z+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-z-\delta}{2a}\right)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$az^2+bz+c=0 \iff a\left(z-\frac{-z+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-z-\delta}{2a}\right)=0$$

$$\iff \begin{cases} z-\frac{-z-\delta}{2a}=0 \\ \text{ou} \\ z-\frac{-z+\delta}{2a}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=\frac{-z-\delta}{2a} \\ \text{ou} \\ z=\frac{-z+\delta}{2a} \end{cases}$$

□

8 Décrire (avec preuve) l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité et les localiser géométriquement dans le plan complexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

Démonstration. — Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} z^n = 1 \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} &\iff \begin{cases} z^n = 1 \\ z \in \mathbb{C}^* \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z^n = 1 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \rho^n e^{in\theta} = 1 \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta \equiv 0[2\pi] \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \rho = 1 \text{ car } \rho > 0 \\ \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right] \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \frac{2k\pi}{n} \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{cases} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff z \in \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est paramétré par l'entier k qui parcourt un ensemble infini. Toutefois, en représentant graphiquement les solutions, il semblerait que "tous les n", on fait un tour de cercle trigonométrique de plus, en redécrivant les solutions déjà obtenues pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

— Localisation géométrique

- ⋆ $\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité, et dont 1 est l'un des sommets
- ⋆ $\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des sommets du carré inscrit dans le cercle unité et dont 1 est l'un des sommets. Le côté du carré vaut $|1 - i| = \sqrt{2}$.
- ⋆ $\mathbb{U}_5$ est l'ensemble des sommets du pentagone régulier inscrit dans le cercle unité et dont 1 est l'un des sommets.

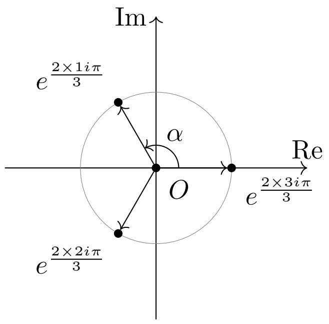

Figure 2 – Racines cubiques de l'unité.

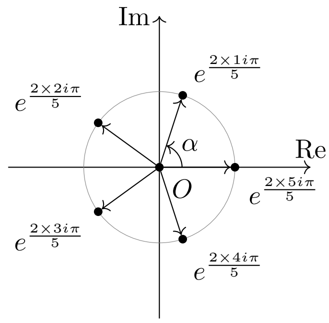

Figure 3 – Racines $5^{\text{èmes}}$ de l'unité.

□

9 Somme et Produit des racines n-ièmes

Démonstration.

- $\Diamond$ **Méthode 1** : En utilisant les relations coefficients racines.
  $\mathbb{U}_n$ sont les n racines disctinctes de $z^n - 1$

$$S_n = -\frac{1}{\text{coefficient dominant}} \times (\text{coefficient de } z^{n-1} \text{ dans } z^n - 1) = \begin{cases} -0 & \text{si } n \geqslant 2 \\ -(-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_n = (-1)^n \frac{\text{coefficient constant}}{\text{coefficient dominant}} = (-1)^n \times \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1}$$

- $\Diamond$ **Méthode 2** : Manipulation des symboles sommatoires

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega_0^k \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 \times \frac{1-\omega_0^n}{1-\omega_0} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Puisqu'on ne peut appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique seulement si $\omega_0 = 1 \iff e^{\frac{2i\pi}{n}} = 1 \iff \frac{2\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \iff n = 1$
De même

$$P_n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_0^k = \omega_0^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega_0^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} (\omega_0^n)^{\frac{n-1}{2}} = 1^{\frac{n-1}{2}} = 1 & \text{si } n \equiv 1[2] \\ e^{\frac{2i\pi n(n-1)}{2n}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1} \end{cases} \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

□

10 *[non demandée]* Factorisation d'une fonction polynomiale connaissant p racines.

Soient $n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.
Posons pour tout $z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

(*i*) Si $\exists p \in \mathbb{N}^* : \exists (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ deux à deux distincts tels que $\forall k \in [\![1, p]\!], P(z_k) = 0$ alors, $\exists Q \in \mathbb{C}[x] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q(z) \times \prod_{k=1}^{p} (z - z_k)$.

Démonstration. Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p) : \forall P \in \mathbb{C}[z], (\exists (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p, \ 2 \text{ à } 2 \text{ distincts } : \forall i \in [\![1, p]\!], P(z_i) = 0) \\ \implies \exists Q \in \mathbb{C}[z] : P(z) = Q(z) \prod_{i=1}^{p} (z - z_i) \end{aligned}$$

- $\Diamond$ $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la preuve précédente.
- $\Diamond$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(p)$ est vraie.
  Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ fixés quelconques tels que $\exists (z_1, \dots, z_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}$ deux à deux distincts tels que $\forall i \in [\![1, p+1]\!], P(z_i) = 0$.
  Appliquons $\mathcal{P}(p)$ à $P \in \mathbb{C}[z]$ dont $(z_1, \dots, z_p)$ sont les p racines deux à deux distinctes.

$$\exists Q_1 \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q_1(z) \prod_{i=1}^{p} (z - z_i)$$

Évaluons cette expression en z_{p+1}

$$\underbrace{P(z_{p+1})}_{=0} = Q_1(z_{p+1}) \prod_{i=1}^{p} \underbrace{(z_{p+1} - z_i)}_{\neq 0 \text{ car distincts}}$$

Donc $Q_1(z_{p+1}) = 0$, ce qui permet d'appliquer (i) pour $P \leftarrow Q_1$, $z_0 \leftarrow z_{p+1}$.

$$\exists Q \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, Q_1(z) = (z - z_{p+1})Q(z)$$

Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_{p+1})Q(z) \prod_{i=1}^{p} (z - z_i) = Q(z) \prod_{i=1}^{p+1} (z - z_i)$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

$\square$