Khôlles de Mathématiques - Semaine 24

Hugo Vangilluwen, George Ober

22 Avril 2024

1 Caractérisation injectivité/bijectivité/surjectivité par le rang

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$
1. Si E est de dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{rg} f = \dim E$$

2. Si F est de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{rg} f = \dim F$$

3. Si E et F sont de même dimension finie

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ sujective}$$

Démonstration. (i) Supposons E de dimension finie, fixons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (avec $n = \dim E$) Supposons f injective :

$$\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Vect}\left\{f(e_1) \ldots f(e_n)\right\}$$

Donc $(f(e_1), \ldots f(e_n))$ est génératrice. $(f(e_1), \ldots f(e_n))$ est de plus libre car f est injective. Donc c'est une base, donc

$$\dim \mathrm{Vect}\left\{f(e_1) \ldots f(e_n)\right\} = n = \dim E$$

donc $\mathrm{rg} f = \dim E$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{rg} f = \dim E = n$. Alors

$$n = \mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Vect}\left\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\right\}$$

Donc $(f(e_1), \ldots f(e_n))$ est génératrice de cardinal n, égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré. C'est donc une base du sous-espace vectoriel engendré. Donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre, donc f est injective.

(ii) Supposons F de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im} f = F \iff \dim \mathrm{Im} f = \dim F$$

(iii) Supposons E et F de même dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{rg} f = \dim E \iff \mathrm{rg} f = \dim F \iff f \text{ surjective}$$

D'où la bijectivité. □