Khôlles de Mathématiques - Semaine 11

Félix Rondeau

08 décembre 2024

1 Preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes à partir du cas réel.

Démonstration.
Résultat préliminaire : existence d'une sous-suite convergente commune.

— La suite a étant bornée, on peut lui appliquer le théorème de Bolsano-Weierstrass :

$$\exists a_\infty \in \mathbb{R} : \exists \phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante telle que } \big(b_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } b_\infty.$$

— La suite $\big(b_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée (en tant que sous-suite d'une suite bornée), on peut lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass :

$$\exists b_\infty \in \mathbb{R} : \exists \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante telle que } (b_{\phi\circ\psi})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } b_\infty$$

Observons alors que $\big(a_{\phi\circ\psi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $\big(a_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ donc elle converge vers a_∞.
Ainsi, l'extractrice $\chi = \phi \circ \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante est telle que les deux sous-suites $\big(a_{\chi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(b_{\chi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Preuve du théorème.
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Par définition,

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

Posons $x = \big(\mathrm{Re}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = \big(\mathrm{Im}(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqslant |u_n| \leqslant M \quad \text{et} \quad |y_n| \leqslant |u_n| \leqslant M$$

Par conséquent, x et y sont deux suites réelles bornées, donc le résultat précedemment prouvé permet de construire une extractrice $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\big(x_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(y_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui convergent dans $\mathbb{R}$ vers leur limites respectives x_∞ et y_∞. Ainsi, la suite $\big(u_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, extraite de u, converge vers $x_\infty + iy_\infty$.

□

2 Illustrer par des exemples que la convergence de la suite complexe $(u_n) = (e^{i\theta_n})$ n'implique pas la convergence de (θ_n) même si on impose à (θ_n) d'être dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour la rendre unique et bornée.

Démonstration. Considérons la suite (θ_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

Alors, la suite $(u_n) = (e^{i\theta_n}) = (i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais (θ_n) diverge vers $+\infty$.
Considérons à présent une seconde définition de la suite (θ_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0[2] \\ 2\pi - \frac{1}{n} & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases}$$

Cette définition impose à la suite (θ) d'être à valeurs dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, et selon elle, la suite $(u_n) = (e^{i\theta_n})$ converge vers 1. Cependant, (θ_n) diverge car elle a deux valeurs d'adhérence qui sont 0 et 2π.

$\square$

3 Calculer la limite de $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ en fonction de $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- ⋆ **Si z est réel**, on distingue deux cas :
  - — **Si $z \neq 0$**,

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)} = e^{n\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}}\cdot\frac{z}{n}} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}}\cdot z}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

  - — **Si $z = 0$**,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 = e^0$$

- ⋆ **Si z est complexe non réel**, notons x sa partie réelle et y sa partie imaginaire.
  Pour n suffisament grand,

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{z}{n}\right) > 0$$

On peut donc considérer la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que pour tout entier naturel n, θ_n soit un argument de $1+\frac{z}{n}$. On a alors pour de telles valeurs de n

$$\theta_n = \arctan(\tan\theta) = \arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = \arctan\left(\frac{y}{n+x}\right)$$

z n'étant pas réel, les termes de la suite sont tous non nuls, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(\left|1+\frac{z}{n}\right| e^{i\theta_n}\right)^n &= \left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}\right)^n e^{in\arctan\left(\frac{y}{1+x}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}n\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)} e^{in\arctan\left(\frac{y}{n+x}\right)}\end{aligned}$$

D'une part

$$\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right) = \frac{n}{2}\cdot\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}}\cdot\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

Et d'autre part

$$n\arctan\left(\frac{y}{n+x}\right) = n\underbrace{\frac{\arctan\left(\frac{y}{n+x}\right)}{\frac{y}{n+x}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}}\cdot\frac{y}{n+x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$$

Ainsi,

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{x+iy} = e^z$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

$\square$

4 Résolution explicite (sur un exemple) d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants avec un second membre produit d'un polynôme et d'une suite géométrique.

Démonstration.

— **Résolution d'une relation d'ordre 1.**
Considérons une équation de récurrence linéaire d'ordre 1 de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = v_n$$

L'ensemble des suites la vérifiant est la droite affine passant par une solution particulière et dirigée par la droite vectorielle des solution de l'équation homogène associée. Cette droite vectorielle vaut, **dans le cas où a est nul**

$$\left\{\lambda \cdot \gamma^0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

et **dans le cas où a est non nul**

$$\{(\lambda \cdot a^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Si le second membre est de la forme $v_n = P(n)c^n$ avec P un polynôme, on cherche une solution particulière de la forme $Q(n)c^n$ avec, **si $\boldsymbol{c \neq a}$**, Q un polynôme de $\mathbb{K}$ tel que

$$\deg Q = \deg P$$

et **si $\boldsymbol{c = a}$**, Q un polynôme tel que

$$\deg Q = \deg P + 1$$

— **Résolution d'une relation d'ordre 2.** Considérons une équation de récurrence linéaire d'ordre 2 de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = v_n$$

avec $(a_0 \alpha_1) \in \mathbb{K}^2$. L'ensemble des suites la vérifiant est le plan affine passant par une solution particulière w et dirigé par le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène.

  — Si $\mathbb{K}$ désigne le corps des complexes, on distingue en fonction du discrimiant Δ de l'équation caractéristique deux cas :

    — Lorsque $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ et dans le cas où a_0 et a_1 ne sont pas tous deux nuls, le plan vectoriel des solution de la relation de récurrence homogène est

$$\left\{((\lambda + \mu n) r_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

    et sinon, il vaut

$$\left\{\lambda\gamma^0 + \mu\gamma^1 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

    — Lorsque $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène est

$$\left\{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

  — Si $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels, on distingue en fonction du discrimiant Δ de l'équation caractéristique trois cas :

    — Lorsque $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène est similaire à celui du cas complexe.

    — De même lorsque $\Delta > 0$, l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène est similaire du cas $\Delta \neq 0$ dans le cas complexe.

    — Enfin, lorsque $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène est

$$\left\{\left(\rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On cherche une solution particulière de la forme $Q(n)a^n$ avec, Q un polynôme de degré égal à celui de P si a n'est pas racine de l'équation caractéristique et du degré de P augmenté d'un nombre égal à la multiplicité de la racine a sinon.

□

5 Existence d'une relation de Bezout

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = a \wedge b$$

Démonstration.

— **Démonstration pour** $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$**.**
Considérons la propriété de récurrence définie pour tout $b \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(b) : \forall a \in \mathbb{Z}, \forall c \in [\![0, b]\!], \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : au + cv = a \wedge c$$

— Supposons que $b = 0$.
Soit $a \in \mathbb{Z}$ fixé quelconque.
Si $a = 0, a \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$ donc $a \wedge 0 = 0 \times a + 232 \times b$.
Sinon, $a \neq 0, u = \frac{a}{|a|} \in \{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ et

$$ua + 232 \times 0 = \frac{a^2}{|a|} = \frac{|a|^2}{|a|} = |a| = a \wedge 0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie

— Soit $b \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(b)$ est vraie.
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $c \in [\![0, b+1]\!]$ fixés quelconques.

— Si $c \in [\![0, b]\!]$, la véracité de $\mathcal{P}(b)$ permet d'affirmer que $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : au + cv = a \wedge c$.

— Sinon, $c = b + 1$. Effectuons la division euclidienne de a par $b + 1$:

$$\exists ! (q,r) \in \mathbb{N} \times [\![0, b]\!] : a = (b+1)q + r$$

Or, d'après le lemme d'Euclide,

$$a \wedge (b+1) = r \wedge (b+1)$$

Or $r \in [\![0, b]\!]$ donc $\mathcal{P}(b)$ s'applique pour $a \leftarrow b + 1$ et $c \leftarrow r$:

$$\exists (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 : (b+1)u_0 + rv_0 = (b+1) \wedge r$$

si bien que

$$a \wedge (b+1) = (b+1)u_0 + rv_0 = (b+1)u_0 + (a - q(b+1))v_0 = av_0 + (b+1)(u_0 - qv_0)$$

d'où le résultat attendu en posant $u = v_0$ et $v = u_0 - qv_0$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(b+1)$ est vraie.

— **Démonstration du cas général :** $(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$.
Appliquons le résultat prouvé dans le cas précédent à $(a, |b|) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$:

$$\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2 : au_1 + bv_1 = a \wedge |b|$$

Posons $u = u_1$ et $v = -v_1$. On a $(u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ et

$$au + bv = au_1 + |b|v_1 = a \wedge |b| = a \wedge b$$

□

6 Théorème de Gauss

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$.

$$\left.\begin{array}{l} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{array}\right\} \implies a \mid c$$

Démonstration. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ fixés quelconques.
a divise bc donc

$$\exists k \in \mathbb{Z} : ka = bc \tag{1}$$

a et b sont premiers entre eux donc

$$\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1 \tag{2}$$

En multipliant la première relation par c, nous obtenons

$$auc + bvc = c$$

donc, en utilisant la deuxième relation,

$$auc + akv = c \iff a(\underbrace{uc + kv}_{\in \mathbb{Z}}) = c$$

ce qui montre que a divise c. $\square$

7 Si $a \wedge c = b \wedge c = 1$ alors $ab \wedge c = 1$ et sa généralisation au cas de n entiers premiers avec un même entier.

Démonstration. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{Z}^{p+1}$ $n+1$ entiers fixés quelconques premiers entre eux deux à deux. Le théorème d'existence d'une relation de bezout assure donc que

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \exists (u_i, v_i) \in \mathbb{Z}^2 : au_i + b_i v_i = 1$$

donc que

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \exists (u_i, v_i) \in \mathbb{Z}^2 : b_i v_i = 1 - au_i$$

si bien qu'en effectuant le produit membre à membre de ces p égalités,

$$\prod_{i=1}^{p} (b_i v_i) = \prod_{i=1}^{p} (1 - au_i)$$

En développant le membre de droite, on obtient que

$$\exists U \in \mathbb{Z} : \prod_{i=1}^{p} (b_i v_i) = 1 - aU$$

si bien qu'en posant $V = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} v_i$,

$$\left(\prod_{i=1}^{p} b_i\right) V = 1 - aU$$

ainsi, il existe deux entiers relatifs U et V tels que

$$aU + \left(\prod_{i=1}^{p} b_i\right) V = 1$$

Le théorème de caractérisation de la propriété «deux entiers sont premiers entre eux» par une relation de Bezout permet donc de conclure que

$$a \wedge \left(\prod_{i=1}^{p} b_i\right) = 1$$

$\square$

8 Montrer que $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$

Démonstration. Soient $(a,b)\mathbb{Z}^2$ fixés quelconques. Nous savons que

$$\exists (a',b') \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \qquad \text{où } d = a \wedge b$$

Observons alors que

$$\begin{aligned} (a \wedge b)(a \vee b) &= (da' \wedge db')(da' \vee db') \\ &= d(\underbrace{a' \wedge b'}_{=1}) \times d(a' \vee b') \\ &= d^2(a' \vee b') \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Calculons $a' \vee b'$:

— $a'b'$ est un multiple commun à a' et b' donc $a' \vee b' | a'b'$.

— $a' \vee b'$ est un multiple commun à a' et b' doonc

$$\left.\begin{array}{l} a' \wedge b' = 1 \\ a' | a' \vee b' \\ b' | a' \vee b' \end{array}\right\} \implies a'b' | a' \vee b'$$

Ainsi, $a' \vee b'$ et $a'b'$ se divisent l'un l'autre donc ils sont associés (égaux ou opposés), or $a' \vee b' \geqslant 0$ donc $a' \vee b' = |a'b'|$.
Par conséquent, en reprenant l'égalité ($\star$),

$$(a \wedge b)(a \vee b) = d^2 a' \vee b' = d^2|a'b'| = |da' \times db'| = |ab|$$

$\square$