

Khôlles de Mathématiques - Semaine 4

George Ober

17 avril 2024

1 Résolution des équations algébriques de degré 2 dans \mathbb{C} et algorithme de recherche d'une racine carrée sous forme cartésienne (sur un exemple explicite).

Considérons l'équation algébrique de degré 2 :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Où $z \in L$ est l'inconnue et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ sont des paramètres. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ que l'on appelle le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution dite double qui est $-\frac{b}{2a}$ et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2$$

- Si $\Delta \neq 0$, notons δ une racine carrée de Δ , l'équation admet deux solutions distinctes $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$ dites simples et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a \left(z - \frac{-b-\delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b+\delta}{2a} \right)$$

Démonstration. La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[\underbrace{z^2 + \frac{b}{a}z}_{\text{But : Absorber ces termes dans un carré}} + \frac{c}{a} \right] = a \left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$

$$az^2 + bz + c = a \left(z - \frac{-b}{2a} \right)^2$$

de sorte que

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a \left(z - \frac{-b}{2a} \right)^2 = 0 \iff z = -\frac{b}{2a}$$

— Sinon

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] = a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \\ &= a \left(z - \frac{-z + \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-z - \delta}{2a} \right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a \left(z - \frac{-z + \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-z - \delta}{2a} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \iff & \begin{cases} z - \frac{-z - \delta}{2a} = 0 \\ \text{ou} \\ z - \frac{-z + \delta}{2a} = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} z = \frac{-z - \delta}{2a} \\ \text{ou} \\ z = \frac{-z + \delta}{2a} \end{cases} \end{aligned}$$

□