Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

27 novembre 2023

1 Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est sont plus grand élément.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, et A une partie non-vide de E.
S'il existe $M \in A$ tel que $M = \max A$ alors $\sup A$ existe et $\max A = \sup A$.
S'il existe $S \in A$ tel que $S = \sup A$ alors $\max A$ existe et $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soient un tel ensemble E et une telle partie A et notons M son plus grand élément.
Posons $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A,\ a \leq m\}$.
Par définition :

$$\forall m \in M(A),\ M \leq m,$$

car $M \in A$, mais comme $M \in M(A)$, on a directement que $M = \min M(A) = \sup A$. D'où :

$$\forall A \subset E,\ \exists M \in A\ :\ M = \max A \implies \exists \sup A \in E\ \land\ \sup A = \max A \in A.$$

Pseudo-réciproquement, soit A une partie de E admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne S.
Il n'y a rien à prouver, si S est dans A, par définition, S est plus grand que tous les éléments de A mais est dans A, donc de tous les éléments de A, S est le plus grand :

$$\forall A \subset E,\ \exists S \in A\ :\ S = \sup A \implies \exists \max A \in A\ \land\ \sup A = \max A.$$

$\square$

2 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Pour tout couple d'entiers relatifs a et b, b non nul, il existe un unique couple d'entiers relatifs q et r tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r \leq |b| - 1$

Démonstration. Soient deux tels couples $((q, r), (q', r'))$ et deux tels entiers (a, b).
Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-(|b| - 1) \leq r' - r \leq |b| - 1$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité suivante :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Posons pour $b \geq 1$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$, non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit...), ainsi $\Omega \subset \mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe un k dans Ω tel que $k > |a|$, si tel est le cas alors $k \notin \Omega$ (multiplier par b). De fait, Ω est majoré par $|a|$, il admet donc un plus grand élément noté q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ donc $r \in \mathbb{Z}$. Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leq a$ d'où $0 \leq r$ et $q = \max \Omega$ donc $b(q + 1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [\![0, |b| - 1]\!]$. Si $b < 1$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. $\square$