Khôlles de Mathématiques - Semaine 27

Vangilluwen Hugo

5 Mai 2024

1 Norme uniforme d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b], \mathbb{R})$.
L'ensemble $\{|f(t)| \mid t \in [a;b]\}$ admet une borne supérieur notée $||f||_{\infty,[a;b]}$.

Démonstration. Montrons que sur chaque morceau, f est bornée.

Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant N} \in \mathcal{S}([a;b])$ adaptée à f. Soit $i \in [\![0; N-1]\!]$. Posons $f_i = f_{|]x_i;x_{i+1}[}$. f étant continue par morceaux, $\exists (l_i^+, l_{i-1}^-) \in \mathbb{R}^2 : \lim\limits_{x \to x_i^+} f_i(x) = l_i^+ \wedge \lim\limits_{x \to x_{i+1}^-} f_i(x) = l_{i+1}^-$. Nous pouvons donc prolonger f_i en $\tilde{f_i}$ par continuité en x_i et en x_{i+1}. Comme $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, le théorème de Weierstrass s'applique : $\mathrm{Im}\tilde{f_i}$ est bornée (donc f_i aussi). Ainsi $||f_i||_{\infty,[a;b]}$ est bien défini.
$\{|f(t)| \mid t \in [a;b]\}$ est :

- une partie de $\mathbb{R}$
- non vide car contenant $|f(x)|$.
- majorée par $\max\Big(\{||f_i||_{\infty,[a;b]} \,|i \in [\![0; N-1]\!]\} \cup \{||f_i||_{\infty,[a;b]} \,|i \in [\![0; N-1]\!]\}\Big)$ (ensemble admettant bien un plus grand élément puisque fini)

Donc $||f||_{\infty,[a;b]}$ est bien définie.

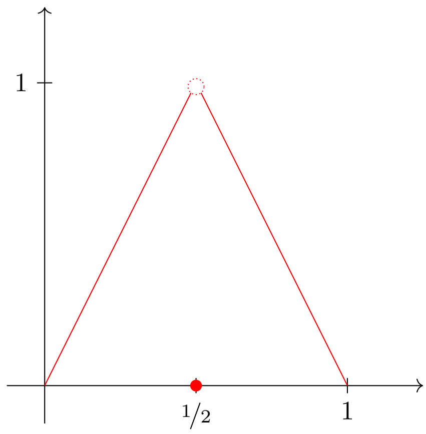

FIGURE 1 – $||f||_{\infty,[a;b]}$ peut ne pas être atteinte

$\square$

2 Lemme d'approximation uniforme d'un fonction continue sur un segment par une fonction en escalier

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.

(i) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \chi \in \mathcal{E}([a;b], \mathbb{R}) : ||f - \chi||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a;b], \mathbb{R})^2 : \begin{cases} \varphi \leqslant f \leqslant \psi \\ ||\psi - \varphi||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon \end{cases}$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.
(i) D'après le théorème de Heine, $f \in \mathcal{C}_u^0([a;b],\mathbb{R})$. Écrivons la définition de uniformément continue pour ε :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \ \forall (x,y) \in [a;b]^2, \ |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

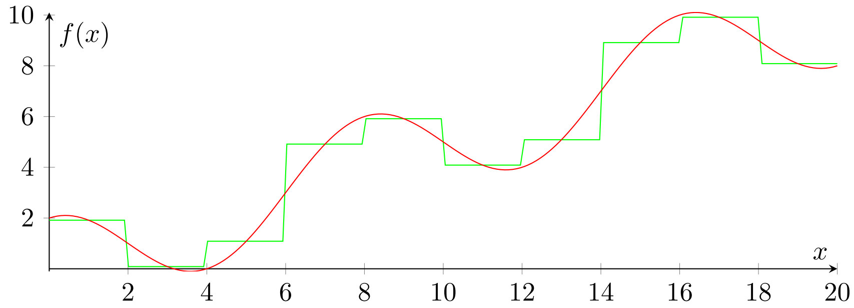

FIGURE 2 – Fonction en escalier "approximant" une fonction continue

Cherchons N tel que $\frac{b-a}{N} \leqslant 2\eta$. C'est-à-dire $N \geqslant \frac{b-a}{2\eta}$. Posons donc $N = \lceil \frac{b-a}{2\eta} \rceil$ et $\eta' = \frac{b-a}{N}$ de sorte que $\eta' \leqslant 2\eta$.

Définissons $\chi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ par

$$\chi \left| \begin{array}{ccl} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} : \ x = a + n\eta' \\ f\left(a + \eta' \left(\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor + 1/2 \right)\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ceci est bien une fonction en escalier car $(a+k\eta')_{0 \leqslant k \leqslant N}$ est une subdivision adaptée. En effet, $\forall k \in [\![0;N-1]\!], \ f_{|]a+k\eta';a+(k+1)\eta'[} = f\left(a + \eta'\left(\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor + 1/2\right)\right) \cdot \widetilde{1}_{]a+k\eta';a=(k+1)\eta'[}$.

Soit $x \in [a;b]$. Si $\exists n \in \mathbb{N} : \ x = a+n\eta'$ alors $|f(x)-\chi(x)| = 0$. Sinon $0 \leqslant \frac{x-a}{\eta'} - \lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor \leqslant 1$. D'où $0 \leqslant (x-a) - \eta' \lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor \leqslant \eta'$. Donc, en enlevant $\eta'/2$, $-\frac{\eta'}{2} \leqslant a + \eta'\left(\lfloor \frac{x-a}{2\eta} \rfloor + 1/2\right) \leqslant \frac{\eta'}{2}$. Par définition de η', $-\eta \leqslant a + \eta'\left(\lfloor \frac{x-a}{2\eta} \rfloor + 1/2\right) \leqslant \eta$. Par définition de η, on a $|f(x) - f\left(a + 2\eta\left(\lfloor \frac{x-a}{2\eta} \rfloor + 1/2\right)\right)| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, nous avons bien $||f-\chi||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$.

(ii) Écrivons la définition de uniformément continue pour ε :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \ \forall (x,y) \in [a;b]^2, \ |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Définissons $\varphi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ par

$$\left| \begin{array}{ccc} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} : \ x = a + n\eta \\ \inf f\left(\,]a + \eta \lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor; a + \eta \left(\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor + 1 \right) [\, \right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Définissons $\psi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ par

$$\left| \begin{array}{ccc} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} : \ x = a + n\eta \\ \sup f\left(\,]a + \eta \lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor; a + \eta \left(\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor + 1 \right) [\, \right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ces deux fonctions sont bien définies car $f_{|]a+\eta\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor; a+\eta\left(\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor + 1\right)[}$ est continue donc, d'après le théorème de Weierstraß, son image admet une borne inférieure et une borne supérieure. Elle sont bien en escalier.

Par définition des bornes inférieures et supérieures, nous avons $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$. De plus, pour $x \in [a;b]$ fixé quelconque, $f_{|]a+\eta\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor; a+\eta\left(\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor + 1\right)[}$ se prolonge par continuité et, d'après le théorème de Weierstraß, atteint ses bornes. Notons f_i et f_s les antécédents respectifs des bornes. $(f_i, f_s) \in \,]a + \eta \lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor; a + \eta\left(\lfloor \frac{x-a}{\eta'} \rfloor + 1\right)[^2$ donc $|f_i - f_s| \leqslant \eta$. D'où $|f(f_i) - f(f_s)| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, nous avons bien $||\psi - \varphi||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$. $\square$