

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 3

George Ober, Félix Rondeau

29 septembre 2024

## 1 Preuve de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité montrant que le module est 1-lipschitzien + dessin et interprétation géométrique

Pour tout  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ ,

(i)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(ii)  $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$

*Démonstration.* Soient  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  fixés quelconques.

◇ Si  $z_2 = 0$  l'inégalité est évidente.

Sinon,  $z_2 \neq 0$  alors  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \iff \left| 1 + \frac{z_1}{z_2} \right| \leq 1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ .

Posons  $u = \frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} |1 + u|^2 - (1 + |u|)^2 &= (1 + u)(\overline{1 + u}) - (1 + 2|u| + |u|^2) \\ &= (1 + u)(1 + \bar{u}) - 1 - 2|u| - |u|^2 \\ &= u + \bar{u} - 2|u| \\ &= 2(\operatorname{Re}(u) - |u|) \leq 0 \end{aligned}$$

◇ Appliquons l'inégalité triangulaire

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \implies |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

Puisque  $z_1$  et  $z_2$  jouent de rôles symétriques on a aussi

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

Donc

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

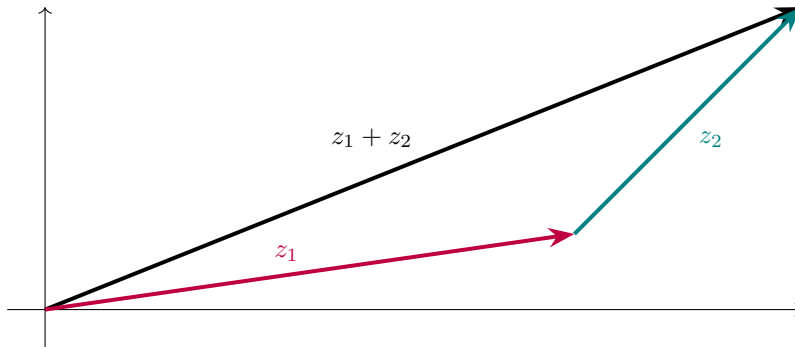


FIGURE 1 – Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire.

□

## 2 Caractérisation du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$

*Démonstration.*

★ (  $\implies$  ) Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire

◇ Si  $z_2 = 0$  alors  $z_1$  et  $z_2$  sont positivement liés

◇ Sinon,  $|1 + u|^2 - (1 + |u|)^2 = 0$  donc  $\operatorname{Re}(u) - |u| = 0$ .

Donc  $u \in \mathbb{R}_+$ , et comme  $z_1 = uz_2$ , alors  $z_1$  et  $z_2$  sont positivement liés.

★ (  $\impliedby$  ) Supposons que  $z_1$  et  $z_2$  sont positivement liés. Alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $z_1 = \lambda z_2$ .  
Si  $z_1 = \lambda z_2$ ,

$$|z_1 + z_2| = |(\lambda + 1)z_2| = |\lambda + 1||z_2| = (\lambda + 1)|z_2| = \lambda|z_2| + |z_2| = |\lambda z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$$

Donc l'inégalité est une égalité.

Si  $z_2 = \lambda z_1$ , en échangeant les rôles joués par  $z_1$  et  $z_2$  on obtient que l'inégalité est une égalité. □

## 3 Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

*Démonstration.* Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé quelconque,  $n \in \mathbb{N}$  fixé quelconque.

$$\begin{aligned} C_n(\theta) &= \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k \right) \text{ par les formules de moivre} \end{aligned}$$

Ainsi, si  $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0[2\pi]$ ,

$$C_n(\theta) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n (1)^k \right) = \operatorname{Re}(n+1) = n+1$$

Sinon,

$$C_n(\theta) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \right)$$

Simplifions donc ce quotient.

$$\begin{aligned} \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} &= \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}} \left( e^{-\frac{i\theta(n+1)}{2}} - e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left( e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right)} \\ &= e^{i\frac{\theta n}{2}} \left( \frac{-2i \sin \left( \frac{\theta(n+1)}{2} \right)}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} \right) \\ &= \frac{\sin \left( \frac{\theta(n+1)}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \cos \frac{\theta n}{2} + i \sin \frac{\theta n}{2} \right) \quad (\clubsuit) \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle de ce résultat, on a

$$C_n(\theta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\sin \left( \frac{\theta(n+1)}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \cos \frac{\theta n}{2} + i \sin \frac{\theta n}{2} \right) \right] = \frac{\sin \left( \frac{\theta(n+1)}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n\theta}{2}$$

Donc

$$C_n(\theta) = \begin{cases} n+1 & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos \frac{n\theta}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

□

**Remarque** En prenant la partie imaginaire de (♣), on peut retrouver la somme  $S_n(\theta)$  :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin \frac{n\theta}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

#### 4 Si $z_0$ est racine de la fonction polynômiale $P$ , alors $P$ se factorise par $(z - z_0)$

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  et  $z_0 \in \mathbb{C}$  Posons pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$

(i) Si  $P(z_0) = 0$ , alors  $\exists Q \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_0)Q(z)$

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathbb{C}$  fixé quelconque,

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(z_0) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=0}^n a_k z_0^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (z^k - z_0^k) && \text{nul pour } k=0 \\ &= \sum_{k=1}^n \left( a_k (z - z_0) \left( \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \right) \\ &= (z - z_0) \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \end{aligned}$$

Donc en posant  $Q(z) = \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \in \mathbb{C}[z]$ , on a montré que  $P$  se factorise.

□

#### 5 Si $z_1, \dots, z_n$ sont $n$ racines distinctes de la fonction polynômiale $P$ de degré $n$ , alors $P(z)$ se factorise en ...

*Démonstration.* Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^*$  fixés quelconques. Posons, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \tag{1}$$

Supposons que  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  sont  $n$  racines deux à deux distinctes de la fonction polynômiale  $P$ . Alors, il existe  $Q \in \mathbb{C}[z]$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$P(z) = Q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

On note  $d$  le degré de  $Q$  et  $(b_0, b_d) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^*$  ses coefficients. On a alors

$$Q(z) = \sum_{k=0}^d b_k z^k$$

Ainsi,  $P(z)$  s'écrit

$$P(z) = \sum_{k=0}^d b_d z^d \prod_{i=1}^n (z - z_i) = b_d z^{n+d} + \text{termes de degré inférieur à } n+d. \quad (2)$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale,  $n+d = n$  (sinon,  $z^{n+d}$  aurait un coefficient  $b_d$  non nul à droite mais un coefficient nul à gauche).

Donc  $d = 0$  d'où  $Q$  est une fonction constante de valeur  $b_d = b_0$ , et en identifiant les termes en  $z^n$  de (1) et (2), on obtient  $a_n = b_0$ . Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

□

## 6 Calculer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$ en fonction de $\theta \in [0, 2\pi[$

*Démonstration.* Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i \times 0} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left( e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Cette dernière notation est une notation exponentielle seulement si  $2 \cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ .

★ Si  $\theta \in [0, \pi[$ ,

$$\begin{cases} |z| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{\theta}{2} \in \text{Arg}(z) \end{cases}$$

★ Si  $\theta = \pi$ ,  $z = 0$  donc  $|z| = 0$

★ Si  $\theta \in ]\pi, 2\pi[$ ,

$$\begin{aligned} z &= 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} = -2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} |z| = -2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \\ \frac{\theta}{2} + \pi \in \text{Arg}(z) \end{cases}$$

□

## 7 Résolution des équations algébriques de degré 2 dans $\mathbb{C}$ et algorithme de recherche d'une racine carrée sous forme cartésienne (sur un exemple explicite).

Considérons l'équation algébrique de degré 2 :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Où  $z \in L$  est l'inconnue et  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$  sont des paramètres. Posons  $\Delta = b^2 - 4ac$  que l'on appelle le discriminant de l'équation.

— Si  $\Delta = 0$ , l'équation admet une unique solution dite double qui est  $-\frac{b}{2a}$  et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2$$

— Si  $\Delta \neq 0$ , notons  $\delta$  une racine carrée de  $\Delta$ , l'équation admet deux solutions distinctes  $\frac{-b-\delta}{2a}$  et  $\frac{-b+\delta}{2a}$  dites simples et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a \left( z - \frac{-b-\delta}{2a} \right) \left( z - \frac{-b+\delta}{2a} \right)$$

*Démonstration.* La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

$$\begin{aligned}
 az^2 + bz + c &= a \left[ \underbrace{z^2 + \frac{b}{a}z}_{\text{But : Absorber ces termes dans un carré}} + \frac{c}{a} \right] = a \left[ z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\
 &= a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]
 \end{aligned}$$

— Si  $\Delta = 0$

$$az^2 + bz + c = a \left( z - \frac{-b}{2a} \right)^2$$

de sorte que

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a \left( z - \frac{-b}{2a} \right)^2 = 0 \iff z = -\frac{b}{2a}$$

— Sinon

$$\begin{aligned}
 az^2 + bz + c &= a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] = a \left( z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \left( z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \\
 &= a \left( z - \frac{-z + \delta}{2a} \right) \left( z - \frac{-z - \delta}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

de sorte que

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a \left( z - \frac{-z + \delta}{2a} \right) \left( z - \frac{-z - \delta}{2a} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\iff \begin{cases} z - \frac{-z - \delta}{2a} = 0 \\ \text{ou} \\ z - \frac{-z + \delta}{2a} = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} z = \frac{-z - \delta}{2a} \\ \text{ou} \\ z = \frac{-z + \delta}{2a} \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

## 8 Décrire (avec preuve) l'ensemble des racines $n$ -ièmes de l'unité et les localiser géométriquement dans le plan complexe.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

*Démonstration.* — Description de l'ensemble  $\mathbb{U}_n$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} z^n = 1 \\ z \in \mathbb{C} \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} z^n = 1 \\ z \in \mathbb{C}^* \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} z^n = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho^n e^{in\theta} = 1 \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho^n = 1 \\ n\theta \equiv 0[2\pi] \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \text{ car } \rho > 0 \\ \theta \equiv 0 \left[ \frac{2\pi}{n} \right] \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \frac{2k\pi}{n} \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff z \in \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est paramétré par l'entier  $k$  qui parcourt un ensemble infini. Toutefois, en représentant graphiquement les solutions, il semblerait que "tous les  $n$ ", on fait un tour de cercle trigonométrique de plus, en redécrivant les solutions déjà obtenues pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

— Localisation géométrique

- ★  $\mathbb{U}_3$  est l'ensemble des sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité, et dont 1 est l'un des sommets
- ★  $\mathbb{U}_4$  est l'ensemble des sommets du carré inscrit dans le cercle unité et dont 1 est l'un des sommets. Le côté du carré vaut  $|1 - i| = \sqrt{2}$ .
- ★  $\mathbb{U}_5$  est l'ensemble des sommets du pentagone régulier inscrit dans le cercle unité et dont 1 est l'un des sommets.

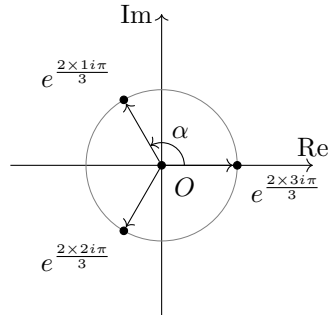


FIGURE 2 – Racines cubiques de l'unité.

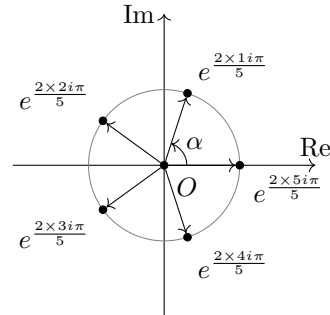


FIGURE 3 – Racines 5èmes de l'unité.

□

## 9 Somme et Produit des racines $n$ -ièmes

*Démonstration.*

◇ **Méthode 1** : En utilisant les relations coefficients racines.

$\mathbb{U}_n$  sont les  $n$  racines distinctes de  $z^n - 1$

$$S_n = -\frac{1}{\text{coefficient dominant}} \times (\text{coefficient de } z^{n-1} \text{ dans } z^n - 1) = \begin{cases} -0 & \text{si } n \geq 2 \\ -(-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_n = (-1)^n \frac{\text{coefficient constant}}{\text{coefficient dominant}} = (-1)^n \times \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1}$$

◇ **Méthode 2** : Manipulation des symboles sommatoires

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_0^k \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 \times \frac{1-\omega_0^n}{1-\omega_0} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Puisqu'on ne peut appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique seulement si  $\omega_0 = 1 \iff e^{\frac{2i\pi}{n}} = 1 \iff \frac{2\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \iff n = 1$

De même

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_0^k = \omega_0^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega_0^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \begin{cases} (\omega_0^n)^{\frac{n-1}{2}} = 1^{\frac{n-1}{2}} = 1 & \text{si } n \equiv 1[2] \\ e^{\frac{2i\pi n(n-1)}{2n}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1} & \end{cases} \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

□

## 10 *[non demandée]* Factorisation d'une fonction polynomiale connaissant $p$ racines.

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Posons pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ .

(i) Si  $\exists p \in \mathbb{N}^* : \exists (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$  deux à deux distincts tels que  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(z_k) = 0$  alors,  $\exists Q \in \mathbb{C}[x] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q(z) \times \prod_{k=1}^p (z - z_k)$ .

*Démonstration.* Considérons la propriété  $\mathcal{P}(\cdot)$  définie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p) : \forall P \in \mathbb{C}[z], (\exists (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p, 2 \text{ à } 2 \text{ distincts} : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(z_i) = 0) \\ \implies \exists Q \in \mathbb{C}[z] : P(z) = Q(z) \prod_{i=1}^p (z - z_i) \end{aligned}$$

◇  $\mathcal{P}(1)$  est vraie d'après la preuve précédente.

◇ Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé quelconque tel que  $\mathcal{P}(p)$  est vraie.

Soit  $P \in \mathbb{C}[z]$  fixés quelconques tels que  $\exists (z_1, \dots, z_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}$  deux à deux distincts tels que  $\forall i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket, P(z_i) = 0$ .

Appliquons  $\mathcal{P}(p)$  à  $P \in \mathbb{C}[z]$  dont  $(z_1, \dots, z_p)$  sont les  $p$  racines deux à deux distinctes.

$$\exists Q_1 \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q_1(z) \prod_{i=1}^p (z - z_i)$$

Évaluons cette expression en  $z_{p+1}$

$$\underbrace{P(z_{p+1})}_{=0} = Q_1(z_{p+1}) \prod_{i=1}^p \underbrace{(z_{p+1} - z_i)}_{\neq 0 \text{ car distincts}}$$

Donc  $Q_1(z_{p+1}) = 0$ , ce qui permet d'appliquer (i) pour  $P \leftarrow Q_1$ ,  $z_0 \leftarrow z_{p+1}$ .

$$\exists Q \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, Q_1(z) = (z - z_{p+1})Q(z)$$

Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_{p+1})Q(z) \prod_{i=1}^p (z - z_i) = Q(z) \prod_{i=1}^{p+1} (z - z_i)$$

Donc  $\mathcal{P}(p+1)$  est vraie.

□