# Khôlles de Mathématiques - Semaine 1

George Ober

17 avril 2024

## 1 Preuve formelle de la somme des entiers et des termes d'une suite géométrique

*Démonstration.* $\diamondsuit$ Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k$$

En posant la symétrie d'indice $i = n - k$, on a aussi

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} n - \sum_{i=0}^{n} i = (n \times \operatorname{card}[\![0,n]\!]) - \sum_{i=0}^{n} i$$

Or, puisque $\operatorname{card}[\![0,n]\!] = n+1$ et que $\sum_{i=0}^{n} i = S_n$

$$S_n = n \times (n+1) + S_n$$

Donc

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\diamondsuit$ Soient $q \in \mathbb{R}$ , $k \in \mathbb{N}$ fixés quelconques. Si $q = 1$,

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \sum_{i=0}^{k} 1 = k+1$$

Avec l'identité algébrique, on a

$$q^{k+1} - 1^{k+1} = (q-1)\sum_{i=0}^{k} q^i \times 1^{k-i}$$

Ainsi, si $q \neq 1$ on a, par multiplication par $(q-1)^{-1}$

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$

Nous avons donc établi que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \begin{cases} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ k+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\square$

## 2 Preuve de la factorisation de $a^n - b^n$ puis de celle de $a^{2m+1} + b^{2m+1}$

*Démonstration.* Calculons

$$
\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} &= a\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} - b\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k}
\end{aligned}
$$

Si bien qu'en posant le changement d'indice $j = k+1$ on reconnait le téléscopage.

$$
\sum_{j=1}^{m} a^j b^{m-j} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} = a^m - b^m
$$

□

# 3 Développement d'une somme

$$
\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j = 2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} x_i^2
$$

*Démonstration.*

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k \times \sum_{j=1}^{n} x_j\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_k \times x_j\right) \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j
\end{aligned}
$$

On peut aussi séparer cette somme

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ k<j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ k=j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ k>j}} x_k x_j \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ k<j}} x_k x_j + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}_{\text{somme sur les indices } (k,j) \text{ tels que } k=j} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ k>j}} x_k x_j
\end{aligned}
$$

On remarque aussi qu'en permutant les indices des deux sommes (les variables sont muettes)

$$
\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ k<j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant n\\ j<k}} x_j x_k
$$

Qui, par commutativité du produit dans $\mathbb{C}$ nous donne cette égalité

$$
\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ k<j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ k>j}} x_k x_j
$$

On a donc bien l'identité attendue :

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} x_k x_j = 2\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n\\k<j}} x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$\square$

# 4 Preuve de la formule du binôme de Newton

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, $n\in\mathbb{N}$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

*Démonstration.* Soient $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ fixés quelconques. Posons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n\in\mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

- ⋆ Initialisation, $n \leftarrow 0$ D'une part $(a+b)^0 = 0$, même si les deux sont nuls (par convention $0^0 = 0$) D'autre part

  $$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k b^{n-k} = \binom{0}{0}a^0 b^0 = 0$$

  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
- ⋆ Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

  $$\begin{aligned}
  (a+b)^{n+1} &= (a+b)\times(a+b)^n\\
  &= (a+b)\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\\
  &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\\
  &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\
  &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\
  \text{(en posant } j=k+1) &= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}\\
  &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1}\\
  \text{(en utilisant la relation de Pascal)} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}\\
  &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
  \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$\square$

## 5 Montrer que tout entier $n > 2$ admet un diviseur premier

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence forte avec la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n > 2$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{´}\forall k \in [\![2,n]\!], k \text{ admet un diviseur premier ˇ}$$

- Initialisation : $n \leftarrow 2$
  Soit $k \in [\![2,2]\!]$ fixé quelconque. Nécéssairement, $k = 2$. or, 2 admet 2 pour diviseur premier. Donc $\forall k \in [\![2,2]\!], k$ admet un diviseur premier, ce qui prouve $\mathcal{P}(2)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,0\}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$, il nous faudra montrer que $\forall k \in [\![2,n+1]\!], k$ admet un diviseur premier
  Soit $k \in [\![2,n+1]\!]$ fixé quelconque.
  - ⋆ Si $k \in [\![2,n]\!]$, alors la véracité de $\mathcal{P}(n)$ nous permet de conclure, et de dire que k admet un diviseur premier.
  - ⋆ Sinon $k = n+1$
    - ◊ Si $n+1$ est premier, alors il admet $k$ comme diviseur premier
    - ◊ Sinon, $\exists d \in [\![2,n]\!] : d \mid n+1$
      Mais, puisque $d \in [\![2,n]\!]$, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ nous permet d'affirmer que $d$ admet un diviseur premier $p$. Donc par transitivité de la relation de divisibilité

$$(p \mid d \text{ et } d \mid n) \implies p \mid n$$

□

## 6 Montrer par récurrence qu'une fonction polynomiale à coefficients réels est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls

*Démonstration.* Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(n)$ : toute fonction polynômiale identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ a tous ses coefficients nuls

Autrement dit

$$\mathcal{P}(n) : \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \left( \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \right) \implies \forall k \in [\![0,n]\!], a_k = 0$$

- ◊ Pour $n \leftarrow 0$ Soit $a_0 \in \mathbb{R}$ fixé quelconque tel que $\forall x \in \mathbb{R}, a_0 x^0 = 0$ Alors $a_0 = 0$
- ◊ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie Soient $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ Posons $Q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = 0$ D'une part

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{Q(2x)}_{=0} - 2^{n+1} \underbrace{Q(x)}_{=0} = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, Q(2x) - 2^{n+1} Q(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k (2x)^k - 2^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k (2^k - 2^{n+1}) x^k \end{aligned}$$

Le terme d'indice $n+1$ s'annule, si bien que l'on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(2x) - 2^{n+1} Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (2^k - 2^{n+1}) x^k$$

Qui est une fonction polynômiale de degré $\leqslant n$, ce qui permet d'appliquer $\mathcal{P}(n)$ pour $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \leftarrow (a_k (2^k - 2^{n+1}))_{k \in [\![0,n]\!]}$.

Donc $\forall x \in [\![0, n]\!] : a_k(2^k - 2^{n+1}) = 0$ et puisque $2^k - 2^{n+1} \neq 0$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = 0$$

L'expression de $Q$ devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + a_{n+1} x^{n+1} = 0$$

Donc en particularisant pour $x \leftarrow 1$, on en déduit que $a_{n+1} = 0$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

□

# 7 Montrer par analyse/synthèse qu'une fonction réelle d'une variable réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

*Démonstration.* Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fixée quelconque.

◊ Analyse : Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique en $f = g + h$ avec $g$ paire et $h$ impaire (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$). Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque Calculons $f(-x)$ :

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

Par demi somme, nous avons donc

$$\begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$$

Ainsi, si une telle décomposition existe, c'est

$$\begin{cases} g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

◊ Synthèse : Posons

$$g \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et } h \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right. \tag{1}$$

Remarquons, d'une part que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Vérifions si les fonctions $g$ et $h$ vérifient les conditions de parité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \text{ ainsi } g \text{ est paire.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \text{ ainsi } h \text{ est impaire}$$

□

# 8 Illustration graphique de certaines identités trigonométriques

*Démonstration.* □

## 9 Technique de résolution des équations trigonométriques du type $A\cos x + B\sin x = C$

*Démonstration.* Étudions l'équation d'inconnue $x$

$$A\cos x + B\sin x = C$$

⋆ Si $A = 0$ et $B = 0$

  ◊ Si $C = 0$ l'équation admet $\mathbb{R}$ pour ensemble de solutions

  ◊ Sinon, l'équation n'admet pas de solutions

⋆ Sinon,
Factorisons par $\sqrt{A^2+B^2}$ (ce qui a un sens car $(A, B) \neq (0, 0) \implies \sqrt{A^2+B^2} \neq 0$)

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Le nombre complexe $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + i\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ est de module 1, donc $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin\varphi}$$

Ainsi,

$$(\cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

donc

$$\cos(\varphi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

  ◊ Si $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \leqslant 1$

$$\cos(\varphi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \iff \begin{cases} \phi + x \equiv \arccos\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}[2\pi] \\ \text{ou} \\ \phi + x \equiv -\arccos\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff x \in \begin{array}{c} \left\{\arccos\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ \cup \\ \left\{-\arccos\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{array}$$

  ◊ Sinon, l'équation n'admet aucune solution

□

## 10 Étude complète de la fonction tangente, tracé du graphe et en déduire celui de cotangente.

*Démonstration.* □

## 11 Expression $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$

*Démonstration.* Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Posons $u = \tan\frac{\theta}{2}$

◊ $\tan\theta = \frac{2u}{1-u^2}$
En utilisant la formule classique de trigonométrie

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

On obtient, avec $(a, b) \leftarrow (\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2u}{1-u^2}$$

◊ $\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \\
&= \frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - 1 \\
&= \frac{2}{1+u^2} - 1 \\
&= \frac{1-u^2}{1+u^2}
\end{aligned}$$

◊ $\sin\theta \frac{2u}{1+u^2}$

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \cos\theta\tan\theta \\
&= \frac{1-u^2}{1+u^2} \times \frac{2u}{1-u^2} \\
&= \frac{2u}{1+u^2}
\end{aligned}$$

□

## 12 Preuve des formules du type $\cos p + \cos q = \dots$

*Démonstration.* Partons des formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b \qquad (\spadesuit)$$

Si bien qu'en posant

$$\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

D'où, en injectant dans (♠)

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

□