**Question 2.** Caractérisation séquentielle de la densité.

**Réponse.** Soient $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\})^2$. Montrons que :

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

Sens indirect : supposons $A \subset B$ et $\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n)$ converge vers $b$ :

- ⋆ $A \subset B$ par hypothèse.
- ⋆ Montrons que $\forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$ (on utilise la caractérisation de la densité avec les $\varepsilon$)
  Soient $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques :
  Par hypothèse appliquée pour $b \leftarrow b$ : $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$
  Appliquons la définition de la convergence de $(a_n)$ vers $b$ pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$ :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

  Fixons un tel N :
  En particulier, $a_N \in A$ et $|a_N - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$
  Donc $A$ est dense dans $B$.

Sens direct : supposons $A$ dense dans $B$ :

- ⋆ Par définition, $A \subset B$
- ⋆ Soit $b \in B$ fixé quelconque.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque :
  Appliquons la caractérisation de la densité par les $\varepsilon$ pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$ (autorisé car $\frac{1}{2^n} > 0$), et $b \leftarrow b$ :

$$\exists a \in A : |a - b| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

  Notons $a_n$ un tel élément. Nous venons de construire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
  $\forall n \in \mathbb{N}, |a - b| \leqslant \frac{1}{2^n}$
  Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
  Ainsi, d'après le théorème sans nom, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $b$.

**Question 5.** Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

**Réponse.** Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

$(i)$ Si $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant 0 \\ u \text{ converge} \end{array} \right.$
Alors $\lim u \geqslant 0$

$(ii)$ Si $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \\ u \text{ et } v \text{ convergent} \end{array} \right.$
Alors $\lim u \leqslant \lim v$

Démonstration :

$(i)$ l'hypothèse $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant 0$ permet d'affirmer que $u$ et $|u|$ coïncident à partir d'un certain rang.
Par ailleurs, la convergence de $u$ et la continuité de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ donc en $\lim u$ donnent $|u|$ converge vers $|\lim u|$.
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que $u$ et $|u|$ ont la même limite.
Donc $\lim u = |\lim u| \geqslant 0$

$(ii)$ $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \Rightarrow v_n - u_n \geqslant 0$
$u$ et $v$ convergent $\Rightarrow v - u$ converge vers $\lim v - \lim u$.
On applique $(i)$ pour $u \leftarrow v - u$, autorisé car $u$ et $v$ convergent.
On obtient $\lim v - \lim u \geqslant 0$ d'où $\lim u \leqslant \lim v$.