Khôlles de Mathématiques - Semaine 10

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Felix Rondeau

3 décembre 2023

1 Convergence d'une suite si ses sous-suites paires et impaires convergent

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ. Montrons que a converge vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. On veut construire un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Appliquons la définition de la limite de $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_1, |a_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_2, |a_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

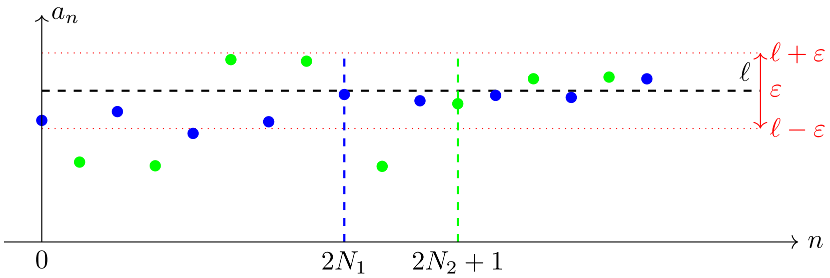

FIGURE 1 – Les termes pairs et impairs sont contenus dans un voisinnage de ℓ après certains rangs

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ et vérifions que ce rang convient.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$.

- ⋆ Si n est pair, $\exists p \in \mathbb{N} : n = 2p$

$$n \geqslant N \geqslant 2N_1 \implies 2p \geqslant 2N_1 \implies p \geqslant N_1$$

Donc d'après la définition de la convergence de $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$|a_{2p} - \ell| \leqslant \varepsilon \implies |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

- ⋆ Si n est impair, $\exists p \in \mathbb{N} : n = 2p + 1$

$$n \geqslant N \geqslant 2N_2 + 1+ \implies 2p + 1 \geqslant 2N_2 + 1 \implies p \geqslant N_2$$

Donc d'après la définition de la convergence de $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$|a_{2p+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \implies |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Donc $|a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ Donc a tend vers ℓ.

Remarque : Si les deux suites ne convergent pas vers la même limite, comme pour $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite n'admet pas de limite. □

2 Toute sous-suite d'une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$

Démonstration. Soient u une suite complexe et v une sous-suite quelconque de u.
Par définition d'une sous-suite,

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante } : \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque. Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Fixons un tel N. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $n \geqslant N$. Alors

$$|v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

car φ étant strictement croissante,

$$\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$$

ce qui permet d'appliquer la définition précédente.

□

3 Théorème de Césarò

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors la moyenne arithmérique des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes (appelée moyenne de Césarò) converge vers ℓ.

Démonstration. Soient u une telle suite, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ladite limite de u.
Appliquons la définition de la convergence de u pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons un tel N. Posons

$$\omega = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$. Calculons :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}|u_k - \ell|}_{=\ \omega\in\mathbb{R}} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=N}^{n}|u_k - \ell|}_{\leqslant\ \frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \frac{\omega}{n} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2n}}_{\leqslant\ \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Ces majorations sont issues de l'inégalité triangulaire et de la convergence de u.
De plus, comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\omega}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on écrit sa définition pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N' \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N' \implies |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe un tel N' et on pose $\Lambda = \max(N, N')$ qui a bien un sens car $\{N, \ N'\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$. De la même manière qu'auparavant, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \Lambda$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell\right| \leqslant \underbrace{\frac{\omega}{n}}_{\leqslant\ \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

C'est le théorème souhaité.

□

4 Théorème de la convergence monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite monotone :

1. Si u est croissante
   - (i) Soit u est majorée, et dans ce cas, $\lim u = \sup\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$
   - (ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $+\infty$.
2. Si u est décroissante :
   - (i) Soit u est minorée, et dans ce cas, $\lim u = \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$
   - (ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone fq.

1. Supposons que u est croissante.
   - (i) Supposons que u est majorée.
     Alors $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$. Fixons un tel M.
     $\Omega = \{u_k | k \in \mathbb{N}\}$ est
     — une partie de $\mathbb{R}$
     — non vide car u_0 y appartient
     — majorée par M

     donc elle admet un borne supérieure et notons-la σ.
     Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq.
     $\sigma - \epsilon < \sigma$ donc $\sigma - \epsilon$ ne majore pas Ω. Donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > \sigma - \epsilon$. Fixons un tel N.
     Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geqslant N$.
     Alors $u_n \underset{\text{par croissant de u}}{\geqslant} u_N \geqslant \sigma - \epsilon$ et $u_n \underset{\text{par défintion de } \sigma}{\leqslant} \sigma$.
     Ainsi,
     $$\begin{aligned} \sigma - \epsilon \leqslant u_n \leqslant \sigma &\implies -\epsilon \leqslant u_n - \sigma \leqslant 0 \\ &\implies |u_n - \sigma| \leqslant \epsilon \end{aligned}$$
     Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sigma$.
   - (ii) Supposons que u n'est pas bornée.
     Soit $A \in \mathbb{R}$ fq.
     u n'est pas bornée donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > A$.
     Or u est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$.
     Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
2. Supposons que u est décroissante.
   Il suffit dans la preuve ci-dessus de remplacer les inégalités inférieures par des inégalités supérieures et inversement et d'utiliser la notion de borne inférieure plutôt que de borne supérieure.
   - (i) Si u est minorée, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$.
   - (ii) Si u n'est pas bornée, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

□

5 Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(i) Si
$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u \text{ converge}$$
Alors $\lim u \geqslant 0$

(ii) Si
$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \leqslant v_n \quad \text{et} \quad u \text{ et } v \text{ convergent}$$
Alors $\lim u \leqslant \lim v$

Démonstration.

(i) L'hypothèse $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \geqslant 0$ permet d'affirmer que u et $|u|$ coïncident à partir d'un certain rang.
Par ailleurs, la convergence de u et la continuité de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ donc en $\lim u$ donnent $|u|$ converge vers $|\lim u|$.
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que u et $|u|$ ont la même limite.
Donc $\lim u = |\lim u| \geqslant 0$.

(ii) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \leqslant v_n \implies v_n - u_n \geqslant 0$
u et v convergent $\implies v - u$ converge vers $\lim v - \lim u$.
On applique (i) pour $u \leftarrow v - u$, autorisé car u et v convergent.
On obtient $\lim v - \lim u \geqslant 0$ d'où $\lim u \leqslant \lim v$.

□

6 Théorème d'existence de la limite par encadrement

Démonstration.
Résultat préliminaire : théorème « sans nom ».
Théorème : Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ell \in \mathbb{K}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n \\ \lim \varepsilon = 0 \end{cases}$$

alors la suite u converge vers ℓ.

Démonstration : Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.
Appliquons la définition de la convergence de (ε_n) vers 0 pour $\varepsilon \leftarrow \delta > 0$:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies |\varepsilon_n - 0| \leqslant \delta$$

Fixons un tel N_0. Soit N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, k \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N_1 = \max\{N_0, N\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $n \geqslant N_1$. alors

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n \leqslant |\varepsilon_n| \leqslant \delta$$

ce qui conclut la preuve.

Théorème d'existence de la limite par encadrement Soient $(u, v, w) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^3}$ trois suites. Supposons

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ u \text{ et } w \text{ convergent vers } u_\infty \text{ et } w_\infty \\ u_\infty = w_\infty \end{cases}$$

En retranchant u_n,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$$

donc

$$|v_n - u_n| \leqslant w_n - u_n$$

et de plus, w et u convergent vers $\ell - \ell = 0$ si bien que le théorème sans nom s'applique pour $a \leftarrow v - u$, $\ell \leftarrow 0$ et $b \leftarrow w - u$ et établit la convergence de $v - u$ vers 0. Ainsi, comme u converge vers ℓ, la combinaison linéaire de suites convergentes $v - u + u$ converge vers $0 + \ell = \ell$, si bien que la suite v converge vers ℓ. □

7 Théorème des suites adjacentes

Soient u et v deux suites réelles adjacentes. Alors u et v convergent et ont la même limite.

Démonstration. Soient u et v de telles suites. Quitte à inverser les rôles desdites suites, prenons u croissante et v décroissante.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n \leqslant v_n \leqslant \underbrace{v_0}_{\in \mathbb{R}}) \wedge (\underbrace{u_0}_{\in \mathbb{R}} \leqslant u_n \leqslant v_n),$$

car la monotonie des suites induit ces inégalités. D'après le théorème de limite monotone, u étant croissante et majorée elle converge, v étant décroissante et minorée elle converge.
Il s'en suit que par définition des suites adjacentes :

$$0 \ = \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) \underbrace{=}_{u,v \text{ convergent}} \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Ainsi, $\lim u = \lim v$. □

8 *Facultative* Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée réelle admet une sous-suite convergente.
L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée est non vide.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ fixée quelconque bornée.
Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.

Construisons une suite de segments dans $[-M; M]$ de plus en plus petits par dichotomie.
Posons $a_0 = -M$, $b_0 = M$ et définissons les suites c et I pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $I_n = [a_n; b_n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons a_n et b_n construits et $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ infini. Construisons les termes d'indices $n+1$.
Posons $\left| \begin{array}{lcl} I_n^- & = & \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n; c_n]\} \\ I_n^+ & = & \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [c_n; b_n]\} \end{array} \right.$
Nous avons $I_n^- \cup I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ donc I_n^- ou I_n^+ est infini.

- Si I_n^- est infini, posons $\left| \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n \\ b_{n+1} & = & c_n \end{array} \right.$
  Ainsi $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^-$ est infini.
- Si I_n^+ est infini, posons $\left| \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & c_n \\ b_{n+1} & = & b_n \end{array} \right.$
  Ainsi $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^+$ est infini.

Étudions la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Nous avons toujours $a_n \leqslant b_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \neq \emptyset$
- Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$
- $|I_{n+1}| = |a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \frac{1}{2}|I_n|$ donc la suite des cardinaux est une suite géométrique de raison $1/2$. Donc $|I_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc, d'après le théorème des segments emboîtés, $\exists! l\ell \in \mathbb{R} : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$. Fixons un tel ℓ.

Construisons maintenant une extractrice φ de u.
Posons $\varphi(n) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons $\varphi(n)$ construite.

$$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} | u_k \in I_{n+1} \wedge k > \varphi(n)\}$$

$\varphi(n+1)$ est bien définie car $\{k \in \mathbb{N} | u_k \in I_{n+1}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non bornée (car infinie).

Ainsi, nous avons construit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Nous pouvons extraire une sous-suite de u. Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in I_n$ donc

$$\forall n \ \in \mathbb{N}, \qquad \underbrace{a_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell} \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant \underbrace{b_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$$

Donc, d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Ainsi $\ell \in L_u$. □

9 *Facultative* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur $\mathbb{C}$ est à adapter sans peine.
Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.
Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε.
Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de $\mathbb{N}$. Posons ensuite $\varphi(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \ \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \ \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M,$$

donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leqslant M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.
Par ailleurs, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\underbrace{|u_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|\ell' - \ell| \geqslant \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. □

10 [Non demandée] Caractérisation de la densité d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans une partie B de $\mathbb{R}$ la contenant avec des ε.

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ fq.
Définition de la densité

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, B \cap]u;v[\neq \emptyset \implies A \cap]u;v[\neq \emptyset \end{cases} \tag{1}$$

Caractérisation de la densité par les ε

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b-a| < \varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité
Sens Direct Supposons A dense dans B

— Par déf $A \subset B$

— Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq
Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour $u \leftarrow b - \varepsilon$ et $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset \implies A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$$

Or, $B \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$ est vraie donc $A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$
Ce qui permet de choisir $a \in A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$. Un tel a vérifie $a \in A$ et $a \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\iff |b-a| < \varepsilon$

Sens réciproque Supposons $\begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b-a| < \varepsilon \end{cases}$

— On a donc $A \subset B$

— Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fq tq $B \cap]u, v[\neq \emptyset$
Soit $b \in B \cap]u, v[$ fq. Appliquons l'hypothèse pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \min\{v-b, b-u\}$, qui est autorisé $v - b$ et $b - u$ sont positifs
Donc $\exists a \in A : |b-a| < \varepsilon$
Fixons un tel a, alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v-b, b-u\}}_{\leqslant v-b} \leqslant b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v-b, b-u\}}_{\leqslant b-u} \geqslant b - (b-u) = u \end{cases}$$

Donc $a \in]u, v[$.

Donc $A \cap]u, v[\neq \emptyset$

□

11 [Non demandée] Théorème de la division pseudo-euclidienne dans $\mathbb{R}$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \exists! (q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \tag{3}$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et deux couples $((q,r),(q',r')) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{R})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \qquad \begin{cases} a = bq' + r' \\ r' \in [0; |b|[\end{cases}$$

Directement,

$$b(q-q') = r' - r,$$

mais comme $-|b| < r' - r < |b|$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Existence Posons pour $b > 0$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leqslant a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit ...)
- Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d'Ω.

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max\Omega$ et $r \in \mathbb{R}$.
Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leqslant a$ d'où $0 \leqslant r$. Et $q = \max\Omega$ donc $b(q+1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [0, |b|[$.

Si $b < 0$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. □

12 [Non demandée] $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fq. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

- $a_n \in \mathbb{Q}$ car $\lfloor 2^n x\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $2^n \in \mathbb{N}$.
- $$a_n = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant x$$

  Or $1/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fq.
Alors $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration précédente, $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + \sqrt{2}$.
Fixons un telle suite b. Considérons $c = b - \sqrt{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

- $c_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ car $b_n \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
- $$\left.\begin{matrix} b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{matrix}\right\} \implies c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

13 [Non demandée] Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit u $\in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$ Si u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, supponsons que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, et $\ell_1 \neq \ell_2$. On prendra $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ assez petit pour que les tubes soient disjoints.
Posons donc $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ_1, pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$, ce qui est autorisé car $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0 \tag{4}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0 \tag{5}$$

Fixons de tels N_1 et N_2.

— Posons $n_0 = N_1 + N_2$

  — $n_0 \geqslant N_1$, donc (4) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0$

  — $n_0 \geqslant N_2$, donc (5) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned}
|\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\
&\leqslant \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leqslant \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leqslant \varepsilon_0} \\
&\leqslant 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\
\implies 1 &\leqslant \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Contradiction

□

14 [Non demandée] Description d'un segment de la droite réelle par les barycentres à coefficients positifs.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leqslant y$.

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leqslant z \leqslant y\} = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$$

Démonstration. Le résultat est immédiat pour $x = y : \forall t \in [0,1], xt + (1-t)x = xt - xt + x = x = y$
Supposons que $x < y$. On procède par double inclusion.

⋆ Soit $z \in \{xt + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$.
$\exists t \in [0,1] : z = xt + (1-t)y$
Puisque $t \in [0,1]$, $t \geqslant 0$ et $1 - t \geqslant 0$. Donc

$$\begin{aligned}
x < y \implies x \leqslant y &\underset{\substack{t\geqslant 0 \\ 1-t\geqslant 0}}{\implies} \begin{cases} tx \leqslant ty \\ (1-t)x \leqslant (1-t)y \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} tx + (1-t)y \leqslant ty + (1-t)y \\ tx + (1-t)x \leqslant tx + (1-t)y \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} z \leqslant y \\ x \leqslant z \end{cases} \\
&\implies z \in [x, y]
\end{aligned}$$

⋆ Réciproquement, soit $z \in [x, y]$. Cherchons le $t \in [0,1]$ tel que $tx + (1-t)y = z$.

$$tx + (1-t)y = z \iff t(x-y) = z - y \iff t = \frac{z-y}{x-y} = \frac{y-z}{y-x} \text{ (autorisé car } x < y \implies x - y \neq 0)$$

Vérifions si ce t convient : posons $t = \frac{y-z}{y-x}$.

- Vérifions d'abord que $t \in [0,1]$

$$x \leqslant z \leqslant y \implies x-y \leqslant z-y \leqslant 0 \implies y-x \geqslant y-z \geqslant 0 \implies 1 \geqslant \frac{y-z}{y-x} \geqslant 0 \implies 0 \leqslant t \leqslant 1$$

- Calculons

$$tx + (1-t)y = \frac{y-z}{y-x}x + \left(1 - \frac{y-z}{y-x}\right)y = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y = \frac{yx - zx + zy - xy}{y-x} = z$$

Donc ce t convient.

Donc $z \in \{xt + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$.

Donc $\{xt + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} = [x,y]$. □

15 [Non demandée] Une suite convergente est bornée

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \lim u$ Appliquons la définition de la convergence pour $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant 1$$

Fixons un tel N_1 Posons alors $M = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$, qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici $(\mathbb{R}, \leqslant)$) admet un pgE.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— Si $n \in [[0, N_1]], |u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ donc $|u_n| \leqslant M$

— Sinon,

$$\begin{aligned} n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leqslant 1 \\ &\implies |u_n| - |\ell| \leqslant 1 \\ &\implies |u_n| \leqslant 1 + |\ell| \leqslant M \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$. □

16 [Non demandée] Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide et majorée. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\sigma = \sup A \iff \begin{cases} \sigma \in M(A) \\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} a_n = \sigma \end{cases}$$

Démonstration. ⋆ Supposons que $\sigma = \sup A$.

- Par définition d'une borne sup, $\sigma \in M(A)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la caractérisation de la borne sup par les epsilon pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$. $\exists c \in A : \sigma - \frac{1}{2^n} < c \leqslant \sigma$. Fixons un tel c et notons le a_n. En relâchant le caractère fixé de n, on a crée la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma - \frac{1}{2^n} < a_n \leqslant \sigma$$

Cette suite converge vers σ par encadrement.

⋆ Réciproquement, supposons que $\sigma \in M(A)$ et qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers σ. Montrons que $\sigma = \sup A$ d'après la caractérisation par les ε.

- $\sigma \in M(A)$

- Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons la définition de la convergence de a pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$

  $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, |a_n - \sigma| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \implies \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n$$

  En particulier $a_N \in A$ vérifie

  $$\sigma - \varepsilon < \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_N \underbrace{\leqslant}_{\sigma \in M(A)} \sigma$$

  Ce qui permet de conclure. Donc $\sigma = \sup A$.

$\square$