Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

12 décembre 2023

Table des matières

1 Semaine 6

1.1 Montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

Démonstration. Soit $f : I \to F$, avec I, F deux parties non-vides de $\mathbb{R}$, une telle fonction et notons f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est impaire sur I, alors pour tout $x \in I$, $-x \in I$, ainsi I est centré en 0 et on a :

$$\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x).$$

Ainsi, prenons $y \in F$, alors $-y \in F$ par imparité et bijectivité de f. On a donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

D'où l'imparité de f^{-1}.

Pour ce qui est de l'exemple, prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}^{[-1,1]}$ que l'on notera $\widetilde{\sin}$. Sa bijection réciproque est bien entendu $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
De la même manière que dans la démonstration du cas général, prenons $y \in [-1,1]$, comme $[-1,1]$ est centré en 0, $-y \in [-1,1]$, on a dès lors :

$$\begin{aligned} \arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\ &= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\ &= -\arcsin(y). \end{aligned}$$

$\square$

1.2 Limite (et preuve) lorsque x tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Démonstration. Premièrement, posons :

$$\forall (x, \alpha, \beta) \in [1, +\infty[\times \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}.$$

Deuxièmement, montrons que :

$$\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Soit $x \in [1, +\infty[= \mathcal{A}$. Nous savons que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier sur $\mathcal{A}$. Ainsi, ln est en dessous de toutes ses tangentes, d'où :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \ \leq\ \ln(x) \ \leq\ x - 1.$$

Illustration de l'inégalité :

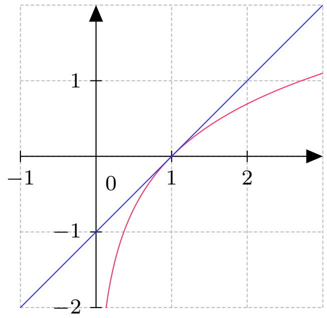

Figure 1. ln en rouge et la première bissectrice en bleu.

On peut alors diviser par x^2 (car $x \neq 0$) :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{f_{1,2}(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}.$$

Donc par théorème d'encadrement $f_{1,2}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Dernièrement, le cas général. Soit $x \in \mathcal{A}$ et soient $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On fait une preuve directe.

$$\begin{aligned}
\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \\
&= \underbrace{\underbrace{\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^\alpha}_{c^{\underline{te}}\ \text{(définie !)}} \cdot \underbrace{\left[\underbrace{\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right)}{\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right)^2}}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{d'après le dernier point}}}\right]^\alpha}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{par composition des limites}}}}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{par produit}}}.
\end{aligned}$$

□

1.3 Limite en 0 de $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et limite en $+\infty$ suivant n de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Démonstration.
Montrons que $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$.

On fait toujours une preuve directe.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{2x}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}}_{c^{\underline{te}}} \cdot \underbrace{\left[\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}}_{\substack{\xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\ \text{limite usuelle}}}\right]^2}_{\substack{\xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\ \text{par composition}}}}_{\substack{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \\ \text{par produit}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Trouvons la limite, sous réserve d'existence, de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ suivant n en $+\infty$.

Remarquons que si $q \leq 0$, il est ***nécessaire*** d'avoir $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ sinon l'expression n'a tout simplement ***aucun sens***. De fait, on supposera $q > 0$ tout le long, les cas $q < 0$ se font naturellement (convergence pour $q \in \mathbb{R}_-$).

Soit donc $0 < q < 1$, ce cas est immédiat, $((q^n)^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} = ((q^\alpha)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc il s'agit de la suite géométrique de raison $q^\alpha \in]0,1[$ et de premier terme $q^{\min_I(n)\alpha}$ ($\min_I(n)$, avec I une partie non vide de $\mathbb{N}$, car la suite ne démarre pas forcément à 0), donc elle converge vers 0.

Si $q \geq 1$, on montre le cas trivial $\alpha = \beta = 1$:

$$\forall n \in [\![\lfloor q \rfloor + 1, +\infty[\![, \quad 0 \leq \frac{q^n}{n!} = \underbrace{\frac{q}{1} \times \frac{q}{2} \times \cdots \times \frac{q}{\lfloor q \rfloor}}_{= \lambda \text{ (une constante)}} \times \underbrace{\frac{q}{\lfloor q \rfloor + 1}}_{\leq 1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{q}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{q}{n} \leq \underbrace{\frac{\lambda q}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Par théorème d'existence de limite par encadrement, $\left(\frac{q^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$, montrons le cas général pour $q \geq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(q^n)^\alpha}{(n!)\beta} = \left(\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!}\right)^\beta = \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!}}_{\substack{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{c'est le cas trivial}}}\right)^\beta}_{\substack{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{par composition des limites } (\beta>0)}}$$

$\square$

1.4 Présentation exhaustive de la fonction arcsin.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\sin}$ (voir **1**.). D'où :

$$\arcsin = \begin{cases} [-1,1] & \rightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \left(\widetilde{\sin}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\sin}$:

1. arcsin est impaire.
2. arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
3. $\arcsin \in \mathcal{C}^0\left([-1,1], [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$.
4. $\arcsin \in \mathcal{D}^1\left(]-1,1[,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$.
5. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
6. arcsin admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1.

Graphe de arcsin :

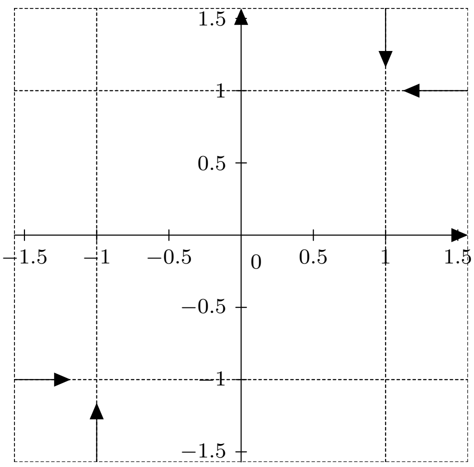

Figure 2. arcsin en bleu, $\widetilde{\sin}$ en vert et la première bissectrice en rouge.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d'arcsin :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} \; = \; 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0,1], \quad \arcsin(x) \geq x.$$

$\square$

1.5 Présentation exhaustive de la fonction arccos.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]} := \widetilde{\cos}$. D'où :

$$\arccos = \begin{cases} [-1,1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ x & \mapsto & \left(\widetilde{\cos}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1,1]$, $\arccos(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in [0,\pi]$, $\cos(\theta) = x$.
Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\cos}$:

1. arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.
2. $\arccos \in \mathcal{C}^0\left([-1,1],[0,\pi]\right)$.
3. $\arccos \in \mathcal{D}^1\left(]-1,1[,]0,\pi[\right)$.
4. $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
5. arccos admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1.

Graphe de arccos :

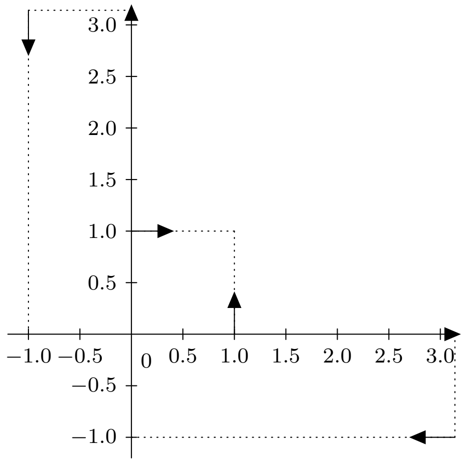

Figure 3. arccos en vert, $\widetilde{\cos}$ en violet, la première bissectrice en rouge et $y = \frac{\pi}{2} - x$ en rose.

$\square$

1.6 Présentation exhaustive de la fonction arctan.

Démonstration.

Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} := \widetilde{\tan}$. D'où :

$$\arctan = \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x & \mapsto & \left(\widetilde{\tan}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(\theta) = x$.

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\widetilde{\tan}$:

1. arctan est impaire.
2. $\arctan \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R},\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
3. $\arctan \in \mathcal{D}^1\left(\mathbb{R},\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
4. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Graphe de arctan :

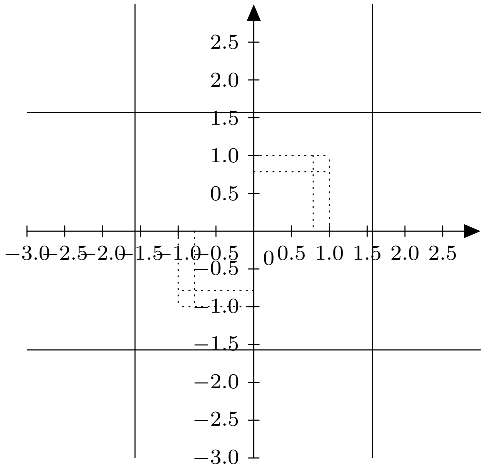

Figure 4. arctan en vert, $\widetilde{\tan}$ en bleu, la première bissectrice en rouge, et les fonctions $y = \pm\frac{\pi}{2}$ et $x = \pm\frac{\pi}{2}$ en noir.

On a aussi (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(x) \leq x.$$

Et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

□

1.7 2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$, dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.

Démonstration. L'interprétation géométrique sur $[0, 1]$, celle sur $[-1, 0]$ est laissée au lecteur car il s'agit du même principe modulo des détails :

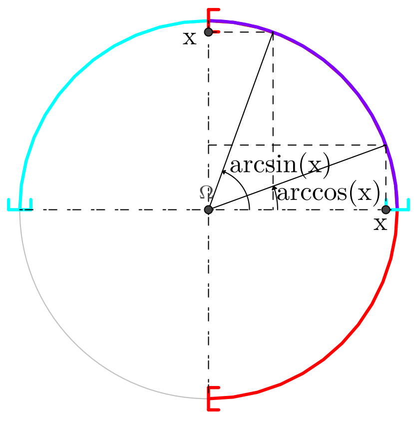

Figure 5.

Preuve formelle :

Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\varphi = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \arccos(\sin(\varphi)) = \varphi + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right),$$

or $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$ d'où $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$ si bien que :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) \;=\; \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

□

1.8 Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.

Démonstration.

- Domaine de définition et symétries.
  sinh et cosh sont définies sur $\mathbb{R}$.
  De plus,
  (i) $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$,
  (ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \sinh(-x) &= \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} &= -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} &= -\sinh(x) \\ \quad\text{et} & & & \\ \cosh(-x) &= \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} &= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} &= \cosh(x). \end{cases}$
  Donc sinh et cosh sont respectivement impaire et paire.
  Nous les étudierons sur $\mathbb{R}_+$ et pour les obtenir les graphes ($\mathcal{C}_{\sinh}$ et $\mathcal{C}_{\cosh}$) de ces fonctions sur $\mathbb{R}$ à partir de ceux ($\mathcal{C}^+_{\sinh}$ et $\mathcal{C}^+_{\cosh}$) obtenus sur $\mathbb{R}_+$, nous le complèterons en traçant les images de ces graphes par la symétrie centrale s de centre O et par la réflexion r d'axe $(O, \overrightarrow{\jmath})$:

$$\mathcal{C}_{\sinh} = \mathcal{C}^+_{\sinh} \cup s\left(\mathcal{C}^+_{\sinh}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_{\cosh} = \mathcal{C}^+_{\cosh} \cup r\left(\mathcal{C}^+_{\cosh}\right)$$

- Variations : triviales.

- Branches infinies en $+\infty$ et position relative de $\mathcal{C}_{\sinh}$ et $\mathcal{C}_{\cosh}$.

$$\frac{\cosh(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^{x}}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty} + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

  Donc le graphe de cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique $(O, \overrightarrow{\jmath})$.
  On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$$

  Donc les graphes des deux fonctions se rapprochent l'un de l'autre arbitrairement près lorsque $x \to +\infty$, et le graphe de cosh est au-dessus de celui de sinh.

- Tangente au graphe de sinh à l'origine et position relative.

Il s'agira d'étudier $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sinh(x) - x$, de remarquer sa dérivabilité d'en étudier les variations puis de conclure, en précisant que cette étude révèle l'inflexion du graphe de sinh en 0.

□

2 Semaine 7

2.1 Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt}dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$. En Déduire qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{Z}$ fq. Calculons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}dt$$

Si $m \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}dt &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{mt}}{im}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{im} - \frac{1}{im}\right) = 0\end{aligned}$$

Si $m = 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = \begin{cases}1 \text{ si } m = 0 \\ 0 \text{ si } m \neq 0\end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq

Soient $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ les coefficients de $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, et $s \in \mathbb{Z}$, et $r \in \mathbb{R}_+^*$ fq. tels que P soit nulle lorsqu'elle est évaluée sur $\mathscr{C}(0, r)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it})e^{-imt}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(re^{it})^k\right)e^{-imt}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it(k-s)}}{2\pi}dt}_{I_k}\end{aligned}$$

On remarque que :

— Si $s \notin [[0, n]], \{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = \emptyset$, Donc

$$\sum_{k\in[[0,n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k\in[[0,n]]\\k=s}} a_k r^k = 0$$

— Si $s \in [[0, n]], \{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = s$, Donc

$$\sum_{k\in[[0,n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k\in[[0,n]]\\k=s}} a_k s^k = a_s r^s$$

Or, puisque P s'annule sur le cercle de rayon r et de centre 0, $\mathscr{C}(0, r)$, ces sommes sont aussi nulles. On en déduit, en particularisant pour un $s \in [[0, n]]$ fixé quelconque que :

$$\sum_{k\in[[0,n]]} a_k s^k I_k = a_s r^s = 0 \implies a_s = 0$$

Donc

$$(\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall\theta \in \mathbb{R}, P(re^{i\theta}) = 0) \implies \forall s \in [[0, n]]$$

Pour la preuve réciproque, soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Soient $(a_0, ..., a_n) \in \{0\}^{n+1}$ les coefficients nuls de la fonction polynomiale $P \in \mathbb{C}[z]$ définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En remarquant que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$, puisque n'importe quel cercle centré en 0 est un sous ensemble de $\mathbb{C}$, $\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall z \in \mathscr{C}(0, r), P(z) = 0$. □

2.2 Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe

Démonstration. Définissons les fonctions f_r et f_i comme les parties réelles et imaginaires de f.
Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques.

$$f_r = \mathrm{Re}(f), f_i = \mathrm{Im}(f) \qquad g_r = \mathrm{Re}(f), g_i = \mathrm{Im}(g)$$
$$\alpha_r = \mathrm{Re}(\alpha), \alpha_i = \mathrm{Im}(f) \qquad \beta_r = \mathrm{Re}(f), \beta_i = \mathrm{Im}(g)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\alpha f + \beta g) &= \mathrm{Re}((\alpha_r + i\alpha_i)(f_r + if_i) + (\beta_r + i\beta_i)(g_r + ig_i)) \\ &= \underbrace{\alpha_r f_r + \beta_r g_r - \alpha_i f_i - \beta_i g_i}_{\text{Combinaison linéaire de } \underbrace{(f_r, f_i, g_r, g_i) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^4}_{car (f,g) \in D^1(I,\mathbb{R})^2}}\end{aligned}$$

Donc, selon le théorème de stabilité par combinaison linéaire des fonctions à valeurs réelles, $\mathrm{Re}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $\big(\mathrm{Re}(\alpha f + \beta g)\big)' = \alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i'$
On montre de même que $\mathrm{Im}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $\big(\alpha f + \beta g\big)' = \alpha_r f_i' + \alpha f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r'$
Ainsi,

$$\begin{aligned}\big(\alpha f + \beta g\big)' &= (\alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i') + i(\alpha_r f_i' + \alpha f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r') \\ &= \alpha_r(f_r' + if_i') + \beta_r(g_r' + ig_i') + \alpha_i \underbrace{(-f_i' + if_r')}_{i(f_r' + if_i')} + \beta_i \underbrace{(-g_i' + ig_r')}_{i(g_r' + ig_i')} \\ &= \alpha f' + \beta g'\end{aligned}$$

□

2.3 Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C})$ et $h \in \mathcal{D}^1(I, J)$ (I et J sont deux intervalles réels) fixés quelconques. Notons f_r et f_i respectivement la partie réelle et imaginaire de f.

$$\left.\begin{array}{l} h \in \mathcal{D}^1(I, J) \\ f_r \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R}), \text{ car } f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_r \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$$

On montre de même que $f_i \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$.
De plus,

$$\begin{aligned}(f \circ h)' &= (f_r \circ h)' + i(f_i \circ h)' \\ &= (f_r' \circ h) \times h' + i((f_i' \circ h) \times h') \\ &= (f_r' \circ h + if_i' \circ h) \times h' \\ &= (f' \circ h) \times h'\end{aligned}$$

□

2.4 Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ où I est un intervalle réel ; Posons $f_r = \mathrm{Re}(f)$ et $f_i = \mathrm{Im}(f)$.

$$\begin{aligned}\forall t \in I, f'(t) = 0 &\iff \forall t \in I, f_r'(t) + if_i'(t) = 0 \\ &\iff \begin{cases}\forall t \in I, f_r'(t) = 0 \\ \forall t \in I, f_i'(t) = 0\end{cases} \\ &\iff \begin{cases}\exists \lambda_r \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_r(t) = \lambda_r \\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_i(t) = \lambda_i\end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in I, f(t) = \lambda\end{aligned}$$

□

3 Semaine 8

3.1 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

Démonstration. Notons $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas $\Delta < 0$ et $\alpha \pm i\beta$ les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$
Soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \implies \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de Re

$$a_2\mathrm{Re}(f)'' + a_1\mathrm{Re}(f)' + a_0\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$; $\mathrm{Re}(f(t)) = \mathrm{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$. Qui appartient donc à $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$
En suivant le même raisonnement pour $\mathrm{Im}(f)$, $(t \mapsto e^{\alpha}\sin(\beta t)) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$
Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ fq. Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$.

$$\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto ae^{(\alpha+i\beta)t} + be^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de f sont réelles, en notant (a_r, a_i, b_r, b_i) les parties réelles et imaginaires respectives de a et b.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \mathrm{Re}(f(t)) \\ &= \mathrm{Re}(ae^{(\alpha+i\beta)t} + be^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \mathrm{Re}((a_r + ia_i)e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + ib_i)e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r\cos(\beta t)e^{\alpha} - a_i\sin(\beta t)e^{\alpha} + b_r\cos(\beta t)e^{\alpha} + b_i\sin(\beta t)e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r)\cos(\beta t)e^{\alpha} + (b_i - a_i)\sin(\beta t)e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion. □

3.2 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur I (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2y'' + a_1y' + a_0y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{array} \right. \qquad \text{où } (\alpha_0,\alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J,\mathbb{K})$$

Si b est continu sur J, alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur J.

Démonstration. **Cas 1.** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Nous savons que sous l'hyphothèse de continuité de b sur J, les solutions de (EDL2) définies sur J constituent le plan affine S :

$$S = \left\{\lambda f_1 + \mu f_2 + s | (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

où s est une solution particulière de (EDL2), (f_1, f_2) sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent S_h. On a :

$$\begin{aligned}
f : J \to \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} \quad &\iff \quad \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que (λ, μ) doit être solution d'un système linéaire $(2, 2)$. On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est nul.
Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera D.

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) $(a_2r^2 + a_1r^1 + a_0 = 0)$. On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de Δ. Traitons d'abord le cas $\Delta \neq 0$. On peut choisir :

$$f_1(t_0) = e^{r_1t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2t_0}$$
$$f_1'(t_0) = r_1e^{r_1t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2e^{r_2t_0}$$

Donc (en sachant que $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$) :

$$D = e^{r_1t_0} \cdot r_2e^{r_2t_0} - r_1e^{r_1t_0} \cdot e^{r_2t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1t_0 + r_2t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a $\Delta = 0$; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0e^{r_0t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0t_0}\left(r_0t_0e^{r_0t_0} + e^{r_0t_0}\right) - r_0e^{r_0t_0} \times t_0e^{r_0t_0} = e^{2r_0t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas, $D \neq 0$, donc le système $(2, 2)$ étudié admet une unique solution, donc il existe
un unique couple (λ, μ) le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

Cas 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2, b \in C^0(J, \mathbb{R})$
Existence : Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le problème de Cauchy admet, dans $\mathbb{R}$, une solution à valeurs complexes g. Posons $f = \mathrm{Re}(g)$ et montrons que f est une solution réelle du problème de Cauchy.

- $\star$ $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$ donc $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$
- $\star$ g vérifie $a_2g'' + a_1g' + a_0g = b$ sur J donc en prenant $\mathrm{Re}(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(a_2g'' + a_1g' + a_0g = b) = \mathrm{Re}(b) \quad &\iff \quad a_2\mathrm{Re}(g'') + a_1\mathrm{Re}(g') + a_0\mathrm{Re}(g) = b \\
&\iff \quad a_2f'' + a_1f' + a_0f = b \text{ sur } J
\end{aligned}$$

⋆ $f(t_0) = \mathrm{Re}(g(t_0)) = \mathrm{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$

⋆ $f'(t_0) = \mathrm{Re}(g(t_0))' = \mathrm{Re}(g'(t_0)) = \mathrm{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc f est une solution réelle définie sur J au problème de Cauchy.

Unicité : Soient f_1 et f_2 deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$. □

3.3 Les solutions d'une EDL$_2$ constituent un espace vectoriel.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, f et g les solutions, définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g | (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Démonstration. La solution s'exprime simplement comme combinaison linéaire de f et g, plus précisément, la combinaison linéaire en α et β. En effet, soient de tels scalaires, et soient f et g de telles solutions, on a :

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'' + a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' + b(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = 0, \text{ par définition des espaces vectoriels.}$$

Et de même, $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(3) = \alpha \cdot f'(3) + \beta \cdot g'(3) = \alpha$, et
$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)''(3) = \alpha \cdot f''(3) + \beta \cdot g''(3) = \beta$.
Ce qui suffit par unicité des solutions (de la donc) d'un problème de Cauchy dans le cadre du théorème du cours.
Pour ce qui est du plan vectoriel des solutions, noté Ω, notons aussi Φ l'ensemble proposé. L'inclusion $\Phi \subset \Omega$ est triviale par propriété de linéarité des espaces vectoriels. Finalement, pour $\Omega \subset \Phi$, soit $\omega \in \Omega$, forcément, ω vérifie l'EDL_2, mais aussi des conditions de Cauchy bien que celles-ci soient non-spécifiées, ainsi posons $\omega'(3) = \delta$ et $\omega''(3) = \theta$, donc en particulier, $\omega = \delta \cdot f + \theta \cdot g$, d'où l'égalité par double inclusion. □

3.4 Formules de Cramer pour les systèmes 2 × 2

Résolution générale des systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues en fonction du déterminant du systèmes (**tous les cas ne sont pas nécessairement à envisager**)
Considérons le système linéaire à deux équations et à deux inconnues (x, y) :

$$(S) \begin{cases} ax + by = b_1 & (E_1) \\ cx + dy = b_2 & (E_2) \end{cases} \tag{1}$$

dont $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ sont les coefficients et $(b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$ sont les seconds membres.

1. (S) admet une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. De plus, dans ce cas, la solution est
$$\left(\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right) \tag{2}$$

2. Si $ad - bc = 0$, alors l'ensemble des solutions est soit vide, soit une droite affine de $\mathbb{K}^2$, soit $\mathbb{K}^2$.

Démonstration. Procédons par disjonction de cas.

- Supposons que $ad - bc \neq 0$.
  - Supposons que $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ \left(d - \frac{bc}{a}\right) y = b_2 - \frac{c}{a} b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a} L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (ad - bc) y = ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} ax = \frac{1}{a}\left(b_1 - b\frac{ab_2 - cb_1}{ad-bc}\right) = \frac{1}{a}\frac{adb_1 - bcb_1 + abb_2 - bcb_2}{ad-bc} \\ y = \frac{ab_2 - cb_1}{ad-bc} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} ax = \frac{db_1 - bb_2}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y = \frac{ab_2 - cb_1}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

  - Supposons que a $= 0$. L'hypothèse $ad - bc \neq 0$ implique $bc \neq 0$ donc $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \frac{1}{c}\left(b_2 - d\frac{b_1}{b}\right) \\ y = \frac{b_1}{b} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} ax = \frac{db_1 - bb_2}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y = \frac{-cb_1}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

$ad - bc = 0$.

- Supposons $a \neq 0$. En reprenant la méthode pivot de Gauss,

$$
\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ \left(d - \frac{bc}{a}\right) y = b_2 - \frac{c}{a} b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a} L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ \underbrace{(ad - bc)}_{0} y = ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc le système est de rang 1 avec une condition de compatibilité.
Si $ab_2 - cb_1 \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.
Sinon $ab_2 - cb_1 = 0$

$$
(S) \iff ax + by = b_1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a} - b\frac{t}{a} \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\} \tag{3}
$$

Donc (S) admet un droite affine de solutions.

- Supposons $a = 0$. Puisque $ad - bc = 0$, alors $bc = 0$ donc b ou c est nul.
  - Si $c = 0$,

$$
(S) \iff \begin{cases} by = b_1 \\ dy = b_2 \end{cases}
$$

- Si $b = 0$,

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} by & = & b_1 \\ 0 & = & b_2 \end{array} \right.$$

  - Si $b_2 = 0$, (S) n'admet aucune solution.
  - Si $b_2 \neq 0$, $(S) \iff dy = b_2$
    - Si $d = 0$, $(S) \iff 0 = b_2$. (S) n'admet aucune solution ($b_2 \neq 0$) ou admet $\mathbb{K}^2$ comme ensemble des solutions ($b_2 = 0$).
    - Si $d \neq 0$, $(S) \iff y = \frac{b_2}{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_2}{d} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$. Donc (S) admet une droite affine de solutions.
- Si $b \neq 0$

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & \frac{b_1}{b} \\ 0 & = & b_2 - \frac{db_1}{b} \end{array} \right.$$

  - Si $b_2 - \frac{db_1}{b} \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.
  - Si $b_2 - \frac{db_1}{b} = 0$, $(S) \iff y = \frac{b_1}{b} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_1}{d} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si $c \neq 0$ alors $b = 0$

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & = & b_1 \\ cx + dy & = & b_2 \end{array} \right.$$

  - Si $b_1 \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.
  - Si $b_1 = 0$, $(S) \iff x = \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ donc (S) admet une droite affine de solutions.

$\square$

4 Semaine 9

4.1 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Soit $x \in E$.
La classe de x, notée $\bar{x}$, est l'ensemble des éléments de E en relation avec x.

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \tag{4}$$

Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.
Soit $(x, y) \in E^2$ fq.

— Si $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, rien à démontrer.

— Sinon $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ donc $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Fixons un tel z.
Soit $x' \in \bar{x}$ fq.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \underset{\text{symétrie}}{\implies} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \end{array}\right\} \underset{\text{transitivité}}{\implies} x'\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \underset{\text{symétrie}}{\implies} z\mathcal{R}y \end{array}\right\} \underset{\text{transitivité}}{\implies} x'\mathcal{R}y \underset{\text{symétrie}}{\implies} y\mathcal{R}x'$$

Donc $x' \in \bar{y}$ donc $\bar{x} \subset \bar{y}$.
En échangeant les rôles de x et y, on montre la deuxième inclusion $\bar{y} \subset \bar{x}$.

Montrons que les classes d'équivalence de E constituent une partition de E.
Soit $\mathcal{S}$ un système de représentant des classes fixé quelconque.

— Soit $s \in \mathcal{S}$ fq. $\bar{s} \neq \emptyset$ car $s\mathcal{R}s$ par réflexivité.

— Soit $(s, s') \in \mathcal{S}^2$ fq. D'après la démonstration ci-dessus ci-dessus, $\bar{s} \cap \bar{s'} = \emptyset$ ou $\bar{s} = \bar{s'}$. Si $\bar{s} = \bar{s'}$ alors s et s' représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent, $\bar{s}$ et $\bar{s'}$ sont disjoints.

— $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$ car $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \in E$ par définition d'une classe d'équivalence.
Réciproquement, soit $x \in E$ fq.
Par réflexivité de $\mathcal{R}$, $x \in \bar{x}$.
Par définition d'un système de classe $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$ donc $\bar{s_x} = \bar{x}$. Donc $x \in \bar{s_x} \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
Donc $E \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
Par double inclusion, $E = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Ainsi,

$$E = \coprod_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \tag{5}$$

□

4.2 Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est sont plus grand élément.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, et A une partie non-vide de E.
Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
Si A admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors A admet un plus grand élément et $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soient un tel ensemble E et une telle partie A et notons M son plus grand élément.
Posons l'ensemble des majorants de A, $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A,\ a \leq m\}$.
Par définition :

$$\forall m \in M(A),\ M \leq m,$$

car $M \in A$, mais comme $M \in M(A)$, on a directement que $M = \min M(A) = \sup A$.
Pseudo-réciproquement, soit A une partie de E admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne S.
Comme $S \in M(A)$, par définition, S est plus grand que tous les éléments de A mais appartient à A, donc de tous les éléments de A, S est le plus grand. □

4.3 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \exists !(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [\![0; |b| - 1]\!] \end{cases} \tag{6}$$

Démonstration. *Unicité* Soient deux tels entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et deux couples $((q,r),(q',r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r \leqslant |b| - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leqslant r' \leqslant |b| - 1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-(|b| - 1) \leqslant r' - r \leqslant |b| - 1$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Existence Posons pour $b \geqslant 1$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leqslant a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit ...)
- Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d'Ω.

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ donc $r \in \mathbb{Z}$.
Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leqslant a$ d'où $0 \leqslant r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q+1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [\![0, |b| - 1]\!]$.
Si $b < 1$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. □

4.4 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et minorée fixée quelconque.
Considérons $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite u.
A est :

- une partie de $\mathbb{Z}$ car u est à valeur dans $\mathbb{Z}$
- non vide car $u_0 \in A$
- minoré car u est minorée

Donc A admet un plus petit élément. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = minA$. Fixons un tel n_0.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geqslant n_0$.

$$\left.\begin{array}{r} u_n \in A \implies u_n \geqslant minA = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geqslant n_0 \text{ donc } u_n \leqslant u_{n_0} \end{array}\right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi, u est stationnaire. □

5 Semaine 10

5.1 Caractérisation de la densité d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans une partie B de $\mathbb{R}$ la contenant avec des ε.

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ fq.
Définition de la densité

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, B \cap \,]u; v[\, \neq \emptyset \implies A \cap \,]u; v[\, \neq \emptyset \end{cases} \tag{7}$$

Caractérisation de la densité par les ε

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases} \tag{8}$$

Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité
Sens Direct Supposons A dense dans B

— Par déf $A \subset B$

— Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq
Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour $u \leftarrow b - \varepsilon$ et $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset \implies A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$$

Or, $B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$ est vraie donc $A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$
Ce qui permet de choisir $a \in A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Un tel a vérifie $a \in A$ et
$a \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\iff |b - a| < \varepsilon$

Sens réciproque Supposons $\begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases}$

— On a donc $A \subset B$

— Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fq tq $B \cap]u, v[\neq \emptyset$
Soit $b \in B \cap]u, v[$ fq. Appliquons l'hypothèse pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \min\{v - b, b - u\}$, qui est autorisé $v - b$ et $b - u$ sont positifs
Donc $\exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$
Fixons un tel a, alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leqslant v - b} \leqslant b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leqslant b - u} \geqslant b - (b - u) = u \end{cases}$$

Donc $a \in]u, v[$.

Donc $A \cap]u, v[\neq \emptyset$

$\square$

5.2 Théorème de la division pseudo-euclidienne dans $\mathbb{R}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \tag{9}$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et deux couples $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \qquad \begin{cases} a = bq' + r' \\ r' \in [0; |b|[\end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-|b| < r' - r < |b|$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Existence Posons pour $b > 0$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leqslant a\}$

— $\Omega \subset \mathbb{Z}$

— non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit ...)

— Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d'Ω.

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $r \in \mathbb{R}$.
Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leqslant a$ d'où $0 \leqslant r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q + 1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [0, |b|[$.
Si $b < 0$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. □

5.3 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fq. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— $a_n \in \mathbb{Q}$ car $\lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $2^n \in \mathbb{N}$.

—
$$a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant x$$

Or ${}^1\!/_{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fq.
Alors $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration précédente, $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x + \sqrt{2}$.
Fixons un telle suite b. Considérons $c = b - \sqrt{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— $c_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car $b_n \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

—
$$\left.\begin{matrix} b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{matrix}\right\} \implies c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

5.4 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit u $\in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$ Si u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, supponsons que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, et $\ell_1 \neq \ell_2$. On prendra $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ assez petit pour que les tubes soient disjoints.
Posons donc $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ_1, pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$, ce qui est autorisé car $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0 \tag{10}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0 \tag{11}$$

  Fixons de tels N_1 et N_2.

— Posons $n_0 = N_1 + N_2$
  — $n_0 \geqslant N_1$, donc (**??**) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0$
  — $n_0 \geqslant N_2$, donc (**??**) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned}
|\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\
&\leqslant \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leqslant \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leqslant \varepsilon_0} \\
&\leqslant 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\
\implies 1 &\leqslant \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

  Contradiction

□

5.5 Une suite convergente est bornée

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \lim u$ Appliquons la définition de la convergence pour $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant 1$$

Fixons un tel N_1 Posons alors $M = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$, qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici $(\mathbb{R}, \leqslant)$) admet un pgE.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— Si $n \in [[0, N_1]], |u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ donc $|u_n| \leqslant M$
— Sinon,

$$\begin{aligned}
n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leqslant 1 \\
&\implies |u_n| - |\ell| \leqslant 1 \\
&\implies |u_n| \leqslant 1 + |\ell| \leqslant M
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.

□

6 Semaine 11

6.1 Caractérisation séquentielle de la densité.

Soient $(A,B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\})^2$. Montrons que :

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

Démonstration. Sens indirect : supposons $A \subset B$ et $\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n)$ converge vers b :

- ⋆ $A \subset B$ par hypothèse.
- ⋆ Montrons que $\forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b-a| < \varepsilon$ (on utilise la caractérisation de la densité avec les ε)
  Soient $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques :
  Par hypothèse appliquée pour $b \leftarrow b$: $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$
  Appliquons la définition de la convergence de (a_n) vers b pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:
  $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
  Fixons un tel N :
  En particulier, $a_N \in A$ et $|a_N - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$
  Donc A est dense dans B.

Sens direct : supposons A dense dans B :

- ⋆ Par définition, $A \subset B$
- ⋆ Soit $b \in B$ fixé quelconque.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque :
  Appliquons la caractérisation de la densité par les ε pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$ (autorisé car $\frac{1}{2^n} > 0$), et $b \leftarrow b$:
  $$\exists a \in A : |a-b| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
  Notons a_n un tel élément. Nous venons de construire $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b| \leqslant \frac{1}{2^n}$
  Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
  Ainsi, d'après le théorème sans nom, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

□

6.2 Théorème de la convergence monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite monotone :

1. Si u est croissante
   - (i) Soit u est majorée, et dans ce cas, $\lim u = \sup\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$
   - (ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $+\infty$.
2. Si u est décroissante :
   - (i) Soit u est minorée, et dans ce cas, $\lim u = \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$
   - (ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone fq.

1. Supposons que u est croissante.
   - (i) Supposons que u est majorée.
     Alors $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$. Fixons un tel M.
     $\Omega = \{u_k | k \in \mathbb{N}\}$ est
     - — une partie de $\mathbb{R}$
     - — non vide car u_0 y appartient
     - — majorée par M

donc elle admet un borne supérieure et notons-la σ.
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq.
$\sigma - \epsilon < \sigma$ donc $\sigma - \epsilon$ ne majore pas Ω. Donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > \sigma - \epsilon$. Fixons un tel N.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geqslant N$.
Alors $u_n \underset{\text{par croissant de u}}{\geqslant} u_N \geqslant \sigma - \epsilon$ et $u_n \underset{\text{par défintion de } \sigma}{\leqslant} \sigma$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma - \epsilon \leqslant u_n \leqslant \sigma &\implies -\epsilon \leqslant u_n - \sigma \leqslant 0 \\ &\implies |u_n - \sigma| \leqslant \epsilon \end{aligned}$$

Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sigma$.

(ii) Supposons que u n'est pas bornée.
Soit $A \in \mathbb{R}$ fq.
u n'est pas bornée donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > A$.
Or u est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$.
Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

2. Supposons que u est décroissante.
Il suffit dans la preuve ci-dessus de remplacer les inégalités inférieures par des inégalités supérieures et inversement et d'utiliser la notion de borne inférieure plutôt que de borne supérieure.
   (i) Si u est minorée, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$.
   (ii) Si u n'est pas bornée, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

□

6.3 Théorème de Césarò

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors la moyenne arithmérique des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes (appelée moyenne de Césarò) converge vers ℓ.

Démonstration. Soient u une telle suite, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ladite limite de u. Appliquons la définition de la convergence de u pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons un tel N. Posons $\omega = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Calculons :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell|}_{= \ \omega \in \mathbb{R}} + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=N}^{n} |u_k - \ell|}_{\leq \ \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{\omega}{n} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2n}}_{\leq \ \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Ces majorations sont issues de l'inégalité triangulaire et de la convergence de u. De plus, comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\omega}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on écrit sa définition pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N' \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N' \implies |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe un tel N' et on pose $\Lambda = \max(N, N')$ qui a bien un sens car $\{N, \ N'\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$. De la même manière qu'auparavant, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \Lambda$, on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \underbrace{\frac{\omega}{n}}_{\leq \ \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

C'est le théorème souhaité. □

6.4 Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(i) Si $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant 0 \\ u \text{ converge} \end{array} \right.$

Alors $\lim u \geqslant 0$

(ii) Si $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \\ u \text{ et } v \text{ convergent} \end{array} \right.$

Alors $\lim u \leqslant \lim v$

Démonstration.

(i) L'hypothèse $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant 0$ permet d'affirmer que u et $|u|$ coïncident à partir d'un certain rang.
Par ailleurs, la convergence de u et la continuité de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ donc en $\lim u$ donnent $|u|$ converge vers $|\lim u|$.
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que u et $|u|$ ont la même limite.
Donc $\lim u = |\lim u| \geqslant 0$

(ii) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \Rightarrow v_n - u_n \geqslant 0$
u et v convergent $\Rightarrow v - u$ converge vers $\lim v - \lim u$.
On applique (i) pour $u \leftarrow v - u$, autorisé car u et v convergent.
On obtient $\lim v - \lim u \geqslant 0$ d'où $\lim u \leqslant \lim v$.

□

6.5 Théorème des suites adjacentes

Soient u et v deux suites réelles adjacentes. Alors u et v convergent et ont la même limite.

Démonstration. Soient u et v de telles suites. Quitte à inverser les rôles desdites suites, prenons u croissante et v décroissante.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n \leq v_n \leq \underbrace{v_0}_{\in\mathbb{R}}) \wedge (\underbrace{u_0}_{\in\mathbb{R}} \leq u_n \leq v_n),$$

car la monotonie des suites induit ces inégalités. D'après le théorème de limite monotone, u étant croissante et majorée elle converge, v étant décroissante et minorée elle converge.
Il s'en suit que par définition des suites adjacentes :

$$0 \ = \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) \underbrace{=}_{u,v \text{ convergent}} \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Ainsi, $\lim u = \lim v$. □

6.6 *Facultative* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur $\mathbb{C}$ est à adapter sans peine.
Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.
Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε.
Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de $\mathbb{N}$.
Posons ensuite $\varphi(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon,\ \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon,\ \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M,$$

donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leq M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.
Par ailleurs, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\underbrace{|u_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}|\ell'-\ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. $\square$