Khôlles de Mathématiques - Semaine 16

Hugo Vangilluwen, Felix Rondeau

24 Janvier 2024

1 Formule de Leibniz

Soient $(f,g) \in \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R})^2$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $f \times g \in \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R})$ et

$$\forall x \in I, (f \times g)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x)$$

Démonstration. Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in [\![1,p]\!]$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{ « } f \times g \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \text{ »}$$

- ▷ $p \geqslant 1$ donc $\mathcal{D}^p(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ si bien que $(f,g) \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})^2$ donc $f \times g \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ et

$$(f \times g)' = f \times g' + f' \times g = \binom{1}{0} f^{(0)} \times g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} \times g^{(0)} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} \times g^{(1-k)}$$

  Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- ▷ Soit $f \in [\![1,p-1]\!]$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  - — La véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \underbrace{f^{(k)}}_{\substack{\in \mathcal{D}^{p-k}(I,\mathbb{R}) \text{ donc dérivable car} \\ k \leqslant n \leqslant p-1 \implies p-k \geqslant 1}} \times \underbrace{g^{(n-k)}}_{\substack{\in \mathcal{D}^{p-n+k}(I,\mathbb{R}) \text{ donc dérivable car} \\ 0 \leqslant k \leqslant n \leqslant p-1 \implies p-n+k \geqslant 1}}$$

    donc $(f \times g)^{(n)} \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables.
  - — Sachant que $(f \times g)^{(n)}$ est dérivable sur I,

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \quad \text{en utilisant } \mathcal{P}(n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} \right] \quad \text{par dérivation d'un produit} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} n f^{(j)} \times g^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-+1)} \quad \text{en posant } j = k+1 \\
&= \binom{n}{n} f^{(n+1)} \times g^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) f^{(j)} \times g^{(n+1-j)} + \binom{n}{0} f^{(0)} \times g^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} \times g^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} f^{(j)} \times g^{(n+1-j)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} \times g^{(n+1)} \quad \text{(Pascal)} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} f^{(j)} \times g^{(n+1-j)}
\end{aligned}$$

ce qui montre $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, le théorème de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(p)$ est vraie, ce qui constitue le résultat à prouver.

$\square$

2 Expression de dérivées successives

Démonstration. Considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{x} \end{array}$$

Soit $x \in \mathcal{D}_f$. Considérons le prédicat $P(\cdot)$ définit pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n) : \text{« } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] \text{ »}$$

⋆ **Initialisation :** Pour $n = 0$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k}\right],$$

donc $P(0)$ est vrai.

⋆ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right]\right)'$$

par véracité de $P(n)$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} f^{(n+1)}(x) & = & \frac{(-1)^n n! x^n - (-1)^n (n+1)! x^n \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right]}{x^{2(n+1)}} \\ & = & \frac{(-1)^{n+1}(n+1)! \ln(x) - (-1)^{n+1}(n+1)! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{x^{n+2}} \\ & = & \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right] \end{array}$$

c'est l'expression recherchée, donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, par théorème de récurrence sur $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3 Dérivée d'une bijection réciproque

Soit $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I et dérivable en $a \in I$.
Si $f'(a) \neq 0$ alors f est bijective, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $f^{-1}(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Démonstration. Soient de tels objets.
Par définition, f est surjective. Comme elle est strictement monotone, f est injective. Ainsi f est bijective.

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ monotone (où J est un intervalle). Nous avons l'équivalence suivante :

$$g(J) \text{ est un intervalle} \iff g \text{ est continue sur } J$$

Ainsi, $f(I)$ est un intervalle. De plus, nous avons $f^{-1} : f(I) \to I$ avec $f(I)$ et I des intervalles donc f^{-1} est continue sur $f(I)$.
Calculons la limite du taux d'accroissement de f^{-1} en $f(a)$:

$$\forall x \in f(I), \tau_{f^{-1}, f(a)} = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(a))}{x - f(a)}$$

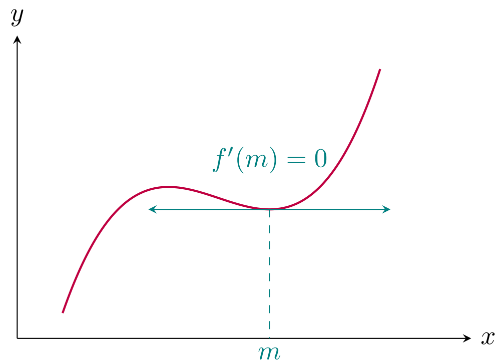
Posons $u = f^{-1}(x)$. D'où :

$$\tau_{f^{-1},f(a)} = \frac{u-a}{f(u)-f(a)}$$

De plus, par continuité de f^{-1}, $u \xrightarrow[x\to f(a)]{} f^{-1}(f(a)) = a$.
Par dérivabilité en a et par continuité de $x \mapsto x^{-1}$ en $f(a) \neq 0$, $\frac{u-a}{f(u)-f(a)} \xrightarrow[u\to a]{} \frac{1}{f('(a)}$.
Ainsi, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$. □

4 Dérivée d'un extremum local intérieur au domaine de définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathring{I}$ et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.



Démonstration. Soient de tels objets.

$$a \in \mathring{I} \implies \exists \eta_1 \in \mathbb{R}_+^* : [a-\eta_1; a+\eta_1] \subset I$$

Fixons un tel η_1. Calculons le taux d'accroissement en a.

$$\forall x \in [a-\eta_1; a+\eta_1], \tau_{f,a}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Or f est dérivable en a donc $\tau_{f,a}(x)$ admet une limite lorsque $x \to a$.
Traitons le cas où a est maximum local. Par définition :

$$\exists \eta_2 \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in [a-\eta_2; a+\eta_2], f(x) \leqslant f(a)$$

Fixons un tel η_2. Soit $x \in [a-\eta_2; a+\eta_2] \setminus \{a\}$ fixé quelconque. Alors $f(x) - f(a) \leqslant 0$.

- Si $x > a$, $x - a > 0$. Alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$. Donc $\lim\limits_{x\to a} \tau_{f,a}(x) \leqslant 0$.
- Sinon $x < a$, $x - a < 0$. Alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Donc $\lim\limits_{x\to a} \tau_{f,a}(x) \geqslant 0$.

Ainsi $0 \leqslant \lim\limits_{x\to a} \tau_{f,a}(x) \leqslant 0$. Donc $f'(a) = 0$. □

5 Théorème de Rolle et formule des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit I le segment a, b.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur ledit segment et dérivable sur l'ouvert associé.

(i) Théroème de Rolle : Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists\, c \in \mathring{I}$ tel que $f'(c) = 0$

(ii) Formule des accroissements finis :

$$\exists\, c \in \mathring{I} \ : \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

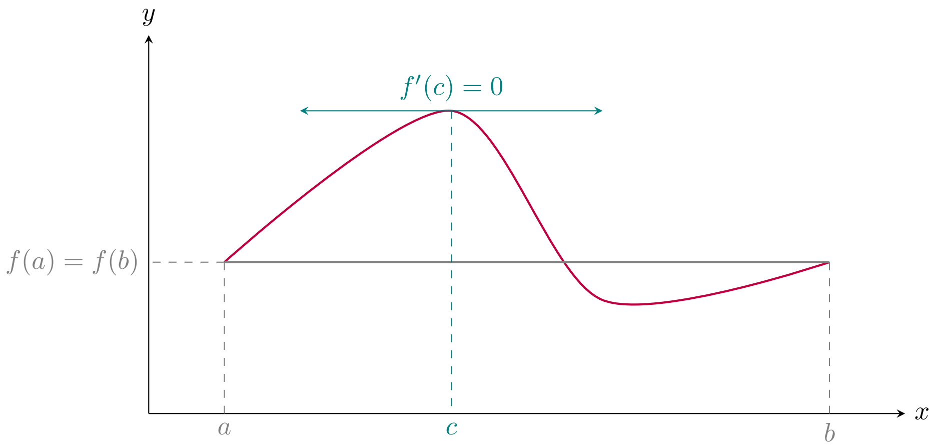


Figure 1 – Théorème de Rolle

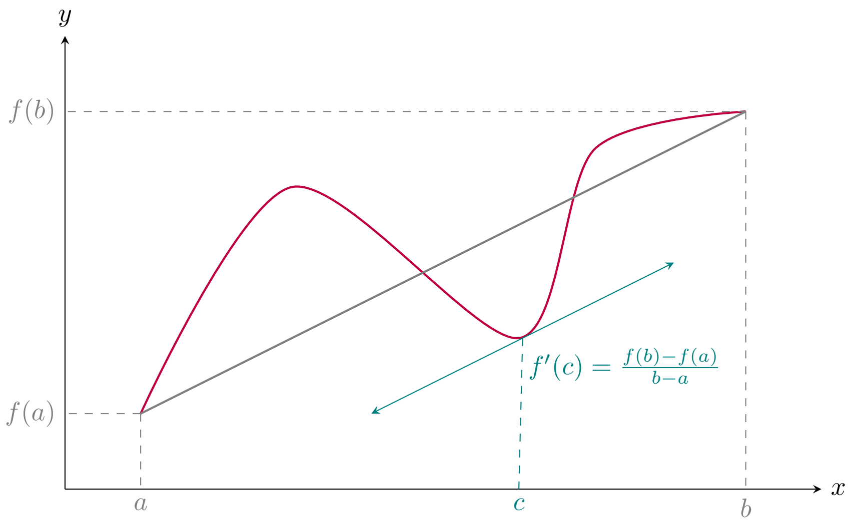


Figure 2 – Formule des accroissements finis

Démonstration. Soient de tels objets.

- Prouvons (i), donc supposons $f(a) = f(b)$.
  f est continue sur I donc par le théorème de Weierstraß, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment :

$$\exists\ (x_m, x_M) \in I^2\ :\ (f(x_m) = \min f(I)) \quad \text{et} \quad (f(x_M) = \max f(I))$$

  donc, si $(x_m, x_M) \in \{a, b\}^2$, alors,

$$\forall x \in I,\ f(a) = f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = f(a)$$

  donc $\forall x \in I, f(x) = f(a)$ c'est-à-dire que f est constante et donc tous les points intermédiaires à I sont des c valides.
  Sinon, $(x_m \notin \{a, b\})$ ou $(x_M \notin \{a, b\})$, quitte à prendre l'autre valeur, supposons que $x_M \notin \{a, b\}$, ainsi, $x_M \in \overset{\circ}{I}$ et $f(x_M)$ est un maximum global donc, f étant dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ elle est dérivable en x_M donc $f'(x_M) = 0$, on pose $c = x_M$, ce qui conclut.

- Prouvons (ii).
  Posons

$$d : \begin{array}{ccl} I & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right) \end{array}$$

d est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. On a $d(a) = 0$ et $d(b) = 0$ donc $d(a) = 0 = d(b)$. On peut alors appliquer le Théorème de Rolle pour $f \leftarrow d, a \leftarrow a$ et $b \leftarrow b$: il existe $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $d'(c) = 0$, c'est le résultat.

□

6 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$, posons $X_- =]-\infty; x_0]$ la demi-droite fermée en x_0 et vers $-\infty$, de même $X_+ = [x_0; +\infty[$ la demi-droite fermée en x_0 et vers $+\infty$.

(i) $\star$ Si $\exists\, m \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \overset{\circ}{I},\ m \leqslant f'(x)$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x_0) + m(x - x_0) \leqslant f(x)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x) \leqslant f(x_0) + m(x - x_0)$$

$\star$ Si $\exists\, M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \leqslant M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x) \leqslant f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x_0) + M(x - x_0) \leqslant f(x)$$

$\star$ Si $\exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2\ :\ \forall x \in \overset{\circ}{I},\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+,\ f(x_0) + m(x - x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-,\ f(x_0) + M(x - x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + m(x - x_0)$$

(ii) Si $\exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \overset{\circ}{I},\ |f'(x)| \leqslant M$, alors,

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$$

Démonstration.

(i) Soit $x \in I$ et posons S le segment d'extrémités x et x_0.

$\star$ Si $x \neq x_0$, f est continue sur S et dérivable sur $\overset{\circ}{S}$, la formule des accroissements finis donne alors l'existence d'un c appartenant à $\overset{\circ}{S}$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c)$$

Si $x > x_0,\ x - x_0 > 0$, or $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ donc

$$m(x - x_0) \leqslant (x - x_0) f'(c) \leqslant M(x - x_0)$$

si bien que

$$m(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant M(x - x_0)$$

d'où

$$f(x_0) + m(x - x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + M(x - x_0).$$

Si $x < x_0$, il suffit de retourner l'inégalité lors de la première multiplication et (i) est prouvé.

(ii) Soit $y \in I$.

L'hypothèse $\forall x \in \overset{\circ}{I},\ |f'(x)| \leqslant M$ équivaut à $\forall x \in \overset{\circ}{I},\ -M \leqslant f'(x) \leqslant M$, donc on peut appliquer (i) pour $x_0 \leftarrow y,\ M \leftarrow M$ et $m \leftarrow -M$:

$$\forall x \in I \cap [y, +\infty[,\ f(y) - M(x - y) \leqslant f(x) \leqslant f(y) + M(x - y)$$

Or $x - y > 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$. Et

$$\forall x \in I \cap]-\infty, y],\ f(y) + M(x - y) \leqslant f(x) \leqslant f(y) - M(x - y)$$

Or $x - y < 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.
Par conséquent, $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$.

□

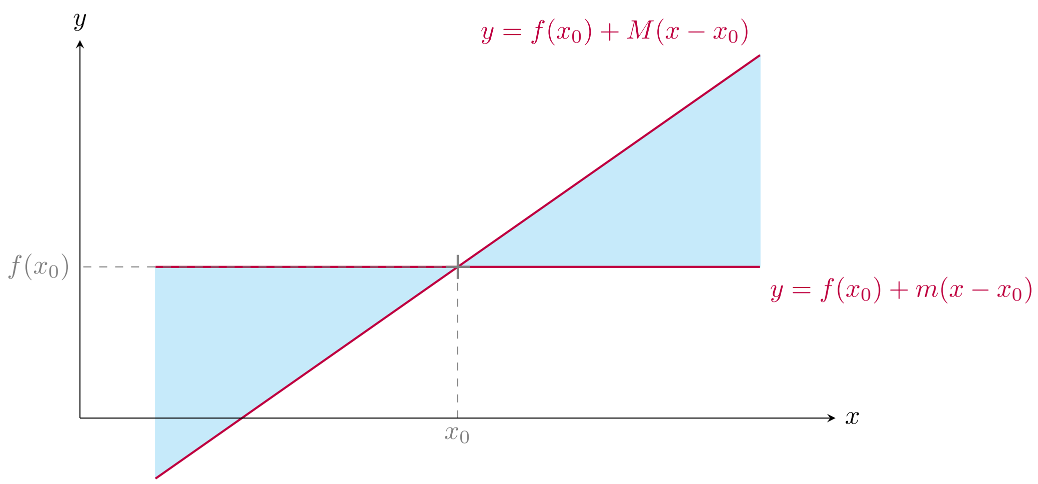


FIGURE 3 – Interprétation géométrique des accroissements finis

7 Caractère lipschitzien d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un segment

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, I le segment a, b. Alors f est $||f'||_{\infty,I}$-lipschitzienne sur I.

Démonstration. Soient de tels objets.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{D}^1(\mathring{I}, \mathbb{R})$.
⋆ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc f' est continue sur I donc le réel $||f'||_{\infty,I}$ est bien défini et

$$\forall x \in \mathring{I},\ |f'(x)| \leqslant ||f'||_{\infty,I}.$$

Ces propriétés permettent d'appliquer le corollaire du TAF qui conclut que f est $||f'||_{\infty,I}$-lipschitzienne. □

8 Théorème du prolongement de la propriété de la dérivabilité

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Lemme :

Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I\backslash\{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I\backslash\{a\}} \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } a \end{cases}$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$

Théorème :

Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I\backslash\{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I\backslash\{a\}} \text{ admet une limite } \textbf{finie } \ell \in \mathbb{R} \text{ en } a \end{cases}$, alors $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) = \ell \text{ } (\textbf{donc } f' \textbf{ est continue en } a) \end{cases}$

Démonstration. Prouvons le lemme pour $\ell \in \mathbb{R}$, c'est le cas qui nous intéresse.
Soient de tels objets. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f'_{|I\backslash\{a\}}(x) = \ell$ pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$:

$$\exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^* \ :\ \forall x \in I\backslash\{a\},\ |x-a| \leqslant \eta \implies |f'_{|I\backslash\{a\}}(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel η.
Soit $x \in I\backslash\{a\}$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$.
La fonction f est continue sur I donc f est continue sur le segment d'extrémités a et x qui est par ailleurs inclus dans I par convexité d'un intervalle.
La fonction f est dérivable sur I donc f est dérivable sur l'intervalle ouvert a, x qui est aussi inclus

dans $\overset{\circ}{I}$ par convexité.
L'égalité des accroissements finis s'applique à f sur l'intervalle a et x :

$$\exists\ c_x \in]a,x[\cup]x,a[\ :\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$$

Or $|c_x - a| \leqslant |x-a| \leqslant \eta$ donc ladite définition de la limite s'applique pour $x \leftarrow c_x$: $|f'(c_x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ si bien que

$$|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

D'où le lemme.

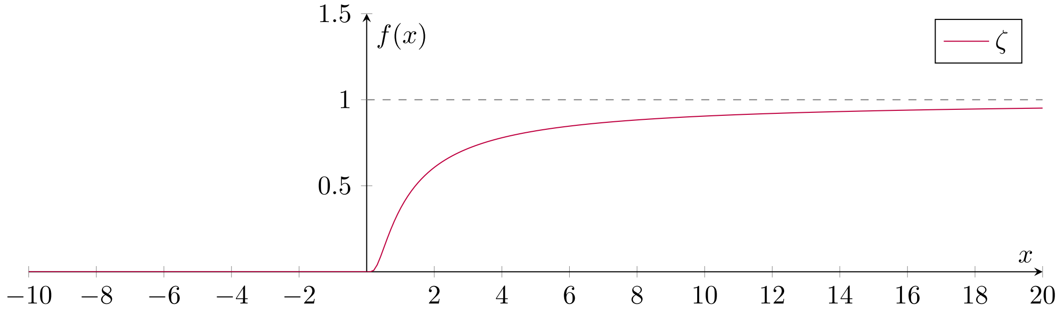
Prouvons alors le théorème.
Sous ces hypothèses, le lemme s'applique donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$, or $\ell \in \mathbb{R}$, donc le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a ce qui prouve la dérivabilité de f en a et $f'(a) = \ell$. Ce qui suffit. $\square$

9 La fonction ζ (pas celle-là une autre) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Posons

$$\zeta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Montrons que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.



Démonstration.

- $\star$ $\zeta_{]-\infty;0[}$ est constante donc $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty;0[,\mathbb{R})$.
- $\star$ $x \mapsto -\frac{1}{x} \in \mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[,]-\infty;0[)$ et $\exp \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty;0[,\mathbb{R})$ donc, par stabilité de $\mathcal{C}^\infty$ par composition, $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[,\mathbb{R})$.

Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P} : \text{“ } \exists P_n \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \zeta^{(n)} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \text{ ”} \tag{1}$$

- $\star$ $\mathcal{P}(0)$ est vrai par définition de ζ en posant $P_0(x) = 1$
- $\star$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}$ est vrai. D'une part, $\forall x \in]-\infty;0[, \zeta^{(n)}(x) = 0$ donc

$$\forall x \in]-\infty;0[, \zeta^{(n+1)}(x) = 0$$

D'autre part, $\forall x \in]0;+\infty[, \zeta^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ ce qui est un produit de trois expressions dérivables. D'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty;0[, \zeta^{(n+1)}(x) &= \left(P_n'(x)\frac{1}{x^{2n}} + P_n(x)\frac{-2n}{x^{2n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2P_n'(x) - 2nxP_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Si bien qu'en posant $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - 2nxP_n(x) + P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, on obtient :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \zeta^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(x)$ est vrai.
Appliquons maintenant le théorème de prolongement du caractère $\mathcal{C}^\infty$.

- $\star$ Nous avons montré que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$.
- $\star$ Calculons les limites à gauche et à droite de 0. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
  - $\star\star$ $\zeta^{(k)}$ est nulle sur $] - \infty; 0[$, $\zeta^{(k)} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$.
  - $\star\star$ De plus, $\exists P_n \in \mathbb{R}[x]$: $\forall x \in]0; +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{2k}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Posons $u = \frac{1}{x}$, ainsi $\zeta^{(k)}(x) = u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ et $u \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.
    Le théorème des croissances comparées donne $u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) \mathrm{e}^{-u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$ donc $\zeta^{(k)}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.

Donc $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\square$