

Khôlles de Mathématiques - Semaine 20

Hugo Vangilluwen

10 Mars 2024

1 Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[X]^\times = \{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\} \quad (1)$$

Démonstration. Soit P un élément inversible de $\mathbb{K}[X]$. Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P \cdot Q = Q \cdot P = 1_{\mathbb{K}[X]}$. En prenant les degrés des polynômes, $\deg P + \deg Q = 0$. Or $\deg : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{N}$ donc $\deg P = \deg Q = 0$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : P = \lambda$. Ainsi $\mathbb{K}[X]^\times \subset \{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Considérons $P = \lambda$. Posons $Q = \lambda^{-1}$ (car \mathbb{K} est un corps). $P \cdot Q = \lambda \lambda^{-1}$ et $Q \cdot P = \lambda^{-1} \lambda$ donc P est inversible. Ainsi $\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\} \subset \mathbb{K}[X]^\times$. \square

2 Pour $P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, exprimer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires

Les fonctions symétriques élémentaires $(\sigma_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ pour une famille $(x_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont définies par

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{i_j} \quad (2)$$

Démonstration. Sous forme développée, $P = X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3 = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$. Comme x_1, x_2, x_3 sont racines de P , nous avons les trois égalités suivantes :

$$0 = P(x_1) = x_1^3 - \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_1 - \sigma_3$$

$$0 = P(x_2) = x_2^3 - \sigma_1 x_2^2 + \sigma_2 x_2 - \sigma_3$$

$$0 = P(x_3) = x_3^3 - \sigma_1 x_3^2 + \sigma_2 x_3 - \sigma_3$$

En sommant ces trois équations,

$$0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \sigma_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sigma_2(x_1 + x_2 + x_3) - 3\sigma_3$$

Cherchons la somme des carrés.

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ \implies x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

\square

3 Expression de S_2, S_{-1} et S_{-2} à l'aide des fonctions élémentaires symétriques.

Les sommes de Newton $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}^*}$ pour une famille $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont définies par (sous réserve d'existence pour $k < 0$) :

$$S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \quad (3)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{S_2} + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}_{\sigma_2} \\
\Rightarrow S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
S_{-1} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j}{\prod_{i=1}^n x_i} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} \\
S_{-2} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i} \frac{1}{x_j} \\
&= \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n^2} - 2 \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i, j\}}}^n \frac{1}{x_k}}{\sigma_n} \\
&= \frac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-2}\sigma_n}{\sigma_n^2}
\end{aligned}$$

□