

Équations de récurrence d'ordre 1

Théorème: Caractérisation des (ERH1)

L'ensemble des solutions de l'équation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$
Est la droite vectorielle des suites géométriques de raison a

$$\{(\lambda a^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \text{Vect} \{(a^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$$

Démonstration:

Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions

Soit $u \in \mathcal{S}$ fq.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n &\implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0 \\ &\implies u = u_0 (a^n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &\implies u \in \text{Vect} \{(a^n)_{n \in \mathbb{N}}\} \end{aligned}$$

Réciproquement, l'ensemble des suites géométriques de raison a est solution de l'équation homogène.

Théorème: Résolution avec second membre

L'ensemble des solutions de l'équation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + v_n$
Est la droite affine

$$\{w + \lambda (a^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Posons w la suite définie par

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + v_n \end{cases}$$

w est "évidemment solution de particulière de l'équation"

Maintenant que nous disposons d'une solution particulière, et ayant observé que l'équation est linéaire, mettons en œuvre l'artillerie classique pour exprimer l'ensemble des solutions par l'habituelle technique.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= au_n + v_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = v_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = w_{n+1} - aw_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u - w)_{n+1} = a(u - w)_n \\
&\iff u - w \in \mathbf{Vect} \left\{ (a^n)_{n \in \mathbb{N}} \right\} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : u - w = \lambda (a^n)_{n \in \mathbb{N}} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n + \lambda a^n \\
&\iff u \in \left\{ (w_n + \lambda a^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}
\end{aligned}$$