Khôlles de Mathématiques - Semaine 16

Hugo Vangilluwen

27 Janvier 2024

1 Deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont le même signe sur un voisinage de a

Démonstration. Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ avec $a \in \mathcal{D}$.
Appliquons la définition de l'équivalence pour $\epsilon \leftarrow \frac{1}{2}$, il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2}|g(x)|$$

Fixons un tel voisinage V. Nous obtenons :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, \underbrace{g(x) - \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{g(x) + \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)}$$

Ainsi $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $V \cap \mathcal{D}$. □

2 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ admette un extremum local ou un point d'inflexion

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathring{\mathcal{D}}$. Supposons que $E_0 = \left\{p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid f^{(p)}(a) \neq 0\right\}$ est non vide.
Posons $p_0 = \min E_0$.
f admet un extremum local en a si et seulement si $f'(a) = 0$ et p_0 est pair.
f admet un point d'inflexion en a si et seulement si p_0 est impair.

Démonstration. Soient de tels objets. Traitons le cas de l'extremum local.
$f \in \mathcal{C}^\infty$ donc, la formule Taylor-Young donne un $DL_{p_0}(a)$ de f :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p_0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^{p_0}\right)$$

En développant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \underbrace{f'(a)}_{=0} + \underbrace{\ldots + \frac{f^{(p_0-1)}(a)}{(p_0-1)!}(x-a)^{p_0-1}}_{=0 \text{ par défintion de } p_0} + \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} + o\left((x-a)^{p_0}\right)$$

Ainsi (car $f^{(p_0)}(a) \neq 0$)

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} \tag{1}$$

Au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ et $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ ont le même signe.

Supposons que f admette un extremum local en a. Or $a \in \mathring{\mathcal{D}}$ et f est dérivable en 0, donc $f'(a) = 0$. Comme f admette un extremum local en a, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a. Donc $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de a. Par conséquent, p_0 est pair.

Réciproquement, supposons que $f'(a) = 0$ et que p_0 est pair. $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de a. Donc $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a. Ainsi, a est un extremum local de f.

Traitons le cas du point d'inflexion. La formule de Taylor-Young donne :

$$f(x) - \underbrace{(f(a) + (x-a)f'(a))}_{\text{tangente en } (a, f(a))} \underset{x \to a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0} \tag{2}$$

Le signe de l'écart courbe/tangente en a est donc celui de $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!}(x-a)^{p_0}$. Ce qui conclut de la même manière que l'extremum local. $\square$