Khôlles de Mathématiques - Semaine 7

Kylian Boyet, George Ober, Elijah Gaillard, Felix Rondeau, Hugo Vangilluwen (relecture)

10 novembre 2023

1 Résolution de l'ED $\forall t \in J, y' + a_0(t) = b(t)$ par équivalences avec la méthode du facteur intégral.

Démonstration. Pour cette preuve, il est nécessaire de supposer a_0 et b continues. Ainsi, on note A la primitive de a_0 définie sur J.

$$\begin{aligned}
&\begin{array}{c} f : J \longmapsto \mathbb{C} \text{ est solution de} \\ y' + a_0 = b \text{ sur } J \end{array} &&\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ f' + a_0 = b \text{ sur } J \end{cases} \\
& &&\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ f'e^A + \underbrace{a_0}_{=A'} fe^A = be^A \text{ sur } J \quad (e^A \text{ est le facteur intégrant}) \end{cases} \\
&\text{(on note } B \text{ une primitive de } be^A \text{ définie sur } J \text{ car } b \text{ et } e^A \text{ sont continues)} &&\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, K) \\ \left(fe^A\right)' = B' \text{ sur } J \end{cases} \\
& &&\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{K}) \\ \left(fe^A - B\right)' = 0 \text{ sur } J \end{cases} \\
& &&\iff \begin{cases} f \in \mathcal{D}^1(J, K) \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} : fe^A - B = \lambda \end{cases} \\
& &&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : f = \lambda e^{-A} + Be^{-A} \\
& &&\iff f \in \left\{\lambda e^{-A} + Be^{-A}\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi, les solution de l'équation différentielle sont

$$\mathcal{S} = \underbrace{Be^{-A}}_{\text{sol. particulière}} + \underbrace{\left\{\lambda e^{-A} + Be^{-A}\right\}}_{\text{droite vect. des sol. de l'EDLH}}$$

□

2 Théorème de résolution des EDLH d'ordre 2 à coefficients constants complexes.

Soient $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \times C^*$. Notons S_H l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = 0$$

Alors, S_H est un plan vectoriel (espace vectoriel de dimension 2). Plus précisément, en notant Δ le discrimianat de l'équation caractéristique de l'équation différentielle ci-dessus,

⋆ si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une unique racine double r_0 et

$$\begin{aligned}
S_H &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (\lambda + \mu t)e^{r_0 t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\} \\
&= \left\{ \lambda \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_0 t} \end{array} \right) \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\} \\
&= \text{Vect} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_0 t} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & te^{r_0 t} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

⋆ si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux solution distinctes r_1 et r_2 et

$$\begin{aligned} S_H &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\} \\ &= \left\{ \lambda \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_1 t} \end{array} \right) + \mu \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_2 t} \end{array} \right) \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_1 t} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_2 t} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Démonstration. Dans $\mathbb{C}$, l'équation caractéristique admet au moins une solution que l'on note r. On a donc

$$a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0$$

Soit $\lambda \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} t \mapsto \lambda(t) e^{rt} \text{ est solution} \\ \text{de l'EDLH}_2 \text{ sur } \mathbb{R} \end{array} &\iff a_2 (\lambda f_r)'' + a_1 (\lambda f_r)' + a_0 \lambda f_r = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \\ &\iff a_2 (\lambda'' f_r + \lambda' f_r' + \lambda f_r' + \lambda f_r'') + a_1 (\lambda' f_r + \lambda f_r') + a_0 \lambda f_r = 0 \\ &\iff a_2 \left(\lambda'' f_r + 2r\lambda' f_r + \lambda r^2 f_r\right) + a_1 (k l' f_r + \lambda r f_r) + a_0 \lambda f_r = 0 \\ {\scriptstyle f_r \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}} &\iff a_2 \lambda'' + (2a_2 r + a_1) \lambda' + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 \lambda = 0 \\ &\iff a_2 \lambda'' + (2a_2 r + a_1) \lambda' = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \\ &\iff \lambda' \text{ sol. définie sur } \mathbb{R} \text{ de l'EDLH}_1 \ a_2 y' + (2a_2 r + a_1) y = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

L'EDLH$_1$ ci-dessus admet comme droite vectorielle de solutions définies sur $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{-\left(\frac{2a_2 r + a_1}{a_2}\right) t} \end{array} \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} te &\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} : \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = \alpha e^{-\left(\frac{2a_2 r + a_1}{a_2}\right)} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda(t) = \frac{\alpha}{-\left(2r + \frac{a_1}{a_2}\right)} e^{-\left(2r + \frac{a_1}{a_2}\right) t} + \beta & \text{sinon} \\ \lambda(t) = \alpha t + \beta & \text{si } 2r + \frac{a_1}{a_2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque que

$$2r + \frac{a_1}{a_2} = 0 \iff 2r = \underbrace{-\frac{a_1}{a_2}}_{\text{somme des racines de l'eq. carac}} \iff \begin{array}{l} \text{l'éq. caractéristique admet} \\ \text{une racine double} \end{array} \iff \Delta = 0$$

Donc

⋆ si $\Delta = 0$, appelons r_0 la racine double de l'équation caractéristique. Alors

$$\begin{array}{c} t \mapsto \lambda(t) e^{r_0 t} \text{ est solution} \\ \text{de l'EDLH}_2 \text{ sur } \mathbb{R} \end{array} \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : \forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = \alpha t + \beta$$

⋆ si $\Delta \neq 0$, notons r_1 et r_2 les deux racines de l'équation caractéristique et prenons $r = r_1$. Dans ce cas,

$$2r_1 + \frac{a_1}{a_2} = 2r_1 + (-r_1 - r_2) = r_1 - r_2$$

d'où

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} t \mapsto \lambda(t) e^{r_1 t} \text{ est solution} \\ \text{de l'EDLH}_2 \text{ sur } \mathbb{R} \end{array} &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : \forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = \frac{\alpha}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1) t} + \beta \\ &\iff \exists (\alpha', \beta) \in \mathbb{C}^2 : \forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = \alpha' e^{(r_2 - r_1) t} + \beta \end{aligned}$$

Observons que $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution de l'équation homogène si et seulement si

$$\begin{array}{c}f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ est solution de} \\ \text{l' EDLH}_2\end{array} \iff \frac{f}{f_r} f_r \text{ est une solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation homogène}$$
$$\iff \frac{f}{f_r} \in \{\text{fonctions } \lambda \text{ déterminées ci-dessus}\}$$
$$\iff f \in \{f_r \times \text{ fonction } \lambda \text{ déterminées ci-dessus}\}$$

Ainsi, $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution de l'équation homogène si et seulement si

$$\begin{cases} f \in \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_0 t}(\alpha t + \beta) \end{array} \middle| (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\} & \text{si } \Delta = 0 \\ f \in \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_1 t}\left(\alpha' e^{(r_2 - r_1)t} + \beta\right) \end{array} \middle| (\alpha', \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\} & \text{si } \Delta \neq 0 \end{cases}$$

□

3 Caractérisation des fonctions exponentielles et de la fonction nulle par la propriété de dérivabilité en 0 et celle de morphisme de $(\mathbb{R}\ ,+)$ dans $(\mathbb{C}\ ,\times)$.

(i) *Comme solution d'un problème de Cauchy.* Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \end{array} \text{ est l'unique solution de } \begin{cases} y' - \alpha y & = 0 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

(ii) *Par la propriété de morphisme et de non-annulation.*

$$\left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \middle| f \text{ dérivable en } 0 \text{ et } \forall (s,u) \in \mathbb{R}^2, f(s+u) = f(s)f(u) \right\}$$
$$= \{\widetilde{0}\} \cup \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \end{array} \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\} \quad (2)$$

Démonstration. (i) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - \alpha y & = 0 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution car l'EDL_1 est résolue et à coefficients et second membre continus. Par ailleurs, en notant

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \end{array}$$

on a bien

$$f(0) = 1 \quad , \quad f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \alpha e^{\alpha t} = \alpha f(t)$$

donc f est solution du problème de Cauchy, et par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, elle est unique.

(ii) Procédons par analyse-synthèse.

▷ *Analyse.* Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable en } 0 & (1) \\ \forall (s,u) \in \mathbb{R}^2, f(s+u) = f(s)f(u) & (2) \end{cases}$$

On obtient, en particularisant (2) pour $(s,u) \leftarrow (0,0)$

$$f(0+0) = f(0)f(0) \quad \text{donc} \quad f(0) - f(0)^2 = 0 \quad \text{donc} \quad f(0) \in \{0, 1\}$$

- Supposons que $f(0)=0$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Appliquons (2) pour $(s,u) \leftarrow (x,0)$:

$$f(x+0) = f(x)\underbrace{f(0)}_{=0} \quad \text{donc} \quad f(x)=0 \quad \text{donc} \quad f=\widetilde{0}$$

- Supposons à présent $f(0)=1$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$ fixés quelconques.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h)-1}{h}$$

  $f(0)$ valant 1, on reconnaît le taux d'acroissement en 0 de la fonction f. On a donc

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)f'(0)$$

  donc f est dérivable en x (par hypothèse) et $f'(x)=f'(0)f(x)$. Ainsi,

$$\begin{cases} f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f \text{ est solution de } y'-f'(0)y=0 \end{cases}$$

  La droite vectorielle des solution de $y'-f'(0)y=0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{f'(0)t} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

  donc

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda e^{f'(0)t}$$

  or, $f(0)=1$, donc pour $t=0$, on trouve $1=\lambda e^0=\lambda$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t)=e^{f'(0)t} \quad \text{d'où} \quad f \in \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \end{array} \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

ce qui prouve l'inclusion.

▷ *Synthèse.*

- $\widetilde{0}$ est dérivable en 0 et

$$\forall (s,u) \in \mathbb{R}^2, \left(\widetilde{0}(s+u)=0 \quad \text{et} \quad \widetilde{0}(s)\cdot\widetilde{0}(u)=0\right)$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé quelconque. Posons

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \end{array} \right.$$

  → f est dérivable en 0 (car $f = exp_{\mathbb{C}} \circ (t \mapsto \alpha t)$).
  → $\forall (s,u) \in \mathbb{R}^2, f(s+u) = e^{\alpha(s+u)} = e^{\alpha s}\cdot e^{\alpha u}$

ce qui prouve l'inclusion réciproque.

□

4 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

Démonstration. Notons $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas $\Delta < 0$ et $\alpha \pm i\beta$ les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$.
Soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \implies \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de Re

$$a_2\mathrm{Re}(f)'' + a_1\mathrm{Re}(f)' + a_0\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$; $\mathrm{Re}(f(t)) = \mathrm{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$. Qui appartient donc à $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$.
En suivant le même raisonnement pour $\mathrm{Im}(f)$, $(t \mapsto e^{\alpha}\sin(\beta t)) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$.
Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ fq. Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$.

$$\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto ae^{(\alpha+i\beta)t} + be^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de f sont réelles, en notant (a_r, a_i, b_r, b_i) les parties réelles et imaginaires respectives de a et b.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \mathrm{Re}(f(t)) \\ &= \mathrm{Re}(ae^{(\alpha+i\beta)t} + be^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \mathrm{Re}((a_r + ia_i)e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + ib_i)e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r\cos(\beta t)e^{\alpha} - a_i\sin(\beta t)e^{\alpha} + b_r\cos(\beta t)e^{\alpha} + b_i\sin(\beta t)e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r)\cos(\beta t)e^{\alpha} + (b_i - a_i)\sin(\beta t)e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion.

□

5 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur I (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{array} \right. \quad \text{où } (\alpha_0,\alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J,\mathbb{K})$$

Si b est continu sur J, alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur J.

Démonstration.

1. **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**
   Nous savons que sous l'hyphothèse de continuité de b sur J, les solutions de (EDL2) définies sur J constituent le plan affine S :

   $$S = \left\{ \lambda f_1 + \mu f_2 + s | (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

   où s est une solution particulière de (EDL2), (f_1, f_2) sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent S_h. On a :

$$\begin{aligned}
f : J \to \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} \quad &\iff \quad \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que (λ,μ) doit être solution d'un système linéaire $(2,2)$. On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est non nul.
Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera D.

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) $(a_2r^2 + a_1r^1 + a_0 = 0)$. On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de Δ. Traitons d'abord le cas $\Delta \neq 0$. On peut choisir :

$$f_1(t_0) = e^{r_1t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2t_0}$$
$$f_1'(t_0) = r_1e^{r_1t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2e^{r_2t_0}$$

Donc (en sachant que $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$) :

$$D = e^{r_1t_0} \cdot r_2e^{r_2t_0} - r_1e^{r_1t_0} \cdot e^{r_2t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1t_0 + r_2t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a $\Delta = 0$; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0e^{r_0t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0t_0}\left(r_0t_0e^{r_0t_0} + e^{r_0t_0}\right) - r_0e^{r_0t_0} \times t_0e^{r_0t_0} = e^{2r_0t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas, $D \neq 0$, donc le système $(2,2)$ étudié admet une unique solution, donc il existe un unique couple (λ,μ) le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

2. **Cas** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Dans cette partie, $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$ et $b \in C^0(J, \mathbb{R})$.

   ▷ *Existence.* Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le problème de Cauchy admet, dans $\mathbb{R}$, une solution à valeurs complexes g. Posons $f = \mathrm{Re}(g)$ et montrons que f est une solution réelle du problème de Cauchy.

   ⋆ $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$ donc $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$
   ⋆ g vérifie $a_2g'' + a_1g' + a_0g = b$ sur J donc en prenant $\mathrm{Re}(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(a_2g'' + a_1g' + a_0g = b) = \mathrm{Re}(b) \quad &\iff \quad a_2\mathrm{Re}(g'') + a_1\mathrm{Re}(g') + a_0\mathrm{Re}(g) = b \\
&\iff \quad a_2f'' + a_1f' + a_0f = b \text{ sur } J
\end{aligned}$$

   ⋆ $f(t_0) = \mathrm{Re}(g(t_0)) = \mathrm{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$

- ⋆ $f'(t_0) = \mathrm{Re}(g(t_0))' = \mathrm{Re}(g'(t_0)) = \mathrm{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc f est une solution réelle définie sur J au problème de Cauchy.

▷ *Unicité.* Soient f_1 et f_2 deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$, donc $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$.

□