

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 14

Kylian Boyet, Hugo Vangilluwen

15 Janvier 2024

## 1 Expression de dérivées successives

Soit  $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln x}{x} \end{array} \right.$

Exprimer  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathcal{D}_f$ .

Considérons le prédicat  $P(\cdot)$  définit pour  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$P(n) : " f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[ \ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] "$$

Initialisation :

Pour  $n = 0$ ,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}} \left[ \ln(x) - \sum_{k=1}^0 \frac{1}{k} \right],$$

donc  $P(0)$  est vrai.

Hérédité :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(n)$ . On a,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left( \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[ \ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] \right)'$$

par véracité de  $P(n)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n n! x^n - (-1)^n (n+1)! x^n \left[ \ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right]}{x^{2(n+1)}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! \ln(x) - (-1)^{n+1} (n+1)! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{x^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}} \left[ \ln(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right] \end{aligned}$$

c'est l'expression recherchée, donc  $P(n+1)$  est vrai.

Par théorème de récurrence sur  $\mathbb{N}$ ,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . □

## 2 Dérivé d'une bijection réciproque

Soit  $f : I \rightarrow f(I) \subset \mathbb{R}$  continue, strictement monotone sur  $I$  et dérivable en  $a \in I$ . Si  $f'(a) \neq 0$  alors  $f$  est bijective,  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(a)$  et  $f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ .

*Démonstration.* Soient de tels objets.

Rappelons le lemme inattendu. Soit  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  monotone (où  $J$  est un intervalle). Nous avons l'équivalence suivante :

$$f(J) \text{ est un intervalle} \iff f \text{ est continue sur } J$$

Par définition,  $f$  est surjective. Comme elle est strictement monotone,  $f$  est injective. Ainsi  $f$  est bijective.

D'après le lemme inattendu,  $f(I)$  est un intervalle. Nous avons  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  avec  $f(I)$  et  $I$  des intervalles donc  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$ .

Calculons la limite du taux d'accroissement de  $f^{-1}$  en  $f(a)$  :

$$\forall x \in f(I), \tau_{f^{-1}, f(a)} = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(a))}{x - f(a)}$$

Posons  $u = f^{-1}(x)$ . D'où :

$$\tau_{f^{-1}, f(a)} = \frac{u - a}{f(u) - f(a)}$$

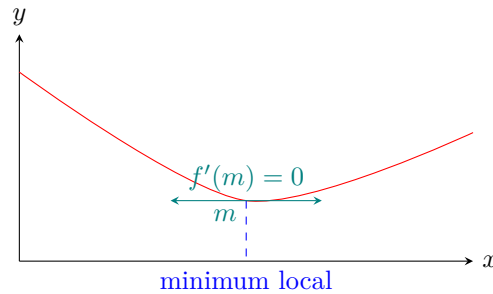
De plus, par continuité de  $f^{-1}$ ,  $u \xrightarrow{x \rightarrow f(a)} f^{-1}(f(a)) = a$ . Par dérivabilité en  $a$  et par continuité

de  $x \mapsto x^{-1}$  en  $f(a) \neq 0$ ,  $\frac{u-a}{f(u)-f(a)} \xrightarrow{u \rightarrow a} \frac{1}{f'(a)}$ .

Ainsi,  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(a)$  et  $f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ .  $\square$

### 3 Dérivée d'un extremum local intérieur au domaine de définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in \overset{\circ}{I}$  et si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f'(a) = 0$



*Démonstration.* Soient de tels objets.

$a \in \overset{\circ}{I} \implies \exists \eta_1 \in \mathbb{R}_+^* : [a - \eta_1; a + \eta_1] \subset I$  Fixons un tel  $\eta_1$ .

Calculons le taux d'accroissement en  $a$ .

$$\forall x \in [a - \eta_1; a + \eta_1], \tau_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Or  $f$  est dérivable en  $a$  donc  $\tau_{f,a}(x)$  admet une limite lorsque  $x \rightarrow a$ . Traitons le cas où  $a$  est maximum local. Par définition :

$$\exists \eta_2 \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in [a - \eta_2; a + \eta_2], f(x) \leq f(a)$$

Fixons un tel  $\eta_2$ . Soit  $x \in [a - \eta_2; a + \eta_2] \setminus \{a\}$  fq.

Alors  $f(x) - f(a) \leq 0$ .

Si  $x > a$ ,  $x - a > 0$ . Alors  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \leq 0$ .

Sinon  $x < a$ ,  $x - a < 0$ . Alors  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \geq 0$ .

Ainsi  $0 \leq \lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \leq 0$ . Donc  $f'(a) = 0$ .  $\square$

### 4 Théorème de Rolle et formule des accroissements finis

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a < b$ . Soit  $I$  le segment  $a, b$ .

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur ledit segment et dérivable sur l'ouvert associé.

(i) Théorème de Rolle :

Si  $f(a) = f(b)$ , alors  $\exists c \in \overset{\circ}{I}$  tel que  $f'(c) = 0$

(ii) Formule des accroissements finis :

$$\exists c \in \overset{\circ}{I} : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

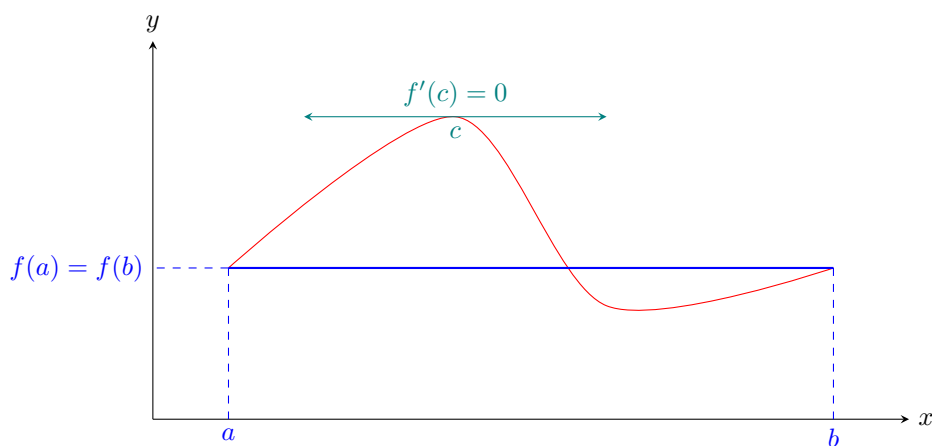


FIGURE 1 – Théorème de Rolle

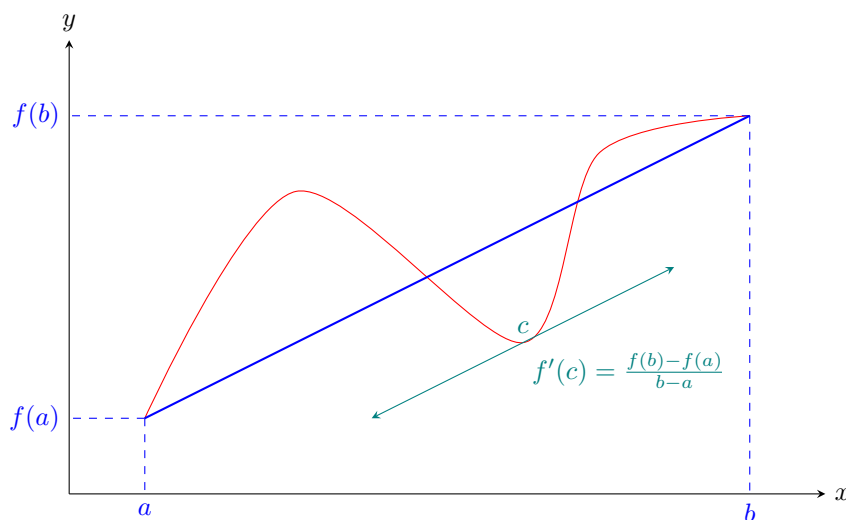


FIGURE 2 – Formule des accroissements finis

*Démonstration.* Soient de tels objets.

Prouvons (i), donc supposons  $f(a) = f(b)$ .

$f$  est continue sur  $I$  donc par le théorème de Weierstraß, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment :

$$\exists (x_m, x_M) \in I^2 : (f(x_m) = \min f(I)) \wedge (f(x_M) = \max f(I))$$

donc, si  $(x_m, x_M) \in \{a, b\}^2$ , alors,

$$\forall x \in I, f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(a)$$

donc  $\forall x \in I, f(x) = f(a)$  c'est-à-dire que  $f$  est constante et donc tous les points intermédiaires à  $I$  sont des  $c$  valides.

Sinon,  $(x_m \notin \{a, b\}) \vee (x_M \notin \{a, b\})$ , quitte à prendre l'autre valeur, supposons que  $x_M \notin \{a, b\}$ , ainsi,  $x_M \in \overset{\circ}{I}$  et  $f(x_M)$  est un maximum global donc,  $f$  étant dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$  elle est dérivable en  $x_M$  donc  $f'(x_M) = 0$ , on pose  $c = x_M$ , ce qui conclut.

Prouvons (ii).

Posons  $d : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - \left( \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right)$ .  $d$  est continue sur  $I$  et dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$  comme combinaison linéaire de telles fonctions. On a  $d(a) = 0$  et  $d(b) = 0$  donc  $d(a) = 0 = d(b)$ .

On peut alors appliquer le Théorème de Rolle pour  $f \leftarrow d, a \leftarrow a$  et  $b \leftarrow b$  : il existe  $c \in \overset{\circ}{I}$  tel que  $d'(c) = 0$ , c'est le résultat.  $\square$

## 5 Inégalité des accroissements finis

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$  et  $x_0 \in I$ , posons  $X_- = ]-\infty; x_0]$  la demi-droite fermée en  $x_0$  et vers  $-\infty$ , de même  $X_+ = [x_0; +\infty[$  la demi-droite fermée en  $x_0$  et vers  $+\infty$ .

(i) ★ Si  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, m \leq f'(x)$ , alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

★ Si  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq M$ , alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x)$$

★ Si  $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \overset{\circ}{I}, m \leq f'(x) \leq M$ , alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

(ii) Si  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq M$ , alors,

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$

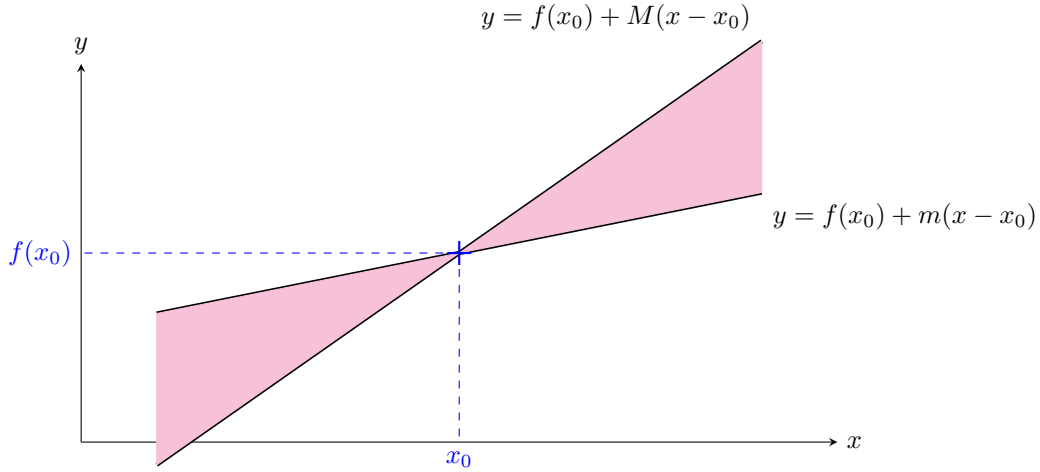


FIGURE 3 – Interprétation géométrique des accroissements finis

*Démonstration.* (i) Soit  $x \in I$  et posons  $S$  le segment d'extrémités  $x$  et  $x_0$ .

★ Si  $x \neq x_0$ ,  $f$  est continue sur  $S$  et dérivable sur  $\overset{\circ}{S}$ , la formule des accroissements finis donne alors l'existence d'un  $c$  appartenant à  $\overset{\circ}{S}$  tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$$

Si  $x > x_0$ ,  $x - x_0 > 0$ , or  $m \leq f'(c) \leq M$  donc

$$m(x - x_0) \leq (x - x_0)f'(c) \leq M(x - x_0)$$

si bien que

$$m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0)$$

d'où

$$f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0).$$

Si  $x < x_0$ , il suffit de retourner l'inégalité lors de la première multiplication et (i) est prouvé.

(ii) Soit  $y \in I$ .

L'hypothèse  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq M$  équivaut à  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, -M \leq f'(x) \leq M$ , donc on peut appliquer (i) pour  $x_0 \leftarrow y$ ,  $M \leftarrow M$  et  $m \leftarrow -M$  :

$$\forall x \in I \cap [y, +\infty[, f(y) - M(x - y) \leq f(x) \leq f(y) + M(x - y)$$

Or  $x - y > 0$  donc  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ . Et

$$\forall x \in I \cap ]-\infty, y], f(y) + M(x - y) \leq f(x) \leq f(y) - M(x - y)$$

Or  $x - y < 0$  donc  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ .

Par conséquent,  $\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ . □

## 6 Caractère lipschitzien d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un segment

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ,  $I$  le segment  $a, b$ . Alors  $f$  est  $\|f'\|_{\infty, I}$ -lipschitzienne sur  $I$ .

*Démonstration.* Soient de tels objets.

★  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  donc  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

★  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  donc  $f \in \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$ .

★  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  donc  $f'$  est continue sur  $I$  donc le réel  $\|f'\|_{\infty, I}$  est bien défini et

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq \|f'\|_{\infty, I}.$$

Ces propriétés permettent d'appliquer le corollaire du TAF qui conclut que  $f$  est  $\|f'\|_{\infty, I}$ -lipschitzienne. □

## 7 Théorème du prolongement de la propriété de la dérivabilité

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $a \in I$ .

*Lemme :*

Si  $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I \setminus \{a\}} \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } a \end{cases}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$

*Théorème :*

Si  $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I \setminus \{a\}} \text{ admet une limite finie } \ell \in \mathbb{R} \text{ en } a \end{cases}$ , alors  $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) = \ell \text{ (donc } f' \text{ est continue en } a) \end{cases}$

*Démonstration.* Prouvons le lemme pour  $\ell \in \mathbb{R}$ , c'est le cas qui nous intéresse.

Soient de tels objets. Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Appliquons la définition de  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'_{|I \setminus \{a\}}(x) = \ell$  pour  $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$  :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in I \setminus \{a\}, |x - a| \leq \eta \implies |f'_{|I \setminus \{a\}}(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Fixons un tel  $\eta$ .

Soit  $x \in I \setminus \{a\}$  tel que  $|x - a| \leq \eta$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $I$  donc  $f$  est continue sur le segment d'extrémités  $a$  et  $x$  qui est par ailleurs inclus dans  $I$  par convexité d'un intervalle.

La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  donc  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $a, x$  qui est aussi inclus

dans  $\overset{\circ}{I}$  par convexité.

L'égalité des accroissements finis s'applique à  $f$  sur l'intervalle  $a$  et  $x$  :

$$\exists c_x \in ]a, x[ \cup ]x, a[ : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

Or  $|c_x - a| \leq |x - a| \leq \eta$  donc ladite définition de la limite s'applique pour  $x \leftarrow c_x : |f'(c_x) - \ell| \leq \varepsilon$  si bien que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

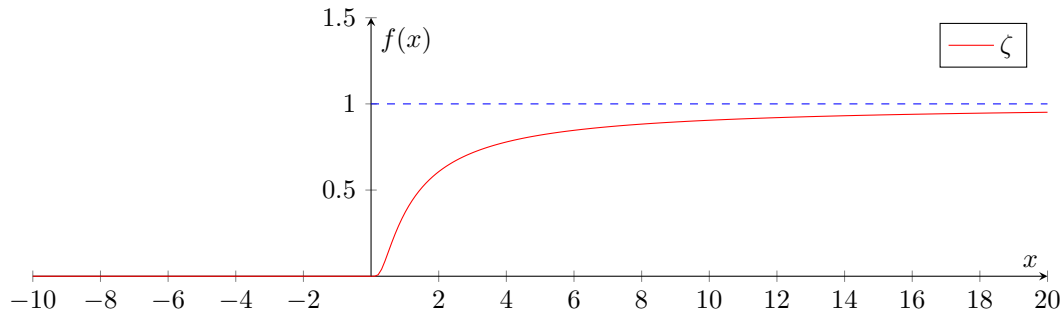
D'où le lemme.

Prouvons alors le théorème.

Sous ces hypothèses, le lemme s'applique donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ , or  $\ell \in \mathbb{R}$ , donc le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$  admet une limite finie en  $a$  ce qui prouve la dérivabilité de  $f$  en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ . Ce qui suffit.  $\square$

## 8 La fonction $\zeta$ (pas celle-là une autre) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Posons  $\zeta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$ . Montrons que  $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .



*Démonstration.*

★  $\zeta|_{]-\infty; 0[}$  est constante donc  $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty; 0[, \mathbb{R})$ .

★  $x \mapsto -\frac{1}{x} \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[, ]-\infty; 0[)$  et  $\exp \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty; 0[, \mathbb{R})$  donc, par stabilité de  $\mathcal{C}^\infty$  par composition,  $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ .

Considérons le prédicat  $\mathcal{P}(\cdot)$  défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathcal{P} : " \exists P_n \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in \mathbb{R}^*, \zeta^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} " \quad (1)$$

★  $\mathcal{P}(0)$  est vrai par définition de  $\zeta$  en posant  $P_0(x) = 1$

★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé quelconque tel que  $\mathcal{P}$  est vrai. D'une part,  $\forall x \in ]-\infty; 0[, \zeta^{(n)}(x) = 0$  donc

$$\forall x \in ]-\infty; 0[, \zeta^{(n+1)}(x) = 0$$

D'autre part,  $\forall x \in ]0; +\infty[, \zeta^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$  ce qui est un produit de trois expressions dérivables. D'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-\infty; 0[, \zeta^{(n+1)}(x) &= \left( P'_n(x) \frac{1}{x^{2n}} + P_n(x) \frac{-2n}{x^{2n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 P'_n(x) - 2nx P_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Si bien qu'en posant  $P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) - 2nxP_n(x) + P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ , on obtient :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \zeta^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}}$$

Par conséquent,  $\mathcal{P}(x)$  est vrai.

Appliquons maintenant le théorème de prolongement du caractère  $\mathcal{C}^\infty$ .

★ Nous avons montré que  $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ .

★ Calculons les limites à gauche et à droite de 0. Soit  $k \in \mathbb{N}$  fixé quelconque.

★★  $\zeta^{(k)}$  est nulle sur  $] -\infty; 0[, \zeta^{(k)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ .

★★ De plus,  $\exists P_n \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in ]0; +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{2k}} e^{-\frac{1}{x}}$ . Posons  $u = \frac{1}{x}$ , ainsi  $\zeta^{(k)}(x) = u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) e^{-\frac{1}{x}}$  et  $u \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ .

Le théorème des croissances comparées donne  $u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) e^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$  donc

$$\zeta^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc  $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

□