

Khôlles de Mathématiques - Semaine 14

Kylian Boyet, Hugo Vangilluwen

15 Janvier 2024

1 Expression de dérivées successives

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln x}{x} \end{array} \right.$

Exprimer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{D}_f$.

Considérons le prédicat $P(\cdot)$ définit pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n) : " f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] "$$

Initialisation :

Pour $n = 0$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^0 \frac{1}{k} \right],$$

donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] \right)'$$

par véracité de $P(n)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n n! x^n - (-1)^n (n+1)! x^n \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right]}{x^{2(n+1)}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! \ln(x) - (-1)^{n+1} (n+1)! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{x^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}} \left[\ln(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right] \end{aligned}$$

c'est l'expression recherchée, donc $P(n+1)$ est vrai.

Par théorème de récurrence sur \mathbb{N} , $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

2 Dérivé d'une bijection réciproque

Soit $f : I \rightarrow f(I) \subset \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I et dérivable en $a \in I$. Si $f'(a) \neq 0$ alors f est bijective, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Démonstration. Soient de tels objets.

Rappelons le lemme inattendu. Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ monotone (où J est un intervalle). Nous avons l'équivalence suivante :

$$f(J) \text{ est un intervalle} \iff f \text{ est continue sur } J$$

Par définition, f est surjective. Comme elle est strictement monotone, f est injective. Ainsi f est bijective.

D'après le lemme inattendu, $f(I)$ est un intervalle. Nous avons $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ avec $f(I)$ et I des intervalles donc f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Calculons la limite du taux d'accroissement de f^{-1} en $f(a)$:

$$\forall x \in f(I), \tau_{f^{-1}, f(a)} = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(a))}{x - f(a)}$$

Posons $u = f^{-1}(x)$. D'où :

$$\tau_{f^{-1}, f(a)} = \frac{u - a}{f(u) - f(a)}$$

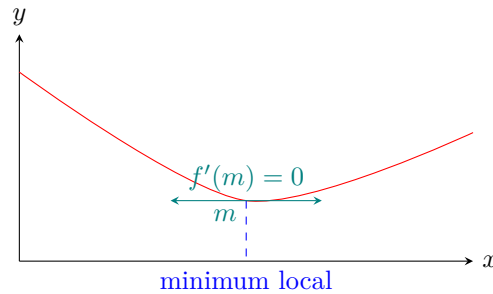
De plus, par continuité de f^{-1} , $u \xrightarrow{x \rightarrow f(a)} f^{-1}(f(a)) = a$. Par dérivabilité en a et par continuité

de $x \mapsto x^{-1}$ en $f(a) \neq 0$, $\frac{u-a}{f(u)-f(a)} \xrightarrow{u \rightarrow a} \frac{1}{f'(a)}$.

Ainsi, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$. \square

3 Dérivée d'un extremum local intérieur au domaine de définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $a \in \overset{\circ}{I}$ et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$



Démonstration. Soient de tels objets.

$a \in \overset{\circ}{I} \implies \exists \eta_1 \in \mathbb{R}_+^* : [a - \eta_1; a + \eta_1] \subset I$ Fixons un tel η_1 .

Calculons le taux d'accroissement en a .

$$\forall x \in [a - \eta_1; a + \eta_1], \tau_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Or f est dérivable en a donc $\tau_{f,a}(x)$ admet une limite lorsque $x \rightarrow a$. Traitons le cas où a est maximum local. Par définition :

$$\exists \eta_2 \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in [a - \eta_2; a + \eta_2], f(x) \leq f(a)$$

Fixons un tel η_2 . Soit $x \in [a - \eta_2; a + \eta_2] \setminus \{a\}$ fq.

Alors $f(x) - f(a) \leq 0$.

Si $x > a$, $x - a > 0$. Alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \leq 0$.

Sinon $x < a$, $x - a < 0$. Alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \geq 0$.

Ainsi $0 \leq \lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) \leq 0$. Donc $f'(a) = 0$. \square

4 Théorème de Rolle et formule des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit I le segment a, b .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur ledit segment et dérivable sur l'ouvert associé.

(i) Théorème de Rolle :

Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f'(c) = 0$

(ii) Formule des accroissements finis :

$$\exists c \in \overset{\circ}{I} : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

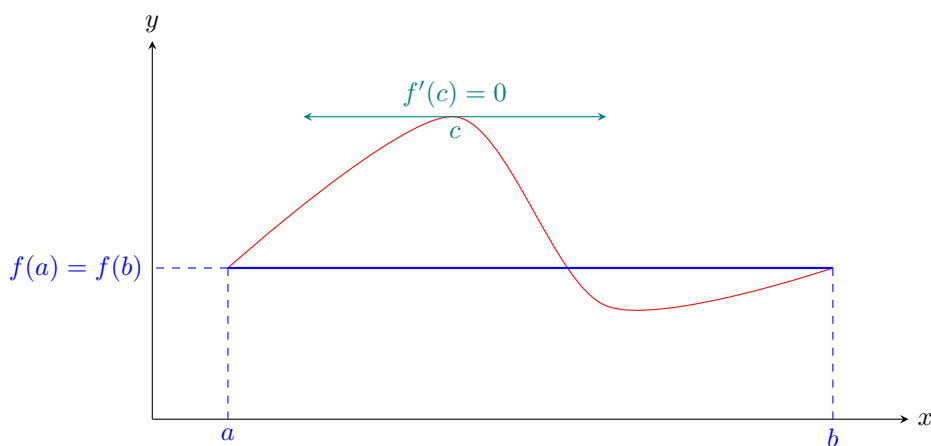


FIGURE 1 – Théorème de Rolle

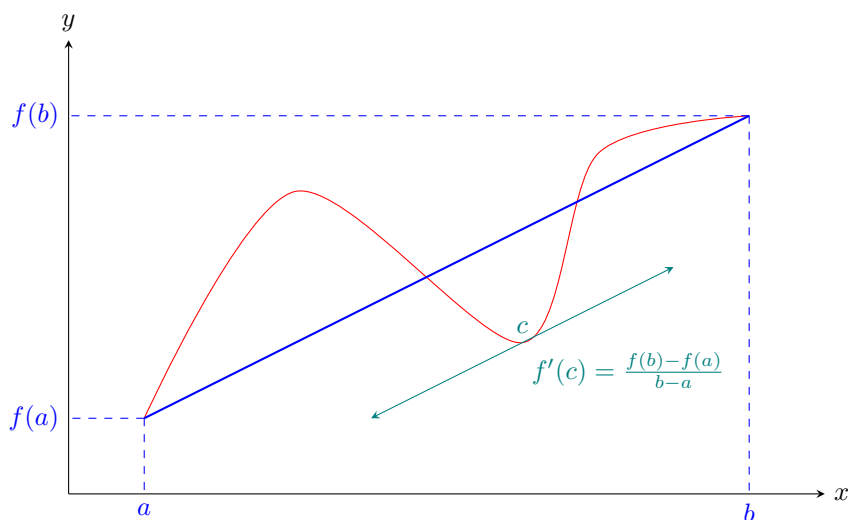


FIGURE 2 – Formule des accroissements finis

Démonstration. Soient de tels objets.

Prouvons (i), donc supposons $f(a) = f(b)$.

f est continue sur I donc par le théorème de Weierstraß, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment :

$$\exists (x_m, x_M) \in I^2 : (f(x_m) = \min f(I)) \wedge (f(x_M) = \max f(I))$$

donc, si $(x_m, x_M) \in \{a, b\}^2$, alors,

$$\forall x \in I, f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(a)$$

donc $\forall x \in I, f(x) = f(a)$ c'est-à-dire que f est constante et donc tous les points intermédiaires à I sont des c valides.

Sinon, $(x_m \notin \{a, b\}) \vee (x_M \notin \{a, b\})$, quitte à prendre l'autre valeur, supposons que $x_M \notin \{a, b\}$, ainsi, $x_M \in \overset{\circ}{I}$ et $f(x_M)$ est un maximum global donc, f étant dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ elle est dérivable en x_M donc $f'(x_M) = 0$, on pose $c = x_M$, ce qui conclut.

Prouvons (ii).

Posons $d : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right)$. d est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. On a $d(a) = 0$ et $d(b) = 0$ donc $d(a) = 0 = d(b)$.

On peut alors appliquer le Théorème de Rolle pour $f \leftarrow d, a \leftarrow a$ et $b \leftarrow b$: il existe $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $d'(c) = 0$, c'est le résultat. \square

5 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$, posons $X_- =]-\infty; x_0]$ la demi-droite fermée en x_0 et vers $-\infty$, de même $X_+ = [x_0; +\infty[$ la demi-droite fermée en x_0 et vers $+\infty$.

(i) ★ Si $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, m \leq f'(x)$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

★ Si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x)$$

★ Si $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \overset{\circ}{I}, m \leq f'(x) \leq M$, alors,

$$\forall x \in I \cap X_+, f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I \cap X_-, f(x_0) + M(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m(x - x_0)$$

(ii) Si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq M$, alors,

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$

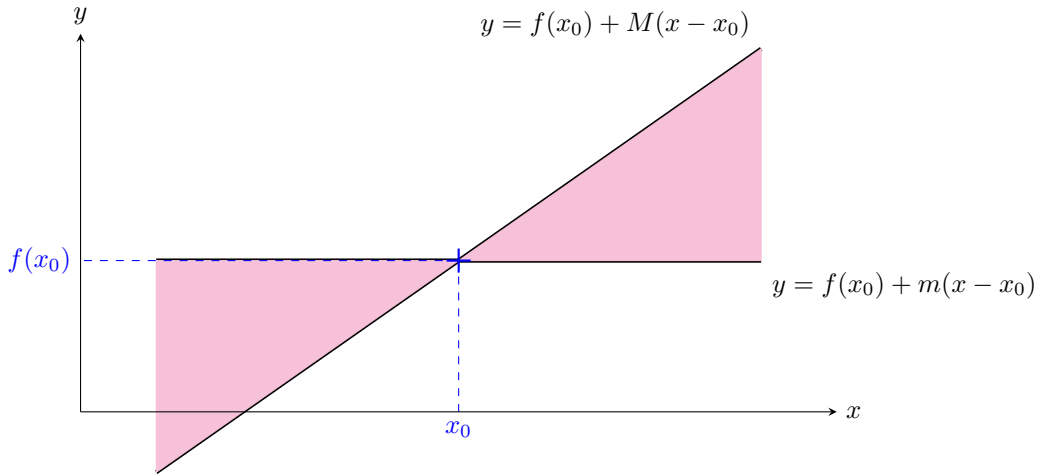


FIGURE 3 – Interprétation géométrique des accroissements finis

Démonstration. (i) Soit $x \in I$ et posons S le segment d'extrémités x et x_0 .

★ Si $x \neq x_0$, f est continue sur S et dérivable sur $\overset{\circ}{S}$, la formule des accroissements finis donne alors l'existence d'un c appartenant à $\overset{\circ}{S}$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$$

Si $x > x_0$, $x - x_0 > 0$, or $m \leq f'(c) \leq M$ donc

$$m(x - x_0) \leq (x - x_0)f'(c) \leq M(x - x_0)$$

si bien que

$$m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0)$$

d'où

$$f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0).$$

Si $x < x_0$, il suffit de retourner l'inégalité lors de la première multiplication et (i) est prouvé.

(ii) Soit $y \in I$.

L'hypothèse $\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq M$ équivaut à $\forall x \in \overset{\circ}{I}, -M \leq f'(x) \leq M$, donc on peut appliquer (i) pour $x_0 \leftarrow y$, $M \leftarrow M$ et $m \leftarrow -M$:

$$\forall x \in I \cap [y, +\infty[, f(y) - M(x - y) \leq f(x) \leq f(y) + M(x - y)$$

Or $x - y > 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Et

$$\forall x \in I \cap]-\infty, y], f(y) + M(x - y) \leq f(x) \leq f(y) - M(x - y)$$

Or $x - y < 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Par conséquent, $\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$. □

6 Caractère lipschitzien d'une fonction \mathcal{C}^1 sur un segment

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, I le segment a, b . Alors f est $\|f'\|_{\infty, I}$ -lipschitzienne sur I .

Démonstration. Soient de tels objets.

★ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

★ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$.

★ $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ donc f' est continue sur I donc le réel $\|f'\|_{\infty, I}$ est bien défini et

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq \|f'\|_{\infty, I}.$$

Ces propriétés permettent d'appliquer le corollaire du TAF qui conclut que f est $\|f'\|_{\infty, I}$ -lipschitzienne. □

7 Théorème du prolongement de la propriété de la dérivabilité

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Lemme :

Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I \setminus \{a\}} \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } a \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$

Théorème :

Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ f \text{ est continue en } a \\ f'_{|I \setminus \{a\}} \text{ admet une limite finie } \ell \in \mathbb{R} \text{ en } a \end{cases}$, alors $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) = \ell \text{ (donc } f' \text{ est continue en } a) \end{cases}$

Démonstration. Prouvons le lemme pour $\ell \in \mathbb{R}$, c'est le cas qui nous intéresse.

Soient de tels objets. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{x \rightarrow a} f'_{|I \setminus \{a\}}(x) = \ell$ pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in I \setminus \{a\}, |x - a| \leq \eta \implies |f'_{|I \setminus \{a\}}(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Fixons un tel η .

Soit $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x - a| \leq \eta$.

La fonction f est continue sur I donc f est continue sur le segment d'extrémités a et x qui est par ailleurs inclus dans I par convexité d'un intervalle.

La fonction f est dérivable sur I donc f est dérivable sur l'intervalle ouvert a, x qui est aussi inclus

dans $\overset{\circ}{I}$ par convexité.

L'égalité des accroissements finis s'applique à f sur l'intervalle a et x :

$$\exists c_x \in]a, x[\cup]x, a[: \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

Or $|c_x - a| \leq |x - a| \leq \eta$ donc ladite définition de la limite s'applique pour $x \leftarrow c_x : |f'(c_x) - \ell| \leq \varepsilon$ si bien que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

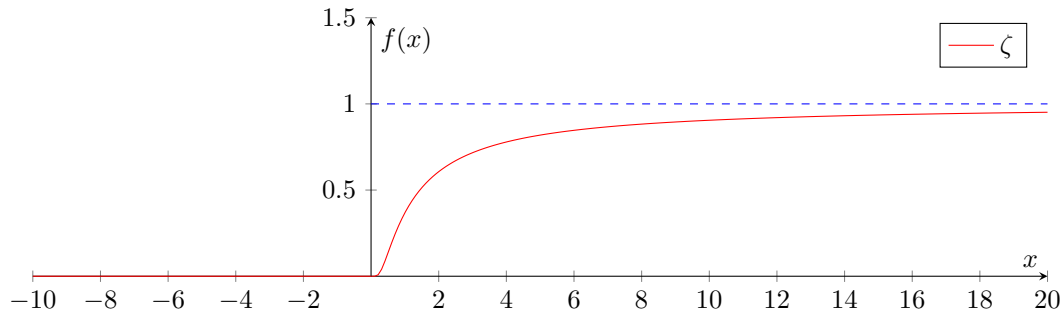
D'où le lemme.

Prouvons alors le théorème.

Sous ces hypothèses, le lemme s'applique donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, or $\ell \in \mathbb{R}$, donc le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a ce qui prouve la dérivabilité de f en a et $f'(a) = \ell$. Ce qui suffit. \square

8 La fonction ζ (pas celle-là une autre) est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

Posons $\zeta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$. Montrons que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.



Démonstration.

★ $\zeta|_{]-\infty; 0[}$ est constante donc $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty; 0[, \mathbb{R})$.

★ $x \mapsto -\frac{1}{x} \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[,]-\infty; 0[)$ et $\exp \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty; 0[, \mathbb{R})$ donc, par stabilité de \mathcal{C}^∞ par composition, $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[, \mathbb{R})$.

Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P} : " \exists P_n \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in \mathbb{R}^*, \zeta^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} " \quad (1)$$

★ $\mathcal{P}(0)$ est vrai par définition de ζ en posant $P_0(x) = 1$

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que \mathcal{P} est vrai. D'une part, $\forall x \in]-\infty; 0[, \zeta^{(n)}(x) = 0$ donc

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \zeta^{(n+1)}(x) = 0$$

D'autre part, $\forall x \in]0; +\infty[, \zeta^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ ce qui est un produit de trois expressions dérivables. D'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty; 0[, \zeta^{(n+1)}(x) &= \left(P'_n(x) \frac{1}{x^{2n}} + P_n(x) \frac{-2n}{x^{2n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 P'_n(x) - 2nx P_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Si bien qu'en posant $P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) - 2nxP_n(x) + P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, on obtient :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \zeta^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(x)$ est vrai.

Appliquons maintenant le théorème de prolongement du caractère \mathcal{C}^∞ .

★ Nous avons montré que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$.

★ Calculons les limites à gauche et à droite de 0. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

★★ $\zeta^{(k)}$ est nulle sur $] -\infty; 0[, \zeta^{(k)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$.

★★ De plus, $\exists P_n \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in]0; +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{2k}} e^{-\frac{1}{x}}$. Posons $u = \frac{1}{x}$, ainsi $\zeta^{(k)}(x) = u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) e^{-\frac{1}{x}}$ et $u \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

Le théorème des croissances comparées donne $u^{2k} P_k(\frac{1}{u}) e^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\zeta^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

□