

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 23

Hugo Vangilluwen

31 Mars 2024

Pour cette semaine,  $\mathbb{K}$  désigne un corps commutatif,  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $E'$  et  $F'$  des sous-espaces vectoriels respectivement de  $E$  et de  $F$ ,  $I$  un ensemble quelconque non vide.

## 1 L'ensemble des automorphisme d'un espace vectoriel muni de la loi de composition forme un groupe

*Démonstration.* Montrons que  $(\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E), \circ)$  est un sous-groupe de  $(\mathcal{S}(E), \circ)$ .

- $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \subset \mathcal{S}(E)$  et  $(\mathcal{S}(E), \circ)$  est bien un groupe.
- $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \neq \emptyset$  puisque  $Id_E \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}$ .
- Soit  $(f, g) \in \mathcal{GL}(E)$ . Montrons que  $f \circ g^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$ .  
Soit  $(\alpha, \beta, x, y) \in \mathbb{K}^2 \times E^2$  fixés quelconques.

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(\alpha x + \beta y) &= f(g^{-1}(\alpha x + \beta y)) \\ &= f(g^{-1}(\alpha g^{-1}(g(x)) + \beta g^{-1}(g(y)))) \\ &= f(g^{-1}(\alpha g(g^{-1}(x)) + \beta g(g^{-1}(y)))) \\ &= f(g^{-1}(g(\alpha g^{-1}(x) + \beta g^{-1}(y)))) \quad \text{car } g \text{ est linéaire} \\ &= f(\alpha g^{-1}(x) + \beta g^{-1}(y)) \\ &= \alpha f(g^{-1}(x)) + \beta f(g^{-1}(y)) \\ &= \alpha (f \circ g^{-1})(x) + \beta (f \circ g^{-1})(y)\end{aligned}$$

□

## 2 Caractérisation de la somme directe de $p$ sous-espaces vectoriels

Soit  $(E_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket} \in E^p$   $p$  sous-espace vectoriel de  $E$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé quelconque.

Par définition, cette famille est en somme directe si tout vecteur de  $E_1 + E_2 + \dots + E_p$  peut s'écrire comme une somme unique d'élément de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ . Formellement :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p E_i, \exists ! x \in \times_{i=1}^p E_i : x = \sum_{i=1}^p x_i \quad (1)$$

Nous allons démontrer que  $E_1, E_2, \dots$  et  $E_p$  sont en somme directe si et seulement si

$$\forall x \in \times_{i=1}^p E_i, \left( \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i = 0_E \right) \quad (2)$$

*Démonstration.* Supposons que  $E_1, E_2, \dots, E_p$  sont en somme directe.

Soient  $x \in \times_{i=1}^p E_i$  fixés quelconques tels que  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E$ .

Or  $0_E = \underbrace{0_E}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in E_p}$ . Par unicité de l'écriture de  $x$  comme somme d'éléments de  $\times_{i=1}^p E_i$ ,

$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i = 0_E$ .

Supposons maintenant l'équation de la caractérisation.

Soit  $x \in \bigtimes_{i=1}^p E_i$  tel que  $x$  puisse s'écrire comme somme de  $x' \in \bigtimes_{i=1}^p E_i$  et somme de  $x'' \in \bigtimes_{i=1}^p E_i$ . Montrons que  $x' = x''$ .

$$\sum_{i=1}^p x'_i = x = \sum_{i=1}^p x''_i$$

Donc

$$\sum_{i=1}^p (x'_i - x''_i) = 0_E$$

D'après l'équation de la caractérisation,  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x'_i - x''_i = 0_E$ .

Donc  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x'_i = x''_i$

□