Khôlles de Mathématiques - Semaine 4

George Ober

17 avril 2024

1 Résolution des équations algébriques de degré 2 dans $\mathbb{C}$ et algorithme de recherche d'une racine carrée sous forme cartésienne (sur un exemple explicite).

Considérons l'équation algébrique de degré 2 :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Où $z \in L$ est l'inconnue et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ sont des paramètres. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ que l'on appelle le discriminant de l'équation.

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution dite double qui est $-\frac{b}{2a}$ et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$$

— Si $\Delta \neq 0$, notons δ une racine carrée de Δ, l'équation admet deux solutions distinctes $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$ dites simples et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)$$

Démonstration. La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = a\left[\underbrace{z^2 + \frac{b}{a}z}_{\text{But : Absorber ces termes dans un carré}} + \frac{c}{a}\right] &= a\left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

— Si $\Delta = 0$

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b}{2a}\right)^2$$

de sorte que

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a\left(z - \frac{-b}{2a}\right)^2 = 0 \iff z = -\frac{b}{2a}$$

— Sinon

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)$$
$$= a\left(z-\frac{-z+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-z-\delta}{2a}\right)$$

de sorte que

$$az^2+bz+c=0 \iff a\left(z-\frac{-z+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-z-\delta}{2a}\right)=0$$

$$\iff \begin{cases} z-\frac{-z-\delta}{2a}=0 \\ \text{ou} \\ z-\frac{-z+\delta}{2a}=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z=\frac{-z-\delta}{2a} \\ \text{ou} \\ z=\frac{-z+\delta}{2a} \end{cases}$$

□

2 Résolution de $e^z = z_0$ où $z_0 \in \mathbb{C}^*$

L'exponentielle complexe a pour image $\mathbb{C}^*$ et, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$,

$$\exp_{\mathbb{C}}^{-1}(\{z_0\}) = \{\ln|z_0| + i\theta_0 + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

où $\theta_0 \in \arg(z_0)$

Démonstration. La propriété, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = |e^{\mathrm{Re}(z)}| > 0$ montre que $0 \notin \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$.
$z_0 \neq 0$ donc $\exists \theta_0 \in \arg(z_0) : z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$. Résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = z_0 \iff e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)} = |z_0|e^{i\theta_0}$$
$$\iff \begin{cases} e^{\mathrm{Re}(z)} = |z_0| \\ \text{et} \\ \mathrm{Im}(z) \equiv \theta_0[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \ln|z_0| \\ \text{et} \\ \mathrm{Im}(z) \equiv \theta_0[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff z \in \{\ln|z_0| + i\theta_0 + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

□

3 Montrer l'unicité de l'élément neutre et du symétrique d'un élément sous des hypothèses sur la loi à préciser.

Démonstration. ◊ Unicité de l'élément neutre bilatère

Soient $(e_1, e_2) \in E^2$ fixés quelconques tels que $\begin{cases} \forall x \in E, x * e_1 = e_1 * x = x \\ \forall x \in E, x * e_2 = e_2 * x = x \end{cases}$ Particularisons la première relation pour $x \leftarrow e_2$:

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

En particularisant, de même la deuxième relation pour $x \leftarrow e_1$

$$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_2$$

D'où, par transitivité de l'égalité : $e_1 = e_2$

◊ Unicité du symétrique sous réserve d'existence (LCI associative d'unité e) Soit $a \in E$ symétrisable

$$\exists z \in E : a * z = z * a = e$$

Fixons un tel z pour la suite de la preuve

— L'ensemble $\{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ n'est pas vide puisqu'il contient z.

— Soit $b \in \{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ fixé quelconque. Alors

$$\begin{aligned} a * b = e &\implies z * (a * b) = z * e \\ &\implies \underbrace{z * a}_{e} * b = z * e \text{ par associativité} \\ &\implies b = z \end{aligned}$$

Donc l'ensemble $\{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ contient au plus un élément neutre, qui est z.

□

4 Preuve de la caractérisation d'un sous-groupe, application au fait que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Soit $(G, *)$ un groupe, et H une partie de G

$$H \text{ est un sous groupe de } G \iff \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H \end{cases}$$

Démonstration. ⋆ Supposons que H est un sous groupe de G Par définition d'un sous groupe, $H \neq \emptyset$.

Soient $(x, y) \in H^2$ fixés quelconques H est un sous groupe, donc y est symétrisable dans H : $y^{-1} \in H$ De plus, c'est un groupe, donc stable pour la loi $*$, donc $x * y^{-1} \in H$

⋆ Supposons que $\begin{cases} H \neq \emptyset & (1) \\ \forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H & (2) \end{cases}$

◊ H est non vide par hypothèse

◊ Puisque $H \neq \emptyset$, $\exists x \in H$ Ainsi, $x * x^{-1} \in H$ donc $e \in H$

◊ Soient $(x, y) \in H^2$ fixés quelconques. $y \in H$ permet d'appliquer (2) pour $x \leftarrow y$ et $y \leftarrow e$:

$$e * y^{-1} \in H$$

Donc $y^{-1} \in H$. Tout élément est symétrisable dans H

◊ Soient $(x, y) \in H^2$ fixés quelconques. On a montré que y est symétrisable dans H, donc en appliquant (2) pour $x \leftarrow x$ et $y \leftarrow y^{-1}$:

$$x * (y^{-1})^{-1} \in H \implies x * y \in H$$

Donc H est stable pour la loi H.

Donc H est un sous groupe de G.

□

Application aux racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque

⋆ $\forall z \in \mathbb{U}_n, z^n = 1$ donc $1 = |z^n| = |z|^n$. Or $|z| \geqslant 0$ donc $|z| = 1$, si bien que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

⋆ $\mathbb{U}_n \neq \emptyset$ car $1 \in \mathbb{U}_n$

⋆ Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n$ fixés quelconques. Calculons

$$(z_1 z_2^{-1})^n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc $z_1 z_2^{-1} \in \mathbb{U}_n$. On a donc montré que $(\mathbb{U}_{n,\times})$ est un sous groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

5 Si φ est un morphisme de groupes de G_1 de neutre e_1 dans G_2 de neutre e_2, calculer $\varphi(e_1)$ et $\varphi(x^{-1})$

Démonstration. ⋆ Soit f un morphisme de groupe de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$

D'une part $f(e_1 *_1 e_1) = f(e_1)$ D'autre part, par propriété de morphisme, $f(e_1 *_1 e_1) = f(e_1) *_2 f(e_1)$ Donc

$$f(e_1) *_2 f(e_1) = f(e_1)$$

Si l'on compose à gauche par $f(e_1)^{-1}$

$$\begin{aligned} f(e_1)^{-1} *_2 f(e_1) *_2 f(e_1) &= f(e_1)^{-1} *_2 f(e_1) \\ \implies f(e_1) &= e_2 \end{aligned}$$

⋆ Soit $x \in G_1$ fixé quelconque

$$f(x) *_2 f(x^{-1}) = f(x *_1 x^{-1}) = f(e_1) = e_2$$

Composons les deux membres à gauche par $f(x)^{-1}$

$$f(x)^{-1} *_2 f(x) *_2 f(x^{-1}) = f(x)^{-1} *_2 *e_2$$

Donc

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

□

6 Montrer que l'image d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe du groupe d'arrivée

Démonstration. Soit f un morphisme de groupe de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$. Notons e_1 et e_2 les neutres respectifs de G_1 et G_2.

Soit H_1 un sous groupe de G_1 fixé quelconque

- ⋆ $f(H_1)$ est par définition une partie de G_2
- ⋆ $f(H_1) \neq \emptyset$ car H_1 est un groupe, qui contient e_1 $f(e_1) = e_2$ donc $e_2 \in f(H_1)$
- ⋆ Soient $(g_2, h_2) \in f(H_1)^2$ fixés quelconques alors $\exists (g_1, h_1) \in H_1 : f(g_1) = g_2, f(h_1) = h_2$ donc

$$g_2 *_2 h_2^{-1} = f(g_1) *_2 f(h_1^{-1}) = f(\underbrace{g_1 *_1 h_1^{-1}}_{\in H_1 \text{ car sous groupe de } G_1})$$

Donc $g_2 *_2 h_2^{-1} \in f(H_1)$ Donc $f(H_1)$ est un sous groupe de G_2

□

7 Montrer que l'image réciproque par un morphisme de groupes d'un sous-groupe est toujours un sous-groupe du groupe de départ,

Démonstration. Soit f un morphisme de groupe de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$. Notons e_1 et e_2 les neutres respectifs de G_1 et G_2.

Soit H_2 un sous groupe de G_2 fixé quelconque

- ⋆ $f^{-1}(H_2)$ est par définition une partie de G_1
- ⋆ $f(H_2) \neq \emptyset$ car H_2 est un groupe, qui contient e_2 $f(e_1) = e_2$ donc $e_1 \in f^{-1}(H_2)$
- ⋆ Soient $(g_1, h_1) \in f^{-1}(H_2)^2$ fixés quelconques alors $f(g_1) \in H_2$ et $f(h_1) \in H_2$ donc

$$f(g_1 *_1 h_1^{-1}) = \underbrace{f(g_1)}_{\in H_2} *_2 \underbrace{f(h_1)^{-1}}_{\in H_2} \in H_2 \text{ car c'est un sous groupe}$$

Donc $f(g_1 *_1 h_1^{-1}) \in H_2$ donc $g_1 *_1 h_1^{-1} \in f^{-1}(H_2)$

Donc $f^{-1}(H_2)$ est un sous groupe de G_1 $\square$

Application 1 : Le noyau d'un morphisme est un sous-groupe
Le noyau, noté $\ker f$ est par définition égal à $f^{-1}(\{e_2\})$ c'est donc un sous groupe de G_1

Application 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \left| \begin{array}{ll} (\mathbb{C}^*, \times) & \to (\mathbb{C}^*, \times) \\ z & \mapsto z^n \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes. Son noyau, $\ker \phi_n = \{z \in \mathbb{C}^* | z^n = 1\} = \mathbb{U}_n$. D'après l'application 1, $\ker \phi_n$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Donc $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.