

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 1

George Ober

17 avril 2024

## 1 Preuve formelle de la somme des entiers et des termes d'une suite géométrique

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^n k$$

En posant la symétrie d'indice  $i = n - k$ , on a aussi

$$S_n = \sum_{i=0}^n (n - i) = (n \times \text{card}[[0, n]]) - \sum_{i=0}^n i$$

Or, puisque  $\text{card}[[0, n]] = n + 1$  et que  $\sum_{i=0}^n i = S_n$

$$S_n = n \times (n + 1) + S_n$$

Donc

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soient  $q \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  fixés quelconques. Si  $q = 1$ ,

$$\sum_{i=0}^k q^i = \sum_{i=0}^k 1 = k + 1$$

Avec l'identité algébrique, on a

$$q^{k+1} - 1^{k+1} = (q - 1) \sum_{i=0}^k q^i \times 1^{k-i}$$

Ainsi, si  $q \neq 1$  on a, par multiplication par  $(q - 1)^{-1}$

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

Nous avons donc établi que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \begin{cases} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ k + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

## 2 Preuve de la factorisation de $a^n - b^n$ puis de celle de $a^{2m+1} + b^{2m+1}$

*Démonstration.* Calculons

$$\begin{aligned}
(a-b) \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} &= a \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} - b \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k}
\end{aligned}$$

Si bien qu'en posant le changement d'indice  $j = k + 1$  on reconnait le télescopage.

$$\sum_{j=1}^m a^j b^{m-j} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} = a^m - b^m$$

□

### 3 Développement d'une somme

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j = 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j + \sum_{k=1}^n x_k^2$$

*Démonstration.*

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j = 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j + \sum_{k=1}^n x_k^2$$

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 &= \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \times \left( \sum_{j=1}^n x_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ x_k \times \sum_{j=1}^n x_j \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_k \times x_j \right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j
\end{aligned}$$

On peut aussi séparer cette somme

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_k x_j &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k=j}} x_k x_j + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j + \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k^2}_{\text{somme sur les indices } (k,j) \text{ tels que } k=j} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j
\end{aligned}$$

On remarque aussi qu'en permutant les indices des deux sommes (les variables sont muettes)

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n \\ j < k}} x_j x_k$$

Qui, par commutativité du produit dans  $\mathbb{C}$  nous donne cette égalité

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k > j}} x_k x_j$$

On a donc bien l'identité attendue :

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j = 2 \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ k < j}} x_k x_j + \sum_{k=1}^n x_k^2$$

□

## 4 Preuve de la formule du binôme de Newton

*Démonstration.*

□

## 5 Montrer que tout entier $n > 2$ admet un diviseur premier

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence forte avec la propriété  $\mathcal{P}(\cdot)$  définie pour tout  $n > 2$  par

$$\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, k \text{ admet un diviseur premier}$$

— Initialisation :  $n \leftarrow 2$

Soit  $k \in \llbracket 2, 2 \rrbracket$  fixé quelconque. Nécessairement,  $k = 2$ . or, 2 admet 2 pour diviseur premier.

Donc  $\forall k \in \llbracket 2, 2 \rrbracket, k$  admet un diviseur premier, ce qui prouve  $\mathcal{P}(2)$ .

— Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$  fixé quelconque tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

Pour montrer  $\mathcal{P}(n+1)$ , il nous faudra montrer que  $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, k$  admet un diviseur premier

Soit  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$  fixé quelconque.

— Si  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , alors la véracité de  $\mathcal{P}(n)$  nous permet de conclure, et de dire que  $k$  admet un diviseur premier.

— Sinon  $k = n+1$

— Si  $n+1$  est premier, alors il admet  $k$  comme diviseur premier

— Sinon,  $\exists d \in \llbracket 2, n \rrbracket : d \mid n+1$

Mais, puisque  $d \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , la véracité de  $\mathcal{P}(n)$  nous permet d'affirmer que  $d$  admet un diviseur premier  $p$ . Donc par transitivité de la relation de divisibilité

$$(p \mid d \text{ et } d \mid n) \implies p \mid n$$

□

## 6 Montrer par récurrence qu'une fonction polynomiale à coefficients réels est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls

*Démonstration.*

□

## 7 Montrer par analyse/synthèse qu'une fonction réelle d'une variable réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  fixée quelconque.

- Analyse : Supposons que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se décompose de manière unique en  $f = g + h$  avec  $g$  paire et  $h$  impaire (i.e.  $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$  et  $h(-x) = -h(x)$ ). Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé quelconque Calculons  $f(-x)$  :

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

Par demi somme, nous avons donc

$$\begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$$

Ainsi, si une telle décomposition existe, c'est

$$\begin{cases} g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

- Synthèse : Posons

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

Remarquons, d'une part que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Vérifions si les fonctions  $g$  et  $h$  vérifient les conditions de parité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \text{ ainsi } g \text{ est paire.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x) \text{ ainsi } h \text{ est impaire}$$

□

## 8 Illustration graphique de certaines identités trigonométriques

*Démonstration.*

□

## 9 Technique de résolution des équations trigonométriques du type $A \cos x + B \sin x = C$

*Démonstration.*

□

## 10 Étude complète de la fonction tangente, tracé du graphe et en déduire celui de cotangente.

*Démonstration.*

□

## 11 Expression $\sin \theta$ , $\cos \theta$ , $\tan \theta$ en fonction de $\tan \frac{\theta}{2}$

*Démonstration.*

□

## 12 Preuve des formules du type $\cos p + \cos q = \dots$

*Démonstration.*

□