Khôlles de Mathématiques - Semaine 25

George Ober

27 Avril 2024

1 S'il existe un inverse à droite (ou à gauche) pour une matrice carrée, alors celle ci est inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

— S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$

— S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : B \times A = I_n$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$

Démonstration. Supposons $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$. Notons $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ les endomorphismes canoniquement associés à A et à B.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}}(\hat{a} \circ \hat{b}) &= \text{mat}(\hat{a} \circ \hat{b}, \mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}) \\
&= \text{mat}(\hat{a}, \mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}) \times_{\mathcal{M}_\setminus(\mathbb{K})} \text{mat}(\hat{b}, \mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}) \\
&= A \times B \\
&= I_n \\
&= \text{mat}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}, \mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}) = \Phi_{\mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n})
\end{aligned}$$

D'où, par injectivité de $\Phi_{\mathcal{B}_{\text{can }\mathbb{K}^n}}$, $\hat{a} \circ \hat{b} = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$.

Ainsi, $\hat{a} \circ \hat{b}$ est surjective, donc $\hat{a}$ est surjective, mais par l'accident de la dimension finie, $\hat{a}$ est bijective, donc c'est un automorphisme, donc toutes ses matrices associées sont inversibles. On effectue un même raisonnement pour l'inversibilité à gauche, en utilisant cette fois l'injectivité. □