Khôlles de Mathématiques - Semaine 19

Hugo Vangilluwen, Ober George

03 Mars 2024

1 $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$, la matrice transposée est définit :

$$\forall (k,l) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ \left[A^T\right]_{kl} = A_{lk}$$

Formellement, la transposition est une application de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{K})$.
$(A \times B)^T \in \mathcal{M}_{(q,n)}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\left[(A \times B)^T\right]_{i,j} &= [A \times B]_{j,i} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{j,k} \times_{\mathbb{K}} B_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{p} B_{k,i} \times_{\mathbb{K}} A_{j,k} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left[B^T\right]_{i,k} \times_{\mathbb{K}} \left[A^T\right]_{k,j} \\
&= \left(B^T\right) \times \left(A^T\right)
\end{aligned}$$

$\square$

2 Calculer $E^{i,j} \times E^{k,l}$ en fonction de i, j, k, l et des symboles de Kronecker

Le symbole de Kronecker est définit de la manière suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \delta_{xy} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq y \\ 1 \text{ si } x = y \end{cases}$$

La matrice $E^{i,j} \in \mathcal{M}(n,p)(\mathbb{K})$ avec $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ ne possède que des coefficients nuls sauf le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. Formellement :

$$\forall (r,s) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ \left[E^{i,j}\right]_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js}$$

Démonstration. Calculons $E^{i,j}(n,p) \times E^{k,l}(p,q)$.
Soient $(r,s) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$ fq

$$\begin{aligned}
\left[E^{i,j} \times E^{k,l}\right]_{rs} &= \sum_{t=1}^{n} E^{i,j}_{r,t} E^{k,l}_{t,s} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \delta_{ir}\delta_{jt}\delta_{kt}\delta_{ls} \\
&= \delta_{jk}\delta_{ir}\delta_{ls} \\
&= \delta_{jk}\left[E^{i,l}\right]_{rs}
\end{aligned}$$

Donc $E^{i,j} \times E^{k,l} = \delta_{jk} E^{i,l}$.
Ainsi, pour le calcul de $(E^{i,j})^2$, $q \leftarrow n$, $k \leftarrow i$, $l \leftarrow j$.

$$(E^{i,j})^2 = \delta_{ji} E^{i,j} = \begin{cases} E^{i,j} \text{ si } i = j \\ 0_{n,p} \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

□

3 Les matrices triangulaires supérieurs forment un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Démonstration. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \subset (M)_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.
$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ car $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (I_n est le neutre multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
Soient $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$ fixés quelconques.
Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ fixés quelconquestels que$i > j$.

$$(A - B)_{i,j} = \underbrace{A_{i,j}}_{=0 \text{ car } A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} - \underbrace{B_{i,j}}_{=0 \text{ car } B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} = 0$$

Donc, $A - B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}(A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \times_{\mathbb{K}} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{j} \underbrace{A_{i,k}}_{=0 \text{ car } i > j \geqslant k \text{ et } A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \times_{\mathbb{K}} B_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{i,k} \times_{\mathbb{K}} \underbrace{B_{k,j}}_{=0 \text{ car } k > j \text{ et } B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc, $A \times B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. □