

Khôlles de Mathématiques - Semaine 16

Hugo Vangilluwen

8 Mai 2024

1 Unicité de la partie régulière d'un développement limité

Démonstration. Soit f une fonction admettant un $DL_n(x_0)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Supposons que f admette deux développements limités. C'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $b \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ f(x) &\underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

Posons $u = x - x_0$ et $\tilde{f}(u) = f(x_0 + u)$ de sorte que les hypothèses sur f se traduisent par l'existence d'un $DL_n(0)$ pour \tilde{f} :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k u^k + o(u^n) \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n b_k u^k + o(u^n)$$

Appliquons la définition d'un $DL_n(0)$. Il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 définies sur $\mathcal{D}_{\tilde{f}}$ tels que

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}, \quad \tilde{f}(u) &= \sum_{k=0}^n a_k u^k + u^n \varepsilon_1 \\ \forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}, \quad \tilde{f}(u) &= \sum_{k=0}^n b_k u^k + u^n \varepsilon_2 \\ \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_1(u) &= 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_2(u) = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}, \quad \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) u^k = u^n (\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u))$$

Par l'absurde, supposons que $\exists k_0 \in \llbracket 0; n \rrbracket : a_{k_0} \neq b_{k_0}$. Posons k_1 le plus petit entier dont les coefficients a et b sont différents :

$$k_1 = \min \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid a_k \neq b_k\}$$

Nous obtenons alors

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}, \quad \sum_{k=0}^{k_1-1} \underbrace{(a_k - b_k)}_{=0} u^k + (a_{k_1} - b_{k_1}) u^{k_1} + \sum_{k=k_1+1}^n (a_k - b_k) u^k = u^n (\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u))$$

Multiplions par u^{-k_1} puis calculons la limite en $u \rightarrow 0$. D'un côté, pour $k > k_1$, nous avons $k - k_1 \leq 1$ donc $(a_k - b_k) u^{k-k_1} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. De l'autre côté, u^{n-k_1} tend vers 0 ou 1 selon si $k_1 < n$ ou $k_1 = n$. Et, par hypothèse, $\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Par unicité de la limite, $a_{k_1} - b_{k_1} = 0$. Ce qui contredit la définition de k_1 .

Par conséquent $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = b_k$. Ainsi, la partie régulière d'un DL est unique. \square

6 Deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont le même signe sur un voisinage de a

Démonstration. Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ avec $a \in \mathcal{D}$.

Appliquons la définition de l'équivalence pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2}$, il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, |f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)|$$

Fixons un tel voisinage V . Nous obtenons :

$$\forall x \in V \cap \mathcal{D}, \underbrace{g(x) - \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{g(x) + \frac{1}{2}|g(x)|}_{\text{du signe de } g(x)}$$

Ainsi $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $V \cap \mathcal{D}$. □

7 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction \mathcal{C}^∞ admette un extremum local ou un point d'inflexion

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ et $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Supposons que $E_0 = \{p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid f^{(p)}(a) \neq 0\}$ est non vide. Posons $p_0 = \min E_0$.

f admet un extremum local en a si et seulement si $f'(a) = 0$ et p_0 est pair.

f admet un point d'inflexion en a si et seulement si p_0 est impair.

Démonstration. Soient de tels objets. Traitons le cas de l'extremum local. $f \in \mathcal{C}^\infty$ donc, la formule Taylor-Young donne un $DL_{p_0}(a)$ de f :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{p_0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{p_0})$$

En développant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \underbrace{f'(a)(x-a)}_{=0} + \dots + \underbrace{\frac{f^{(p_0-1)}(a)}{(p_0-1)!} (x-a)^{p_0-1}}_{=0 \text{ par définition de } p_0} + \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0} + o((x-a)^{p_0})$$

Ainsi (car $f^{(p_0)}(a) \neq 0$)

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0} \quad (1)$$

Au voisinage de a , $f(x) - f(a)$ et $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0}$ ont le même signe.

Supposons que f admette un extremum local en a . Or $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ et f est dérivable en 0, donc $f'(a) = 0$. Comme f admette un extremum local en a , $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a . Donc $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de a . Par conséquent, p_0 est pair.

Réciproquement, supposons que $f'(a) = 0$ et que p_0 est pair. $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0}$ est de signe constant au voisinage de a . Donc $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a . Ainsi, a est un extremum local de f .

Traitons le cas du point d'inflexion. La formule de Taylor-Young donne :

$$f(x) - \underbrace{(f(a) + (x-a)f'(a))}_{\text{tangente en } (a, f(a))} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0} \quad (2)$$

Le signe de l'écart courbe/tangente en a est donc celui de $\frac{f^{(p_0)}(a)}{p_0!} (x-a)^{p_0}$. Ce qui conclut de la même manière que l'extremum local. □