Khôlles de Mathématiques - Semaine 20

Hugo Vangilluwen, George Ober

10 Mars 2024

1 Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[X]^{\times} = \left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\} \tag{1}$$

Démonstration. Soit P un élément inversible de $\mathbb{K}[X]$. Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P \cdot Q = Q \cdot P = 1_{\mathbb{K}[X]}$.
En prenant les degrés des polynômes, deg $P \times$ deg $Q = 0$.
Si deg $P = 0$ alors $P \neq O_{\mathbb{K}[X]}$ (sinon $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]}$). Donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : P = \lambda$.
Si deg $P \neq 0$. Or deg $: \mathbb{K}[X] \to \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est intègre donc deg $Q = 0$. D'où $\exists \mu \in \mathbb{K} : Q = \mu (= \mu X^0)$. Par définition de $\mathbb{K}[X]$, $\exists p \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}} : P = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k X^k$. Or $P \cdot Q = X^0$ donc $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu p_k X^k = X^0$.
Par unicité des coefficients, $\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = 0$ et $p_0 = \mu^{-1} \in \mathbb{K}^*$. Donc, en posant $\lambda = \mu^{-1}$, $P = \lambda$.
Ainsi $\mathbb{K}[X]^{\times} \subset \left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Considérons $P = \lambda$. Posons $Q = \lambda^{-1}$ (car $\mathbb{K}$ est un corps). $P \cdot Q = \lambda\lambda^{-1}$ et $Q \cdot P = \lambda^{-1}\lambda$ donc P est inversible. Ainsi $\left\{\lambda X^0, \lambda \in \mathbb{K}^*\right\} \subset \mathbb{K}[X]^{\times}$. □

2 Théorème d'interpolation de lagrange

Il existe une unique solution P de degré $\leqslant n$ au problème d'interpolation de lagrange, et elle s'exprime de la manière suivante en posant

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$$

Démonstration.
- Unicité
  Supposons qu'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ solutions du problème d'interpolation.
  Alors $\forall i \in [\![0, n]\!], \tilde{P}(a_i) = \tilde{Q}(a_i) = b_i$
  Posons $H = P - Q$, alors, $\forall i \in [\![0, n]\!], \tilde{H}(a_i) = \tilde{P}(a_i) - \tilde{Q}(a_i) = 0$.
  De plus, $\deg H = \deg(P - Q) \leqslant \max\{\deg P, \deg Q\}$
  Donc H est un polynôme de degré $\leqslant n$ avec $|[\![0, n]\!]| = n + 1$ racines.
  Donc H est le polynôme nul.
- Existence Soit $i \in [\![0, n]\!]$ fq Notons L_i une solution de degré $\leqslant n$ au problème Pb_i suivant :

$$\begin{cases} \tilde{P}(a_0) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}(a_{i-1}) = 0 \\ \tilde{P}(a_i) = 1 \\ \tilde{P}(a_n) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}(a_n) = 0 \end{cases}$$

On remarque que $(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ sont n racines deux à deux distinctes de L_i. Or L_i est de degré $\leqslant n$ et n'est pas le polynôme nul (car $\tilde{L_i}(a_i) = 0$) donc $(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ sont les *seules* racines de L_i, toutes simples.
Dès lors,

$$\exists c \in \mathbb{K}^* : L_i = c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j)$$

Pour trouver le c, remarquons que

$$\begin{aligned} \tilde{L_i}(a_i) = 1 &\iff c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j) = 1 \\ &\iff c = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{1}{a_i - a_j} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, s'il existe une solution au problème Pb_i c'est nécéssairement

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$$

Réciproquement, cette solution est correcte puisque

$$\forall k \in [\![0, n]\!], k \neq i, \tilde{L_i}(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{\overbrace{a_k - a_j}^{=0}}{a_i - a_j} \right) = 0$$

Et

$$\tilde{L_i}(a_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} \right) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} 1 = 1$$

Posons donc $P = \sum_{i=0}^{n} b_i Li$.
Alors, par construction,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \tilde{P}(a_k) = \sum_{i=0}^{n} \left(b_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} \right) \right) = \sum_{i=0}^{n} (b_i \delta_{ki}) = b_k \delta_{kk} = b_k$$

Nous avons donc construit une solution unique au problème d'interpolation de Lagrange

□

3 Pour $P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, exprimer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires

Les fonctions symétriques élémentaires $(\sigma_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ pour une famille $(x_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ sont définies par

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j} \tag{2}$$

Démonstration. Sous forme développée, $P = X^3 - (x1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3 = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$. Comme x_1, x_2, x_3 sont racines de P, nous avons les trois égalité suivantes :

$$\begin{aligned} 0 = P(x_1) = x_1^3 - \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_1 - \sigma_3 \\ 0 = P(x_1) = x_2^3 - \sigma_1 x_2^2 + \sigma_2 x_2 - \sigma_3 \\ 0 = P(x_1) = x_3^3 - \sigma_1 x_3^2 + \sigma_2 x_3 - \sigma_3 \end{aligned}$$

En sommant ces trois équation,

$$0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \sigma_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sigma_2(x_1 + x_2 + x_3) - 3\sigma_3$$

Cherchons la somme des carrés.

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
\implies\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

□

4 Expression de S_2, S_{-1} et S_{-2} à l'aide des fonctions élémentaires symétriques.

Les sommes de Newton $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ pour une famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont définies par (sous réserve d'existence pour $k < 0$) :

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \tag{3}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{S_2} + 2 \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j}_{\sigma_2} \\
\implies S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2
\end{aligned}$$

$$S_{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$$

$$\begin{aligned}
S_{-2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{x_i}\frac{1}{x_j} \\
&= \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n} - 2\frac{\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\notin\{i,j\}}} \frac{1}{x_j}}{\sigma_n} \\
&= \frac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-2}\sigma_n}{\sigma_n^2}
\end{aligned}$$

□