

Khôlles de Mathématiques - Semaine 3

George Ober

29 septembre 2024

1 Preuve de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité montrant que le module est 1-lipschitzien + dessin et interprétation géométrique

Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$(i) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$(ii) \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

Démonstration. Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques.

◇ Si $z_2 = 0$ l'inégalité est évidente.

$$\text{Sinon, } z_2 \neq 0 \text{ alors } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \iff \left| 1 + \frac{z_1}{z_2} \right| \leq 1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|.$$

Posons $u = \frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} |1 + u|^2 - (1 + |u|)^2 &= (1 + u)(\overline{1 + u}) - (1 + 2|u| + |u|^2) \\ &= (1 + u)(1 + \bar{u}) - 1 - 2|u| - |u|^2 \\ &= u + \bar{u} - 2|u| \\ &= 2(\operatorname{Re}(u) - |u|) \leq 0 \end{aligned}$$

◇ Appliquons l'inégalité triangulaire

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \implies |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

Puisque z_1 et z_2 jouent de rôles symétriques on a aussi

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

Donc

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

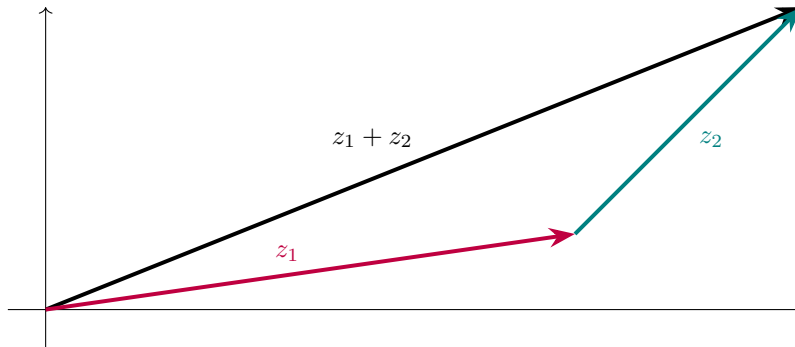


FIGURE 1 – Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire.

□

2 Caractérisation du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans \mathbb{C}

Démonstration.

★ (\implies) Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire

◇ Si $z_2 = 0$ alors z_1 et z_2 sont positivement liés

◇ Sinon, $|1 + u|^2 - (1 + |u|)^2 = 0$ donc $\operatorname{Re}(u) - |u| = 0$.

Donc $u \in \mathbb{R}_+$, et comme $z_1 = uz_2$, alors z_1 et z_2 sont positivement liés.

★ (\impliedby) Supposons que z_1 et z_2 sont positivement liés. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$.
Si $z_1 = \lambda z_2$,

$$|z_1 + z_2| = |(\lambda + 1)z_2| = |\lambda + 1||z_2| = (\lambda + 1)|z_2| = \lambda|z_2| + |z_2| = |\lambda z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$$

Donc l'inégalité est une égalité.

Si $z_2 = \lambda z_1$, en échangeant les rôles joués par z_1 et z_2 on obtient que l'inégalité est une égalité. □

3 Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque, $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} C_n(\theta) &= \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k \right) \text{ par les formules de moivre} \end{aligned}$$

Ainsi, si $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0[2\pi]$,

$$C_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (1)^k \right) = \operatorname{Re}(n+1) = n+1$$

Sinon,

$$C_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \right)$$

Simplifions donc ce quotient.

$$\begin{aligned} \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} &= \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta(n+1)}{2}} - e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right)} \\ &= e^{i\frac{\theta n}{2}} \left(\frac{-2i \sin \left(\frac{\theta(n+1)}{2} \right)}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} \right) \\ &= \frac{\sin \left(\frac{\theta(n+1)}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\cos \frac{\theta n}{2} + i \sin \frac{\theta n}{2} \right) \quad (\clubsuit) \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle de ce résultat, on a

$$C_n(\theta) = \operatorname{Re} \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta(n+1)}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\cos \frac{\theta n}{2} + i \sin \frac{\theta n}{2} \right) \right] = \frac{\sin \left(\frac{\theta(n+1)}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n\theta}{2}$$

Donc

$$C_n(\theta) = \begin{cases} n+1 & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos \frac{n\theta}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Remarque En prenant la partie imaginaire de (♣), on peut retrouver la somme $S_n(\theta)$:

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin \frac{n\theta}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

4 Si z_0 est racine de la fonction polynômiale P , alors P se factorise par $(z - z_0)$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ Posons pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$

(i) Si $P(z_0) = 0$, alors $\exists Q \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_0)Q(z)$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque,

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(z_0) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=0}^n a_k z_0^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (z^k - z_0^k) && \text{nul pour } k=0 \\ &= \sum_{k=1}^n \left(a_k (z - z_0) \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \right) \\ &= (z - z_0) \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \end{aligned}$$

Donc en posant $Q(z) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} \right) \in \mathbb{C}[z]$, on a montré que P se factorise.

□

5 Si z_1, \dots, z_n sont n racines distinctes de la fonction polynômiale P de degré n , alors $P(z)$ se factorise en ...

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^*$ fixés quelconques. Posons, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \tag{1}$$

Supposons que $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ sont n racines deux à deux distinctes de la fonction polynômiale P . Alors, il existe $Q \in \mathbb{C}[z]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = Q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

On note d le degré de Q et $(b_0, b_d) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^*$ ses coefficients. On a alors

$$Q(z) = \sum_{k=0}^d b_k z^k$$

Ainsi, $P(z)$ s'écrit

$$P(z) = \sum_{k=0}^d b_d z^d \prod_{i=1}^n (z - z_i) = b_d z^{n+d} + \text{termes de degré inférieur à } n+d. \quad (2)$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale, $n+d = n$ (sinon, z^{n+d} aurait un coefficient b_d non nul à droite mais un coefficient nul à gauche).

Donc $d = 0$ d'où Q est une fonction constante de valeur $b_d = b_0$, et en identifiant les termes en z^n de (1) et (2), on obtient $a_n = b_0$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

□

6 Calculer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$ en fonction de $\theta \in [0, 2\pi[$

Démonstration. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i \times 0} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Cette dernière notation est une notation exponentielle seulement si $2 \cos \frac{\theta}{2} \geq 0$.

★ Si $\theta \in [0, \pi[$,

$$\begin{cases} |z| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{\theta}{2} \in \text{Arg}(z) \end{cases}$$

★ Si $\theta = \pi$, $z = 0$ donc $|z| = 0$

★ Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$,

$$\begin{aligned} z &= 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} = -2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} |z| = -2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \\ \frac{\theta}{2} + \pi \in \text{Arg}(z) \end{cases}$$

□

7 Résolution des équations algébriques de degré 2 dans \mathbb{C} et algorithme de recherche d'une racine carrée sous forme cartésienne (sur un exemple explicite).

Démonstration.

□

8 Décrire (avec preuve) l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité et les localiser géométriquement dans le plan complexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Démonstration. — Description de l'ensemble \mathbb{U}_n

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} z^n = 1 \\ z \in \mathbb{C} \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} z^n = 1 \\ z \in \mathbb{C}^* \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} z^n = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho^n e^{in\theta} = 1 \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho^n = 1 \\ n\theta \equiv 0[2\pi] \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \text{ car } \rho > 0 \\ \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n} \right] \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \frac{2k\pi}{n} \\ z = \rho e^{i\theta} \\ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff z \in \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est paramétré par l'entier k qui parcourt un ensemble infini. Toutefois, en représentant graphiquement les solutions, il semblerait que "tous les n ", on fait un tour de cercle trigonométrique de plus, en redécrivant les solutions déjà obtenues pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

— Localisation géométrique

- ★ \mathbb{U}_3 est l'ensemble des sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité, et dont 1 est l'un des sommets
- ★ \mathbb{U}_4 est l'ensemble des sommets du carré inscrit dans le cercle unité et dont 1 est l'un des sommets. Le côté du carré vaut $|1 - i| = \sqrt{2}$.
- ★ \mathbb{U}_5 est l'ensemble des sommets du pentagone régulier inscrit dans le cercle unité et dont 1 est l'un des sommets.

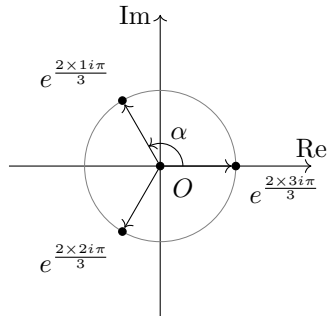


FIGURE 2 – Racines cubiques de l'unité.

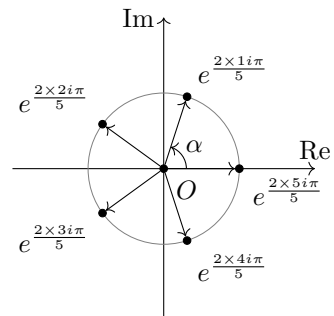


FIGURE 3 – Racines 5èmes de l'unité.

□

9 Somme et Produit des racines n -ièmes

Démonstration.

◇ **Méthode 1** : En utilisant les relations coefficients racines.

\mathbb{U}_n sont les n racines distinctes de $z^n - 1$

$$S_n = -\frac{1}{\text{coefficient dominant}} \times (\text{coefficient de } z^{n-1} \text{ dans } z^n - 1) = \begin{cases} -0 & \text{si } n \geq 2 \\ -(-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_n = (-1)^n \frac{\text{coefficient constant}}{\text{coefficient dominant}} = (-1)^n \times \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1}$$

◇ **Méthode 2** : Manipulation des symboles sommatoires

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_0^k \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 \times \frac{1-\omega_0^n}{1-\omega_0} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Puisqu'on ne peut appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique seulement si $\omega_0 = 1 \iff e^{\frac{2i\pi}{n}} = 1 \iff \frac{2\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \iff n = 1$

De même

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_0^k = \omega_0^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega_0^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \begin{cases} (\omega_0^n)^{\frac{n-1}{2}} = 1^{\frac{n-1}{2}} = 1 & \text{si } n \equiv 1[2] \\ e^{\frac{2i\pi n(n-1)}{2n}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1} & \end{cases} \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

□

10 *[non demandée]* Factorisation d'une fonction polynomiale connaissant p racines.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

Posons pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$.

(i) Si $\exists p \in \mathbb{N}^* : \exists (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ deux à deux distincts tels que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(z_k) = 0$ alors, $\exists Q \in \mathbb{C}[x] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q(z) \times \prod_{k=1}^p (z - z_k)$.

Démonstration. Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p) : \forall P \in \mathbb{C}[z], (\exists (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p, 2 \text{ à } 2 \text{ distincts} : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(z_i) = 0) \\ \implies \exists Q \in \mathbb{C}[z] : P(z) = Q(z) \prod_{i=1}^p (z - z_i) \end{aligned}$$

◇ $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la preuve précédente.

◇ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(p)$ est vraie.

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ fixés quelconques tels que $\exists (z_1, \dots, z_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}$ deux à deux distincts tels que $\forall i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket, P(z_i) = 0$.

Appliquons $\mathcal{P}(p)$ à $P \in \mathbb{C}[z]$ dont (z_1, \dots, z_p) sont les p racines deux à deux distinctes.

$$\exists Q_1 \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q_1(z) \prod_{i=1}^p (z - z_i)$$

Évaluons cette expression en z_{p+1}

$$\underbrace{P(z_{p+1})}_{=0} = Q_1(z_{p+1}) \prod_{i=1}^p \underbrace{(z_{p+1} - z_i)}_{\neq 0 \text{ car distincts}}$$

Donc $Q_1(z_{p+1}) = 0$, ce qui permet d'appliquer (i) pour $P \leftarrow Q_1$, $z_0 \leftarrow z_{p+1}$.

$$\exists Q \in \mathbb{C}[z] : \forall z \in \mathbb{C}, Q_1(z) = (z - z_{p+1})Q(z)$$

Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_{p+1})Q(z) \prod_{i=1}^p (z - z_i) = Q(z) \prod_{i=1}^{p+1} (z - z_i)$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

□