

Programme de Khôlle Semaine 7

Kylian Boyet, George Ober

10 Novembre 2023

Aucune démo de ce document n'apparaît au programme de Khôlle T_T

1 Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe

Démonstration. Définissons les fonctions f_r etc. comme les parties réelles et imaginaires de f
Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned} f_r &= \operatorname{Re}(f), f_i = \operatorname{Im}(f) & g_r &= \operatorname{Re}(g), g_i = \operatorname{Im}(g) \\ \alpha_r &= \operatorname{Re}(\alpha), \alpha_i = \operatorname{Im}(\alpha) & \beta_r &= \operatorname{Re}(\beta), \beta_i = \operatorname{Im}(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) &= \operatorname{Re}((\alpha_r + i\alpha_i)(f_r + if_i) + (\beta_r + i\beta_i)(g_r + ig_i)) \\ &= \underbrace{\alpha_r f_r + \beta_r g_r - \alpha_i f_i - \beta_i g_i}_{\text{Combinaison linéaire de } \underbrace{(f_r, f_i, g_r, g_i) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^4}_{\operatorname{car}(f, g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^2}} \end{aligned}$$

Donc, selon le théorème de stabilité par combinaison linéaire des fonctions à valeurs réelles, $\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$
et $(\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g))' = \alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i'$

On montre de même que $\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha_r f_i' + \alpha_i f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r'$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)' &= (\alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i') + i(\alpha_r f_i' + \alpha_i f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r') \\ &= \alpha_r (f_r' + if_i') + \beta_r (g_r' + ig_i') + \alpha_i \underbrace{(-f_i' + if_r')}_{i(f_r' + if_i')} + \beta_i \underbrace{(-g_i' + ig_r')}_{i(g_r' + ig_i')} \\ &= \alpha f' + \beta g' \end{aligned}$$

□

2 Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C})$ et $h \in \mathcal{D}^1(I, J)$ (I et J sont deux intervalles réels) fixés quelconques. Notons f_r et f_i respectivement la partie réelle et imaginaire de f .

$$\left. \begin{aligned} h &\in \mathcal{D}^1(I, J) \\ f_r &\in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R}), \text{ car } f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C}) \end{aligned} \right\} \implies f_r \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$$

On montre de même que $f_i \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ donc $f \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$.

De plus,

$$\begin{aligned} (f \circ h)' &= (f_r \circ h)' + i(f_i \circ h)' \\ &= (f_r' \circ h) \times h' + i((f_i' \circ h) \times h') \\ &= (f_r' \circ h + if_i' \circ h) \times h' = (f' \circ h) \times h' \end{aligned}$$

□

3 Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ où I est un intervalle réel ; Posons $f_r = \operatorname{Re}(f)$ et $f_i = \operatorname{Im}(f)$.

$$\begin{aligned} \forall t \in I, f'(t) = 0 &\iff \forall t \in I, f'_r(t) + i f'_i(t) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I, f'_r(t) = 0 \\ \forall t \in I, f'_i(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \lambda_r \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_r(t) = \lambda_r \\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_i(t) = \lambda_i \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in I, f(t) = \lambda \end{aligned}$$

□