

Khôlles de Mathématiques - Semaine 15

Hugo Vangilluwen

20 Janvier 2024

1 Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur I .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x \in I^n$, $\lambda \in [0; 1]^n$ telle que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I \wedge f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \quad (1)$$

Démonstration. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}\forall x \in I^n, \forall \lambda \in [0; 1]^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \implies \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I \wedge f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)\text{”}$$

* Soient $x \in I^1$ et $\lambda \in [0; 1]^1$ tel que $\sum_{k=1}^1 \lambda_k = 1$.

Alors $\lambda_1 = 1$. Trivialement, $\sum_{k=1}^1 \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 = x_1 \in I$.

De plus, $f\left(\sum_{k=1}^1 \lambda_k x_k\right) = f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1) = \sum_{k=1}^1 \lambda_k f(x_k)$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ vrai.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vrai.

Soient $x \in I^{n+1}$ et $\lambda \in [0; 1]^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. $\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$ est une partie de \mathbb{N} non vide ($n \geq 1$). Posons $a = \min\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$ et $b = \max\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$. D'où

$$\underbrace{a}_{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a \underbrace{\leq}_{a \leq x_k} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \underbrace{\leq}_{x_k \leq b} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k b \underbrace{=}_b b$$

Or $\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\} \subset I$ (car $x \in I^n$) donc $a \in I \wedge b \in I$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \in [a; b] \underbrace{\subset}_{\substack{\text{par convexité} \\ \text{de l'intervalle } I}} I$$

$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ donc $\exists i_0 \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket : \lambda_{i_0} \neq 1$ (sinon $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = n+1 \neq 1$ car $n \neq 0$).

Fixons un tel i_0 .

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k x_k + \lambda_{i_0} x_{i_0}\right) \\
&= f\left(\lambda_{i_0} x_{i_0} + (1 - \lambda_{i_0}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} x_k\right) \\
&\stackrel{\text{Par convexité de } f}{\leq} \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + (1 - \lambda_{i_0}) f\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} x_k\right)
\end{aligned}$$

Or $\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \lambda_i \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k = 1 - \lambda_{i_0}$ Donc $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{i_0}} \in [0; 1]$ et $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} = 1$. Nous pouvons appliquer $\mathcal{P}(n)$ pour $\lambda_i \rightarrow \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{i_0}}$:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leq \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + (1 - \lambda_{i_0}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} f(x_k) \\
&\leq \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k f(x_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai. □

2 Inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^{*n}$.

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (2)$$

Démonstration. Soit de tels objets. Posons $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = 1/n$.

Sachant que l'exponentielle est convexe, appliquons l'inégalité de Jensen pour $x_k \leftarrow \ln(x_k)$ (autorisé car $x_k \in \mathbb{R}_+^*$) :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_k)\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \exp(\ln(x_k))$$

L'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme népérien et est un morphisme additif. Nous obtenons ainsi l'inégalité recherchée. □