Khôlles de Mathématiques - Semaine 4

George Ober

17 avril 2024

1 Résolution des équations algébriques de degré 2 dans $\mathbb{C}$ et algorithme de recherche d'une racine carrée sous forme cartésienne (sur un exemple explicite).

Considérons l'équation algébrique de degré 2 :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Où $z \in L$ est l'inconnue et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ sont des paramètres. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ que l'on appelle le discriminant de l'équation.

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution dite double qui est $-\frac{b}{2a}$ et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$$

— Si $\Delta \neq 0$, notons δ une racine carrée de Δ, l'équation admet deux solutions distinctes $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$ dites simples et la forme factorisée du trinôme est

$$az^2 + bz + c = a(z - \frac{-b-\delta}{2a})(z - \frac{-b+\delta}{2a})$$

Démonstration. La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

La preuve est immédiate à partir de la forme canonique du trinôme du second degré :

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = a\left[\underbrace{z^2 + \frac{b}{a}z}_{\text{But : Absorber ces termes dans un carré}} + \frac{c}{a}\right] &= a\left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

— Si $\Delta = 0$

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b}{2a}\right)^2$$

de sorte que

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a\left(z - \frac{-b}{2a}\right)^2 = 0 \iff z = -\frac{b}{2a}$$

— Sinon

$$
\begin{aligned}
az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] &= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\\
&= a\left(z-\frac{-z+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-z-\delta}{2a}\right)
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\iff a\left(z-\frac{-z+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-z-\delta}{2a}\right)=0\\
&\iff \begin{cases} z-\frac{-z-\delta}{2a}=0\\ \text{ou}\\ z-\frac{-z+\delta}{2a}=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} z=\frac{-z-\delta}{2a}\\ \text{ou}\\ z=\frac{-z+\delta}{2a}\end{cases}
\end{aligned}
$$

□

2 Résolution de $e^z = z_0$ où $z_0 \in \mathbb{C}^*$

L'exponentielle complexe a pour image $\mathbb{C}^*$ et, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$,

$$\exp_{\mathbb{C}}^{-1}(\{z_0\}) = \{\ln|z_0| + i\theta_0 + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

où $\theta_0 \in \arg(z_0)$

Démonstration. La propriété, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = |e^{\mathrm{Re}(z)}| > 0$ montre que $0 \notin \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$.

$z_0 \neq 0$ donc $\exists\theta_0 \in \arg(z_0) : z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$. Résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
\exp_{\mathbb{C}}(z) = z_0 &\iff e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)} = |z_0|e^{i\theta_0}\\
&\iff \begin{cases} e^{\mathrm{Re}(z)} = |z_0|\\ \text{et}\\ \mathrm{Im}(z) \equiv \theta_0[2\pi]\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \ln|z_0|\\ \text{et}\\ \mathrm{Im}(z) \equiv \theta_0[2\pi]\end{cases}\\
&\iff z \in \{\ln|z_0| + i\theta_0 + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

□

3 Montrer l'unicité de l'élément neutre et du symétrique d'un élément sous des hypothèses sur la loi à préciser.

Démonstration. ◊ Unicité de l'élément neutre bilatère

Soient $(e_1, e_2) \in E^2$ fixés quelconques tels que $\begin{cases} \forall x \in E, x * e_1 = e_1 * x = x\\ \forall x \in E, x * e_2 = e_2 * x = x\end{cases}$ Particularisons la première relation pour $x \leftarrow e_2$:

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

En particularisant, de même la deuxième relation pour $x \leftarrow e_1$

$$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_2$$

D'où, par transitivité de l'égalité : $e_1 = e_2$

◊ Unicité du symétrique sous réserve d'existence (LCI associative d'unité e) Soit $a \in E$ symétrisable

$$\exists z \in E : a * z = z * a = e$$

Fixons un tel z pour la suite de la preuve

— L'ensemble $\{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ n'est pas vide puisqu'il contient z.
— Soit $b \in \{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ fixé quelconque. Alors

$$\begin{aligned} a * b = e &\implies z * (a * b) = z * e \\ &\implies \underbrace{z * a}_{e} * b = z * e \text{ par associativité} \\ &\implies b = z \end{aligned}$$

Donc l'ensemble $\{y \in E \mid a * y = y * a = e\}$ contient au plus un élément neutre, qui est z.

□