Khôlles de Mathématiques - Semaine 9

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen

29 novembre 2023

1 Dans un ensemble totalement ordonné, toute partie finie non vide possède un plus grand élément et un plus petit élément.

Démonstration. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné, considérons pour tour $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété.

$$\mathcal{H}_n : \text{toute partie de } E \text{ de cardinal } n \text{ admet un plus petit et un plus grand élément}$$

- ⋆ Initialisation $n \leftarrow 1$
  Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ fixée telle que $|A| = 1$ A est non vide, donc $\exists a \in A : A = \{a\}$
  a est le plus petit et le plus grand élément, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- ⋆ Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ fixée quelconque tel que $|A| = n + 1$

$$A \neq \emptyset \implies \exists a \in A : A = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\}$$

Or, $|A \setminus \{a\}| = n$ donc $\mathcal{H}_n$ s'applique et $A \setminus \{a\}$ possède un plus grand et plus petit élément

$$\begin{cases} m & = \min A \setminus \{a\} \\ M & = \max A \setminus \{a\} \end{cases}$$

◊ Construisons le plus grand élément de A

- Supposons $M \preccurlyeq a$ D'une part $a \in A$ D'autre part

$$\forall x \in A, \quad \left.\begin{array}{l} \text{si } x = a, x \preccurlyeq a \text{ (réflexivité)} \\ \text{sinon } x \in A \setminus \{a\} \implies x \preccurlyeq M \preccurlyeq a \implies x \preccurlyeq a \end{array}\right\} \implies \forall x \in A, x \preccurlyeq a$$

Donc A admet un plus grand élément, et c'est a.

- Sinon, si $M \succ a$, mais $M \in A$ et

$$\forall x \in A, \quad \left.\begin{array}{l} \text{si } x = a, x \preccurlyeq M \\ \text{sinon } x \in A \setminus \{a\} \implies x \preccurlyeq \max(A \setminus \{a\}) = M \end{array}\right\} \implies \forall x \in A, x \preccurlyeq a$$

Donc A admet un plus grand élément, et c'est M

◊ On procède de même pour construire le le plus petit élément de A avec m.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Donc toute partie finie non vide d'un ensemble totalement ordonné possède un plus petit et un plus grand élément.

Étudions l'importance des hypothèses :

- ⋆ Importance de la finitude de la partie :
  On sait qu'une partie infinie d'un ensemble totalement ordonné n'admet pas de plus grand élément : $[0, 1[$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $\mathbb{N}$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$.
- ⋆ Importance du caractère total de l'ordre : on connait des ensembles finis partiellement ordonnés qui n'ont pas de plus grand élément :
  - — $\{3, 12\}$ dans $(\mathbb{R}, =)$ n'admet pas de plus grand élément
  - — $\{[1, 2], [3, 4]\}$ dans $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$ n'admet pas de plus grand élément
  - — $\{2, 3\}$ dans $(\mathbb{N}, |)$ non plus.

□

2 Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est sont plus grand élément.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et A une partie non-vide de E.
Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
Si A admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors A admet un plus grand élément et $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soient un tel ensemble E et une telle partie A et notons M son plus grand élément.
Posons l'ensemble des majorants de A, $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A,\ a \leqslant m\}$.
Par définition :

$$\forall m \in M(A),\ M \leqslant m,$$

car $M \in A$, mais comme $M \in M(A)$, on a directement que $M = \min M(A) = \sup A$.

Pseudo-réciproquement, soit A une partie de E admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne S.
Comme $S \in M(A)$, par définition, S est plus grand que tous les éléments de A mais appartient à A, donc de tous les éléments de A, S est le plus grand. □

3 Caractérisation par les ε de la borne supérieure

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une partie non vide et majorée. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\sigma = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant \sigma \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{cases}$$

Démonstration. ⋆ Supposons $\sigma = \sup A$

- Par définition $\sup A = \min M(A)$ donc $\sigma \in M(A)$ donc $\forall a \in A, a \leqslant \sigma$
- Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque

$$\begin{aligned} \sigma = \min M(A) &\iff \sigma - \varepsilon \notin M(A)(\text{ sinon } \sigma - \varepsilon \geqslant \min M(A) = \sigma \implies \varepsilon \leqslant 0) \\ &\iff \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{aligned}$$

⋆ Réciproquement, supposons

$$\begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant \sigma \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{cases}$$

- D'après la première propriété, $\sigma \in M(A)$
- Montrons que σ est le plus petit des minorants par l'absurde en supposant qu'il existe $M \in M(A)$ tel que $M < \sigma$. On a $\sigma - M > 0$ donc on peut appliquer la deuxième propriété pour $\varepsilon \leftarrow \sigma - M$

  $$\exists a \in A : \sigma - (\sigma - M) < a$$

  Fixons un tel a. On a donc trouvé un $a \in A$ tel que $M < a$ ce qui contredit le fait que M soit un majorant de A. Donc il n'existe pas de majorant plus petit que σ. Donc A admet une borne supérieure qui est σ.

□

4 Montrer que si A et B sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Démonstration. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B$ l'ensemble

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

C'est aussi une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in (A+B)$ fixé quelconque. Par définition de $A+B$, $\exists(a,b) \in A \times B : x = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant \sup A \\ b \leqslant \sup B \end{array}\right\} \implies x = a + b \leqslant \sup A + \sup B$$

On a donc montré que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$, donc $A+B$ admet un majorant, donc $A+B$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc $A+B$ admet une borne supérieure.

Par définition de la borne supérieure, car $\sup(A+B)$ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants :

$$\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$$

De plus $\sup(A+B)$ est un majorant de $A+B$ donc, pour $(a,b) \in A \times B$ fixés, on a

$$a + b \leqslant \sup(A+B) \iff a \leqslant \sup(A+B) - b$$

en relâchant le caractère fixé de a, on a

$$\forall a \in A, a \leqslant \sup(A+B) - b$$

donc $\sup(A+B) - b$ est un majorant de A, donc plus petit que $\sup A$, d'où

$$\sup A \leqslant \sup(A+B) - b \iff b \leqslant \sup(A+B) - \sup A$$

Donc en relâchant le caractère fixé de b on a

$$\forall b \in B, b \leqslant \sup(A+B) - \sup A$$

donc $\sup(A+B) - \sup A$ est un majorant de B donc plus petit que $\sup B$ d'où

$$\sup B \leqslant \sup(A+B) - \sup A \iff \sup A + \sup B \leqslant \sup(A+B)$$

Donc par double inégalité

$$\sup A + \sup B = \sup(A+B)$$

$\square$