Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

2 décembre 2023

1 Caractérisation de la densité d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans une partie B de $\mathbb{R}$ la contenant avec des ε (si la densité de A dans B est définie par $A \subset B$ et tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui rencontre B rencontre A).

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ fq

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b-a| < \varepsilon \end{cases}$$

Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité
Sens Direct Supposons A dense dans B

— Par déf $A \subset B$

— Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq
Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour $u \leftarrow b - \varepsilon$ et $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset \implies A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$$

Or, $B \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$ est vraie Donc $A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$
Ce qui permet de choisir $a \in A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ Un tel a vérifie $a \in A$ et $a \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\iff |b-a| < \varepsilon$

Sens réciproque Supposons $\begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b-a| < \varepsilon \end{cases}$

— On a donc $A \subset B$

— Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fq tq $B \cap]u, v[\neq \emptyset$
Appliquons l'hypothèse pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \min\{v-b, b-u\}$, qui est autorisé $v-b$ et $b-u$ sont positifs
Donc $\exists a \in A : |b-a| < \varepsilon$
Fixons un tel a, alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \min\{v-b, b-u\} \leqslant b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v-b, b-u\}}_{\leqslant b-u} \geqslant b - (b-u) = u \end{cases}$$

Donc $a \in]u, v[$.

Donc $A \cap]u, v[\neq \emptyset$

$\square$

2 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit u $\in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$ Si u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, et $\ell_1 \neq \ell_2$. On prendra $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ assez petit pour que les tubes soient disjoints.
Posons donc $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

- Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ_1, pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$, ce qui est autorisé car $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0 \tag{1}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0 \tag{2}$$

  Fixons de tels N_1 et N_2.
- Posons $n_0 = N_1 + N_2$
  - $n_0 \geqslant N_1$, donc (1) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0$
  - $n_0 \geqslant N_2$, donc (2) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0$
-

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\ &\leqslant \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leqslant \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leqslant \varepsilon_0} \\ &\leqslant 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\ \implies 1 &\leqslant \frac{2}{3} \end{aligned}$$

  Contradiction

□