

Khôlles de Mathématiques - Semaine 10

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen

3 décembre 2023

1 Caractérisation de la densité d'une partie A de \mathbb{R} dans une partie B de \mathbb{R} la contenant avec des ε .

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ fq.

Définition de la densité

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, B \cap]u; v[\neq \emptyset \implies A \cap]u; v[\neq \emptyset \end{cases} \quad (1)$$

Caractérisation de la densité par les ε

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases} \quad (2)$$

Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité

Sens Direct Supposons A dense dans B

— Par déf $A \subset B$

— Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq

Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour $u \leftarrow b - \varepsilon$ et $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset \implies A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$$

Or, $B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$ est vraie donc $A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$

Ce qui permet de choisir $a \in A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Un tel a vérifie $a \in A$ et $a \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\iff |b - a| < \varepsilon$

Sens réciproque Supposons $\begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases}$

— On a donc $A \subset B$

— Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fq tq $B \cap]u, v[\neq \emptyset$

Soit $b \in B \cap]u, v[$ fq. Appliquons l'hypothèse pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \min\{v - b, b - u\}$, qui est autorisé $v - b$ et $b - u$ sont positifs

Donc $\exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$

Fixons un tel a , alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leq v - b} \leq b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leq b - u} \geq b - (b - u) = u \end{cases}$$

Donc $a \in]u, v[$.

Donc $A \cap]u, v[\neq \emptyset$

□

2 Théorème de la division pseudo-euclidienne dans \mathbb{R}

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \quad (3)$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et deux couples $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[\end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ r' \in [0; |b|[\end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-|b| < r' - r < |b|$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans \mathbb{Z} leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a .

Existence Posons pour $b > 0$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vide car $-|a| \in \Omega$ (\mathbb{Z} archimédien suffit ...)
- Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d' Ω .

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q .

Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $r \in \mathbb{R}$.

Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leq a$ d'où $0 \leq r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q + 1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [0, |b|$.

Si $b < 0$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de a . \square

3 \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans \mathbb{R}

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fq. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

- $a_n \in \mathbb{Q}$ car $\lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $2^n \in \mathbb{N}$.

—

$$a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leq a_n \leq x$$

Or $1/2^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$ fq.

Alors $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration précédente, $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x + \sqrt{2}$.

Fixons un telle suite b . Considérons $c = b - \sqrt{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

- $c_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car $b_n \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

—

$$\left. \begin{array}{l} b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{array} \right\} \implies c_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} . \square

4 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$ Si u converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , et $\ell_1 \neq \ell_2$. On prendra $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ assez petit pour que les tubes soient disjoints.

Posons donc $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ_1 , pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$, ce qui est autorisé car $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon_0 \quad (4)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon_0 \quad (5)$$

Fixons de tels N_1 et N_2 .

— Posons $n_0 = N_1 + N_2$

— $n_0 \geq N_1$, donc (4) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_1| \leq \varepsilon_0$

— $n_0 \geq N_2$, donc (5) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_2| \leq \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\ &\leq \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leq \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leq \varepsilon_0} \\ &\leq 2 \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\ \implies 1 &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Contradiction

□

5 Une suite convergente est bornée

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \lim u$ Appliquons la définition de la convergence pour $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| \leq 1$$

Fixons un tel N_1 Posons alors $M = \max \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$, qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici (\mathbb{R}, \leq)) admet un pgE.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— Si $n \in [0, N_1]$, $|u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ donc $|u_n| \leq M$

— Sinon,

$$\begin{aligned} n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leq 1 \\ &\implies |u_n| - |\ell| \leq 1 \\ &\implies |u_n| \leq 1 + |\ell| \leq M \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

□