Khôlles de Mathématiques - Semaine 14

Felix Rondeau

12 janvier 2024

1 Calcul de la signature d'une transposition par dénombrement de ses inversion

Démonstration. Soient n, i_1, i_2 trois entiers tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$. Observons que

$$\tau_{i_1,i_2} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i_1-1 & i_1 & i_1+1 & \cdots & i_2-1 & i_2 & i_2+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i_1-1 & i_2 & i_1+1 & \cdots & i_2-1 & i_1 & i_2+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

si bien que la liste des inversions de τ_{i_1,i_2} (couple (i,j) tel que $i<j$ et $\tau_{i_1,i_2}(i) > \tau_{i_1,i_2}(j)$) est

$$I(\tau_{i_1,i_2}) = \{\underbrace{(i_1,i_1+1),(i_1,i_1+2),\ldots,(i_1,i_2)}_{i_2-i_1 \text{ inversions}}, \underbrace{(i_1+1,i_2),(i_1+2,i_2),\ldots,(i_2-1,i_2)}_{i_2-i_1-1 \text{ inversions}}\}$$

Ainsi, $|I(\tau_{i_1,i_2})| = 2(i_2-i_1)-1 \equiv 1[2]$ donc $\varepsilon(\tau_{i_1,i_2}) = (-1)^{|I(\tau_{i_1,i_2})|} = -1$, d'où toute transposition est impaire (de signature -1). □

2 Calculs des cardinaux du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et du groupe alterné $\mathcal{A}_n$.

Démonstration.

Cardinal de $\mathcal{S}_n$. La recherche de toutes les permutations possibles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ par un arbre de dénombrement montre que l'on dispose de

- n choix pour l'image de 1,
- $(n-1)$ choix pour l'image de 2,
- ...
- 1 choix pour l'image de n,

ce qui permet de dénombrer, par le principe des choix successifs, exactement $n(n-1)\cdots 1 = n!$ permutations deux à deux distinctes.

Cardinal de $\mathcal{A}_n$. Fixons $\tau = (1,2)$. Considérons l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \tau \circ \sigma \end{array}$$

- Φ *est bien définie.*
  Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$ fixée quelconque. Par propriété de morphisme de la signature,
  $$\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau) \times \varepsilon(\sigma) = (-1) \times (+1) = -1$$
  donc $\tau \circ \sigma \notin \mathcal{A}_n$. Par conséquent, $\Phi(\sigma) \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$.
- Φ *est bijective.* Soit $\gamma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ fixé quelconque. Résolvons l'éq. d'inconnue $\sigma \in \mathcal{A}_n$:
  $$\begin{aligned} \Phi(\sigma) = \gamma &\iff \tau \circ \sigma = \gamma \\ &\iff \tau \circ \tau \circ \sigma = \tau \circ \gamma \\ &\iff \sigma = \tau \circ \gamma \in \mathcal{A}_n \quad \text{car } \varepsilon(\tau \circ \gamma) = \varepsilon(\tau) \times \varepsilon(\gamma) = (-1)^2 = 1 \end{aligned}$$
  d'où la bijectivité.

Ainsi, puisque Φ est une bijection,

$$|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n| - |\mathcal{A}_n|$$

d'où

$$|\mathcal{A}_n| = \frac{|\mathcal{A}_n}{2} = \frac{n!}{2}$$

□

3 Les transpositions engendrent les groupes symétriques

Démonstration. Soit $n \geqslant 3$. Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ par

$\mathcal{P}(k)$: « toute permutation de $\mathcal{S}_n$ qui fixe au moins les éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n\} \setminus \{1, \ldots, k\}$ s'écrit comme un produit de transpositions »

- Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation qui fixe au moins tous les éléments de $\{2, \ldots, n\}$. Alors, σ étant une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$, $\sigma = \mathrm{Id}$ donc $\sigma = \tau_{1,2} \circ \tau_{1,2}$. Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
  Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation qui fixe au moins tous les éléments de $\{1, \ldots, n \setminus \{1, \ldots, k+1\}\}$ (on a bien $k+1 \leqslant n$ car $k \leqslant n-1$).
  - Si $\sigma(k+1) = k+1$, alors σ fixe les éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n\} \setminus \{1, \ldots, k\}$ or $\mathcal{P}(k)$ est vraie donc σ s'écrit comme un produit de transpositions.
  - Si $\sigma(k+1) \neq k+1$, puisque $\forall i \in \{k+2, \ldots, n\}, \sigma(i) = i, \sigma(k+1) < k+1$.
    Considérons la permutations $\sigma_k = \tau_{k+1,\sigma(k+1)} \circ \sigma$. Alors, $\forall i \in \{k+2, \ldots, n\}, \sigma(i) = i \implies \sigma_k(i) = i$ et de plus, $\sigma_k(k+1) = \tau_{k+1,\sigma(k+1)}(\sigma(k+1)) = k+1$. Par conséquent, σ_k fixe les éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n\} \setminus \{1, \ldots, k\}$ or $\mathcal{P}(k)$ est vraie dons $\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists (\tau_1, \ldots, \tau_p)$ une famille de transpositions telles que

    $$\tau_{k+1,\sigma(k+1)} \circ \sigma = \sigma_k = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$$

    si bien qu'en composant par $\tau_{k+1,\sigma(k+1)}$ à gauche,

    $$\sigma = \tau_{k+1,\sigma(k+1)} \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$$

    Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

□

4 Montrer que si E est un ensemble fini et $f : E \longrightarrow F$, alors $f(E)$ est un ensemble fini et $|f(E)| \leqslant |E|$.

Démonstration.
Résultat préliminaire : si A est un ensemble non vide et $f : A \longrightarrow B$ est surjective, il existe $g : B \longrightarrow A$ injective telle que $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
A est fini et non vide donc on peut numéroter ses éléments : $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Posons

$$g : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & a_{k(b)} \end{array} \qquad \text{où } k(b) = \min\{i \in [\![1, |A|]\!] \mid f(a_i) = b\}$$

- Soit $b \in B$ fixé quelconque.

  $$f \circ g(b) = f(a_{k(b)}) = b \quad \text{car } k(b) \in \{i \in [\![1, |A|]\!] \mid f(a_i) = b\}$$

  donc $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
- id_B est bijective donc $f \circ g$ est injective donc g est injective.

Preuve du théorème. Soit E un ensemble fini, F un ensemble et f une fonction de E dans F.
La correstriction $f^{|f(E)}$ est surjective de E dans $f(E)$ or E est fini donc le lemme précédent s'applique et permer d'affirmer qu'il existe une application $g : f(E) \longrightarrow E$ injective telle que $f^{|f(E)} \circ g = \mathrm{id}_{f(E)}$.
$f(E)$ s'injecte donc dans l'ensemble fini E d'ou la finitude de $f(E)$.
De plus, $f(E)$ est en bijection avec $g(f(E))$ donc $|f(E)| = |g(f(E))| \leqslant |E|$ car $g(f(E))$ est une partie de E.

□

5 Dénombrer les surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$ puis de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$

Démonstration. □

6 Lemme des bergers et anagrammes de BARBARA

Soient E, F deux ensembles finis non vides et $f : E \to F$ telle que tout élément de F possède le même nombre $k \in \mathbb{N}^*$ d'antécédents par f. Alors $|F| = \frac{|E|}{k}$

"Pour compter les moutons, il faut compter les pattes puis diviser par quatre. "

Démonstration. Considérons la relation binaire définie sur E par :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Elle est réflexive, transitive et symétrique donc c'est bien une relation d'équivalence.
Soit $x \in E$ fixé quelconque. Alors

$$\bar{x} = \{y \in E \mid f(x) = f(y)\} = f^{-1}(\{f(x)\})$$

or f est surjective donc il y a autant de classes d'équivalences que d'éléments dans F, et ces classes sont les éléments de l'ensemble

$$\{f^{-1}(\{t\}) \mid t \in F\}$$

De plus,   étant une relation d'équivalence, ces classes forment une partition de E donc

$$|E| = \sum_{t \in F} \left| f^{-1}(\{t\}) \right| = k|F|$$

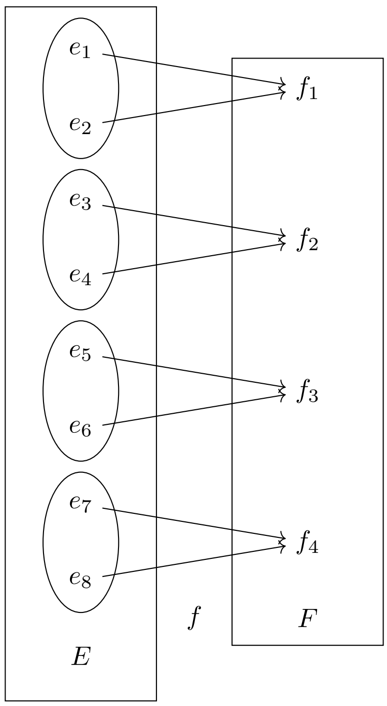

Figure 1 – Représentation schématique du lemme des bergers. Les classes d'équivalence de $\sim$ sont les ovales qui contiennent des éléments qui ont la même image par f. Le lemme s'applique ici car tous les éléments de F ont le même nombre d'antécédents par f.

Application aux anagrammes : exemple du mot BARBARA. Les lettres du mot BARBARA étiquetées en $\mathrm{B_1A_1R_1B_2A_2R_2A_3}$, on peur construire 7! mots différents avec. Chacun de ces mots peut être obtenu de plusieures façon : en échangeant l'ordre des même lettres au sein de celui-ci. Comme il y a 2! façons d'échanger les lettres $\mathrm{B_1}$ et $\mathrm{B_2}$, autant d'échanger les lettres $\mathrm{R_1}$ et $\mathrm{R_2}$ et 3! façons d'échanger les lettres $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$ et $\mathrm{A_3}$, un même mot est formé 2!2!3! fois. On peut alors appliquer le lemme des bergers pour trouver un nombre total d'anagrammes de $\frac{7!}{2!2!3!}$. □

7 p-partage d'un ensemble E et leur dénombrement. Anagrammes de MISSISSIPPI.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-partage de E est un p-liste $(A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{P}(E)^p$ de parties de E (éventuellement vide), deux à deux disjointes qui recouvrent E, i.e.

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!], i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{p} A_i = E$$

Soient $(n_1, \dots n_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $n = n_1 + \dots + n_p$. Un p-partage de E de type $(n_1, \dots, n_p)$ est un p-partage $(A_1, \dots, A_p)$ de E tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!], |A_i| = n_i$$

Le nombre de p-partage de type $(n_1, \dots, n_p)$ est :

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{p} n_i!} \tag{1}$$

Démonstration. Considérons les p-partages de type $(n_1, \dots, n_p)$ et appliquons le principe des choix successifs :

$$\left(\underbrace{A_1}_{\binom{n}{n_1} \text{ choix}}, \underbrace{A_2}_{\binom{n}{n_2} \text{ choix}}, \underbrace{A_3}_{\binom{n}{n_3} \text{ choix}}, \dots, \underbrace{A_p}_{\binom{n}{n_p} \text{ choix}} \right)$$

donc il y a

$$\frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdots \cancel{\frac{(n-(n_1+\dots+n_{p-1})!}{n_p!\underbrace{(n_1+\dots+n_p)!}_{=0!}}}$$

Donc, au total, il y a $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_p!}$ p-partages.

Application aux anagrammes : exemple du mot MISSISSIPPI. Ce mot comporte 11 lettres (1 M, 4 I, 4 S et 2 P). L'ensemble des anagrammes est en bijection avec l'ensemble des p-partages de $[\![1,11]\!]$ du type $(1,4,4,2)$. Par exemple, l'anagramme *MISSSSIIIPP* correspond au p-partage $(\{1\}, \{2,7,8,9\}, \{3,4,5,6\}, 10, 11)$. Par conséquent leur nombre est le nombre de p-partages d'un tel type, soit $\dfrac{11!}{1!4!4!2!}$. ☐

8 Énoncé et démonstration combinatoire de la formule de Van der Monde.

La formule de Van der Monde est la suivante : pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = \binom{n+p}{k}$$

Démonstration. — Si $k > n+p$. On a

$$\binom{n+p}{k} = 0 \quad \text{par définition}$$

et

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} + \sum_{i=n+1}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = 0 + 0 = 0$$

— Sinon, $k \leqslant n+p$. Considérons E un ensemble de cardinal $n+p$ et A une partie de cette ensemble, de cardinal n.
Dénombrons les parties de E de cardinal k en fonction du cardinal de leur intersection avec A :

$$\mathcal{P}_k(E) = \bigsqcup_{i=0}^{n} \{B \in \mathcal{P}_k(E) \mid |B \cap A| = i\} = \bigsqcup_{i=0}^{n} \{C \sqcup D \in \mathcal{P}_k(E) \mid C \in \mathcal{P}_i(A), D \in \mathcal{P}_{k-i}(\overline{A})\}$$

or l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_i(A) \times \mathcal{P}_{k-i}(\overline{A}) & \longrightarrow & \{C \sqcup D \mid C \in \mathcal{P}_i(A), D \in \mathcal{P}_{k-i}(\overline{A})\} \\ (C, D) & \longmapsto & C \sqcup D \end{array}$$

est bijective donc

$$\begin{aligned} |\{B \in \mathcal{P}_k(E) \mid |B \cap A| = i\}| &= |\mathcal{P}_i(A) \times \mathcal{P}_{k-i}(\overline{A})| \\ &= |\mathcal{P}_i(A)| \times |\mathcal{P}_{k-i}(\overline{A})| \\ &= \binom{n}{i} \times \binom{p}{k-i} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_k(E)| &= \sum_{i=0}^{n} |\{B \in \mathcal{P}_k(E) \mid |B \cap A| = i\}| \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} \end{aligned}$$

□