Khôlles de Mathématiques - Semaine 5

Kylian Boyet, George Ober

21 juin 2024

1 Montrer que l'ensemble des similitudes directes du plan complexe est un groupe pour la composition

Démonstration. Montrons donc que $(S, \circ)$ est un sous groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \circ)$

◊ D'une part, $S \subset \mathcal{S}(\mathbb{C})$. Or l'ensemble des permutations $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe. En effet, les similitudes sont des bijections de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

◊ De plus, S est non vide, par exemple l'application $\mathrm{Id}(\mathbb{C})$ est une similitude pour $a \leftarrow 1$ et $b \leftarrow 1$.

◊ Prenons finalement a et c dans $\mathbb{C}^*$ puis b et d dans $\mathbb{C}$. et posons les deux applications suivantes :

$$s \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto az+b \end{array} \right. \quad \text{et } s' \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto az+b \end{array} \right.$$

Ainsi, comme toute similitude directe est une bijection, en particulier s' en est une, et

$$s'^{-1} \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{z}{c} - \frac{d}{c} \end{array} \right.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque :

$$\begin{aligned} (s \circ s'^{-1})(z) &= s(s'^{-1}(z)) \\ &= s\left(\frac{z}{c} - \frac{d}{c}\right) \\ &= a\left(\frac{z}{c} - \frac{d}{c}\right) + b \\ &= \frac{a}{c}z + \left(b - \frac{ad}{c}\right) \end{aligned}$$

Qui est une similitude directe, puisque $\frac{a}{c} \neq 0$ donc $s \circ s'^{-1} \in S$. Donc $(S, \circ)$ est bien un sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), \circ)$.

□

2 Classifier et interpréter une similitude directe donnée sous la forme $z \mapsto az + b$ sur un exemple, donner l'expression complexe d'une similitude dont on connaît les éléments caractéristiques.

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^*$ fixés quelconques. Posons la similitude

$$s \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto az+b \end{array} \right.$$

◊ Si $a = 1$, c'est la translation de vecteur d'affixe b

◊ Si $a \neq 1$, s admet un unique point fixe appelé "centre de la similitude" $\omega = \frac{b}{1-b}$

- ⋆ Si $a \in \mathbb{R}^*$, s est l'homotétie de centre ω et de rapport a.

- $\star$ Si $a \in (\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R})$, s est la composée de
  - — La rotation de centre ω et d'angle α, où α est un argument de a.
  - — L'homotétie de centre ω et de rapport $|a|$.

  On nommera alors $|a|$ le rapport de s et α une mesure de l'angle de s.

Exemple : Prenons la similitude $s : z \mapsto (1-i)z - 1$.

$$\begin{aligned} s(z) = z &\iff (1-i)z - 1 = z \\ &\iff -iz = 1 \\ &\iff z = i \end{aligned}$$

De plus,

$$(1-i)z - 1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} z - 1$$

On en déduit donc que s est la similitude directe de centre d'affixe i, de rapport $\sqrt{2}$, et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. $\square$

3 Montrer qu'une combinaison linéaire de deux fonctions bornées (respectivement lipschitziennes) est bornée (resp. lipschitzienne)

Démonstration. Soit I un intervalle réel.

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$\lozenge$ Si f et g sont respectivement bornées par A et par B. Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned} \Big|(\lambda.f + \mu.g)(x)\Big| &= \Big|\lambda.f(x) + \mu.g(x)\Big| \\ &\leqslant \big|\lambda\big|\big|f(x)\big| + \big|\mu\big|\big|g(x)\big| \\ &\leqslant \big|\lambda\big|A + \big|\mu\big|B \end{aligned}$$

Donc $\lambda.f + \mu.g$ est bornée.

$\lozenge$ Si f et g sont respectivement K et L lipschitziennes. Soient $(x, y) \in I^2$.

$$\begin{aligned} \Big|(\lambda.f + \mu.g)(x) - (\lambda.f + \mu.g)(y)\Big| &= \Big|\lambda.f(x) + \mu.g(x) - \lambda.f(y) - \mu.g(y)\Big| \\ &= \Big|\lambda(f(x) - f(y)) + \mu(g(x) - g(y))\Big| \\ &\leqslant \Big|\lambda\Big|\Big|f(x) - f(y)\Big| + \Big|\mu\Big|\Big|g(x) - g(y)\Big| \\ &\leqslant \Big|\lambda\Big|K\Big|x - y\Big| + \Big|\mu\Big|L\Big|x - y\Big| \\ &\leqslant (|\lambda|K + |\mu|L)|x - y| \end{aligned}$$

$\square$