Khôlles de Mathématiques - Semaine 12

Kylian Boyet, Hugo Vangilluwen

16 décembre 2023

1 Résolution d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et avec second membre

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K}$ peut être $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions S de l'équation d'inconnue $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + v_n \tag{1}$$

est la droite affine $\{w + \lambda \left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}} | \lambda \in \mathbb{K}\}$ où w est une solution particulière.

Démonstration. Posons la suite w définie par $\left| \begin{array}{c} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + v_n \end{array} \right.$

w est évidement solution.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + v_n &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = v_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = w_{n+1} - aw_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u-w)_{n+1} - a(u-w)_n = 0 \\ &\iff u - w \in Vect\{(a^n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : u_n = w_n + \lambda a^n \\ &\iff u \in \{w + \lambda \left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}} | \lambda \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

□

2 Résolution d'une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dans $\mathbb{C}$ lorsque l'équation caractéristique est non nul

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. L'ensemble des solutions S_H de l'équation d'inconnue $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{2}$$

est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique $(r^2 = ar + b)$ quand $\Delta \neq 0$.

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ fq.

<u>Lemme</u> Soit $r \in \mathbb{C}$. $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation de récurrence si et seulement si $r^2 = br+a$.

$$\begin{aligned} (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est solution } &\iff \forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, r^n \left(r^2 - ar - b\right) = 0 \\ &\underbrace{\iff}_{\text{En particularisant pour } n \to 0} r^2 - ar - b = 0 \\ &\iff r^2 = br + a \end{aligned}$$

Considérons le cas où l'équation $r^2 = ar + b$ admet deux racines distinctes $(\Delta \neq 0)$ r_1 et r_2. D'après le lemme, $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions. Par linéarité de l'équation, toute combinaison linéaire est solution de l'équation homogène. Donc $\mathrm{Vect}\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\} \subset S_H$.

Réciproquement, soit $u \in \S_H$ fq. Étudions le système à deux inconnues $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{cases} \lambda_0 r_1^0 + \mu_0 r_2^0 = u_0 \\ \lambda_0 r_1^1 + \mu_0 r_2^1 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 + \mu_0 = u_0 \\ \lambda_0 r_1 + \mu_0 r_2 = u_1 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$ Donc d'après les formules de Cramer, ce système admet une unique solution.

Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\bullet)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \lambda_0 r_1^n + \mu_0 r_2^n \text{ et } u_{n+1} = \lambda_0 r_1^{n+1} + \mu_0 r_2^{n+1}$$

— $\mathcal{P}(0)$ est vrai par construction de λ_0 et μ_0.
— Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $\mathcal{P}(n)$ vrai. D'après $\mathcal{P}(n)$, $u_{n+1} = \lambda_0 r_1^{n+1} + \mu_0 r_2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \\ &= a\left(\lambda_0 r_1^n + \mu_0 r_2^n\right) + b\left(u_{n+1} = \lambda_0 r_1^{n+1} + \mu_0 r_2^{n+1}\right) \qquad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= \lambda_0 r_1^n \left(a r_1 + b\right) + \mu_0 r_2^n \left(a r_2 + b\right) \\ &= \lambda_0 r_1^{n+2} + \mu_0 r_2^{n+2} \qquad \text{car } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont racine de } r^2 = ar + b \end{aligned}$$

Ainsi $S_H \subset \mathrm{Vect}\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

Par double inclusion, $S_H = \mathrm{Vect}\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$. □

3 Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur $\mathbb{C}$ est à adapter sans peine.
Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.
Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε.
Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de $\mathbb{N}$. Posons ensuite $\varphi(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon,\ \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon,\ \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M,$$

donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leq M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.
Par ailleurs, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\underbrace{|u_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. □

4 Monotonie de u et des sous-suites des termes pairs et impairs de la suite$u_{n+1} = f(u_n)$ selon la monotonie de f

Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ une intervalle f-stable.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite récurrente associée à la fonction f c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

— Si f est croissante sur I.
  Si $u_1 \geqslant u_0$ alors u est croissante.
  Si $u_1 \leqslant u_0$ alors u est décroissante.
— Si f est décroissante sur I.
  Les sous-suites $(u_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotone et ont une monotonie opposée (utiliser les premiers termes pour trouver leur monotonie respectives).

Démonstration. Soient de tels f, I et u.

— Supposons que f est croissante sur I.
  Supposons $u_1 \geqslant u_0$. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\bullet)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}u_{n+1} \geqslant u_n\text{"}$$

  Par hypothèse, $u_1 \geqslant u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $\mathcal{P}(n)$ vrai.

$$u_{n+1} \geqslant u_n \underbrace{\implies}_{f \text{ est croissante sur } I} f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) \implies u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
  Si $u_1 \leqslant u_0$, il suffit de changer $\geqslant$ par $\leqslant$ dans la récurrence ci-dessus.
— Supposons que f est décroissante sur I.
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$. Or $f \circ f$ est croissante, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
  Supposons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Alors

$$u_{2n} \leqslant u_{2(n+1)} \underbrace{\implies}_{f \text{ est décroissante sur } I} f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2(n+1)}) \implies u_{2n+1} \geqslant u_{2(n+1)+1}$$

  Donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  De même, si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

□

5 L'intérieur de l'ensemble des rationnels est vide.

Montrons que : $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\mathbb{Q}$ possède au moins un point intérieur.
Fixons $r_0 \in \mathring{\mathbb{Q}}$. Par définition d'un point intérieur, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]r_0 - \varepsilon,\ r_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$. Or, par densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : r_0 - \varepsilon < \alpha < r_0 + \varepsilon$. On en déduit que $\alpha \in]r_0 - \varepsilon,\ r_0 + \varepsilon[$, or $]r_0 - \varepsilon,\ r_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{Q}$ donc $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit le choix de $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Ainsi, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ □

6 Théorème sans nom version continue au voisinage de a

Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathcal{D}}$ tels que $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et g tend vers 0 en a. Alors montrons que f tend vers ℓ en a.

Démonstration. On traite le cas $a \in \mathbb{R}$. Par définition de $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a,

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall x \in \mathcal{D}, \ |x - a| \leq \varepsilon \implies |f(x) - \ell| \leq g(x).$$

Fixons un tel ε.
Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons la définition de $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ pour $\varepsilon \leftarrow \omega$:

$$\exists \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall x \in \mathcal{D}, \ |x - a| \leq \varepsilon' \implies |g(x)| \leq \omega.$$

Fixons un tel ε'.
Posons $\Omega = \min \{\varepsilon, \varepsilon'\}$.
Soit $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x - a| \leq \Omega$.

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \leq \omega,$$

car la définition de Ω permet de remplir les conditions des deux propriétés. □