Khôlles de Mathématiques - Semaine 9

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Felix Rondeau

24 Novembre 2024

1 Montrer que si A et B sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Démonstration. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B$ l'ensemble

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

C'est aussi une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in (A+B)$ fixé quelconque. Par définition de $A+B$, $\exists (a,b) \in A \times B : x = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant \sup A \\ b \leqslant \sup B \end{array}\right\} \implies x = a + b \leqslant \sup A + \sup B$$

donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$. Ainsi, comme l'ensemble $A+B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, il admet une borne supérieure, plus petite que tous les majorants et en particulier que $\sup A + \sup B$:

$$\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$$

De plus, $\sup(A+B)$ est un majorant de $A+B$ donc, pour $(a,b) \in A \times B$ fixés, on a

$$a + b \leqslant \sup(A+B) \iff a \leqslant \sup(A+B) - b$$

en relâchant le caractère fixé de a, on a

$$\forall a \in A, a \leqslant \sup(A+B) - b$$

donc $\sup(A+B) - b$ est un majorant de A, donc plus petit que $\sup A$, d'où

$$\sup A \leqslant \sup(A+B) - b \iff b \leqslant \sup(A+B) - \sup A$$

Donc en relâchant le caractère fixé de b on a

$$\forall b \in B, b \leqslant \sup(A+B) - \sup A$$

donc $\sup(A+B) - \sup A$ est un majorant de B donc plus petit que $\sup B$ d'où

$$\sup B \leqslant \sup(A+B) - \sup A \iff \sup A + \sup B \leqslant \sup(A+B)$$

Ainsi, par double inégalité

$$\sup A + \sup B = \sup(A+B)$$

□

2 Preuve de la caractérisation de la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ avec des ε

Démonstration.

($\implies$) Supposons que $\sigma = \sup A$.

— Par définition, la borne supérieure est le plus petit majorant donc $\forall a \in A, \leqslant \sigma$.

— Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque. Par l'absurde, supposons que pour tout $a \in A$, $\sigma - \varepsilon \geqslant a$. Alors, $\sigma - \varepsilon \geqslant \sup A = \sigma$ d'où $-\varepsilon \geqslant 0$ ce qui contredit la définition de ε.

Ainsi, $\exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a$.

($\Longleftarrow$) Supposons

$$\begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant \sigma & (1) \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a & (2) \end{cases}$$

— $\sigma \in M(A)$ par conséquence directe de (1)

— σ est plus petit que tout autre majorant :
Soit $M \in M(A)$ fixé quelconque. Par l'absurde, supposons que $M < \sigma$. Appliquons (2) pour $\varepsilon \leftarrow \sigma - M$ (ce qui est autorisé car $M < \sigma$ donc $\sigma - M > 0$) :

$$\exists a_0 \in A : \sigma - (\sigma - M) < a_0$$

Donc $M < a_0$ ce qui contredit $M \in M(A)$. Ainsi, $\sigma \leqslant M$, si bien que $M(A)$ admet σ comme plus petit élément donc A admet σ comme borne supérieure.

□

3 Preuve de la caractérisation de la densité

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ fq.
Définition de la densité

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, B \cap]u;v[\neq \emptyset \implies A \cap]u;v[\neq \emptyset \end{cases} \quad (3)$$

Caractérisation de la densité par les ε

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases} \quad (4)$$

Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité
Sens Direct Supposons A dense dans B

— Par déf $A \subset B$

— Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq
Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour $u \leftarrow b - \varepsilon$ et $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset \implies A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$$

Or, $B \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$ est vraie donc $A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset$
Ce qui permet de choisir $a \in A \cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Un tel a vérifie $a \in A$ et $a \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\iff |b - a| < \varepsilon$

Sens réciproque. Supposons

$$\begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases}$$

— On a donc $A \subset B$

— Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fq tq $B \cap]u, v[\neq \emptyset$
Soit $b \in B \cap]u, v[$ fq. Appliquons l'hypothèse pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \min\{v - b, b - u\}$, qui est autorisé $v - b$ et $b - u$ sont positifs
Donc $\exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$
Fixons un tel a, alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v-b, b-u\}}_{\leqslant v-b} \leqslant b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v-b, b-u\}}_{\leqslant b-u} \geqslant b - (b-u) = u \end{cases}$$

Donc $a \in]u, v[$.

Donc $A \cap]u, v[\neq \emptyset$

□

4 Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fq. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— $a_n \in \mathbb{Q}$ car $\lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $2^n \in \mathbb{N}$.
—
$$a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant x$$
Or $1/2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fq.
Alors $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration précédente, $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x + \sqrt{2}$.
Fixons un telle suite b. Considérons $c = b - \sqrt{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.
— $c_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car $b_n \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
—
$$\left.\begin{array}{r} b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{array}\right\} \implies c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

5 Caractérisation séquentielle de la densité

Démonstration.

($\implies$) Supposons que A est dense dans B.
- $A \subset B$ par définition.
- Soit $b \in B$ fixé quelconque. D'après la caractérisation de la densité appliqué pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$
$$\exists a \in A : |b - a| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
Notons un tel a a_n. On vient de construire la suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in N, |b - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc, par le théorème sans nom, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b.

($\impliedby$) Supposons que tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.
- $A \subset B$ par hypothèse.

— Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in B$ fixés quelconques. Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers b (elle existe par hypothèse). Appliquons la définition de sa convergence pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies |a_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons un tel N. On a alors

$$|a_N - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{donc} \quad |a_N - b| < \varepsilon \quad \text{donc} \quad \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$$

□

6 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide et majorée. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\sigma = \sup A \iff \begin{cases} \sigma \in M(A) \\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} a_n = \sigma \end{cases}$$

Démonstration.

⋆ Supposons que $\sigma = \sup A$.
  - Par définition d'une borne sup, $\sigma \in M(A)$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la caractérisation de la borne sup par les epsilon pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$. $\exists c \in A : \sigma - \frac{1}{2^n} < c \leqslant \sigma$. Fixons un tel c et notons le a_n. En relâchant le caractère fixé de n, on a crée la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma - \frac{1}{2^n} < a_n \leqslant \sigma$$

    Cette suite converge vers σ par encadrement.

⋆ Réciproquement, supposons que $\sigma \in M(A)$ et qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers σ. Montrons que $\sigma = \sup A$ d'après la caractérisation par les ε.
  - $\sigma \in M(A)$
  - Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons la définition de la convergence de a pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, |a_n - \sigma| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \implies \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n$$

    En particulier $a_N \in A$ vérifie

$$\sigma - \varepsilon < \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_N \underbrace{\leqslant}_{\sigma \in M(A)} \sigma$$

    Ce qui permet de conclure. Donc $\sigma = \sup A$.

□

7 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit u $\in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$ Si u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, supponsons que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, et $\ell_1 \neq \ell_2$. On prendra $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ assez petit pour que les tubes soient disjoints.
Posons donc $\varepsilon_0 = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ_1, pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$, ce qui est autorisé car $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0 \tag{5}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0 \tag{6}$$

Fixons de tels N_1 et N_2.

— Posons $n_0 = N_1 + N_2$

— $n_0 \geqslant N_1$, donc (5) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0$

— $n_0 \geqslant N_2$, donc (6) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\ &\leqslant \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leqslant \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leqslant \varepsilon_0} \\ &\leqslant 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\ \implies 1 &\leqslant \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Contradiction

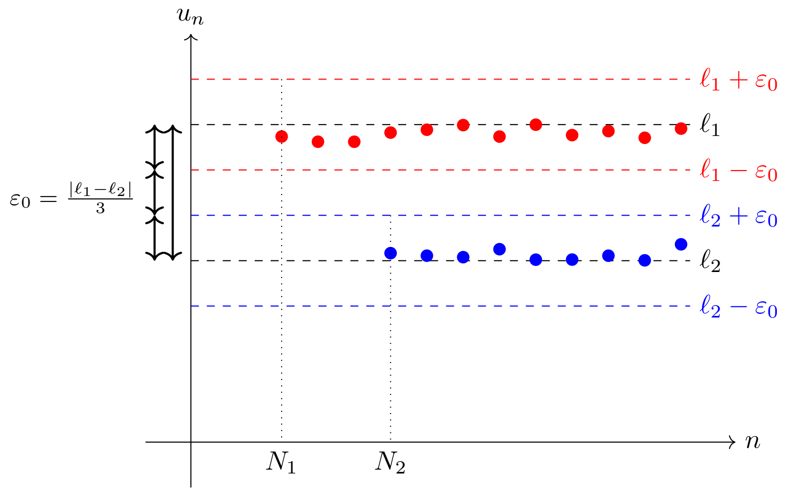

FIGURE 1 – À partir du rang n_0, supérieur à N_1 et N_2, tous les termes de la suite doivent être contenus dans les deux tubes disjoints, ce qui est impossible.

□

8 Toute suite convergente est bornée

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \lim u$ Appliquons la définition de la convergence pour $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant 1$$

Fixons un tel N_1 Posons alors $M = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$, qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici $(\mathbb{R}, \leqslant)$) admet un pgE.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— Si $n \in [\![0, N_1]\!], |u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ donc $|u_n| \leqslant M$

— Sinon,

$$\begin{aligned} n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leqslant 1 \\ &\implies |u_n| - |\ell| \leqslant 1 \\ &\implies |u_n| \leqslant 1 + |\ell| \leqslant M \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$. □

9 Dans un ensemble totalement ordonné, toute partie finie non vide possède un plus grand élément et un plus petit élément.

Démonstration. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné, considérons pour tour $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété.

$\mathcal{H}_n$: toute partie de E de cardinal n admet un plus petit et un plus grand élément

- ⋆ Initialisation $n \leftarrow 1$
  Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ fixée telle que $|A| = 1$ A est non vide, donc $\exists a \in A : A = \{a\}$
  a est le plus petit et le plus grand élément, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- ⋆ Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ fixée quelconque tel que $|A| = n + 1$

$$A \neq \emptyset \implies \exists a \in A : A = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\}$$

Or, $|A \setminus \{a\}| = n$ donc $\mathcal{H}_n$ s'applique et $A \setminus \{a\}$ possède un plus grand et plus petit élément

$$\begin{cases} m & = \min A \setminus \{a\} \\ M & = \max A \setminus \{a\} \end{cases}$$

◊ Construisons le plus grand élément de A

- Supposons $M \preccurlyeq a$ D'une part $a \in A$ D'autre part

$$\forall x \in A, \left.\begin{array}{l} \text{si } x = a, x \preccurlyeq a \text{ (réflexivité)} \\ \text{sinon } x \in A \setminus \{a\} \implies x \preccurlyeq M \preccurlyeq a \implies x \preccurlyeq a \end{array}\right\} \implies \forall x \in A, x \preccurlyeq a$$

Donc A admet un plus grand élément, et c'est a.

- Sinon, si $M \succ a$, mais $M \in A$ et

$$\forall x \in A, \left.\begin{array}{l} \text{si } x = a, x \preccurlyeq M \\ \text{sinon } x \in A \setminus \{a\} \implies x \preccurlyeq \max(A \setminus \{a\}) = M \end{array}\right\} \implies \forall x \in A, x \preccurlyeq a$$

Donc A admet un plus grand élément, et c'est M

◊ On procède de même pour construire le le plus petit élément de A avec m.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Donc toute partie finie non vide d'un ensemble totalement ordonné possède un plus petit et un plus grand élément.

Étudions l'importance des hypothèses :

- ⋆ Importance de la finitude de la partie :
  On sait qu'une partie infinie d'un ensemble totalement ordonné n'admet pas de plus grand élément : $[0, 1[$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $\mathbb{N}$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$.
- ⋆ Importance du caractère total de l'ordre : on connait des ensembles finis partiellement ordonnés qui n'ont pas de plus grand élément :
  — $\{3, 12\}$ dans $(\mathbb{R}, =)$ n'admet pas de plus grand élément
  — $\{[1, 2], [3, 4]\}$ dans $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$ n'admet pas de plus grand élément
  — $\{2, 3\}$ dans $(\mathbb{N}, |)$ non plus.

□

10 Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est son plus grand élément.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et A une partie non-vide de E.
Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
Si A admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors A admet un plus grand élément et $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soient un tel ensemble E et une telle partie A et notons M son plus grand élément. Posons l'ensemble des majorants de A, $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A,\ a \leqslant m\}$.
Par définition :

$$\forall m \in M(A),\ M \leqslant m,$$

car $M \in A$, mais comme $M \in M(A)$, on a directement que $M = \min M(A) = \sup A$.

Pseudo-réciproquement, soit A une partie de E admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne S.
Comme $S \in M(A)$, par définition, S est plus grand que tous les éléments de A mais appartient à A, donc de tous les éléments de A, S est le plus grand. □

11 Caractérisation par les ε de la borne supérieure

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une partie non vide et majorée. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\sigma = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant \sigma \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{cases}$$

Démonstration. ⋆ Supposons $\sigma = \sup A$

- Par définition $\sup A = \min M(A)$ donc $\sigma \in M(A)$ donc $\forall a \in A, a \leqslant \sigma$
- Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque

$$\begin{aligned} \sigma = \min M(A) &\iff \sigma - \varepsilon \notin M(A)(\text{ sinon } \sigma - \varepsilon \geqslant \min M(A) = \sigma \implies \varepsilon \leqslant 0) \\ &\iff \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{aligned}$$

⋆ Réciproquement, supposons

$$\begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant \sigma \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a \leqslant \sigma \end{cases}$$

- D'après la première propriété, $\sigma \in M(A)$
- Montrons que σ est le plus petit des minorants par l'absurde en supposant qu'il existe $M \in M(A)$ tel que $M < \sigma$. On a $\sigma - M > 0$ donc on peut appliquer la deuxième propriété pour $\varepsilon \leftarrow \sigma - M$

$$\exists a \in A : \sigma - (\sigma - M) < a$$

Fixons un tel a. On a donc trouvé un $a \in A$ tel que $M < a$ ce qui contredit le fait que M soit un majorant de A. Donc il n'existe pas de majorant plus petit que σ. Donc A admet une borne supérieure qui est σ.

□