

Khôlles de Mathématiques - Semaine 17

Kylian Boyet

4 Février 2024

1 Caractérisation des fonction dérivables strictement croissantes

Démonstration. Soit f une fonction dérivable sur I .

(\implies) Supposons que f est strictement croissante sur I .

— f est ctivement croissante donc croissante donc

$$\forall x \in I, f'(x) \geq 0$$

— Par l'absurde, supposons qu'il existe un intervalle $[a, b]$ non réduit à un singleton en restriction auquel f' est nulle. Alors, f est constante sur cet intervalle donc $f(a) = f(b)$ et $a < b$, ce qui contredit la stricte monotonie de f .

(\impliedby) Supposons que f' est positive ou nulle sur I et qu'elle n'est identiquement nulle en restriction à aucun intervalle inclus dans I .

— f' est positive ou nulle sur I donc f est croissante sur I .

— Par l'absurde, supposons que f n'est pas strictement croissante sur I . Alors

$$\begin{aligned} \text{non}(\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y)) &\iff \exists (x_0, y_0) \in I^2 : \text{non}(x < y \implies f(x) < f(y)) \\ &\iff \exists (x_0, y_0) \in I^2 : x_0 < y_0 \text{ et } f(x_0) \geq f(y_0) \end{aligned}$$

Choisissons un tel couple (x_0, y_0) . Par croissance de f ,

$$\forall x \in [x_0, y_0], f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0) = f(x_0)$$

donc $f(x) = f(x_0)$.

Par conséquent, f est constante sur $[x_0, y_0]$ si bien que f' est identiquement nulle sur $[x_0, y_0]$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur f .

Ainsi, f est strictement croissante sur I .

□

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle réel. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ telle que $f^{(n)} \in \mathcal{D}^1(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$ et $\forall M \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors

$$\forall (x, x_0) \in I^2, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1} M}{(n+1)!}$$

Démonstration. Supposons $x \neq x_0$ (sinon, l'égalité est immédiate). Appliquons l'égalité de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned} \exists c_x \in]x, x_0[\cup]x_0, x[: \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| &= \left| f^{(n+1)}(c_x) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &= \left| f^{(n+1)}(c_x) \right| \times \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n+1!} \\ &= M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

□

3 Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur I .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x \in I^n$, $\lambda \in [0; 1]^n$ telle que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I \wedge f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \quad (1)$$

Démonstration. Considérons le prédicat $\mathcal{P}(\cdot)$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}(n) : “\forall x \in I^n, \forall \lambda \in [0; 1]^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \implies \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I \wedge f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)”$$

* Soient $x \in I^1$ et $\lambda \in [0; 1]^1$ tel que $\sum_{k=1}^1 \lambda_k = 1$.

Alors $\lambda_1 = 1$. Trivialement, $\sum_{k=1}^1 \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 = x_1 \in I$.

De plus, $f\left(\sum_{k=1}^1 \lambda_k x_k\right) = f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1) = \sum_{k=1}^1 \lambda_k f(x_k)$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ vrai.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vrai.

Soient $x \in I^{n+1}$ et $\lambda \in [0; 1]^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

$\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$ est une partie non vide ($n \geq 1$) d'un ensemble totalement ordonnée (\mathbb{R}, \leq) .

Posons $a = \min\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$ et $b = \max\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket\}$. D'où

$$\underbrace{a}_{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a}_{a \leq x_k} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k}_{x_k \leq b} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k b}_{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1} \underbrace{b}_{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1}$$

Or $\{x_k \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\} \subset I$ (car $x \in I^n$) donc $a \in I \wedge b \in I$. Donc

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k}_{\text{par convexité de l'intervalle } I} \in [a; b] \subset I$$

$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ donc $\exists i_0 \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket : \lambda_{i_0} \neq 1$ (sinon $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = n+1 \neq 1$ car $n \neq 0$).
Fixons un tel i_0 .

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k x_k + \lambda_{i_0} x_{i_0}\right) \\ &= f\left(\lambda_{i_0} x_{i_0} + (1 - \lambda_{i_0}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} x_k\right) \\ &\underbrace{\leq}_{\text{Par convexité de } f} \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + (1 - \lambda_{i_0}) f\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} x_k\right) \end{aligned}$$

Or $\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \lambda_i \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k = 1 - \lambda_{i_0}$ Donc $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{i_0}} \in [0; 1]$ et $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} = 1$. Nous pouvons appliquer $\mathcal{P}(n)$ pour $\lambda_i \rightarrow \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{i_0}}$:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leq \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + (1 - \lambda_{i_0}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{i_0}} f(x_k) \\ &\leq \lambda_{i_0} f(x_{i_0}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n+1} \lambda_k f(x_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai. □

4 Inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$.

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (2)$$

Démonstration. Soit de tels objets. Posons $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = 1/n$.

Sachant que l'exponentielle est convexe, appliquons l'inégalité de Jensen pour $x_k \leftarrow \ln(x_k)$ (autorisé car $x_k \in \mathbb{R}_+^*$) :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_k)\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \exp(\ln(x_k))$$

L'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme népérien et est un morphisme additif. Nous obtenons ainsi l'inégalité recherchée.

Appliquons l'inégalité arithmético-géométrique pour l'inverse des x_i :

$$\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$$

donc en prenant l'inverse de cette inégalité,

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

On a ainsi

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

□

5 Caractérisation de la convexité par les pentes

$f : I \mapsto \mathbb{R}$ est convexe sur I si et seulement si

$$\forall (x, y, z) \in I^3, x < y \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Démonstration. (\implies) Supposons que f est convexe sur I . Soient $(x, y, z) \in I^3$ fixés quelconques tels que $x < y < z$. Cherchons à écrire y comme barycentre des points x et z , en résolvant l'équation d'inconnue λ :

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)z \iff y - z = \lambda(x - z) \iff \lambda = \frac{y - z}{x - z}$$

De plus,

$$x < y < z \implies x - z < y - z < 0 \implies \frac{x - z}{y - z} > \frac{y - z}{x - z} > 0 \implies \lambda \in]0, 1[$$

On peut donc appliquer la définition de la convexité :

$$f(y) = f(\lambda x + (1 - \lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z)$$

donc

$$f(y) - f(x) \leq (1 - \lambda)f(z) + \lambda f(x) - f(x) = (1 - \lambda)(f(z) - f(x)) = 1 - \frac{y - z}{x - z} = \frac{x - y}{x - z} = \frac{y - x}{z - x}$$

(\impliedby) Supposons que

$$\forall (x, y, z) \in I^3, x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Soient $(x_1, x_2) \in I^2$ fixés quelconques tels que $x_1 < x_2$. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Observons que $x_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < x_2$.

Appliquons l'hypothèse pour $x \leftarrow x_1$, $y \leftarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ et $z \leftarrow x_2$:

$$\frac{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)}{\underbrace{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1}_{=(1 - \lambda)(x_2 - x_1)}} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

donc

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq (1 - \lambda)(f(x_2) - f(x_1)) + f(x_1) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

□

6 Une fonction convexe est continue en tout point intérieur à son domaine de définition

Démonstration.

▷ *Lemme préliminaire :* Une fonction convexe sur I est lipschitzienne sur tout segment inclus dans l'intérieur de I .

Soit f une fonction convexe sur le segment $[a, b]$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Par la caractérisation de la convexité par les pentes, pour $(x, y) \in [\alpha, \beta]^2$ tels que $x < y$,

$$\begin{aligned} - \left| \frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a} \right| &\leq \frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a} \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \\ &\leq \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \leq \frac{f(b) - f(\beta)}{b - \beta} \leq \left| \frac{f(b) - f(\beta)}{b - \beta} \right| \end{aligned}$$

donc

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq K \quad \text{où} \quad K = \max \left\{ \left| \frac{f(b) - f(\beta)}{b - \beta} \right|, \left| \frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a} \right| \right\}$$

Par conséquent, pour tous $(x, y) \in I^2$,

- si $x < y$, alors $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$
- si $x = y$, alors $|f(x) - f(y)| = 0 \leq K \cdot 0 = K|x - y|$
- si $x > y$, alors $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ en échangeant les rôles de x et y .

Ainsi, f est K -lipschitzienne sur $[\alpha, \beta]$.

- ▷ *Preuve du théorème.* Il se déduit du lemme précédent, en effet, toute fonction convexe sur un intervalle est lipschitzienne sur tout segment inclus dans l'intérieur de cet intervalle, donc continue sur tout segment inclus dans l'intérieur de ce même intervalle, donc continue en tout point de celui-ci.

□

7 Encadrement d'une fonction convexe par sa corde/tangente

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- Si $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$, alors la courbe représentative de la fonction f est au dessus de la corde reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ sur l'intervalle $[a, b]$, i.e.

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Si $a \in I$, alors la courbe représentative de la fonction f est au dessus de sa tangente en a , i.e.

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(a) + (x - a)f'(a)$$

Démonstration. ▷ *Majoration par la corde.* Soit f convexe sur I et $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. Soit $x \in [a, b]$ fixé quelconque.

- si $x = a$ ou $x = b$, l'égalité à prouver est immédiate.
- si $a < x < b$, appliquons la caractérisation de la convexité par les pentes :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

d'où, après multiplication par $x - a > 0$,

$$f(x) - f(a) \geq (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui donne le résultat.

- ▷ *Minoration par la tangente.* Soit f convexe sur I et $a \in I$ un point en lequel f est dérivable. Soit $x \in I$ fixé quelconque.

- si $x = a$, alors $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a)$
- si $x < a$, alors pour tout $h \in]0, a - x[$, par caractérisation de la convexité par les pentes,

$$x < a - h < a \implies \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a) - f(a - h)}{a - (a - h)}$$

donc

$$\forall h \in]0, a - x[, \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \underbrace{\frac{f(a) - f(a - h)}{a - (a - h)}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)}$$

car f est dérivable en a

si bien qu'en passant à la limite sur $h \rightarrow 0$,

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq f'(a)$$

En multipliant l'inégalité ci-dessus par $(a - x) \geq 0$, on obtient le résultat.

— si $x > a$, alors pour tout $h \in]0, x - a[$, par caractérisation de la convexité par les pentes,

$$a < a + h < x \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$$

donc

$$\forall h \in]0, x - a[, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \underbrace{\frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)} \\ \text{car } f \text{ est dérivable en } a$$

si bien qu'en passant à la limite sur $h \rightarrow 0$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq f'(a)$$

En multipliant l'inégalité ci-dessus par $(x - a) \geq 0$, on obtient le résultat. \square

8 Unicité de la partie régulière d'un développement limité

Démonstration. Soit f une fonction admettant un $DL_n(x_0)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

Supposons que f admette deux développements limités. C'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $b \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Posons $u = x - x_0$ et $\tilde{f}(u) = f(x_0 + u)$ de sorte que les hypothèses sur f se traduisent par l'existence d'un $DL_n(0)$ pour \tilde{f} :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k u^k + o(u^n) \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n b_k u^k + o(u^n)$$

Appliquons la définition d'un $DL_n(0)$. Il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 définies sur $\mathcal{D}_{\tilde{f}}$ tels que

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}, \tilde{f}(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k + u^n \varepsilon_1 \\ \forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}, \tilde{f}(u) = \sum_{k=0}^n b_k u^k + u^n \varepsilon_2 \\ \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_1(u) = 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_2(u) = 0$$

Donc

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}, \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) u^k = u^n (\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u))$$

Par l'absurde, supposons que $\exists k_0 \in \llbracket 0; n \rrbracket : a_{k_0} \neq b_{k_0}$. Posons k_1 le plus petit entier dont les coefficients a et b sont différents :

$$k_1 = \min \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid a_k \neq b_k\}$$

Nous obtenons alors

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}, \sum_{k=0}^{k_1-1} \underbrace{(a_k - b_k)}_{=0} u^k + (a_{k_1} - b_{k_1}) u^{k_1} + \sum_{k=k_1+1}^n (a_k - b_k) u^k = u^n (\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u))$$

Multiplions par u^{-k_1} puis calculons la limite en $u \rightarrow 0$. D'un côté, pour $k > k_1$, nous avons $k - k_1 \leq 1$ donc $(a_k - b_k) u^{k-k_1} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. De l'autre côté, u^{n-k_1} tend vers 0 ou 1 selon si $k_1 < n$ ou $k_1 = n$. Et, par hypothèse, $\varepsilon_2(u) - \varepsilon_1(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Par unicité de la limite, $a_{k_1} - b_{k_1} = 0$. Ce qui contredit la définition de k_1 .

Par conséquent $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = b_k$. Ainsi, la partie régulière d'un DL est unique. \square