

# Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

16 décembre 2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Semaine 6</b>	<b>3</b>
1.1	Montrer que si $f$ est impaire et bijective, alors $f^{-1}$ est aussi impaire. Donnez un/des exemples.	3
1.2	Limite (et preuve) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .	3
1.3	Limite en 0 de $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et limite en $+\infty$ suivant $n$ de $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .	4
1.4	Présentation exhaustive de la fonction arcsin.	6
1.5	Présentation exhaustive de la fonction arccos.	6
1.6	Présentation exhaustive de la fonction arctan.	7
1.7	2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$ , dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.	8
1.8	Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.	9
<b>2</b>	<b>Semaine 7</b>	<b>10</b>
2.1	Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$ . En Dédurre qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.	10
2.2	Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe	11
2.3	Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes	11
2.4	Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle	11
<b>3</b>	<b>Semaine 8</b>	<b>12</b>
3.1	Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDL2 à coeff. constants).	12
3.2	Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur $I$ (cas complexe puis cas réel).	12
3.3	Les solutions d'une EDL2 constituent un espace vectoriel.	14
3.4	Formules de Cramer pour les systèmes $2 \times 2$	14
<b>4</b>	<b>Semaine 9</b>	<b>17</b>
4.1	Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.	17
4.2	Si $A$ admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si $A$ admet une borne supérieure dans $A$ c'est son plus grand élément.	17
4.3	Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$	18
4.4	Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire	18
<b>5</b>	<b>Semaine 10</b>	<b>19</b>
5.1	Caractérisation de la densité d'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ dans une partie $B$ de $\mathbb{R}$ la contenant avec des $\varepsilon$ .	19
5.2	Théorème de la division pseudo-euclidienne dans $\mathbb{R}$	19
5.3	$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$	20
5.4	Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente	20
5.5	Une suite convergente est bornée	21

<b>6</b>	<b>Semaine 11</b>	<b>22</b>
6.1	Caractérisation séquentielle de la densité. . . . .	22
6.2	Théorème de la convergence monotone . . . . .	22
6.3	Théorème de Césarò . . . . .	23
6.4	Théorème de passage à la limite dans une inégalité. . . . .	24
6.5	Théorème des suites adjacentes . . . . .	24
6.6	*Facultative* Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	24
6.7	*Facultative* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée. . . . .	25
<b>7</b>	<b>Semaine 12</b>	<b>27</b>
7.1	Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée. . . . .	27
7.2	Monotonie de $u$ et des sous-suites des termes pairs et impairs de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la monotonie de $f$ . . . . .	27
7.3	Montrons que l'intérieur de l'ensemble des rationnels est vide. . . . .	28
7.4	Théorème sans nom version continue au voisinage de $a$ . . . . .	28

## 1 Semaine 6

### 1.1 Montrer que si $f$ est impaire et bijective, alors $f^{-1}$ est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

*Démonstration.* Soit  $f : I \rightarrow F$ , avec  $I, F$  deux parties non-vides de  $\mathbb{R}$ , une telle fonction et notons  $f^{-1}$  sa bijection réciproque. Si  $f$  est impaire sur  $I$ , alors pour tout  $x \in I$ ,  $-x \in I$ , ainsi  $I$  est centré en 0 et on a :

$$\forall x \in I, f(-x) = -f(x).$$

Ainsi, prenons  $y \in F$ , alors  $-y \in F$  par imparité et bijectivité de  $f$ . On a donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

D'où l'imparité de  $f^{-1}$ .

Pour ce qui est de l'exemple, prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction  $\sin$   $\left| \begin{smallmatrix} [-1,1] \\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{smallmatrix} \right|$  que l'on notera  $\widetilde{\sin}$ . Sa bijection réciproque est bien entendu  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

De la même manière que dans la démonstration du cas général, prenons  $y \in [-1, 1]$ , comme  $[-1, 1]$  est centré en 0,  $-y \in [-1, 1]$ , on a dès lors :

$$\begin{aligned} \arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\ &= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\ &= -\arcsin(y). \end{aligned}$$

□

### 1.2 Limite (et preuve) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .

*Démonstration.* Premièrement, posons :

$$\forall (x, \alpha, \beta) \in [1, +\infty[ \times (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}.$$

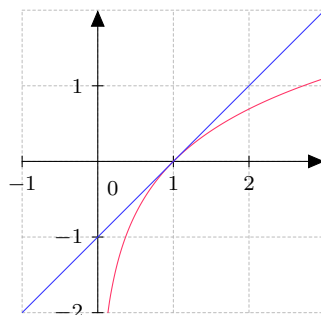
Deuxièmement, montrons que :

$$\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Soit  $x \in [1, +\infty[ = \mathcal{A}$ . Nous savons que la fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc en particulier sur  $\mathcal{A}$ . Ainsi,  $\ln$  est en dessous de toutes ses tangentes, d'où :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Illustration de l'inégalité :



**Figure 1.**  $\ln$  en rouge et la première bissectrice en bleu.

On peut alors diviser par  $x^2$  (car  $x \neq 0$ ) :

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{f_{1,2}(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}.$$

Donc par théorème d'encadrement  $f_{1,2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Dernièrement, le cas général. Soit  $x \in \mathcal{A}$  et soient  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . On fait une preuve directe.

$$\begin{aligned} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= \left( \frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \underbrace{\left( \frac{2\alpha}{\beta} \right)^\alpha}_{\substack{\text{cte} \\ \text{(définie!)}}} \cdot \underbrace{\left[ \frac{\ln \left( x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)}{\underbrace{\left( x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)^2}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}} \right]^\alpha}_{\substack{\text{d'après le dernier point} \\ \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}} \\ &\quad \underbrace{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}_{\substack{\text{par composition des limites} \\ \text{par produit}}} \end{aligned}$$

□

**1.3 Limite en 0 de  $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$  et limite en  $+\infty$  suivant  $n$  de  $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$  pour  $q \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .**

*Démonstration.*

Montrons que  $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ .

On fait toujours une preuve directe.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{2x}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{c'est} \\ \text{par produit}}} \cdot \underbrace{\left[ \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right]^2}_{\substack{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \text{limite usuelle} \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \text{par composition}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Trouvons la limite, sous réserve d'existence, de  $\frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta}$  pour  $q \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  suivant  $n$  en  $+\infty$ .

Remarquons que si  $q \leq 0$ , il est **nécessaire** d'avoir  $\alpha \in \mathbb{Z}^*$  sinon l'expression n'a tout simplement **aucun sens**. De fait, on supposera  $q > 0$  tout le long, les cas  $q < 0$  se font naturellement (convergence pour  $q \in \mathbb{R}_-$ ).

Soit donc  $0 < q < 1$ , ce cas est immédiat,  $((q^n)^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} = ((q^\alpha)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donc il s'agit de la suite géométrique de raison  $q^\alpha \in ]0, 1[$  et de premier terme  $q^{\min_I(n)\alpha}$  ( $\min_I(n)$ , avec  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , car la suite ne démarre pas forcément à 0), donc elle converge vers 0.

Si  $q \geq 1$ , on montre le cas trivial  $\alpha = \beta = 1$  :

$$\forall n \in \llbracket [q] + 1, +\infty \llbracket, \quad 0 \leq \frac{q^n}{n!} = \underbrace{\frac{q}{1} \times \frac{q}{2} \times \cdots \times \frac{q}{[q]}}_{= \lambda \text{ (une constante)}} \times \underbrace{\frac{q}{[q] + 1}}_{\leq 1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{q}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{q}{n} \leq \underbrace{\frac{\lambda q}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

Par théorème d'existence de limite par encadrement,  $\left(\frac{q^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et sa limite est 0.

Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$ , montrons le cas général pour  $q \geq 1$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(q^n)^\alpha}{(n!)^\beta} = \left( \frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!} \right)^\beta = \underbrace{\left( \underbrace{\frac{\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n}{n!}}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{c'est le cas trivial}}} \right)^\beta}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{par composition des limites } (\beta > 0)}}$$

□

## 1.4 Présentation exhaustive de la fonction $\arcsin$ .

*Démonstration.* Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\widetilde{\sin}$  (voir 1.). D'où :

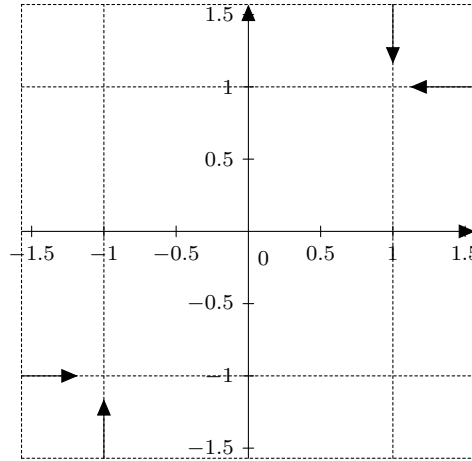
$$\arcsin = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto (\widetilde{\sin})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arcsin(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(\theta) = x$ .

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\widetilde{\sin}$  :

1.  $\arcsin$  est impaire.
2.  $\arcsin$  est strictement croissante sur  $[-1, 1]$ .
3.  $\arcsin \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ .
4.  $\arcsin \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ .
5.  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
6.  $\arcsin$  admet deux demi-tangentes verticales en  $-1$  et  $1$ .

Graphes de  $\arcsin$  :



**Figure 2.**  $\arcsin$  en bleu,  $\widetilde{\sin}$  en vert et la première bissectrice en rouge.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d' $\arcsin$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(x) \geq x.$$

□

## 1.5 Présentation exhaustive de la fonction $\arccos$ .

*Démonstration.* Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\cos|_{[0, \pi]}^{[-1, 1]} := \widetilde{\cos}$ . D'où :

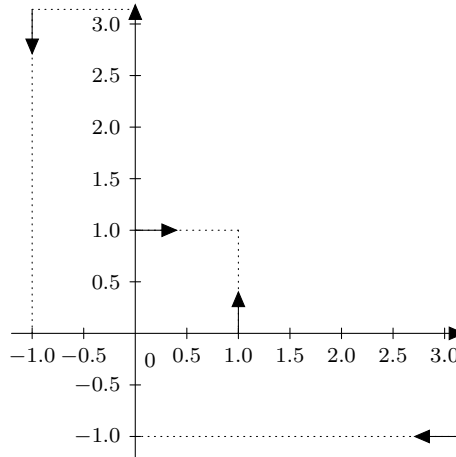
$$\arccos = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto (\widetilde{\cos})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arccos(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\cos(\theta) = x$ .

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\widetilde{\cos}$  :

1.  $\arccos$  est strictement décroissante sur  $[-1, 1]$ .
2.  $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [0, \pi])$ .
3.  $\arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, ]0, \pi[)$ .
4.  $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
5.  $\arccos$  admet deux demi-tangentes verticales en  $-1$  et  $1$ .

Graphes de  $\arccos$  :



**Figure 3.**  $\arccos$  en vert,  $\widetilde{\cos}$  en violet, la première bissectrice en rouge et  $y = \frac{\pi}{2} - x$  en rose.

□

## 1.6 Présentation exhaustive de la fonction arctan.

*Démonstration.*

Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} := \widetilde{\tan}$ .  
D'où :

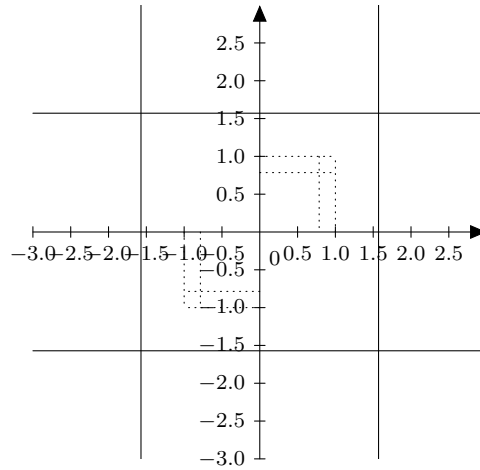
$$\arctan = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x & \mapsto & (\widetilde{\tan})^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arctan(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan(\theta) = x$ .

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\widetilde{\tan}$  :

1.  $\arctan$  est impaire.
2.  $\arctan \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ .
3.  $\arctan \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ .
4.  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Graphe de arctan :



**Figure 4.** arctan en vert,  $\widetilde{\tan}$  en bleu, la première bissectrice en rouge, et les fonctions  $y = \pm \frac{\pi}{2}$  et  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  en noir.

On a aussi (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(x) \leq x.$$

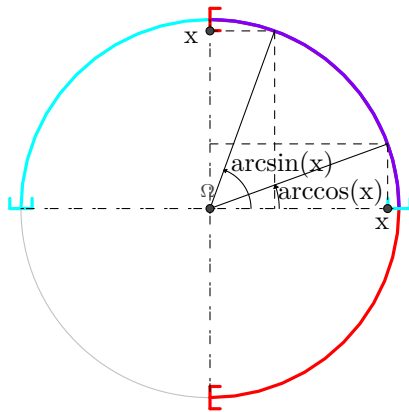
Et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

□

### 1.7 2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$ , dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.

*Démonstration.* L'interprétation géométrique sur  $[0, 1]$ , celle sur  $[-1, 0]$  est laissée au lecteur car il s'agit du même principe modulo des détails :



**Figure 5.**

Preuve formelle :

Soit  $x \in [-1, 1]$ . Posons  $\varphi = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Ainsi :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \arccos(\sin(\varphi)) = \varphi + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right),$$



or  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$  d'où  $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$  si bien que :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

□

## 1.8 Présentation analytique rapide des fonctions cosh et sinh.

*Démonstration.*

- Domaine de définition et symétries.

sinh et cosh sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,

(i)  $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ ,

$$(ii) \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sinh(-x) &= \frac{e^{-x}-e^x}{2} = -\frac{e^x-e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \\ \text{et} \\ \cosh(-x) &= \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x). \end{cases}$$

Donc sinh et cosh sont respectivement impaire et paire.

Nous les étudierons sur  $\mathbb{R}_+$  et pour les obtenir les graphes  $(\mathcal{C}_{\sinh}$  et  $\mathcal{C}_{\cosh})$  de ces fonctions sur  $\mathbb{R}$  à partir de ceux  $(\mathcal{C}_{\sinh}^+$  et  $\mathcal{C}_{\cosh}^+)$  obtenus sur  $\mathbb{R}_+$ , nous le compléterons en traçant les images de ces graphes par la symétrie centrale  $s$  de centre  $O$  et par la réflexion  $r$  d'axe  $(O, \vec{j})$  :

$$\mathcal{C}_{\sinh} = \mathcal{C}_{\sinh}^+ \cup s(\mathcal{C}_{\sinh}^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\cosh} = \mathcal{C}_{\cosh}^+ \cup r(\mathcal{C}_{\cosh}^+)$$

- Variations : triviales.
- Branches infinies en  $+\infty$  et position relative de  $\mathcal{C}_{\sinh}$  et  $\mathcal{C}_{\cosh}$ .

$$\frac{\cosh(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty} + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc le graphe de cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique  $(O, \vec{j})$ .

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$$

Donc les graphes des deux fonctions se rapprochent l'un de l'autre arbitrairement près lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , et le graphe de cosh est au-dessus de celui de sinh.

- Tangente au graphe de sinh à l'origine et position relative.

Il s'agira d'étudier  $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sinh(x) - x$ , de remarquer sa dérivabilité d'en étudier les variations puis de conclure, en précisant que cette étude révèle l'inflexion du graphe de sinh en 0.

□

## 2 Semaine 7

### 2.1 Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$ . En Dédire qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.

*Démonstration.* Soit  $m \in \mathbb{Z}$  fq. Calculons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt$$

Si  $m \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{imt}}{im} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{im} - \frac{1}{im} \right) = 0 \end{aligned}$$

Si  $m = 0$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq

Soient  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  les coefficients de  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , et  $s \in \mathbb{Z}$ , et  $r \in \mathbb{R}_+^*$  fq. tels que  $P$  soit nulle lorsqu'elle est évaluée sur  $\mathcal{C}(0, r)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^n a_k (re^{it})^k \right) e^{-imt} dt \\ &= \sum_{k=0}^n a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it(k-s)}}{2\pi} dt}_{I_k} \end{aligned}$$

On remarque que :

— Si  $s \notin [[0, n]]$ ,  $\{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = \emptyset$ , Donc

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k \in [[0, n]] \\ k=s}} a_k r^k = 0$$

— Si  $s \in [[0, n]]$ ,  $\{k \in [[0, n]] \mid k = s\} = s$ , Donc

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = \sum_{\substack{k \in [[0, n]] \\ k=s}} a_k s^k = a_s r^s$$

Or, puisque  $P$  s'annule sur le cercle de rayon  $r$  et de centre 0,  $\mathcal{C}(0, r)$ , ces sommes sont aussi nulles. On en déduit, en particulierisant pour un  $s \in [[0, n]]$  fixé quelconque que :

$$\sum_{k \in [[0, n]]} a_k s^k I_k = a_s r^s = 0 \implies a_s = 0$$

Donc

$$(\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall \theta \in \mathbb{R}, P(re^{i\theta}) = 0) \implies \forall s \in [[0, n]]$$

Pour la preuve réciproque, soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Soient  $(a_0, \dots, a_n) \in \{0\}^{n+1}$  les coefficients nuls de la fonction polynomiale  $P \in \mathbb{C}[z]$  définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

En remarquant que  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$ , puisque n'importe quel cercle centré en 0 est un sous ensemble de  $\mathbb{C}$ ,  $\exists r \in \mathbb{R}_+^* : \forall z \in \mathcal{C}(0, r), P(z) = 0$ .  $\square$

## 2.2 Preuve de la Linéarité de la dérivation d'une fonction complexe

*Démonstration.* Définissons les fonctions  $f_r$  et  $f_i$  comme les parties réelles et imaginaires de  $f$ .

Soient  $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^2$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  fixés quelconques.

$$\begin{aligned} f_r &= \operatorname{Re}(f), f_i = \operatorname{Im}(f) & g_r &= \operatorname{Re}(g), g_i = \operatorname{Im}(g) \\ \alpha_r &= \operatorname{Re}(\alpha), \alpha_i = \operatorname{Im}(\alpha) & \beta_r &= \operatorname{Re}(\beta), \beta_i = \operatorname{Im}(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) &= \operatorname{Re}((\alpha_r + i\alpha_i)(f_r + if_i) + (\beta_r + i\beta_i)(g_r + ig_i)) \\ &= \underbrace{\alpha_r f_r + \beta_r g_r - \alpha_i f_i - \beta_i g_i}_{\text{Combinaison linéaire de } \underbrace{(f_r, f_i, g_r, g_i) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^4}_{\operatorname{car}(f, g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})^2}} \end{aligned}$$

Donc, selon le théorème de stabilité par combinaison linéaire des fonctions à valeurs réelles,  $\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  et  $(\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g))' = \alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i'$

On montre de même que  $\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  et  $(\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g))' = \alpha_r f_i' + \alpha_i f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r'$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)' &= (\alpha_r f_r' + \beta_r g_r' - \alpha_i f_i' - \beta_i g_i') + i(\alpha_r f_i' + \alpha_i f_r' + \beta_r g_i' + \beta_i g_r') \\ &= \alpha_r (f_r' + if_i') + \beta_r (g_r' + ig_i') + \alpha_i \underbrace{(-f_i' + if_r')}_{i(f_r' + if_i')} + \beta_i \underbrace{(-g_i' + ig_r')}_{i(g_r' + ig_i')} \\ &= \alpha f' + \beta g' \end{aligned}$$

□

## 2.3 Dérivée composée d'une fonction à valeurs complexes

*Démonstration.* Soient  $f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C})$  et  $h \in \mathcal{D}^1(I, J)$  ( $I$  et  $J$  sont deux intervalles réels) fixés quelconques. Notons  $f_r$  et  $f_i$  respectivement la partie réelle et imaginaire de  $f$ .

$$\left. \begin{aligned} h &\in \mathcal{D}^1(I, J) \\ f_r &\in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R}), \text{ car } f \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{C}) \end{aligned} \right\} \implies f_r \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$$

On montre de même que  $f_i \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  donc  $f \circ h \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ .

De plus,

$$\begin{aligned} (f \circ h)' &= (f_r \circ h)' + i(f_i \circ h)' \\ &= (f_r' \circ h) \times h' + i((f_i' \circ h) \times h') \\ &= (f_r' \circ h + if_i' \circ h) \times h' \\ &= (f' \circ h) \times h' \end{aligned}$$

□

## 2.4 Caractérisation des fonctions dérivables de dérivée nulle sur un intervalle

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$  où  $I$  est un intervalle réel; Posons  $f_r = \operatorname{Re}(f)$  et  $f_i = \operatorname{Im}(f)$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in I, f'(t) = 0 &\iff \forall t \in I, f_r'(t) + if_i'(t) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I, f_r'(t) = 0 \\ \forall t \in I, f_i'(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \lambda_r \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_r(t) = \lambda_r \\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall t \in I, f_i(t) = \lambda_i \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall t \in I, f(t) = \lambda \end{aligned}$$

□

### 3 Semaine 8

#### 3.1 Preuve de l'expression des solutions réelles des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants réels dans le cas $\Delta < 0$ (en admettant la connaissance de l'expression des solutions à valeurs complexes des EDLH2 à coeff. constants).

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$  les ensembles des solutions complexes et réelles de l'équation différentielle, puisque nous nous plaçons dans le cas  $\Delta < 0$  et  $\alpha \pm i\beta$  les deux racines complexes conjuguées.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrons que  $\forall f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}, \text{Re}(f) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Soit  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$  fq.

$$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies \text{Re}(f) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Et, de plus, par morphisme additif de  $\text{Re}$

$$a_2 \text{Re}(f)'' + a_1 \text{Re}(f)' + a_0 \text{Re}(f) = \text{Re}(a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f) = 0$$

D'où, avec  $f : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$ ;  $\text{Re}(f(t)) = \text{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ . Qui appartient donc à  $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

En suivant le même raisonnement pour  $\text{Im}(f)$ ,  $(t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)) \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$

Ainsi, par combinaison linéaire (qui se base sur le principe de superposition),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$$

Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$  fq. Puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ .

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 : f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \right.$$

Or, puisque toutes les valeurs de  $f$  sont réelles, en notant  $(a_r, a_i, b_r, b_i)$  les parties réelles et imaginaires respectives de  $a$  et  $b$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \text{Re}(f(t)) \\ &= \text{Re}(a e^{(\alpha+i\beta)t} + b e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= \text{Re}((a_r + i a_i) e^{(\alpha+i\beta)t} + (b_r + i b_i) e^{(\alpha-i\beta)t}) \\ &= a_r \cos(\beta t) e^{\alpha} - a_i \sin(\beta t) e^{\alpha} + b_r \cos(\beta t) e^{\alpha} + b_i \sin(\beta t) e^{\alpha} \\ &= (a_r + b_r) \cos(\beta t) e^{\alpha} + (b_i - a_i) \sin(\beta t) e^{\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f \in \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ce qui conclut la preuve par double inclusion. □

#### 3.2 Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants et second membre continu sur $I$ (cas complexe puis cas réel).

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \text{ sur } J \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{array} \right. \quad \text{où } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2, t_0 \in J, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*, b \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$$

Si  $b$  est continu sur  $J$ , alors ce problème de Cauchy admet une unique solution définie sur  $J$ .

*Démonstration. Cas 1.*  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nous savons que sous l'hypothèse de continuité de  $b$  sur  $J$ , les solutions de (EDL2) définies sur  $J$  constituent le plan affine  $S$  :

$$S = \{ \lambda f_1 + \mu f_2 + s \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

où  $s$  est une solution particulière de (EDL2),  $(f_1, f_2)$  sont deux solutions de (EDLH2) qui engendrent  $S_h$ . On a :

$$\begin{aligned} f : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ est sol. du pb de Cauchy} &\iff \begin{cases} f \text{ sol de (EDL2) sur } J \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in S \\ f(t_0) = \alpha_0 \\ f'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) + s(t_0) = \alpha_0 \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) + s'(t_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} f = \lambda f_1 + \mu f_2 + s \\ \lambda f_1(t_0) + \mu f_2(t_0) = \alpha_0 - s(t_0) \\ \lambda f_1'(t_0) + \mu f_2'(t_0) = \alpha_1 - s'(t_0) \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $(\lambda, \mu)$  doit être solution d'un système linéaire (2,2). On a une unique solution si et seulement si les déterminant de ce système est nul.

Explicitons alors le déterminant de ce système, que l'on notera  $D$ .

$$D = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = f_1(t_0) \cdot f_2'(t_0) - f_2(t_0) \cdot f_1'(t_0)$$

Notons  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique de (EDL2) ( $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ ). On distingue alors deux cas selon la nullité ou non de  $\Delta$ . Traitons d'abord le cas  $\Delta \neq 0$ . On peut choisir :

$$\begin{aligned} f_1(t_0) &= e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = e^{r_2 t_0} \\ f_1'(t_0) &= r_1 e^{r_1 t_0} \text{ et } f_2'(t_0) = r_2 e^{r_2 t_0} \end{aligned}$$

Donc (en sachant que  $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$ ) :

$$D = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} = (r_2 - r_1) \cdot e^{r_1 t_0 + r_2 t_0} \neq 0$$

Dans le deuxième cas, on a  $\Delta = 0$  ; on peut alors prendre :

$$f_1(t_0) = e^{r_0 t_0} \text{ et } f_2(t_0) = t_0 e^{r_0 t_0}$$

Ainsi :

$$D = e^{r_0 t_0} (r_0 t_0 e^{r_0 t_0} + e^{r_0 t_0}) - r_0 e^{r_0 t_0} \times t_0 e^{r_0 t_0} = e^{2r_0 t_0} \neq 0$$

On remarque alors que, dans les deux cas,  $D \neq 0$ , donc le système (2,2) étudié admet une unique solution, donc il existe

un unique couple  $(\lambda, \mu)$  le vérifiant d'où l'unicité et existence d'une solution au problème de Cauchy.

**Cas 2.**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ ,  $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$ ,  $b \in C^0(J, \mathbb{R})$

**Existence :** Puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , le problème de Cauchy admet, dans  $\mathbb{R}$ , une solution à valeurs complexes  $g$ . Posons  $f = \text{Re}(g)$  et montrons que  $f$  est une solution réelle du problème de Cauchy.

★  $g \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{C})$  donc  $f \in \mathcal{D}^2(J, \mathbb{R})$

★  $g$  vérifie  $a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b$  sur  $J$  donc en prenant  $\text{Re}(\cdot)$  :

$$\text{Re}(a_2 g'' + a_1 g' + a_0 g = b) = \text{Re}(b) \iff a_2 \text{Re}(g'') + a_1 \text{Re}(g') + a_0 \text{Re}(g) = b$$

$$\iff a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \text{ sur } J$$

- ★  $f(t_0) = \operatorname{Re}(g(t_0)) = \operatorname{Re}(\alpha_0) = \alpha_0$
- ★  $f'(t_0) = \operatorname{Re}(g(t_0))' = \operatorname{Re}(g'(t_0)) = \operatorname{Re}(\alpha_1) = \alpha_1$

Donc  $f$  est une solution réelle définie sur  $J$  au problème de Cauchy.

**Unicité :** Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions à valeurs réelles solutions du problème de Cauchy ci-dessus fixées quelconques : puisque  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  solutions du même problème de Cauchy ; or il y a unicité de la solution au problème de Cauchy dans les fonctions à valeurs complexes, donc  $f_1 = f_2$  dans  $\mathcal{F}(J, \mathbb{C})$ , donc  $f_1 = f_2$  dans  $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ .  $\square$

### 3.3 Les solutions d'une EDL<sub>2</sub> constituent un espace vectoriel.

Soient  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $f$  et  $g$  les solutions, définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur  $\mathbb{R}$  de  $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$  pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  de  $y'' + ay' + by = 0$  est  $\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$  ?

*Démonstration.* La solution s'exprime simplement comme combinaison linéaire de  $f$  et  $g$ , plus précisément, la combinaison linéaire en  $\alpha$  et  $\beta$ . En effet, soient de tels scalaires, et soient  $f$  et  $g$  de telles solutions, on a :

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'' + a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' + b(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = 0, \text{ par définition des espaces vectoriels.}$$

Et de même,  $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(3) = \alpha \cdot f'(3) + \beta \cdot g'(3) = \alpha$ , et  $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)''(3) = \alpha \cdot f''(3) + \beta \cdot g''(3) = \beta$ .

Ce qui suffit par unicité des solutions ( de la donc ) d'un problème de Cauchy dans le cadre du théorème du cours.

Pour ce qui est du plan vectoriel des solutions, noté  $\Omega$ , notons aussi  $\Phi$  l'ensemble proposé.

L'inclusion  $\Phi \subset \Omega$  est triviale par propriété de linéarité des espaces vectoriels. Finalement, pour  $\Omega \subset \Phi$ , soit  $\omega \in \Omega$ , forcément,  $\omega$  vérifie l'EDL<sub>2</sub>, mais aussi des conditions de Cauchy bien que celles-ci soient non-spécifiées, ainsi posons  $\omega'(3) = \delta$  et  $\omega''(3) = \theta$ , donc en particulier,  $\omega = \delta \cdot f + \theta \cdot g$ , d'où l'égalité par double inclusion.  $\square$

### 3.4 Formules de Cramer pour les systèmes $2 \times 2$

Résolution générale des systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues en fonction du déterminant du systèmes (**tous les cas ne sont pas nécessairement à envisager**)

Considérons le système linéaire à deux équations et à deux inconnues  $(x, y)$  :

$$(S) \begin{cases} ax + by = b_1 & (E_1) \\ cx + dy = b_2 & (E_2) \end{cases} \quad (1)$$

dont  $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$  sont les coefficients et  $(b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$  sont les seconds membres.

1. (S) admet une unique solution si et seulement si  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ . De plus, dans ce cas, la solution est

$$\left( \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right) \quad (2)$$

2. Si  $ad - bc = 0$ , alors l'ensemble des solutions est soit vide, soit une droite affine de  $\mathbb{K}^2$ , soit  $\mathbb{K}^2$ .

*Démonstration.* Procédons par disjonction de cas.

- Supposons que  $ad - bc \neq 0$ .
- Supposons que  $a \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (d - \frac{bc}{a})y = b_2 - \frac{c}{a}b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a}L_2) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (ad - bc)y = ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax = \frac{1}{a} \left( b_1 - b \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \right) = \frac{1}{a} \frac{adb_1 - bcb_1 + abb_2 - bcb_2}{ad - bc} \\ y = \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax = \frac{db_1 - bb_2}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y = \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

- Supposons que  $a = 0$ . L'hypothèse  $ad - bc \neq 0$  implique  $bc \neq 0$  donc  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{c} \left( b_2 - d \frac{b_1}{b} \right) \\ y = \frac{b_1}{b} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax = \frac{db_1 - bb_2}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y = \frac{-cb_1}{-bc} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

$$ad - bc = 0.$$

- Supposons  $a \neq 0$ . En reprenant la méthode pivot de Gauss,

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} ax + by = b_1 \\ (d - \frac{bc}{a})y = b_2 - \frac{c}{a}b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a}L_2) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ax + \underbrace{(ad - bc)}_0 y = ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système est de rang 1 avec une condition de compatibilité.

Si  $ab_2 - cb_1 \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.

Sinon  $ab_2 - cb_1 = 0$

$$(S) \iff ax + by = b_1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a} - b \frac{t}{a} \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\} \quad (3)$$

Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Supposons  $a = 0$ . Puisque  $ad - bc = 0$ , alors  $bc = 0$  donc  $b$  ou  $c$  est nul.
- Si  $c = 0$ ,

$$(S) \iff \begin{cases} by = b_1 \\ dy = b_2 \end{cases}$$

- Si  $b = 0$ ,

$$(S) \iff \begin{cases} by &= b_1 \\ 0 &= b_2 \end{cases}$$

- Si  $b_2 = 0$ , (S) n'admet aucune solution.
- Si  $b_2 \neq 0$ ,  $(S) \iff dy = b_2$ 
  - Si  $d = 0$ ,  $(S) \iff 0 = b_2$ . (S) n'admet aucune solution ( $b_2 \neq 0$ ) ou admet  $\mathbb{K}^2$  comme ensemble des solutions ( $b_2 = 0$ ).

- Si  $d \neq 0$ ,  $(S) \iff y = \frac{b_2}{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_2}{d} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ . Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si  $b \neq 0$

$$(S) \iff \begin{cases} y &= \frac{b_1}{b} \\ 0 &= b_2 - \frac{db_1}{b} \end{cases}$$

- Si  $b_2 - \frac{db_1}{b} \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.
- Si  $b_2 - \frac{db_1}{b} = 0$ ,  $(S) \iff y = \frac{b_1}{b} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_1}{b} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$  donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si  $c \neq 0$  alors  $b = 0$

$$(S) \iff \begin{cases} 0 &= b_1 \\ cx + dy &= b_2 \end{cases}$$

- Si  $b_1 \neq 0$ , (S) n'admet aucune solution.
- Si  $b_1 = 0$ ,  $(S) \iff x = \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$  donc (S) admet une droite affine de solutions.

□



## 4 Semaine 9

### 4.1 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

Soit  $x \in E$ .

La classe de  $x$ , notée  $\bar{x}$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  en relation avec  $x$ .

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \quad (4)$$

*Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.*

Soit  $(x, y) \in E^2$  fq.

- Si  $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ , rien à démontrer.
- Sinon  $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$  donc  $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ . Fixons un tel  $z$ .  
Soit  $x' \in \bar{x}$  fq.

$$\left. \begin{array}{l} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \xRightarrow{\text{symétrie}} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \xRightarrow{\text{symétrie}} z\mathcal{R}y \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}z \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}y \xRightarrow{\text{symétrie}} y\mathcal{R}x'$$

Donc  $x' \in \bar{y}$  donc  $\bar{x} \subset \bar{y}$ .

En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on montre la deuxième inclusion  $\bar{y} \subset \bar{x}$ .

*Montrons que les classes d'équivalence de  $E$  constituent une partition de  $E$ .*

Soit  $\mathcal{S}$  un système de représentant des classes fixé quelconque.

- Soit  $s \in \mathcal{S}$  fq.  $\bar{s} \neq \emptyset$  car  $s\mathcal{R}s$  par réflexivité.
- Soit  $(s, s') \in \mathcal{S}^2$  fq. D'après la démonstration ci-dessus ci-dessus,  $\bar{s} \cap \bar{s}' = \emptyset$  ou  $\bar{s} = \bar{s}'$ . Si  $\bar{s} = \bar{s}'$  alors  $s$  et  $s'$  représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent,  $\bar{s}$  et  $\bar{s}'$  sont disjoints.
- $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$  car  $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \subset E$  par définition d'une classe d'équivalence.  
Réciproquement, soit  $x \in E$  fq.  
Par réflexivité de  $\mathcal{R}$ ,  $x \in \bar{x}$ .  
Par définition d'un système de classe  $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$  donc  $\bar{s}_x = \bar{x}$ . Donc  $x \in \bar{s}_x \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .  
Donc  $E \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .  
Par double inclusion,  $E = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$ .

Ainsi,

$$E = \coprod_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \quad (5)$$

□

### 4.2 Si $A$ admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si $A$ admet une borne supérieure dans $A$ c'est son plus grand élément.

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné, et  $A$  une partie non-vidée de  $E$ .

Si  $A$  admet un plus grand élément alors  $A$  admet une borne supérieure et  $\sup A = \max A$ .

Si  $A$  admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors  $A$  admet un plus grand élément et  $\max A = \sup A$ .

*Démonstration.* Soient un tel ensemble  $E$  et une telle partie  $A$  et notons  $M$  son plus grand élément.

Posons l'ensemble des majorants de  $A$ ,  $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A, a \leq m\}$ .

Par définition :

$$\forall m \in M(A), M \leq m,$$

car  $M \in A$ , mais comme  $M \in M(A)$ , on a directement que  $M = \min M(A) = \sup A$ .

Pseudo-réciproquement, soit  $A$  une partie de  $E$  admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne  $S$ .

Comme  $S \in M(A)$ , par définition,  $S$  est plus grand que tous les éléments de  $A$  mais appartient à  $A$ , donc de tous les éléments de  $A$ ,  $S$  est le plus grand.  $\square$

### 4.3 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in \llbracket 0; |b| - 1 \rrbracket \end{cases} \quad (6)$$

*Démonstration. Unicité* Soient deux tels entiers  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  et deux couples  $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})^2$  tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r \leq |b| - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' \leq |b| - 1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme  $-(|b| - 1) \leq r' - r \leq |b| - 1$ , il vient en divisant par  $|b|$  l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque  $q$  et  $q'$  sont dans  $\mathbb{Z}$  leur différence est obligatoirement 0, ainsi  $q = q'$  ce qui implique  $r = r'$  et donc on a unicité de ladite écriture de  $a$ .

*Existence* Posons pour  $b \geq 1$ ,  $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$

—  $\Omega \subset \mathbb{Z}$

— non-vidé car  $-|a| \in \Omega$  ( $\mathbb{Z}$  archimédien suffit ...)

—  $\Omega$  est majoré par  $|a|$  car supposons, par l'absurde, que  $\exists k \in \Omega : k > |a|$ , alors  $kb > |a|b > a$  ce qui contradiction avec la définition d' $\Omega$ .

Donc  $\Omega$  admet un plus grand élément, notons-le  $q$ .

Posons  $r = a - bq$ . Par construction,  $a = bq + r$  et comme  $q = \max \Omega$  et  $\Omega \subset \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  donc  $r \in \mathbb{Z}$ . Par suite,  $q \in \Omega$  donc  $bq \leq a$  d'où  $0 \leq r$ . Et  $q = \max \Omega$  donc  $b(q + 1) > a$  d'où  $b > r$ , c'est-à-dire,  $r \in \llbracket 0, |b| - 1 \rrbracket$ .

Si  $b < 1$ , il suffit de prendre  $q \leftarrow -q$  dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de  $a$ .  $\square$

### 4.4 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  une suite décroissante et minorée fixée quelconque.

Considérons  $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite  $u$ .

$A$  est :

— une partie de  $\mathbb{Z}$  car  $u$  est à valeur dans  $\mathbb{Z}$

— non vide car  $u_0 \in A$

— minoré car  $u$  est minorée

Donc  $A$  admet un plus petit élément. Donc  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = \min A$ . Fixons un tel  $n_0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq tq  $n \geq n_0$ .

$$\left. \begin{aligned} u_n \in A &\implies u_n \geq \min A = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geq n_0 &\text{ donc } u_n \leq u_{n_0} \end{aligned} \right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi,  $u$  est stationnaire.  $\square$

## 5 Semaine 10

### 5.1 Caractérisation de la densité d'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ dans une partie $B$ de $\mathbb{R}$ la contenant avec des $\varepsilon$ .

Soient  $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$  fq.

*Définition de la densité*

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, B \cap ]u, v[ \neq \emptyset \implies A \cap ]u, v[ \neq \emptyset \end{cases} \quad (7)$$

*Caractérisation de la densité par les  $\varepsilon$*

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases} \quad (8)$$

*Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité*

*Sens Direct* Supposons  $A$  dense dans  $B$

— Par déf  $A \subset B$

— Soit  $b \in B$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fq

Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour  $u \leftarrow b - \varepsilon$  et  $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \neq \emptyset \implies A \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \neq \emptyset$$

Or,  $B \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \neq \emptyset$  est vraie donc  $A \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \neq \emptyset$

Ce qui permet de choisir  $a \in A \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ . Un tel  $a$  vérifie  $a \in A$  et  $a \in ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \iff |b - a| < \varepsilon$

$$\text{Sens réciproque Supposons } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon \end{cases}$$

— On a donc  $A \subset B$

— Soient  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  fq tq  $B \cap ]u, v[ \neq \emptyset$

Soit  $b \in B \cap ]u, v[$  fq. Appliquons l'hypothèse pour  $b \leftarrow b$  et  $\varepsilon \leftarrow \min\{v - b, b - u\}$ , qui est autorisé  $v - b$  et  $b - u$  sont positifs

Donc  $\exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$

Fixons un tel  $a$ , alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leq v - b} \leq b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v - b, b - u\}}_{\leq b - u} \geq b - (b - u) = u \end{cases}$$

Donc  $a \in ]u, v[$ .

Donc  $A \cap ]u, v[ \neq \emptyset$

□

### 5.2 Théorème de la division pseudo-euclidienne dans $\mathbb{R}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \exists (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[ \end{cases} \quad (9)$$

*Démonstration. Unicité* Soient deux tels entiers  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et deux couples  $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})^2$  tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0; |b|[ \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ r' \in [0; |b|[ \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme  $-|b| < r' - r < |b|$ , il vient en divisant par  $|b|$  l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque  $q$  et  $q'$  sont dans  $\mathbb{Z}$  leur différence est obligatoirement 0, ainsi  $q = q'$  ce qui implique  $r = r'$  et donc on a unicité de ladite écriture de  $a$ .

*Existence* Posons pour  $b > 0$ ,  $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vide car  $-|a| \in \Omega$  ( $\mathbb{Z}$  archimédien suffit ...)
- $\Omega$  est majoré par  $|a|$  car supposons, par l'absurde, que  $\exists k \in \Omega : k > |a|$ , alors  $kb > |a|b > a$  ce qui contradiction avec la définition d' $\Omega$ .

Donc  $\Omega$  admet un plus grand élément, notons-le  $q$ .

Posons  $r = a - bq$ . Par construction,  $a = bq + r$  et comme  $q = \max \Omega$  et  $r \in \mathbb{R}$ .

Par suite,  $q \in \Omega$  donc  $bq \leq a$  d'où  $0 \leq r$ . Et  $q = \max \Omega$  donc  $b(q + 1) > a$  d'où  $b > r$ , c'est-à-dire,  $r \in [0, |b|$ .

Si  $b < 0$ , il suffit de prendre  $q \leftarrow -q$  dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de  $a$ .  $\square$

### 5.3 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}$  fq. Posons  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq.

- $a_n \in \mathbb{Q}$  car  $\lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$  et  $2^n \in \mathbb{N}$ .

—

$$a_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leq a_n \leq x$$

Or  $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité,  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fq.

Alors  $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ . D'après la démonstration précédente,  $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + \sqrt{2}$ .

Fixons une telle suite  $b$ . Considérons  $c = b - \sqrt{2}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq.

- $c_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  car  $b_n \in \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

—

$$\left. \begin{array}{l} b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{array} \right\} \implies c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### 5.4 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$  Si  $u$  converge vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , alors  $\ell_1 = \ell_2$

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $u$  converge vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , et  $\ell_1 \neq \ell_2$ . On prendra  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$  assez petit pour que les tubes soient disjoints. Posons donc  $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de  $u$  vers  $\ell_1$ , pour  $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$ , ce qui est autorisé car  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon_0 \quad (10)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon_0 \quad (11)$$

Fixons de tels  $N_1$  et  $N_2$ .

— Posons  $n_0 = N_1 + N_2$

—  $n_0 \geq N_1$ , donc (10) s'applique :  $|u_{n_0} - \ell_1| \leq \varepsilon_0$

—  $n_0 \geq N_2$ , donc (11) s'applique :  $|u_{n_0} - \ell_2| \leq \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\ &\leq \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leq \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leq \varepsilon_0} \\ &\leq 2 \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\ \implies 1 &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Contradiction

□

## 5.5 Une suite convergente est bornée

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  convergente. Posons  $\ell = \lim u$  Appliquons la définition de la convergence pour  $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| \leq 1$$

Fixons un tel  $N_1$  Posons alors  $M = \max \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$ , qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici  $(\mathbb{R}, \leq)$ ) admet un pgE.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq.

— Si  $n \in [0, N_1]$ ,  $|u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell| + 1\}$  donc  $|u_n| \leq M$

— Sinon,

$$\begin{aligned} n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leq 1 \\ &\implies |u_n| - |\ell| \leq 1 \\ &\implies |u_n| \leq 1 + |\ell| \leq M \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

□

## 6 Semaine 11

### 6.1 Caractérisation séquentielle de la densité.

Soient  $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})^2$ . Montrons que :

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

*Démonstration.* Sens indirect : supposons  $A \subset B$  et  $\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b$  :

- ★  $A \subset B$  par hypothèse.
- ★ Montrons que  $\forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$  (on utilise la caractérisation de la densité avec les  $\varepsilon$ )  
Soient  $b \in B$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fixés quelconques :  
Par hypothèse appliquée pour  $b \leftarrow b$  :  $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$   
Appliquons la définition de la convergence de  $(a_n)$  vers  $b$  pour  $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$  :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons un tel  $N$  :

En particulier,  $a_N \in A$  et  $|a_N - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

Donc  $A$  est dense dans  $B$ .

Sens direct : supposons  $A$  dense dans  $B$  :

- ★ Par définition,  $A \subset B$
- ★ Soit  $b \in B$  fixé quelconque.  
Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé quelconque :  
Appliquons la caractérisation de la densité par les  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$  (autorisé car  $\frac{1}{2^n} > 0$ ), et  $b \leftarrow b$  :

$$\exists a \in A : |a - b| \leq \frac{1}{2^n}$$

Notons  $a_n$  un tel élément. Nous venons de construire  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème sans nom,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b$ .

□

### 6.2 Théorème de la convergence monotone

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite monotone :

1. Si  $u$  est croissante
  - (i) Soit  $u$  est majorée, et dans ce cas,  $\lim u = \sup\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$
  - (ii) Soit  $u$  n'est pas bornée, et dans ce cas,  $u$  diverge vers  $+\infty$ .
2. Si  $u$  est décroissante :
  - (i) Soit  $u$  est minorée, et dans ce cas,  $\lim u = \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$
  - (ii) Soit  $u$  n'est pas bornée, et dans ce cas,  $u$  diverge vers  $-\infty$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  monotone fq.

1. Supposons que  $u$  est croissante.
  - (i) Supposons que  $u$  est majorée.  
Alors  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ . Fixons un tel  $M$ .  
 $\Omega = \{u_k | k \in \mathbb{N}\}$  est
    - une partie de  $\mathbb{R}$
    - non vide car  $u_0$  y appartient
    - majorée par  $M$

donc elle admet une borne supérieure et notons-la  $\sigma$ .

Soit  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fq.

$\sigma - \epsilon < \sigma$  donc  $\sigma - \epsilon$  ne majore pas  $\Omega$ . Donc  $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > \sigma - \epsilon$ . Fixons un tel  $N$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq tq  $n \geq N$ .

Alors  $u_n \underset{\text{par croissant de } u}{\geq} u_N \geq \sigma - \epsilon$  et  $u_n \underset{\text{par définition de } \sigma}{\leq} \sigma$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma - \epsilon \leq u_n \leq \sigma &\implies -\epsilon \leq u_n - \sigma \leq 0 \\ &\implies |u_n - \sigma| \leq \epsilon \end{aligned}$$

Donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$ .

(ii) Supposons que  $u$  n'est pas bornée.

Soit  $A \in \mathbb{R}$  fq.

$u$  n'est pas bornée donc  $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > A$ .

Or  $u$  est croissante donc  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A$ .

Donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

2. Supposons que  $u$  est décroissante.

Il suffit dans la preuve ci-dessus de remplacer les inégalités inférieures par des inégalités supérieures et inversement et d'utiliser la notion de borne inférieure plutôt que de borne supérieure.

(i) Si  $u$  est minorée,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$ .

(ii) Si  $u$  n'est pas bornée,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ .

□

### 6.3 Théorème de Césaro

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Alors la moyenne arithmétique des  $n \in \mathbb{N}$  premiers termes (appelée moyenne de Césaro) converge vers  $\ell$ .

*Démonstration.* Soient  $u$  une telle suite,  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\ell \in \mathbb{R}$  ladite limite de  $u$ . Appliquons la définition de la convergence de  $u$  pour  $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$  :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Fixons un tel  $N$ . Posons  $\omega = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N$ . Calculons :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell|}_{= \omega \in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n-1} |u_k - \ell|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} \leq \frac{\omega}{n} + \underbrace{\frac{\epsilon}{2n}}_{\leq \frac{\epsilon}{2}}.$$

Ces majorations sont issues de l'inégalité triangulaire et de la convergence de  $u$ . De plus, comme la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\omega}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, on écrit sa définition pour  $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$  :

$$\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \implies |v_n| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On fixe un tel  $N'$  et on pose  $\Lambda = \max(N, N')$  qui a bien un sens car  $\{N, N'\}$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$ . De la même manière qu'auparavant, pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq \Lambda$ , on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \underbrace{\frac{\omega}{n}}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

C'est le théorème souhaité.

□

## 6.4 Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

Soient  $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  :

- (i) Si  $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0 \\ u \text{ converge} \end{array} \right|$   
Alors  $\lim u \geq 0$
- (ii) Si  $\left| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \\ u \text{ et } v \text{ convergent} \end{array} \right|$   
Alors  $\lim u \leq \lim v$

*Démonstration.*

- (i) L'hypothèse  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0$  permet d'affirmer que  $u$  et  $|u|$  coïncident à partir d'un certain rang.  
Par ailleurs, la convergence de  $u$  et la continuité de  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{R}$  donc en  $\lim u$  donnent  $|u|$  converge vers  $|\lim u|$ .  
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que  $u$  et  $|u|$  ont la même limite.  
Donc  $\lim u = |\lim u| \geq 0$
- (ii)  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \Rightarrow v_n - u_n \geq 0$   
 $u$  et  $v$  convergent  $\Rightarrow v - u$  converge vers  $\lim v - \lim u$ .  
On applique (i) pour  $u \leftarrow v - u$ , autorisé car  $u$  et  $v$  convergent.  
On obtient  $\lim v - \lim u \geq 0$  d'où  $\lim u \leq \lim v$ .

□

## 6.5 Théorème des suites adjacentes

Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles adjacentes. Alors  $u$  et  $v$  convergent et ont la même limite.

*Démonstration.* Soient  $u$  et  $v$  de telles suites. Quitte à inverser les rôles desdites suites, prenons  $u$  croissante et  $v$  décroissante.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq v_n \leq \underbrace{v_0}_{\in \mathbb{R}}) \wedge (\underbrace{u_0}_{\in \mathbb{R}} \leq u_n \leq v_n),$$

car la monotonie des suites induit ces inégalités. D'après le théorème de limite monotone,  $u$  étant croissante et majorée elle converge,  $v$  étant décroissante et minorée elle converge.

Il s'en suit que par définition des suites adjacentes :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \quad \underbrace{=}_{u, v \text{ convergent}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Ainsi,  $\lim u = \lim v$ .

□

## 6.6 \*Facultative\* Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée réelle admet une sous-suite convergente.

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée est non vide.

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  fq bornée.

Alors  $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

Construisons une suite de segments dans  $[-M; M]$  de plus en plus petits par dichotomie.

Posons  $a_0 = -M$ ,  $b_0 = M$  et définissons les suites  $c$  et  $I$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  par  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $I_n = [a_n; b_n]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Supposons  $a_n$  et  $b_n$  construits et  $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$  infini. Construisons les termes d'indices  $n + 1$ .

Posons  $\left| \begin{array}{l} I_n^- = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n; c_n]\} \\ I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [c_n; b_n]\} \end{array} \right|$

Nous avons  $I_n^- \cup I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$  donc  $I_n^-$  ou  $I_n^+$  est infini.



- Si  $I_n^-$  est infini, posons  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$ .  
Ainsi  $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^-$  est infini.
- Si  $I_n^+$  est infini, posons  $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$ .  
Ainsi  $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^+$  est infini.

Étudions la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Nous avons toujours  $a_n \leq b_n$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \neq \emptyset$
- Par construction,  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$
- $|I_{n+1}| = |a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \frac{1}{2}|I_n|$  donc la suite des cardinaux est une suite géométrique de raison  $1/2$ . Donc  $|I_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc, d'après le théorème des segments emboîtés,  $\exists ! \ell \in \mathbb{R} : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ . Fixons un tel  $\ell$ .

Construisons maintenant une extractrice  $\varphi$  de  $u$ .

Posons  $\varphi(0) = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fq. Supposons  $\varphi(n)$  construite.

$$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1} \wedge k > \varphi(n)\}$$

$\varphi(n+1)$  est bien définie car  $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\}$  est une partie de  $\mathbb{N}$  non bornée (car infinie).

Ainsi, nous avons construit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante. Nous pouvons extraire une sous-suite de  $u$ . Or  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in I_n$  donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{a_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell} \leq u_{\varphi(n)} \leq \underbrace{b_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell}$$

Donc, d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,  $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

Ainsi  $\ell \in L_u$ . □

## 6.7 \*Facultative\* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit  $u$  une suite bornée.  $u$  converge si et seulement si il existe  $\ell \in \mathbb{K}$  tel que  $L(u)$  est le singleton  $\ell$

*Démonstration.* Traitons le cas réel, celui sur  $\mathbb{C}$  est à adapter sans peine.

Supposons que  $u$  converge et posons  $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$ . Toutes les sous-suites de  $u$  convergent vers  $\ell$  donc  $L(u) = \{\ell\}$ .

Supposons maintenant qu'il existe un unique  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $L(u) = \{\ell\}$ . Par l'absurde, supposons que  $u$  ne converge pas vers  $\ell$ , c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel  $\varepsilon$ .

Posons  $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$ , ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de  $\mathbb{N}$ .

Posons ensuite  $\varphi(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(0) < k\}$ , ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé  $\varphi(n)$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse  $u$  est bornée, donc il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M,$$

donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $|u_{\varphi(n)}| \leq M$ , donc  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe  $\psi$  une extractrice et  $\ell' \in \mathbb{R}$ , avec  $\varphi \circ \psi$  qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc  $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $u$  et  $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$ .

Par ailleurs, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\underbrace{|u_{\varphi \circ \psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$ , ce qui n'est pas possible car  $\ell$  est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle.  $\square$

## 7 Semaine 12

### 7.1 Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit  $u$  une suite bornée.  $u$  converge si et seulement si il existe  $\ell \in \mathbb{K}$  tel que  $L(u)$  est le singleton  $\ell$

*Démonstration.* Traitons le cas réel, celui sur  $\mathbb{C}$  est à adapter sans peine.

Supposons que  $u$  converge et posons  $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$ . Toutes les sous-suites de  $u$  convergent vers  $\ell$  donc  $L(u) = \{\ell\}$ .

Supposons maintenant qu'il existe un unique  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $L(u) = \{\ell\}$ . Par l'absurde, supposons que  $u$  ne converge pas vers  $\ell$ , c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel  $\varepsilon$ .

Posons  $\varphi(0) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$ , ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de  $\mathbb{N}$ .

Posons ensuite  $\varphi(1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(0) < k\}$ , ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé  $\varphi(n)$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon, \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse  $u$  est bornée, donc il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M,$$

donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $|u_{\varphi(n)}| \leq M$ , donc  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe  $\psi$  une extractrice et  $\ell' \in \mathbb{R}$ , avec  $\varphi \circ \psi$  qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc  $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $u$  et  $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$ .

Par ailleurs, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\underbrace{|u_{\varphi \circ \psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell' - \ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$ , ce qui n'est pas possible car  $\ell$  est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle.  $\square$

### 7.2 Monotonie de $u$ et des sous-suites des termes pairs et impairs de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la monotonie de $f$

Soient  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $I \subset \mathcal{D}_f$  une intervalle  $f$ -stable.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  la suite récurrente associée à la fonction  $f$  c'est-à-dire  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

— Si  $f$  est croissante sur  $I$ .

Si  $u_1 \geq u_0$  alors  $u$  est croissante.

Si  $u_1 \leq u_0$  alors  $u$  est décroissante.

— Si  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Les sous-suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotone et ont une monotonie opposée (utiliser les premiers termes pour trouver leur monotonie respectives).

*Démonstration.* Soient de tels  $f, I$  et  $u$ .

— Supposons que  $f$  est croissante sur  $I$ .

Supposons  $u_1 \geq u_0$ . Considérons le prédicat  $\mathcal{P}(\bullet)$  défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$\mathcal{P}(n) : "u_{n+1} \geq u_n"$$

Par hypothèse,  $u_1 \geq u_0$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vrai.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tq  $\mathcal{P}(n)$  vrai.

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \underbrace{\implies}_{f \text{ est croissante sur } I} \quad f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \implies u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai.

Si  $u_1 \leq u_0$ , il suffit de changer  $\geq$  par  $\leq$  dans la récurrence ci-dessus.

— Supposons que  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$  et  $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$ . Or  $f \circ f$  est croissante, donc  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones.

Supposons que  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tq. Alors

$$u_{2n} \leq u_{2(n+1)} \quad \underbrace{\implies}_{f \text{ est décroissante sur } I} \quad f(u_{2n}) \geq f(u_{2(n+1)}) \implies u_{2n+1} \geq u_{2(n+1)+1}$$

Donc  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

De même, si  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante alors  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

□

### 7.3 L'intérieur de l'ensemble des rationnels est vide.

Montrons que :  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $\mathbb{Q}$  possède au moins un point intérieur.

Fixons  $r_0 \in \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$ . Par définition d'un point intérieur, il existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : ]r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon[ \subset \mathbb{Q}$ . Or, par densité des irrationnels dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : r_0 - \varepsilon < \alpha < r_0 + \varepsilon$ . On en déduit que  $\alpha \in ]r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon[$ , or  $]r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon[ \subset \mathbb{Q}$  donc  $\alpha \in \mathbb{Q}$  ce qui contredit le choix de  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Ainsi,  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$

□

### 7.4 Théorème sans nom version continue au voisinage de $a$

Soient  $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R}$  et  $a \in \overline{\mathcal{D}}$  tels que  $|f(x) - \ell| \leq g(x)$  au voisinage de  $a$  et  $g$  tend vers 0 en  $a$ . Alors montrons que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ .

*Démonstration.* On traite le cas  $a \in \mathbb{R}$ . Par définition de  $|f(x) - \ell| \leq g(x)$  au voisinage de  $a$ ,

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \varepsilon \implies |f(x) - \ell| \leq g(x).$$

Fixons un tel  $\varepsilon$ .

Soit  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ . Appliquons la définition de  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  pour  $\varepsilon \leftarrow \omega$  :

$$\exists \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \varepsilon' \implies |g(x)| \leq \omega.$$

Fixons un tel  $\varepsilon'$ .

Posons  $\Omega = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ .

Soit  $x \in \mathcal{D}$  tel que  $|x - a| \leq \Omega$ .

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \leq \omega,$$

car la définition de  $\Omega$  permet de remplir les conditions des deux propriétés.

□