Khôlles de Mathématiques - Semaine 5

Kylian Boyet, George Ober, Felix Rondeau

14 Octobre 2024

1 Montrer qu'une combinaison linéaire de deux fonctions bornées (respectivement lipschitziennes) est bornée (resp. lipschitzienne)

Démonstration. Soit I un intervalle réel. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

◊ Supposons que f et g sont respectivement bornées par A et par B. Soit $x \in I$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}\Big|(\lambda.f + \mu.g)(x)\Big| &= \Big|\lambda.f(x) + \mu.g(x)\Big| \\ &\leqslant |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \\ &\leqslant |\lambda|A + |\mu|B\end{aligned}$$

Donc $\lambda.f + \mu.g$ est bornée.

◊ Supposons que f et g sont respectivement K et L lipschitziennes.
Soient $(x, y) \in I^2$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned}\Big|(\lambda.f + \mu.g)(x) - (\lambda.f + \mu.g)(y)\Big| &= \Big|\lambda.f(x) + \mu.g(x) - \lambda.f(y) - \mu.g(y)\Big| \\ &= \Big|\lambda(f(x) - f(y)) + \mu(g(x) - g(y))\Big| \\ &\leqslant \Big|\lambda\Big|\Big|f(x) - f(y)\Big| + \Big|\mu\Big|\Big|g(x) - g(y)\Big| \\ &\leqslant \Big|\lambda\Big|K\Big|x - y\Big| + \Big|\mu\Big|L\Big|x - y\Big| \\ &\leqslant (|\lambda|K + |\mu|L)|x - y|\end{aligned}$$

□

2 Montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

Démonstration. Soient I et J deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ et f une application bijective impaire de I dans J. Notons f^{-1} sa bijection réciproque.
L'imparité de f impose la symétrie de I par rapport à l'origine. De plus, pour tout $y \in J$,

$$\exists x \in I : f(x) = y$$

donc par imparité de la fonction f, le domaine I étant centré en 0,

$$f(-x) = -f(x) = -y$$

Ainsi, J est centré en 0. On a alors, pour tout $y \in J$,

$$\begin{aligned}f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y).\end{aligned}$$

D'où l'imparité de f^{-1}.

▷**Exemple :** Prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction $\sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}^{[-1,1]}$ que l'on notera $\widetilde{\sin}$. Sa bijection réciproque est $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Comme dans la démonstration, prenons $y \in [-1,1]$. Comme $[-1,1]$ est centré en 0, $-y \in [-1,1]$, et dès lors,

$$\begin{aligned}
\arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\
&= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\
&= -\arcsin(y).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'imparité de la fonction arcsin. $\square$

3 Montrer que les graphes d'une fonction et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Démonstration. Calculons les coordonnées (x', y') du point M', image de M de coordonnées (x, y) par la réflexion r d'axe la première bissectrice.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp (\vec{i} + \vec{j}) \\ \text{le milieu de } [MM'] \text{ appartient à } \Delta. \end{cases}
&\iff \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 0 \\ \text{le milieu de } [MM'] \text{ vérifie l'équation } y = x. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) \text{ vérifie l'équation } y = x. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x' - x + y' - y = 0 \\ \frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x' + y' = x + y \\ x' - y' = -x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}
\end{aligned}$$

L'expression de la réflexion r d'axe la première bissectrice est ainsi

$$r : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array} \right.$$

Les graphes de f et f^{-1} étant respectivement

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\} \quad \text{et} \quad G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in J\}$$

on a bien

$$\begin{aligned}
r(G_f) &= \{(f(x), x) \mid x \in I\} \\
&= \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in J\} \quad \text{en posant } y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \\
&= G_{f^{-1}}
\end{aligned}$$

$\square$

4 Limite (et preuve) lorsque x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc au dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier à celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x - 1$. On a donc

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1.$$

Ce qui permet d'affirmer, en divisant par x^2, que

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{\ln x}{x^2} \leqslant \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Ainsi, le théorème d'existence de limite par encadrement permet de conclure que $\frac{\ln x}{x^2}$ admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est nulle :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

On en déduit alors le cas général :

$$\begin{aligned}
\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \\
&= \left(\frac{\frac{2\alpha}{\beta}\ln\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \\
&= \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^\alpha \quad \underbrace{\left[\underbrace{\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right)}{\left(x^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right)^2}}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{v. ci-dessus}}}\right]^\alpha}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{par composition des limites}}} \quad \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

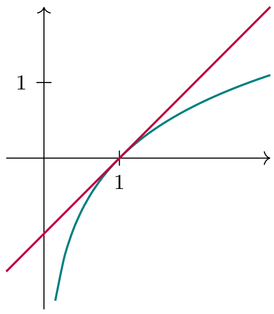

FIGURE 1 – ln en bleu et $y = x - 1$ en violet.

□

5 Limite en 0 de $\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ et de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Démonstration.

∗ Le taux d'accroissement en x_0 d'une fonction f dérivable en x_0 est

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \qquad (\star)$$

— En appliquant $(\star)$ pour $f \leftarrow \big(x \mapsto (1+x)^\alpha\big)$ et $x_0 \leftarrow 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = f'(0) = \alpha$$

car $f' : x \mapsto 1 \cdot \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$ vaut α en 0.

— De même, en appliquant $(\star)$ pour $f \leftarrow \sin$ et $x_0 \leftarrow 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin' 0 = \cos 0 = 1$$

∗ Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé quelconque.

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \Bigg(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow[x\to0]{} 1}\Bigg)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)}_{\xrightarrow[x\to0]{} \frac{1}{2}} \xrightarrow[x\to0]{} \frac{1}{2}$$

□

6 Présentation exhaustive de la fonction arcsin.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}^{[-1,1]}$ (voir **1**.). D'où :

$$\arcsin = \begin{cases} [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}^{[-1,1]}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin(\theta) = x$$

. Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}^{[-1,1]}$:

1. arcsin est impaire.
2. arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
3. $\arcsin \in \mathcal{C}^0\left([-1,1],[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$.
4. $\arcsin \in \mathcal{D}^1\left(]-1,1[,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right)$.
5. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
6. arcsin admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1.

Graphe de arcsin :

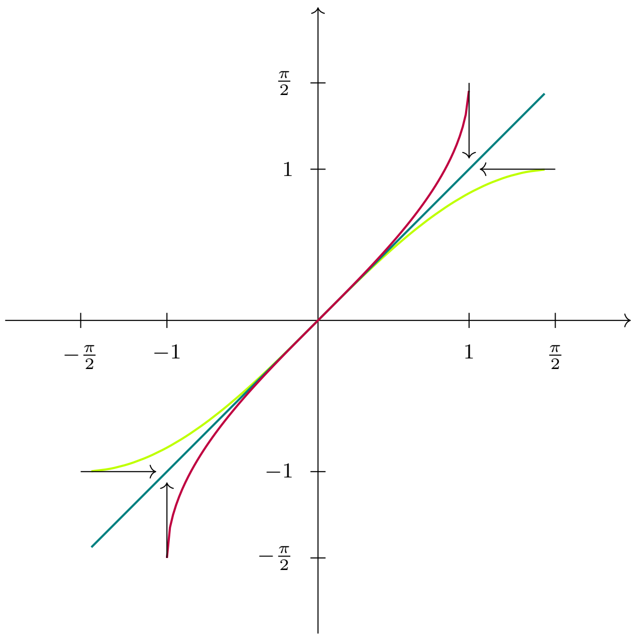

Figure 2 – arcsin en violet, sin en vert et la première bissectrice en bleu.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d'arcsin :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0,1], \quad \arcsin(x) \geqslant x.$$

□

7 Étude et tracé de $\arcsin \circ \sin$ (avec réduction du domaine d'étude à $[0, \pi/2]$).

Démonstration.

* La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1] = \mathcal{D}_{\text{arcsin}}$ donc $\arcsin \circ \sin$ est définie sur $\mathbb{R}$.
* La fonction $\arcsin \circ \sin$ est 2π-périodique car sin est 2π-périodique. On peut donc restreindre le domaine d'étude à un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
* La fonction $\arcsin \circ \sin$ est impaire comme composée de fonctions impaires. L'intervalle $[-\pi, \pi]$ étant centré en 0, on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, \pi]$.
* De plus, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(\pi - x) = \sin x$ donc $(\arcsin \circ \sin)(\pi - x) = (\arcsin \circ \sin)(x)$.

Il suffit donc d'étudier le graphe fonction $\arcsin \circ \sin$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, son graphe sur $[0, \pi]$ s'en déduisant par une réflexion d'axe la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui nous permet, par imparité et 2π-périodicité, de trouver son graphe sur $\mathbb{R}$ par réflexion sur l'axe des ordonnées et translations successives de vecteur $2\pi \overrightarrow{i}$.
Sachant que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(\arcsin \circ \sin)(x) = x$, on a le graphe suivant :

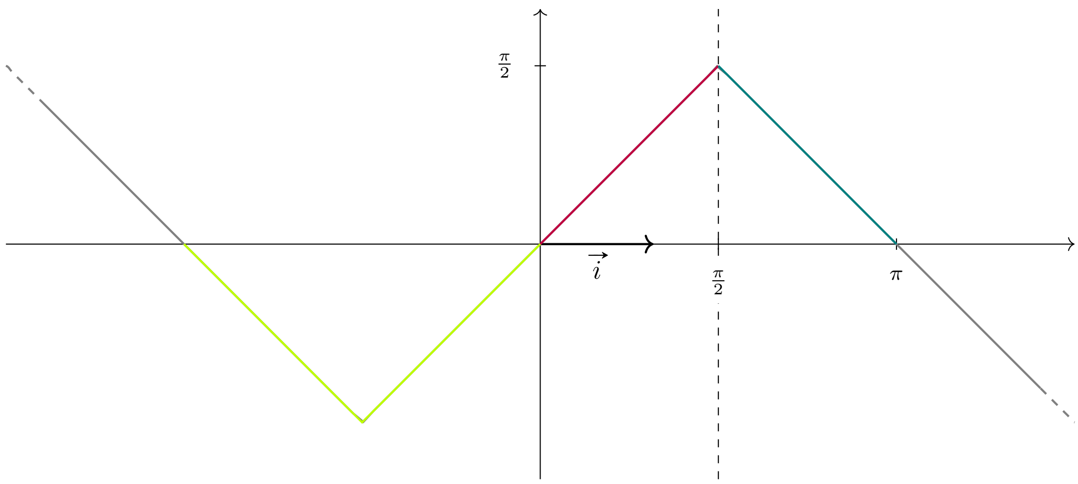

FIGURE 3 – Graphe de $\arcsin \circ \sin$.

$\square$