

Khôlles de Mathématiques - Semaine 30

Hugo Vangilluwen, George Ober

22 juin 2024

1 Inégalité de Cauchy-Schwartz dans un espace préhilbertien réel, cas d'égalité

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (1)$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . Soient $(x, y) \in E^2$

1.
 - ★ Si $y = 0$, l'inégalité est une égalité et est évidente
 - ★ Sinon, posons

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \langle x + t.y | x + t.y \rangle = t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x|y \rangle + \|x\|^2 \end{cases}$$

Puisque $\|y\|^2 \neq 0$, P est un polynôme de degré 2 à coefficients réels et positif d'après le caractère positif du produit scalaire (on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$). Le discriminant de cette fonction polynômiale est $\Delta = 4 \langle x|y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2$, qui est obligatoirement négatif ou nul puisque P admet au mieux une racine double. Donc $\langle x|y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$ donc en prenant la racine carrée $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

2.
 - ★ Supposons que (x, y) est liée, sans perte de généralité, supposons $y = \lambda.x$ alors

$$|\langle x|\lambda.x \rangle| = |\lambda| |\langle x|x \rangle| = |\lambda| \|x\|^2 = \|x\| \|\lambda.x\|$$

Donc l'inégalité est une égalité.

- ★ Réciproquement, supposons que $|\langle x|y \rangle| = \|x\| \|y\|$
 - Si $y = 0$ alors (x, y) est liée
 - Sinon, $\Delta = 4(\langle x|y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2) = 0$ P est un polynôme de degré 2 de discriminant nul : il admet une racine double λ Ainsi

$$P(\lambda) = 0 \implies \langle x + \lambda.y | x + \lambda.y \rangle = 0$$

Donc $x + \lambda.y = 0_E$ d'après le caractère défini du produit scalaire.

□

2 Isomorphisme entre un espace euclidien et l'espace de ses formes linéaires (Théorème de représentation de Riesz)

L'application

$$\chi : \begin{cases} E & \rightarrow E^* \\ x & \mapsto \begin{pmatrix} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \langle x|y \rangle \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. χ est appelé l'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel euclidien et son espace dual.

Démonstration. ★ χ est bien définie car, $\forall x \in E$, par linéarité du produit scalaire en sa seconde variable, $\chi(x) : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \langle x|y \rangle \end{cases}$ est une forme linéaire sur E .
 ★ Soient $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés quelconques

$$\begin{aligned} \forall y \in E, \chi(x + \lambda.x')(y) &= \langle x + \lambda.x'|y \rangle \\ &= \langle x|y \rangle + \lambda \times \langle x'|y \rangle \\ &= \chi(x)(y) + \lambda \times \chi(x')(y) \\ &= (\chi(x) + \lambda.\chi(x'))(y) \end{aligned}$$

Donc $\chi(x + \lambda.x') = \chi(x) + \lambda.\chi(x')$, donc χ est linéaire.

★ Soit $x \in \ker \chi$ fixé quelconque. Alors $\chi(x) = 0_{E^*}$

$$\forall y \in E, \langle x|y \rangle = 0$$

Donc $x \in E^\perp = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$ Donc χ est injective, or E et E^* sont de même dimension, donc χ est bijective. Donc χ est un isomorphisme. □

3 Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel, F^\perp est son supplémentaire orthogonal

Démonstration. Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et F un sous espace vectoriel de dimension finie. Alors F et F^\perp sont supplémentaires orthogonaux, i.e.

$$E = F \oplus F^\perp \quad (3)$$

En notant $r = \dim F$, fixons une base orthonormale (e_1, \dots, e_r) de F , possible car F est un espace euclidien (dimension finie et muni du produit scalaire induit par E).

◇ Analyse

Soit $x \in E$ fixé quelconque, supposons que $\exists(x_\parallel, x_\perp) \in F \times F^\perp = x_\parallel + x_\perp$ D'abord

$$x_\parallel \in F \implies \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r : x_\parallel = \sum_{i=1}^r \lambda_i.e_i$$

Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ fixé quelconque

$$\begin{aligned} \langle x|e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i.e_i + x_\perp \middle| e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \times \underbrace{\langle e_i|e_j \rangle}_{\delta_{ij}} + \overbrace{\langle x_\perp | e_j \rangle}^{=0} \\ &\quad \underbrace{\qquad}_{\in F^\perp} \quad \underbrace{\qquad}_{\in F} \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x_\parallel &= \sum_{i=1}^r \lambda_i.e_i = \sum_{i=1}^r \langle x|e_i \rangle .e_i \\ x_\perp &= x - x_\parallel \end{cases}$$

◇ Synthèse

Posons donc

$$\begin{cases} x_\parallel &= \sum_{i=1}^r \langle x|e_i \rangle .e_i \\ x_\perp &= x - x_\parallel \end{cases}$$

★ (e_1, \dots, e_r) est une base de F donc $x_\parallel \in F$

★ $x_\parallel + x_\perp = x_\parallel + (x - x_\parallel) = x$

★ Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ fixé quelconque. Calculons $\langle x_\perp | e_j \rangle$

$$\begin{aligned}\langle x_\perp | e_j \rangle &= \langle x | e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=0}^r \langle x | e_i \rangle . e_i \middle| e_j \right\rangle \\ &= \langle x | e_j \rangle - \sum_{i=0}^r \langle x | e_i \rangle \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{\delta_{ij}} \\ &= \langle x | e_j \rangle - \langle x | e_j \rangle = 0\end{aligned}$$

Donc $x_\perp \in \{e_1, \dots, e_r\}^\perp$ Donc $x_\perp \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}^\perp = F^\perp$

Ainsi, F et F^\perp sont supplémentaires orthogonaux.

De plus

$$\forall x \in E, x = \underbrace{\sum_{i=1}^r \langle x | e_i \rangle . e_i}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^r \langle x | e_i \rangle . e_i}_{\in F^\perp}$$

Donc

$$p_F^\perp(x) = \sum_{i=1}^r \langle x | e_i \rangle . e_i$$

□

4 Orthonormalisation de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

On utilisera le produit scalaire

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(u)Q(u) du$$

Démonstration. Partons de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

★ $P_1 = X^0$ est un vecteur unitaire avec ce produit scalaire

★ Calcul du second vecteur

$$P'_2 = X - \langle X | 1 \rangle . 1 = X - \left(\int_0^1 u du \right) . 1 = X - \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \frac{P'_2}{\|P'_2\|} = \frac{P'_2}{\sqrt{\langle P'_2 | P'_2 \rangle}} = \frac{P'_2}{\sqrt{\int_0^1 \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 du}} = \frac{P'_2}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \sqrt{12}P'_2$$

Ce qui donne

$$P'_2 = 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$$

★ Enfin,

$$\begin{aligned}P'_3 &= X^2 - \langle X^2 | 2\sqrt{3}X - \sqrt{3} \rangle . (2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) - \langle X^2 | 1 \rangle . 1 \\ &= X^2 - \left(\int_0^1 2\sqrt{3}u^3 - \sqrt{3}u^2 du \right) . (2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) - \left(\int_0^1 u^2 du \right) . 1 \\ &= X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}(2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) - \frac{1}{3} \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$P_3 = \frac{P'_3}{\|P'_3\|} = \frac{P'_3}{\sqrt{\langle P'_3 | P'_3 \rangle}} = \frac{P'_3}{\sqrt{\int_0^1 \left(u^2 - u + \frac{1}{6}\right)^2 du}} = \frac{P'_3}{\sqrt{\frac{1}{180}}} = 6\sqrt{5}P'_3 = 6\sqrt{5} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right)$$

Donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de ce produit scalaire est

$$\left(1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}, 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)\right)$$

□

5 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien Réel. Soient F un sous espace vectoriel de dimension finie de E , et $x \in E$.

L'ensemble $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ admet une borne inférieure appelée distance de x à F et notée $d(x, F)$, qui est un plus petit élément, atteinte uniquement pour $z = p_F^\perp(x)$

Démonstration. $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ est une partie de \mathbb{R} , non vide car elle contient $\|x\|$ pour $z \leftarrow 0_F$ d'éléments positifs ou nuls. Elle admet donc une borne inférieure

E est un espace euclidien, donc $E = F \oplus F^\perp$ donc x se décompose selon ces supplémentaires orthogonaux

$$x = \underbrace{p_F^\perp(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F^\perp(x)}_{\in F^\perp}$$

si bien que, pour tout $z \in F$

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|p_F^\perp(x) - z + x - p_F^\perp(x)\|^2 \\ &= \|p_F^\perp(x) - z\|^2 + \|x - p_F^\perp(x)\|^2 \text{ d'après le théorème de Pythagore} \\ &\geq \|x - p_F^\perp(x)\|^2\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée,

$$\forall z \in F, \|x - z\| \geq \|x - p_F^\perp(x)\|$$

D'où $\|x - p_F^\perp(x)\|$ minore $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ et donc sa borne inférieure.

Or, en remonant le calcul précédent, il y a égalité pour $z = p_F^\perp(x)$ si bien que la borne inférieure est un plus petit élément, et vaut $d(x, F) = \|x - p_F^\perp(x)\|$

De plus, si $z' \in F$ atteint ce plus petit élément on a

$$\begin{aligned}\|x - z'\|^2 &= \|p_F^\perp(x) - z' + x - p_F^\perp(x)\|^2 \\ \|x - p_F^\perp(x)\|^2 &= \|p_F^\perp(x) - z'\|^2 + \|x - p_F^\perp(x)\|^2 \\ 0 &= \|p_F^\perp(x) - z'\|^2\end{aligned}$$

Si bien que $p_F^\perp(x) - z' = 0_E$ d'après le caractère défini du produit scalaire. Donc le plus petit élément $d(x, F) = \min\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ est uniquement atteint pour $z = p_F^\perp(x)$. □

6 Distance à un sous-espace affine

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit $u = \sum_{i=1}^n u_i \cdot e_i$ un vecteur de E . Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et H_α l'hyperplan affine d'équation

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = \alpha$$

Démonstration. Posons $a = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i$ H_0 est un hyperplan vectoriel et, $H_0 = a^\perp$ et $H_0^\perp = \text{Vect}\{a\}$
Introduisons $h_\alpha \in a^\perp$ tel que $H_\alpha = h_\alpha + H_0$ et souvenons nous que $h_\alpha = \frac{\alpha}{\|a\|^2} \cdot a$

Observons que l'égalité $H_\alpha = h_\alpha + H_0$ donne

$$\{\|u - z\| \mid z \in H_\alpha\} = \{\|u - (h_\alpha + z')\| \mid z' \in H_0\} = \{\|(u - h_\alpha) - z'\| \mid z' \in H_0\}$$

or, d'après la caractérisation de la distance à un sous-espace quelconque, on a

- ★ L'ensemble $\{\|(u - h_\alpha) - z'\| \mid z' \in H_0\}$ admet une borne inférieure donc $\{\|u - z\| \mid z \in H_\alpha\}$ aussi qui vaut $d(u - h_\alpha, H_0)$, ce qui prouve que $d(u, H_\alpha)$ est bien définie
- ★ $\inf\{\|(u - h_\alpha) - z'\| \mid z' \in H_0\}$ est un plus petit élément atteint pour l'unique valeur $z' = p_{H_0}^\perp(u - h_\alpha) = p_{H_0}^\perp(u)$ car $h_\alpha \in H_0^\perp = \ker p_{H_0}^\perp$, donc $d(u, H_\alpha) = \inf\{\|u - z\| \mid z \in H_\alpha\}$ est un plus petit élément atteint pour l'unique valeur $z = h_\alpha + p_{H_0}^\perp(u - h_\alpha) = h_\alpha + p_{H_0}^\perp(u)$

$$d(u, H_\alpha) = \|u - h_\alpha - p_{H_0}^\perp(u)\|$$

Or $u - p_{H_0}^\perp(u) = (\text{Id} - p_{H_0}^\perp)(u) = p_{H_0}^\perp(u) = \left\langle u \mid \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \cdot \frac{a}{\|a\|}$ car $H_0^\perp = \text{Vect}\{a\}$ d'où, sachant aussi que $h_\alpha = \frac{\alpha}{\|a\|^2} \cdot a$

$$d(u, H_\alpha) = \|p_{H_0}^\perp(u) - h_\alpha\| = \left\| \left\langle a \mid \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \cdot \frac{a}{\|a\|} - \frac{\alpha}{\|a\|^2} \cdot a \right\|$$

□

7 Dénombrement des surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; 2 \rrbracket$ et dans $\llbracket 1; 3 \rrbracket$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il y a $|\llbracket 1; 2 \rrbracket|^{\|\llbracket 1; n \rrbracket\|} = 2^n$ applications de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; 2 \rrbracket$. Seules les applications constantes $\tilde{1}$ et $\tilde{2}$ ne sont pas surjectives. Il y a donc $2^n - 2$ surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; 2 \rrbracket$.

Il y a $|\llbracket 1; 3 \rrbracket|^{\|\llbracket 1; n \rrbracket\|} = 3^n$ applications de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; 3 \rrbracket$. Les applications non surjectives sont celles dont l'image n'est pas $\llbracket 1; 3 \rrbracket$. C'est-à-dire, celles dont l'image est de cardinal 1 (les fonctions constantes $\tilde{1}$, $\tilde{2}$ et $\tilde{3}$) et celles dont l'image est de cardinal 2. Ces dernières sont les surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; 2 \rrbracket$, $\{1; 3\}$ et $\{2; 3\}$. Comme ces trois ensembles ont la même taille, il y a $3 \times (2^n - 2)$ (voir résultat précédent) applications de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ dont l'image est de cardinal 2. Ainsi, le nombre de surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ est $3^n - 3 - 3(2^n - 2) = 3^n - 3 \times 2^n + 3$. □

8 Lemme des bergers

Soient E, F deux ensembles finis non vides et $f : E \rightarrow F$ telle que tout élément de F possède le même nombre $k \in \mathbb{N}^*$ d'antécédents par f . Alors $|F| = \frac{|E|}{k}$

“Pour compter les moutons, il faut compter les pattes puis diviser par quatre.”

Démonstration. Considérons la relation binaire définie sur E par :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Elle est réflexive, transitive et symétrique donc c'est bien une relation d'équivalence. Donc les classes d'équivalence réalise une partition de E . Nous avons $E = \bigsqcup_{C \in E/\sim} C$ donc, en passant aux

cardinaux, $|E| = \sum_{C \in E/\sim} |C|$.

Soit $x \in E$ fixé quelconque. Alors $\bar{x} = \{y \in E \mid f(x) = f(y)\} = f^{-1}(f(\{x\}))$. Par hypothèse, tous les éléments de F ont le même nombre k d'antécédents, or $f(x)$ est un singleton d'élément de F donc $|\bar{x}| = k$. Ainsi $\forall C \in E/\sim, |C| = k$.

Posons $\varphi \begin{cases} E/\sim & \mapsto & F \\ C & \rightarrow & f(x) \text{ où } x \in C \end{cases}$ · φ est bien défini car si $(x, y) \in E$ vérifie $\bar{x} = \bar{y}$ alors $f(x) = f(y)$ donc l'image par φ ne dépend pas du représentant de classe choisi. φ est surjective car soit $z \in F$, f est surjective donc $\exists x_z \in E : f(x_z) = z$ et alors $\varphi(\bar{x}_z) = f(x_z) = z$. φ est injective

car soient $(C, C') \in (E/\sim)^2$, $\varphi(C) = \varphi(C')$ alors $\exists(x, x') \in C \times C' : x \sim x'$, comme deux classes d'équivalence sont confondues ou disjointes, $C = C'$. Ainsi φ est une bijection donc $|F| = |E/\sim|$.

$$\text{Ainsi } |E| = \sum_{C \in E/\sim} |C| = \sum_{C \in E/\sim} k = |E/\sim| k = |F| k. \quad \square$$