

Khôlles de Mathématiques - Semaine 13

Hugo Vangilluwen, George Ober, Kylian Boyet, Felix Rondeau

02 Janvier 2025

1 Montrer que $(A \times B)^\top = B^\top \times A^\top$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$, la matrice transposée est définie par :

$$\forall (k, l) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, [A^\top]_{kl} = A_{lk}$$

Formellement, la transposition est une application de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soient n, p et q trois entiers naturels. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
 $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ donc $(A \times B)^\top \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} [(A \times B)^\top]_{i,j} &= [A \times B]_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^p (A_{j,k} \times_{\mathbb{K}} B_{k,i}) \\ &= \sum_{k=1}^p (B_{k,i} \times_{\mathbb{K}} A_{j,k}) \\ &= \sum_{k=1}^p ([B^\top]_{i,k} \times_{\mathbb{K}} [A^\top]_{k,j}) \\ &= [(B^\top) \times (A^\top)]_{i,j} \end{aligned}$$

□

2 Calculer $E^{i,j} \times E^{k,l}$ en fonction de i, j, k, l et des symboles de Kronecker

Le symbole de Kronecker est défini de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \delta_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

La matrice $E^{i,j} \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ avec $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ ne possède que des coefficients nuls sauf le coefficient de la i^e ligne et j^e colonne qui vaut 1. Formellement :

$$\forall (r, s) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, [E^{i,j}]_{rs} = \delta_{ir} \delta_{js}$$

Démonstration. Calculons $E^{i,j}(n, p) \times E^{k,l}(p, q)$.

Soient $(r, s) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ fixées quelconques.

$$\begin{aligned} [E^{i,j} \times E^{k,l}]_{rs} &= \sum_{t=1}^p E_{r,t}^{i,j} E_{t,s}^{k,l} \\ &= \sum_{t=1}^p \delta_{ir} \delta_{jt} \delta_{kt} \delta_{ls} \\ &= \delta_{jk} \delta_{ir} \delta_{ls} \\ &= \delta_{jk} [E^{i,l}]_{rs} \end{aligned}$$

Donc $E^{i,j} \times E^{k,l} = \delta_{jk} E^{i,l}$.

Ainsi, pour le calcul de $(E^{i,j})^2$, $q \leftarrow n$, $k \leftarrow i$, $l \leftarrow j$:

$$(E^{i,j})^2 = \delta_{ji} E^{i,j} = \begin{cases} E^{i,j} & \text{si } i = j \\ 0_{n,p} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

□

3 Les matrices triangulaires supérieures forment un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Démonstration.

- ★ $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \subset (M)_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.
- ★ Le neutre multiplicatif I_n de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appartient à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
- ★ $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ car $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
- ★ Soient $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i > j$.

$$(A - B)_{i,j} = \underbrace{A_{i,j}}_{=0 \text{ car } A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} - \underbrace{B_{i,j}}_{=0 \text{ car } B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} = 0$$

Donc, $A - B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

- ★ Soient $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i > j$.

$$\begin{aligned} (A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} \times_{\mathbb{K}} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^j \underbrace{A_{i,k}}_{=0 \text{ car } i > j \geq k \text{ et } A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \times_{\mathbb{K}} B_{k,j} + \sum_{k=j+1}^n A_{i,k} \times_{\mathbb{K}} \underbrace{B_{k,j}}_{=0 \text{ car } k > j \text{ et } B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $A \times B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Ainsi, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \subset (M)_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

□

4 Pour $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que A^T et λA sont également dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$

Démonstration. Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. D'une part,

$$A^T \times (A^{-1})^T = (A^{-1} \times A)^T = I_n^T = I_n$$

Et d'autre part,

$$(A^{-1})^T \times A^T = (A \times A^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

Ainsi, A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. De même,

$$\lambda \cdot A \times A^{-1} = \lambda \cdot I_n \iff (\lambda A) \times A^{-1} = \lambda \cdot I_n \iff (\lambda \cdot A) \left(\frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} \right) = I_n$$

et

$$\lambda \cdot A^{-1} \times A = \lambda \cdot I_n \iff A^{-1} \times (\lambda A) = \lambda \cdot I_n \iff \left(\frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} \right) (\lambda \cdot A) = I_n$$

donc λA est inversible et son inverse est $\frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

□

5 Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ est une matrice nilpotente, alors $I_n + \lambda N$ est inversible.

Démonstration. Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $k \in \mathbb{K}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On remarque que

$$(\lambda N)^k = (-\lambda)^k N^k = 0 \quad \text{car } N^k = 0$$

On a donc, comme I_n et $-\lambda N$ commutent,

$$I_n = I_n^k - (-\lambda N)^k = (I_n - (-\lambda N)) \sum_{j=0}^{k-1} I_n^j (-\lambda N)^{k-j-1} = (I_n + \lambda N) \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda N)^{k-j-1}$$

ce qui signifie que $I_n + \lambda N$ est inversible à droite, donc inversible et d'inverse

$$(I_n + \lambda N)^{-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-\lambda N)^{k-j-1}$$

□

6 Caractérisation de l'inversibilité pour les matrices

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ admet une unique solution.

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ fixé quelconque.

$$AX = Y \iff A^{-1}AX = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y$$

donc l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ admet une unique solution.

(\Leftarrow) Supposons maintenant que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons X_i la solution de $AX = E^{i,1}$.

$$\text{Posons } B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{array} \right].$$

$$\text{Calculons } AB = \left[\begin{array}{c|c|c|c} AX_1 & AX_2 & \dots & AX_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} E^{1,1} & E^{2,1} & \dots & E^{n,1} \end{array} \right] = I_n.$$

Ainsi A est inversible à droite donc $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$.

□

7 Caractérisation des matrices diagonales inversibles

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Démonstration. Soit $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ de coefficients diagonaux $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{K}^n$.

Soit $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Étudions l'équation $DX = Y$ d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$DX = Y \iff \begin{cases} d_1 x_1 & & & = & y_1 \\ & d_2 x_2 & & = & y_2 \\ & & \ddots & = & \ddots \\ & & & d_n x_n & = & y_n \end{cases}$$

- Si il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $d_{i_0} = 0$, la i_0 -ème ligne du système ci-dessus devient une condition de compatibilité $0 = y_{i_0}$ qui ne sera pas respectée pour $Y = E^{i_0, 1}$.
Donc $D \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Sinon $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket : d_i \neq 0$, le système est donc triangulaire à coefficients diagonaux non nuls. Il admet donc une unique solution. Ainsi $D \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. De plus,

$$DX = Y \iff \begin{cases} x_1 & & & = & d_1^{-1}y_1 \\ & x_2 & & = & & d_2^{-1}y_2 \\ & & \ddots & = & & & \ddots \\ & & & x_n & = & & & d_n^{-1}y_n \end{cases}$$

Ainsi $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_n^{-1})$.

□