

Khôlles de Mathématiques - Semaine 6

Kylian Boyet, George Ober, Félix Rondeau, Elijah Gaillard, Hugo Vangilluwen (relecture)

19 novembre 2023

1 Liens entre le graphe de f et ceux de g et h définies par $g(x) = af(x)$ et $h(x) = f(x + a)$.

Démonstration.

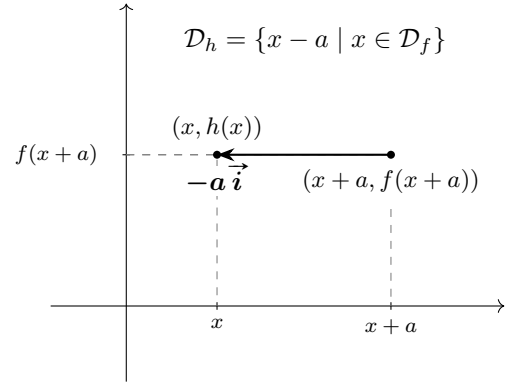
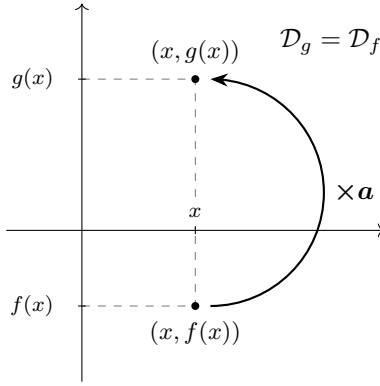


FIGURE 1 – Lien entre le graphe de f et de g . FIGURE 2 – Lien entre le graphe de f et de h . □

2 Liens entre le graphe de f et ceux de g et h définies par $g(x) = f(ax)$ et $h(x) = f(a - x)$.

Démonstration.

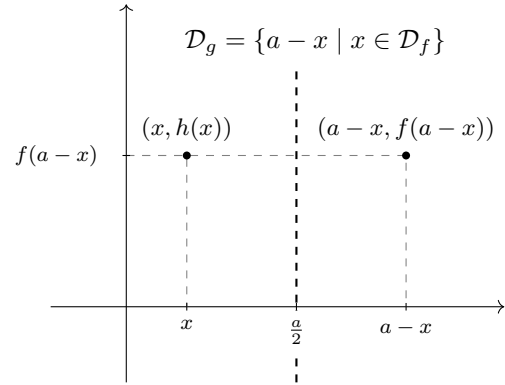
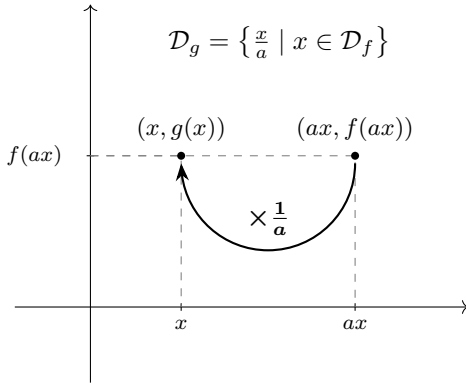


FIGURE 3 – Lien entre le graphe de f et de g . FIGURE 4 – Lien entre le graphe de f et de h . □

3 Présentation exhaustive de la fonction arccos.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$.
D'où :

$$\arccos = \left| \begin{array}{ll} [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto \left(\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]} \right)^{-1}(x) \end{array} \right.$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in [0, \pi]$,

$$\cos(\theta) = x$$

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$:

1. \arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
2. $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [0, \pi])$.
3. $\arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[,]0, \pi[)$.
4. $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
5. \arccos admet deux demi-tangentes verticales en -1 et 1 .

Graphe de \arccos :

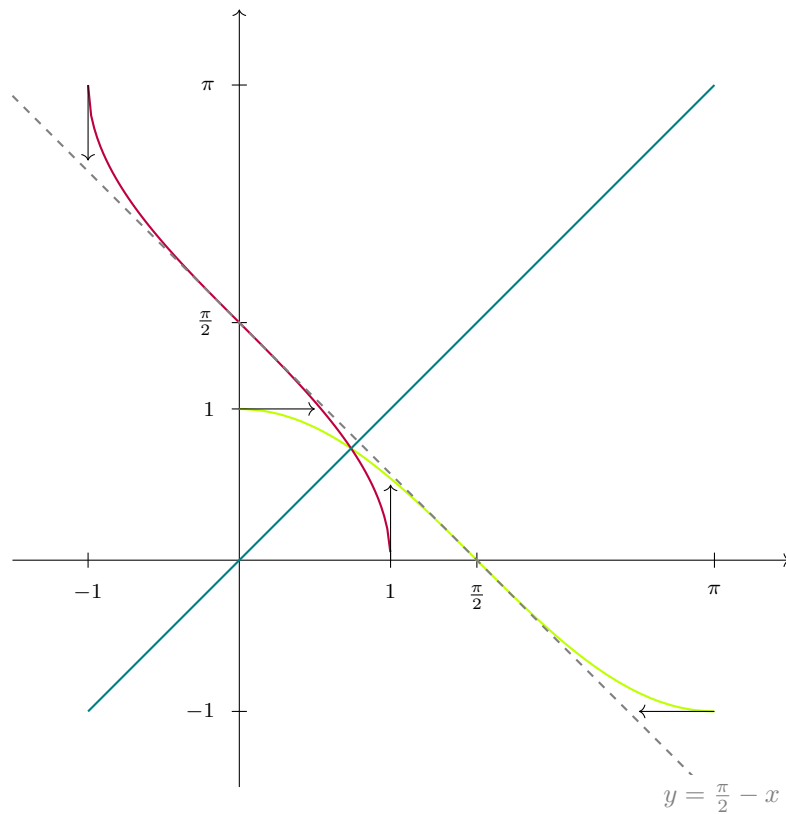


FIGURE 5 – \arccos en violet, \cos en vert et la première bissectrice en bleu.

□

4 Présentation exhaustive de la fonction arctan.

Démonstration. Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.
D'où :

$$\arctan = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \left(\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan(\theta) = x$$

Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$:

1. \arctan est impaire.
2. $\arctan \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
3. $\arctan \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
4. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Graphe de \arctan :

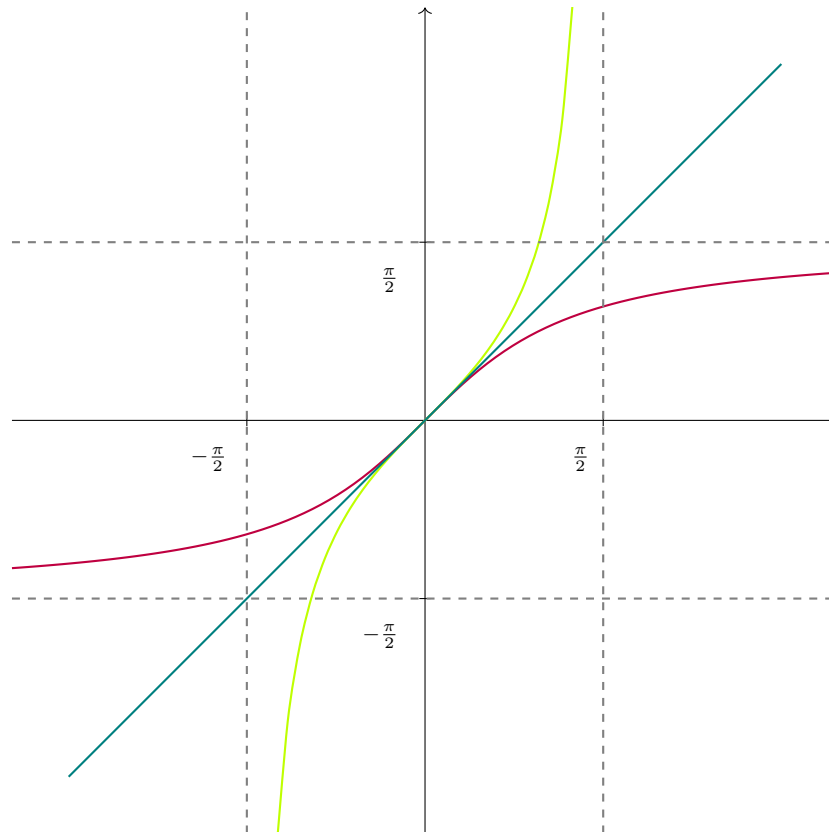


FIGURE 6 – \arctan en violet, \tan en vert et la première bissectrice en bleu.

On a aussi (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(x) \leq x.$$

Et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

□

5 2 preuves de $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$, dont une basée sur une interprétation géométrique du cercle trigonométrique.

Démonstration. On remarque sur la ?? que la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de la figure. On a donc

$$\frac{\arcsin x + \arccos x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

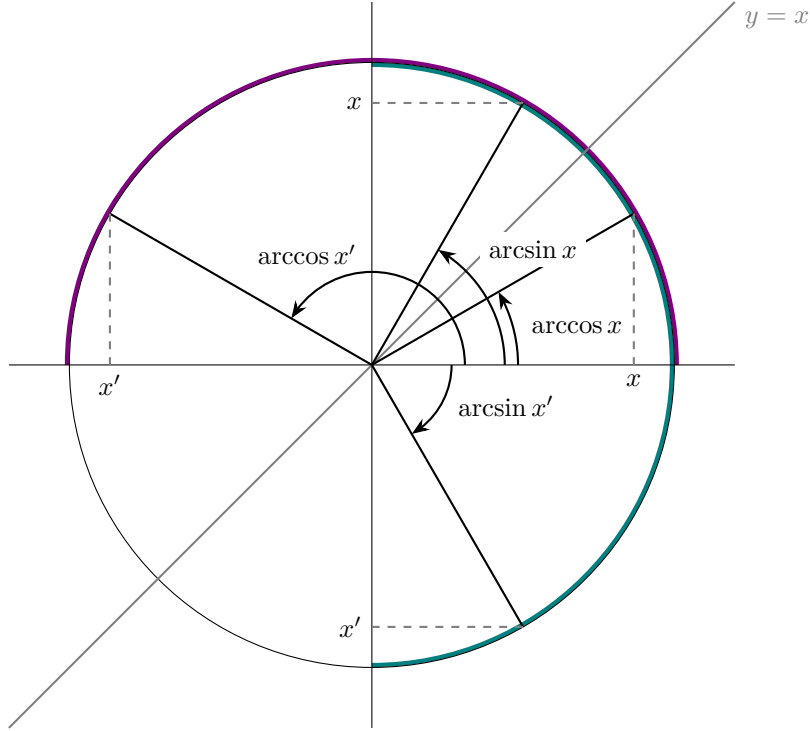


FIGURE 7 – Illustration de la relation $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ pour $x \geq 0$ et $x' \leq 0$. En violet le domaine de définition de \arccos et en bleu celui de \arcsin .

Preuve formelle : Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\varphi = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \arccos(\sin(\varphi)) = \varphi + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right),$$

or $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$ d'où $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)) = \frac{\pi}{2} - \varphi$ si bien que :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

□

6 Étude analytique rapide des fonctions cosh et sinh.

Démonstration.

- *Domaine de définition et symétries* : sinh et cosh sont définies sur \mathbb{R} . De plus,

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \\ \text{et} \\ \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x). \end{cases}$$

Donc sinh et cosh sont respectivement impaire et paire.

Nous les étudierons sur \mathbb{R}_+ et pour les obtenir les graphes (\mathcal{C}_{\sinh} et \mathcal{C}_{\cosh}) de ces fonctions sur \mathbb{R} à partir de ceux (\mathcal{C}_{\sinh}^+ et \mathcal{C}_{\cosh}^+) obtenus sur \mathbb{R}_+ , nous le compléterons en traçant les images de ces graphes par la symétrie centrale s de centre O et par la réflexion r d'axe (O, \vec{j}) :

$$\mathcal{C}_{\sinh} = \mathcal{C}_{\sinh}^+ \cup s(\mathcal{C}_{\sinh}^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\cosh} = \mathcal{C}_{\cosh}^+ \cup r(\mathcal{C}_{\cosh}^+)$$

- *Variations* : La fonction $\sinh' = \cosh$ est strictement positive sur \mathbb{R} donc sinh est strictement croissante sur \mathbb{R} . On en déduit alors le signe de $\sinh = \cosh'$ et donc les variations de cosh :

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|-----|-----------|
| $\cosh' x = \sinh x$ | $-$ | 0 | $+$ |
| cosh | $+\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $\sinh'(x) = \cosh x$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| sinh | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

- *Branches infinies en $+\infty$ et position relative de \mathcal{C}_{\sinh} et \mathcal{C}_{\cosh} .*

$$\frac{\cosh(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow +\infty} + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc le graphe de cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique (O, \vec{j}) . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$$

Ainsi, les graphes des deux fonctions se rapprochent l'un de l'autre arbitrairement près lorsque $x \rightarrow +\infty$, et le graphe de cosh est au-dessus de celui de sinh.

- *Tangente au graphe de sinh à l'origine et position relative.*

Posons l'application

$$g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sinh(x) - x \end{cases}$$

Elle est dérivable sur son ensemble de définition, sa dérivée est positive sur cet intervalle ($\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \cosh x - 1 \geq 0$), et $g(0) = 0$ donc le graphe de sinh est situé au dessus de sa tangente sur \mathbb{R}_+ .

Par imparité de la fonction sinh, la position relative courbe / tangente s'inverse si bien que l'origine est un point d'inflexion du graphe de sinh.

□

7 Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$. En Dédire qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{Z}$ fixé quelconque. Calculons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt$$

★ Si $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{imt}}{im} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{im} - \frac{1}{im} \right) = 0 \end{aligned}$$

★ Si $m = 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad (= \delta_{m,1})$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ fixés quelconques. Posons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Soient $s \in \mathbb{Z}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{it}) e^{-ist} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^n a_k (Re^{it})^k \right) e^{-ist} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \left(\int_0^{2\pi} a_k R^k e^{it(k-s)} dt \right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(a_k R^k \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(k-s)} dt}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq s \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } s \notin \llbracket 0, n \rrbracket \\ a_s R^s & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Supposons à présent qu'il existe un cercle centré en l'origine sur lequel P est identiquement nulle. Notons $R \in \mathbb{R}_+^*$ le rayon d'un tel cercle. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(Re^{it}) = 0$$

donc

$$\forall s \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{it}) e^{-ist} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 dt = \frac{1}{2\pi} [1]_0^{2\pi} = 0$$

or, nous avons vu que

$$\forall s \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{it}) e^{-ist} dt = a_s R^s$$

donc

$$\forall s \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_s R^s = 0 \quad \text{d'où} \quad \forall s \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_s = 0$$

ainsi, P est la fonction polynomiale nulle sur \mathbb{C} . □

8 Technique de l'intégration par parties.

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Démonstration. Il suffit de reconnaître un terme issu de la dérivée d'un produit de fonctions :

$$(uv)' = u'v + uv' \implies u'v = (uv)' - uv'$$

d'où :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(t)v(t)dt &= \int_a^b ((uv)'(t) - u(t)v'(t))dt \\ &= \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u(t)v'(t)dt \text{ (linéarité de l'intégrale)} \\ &= \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt\end{aligned}$$

La preuve sera suivie d'exemples explicites aux choix de l'examineur.

□

9 Technique du changement de variable.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds \underset{\substack{ds=\varphi'(u)du \\ s=\varphi(u)}}{=} \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Démonstration. Il suffit de reconnaître la dérivée d'une composée de fonctions. En effet, en notant F une primitive de f sur I (ce qui a bien un sens car f est continue sur I),

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du &= [(F \circ \varphi)(u)]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds\end{aligned}$$

La preuve sera suivie d'exemples explicites aux choix de l'examineur.

□

10 Montrer que si f est T -périodique sur \mathbb{R} , pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Démonstration. Il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $a \leq k_0 T < a + T$ car

$$a \leq k_0 T < a + T \iff \frac{a}{T} \leq K_0 < \frac{a}{T} + 1 \iff k_0 = \left\lceil \frac{a}{T} \right\rceil$$

Fixons un tel k_0 . Ainsi,

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{k_0 T} f(t)dt + \int_{k_0 T}^{a+T} f(t)dt \quad (1)$$

Or,

$$\int_{k_0 T}^{a+T} f(t)dt \underset{\substack{u=t-k_0 T \\ du=dt}}{=} \int_0^{a+T-k_0 T} f(u+k_0 T)du = \int_0^{a-(k_0-1)T} f(u)du \quad (2)$$

Et

$$\int_a^{k_0 T} f(t)dt \underset{\substack{u=t-(k_0-1)T \\ du=dt}}{=} \int_{a-(k_0-1)T}^{k_0 T} f(u+(k_0-1)T)du = \int_{a-(k_0-1)T}^T f(u)du \quad (3)$$

La relation (??) donne alors, en utilisant (??) et (??),

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^{a-(k_0-1)T} f(t)dt + \int_{a-(k_0-1)T}^T f(t)dt = \int_0^T f(t)dt \quad (4)$$

On peut visualiser cette démonstration sur un graphe :

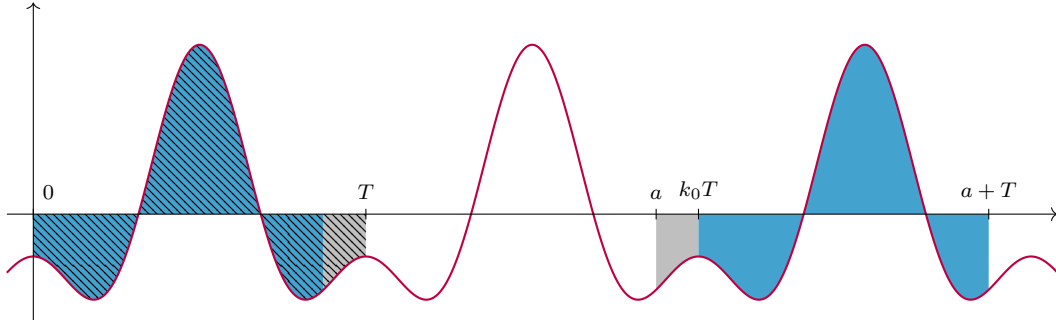


FIGURE 8 – Illustration de la relation (??).
 En bleu (??) et en gris (??)

□