Khôlles de Mathématiques - Semaine 9

Kylian Boyet, George Ober, Hugo *Vangi*lluwen

29 novembre 2023

1 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Soit $x \in E$.
La classe de x, notée $\bar{x}$, est l'ensemble des éléments de E en relation avec x.

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \tag{1}$$

Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.
Soit $(x, y) \in E^2$ fq.

— Si $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, rien à démontrer.

— Sinon $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ donc $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Fixons un tel z.
Soit $x' \in \bar{x}$ fq.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \underset{sym\acute{e}trie}{\implies} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \end{array}\right\} \underset{transitivit\acute{e}}{\implies} x'\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \underset{sym\acute{e}trie}{\implies} z\mathcal{R}y \end{array}\right\} \underset{transitivit\acute{e}}{\implies} x'\mathcal{R}y \underset{sym\acute{e}trie}{\implies} y\mathcal{R}x'$$

Donc $x' \in \bar{y}$ donc $\bar{x} \subset \bar{y}$.
En échangeant les rôles de x et y, on montre la deuxième inclusion $\bar{y} \subset \bar{x}$.

Montrons que les classes d'équivalence de E constituent une partition de E.
Soit $\mathcal{S}$ un système de représentant des classes fixé quelconque.

— Soit $s \in \mathcal{S}$ fq. $\bar{s} \neq \emptyset$ car $s\mathcal{R}s$ par réflexivité.

— Soit $(s, s') \in \mathcal{S}^2$ fq. D'après la démonstration ci-dessus ci-dessus, $\bar{s} \cap \bar{s'} = \emptyset$ ou $\bar{s} = \bar{s'}$. Si $\bar{s} = \bar{s'}$ alors s et s' représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent, $\bar{s}$ et $\bar{s'}$ sont disjoints.

— $\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$ car $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \in E$ par définition d'une classe d'équivalence.
Réciproquement, soit $x \in E$ fq.
Par réflexivité de $\mathcal{R}$, $x \in \bar{x}$.
Par définition d'un système de classe $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$ donc $\bar{s_x} = \bar{x}$. Donc $x \in \bar{s_x} \subset \bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
Donc $E \subset \bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
Par double inclusion, $E = \bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Ainsi,

$$E = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \tag{2}$$

□

2 Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est sont plus grand élément.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, et A une partie non-vide de E.
Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
Si A admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors A admet un plus grand élément et $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soient un tel ensemble E et une telle partie A et notons M son plus grand élément.
Posons l'ensemble des majorants de A, $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A,\ a \leq m\}$.
Par définition :

$$\forall m \in M(A),\ M \leq m,$$

car $M \in A$, mais comme $M \in M(A)$, on a directement que $M = \min M(A) = \sup A$.

Pseudo-réciproquement, soit A une partie de E admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne S.
Comme $S \in M(A)$, par définition, S est plus grand que tous les éléments de A mais appartient à A, donc de tous les éléments de A, S est le plus grand. □

3 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \exists! (q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [\![0; |b| - 1]\!] \end{cases} \tag{3}$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et deux couples $((q,r),(q',r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r \leqslant |b| - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leqslant r' \leqslant |b| - 1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-(|b| - 1) \leqslant r' - r \leqslant |b| - 1$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Existence Posons pour $b \geqslant 1$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leqslant a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit ...)
- Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d'Ω.

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ donc $r \in \mathbb{Z}$.
Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leqslant a$ d'où $0 \leqslant r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q+1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [\![0, |b| - 1]\!]$.

Si $b < 1$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. □

4 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et minorée fixée quelconque.
Considérons $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite u.
A est :

- une partie de $\mathbb{Z}$ car u est à valeur dans $\mathbb{Z}$
- non vide car $u_0 \in A$
- minoré car u est minorée

Donc A admet un plus petit élément. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = minA$. Fixons un tel n_0.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geqslant n_0$.

$$\left.\begin{array}{c} u_n \in A \implies u_n \geqslant minA = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geqslant n_0 \text{ donc } u_n \leqslant u_{n_0} \end{array}\right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi, u est stationnaire. □