Khôlles de Mathématiques - Semaine 11

Kylian Boyet, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

13 décembre 2023

1 Caractérisation séquentielle de la densité.

Soient $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\})^2$. Montrons que :

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

Démonstration. Sens indirect : supposons $A \subset B$ et $\forall b \in B, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : (a_n)$ converge vers b :

- ⋆ $A \subset B$ par hypothèse.
- ⋆ Montrons que $\forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b - a| < \varepsilon$ (on utilise la caractérisation de la densité avec les ε)
  Soient $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques :
  Par hypothèse appliquée pour $b \leftarrow b$: $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$
  Appliquons la définition de la convergence de (a_n) vers b pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:
  $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
  Fixons un tel N :
  En particulier, $a_N \in A$ et $|a_N - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$
  Donc A est dense dans B.

Sens direct : supposons A dense dans B :

- ⋆ Par définition, $A \subset B$
- ⋆ Soit $b \in B$ fixé quelconque.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque :
  Appliquons la caractérisation de la densité par les ε pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$ (autorisé car $\frac{1}{2^n} > 0$), et $b \leftarrow b$:
  $$\exists a \in A : |a - b| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
  Notons a_n un tel élément. Nous venons de construire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b| \leqslant \frac{1}{2^n}$
  Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
  Ainsi, d'après le théorème sans nom, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b.

□

2 Théorème de la convergence monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite monotone :

1. Si u est croissante
   - (i) Soit u est majorée, et dans ce cas, $\lim u = \sup\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$
   - (ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $+\infty$.
2. Si u est décroissante :
   - (i) Soit u est minorée, et dans ce cas, $\lim u = \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$
   - (ii) Soit u n'est pas bornée, et dans ce cas, u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone fq.

1. Supposons que u est croissante.
   - (i) Supposons que u est majorée.
     Alors $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$. Fixons un tel M.
     $\Omega = \{u_k | k \in \mathbb{N}\}$ est
     — une partie de $\mathbb{R}$
     — non vide car u_0 y appartient
     — majorée par M

     donc elle admet un borne supérieure et notons-la σ.
     Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq.
     $\sigma - \epsilon < \sigma$ donc $\sigma - \epsilon$ ne majore pas Ω. Donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > \sigma - \epsilon$. Fixons un tel N.
     Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geqslant N$.
     Alors $u_n \underset{\text{par croissant de u}}{\geqslant} u_N \geqslant \sigma - \epsilon$ et $u_n \underset{\text{par défintion de } \sigma}{\leqslant} \sigma$.
     Ainsi,
     $$\begin{aligned} \sigma - \epsilon \leqslant u_n \leqslant \sigma &\implies -\epsilon \leqslant u_n - \sigma \leqslant 0 \\ &\implies |u_n - \sigma| \leqslant \epsilon \end{aligned}$$
     Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sigma$.
   - (ii) Supposons que u n'est pas bornée.
     Soit $A \in \mathbb{R}$ fq.
     u n'est pas bornée donc $\exists N \in \mathbb{N} : u_N > A$.
     Or u est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$.
     Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
2. Supposons que u est décroissante.
   Il suffit dans la preuve ci-dessus de remplacer les inégalités inférieures par des inégalités supérieures et inversement et d'utiliser la notion de borne inférieure plutôt que de borne supérieure.
   - (i) Si u est minorée, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf\{u_k | k \in \mathbb{N}\}$.
   - (ii) Si u n'est pas bornée, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

□

3 Théorème de Césarò

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors la moyenne arithmérique des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes (appelée moyenne de Césarò) converge vers ℓ.

Démonstration. Soient u une telle suite, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ladite limite de u. Appliquons la définition de la convergence de u pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons un tel N. Posons $\omega = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$. Calculons :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| \leqslant \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell|}_{= \ \omega \in \mathbb{R}} + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=N}^{n} |u_k - \ell|}_{\leqslant \ \frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \frac{\omega}{n} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2n}}_{\leqslant \ \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Ces majorations sont issues de l'inégalité triangulaire et de la convergence de u. De plus, comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\omega}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on écrit sa définition pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N' \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N' \implies |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe un tel N' et on pose $\Lambda = \max(N, N')$ qui a bien un sens car $\{N,\ N'\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$. De la même manière qu'auparavant, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \Lambda$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell\right| \leqslant \underbrace{\frac{\omega}{n}}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

C'est le théorème souhaité. □

4 Théorème de passage à la limite dans une inégalité.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(i) Si $\left|\begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant 0 \\ u \text{ converge} \end{array}\right.$
Alors $\lim u \geqslant 0$

(ii) Si $\left|\begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \\ u \text{ et } v \text{ convergent} \end{array}\right.$
Alors $\lim u \leqslant \lim v$

Démonstration.

(i) L'hypothèse $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant 0$ permet d'affirmer que u et $|u|$ coïncident à partir d'un certain rang.
Par ailleurs, la convergence de u et la continuité de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ donc en $\lim u$ donnent $|u|$ converge vers $|\lim u|$.
Le caractère asymptotique de la limite permet de conclure que u et $|u|$ ont la même limite.
Donc $\lim u = |\lim u| \geqslant 0$

(ii) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \Rightarrow v_n - u_n \geqslant 0$
u et v convergent $\Rightarrow v - u$ converge vers $\lim v - \lim u$.
On applique (i) pour $u \leftarrow v - u$, autorisé car u et v convergent.
On obtient $\lim v - \lim u \geqslant 0$ d'où $\lim u \leqslant \lim v$.

□

5 Théorème des suites adjacentes

Soient u et v deux suites réelles adjacentes. Alors u et v convergent et ont la même limite.

Démonstration. Soient u et v de telles suites. Quitte à inverser les rôles desdites suites, prenons u croissante et v décroissante.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n \leqslant v_n \leqslant \underbrace{v_0}_{\in \mathbb{R}}) \wedge (\underbrace{u_0}_{\in \mathbb{R}} \leqslant u_n \leqslant v_n),$$

car la monotonie des suites induit ces inégalités. D'après le théorème de limite monotone, u étant croissante et majorée elle converge, v étant décroissante et minorée elle converge.
Il s'en suit que par définition des suites adjacentes :

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) \underbrace{=}_{u,v \text{ convergent}} \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Ainsi, $\lim u = \lim v$. □

6 *Facultative* Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée réelle admet une sous-suite convergente.
L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée est non vide.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ fq bornée.
Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.

Construisons une suite de segments dans $[-M; M]$ de plus en plus petits par dichotomie.
Posons $a_0 = -M$, $b_0 = M$ et définissons les suites c et I pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $I_n = [a_n; b_n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons a_n et b_n construits et $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ infini. Construisons les termes d'indices $n+1$.
Posons $\left| \begin{array}{lcl} I_n^- & = & \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n; c_n]\} \\ I_n^+ & = & \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [c_n; b_n]\} \end{array} \right.$
Nous avons $I_n^- \cup I_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ donc I_n^- ou I_n^+ est infini.

— Si I_n^- est infini, posons $\left| \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n \\ b_{n+1} & = & c_n \end{array} \right.$
  Ainsi $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^-$ est infini.
— Si I_n^+ est infini, posons $\left| \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & c_n \\ b_{n+1} & = & b_n \end{array} \right.$
  Ainsi $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\} = I_n^+$ est infini.

Étudions la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
— Nous avons toujours $a_n \leqslant b_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \neq \emptyset$
— Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$
— $|I_{n+1}| = |a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \frac{1}{2}|I_n|$ donc la suite des cardinaux est une suite géométrique de raison $1/2$. Donc $|I_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc, d'après le théorème des segments emboîtés, $\exists! l\ell \in \mathbb{R} : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$. Fixons un tel ℓ.

Construisons maintenant une extractrice φ de u.
Posons $\varphi(n) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons $\varphi(n)$ construite.

$$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} | u_k \in I_{n+1} \wedge k > \varphi(n)\}$$

$\varphi(n+1)$ est bien définie car $\{k \in \mathbb{N} | u_k \in I_{n+1}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non bornée (car infinie).

Ainsi, nous avons construit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Nous pouvons extraire une sous-suite de u. Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in I_n$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{a_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell} \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant \underbrace{b_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$$

Donc, d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Ainsi $\ell \in L_u$. □

7 *Facultative* Caractérisation de la convergence par l'unicité d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée.

Soit u une suite bornée. u converge si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $L(u)$ est le singleton ℓ

Démonstration. Traitons le cas réel, celui sur $\mathbb{C}$ est à adapter sans peine.
Supposons que u converge et posons $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$. Toutes les sous-suites de u convergent vers ℓ donc $L(u) = \{\ell\}$.
Supposons maintenant qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $L(u) = \{\ell\}$. Par l'absurde, supposons que u ne converge pas vers ℓ, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε.
Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, ce qui a du sens car c'est une partie non-vide de $\mathbb{N}$.

Posons ensuite $\varphi(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon,\ \varphi(0) < k\}$, ce qui a du sens pour les mêmes raisons. On construit en itérant ce procédé $\varphi(n)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| > \varepsilon,\ \varphi(n) < k\}.$$

De cette manière, nous venons de construire une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon.$$

Par hypothèse u est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M,$$

donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leqslant M$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ψ une extractrice et $\ell' \in \mathbb{R}$, avec $\varphi \circ \psi$ qui est aussi une extractrice par composition d'applications strictement croissantes, donc$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u et $\ell' \in L(u) = \{\ell\}$.
Par ailleurs, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\underbrace{|u_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}|\ell'-\ell|} > \varepsilon,$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité on a pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|\ell' - \ell| \geqslant \varepsilon > 0$, ce qui n'est pas possible car ℓ est la seule valeur d'adhérence possible et ici la différence n'est pas nulle. $\square$