Khôlles de Mathématiques - Semaine 8

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Felix Rondeau

17 novembre 2024

1 Superposition des solution d'un problème de Cauchy.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}$, f et g les solutions, définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ des problèmes de Cauchy suivants

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est $\left\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g | (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$?

Démonstration. Selon le théorème de superposition, $\alpha f + \beta g$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, et de plus,

$$(\alpha f + \beta g)(3) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha \quad \text{et} \quad (\alpha f + \beta g)'(3) = \alpha f'(3) + \beta g'(3) = \beta$$

Notons $\mathcal{S}$ le plan vectoriel des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ définies sur $\mathbb{R}$.
Montrons que $\mathcal{S} = \text{Vect } \{f, g\} = \left\{\lambda f + \mu g | (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$

— D'après le théorème de superposition, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est solution de la même équation que f et g, donc $\left\{\lambda f + \mu g | (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\} \subset \mathcal{S}$.

— Soit $h \in \mathcal{S}$ une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = h(3) \\ y'(3) = h'(3) \end{cases}$$

La fonction $h(3)f + h'(3)g$ est aussi solution de ce problème, donc par unicité de la soluton d'un problème de Cauchy,

$$h = h(3)f + h'(3)g \quad \text{donc} \quad h \in \text{Vect } \{f, g\}$$

ainsi, $\mathcal{S} \subset \text{Vect } \{f, g\}$

□

2 Dans un ensemble totalement ordonné, toute partie finie non vide possède un plus grand élément et un plus petit élément. Donner un exemple illustrant l'importance du caractère totalement ordonné de l'ensemble considéré ainsi que de sa finitude.

Démonstration. Considérons $(E, \preccurlyeq)$ fini et totalement ordonné.
Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{« toute partie } A \text{ de } E \text{ de cardinal } n \text{ admet un ppe et un pge »}$$

— Si $n = 1$: Soit A un sigleton de E fixé quelconque

$$\exists a \in E, A = \{a\}$$

par réflexivité de la relation d'ordre $\preccurlyeq$, on a $a \preccurlyeq a$ et $a \in A$ donc A admet un ppe et un pge qui sont tous les deux a. Ce qui valide $\mathcal{P}(1)$.

— Si $n = 2$: Soit A une partie de E de cardinal 2 fixée quelconque. Alors il existe a et b deux éléments de E tels que

$$a \neq b \quad \text{et} \quad A = \{a, b\}$$

Par hypothèse, E est totalement ordonné donc $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$.

  — si $a \preccurlyeq b$, d'une part $b \in A, b \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq b$ donc A admet un pge qui est $\max A = b$, et d'autre part, $a \in A, a \preccurlyeq a$ et $a \preccurlyeq b$ donc A admet un ppe qui est $\min A = a$.

  — si $b \preccurlyeq a$, d'une part $a \in A, a \preccurlyeq a$ et $b \preccurlyeq a$ donc A admet un pge qui est $\max A = a$, et d'autre part, $b \in A, b \preccurlyeq b$ et $b \preccurlyeq a$ donc A admet un ppe qui est $\min A = b$.

donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $n \geqslant 2$ et $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal $n+1$ fixé quelconque. Alors il existe $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in E^{n+1}$ deux à deux distncts tels que

$$A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$$

Appliquons $\mathcal{P}(n)$ pour $A \leftarrow \{a_1, \ldots, a_n\}$ de cardinal n :

$$\exists (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 : a_i = \min A \text{ et } a_j = \max A$$

En appliquant $\mathcal{P}(2)$ pour $A \leftarrow \{a_i, a_{n+1}\}$ puis pour $A \leftarrow \{a_j, a_{n+1}\}$, on trouve que $m = \min A$ et $M = \max A$ existent.

  — $M \in A$ car a_j et a_{n+1} sont dans A.

  — $\forall k \in [\![1, n]\!], a_k \preccurlyeq a_j$ car $a_j = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$, et de plus, $a_j \preccurlyeq M$ et $a_{n+1} \preccurlyeq M$ car $M = \max\{a_j, a_{n+1}\}$ donc A admet un pge qui est $M = \max A$.

De même,

  — $m \in A$ car a_i et a_{n+1} sont dans A.

  — $\forall k \in [\![1, n]\!], a_i \preccurlyeq a_k$ car $a_i = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$, et de plus, $m \preccurlyeq a_i$ et $m \preccurlyeq a_{n+1}$ car $m = \min\{a_i, a_{n+1}\}$ donc A admet un ppe qui est $m = \min A$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nécessité du caractère totalement ordonné :
Dans la partie $\{2, 5\}$ de $(\mathbb{N}, |)$ n'admet ni ppe ni pge.

Nécessité de l'hypothèse de finitude :
Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$ totalement ordonné, $\mathbb{Z}$ n'a ni ppe ni pge. □

3 Montrer que, dans un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$, une partie A possède un plus grand élément si et seulement si la partie A possède une borne supérieure qui appartient à la partie A. De plus, dans ce cas, $\max A = \sup A$.

Démonstration.

— Supposons $\sup A \in A$. Par définition, $\sup A \in M(A) \implies \forall a \in A, a \preccurlyeq \sup A \implies A$ admet un pge qui est $\max A = \sup A$.

— Supposons que A admet un pge ($\max A$ existe). Alors

$$\forall a \in A, a \preccurlyeq \max A \text{ et } \max A \in \mathcal{P}(A)$$

Soit $M \in M(A)$ fixé quelconque.

$$\forall a \in A, a \preccurlyeq M$$

Pour $a \leftarrow \max A$ (ce qui est autorisé car le pge de A est dans A), $\max A \preccurlyeq M$. Or $\max A \in M$ donc $\max A = \min M(A)$. Ainsi A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.

□

4 Montrer que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues, en déduire qu'elles constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considème la relation d'équivalence.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x \in E$.
La classe de x, notée $\bar{x}$, est l'ensemble des éléments de E en relation avec x :

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

Démonstration. Soient $(x, y) \in E^2$ fixés quelconques.

— Si $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, rien à démontrer.

— Sinon $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ donc $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Fixons un tel z.
Soit $x' \in \bar{x}$ fq.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \underset{\text{symétrie}}{\implies} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \end{array}\right\} \underset{\text{transitivité}}{\implies} x'\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \underset{\text{symétrie}}{\implies} z\mathcal{R}y \end{array}\right\} \underset{\text{transitivité}}{\implies} x'\mathcal{R}y \underset{\text{symétrie}}{\implies} y\mathcal{R}x'$$

Donc $x' \in \bar{y}$ donc $\bar{x} \subset \bar{y}$.
En échangeant les rôles de x et y, on montre la deuxième inclusion $\bar{y} \subset \bar{x}$.

Montrons que les classes d'équivalence de E constituent une partition de E.
Soit $\mathcal{S}$ un système de représentant des classes fixé quelconque.

— Soit $s \in \mathcal{S}$ fixé quelconque. $\bar{s} \neq \emptyset$ car $s\mathcal{R}s$ par réflexivité.

— Soit $(s, s') \in \mathcal{S}^2$ fixés quelconques. D'après la démonstration ci-dessus ci-dessus, $\bar{s} \cap \bar{s'} = \emptyset$ ou $\bar{s} = \bar{s'}$.
Si $\bar{s} = \bar{s'}$ alors s et s' représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent, $\bar{s}$ et $\bar{s'}$ sont disjointes.

— $\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$ car $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \subset E$ par définition d'une classe d'équivalence.
Réciproquement, soit $x \in E$ fixé quelconque. Par réflexivité de $\mathcal{R}$, $x \in \bar{x}$.
Par définition d'un système de classe $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$ et $\bar{s_x} = \bar{x}$.
Donc $x \in \bar{s_x} \subset \bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$. Donc $E \subset \bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Ainsi,

$$E = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$$

□

5 Définir l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dire pourquoi il est nécessaire de procéder à une vérification puis montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la manière suivante

$$+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \left| \begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\bar{x} & , & \bar{y}) & \mapsto & \overline{x +_{\mathbb{Z}} y} \end{array} \right.$$

Démonstration. ⋆ Cette définition n'est pas cohérente à priori, car la valeur attribuée à $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dépend de x et de y alors qu'elle ne doit dépendre que de $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Il faudra bien vérifier que le résultat est le même, peu importe le représentant choisi.

Soient $(x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $\bar{x} = \bar{x}'$ et $\bar{y} = \bar{y}'$.

On a $\exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2 : x = x' + np, y = y' + nq$

$$\overline{x +_{\mathbb{Z}} y} = \overline{x' + np + y' + nq} = \overline{x' + y' + n(p + q)} = \overline{x' + y'}$$

On a donc bien égalité du résultat, peu importe le représentant de classe choisi, ce qui définit bien l'addition $+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

⋆ Montrons que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})$ est un groupe abélien.

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est stable pour la loi $+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ (par définition).
- Cette loi est associative : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^3$, on peut choisir un représentant de classe pour ces trois classes : $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\bar{x} = a, \bar{y} = b, \bar{z} = c$.

$$\begin{aligned}(a +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} c = \overline{x +_{\mathbb{Z}} y} +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} c &= \underbrace{\overline{(x +_{\mathbb{Z}} y) +_{\mathbb{Z}} z} = \overline{x +_{\mathbb{Z}} (y +_{\mathbb{Z}} z)}}_{\text{associativité de } +_{\mathbb{Z}}} \\ &= a +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \overline{y +_{\mathbb{Z}} z} = a +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} c)\end{aligned}$$

- Cette loi est commutative : Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^2$, on choisit, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ des représentants de classe tels que $\bar{x} = a, \bar{y} = b$

$$a +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} b = \underbrace{\overline{x +_{\mathbb{Z}} y} = \overline{y +_{\mathbb{Z}} x}}_{\text{commutativité de } +_{\mathbb{Z}}} = b +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} a$$

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un élément neutre pour $+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$: Soit $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on choisit $x \in \mathbb{Z}$ un représentant de classe tel que $\bar{x} = a$

$$a +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \bar{0} = \overline{x +_{\mathbb{Z}} 0} = \bar{x} = a$$

Donc $\bar{0}$ est un élément neutre à droite, et par commutativité de $+_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ prouvée plus haut, $\bar{0}$ est aussi élément neutre à gauche.

Ainsi, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})$ est un Groupe Abélien.

□

6 Théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [\![0; |b| - 1]\!] \end{cases} \tag{1}$$

Démonstration.

Unicité. Soient deux tels entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et deux couples $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r \leqslant |b| - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leqslant r' \leqslant |b| - 1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-(|b| - 1) \leqslant r' - r \leqslant |b| - 1$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Existence Posons pour $b \geqslant 1$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leqslant a\}$

— $\Omega \subset \mathbb{Z}$

— non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit …)

— Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d'Ω.

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ donc $r \in \mathbb{Z}$. Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leqslant a$ d'où $0 \leqslant r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q+1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [\![0, |b| - 1]\!]$.

Si $b < 1$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. □

7 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et minorée fixée quelconque.
Considérons $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite u.
A est :

- une partie de $\mathbb{Z}$ car u est à valeur dans $\mathbb{Z}$
- non vide car $u_0 \in A$
- minoré car u est minorée

Donc A admet un plus petit élément. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = minA$. Fixons un tel n_0.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geqslant n_0$.

$$\left.\begin{array}{r} u_n \in A \implies u_n \geqslant \min A = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geqslant n_0 \text{ donc } u_n \leqslant u_{n_0} \end{array}\right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi, u est stationnaire. □

8 [Non demandée] Les solutions d'une EDL_2 constituent un espace vectoriel.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, f et g les solutions, définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = 0 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$$

Comment s'exprime la solution définie sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(3) = \alpha \\ y'(3) = \beta \end{cases}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés ?

Peut-on affirmer que le plan vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{\lambda \cdot f + \mu \cdot g | (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Démonstration. La solution s'exprime simplement comme combinaison linéaire de f et g, plus précisément, la combinaison linéaire en α et β. En effet, soient de tels scalaires, et soient f et g de telles solutions, on a :

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'' + a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' + b(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = 0, \text{ par définition des espaces vectoriels.}$$

Et de même, $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(3) = \alpha \cdot f'(3) + \beta \cdot g'(3) = \alpha$, et $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)''(3) = \alpha \cdot f''(3) + \beta \cdot g''(3) = \beta$. Ce qui suffit par unicité des solutions (de la donc) d'un problème de Cauchy dans le cadre du théorème du cours.
Pour ce qui est du plan vectoriel des solutions, noté Ω, notons aussi Φ l'ensemble proposé. L'inclusion $\Phi \subset \Omega$ est triviale par propriété de linéarité des espaces vectoriels. Finalement, pour $\Omega \subset \Phi$, soit $\omega \in \Omega$, forcément, ω vérifie l'EDL_2, mais aussi des conditions de Cauchy bien que celles-ci soient non-spécifiées, ainsi posons $\omega'(3) = \delta$ et $\omega''(3) = \theta$, donc en particulier, $\omega = \delta \cdot f + \theta \cdot g$, d'où l'égalité par double inclusion. □

9 [Non demandée] Formules de Cramer pour les systèmes 2 × 2

Résolution générale des systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues en fonction du déterminant du systèmes (**tous les cas ne sont pas nécessairement à envisager**)

Considérons le système linéaire à deux équations et à deux inconnues (x, y) :

$$(S) \begin{cases} ax + by = b_1 & (E_1) \\ cx + dy = b_2 & (E_2) \end{cases} \tag{2}$$

dont $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ sont les coefficients et $(b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$ sont les seconds membres.

1. (S) admet une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. De plus, dans ce cas, la solution est
$$\left(\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right) \tag{3}$$
2. Si $ad - bc = 0$, alors l'ensemble des solutions est soit vide, soit une droite affine de $\mathbb{K}^2$, soit $\mathbb{K}^2$.

Démonstration. Procédons par disjonction de cas.

- Supposons que $ad - bc \neq 0$.

• Supposons que $a \neq 0$.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & b_1 \\ & & \left(d - \frac{bc}{a}\right) y & = & b_2 - \frac{c}{a} b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a} L_2) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & b_1 \\ & & (ad - bc)\, y & = & ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} ax & = & \frac{1}{a}\left(b_1 - b\frac{ab_2 - cb_1}{ad-bc}\right) = \frac{1}{a}\frac{adb_1 - bcb_1 + abb_2 - bcb_2}{ad-bc} \\ y & = & \frac{ab_2 - cb_1}{ad-bc} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} ax & = & \frac{db_1 - bb_2}{ad-bc} & = & \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y & = & \frac{ab_2 - cb_1}{ad-bc} & = & \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{array}\right.$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

• Supposons que a = 0. L'hypothèse $ad - bc \neq 0$ implique $bc \neq 0$ donc $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} & & by & = & b_1 \\ cx & + & dy & = & b_2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{c}\left(b_2 - d\frac{b_1}{b}\right) \\ y & = & \frac{b_1}{b} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} ax & = & \frac{db_1 - bb_2}{-bc} & = & \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y & = & \frac{-cb_1}{-bc} & = & \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{array}\right.$$

Donc le système admet une unique solution qui est celle annoncée.

$ad - bc = 0$.

• Supposons $a \neq 0$. En reprenant la méthode pivot de Gauss,

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & b_1 \\ & & \left(d - \frac{bc}{a}\right) y & = & b_2 - \frac{c}{a} b_1 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{c}{a} L_2) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & b_1 \\ & & \underbrace{(ad - bc)}_{0}\, y & = & ab_2 - cb_1 \quad (L_1 \leftarrow aL_1) \end{array}\right.$$

Donc le système est de rang 1 avec une condition de compatibilité.
Si $ab_2 - cb_1 \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.
Sinon $ab_2 - cb_1 = 0$

$$(S) \iff ax + by = b_1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a} - b\frac{t}{a} \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\} \tag{4}$$

Donc (S) admet un droite affine de solutions.

• Supposons $a = 0$. Puisque $ad - bc = 0$, alors $bc = 0$ donc b ou c est nul.

  • Si $c = 0$,

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccc} by & = & b_1 \\ dy & = & b_2 \end{array}\right.$$

  • Si $b = 0$,

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccc} by & = & b_1 \\ 0 & = & b_2 \end{array}\right.$$

- Si $b_2 = 0$, (S) n'admet aucune solution.
- Si $b_2 \neq 0$, $(S) \iff dy = b_2$
  - Si $d = 0$, $(S) \iff 0 = b_2$. (S) n'admet aucune solution ($b_2 \neq 0$) ou admet $\mathbb{K}^2$ comme ensemble des solutions ($b_2 = 0$).
  - Si $d \neq 0$, $(S) \iff y = \frac{b_2}{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_2}{d} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$. Donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si $b \neq 0$

$$(S) \iff \begin{cases} y & = & \frac{b_1}{b} \\ 0 & = & b_2 - \frac{db_1}{b} \end{cases}$$

  - Si $b_2 - \frac{db_1}{b} \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.
  - Si $b_2 - \frac{db_1}{b} = 0$, $(S) \iff y = \frac{b_1}{b} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{b_1}{d} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ donc (S) admet une droite affine de solutions.

- Si $c \neq 0$ alors $b = 0$

$$(S) \iff \begin{cases} 0 & = & b_1 \\ cx + dy & = & b_2 \end{cases}$$

  - Si $b_1 \neq 0$, (S) n'admet aucune solution.
  - Si $b_1 = 0$, $(S) \iff x = \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{b_2}{c} - \frac{d}{c}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\}$ donc (S) admet une droite affine de solutions.

□

10 [Non demandée] Déterminer les solutions réelles définies sur $]0, +\infty[$ de $y'' + 3y' + 2y = \frac{t-1}{t^2}e^{-t}$

Démonstration. Il s'agit d'une EDL2 avec second membre à coefficients constants avec second membre défini sur $]0, +\infty[$.

Ce second membre est de plus continu sur $\mathbb{R}_+^*$ donc les solutions définies sur un intervalle maximal sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et leur ensemble $\mathcal{S}$ est un plan affine, le plan affine passant par une solution particulière et dirigé par le plan vectoriel $\mathcal{S}_H$.

⋆ L'équation caractéristique de $y'' + 3y' + 2y = 0$ est $r^2 + 3r + 2 = 0 \iff (r+1)(r+2) = 0$ Donc

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

⋆ Cherchons une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} t \mapsto \lambda(t)e^{-t} \text{ est solution particulière dans } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, (\lambda(t)e^{-t})'' + 3(\lambda(t)e^{-t})' + 2(\lambda(t)e^{-t}) = \frac{t-1}{t^2}e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, (\lambda''(t) - 2\lambda'(t) + \lambda(t))e^{-t} + 3(\lambda(t)' - \lambda(t))e^{-t} + 2\lambda(t)e^{-t} = \frac{t-1}{t^2}e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lambda''(t) + \lambda'(t) = \frac{t-1}{t^2} \end{aligned}$$

◊ Cherchons donc une solution particulière de

$$y' + y = \frac{t-1}{t^2}$$

C'est une EDL1 définie et résolue sur $\mathbb{R}_+^*$, à coefficients et second membre résolus, donc l'ensemble des solutions est une droite affine de solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$

△ Par la méthode de la variation de la constante, cherchons une solution de la forme $t \mapsto \alpha(t)e^{-t}$ avec $\alpha \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} t \mapsto \alpha(t)e^{-t} \text{ est solution particulière } &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, (\alpha(t)e^{-t})' + \alpha(t)e^{-t} = \frac{t-1}{t^2} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \alpha'(t) = \frac{t-1}{t^2}e^t \end{aligned}$$

Cherchons une primitive de $t \mapsto \frac{t-1}{t^2}e^t$

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{u-1}{u^2}e^u \,\mathrm{d}u &= \int_1^t \frac{e^u}{u} - \frac{e^u}{u^2} \,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^t \frac{e^u}{u} \,\mathrm{d}u - \int_1^t \frac{e^u}{u^2} \,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^t \frac{e^u}{u} \,\mathrm{d}u - \left(\left[-\frac{1}{u}e^u \right]_1^t - \int_1^t - \left(\frac{1}{u} \right) e^u \,\mathrm{d}u \right) \\ &= \left[\frac{e^u}{u} \right]_1^t = \frac{e^t}{t} - e \end{aligned}$$

Donc $\alpha(t) = \frac{e^t}{t}$ convient.

Donc $t \mapsto \alpha(t)e^{-t} = \frac{e^t}{t}e^{-t} = \frac{1}{t}$ est une solution particulière de $y' + y = \frac{t-1}{t^2}$

Donc $\lambda'(t) = \frac{1}{t}$ donc $\lambda(t) = \ln(t)$ convient

Donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est une solution particulière de (EDL2)

Ainsi, le plan affine des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto (\ln t)e^{-t} + \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$\square$