

# Khôlles de Mathématiques - Semaine 5

Kylian Boyet, George Ober, Felix Rondeau

14 Octobre 2024

## 1 Montrer qu'une combinaison linéaire de deux fonctions bornées (respectivement lipschitziennes) est bornée (resp. lipschitzienne)

*Démonstration.* Soit  $I$  un intervalle réel. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

◇ Supposons que  $f$  et  $g$  sont respectivement bornées par  $A$  et par  $B$ . Soit  $x \in I$  fixé quelconque.

$$\begin{aligned} |(\lambda.f + \mu.g)(x)| &= |\lambda.f(x) + \mu.g(x)| \\ &\leq |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \\ &\leq |\lambda|A + |\mu|B \end{aligned}$$

Donc  $\lambda.f + \mu.g$  est bornée.

◇ Supposons que  $f$  et  $g$  sont respectivement  $K$  et  $L$  lipschitziennes. Soient  $(x, y) \in I^2$  fixés quelconques.

$$\begin{aligned} |(\lambda.f + \mu.g)(x) - (\lambda.f + \mu.g)(y)| &= |\lambda.f(x) + \mu.g(x) - \lambda.f(y) - \mu.g(y)| \\ &= |\lambda(f(x) - f(y)) + \mu(g(x) - g(y))| \\ &\leq |\lambda||f(x) - f(y)| + |\mu||g(x) - g(y)| \\ &\leq |\lambda|K|x - y| + |\mu|L|x - y| \\ &\leq (|\lambda|K + |\mu|L)|x - y| \end{aligned}$$

□

## 2 Montrer que si $f$ est impaire et bijective, alors $f^{-1}$ est aussi impaire. Donnez un/des exemples.

*Démonstration.* Soient  $I$  et  $J$  deux parties non-vides de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application bijective impaire de  $I$  dans  $J$ . Notons  $f^{-1}$  sa bijection réciproque.

L'imparité de  $f$  impose la symétrie de  $I$  par rapport à l'origine. De plus, pour tout  $y \in J$ ,

$$\exists x \in I : f(x) = y$$

donc par imparité de la fonction  $f$ , le domaine  $I$  étant centré en 0,

$$f(-x) = -f(x) = -y$$

Ainsi,  $J$  est centré en 0. On a alors, pour tout  $y \in J$ ,

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(-f^{-1}(y))) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

D'où l'imparité de  $f^{-1}$ .

▷ **Exemple :** Prenons notre fonction bijective impaire préférée, la fonction  $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$  que l'on notera  $\widetilde{\sin}$ . Sa bijection réciproque est  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Comme dans la démonstration, prenons  $y \in [-1, 1]$ . Comme  $[-1, 1]$  est centré en 0,  $-y \in [-1, 1]$ , et dès lors,

$$\begin{aligned}\arcsin(-y) &= \arcsin(-\widetilde{\sin}(\arcsin(y))) \\ &= \arcsin(\widetilde{\sin}(-\arcsin(y))) \\ &= -\arcsin(y).\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'imparité de la fonction  $\arcsin$ . □

### 3 Montrer que les graphes d'une fonction et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

*Démonstration.* Calculons les coordonnées  $(x', y')$  du point  $M'$ , image de  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  par la réflexion  $r$  d'axe la première bissectrice.

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} \perp (\vec{i} + \vec{j}) \\ \text{le milieu de } [MM'] \text{ appartient à } \Delta. \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 0 \\ \text{le milieu de } [MM'] \text{ vérifie l'équation } y = x. \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \left( \frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right) \text{ vérifie l'équation } y = x. \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x' - x + y' - y = 0 \\ \frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x' + y' = x + y \\ x' - y' = -x + y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array} \right.\end{aligned}$$

L'expression de la réflexion  $r$  d'axe la première bissectrice est ainsi

$$r : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (y, x) \end{array} \right.$$

Les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  étant respectivement

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\} \quad \text{et} \quad G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in J\}$$

on a bien

$$\begin{aligned}r(G_f) &= \{(f(x), x) \mid x \in I\} \\ &= \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in J\} \quad \text{en posant } y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \\ &= G_{f^{-1}}\end{aligned}$$

□

### 4 Limite (et preuve) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .

*Démonstration.* La fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc au dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier à celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation  $y = x - 1$ . On a donc

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Ce qui permet d'affirmer, en divisant par  $x^2$ , que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x^2} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0}$$

Ainsi, le théorème d'existence de limite par encadrement permet de conclure que  $\frac{\ln x}{x^2}$  admet une limite en  $+\infty$  et que cette limite est nulle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On en déduit alors le cas général :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} &= \left( \frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \left( \frac{\frac{2\alpha}{\beta} \ln \left( x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \\ &= \left( \frac{2\alpha}{\beta} \right)^\alpha \underbrace{\left[ \frac{\ln \left( x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)}{\left( x^{\frac{\beta}{2\alpha}} \right)^2} \right]^\alpha}_{\substack{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0 \\ \text{v. ci-dessus} \\ x \rightarrow +\infty \rightarrow 0 \\ \text{par composition des limites}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

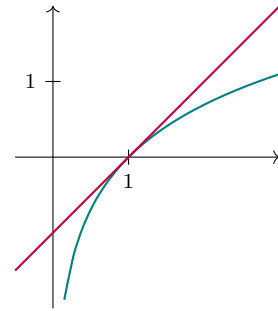


FIGURE 1 –  $\ln$  en bleu et  $y = x - 1$  en violet.

□

## 5 Limite en 0 de $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ et de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

*Démonstration.*

\* Le taux d'accroissement en  $x_0$  d'une fonction  $f$  dérivable en  $x_0$  est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (*)$$

— En appliquant (\*) pour  $f \leftarrow (x \mapsto (1+x)^\alpha)$  et  $x_0 \leftarrow 0$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = f'(0) = \alpha$$

car  $f' : x \mapsto 1 \cdot \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$  vaut  $\alpha$  en 0.

— De même, en appliquant (\*) pour  $f \leftarrow \sin$  et  $x_0 \leftarrow 0$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \sin' 0 = \cos 0 = 1$$

\* Soit  $x \in \mathbb{R}^*$  fixé quelconque.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \underbrace{\left( \frac{\sin x}{x} \right)^2}_{x \rightarrow 0 \rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{1 + \cos x} \right)}_{x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

□

## 6 Présentation exhaustive de la fonction arcsin.

*Démonstration.* Premièrement, ladite fonction est la bijection réciproque de la fonction  $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$  (voir 1.). D'où :

$$\arcsin = \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(x) \end{cases}$$

Ainsi, pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arcsin(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\sin(\theta) = x$$

. Il découle alors naturellement des propriétés héréditairement acquises de  $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$  :

1. arcsin est impaire.
2. arcsin est strictement croissante sur  $[-1, 1]$ .
3.  $\arcsin \in \mathcal{C}^0\left([-1, 1], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ .
4.  $\arcsin \in \mathcal{D}^1\left(]-1, 1[, \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \right)$ .
5.  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
6. arcsin admet deux demi-tangentes verticales en  $-1$  et  $1$ .

Graphe de arcsin :

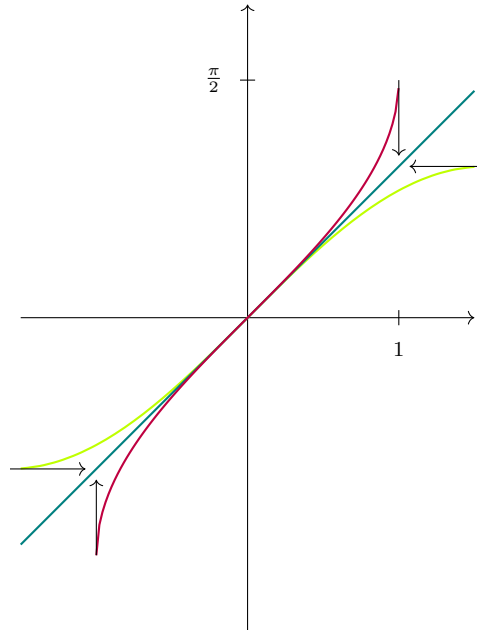


FIGURE 2 – arcsin en violet, sin en vert et la première bissectrice en bleu.

On a aussi, grâce au taux d'accroissement en 0 d'arcsin :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Puis finalement (visible sur le graphe) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(x) \geq x.$$

□

## 7 Étude et tracé de $\arcsin \circ \sin$ (avec réduction du domaine d'étude à $[0, \pi/2]$ ).

*Démonstration.*

- \* La fonction  $\sin$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1] = \mathcal{D}_{\arcsin}$  donc  $\arcsin \circ \sin$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- \* La fonction  $\arcsin \circ \sin$  est  $2\pi$ -périodique car  $\sin$  est  $2\pi$ -périodique. On peut donc restreindre le domaine d'étude à un intervalle d'amplitude  $2\pi$ , par exemple  $[-\pi, \pi]$ .
- \* La fonction  $\arcsin \circ \sin$  est impaire comme composée de fonctions impaires. L'intervalle  $[-\pi, \pi]$  étant centré en 0, on peut restreindre le domaine d'étude à  $[0, \pi]$ .
- \* De plus, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $\sin(\pi - x) = \sin x$  donc  $(\arcsin \circ \sin)(\pi - x) = (\arcsin \circ \sin)(x)$ .

Il suffit donc d'étudier le graphe fonction  $\arcsin \circ \sin$  sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , son graphe sur  $[0, \pi]$  s'en déduisant par une réflexion d'axe la droite d'équation  $x = \frac{\pi}{2}$ , ce qui nous permet, par imparité et  $2\pi$ -périodicité, de trouver son graphe sur  $\mathbb{R}$  par réflexion sur l'axe des ordonnées et translations successives de vecteur  $2\pi \vec{i}$ .

Sachant que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $(\arcsin \circ \sin)(x) = x$ , on a le graphe suivant :

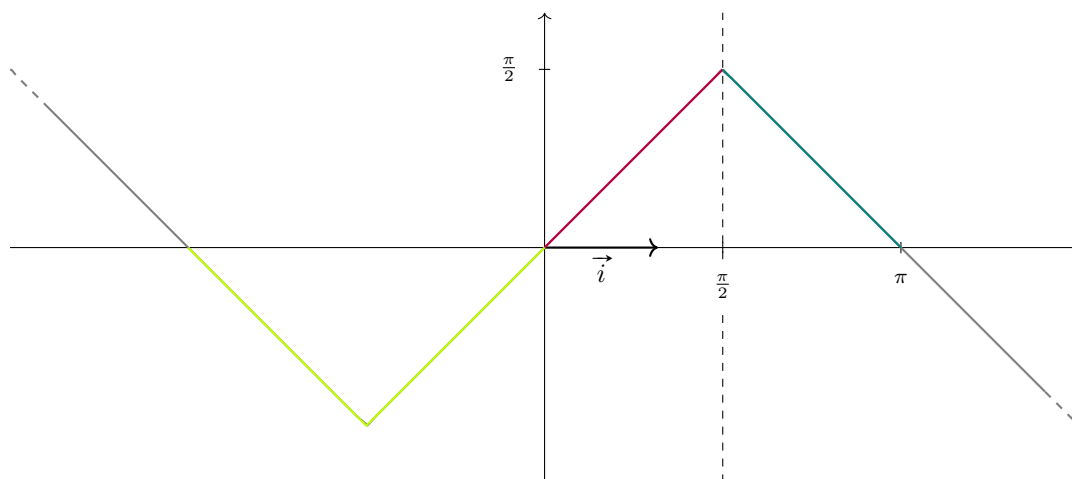


FIGURE 3 – Graphe de  $\arcsin \circ \sin$ .

□