Khôlles de Mathématiques - Semaine 24

Hugo Vangilluwen, George Ober

22 Avril 2024

Pour cette semaine, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' et F' des sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F.
Nous rappelons que $\dim\{0_E\} = 0$ et que $\{0_E\} = \text{Vect }\emptyset$.

1 Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Pour tout sous-espace vectoriel de E, il existe un sous-espace vectoriel complémentaire.

Démonstration.
Théorème de la base incomplète (admis ici mais démontré dans le cours) : pour toute famille libre de E, nous pouvons y adjoindre une partie d'une famille quelconque génératrice de E (généralement une base, la base canonique si elle a un sens) pour en faire une base de E.

Posons $n = \dim E$ et $p = \dim E'$. Ainsi, il existe $(e_1, \ldots, e_p)$ base de E'.
Appliquons le théorème de la base incomplète pour cette famille. Il existe $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ $n-p$ vecteurs de E tel que $(e_1, \ldots, e_n)$ est un base de E.
Posons $E'' = \text{Vect }\{e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ et vérifions qu'il est complémentaire à E'.

* Par définition de Vect, E'' est un sous-espace vectoriel .
* Trivialement, $E' + E'' = E$.
* $\{0_E\} \subset E' \cap E''$ car E' et E'' sont deux sous-espaces vectoriels .
* Soit $x \in E' \cap E''$.
  $X \in E' \implies \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$
  $X \in E'' \implies \exists(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p} : x = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$
  Par différence, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} (-\lambda_i) e_i = 0_E$.
  Or $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base de E donc $\forall i \in [\![1;p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.
  donc $x = 0_E$. Ainsi, $E' \cap E'' \subset \{0_E\}$.

□

2 Dimension de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = \dim E \times \dim F \tag{1}$$

Démonstration. Notons $n = \dim E$ et $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de E. Considérons

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \to & F^n \\ f & \mapsto & \underbrace{(f(e_i)))_{1\leqslant i\leqslant n}}_{\text{évaluation de f en la base choisie}} \end{array} \right.$$

* φ est linéaire.
* φ est bijective d'après le théorème de création des applications linéaires qui établit que pour toute famille de n vecteurs de F, il existe une unique application linéaire de E dans F envoyant la base $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sur cette famille.

Ainsi, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et F^n sont isomorphes. F^n est de dimension finie, ce qui conclut. □

3 Formule de Grassman

Supposons E de dimension finie.
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels . Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2 \tag{2}$$

Démonstration. Commençons par prouver une version simplifier de la somme directe. Supposons que E_1 et E_2 sont en somme directe.
Fixons $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2.
Alors $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ engendre $E_1 + E_2$. Or $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est finie donc $E_1 + E_2$ est de dimension finie.
Posons $n = \dim E_1$ et $p = \dim E_2$. Notons $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ la base $\mathcal{B}_1$ et $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ la base $\mathcal{B}_2$.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p}$ fixés quelconquesfixés quelconques $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i = 0_E$.
Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} (-\mu_i) f_i$. Or $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E_1$ et $\sum_{i=1}^{n} (-\mu_i) e_i \in E_2$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Donc $\lambda = \tilde{0}$. De même, $\mu = \tilde{0}$.
Donc $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est libre.
Ainsi, $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de $E_1 \oplus E_2$. Donc $\dim E_1 \oplus E_2 = |(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim E_1 + \dim E_2$.

Enlevons l'hypothèse que E_1 et E_2 sont en somme directe.
$E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E_2 et E_2 est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie donc il existe E_2' sous-espace vectoriel de E_2 tel que $E_2 = (E1 \cap E_2) \oplus E_2'$.
Montrons que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2'$

- $*$ E_1 et E_2' sont en somme directe.

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2' &= E_1 \cap (E_2' \cap E_2) \text{ car } E_2' \subset E_2 \\ &= (E_1 \cap E_2) \cap E_2' \text{ car } \cap \text{ est associative et commutative} \\ &= 0_E \text{ car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont en somme directe et } E_2' \text{ sev} \end{aligned}$$

- $*$ $E_1 + E_2 \subset E_1 + E_2'$
  Soit $x \in E_1 + E_2$. Alors $\exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x = x_1 + x_2$.
  Or $x_2 \in E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$ donc $\exists (x_{21}, x_2') \times E_2' : x_2 = x_{21} + x_2'$.
  D'où $x = \underbrace{x_1 + x_{21}}_{\in E_1} + \underbrace{x_2'}_{\in E_2} \in E_1 + E_2$.
- $*$ Trivialement, $E_1 + E_2' \subset E_1 + E_2$ (car $E_2' \subset E_2$).

Ainsi, E_1 et E_2' (car sev) étant de dimension finie, $\dim E_1 \oplus E_2' = \dim E_1 + \dim E_2'$.
De plus, $\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) \oplus E_2' = \dim E_1 \cap E_2 + \dim E_2'$.
Donc $\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$. □

4 Caractérisation injectivité/bijectivité/surjectivité par le rang

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

(i) Si E est de dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{rg} f = \dim E \tag{3}$$

(ii) Si F est de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{rg} f = \dim F \tag{4}$$

(iii) Si E et F sont de même dimension finie

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ sujective}$$

C'est *l'accident de la dimension finie* !

Démonstration.

(i) Supposons E de dimension finie, fixons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E (avec $n = \dim E$) Supposons f injective :

$$\text{rg}f = \dim \text{Im}f = \dim \text{Vect}\{f(e_1) \dots f(e_n)\}$$

Donc $(f(e_1), \dots f(e_n))$ est génératrice. $(f(e_1), \dots f(e_n))$ est de plus libre car f est injective. Donc c'est une base, donc

$$\dim \text{Vect}\{f(e_1) \dots f(e_n)\} = n = \dim E$$

donc $\text{rg}f = \dim E$. Réciproquement, supposons que $\text{rg}f = \dim E = n$. Alors

$$n = \text{rg}f = \dim \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

Donc $(f(e_1), \dots f(e_n))$ est génératrice de cardinal n, égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré. C'est donc une base du sous-espace vectoriel engendré. Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, donc f est injective.

(ii) Supposons F de dimension finie

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im}f = F \iff \dim \text{Im}f = \dim F$$

(iii) Supposons E et F de même dimension finie

$$f \text{ injective} \iff \text{rg}f = \dim E \iff \text{rg}f = \dim F \iff f \text{ surjective}$$

D'où la bijectivité.

□

5 Théorème du rang

Si E est de dimension finie alors pour toute $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ application linéaire,

$$\dim E = \text{rg } f + \dim \ker f \tag{5}$$

Démonstration. Démontrons d'abord le lemme suivant. Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et H un supplémentaire de $\ker f$ dans E. Alors $f_{|H}^{|\text{Im}f}$ est un isomorphisme de H sur $\text{Im}f$.

Notons $\hat{f}$ un telle restriction et corestriction. Cette application est bien définie (car $f(H) \subset \text{Im}f$) et $\hat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, \text{Im}f)$.

$\ker \hat{f} = \{x \in H \mid \hat{f}(x) = 0_E\} = \{x \in H | x \in \ker f\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$ car H et $\ker f$ sont complémentaire. Donc $\hat{f}$ est injective.

Soit $y \in \text{Im}f$. D'où $\exists x \in E : y = f(x)$.

Décomposons x dans $E = H \oplus \ker f$, $\exists (x_H, x_k) \in H \times \ker f : x = x_H + x_k$.

Ainsi, $y = f(x) = f(x_H) + f(x_k) = f(x_H)$ car $x_k \in \ker f$. Donc y admet un antécédent par $\hat{f}$ (qui est x_H).

Donc $\hat{f}$ est surjective.

Donc $f_{|H}^{|\text{Im}f}$ est un isomorphisme de H sur $\text{Im}f$.

Supposons maintenant que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

D'après le théorème d'existence d'un supplémentaire en dimension finie, $\ker f$, étant un sous-espace vectoriel de E, admet un supplémentaire H c'est-à-dire $E = H \oplus \ker f$.

En prenant la dimension sur cette égalité, $\dim E = \dim \ker f + \dim H$. D'après le lemme précédent, $\dim H = \dim \text{Im}f = \text{rg } f$.

D'où $\dim E = \text{rg } f + \dim \ker f$. □

6 Rang d'une composition d'applications linéaires

Soit G un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(u, v) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Si E et F sont de dimension finie alors

$$\text{rg } u = \text{rg } v \circ u + \dim \ker v \cap \text{Im}u \tag{6}$$

Démonstration. Considérons que E et F sont de dimension finie. Soient de tels objets.
Appliquons le théorème du rang à $v_{|\mathrm{Im}u}$ ce qui est autorisé puisque $v_{|\mathrm{Im}u}$ est une application linéaire et $\mathrm{Im}u$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie (car sev de F).

$$\dim \mathrm{Im}u = \mathrm{rg}\ v_{|\mathrm{Im}u} + \dim\ker v_{|\mathrm{Im}u}$$

$\ker v_{|\mathrm{Im}u} = \{y \in \mathrm{Im}u \mid v(y) = 0_G\} = \{y \in \mathrm{Im}u \mid y \in \ker v\} = \mathrm{Im}u \cap \ker v$
$\mathrm{Im}v_{|\mathrm{Im}u} = v(Imu) = \mathrm{Im}v \circ u$ (cette égalité est vraie pour deux fonctions de E dans F et de F dans G quelconques, pas forcément linéaires.)
Donc

$$\mathrm{rg}\ f = \mathrm{rg}\ v \circ u + \dim\ker v \cap \mathrm{Im}u$$

□

7 Lemme sur les formes linéaires non nulles

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire *non nulle*. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \in \mathbb{N}$, alors

$$\dim_{\mathbb{K}} F \cap \ker\varphi = \begin{cases} p & \text{si } F \subset \ker\varphi \\ p-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, on a toujours $\dim_{\mathbb{K}} F \cap \ker F \geqslant p-1$

Démonstration. Si $F \subset \ker\varphi$, $F \cap \ker\varphi = F$ donc $\dim F \cap \ker\varphi = p$
Sinon, il existe $a \in F$ tel que $a \notin \ker\varphi$. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus \ker\varphi = E$$

Montrons alors que $F = \mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus (F \cap \ker\varphi)$.

$$\mathrm{Vect}\,\{a\} \cap (F \cap \ker\varphi) = \underbrace{\mathrm{Vect}\,\{a\} \cap F}_{=\mathrm{Vect}\{a\}} \cap \ker\varphi = \mathrm{Vect}\,\{a\} \cap \ker\varphi = \{0_E\}$$

car les deux espaces sont supplémentaires donc en somme directe.
Donc $\mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus (F \cap \ker\varphi)$.
Par double inclusion, montrons que $\mathrm{Vect}\,\{a\} + (F \cap \ker\varphi) = F$
Pour l'inclusion directe, remarquons que $a \in F$ donc $\mathrm{Vect}\,\{a\} \subset F$ or $F \cap \ker\varphi \subset F$ donc leur somme est bien incluse $\mathrm{Vect}\,\{a\} + (F \cap \ker\varphi) \subset F$ Réciproquement, soit $x \in F$ fq. Puisque $\mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus \ker\varphi = E$

$$\exists(\lambda, x_K) \in \mathbb{K} \times \ker\varphi : x = \lambda.a + x_K$$

De plus, $x_K = x - \lambda.a \in F$ car $(a, x) \in F^2$ donc

$$x = \underbrace{\lambda.a}_{\in\mathrm{Vect}\{a\}} + \underbrace{x_K}_{\in F\cap\ker\varphi} \in \mathrm{Vect}\,\{a\} + (F \cap \ker\varphi)$$

D'où l'inclusion réciproque.
donc $F = \mathrm{Vect}\,\{a\} \oplus (F \cap \ker\varphi)$ en passant à la dimension :

$$\underbrace{\dim F}_{=p} = \underbrace{\dim\mathrm{Vect}\,\{a\}}_{=1} + \dim(F \cap \ker\varphi)$$

Donc $\dim(F \cap \ker\varphi) = p - 1$.
Appliquons ce lemme pour la démonstration de la propriété suivante

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(H_i)_{n\in[\![1,m]\!]}$, m hyperplans de E. Alors $$\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - m$$

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ par.

$$\mathcal{P}(m) : \text{´ pour tous } H_1, \ldots, H_m \text{ hyperplans de } E, \dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - m\text{ˇ}$$

Soit H_1 un hyperplan de E fixé quelconque. D'après la caractérisation des hyperplans en dimension finie,

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{1} H_i = \dim_{\mathbb{K}} H_1 = n - 1 \geqslant n - 1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(m)$ est vraie. Soient $H_1, \ldots, H_m$ et H_{m+1} $m+1$ hyperplans de E. D'après la définition d'un hyperplan, il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H_{m+1} = \ker \varphi$. Appliquons donc le lemme précédent pour $F \leftarrow \bigcap_{i=1}^{m} H_i$ (autorisé car c'est un sous espace de l'espace E, qui est de dimension finie, donc ses sous espaces les sont aussi) et $\varphi \leftarrow \varphi$ (autorisé car c'est une forme linéaire non nulle) :

$$\dim_{\mathbb{K}} \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \cap \ker \varphi}_{=\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \cap H_{m+1}} \geqslant \dim_{\mathbb{K}} \left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) - 1 \qquad \underbrace{\geqslant n - m - 1}_{\text{en appliquant } \mathcal{P}(\Updownarrow) \text{ pour } H_1, \ldots, H_m}$$

Donc par associativité de l'intersection, $\dim_{\mathbb{K}} \bigcap_{i=1}^{m+1} H_i \geqslant n - (m+1)$
Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

$\square$