Khôlles de Mathématiques - Semaine 13

Hugo Vangilluwen

28 décembre 2023

1 Théorème de composition des limites

Soient g une fonction définie sur $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ telle que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.
Si $\left.\begin{array}{l} g \text{ admet une limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } b \in \overline{\mathcal{D}_g} \\ f \text{ admet } b \text{ comme limite en } a \in \overline{\mathcal{D}_f} \end{array}\right\}$ alors $g \circ f$ admet ℓ comme limite en a.

Démonstration. Traitons le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq.
Appliquons la définition de $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} \ell$ pour cet ε :

$$\exists \eta_g \in \mathbb{R}_+^* : \forall y \in \mathcal{D}_g, |y - b| \leqslant \eta_g \implies |g(y) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Appliquons la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ pour cet η_g :

$$\exists \eta_f \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leqslant \eta_f \implies |f(x) - b| \leqslant \eta_g$$

Posons $\eta = \eta_f$.
Soit $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$ fq tq $|x - a| \leqslant \eta$. Or $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ donc $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathcal{D}_f$.
Ainsi, $x \in \mathcal{D}_f$ et $|x - a| \leqslant \eta_f$ d'où $|f(x) - b| \leqslant \eta_g$ d'où $|g(f(x)) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc

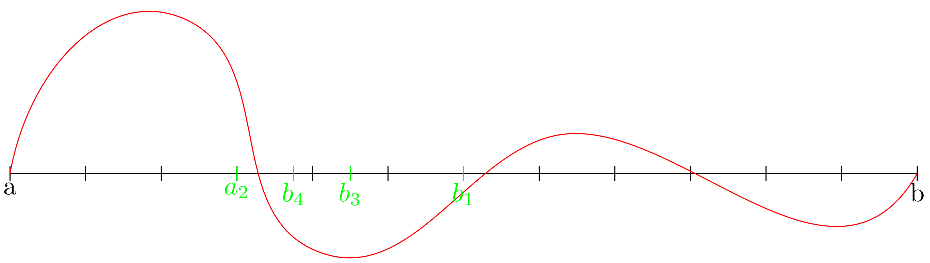
$$g \circ f \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

□

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction continue $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.
Si $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors $\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$.
On rencontre aussi : *Si* $f(a)f(b) < 0$ *alors* $\exists c \in]a; b[: f(c) = 0$.

Démonstration. La démonstration repose sur la technique de la dichotomie.



Soient a, b, f de tels objets. Procédons à la construction des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \frac{a+b}{2}$ (le milieu du segment $[a; b]$). Nous avons, par hypothèse $f(a_0)f(b_0) \leqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq. Supposons les trois suites construites au rang n telles que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ et $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ (milieu de $[a_n; b_n]$).

— Si $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$, posons $\left| \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n \\ b_{n+1} & = & c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{array} \right.$

— Sinon $f(a_n)f(b_n) > 0$. Or $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$, donc $f(a_n)^2 f(b_n)f(c_n) \leqslant 0$. Donc $f(b_n)f(c_n) \leqslant 0$.
Posons $\left| \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & c_n \\ b_{n+1} & = & b_n \\ c_{n+1} & = & \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{array} \right.$

Ainsi, nous avons bien construits $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ telles que $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leqslant 0$ et $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$ (milieu de $[a_{n+1}; b_{n+1}]$).

Par récurrence immédiate, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ d'où $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc les suites a et b sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite. Notons la c.

D'après le bonus de ce même théorème, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant c \leqslant b_n$ donc pour $n = 0$, $a \leqslant c \leqslant b$. Ainsi,

$$c \in [a; b]$$

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$. Par continuité de f sur $[a; b]$ donc en c, $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$. Par passage à limite dans l'inégalité,

$$f(c) \times f(c) \leqslant 0$$

Or $f(c)^2 \geqslant 0$, d'où $f(c)^2 = 0$. Ainsi,

$$f(c) = 0$$

Donc c est un point fixe.

$\square$