Khôlles de Mathématiques - Semaine 10

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen

3 décembre 2023

1 Caractérisation de la densité d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans une partie B de $\mathbb{R}$ la contenant avec des ε.

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ fq.
Définition de la densité

$$A \text{ est dense dans } B \text{ si } \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, B \cap]u;v[\neq \emptyset \implies A \cap]u;v[\neq \emptyset \end{cases} \tag{1}$$

Caractérisation de la densité par les ε

$$A \text{ est dense dans } B \iff \begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b-a| < \varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. Montrons la caractérisation de la densité
Sens Direct Supposons A dense dans B

- Par déf $A \subset B$
- Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fq
  Appliquons le (ii) de la déf de Densité pour $u \leftarrow b - \varepsilon$ et $v \leftarrow b + \varepsilon$

$$B \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset \implies A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$$

  Or, $B \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$ est vraie donc $A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\neq \emptyset$
  Ce qui permet de choisir $a \in A \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$. Un tel a vérifie $a \in A$ et $a \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\iff |b-a| < \varepsilon$

Sens réciproque Supposons $\begin{cases} A \subset B \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A : |b-a| < \varepsilon \end{cases}$

- On a donc $A \subset B$
- Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fq tq $B \cap]u, v[\neq \emptyset$
  Soit $b \in B \cap]u, v[$ fq. Appliquons l'hypothèse pour $b \leftarrow b$ et $\varepsilon \leftarrow \min\{v - b, b - u\}$, qui est autorisé $v - b$ et $b - u$ sont positifs
  Donc $\exists a \in A : |b-a| < \varepsilon$
  Fixons un tel a, alors :

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$$

  Donc

$$\begin{cases} a < b + \varepsilon = b + \underbrace{\min\{v-b, b-u\}}_{\leqslant v-b} \leqslant b + v - b = v \\ \text{et} \\ a > b - \varepsilon = b - \underbrace{\min\{v-b, b-u\}}_{\leqslant b-u} \geqslant b - (b-u) = u \end{cases}$$

  Donc $a \in]u, v[$.

Donc $A \cap]u, v[\neq \emptyset$

□

2 Théorème de la division pseudo-euclidienne dans $\mathbb{R}$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, \exists!(q,r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0;|b|[\end{cases} \tag{3}$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et deux couples $((q,r),(q',r')) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{R})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r \in [0;|b|[\end{cases} \qquad \begin{cases} a = bq' + r' \\ r' \in [0;|b|[\end{cases}$$

Directement,

$$b(q-q') = r' - r,$$

mais comme $-|b| < r' - r < |b|$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans $\mathbb{Z}$ leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a.

Existence Posons pour $b > 0$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leqslant a\}$

- $\Omega \subset \mathbb{Z}$
- non-vide car $-|a| \in \Omega$ ($\mathbb{Z}$ archimédien suffit ...)
- Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d'Ω.

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q.
Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max\Omega$ et $r \in \mathbb{R}$.
Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leqslant a$ d'où $0 \leqslant r$. Et $q = \max\Omega$ donc $b(q+1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in [0,|b|[$.

Si $b < 0$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente.C'est donc l'existence de ladite écriture de a. □

3 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fq. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

- $a_n \in \mathbb{Q}$ car $\lfloor 2^n x\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $2^n \in \mathbb{N}$.
- $$a_n = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n} \implies \frac{2^n x - 1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant \frac{2^n x}{2^n} \implies x - \frac{1}{2^n} \leqslant a_n \leqslant x$$

  Or $1/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fq.
Alors $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration précédente, $\exists b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + \sqrt{2}$.
Fixons un telle suite b. Considérons $c = b - \sqrt{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

- $c_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ car $b_n \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
- $$\left.\begin{matrix} b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + \sqrt{2} \\ c_n = b_n - \sqrt{2} \end{matrix}\right\} \implies c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

4 Preuve de l'unicité de la limite d'une suite convergente

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$ Si u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$

Démonstration. Par l'absurde, supponsons que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2, et $\ell_1 \neq \ell_2$. On prendra $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ assez petit pour que les tubes soient disjoints.
Posons donc $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

— Appliquons la définition de la convergence de u vers ℓ_1, pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$, ce qui est autorisé car $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0 \tag{4}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0 \tag{5}$$

Fixons de tels N_1 et N_2.

— Posons $n_0 = N_1 + N_2$
  - — $n_0 \geqslant N_1$, donc (4) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0$
  - — $n_0 \geqslant N_2$, donc (5) s'applique : $|u_{n_0} - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0$

—

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2| \\ &\leqslant \underbrace{|\ell_1 - u_{n_0}|}_{\leqslant \varepsilon_0} + \underbrace{|u_{n_0} - \ell_2|}_{\leqslant \varepsilon_0} \\ &\leqslant 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \\ \implies 1 &\leqslant \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Contradiction

□

5 Description d'un segment de la droite réelle par les barycentres à coefficients positifs.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leqslant y$.

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leqslant z \leqslant y\} = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$$

Démonstration. Le résultat est immédiat pour $x = y : \forall t \in [0, 1], xt + (1-t)x = xt - xt + x = x = y$
Supposons que $x < y$. On procède par double inclusion.

⋆ Soit $z \in \{xt + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$.
$\exists t \in [0, 1] : z = xt + (1-t)y$
Puisque $t \in [0, 1]$, $t \geqslant 0$ et $1 - t \geqslant 0$. Donc

$$\begin{aligned} x < y \implies x \leqslant y &\underset{\substack{t \geqslant 0 \\ 1-t \geqslant 0}}{\implies} \begin{cases} tx \leqslant ty \\ (1-t)x \leqslant (1-t)y \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} tx + (1-t)y \leqslant ty + (1-t)y \\ tx + (1-t)x \leqslant tx + (1-t)y \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} z \leqslant y \\ x \leqslant z \end{cases} \\ &\implies z \in [x, y] \end{aligned}$$

⋆ Réciproquement, soit $z \in [x, y]$. Cherchons le $t \in [0, 1]$ tel que $tx + (1-t)y = z$.

$$tx + (1-t)y = z \iff t(x-y) = z - y \iff t = \frac{z-y}{x-y} = \frac{y-z}{y-x} \text{ (autorisé car } x < y \implies x - y \neq 0)$$

Vérifions si ce t convient : posons $t = \frac{y-z}{y-x}$.

- Vérifions d'abord que $t \in [0,1]$

$$x \leqslant z \leqslant y \implies x-y \leqslant z-y \leqslant 0 \implies y-x \geqslant y-z \geqslant 0 \implies 1 \geqslant \frac{y-z}{y-x} \geqslant 0 \implies 0 \leqslant t \leqslant 1$$

- Calculons
$$tx+(1-t)y = \frac{y-z}{y-x}x + \left(1-\frac{y-z}{y-x}\right)y = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y = \frac{yx-zx+zy-xy}{y-x} = z$$
Donc ce t convient.

Donc $z \in \{xt+(1-t)y \mid t \in [0,1]\}$.

Donc $\{xt+(1-t)y \mid t \in [0,1]\} = [x,y]$. □

6 Une suite convergente est bornée

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \lim u$ Appliquons la définition de la convergence pour $\varepsilon \leftarrow 1$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant 1$$

Fixons un tel N_1 Posons alors $M = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell|+1\}$, qui est bien défini, car toute partie finie, non vide d'un ensemble totalement ordonné (ici $(\mathbb{R}, \leqslant)$) admet un pgE.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fq.

— Si $n \in [[0, N_1]], |u_n| \in \{|u_0|, |u_1|, |u_2| \dots |u_{N_1}|, |\ell|+1\}$ donc $|u_n| \leqslant M$

— Sinon,

$$\begin{aligned} n > N_1 &\implies |u_n - \ell| \leqslant 1 \\ &\implies |u_n| - |\ell| \leqslant 1 \\ &\implies |u_n| \leqslant 1 + |\ell| \leqslant M \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$. □

7 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide et majorée. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\sigma = \sup A \iff \begin{cases} \sigma \in M(A) \\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} a_n = \sigma \end{cases}$$

Démonstration. ⋆ Supposons que $\sigma = \sup A$.

- Par définition d'une borne sup, $\sigma \in M(A)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la caractérisation de la borne sup par les epsilon pour $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2^n}$. $\exists c \in A : \sigma - \frac{1}{2^n} < c \leqslant \sigma$. Fixons un tel c et notons le a_n. En relâchant le caractère fixé de n, on a crée la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma - \frac{1}{2^n} < a_n \leqslant \sigma$$
Cette suite converge vers σ par encadrement.

⋆ Réciproquement, supposons que $\sigma \in M(A)$ et qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers σ. Montrons que $\sigma = \sup A$ d'après la caractérisation par les ε.

- $\sigma \in M(A)$
- Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons la définition de la convergence de a pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{2}$
$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, |a_n - \sigma| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \implies \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n$$
En particulier $a_N \in A$ vérifie
$$\sigma - \varepsilon < \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_N \underbrace{\leqslant}_{\sigma \in M(A)} \sigma$$
Ce qui permet de conclure. Donc $\sigma = \sup A$.

□