

Khôlles de Mathématiques - Semaine 9

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen

29 novembre 2023

1 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E .

Soit $x \in E$.

La classe de x , notée \bar{x} , est l'ensemble des éléments de E en relation avec x .

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \quad (1)$$

Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.

Soit $(x, y) \in E^2$ fq.

- Si $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, rien à démontrer.
- Sinon $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ donc $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Fixons un tel z .
Soit $x' \in \bar{x}$ fq.

$$\left. \begin{array}{l} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \xRightarrow{\text{symétrie}} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \xRightarrow{\text{symétrie}} z\mathcal{R}y \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}z \left\} \xRightarrow{\text{transitivité}} x'\mathcal{R}y \xRightarrow{\text{symétrie}} y\mathcal{R}x'$$

Donc $x' \in \bar{y}$ donc $\bar{x} \subset \bar{y}$.

En échangeant les rôles de x et y , on montre la deuxième inclusion $\bar{y} \subset \bar{x}$.

Montrons que les classes d'équivalence de E constituent une partition de E .

Soit \mathcal{S} un système de représentant des classes fixé quelconque.

- Soit $s \in \mathcal{S}$ fq. $\bar{s} \neq \emptyset$ car $s\mathcal{R}s$ par réflexivité.
- Soit $(s, s') \in \mathcal{S}^2$ fq. D'après la démonstration ci-dessus, $\bar{s} \cap \bar{s}' = \emptyset$ ou $\bar{s} = \bar{s}'$. Si $\bar{s} = \bar{s}'$ alors s et s' représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent, \bar{s} et \bar{s}' sont disjoints.

- $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$ car $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \subset E$ par définition d'une classe d'équivalence.

Réciproquement, soit $x \in E$ fq.

Par réflexivité de \mathcal{R} , $x \in \bar{x}$.

Par définition d'un système de classe $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$ donc $\bar{s}_x = \bar{x}$. Donc $x \in \bar{s}_x \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Donc $E \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Par double inclusion, $E = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Ainsi,

$$E = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \quad (2)$$

□

2 Si A admet un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure. Si A admet une borne supérieure dans A c'est son plus grand élément.

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, et A une partie non-vidée de E .

Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.

Si A admet une borne supérieure appartenant à elle-même alors A admet un plus grand élément et $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soient un tel ensemble E et une telle partie A et notons M son plus grand élément. Posons l'ensemble des majorants de A , $M(A) = \{m \in E \mid \forall a \in A, a \leq m\}$.

Par définition :

$$\forall m \in M(A), M \leq m,$$

car $M \in A$, mais comme $M \in M(A)$, on a directement que $M = \min M(A) = \sup A$.

Pseudo-réciproquement, soit A une partie de E admettant une borne supérieure dans elle même, notons cette borne S .

Comme $S \in M(A)$, par définition, S est plus grand que tous les éléments de A mais appartient à A , donc de tous les éléments de A , S est le plus grand. \square

3 Théorème de la division Euclidienne dans \mathbb{Z}

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \begin{cases} a = bq + r \\ r \in \llbracket 0; |b| - 1 \rrbracket \end{cases} \quad (3)$$

Démonstration. Unicité Soient deux tels entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et deux couples $((q, r), (q', r')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r \leq |b| - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' \leq |b| - 1 \end{cases}$$

Directement,

$$b(q - q') = r' - r,$$

mais comme $-(|b| - 1) \leq r' - r \leq |b| - 1$, il vient en divisant par $|b|$ l'inégalité précédente :

$$-1 < q - q' < 1,$$

puisque q et q' sont dans \mathbb{Z} leur différence est obligatoirement 0, ainsi $q = q'$ ce qui implique $r = r'$ et donc on a unicité de ladite écriture de a .

Existence Posons pour $b \geq 1$, $\Omega = \{k \in \mathbb{Z} \mid kb \leq a\}$

— $\Omega \subset \mathbb{Z}$

— non-vidé car $-|a| \in \Omega$ (\mathbb{Z} archimédien suffit . . .)

— Ω est majoré par $|a|$ car supposons, par l'absurde, que $\exists k \in \Omega : k > |a|$, alors $kb > |a|b > a$ ce qui contradiction avec la définition d' Ω .

Donc Ω admet un plus grand élément, notons-le q .

Posons $r = a - bq$. Par construction, $a = bq + r$ et comme $q = \max \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ donc $r \in \mathbb{Z}$. Par suite, $q \in \Omega$ donc $bq \leq a$ d'où $0 \leq r$. Et $q = \max \Omega$ donc $b(q + 1) > a$ d'où $b > r$, c'est-à-dire, $r \in \llbracket 0, |b| - 1 \rrbracket$.

Si $b < 1$, il suffit de prendre $q \leftarrow -q$ dans la preuve précédente. C'est donc l'existence de ladite écriture de a . \square

4 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et minorée fixée quelconque.
Considérons $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite u .
 A est :

- une partie de \mathbb{Z} car u est à valeur dans \mathbb{Z}
- non vide car $u_0 \in A$
- minoré car u est minorée

Donc A admet un plus petit élément. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = \min A$. Fixons un tel n_0 .
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geq n_0$.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \in A \implies u_n \geq \min A = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geq n_0 \text{ donc } u_n \leq u_{n_0} \end{array} \right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

Ainsi, u est stationnaire.

□