Khôlles : Maths

Kylian Boyet, George Ober

13 novembre 2023

Table des matières

1 Calcul de $\int_0^{2\pi} e^{imt}dt$ en fonction de $m \in \mathbb{Z}$. En déduire qu'une fonction polynomiale nulle sur un cercle centré en l'origine a tous ses coefficients nuls.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_m = \int_0^{2\pi} e^{imt}dt.$$

Bien sûr, $I_0 = 2\pi$ et pour tout $m \neq 0$, $I_m = 0$.
Soit alors le polynôme $P \in \mathbb{C}_n[z]$, de coefficients les $a_k \in \mathbb{R}$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, s'annulant sur le cercle $\Omega(O, r)$, centré en l'origine (O), et de rayon $r \in \mathbb{R}^*$. De fait, soit $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
P\left(re^{it}\right) &= 0 \\
P\left(re^{it}\right)e^{-st} &= 0 \\
\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right)e^{-st}dt &= 0 \\
\sum_{k\in[\![0,n]\!]} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-st}dt &= 0 \\
\sum_{k\in[\![0,n]\!]} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-s)t}dt &= 0.
\end{aligned}$$

Mais pour tout polynôme :

$$\sum_{k\in[\![0,n]\!]} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-s)t}dt = \begin{cases} 2\pi a_s r^s & \text{si } s \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si } s \in \mathbb{Z}\backslash[\![0, n]\!] \end{cases}$$

En particulier, en combinant les deux :

$$\forall s \in [\![0, n]\!], \quad 2\pi a_s r^s = 0 \implies a_s = 0,$$

car $2\pi r^s \neq 0$, d'où $P = \widetilde{0}$ sur tout $\mathbb{C}$. □

2 Technique de l'intégration par parties.

Démonstration. Soient $u, v \in \mathcal{D}^1(I, J)$, deux fonctions définies, continues et dérivables sur I à valeurs dans J, deux intervalles non-triviaux de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I = [a, b]$. De manière générale :

$$\int_{[a,b]} (uv)'(x)dx = [(uv)(x)]_a^b.$$

Mais aussi :

$$\int_{[a,b]} (uv)'(x)dx = \int_{[a,b]} (u'v)(x) + (v'u)(x)dx = \int_{[a,b]} (u'v)(x)dx + \int_{[a,b]} (v'u)(x)dx.$$

Donc finalement :

$$\int_{[a,b]} (u'v)(x)dx + \int_{[a,b]} (v'u)(x)dx = [(uv)(x)]_a^b.$$

Ce qui s'écrit aussi,

$$\int_{[a,b]} (u'v)(x)dx = [(uv)(x)]_a^b - \int_{[a,b]} (v'u)(x)dx.$$

□

3 Technique du changement de variable.

Démonstration. Soient $(f', \varphi') \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(J, I)$, deux fonctions définies et continues sur I et J à valeurs dans $\mathbb{R}$ et I. I, J deux intervalles non-triviaux de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $J = [a, b]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, f' et φ' admettent des primitives sur I et J, on note f une primitive de f' et φ une primitive de φ', ainsi il est possible de calculer de la manière suivante (les notations ont un sens) :

$$\int_{\varphi([a,b])} f'(t)dt = [f(t)]_{\varphi([a,b])}.$$

On suppose $\varphi(b) > \varphi(a)$, quitte à les inverser, ainsi :

$$\int_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f'(t)dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f \circ \varphi(b) - f \circ \varphi(a) = [f \circ \varphi(t)]_{[a,b]} = \int_{[a,b]} (f' \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt$$

□

4 Montrer que, pour f T-périodique sur $\mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

.

Démonstration. plus tard □

5 Résolution de $a_1 y' + a_0 y = b$ sur J par équivalence avec la méthoded du facteur intégrant sous l'hypothèse $\forall t \in I, a_1(t) \neq 0$. On précisera les hypothèses analytiques sur a_0, a_1 et b.