Khôlles de Mathématiques

Kylian Boyet, George Ober, Hugo Vangilluwen, Jérémie Menard

25 novembre 2023

1 Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sur lequel on considère la relation d'équivalence.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Soit $x \in E$.
La classe de x, notée $\bar{x}$, est l'ensemble des éléments de E en relation avec x.

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\} \tag{1}$$

Démonstration. Montrons que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.
Soit $(x, y) \in E^2$ fq.

- Si $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, rien à démontrer.
- Sinon $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ donc $\exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Fixons un tel z.
  Soit $x' \in \bar{x}$ fq.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} x' \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}x' \underset{\textit{symétrie}}{\implies} x'\mathcal{R}x \\ z \in \bar{x} \implies x\mathcal{R}z \end{array}\right\} \underset{\textit{transitivité}}{\implies} x'\mathcal{R}z \\ z \in \bar{y} \implies y\mathcal{R}z \underset{\textit{symétrie}}{\implies} z\mathcal{R}y \end{array}\right\} \underset{\textit{transitivité}}{\implies} x'\mathcal{R}y \underset{\textit{symétrie}}{\implies} y\mathcal{R}x'$$

  Donc $x' \in \bar{y}$ donc $\bar{x} \subset \bar{y}$.
  En échangeant les rôles de x et y, on montre la deuxième inclusion $\bar{y} \subset \bar{x}$.

Montrons que les classes d'équivalence de E constituent une partition de E.
Soit $\mathcal{S}$ un système de représentant des classes fixé quelconque.

- Soit $s \in \mathcal{S}$ fq. $\bar{s} \neq \emptyset$ car $s\mathcal{R}s$ par réflexivité.
- Soit $(s, s') \in \mathcal{S}^2$ fq. D'après la démonstration ci-dessus ci-dessus, $\bar{s} \cap \bar{s'} = \emptyset$ ou $\bar{s} = \bar{s'}$. Si $\bar{s} = \bar{s'}$ alors s et s' représente la même classe ce qui est impossible car un système de représentants des classes contient un unique représentant de chaque classe. Par conséquent, $\bar{s}$ et $\bar{s'}$ sont disjoints.
- $\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \subset E$ car $\forall s \in \mathcal{S}, \bar{s} \in E$ par définition d'une classe d'équivalence.
  Réciproquement, soit $x \in E$ fq.
  Par réflexivité de $\mathcal{R}$, $x \in \bar{x}$.
  Par définition d'un système de classe $\exists! s_x \in \mathcal{S} : s_x \in \bar{x}$ donc $\bar{s_x} = \bar{x}$. Donc $x \in \bar{s_x} \subset \bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
  Donc $E \subset \bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.
  Par double inclusion, $E = \bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} \bar{s}$.

Ainsi,

$$E = \coprod_{s \in \mathcal{S}} \bar{s} \tag{2}$$

$\square$

2 Une suite décroissante et minorée de nombres entiers relatifs est stationnaire

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante et minorée fixée quelconque.
Considérons $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la suite u.
A est :

- une partie de $\mathbb{Z}$ car u est à valeur dans $\mathbb{Z}$
- non vide car $u_0 \in A$
- minoré car u est minorée

Donc A admet un plus petit élément. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} = minA$. Fixons un tel n_0.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fq tq $n \geqslant n_0$.

$$\left.\begin{array}{c} u_n \in A \implies u_n \leqslant minA = u_{n_0} \\ u \text{ est décroissante et } n \geqslant n_0 \text{ donc } u_n \leqslant u_{n_0} \end{array}\right\} \implies u_n = u_{n_0}$$

□

Ainsi, u est stationnaire.