# Дом. работа №1

## Търсене и извличане на информация.

Имаме думи P и W. Докажете, че $\Gamma(P,W)$ връща най-малкото тегло.

- Уточнение, за да избегнем случаи като:

$P = a$ ; $W = bcde$

$P = a$ $\qquad Spl(a, xz)$, $a, x, z \in \Sigma$

$a \neq x$

$a \neq z$

$P = xz$ $\qquad Spl(x, bc)$

$P = bcz$ $\qquad Spl(z, de)$

$P = bcde \longleftrightarrow 3 \times Spl$

Където в някои случаи това може да бъде по-нисък резултат от очаквания, нека додефинираме зависимости, които се подразбират по условие, но не се изрично дефинирани.

$\boxed{\text{Условие №1}}$ Всеки елемент $P_i$ от P с идентификатор позиция от P се намира точно в една наредена двойка "$op^m$", $m \in \{1, \ldots, k\}$ на първо място, (тоест в една $op_1^m$),

аналогично за $W_i$ от W с идентификатор позиция в W, се намира точно в едно $op_2^m$, $m \in \{1, \dots, k\}$

Условие №2

Всеки елемент $op_1^i$ съдържа единствено елементи от P, както и всеки $op_2^i$ съдържа единствено елементи от W.

Индукционна база: (Имам 3 бази: 1, 2, 3)

1. $\Gamma(\varepsilon, \varepsilon) = 0$ очакваме този резултат, понеже P съвпада с W.

В дефинираната функция от 6-те условия е изпълнено само $|P| = |W| = 0$, където $\Gamma(P, W) = 0 \Rightarrow$ изпълнено

2. База, която ще бъде доказана с едномерна база и индукция за всичките ѝ елементи.

$$\Gamma(\varepsilon, W) = \sum_{i=1}^{|W|} w((\varepsilon, w_i)) + \underbrace{\Gamma(\varepsilon, \varepsilon)}_{=0}$$

за $|W| \geq 1$

2.1. Инд. база: $|W| = 1$

$$\Gamma(\varepsilon, W) = \min\left(\Gamma(\varepsilon, w_1^{|W|-1}) + w((\varepsilon, w_1))\right)$$

$$= \min\left(\Gamma(\varepsilon, \varepsilon) + w((\varepsilon, w_1))\right) = w((\varepsilon, w_1))$$

2.2. Инд. предположение: Нека е изп:

$$\Gamma(\mathcal{E}, W_1^{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} w((\mathcal{E}, W_i))$$

за $i$: $\cancel{1}\leq n-1 < |W|$

2.3. Стъпка за $n$:

$|\mathcal{E}| = 0$ и $|W_1^{n}| \geq 1$

=> това бива изпълнено единствено от условие 3 =>

$$\Gamma(\mathcal{E}, W_1^n) = \min\left(\Gamma(\mathcal{E}, W_1^{n-1}) + w((\mathcal{E}, W_n))\right) =$$

$$= \min\left(\sum_{i=1}^{n-1} w((\mathcal{E}, W_i)) + w((\mathcal{E}, W_n))\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w((\mathcal{E}, W_i))$$ с което

2. е изпълнена.

3. $$\Gamma(P, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{|P|} w((P_i, \mathcal{E})).$$

Напълно аналогично като 2., но $\forall\ \Gamma(P_1^n, \mathcal{E})$ : $1 \leq n \leq |P|$ влиза в условие 2 на функцията $\Gamma$.

4. Имайки базата (1.+2.+3.) – Нека допуснем

за

всеки $i^*, j^*$: $0 \le i^* \le i$ и $0 \le j^* \le j$ } такива, че $i^*+j^* < i+j$

където $i$ и $j$ са случайни индекси, такива, че $1 \le i \le |P|$ и $1 \le j \le |W|$

е изпълнено, че $\Gamma(P_1^{i^*}, W_1^{j^*})$ връща най-малкото тегло за тези поддуми.

5. Нека докажем, че за $\Gamma(P_1^{i}, W_1^{j})$ е изпълнено:

- Ако $i \ge 2$, $j \ge 1$, можем да изпълним (и) Mrg, ако $P_{|i|-1} \ne W_{|j|} \wedge P_{|i|} \ne W_{|j|}$

следва да допълним $op^1, \dots, op^{k-1}$ с $op^k = Mrg$, (~~която из~~) което ни дава минимално тегло с последна операция Mrg.

$\Gamma = \Gamma(P_1^{i-2}, W_1^{j-1}) + w((P_{i-1}^{i}, W_j))$

- Аналогично за Spl с $i \ge 1$, $j \ge 2$ : $P_i \ne W_{j-1} \wedge P_i \ne W_j$
- За $i \ge 1$, $j \ge 1$ с последна операция $op^k = Sub$ става за тегло $\Gamma = \Gamma(P_1^{i-1}, W_1^{j-1}) + w((P_i, W_j))$

• за $i \geq 1$ с последна операция $Del = op^k$

става за $\Gamma = \Gamma(P_1^{i-1}, W_1^j)$

$+ w((P_i, \varepsilon))$,

понеже последната буква е премахната

и минимално конструирана дума

$P_1^{i-1}$ до $W_1^j$

с $\Gamma(P_1^{i-1}, W_1^j)$ тежест

• Аналогично за $j \geq 1$ с последна операция $Ins = op^k$

$$\Gamma = \Gamma(P_1^i, W_1^{j-1}) + w((\varepsilon, W_j))$$

Това са всички възможни ~~стъпки~~ операции: $Op = \{Ins, Del, Sub, Mrg, Spl\}$, ако могат да се изпълнят в зависимост от последните елементи в $P_1^i$ и $W_1^j$ (в последните нула, един или два елемента в $P_1^i, W_1^j$). За тези операции, които могат да се приложат: Взимаме

$$\Gamma(P_1^i, W_1^j) = \min\{(op^1, op^2, \dots, op^k)_1, \dots, (op^1, op^2, \dots, op^k)_*\}$$

39

С което доказахме за $P_1^i, W_1^j$
с което конструираме $\Gamma(P_1^i, W_1^j)$ за
минимално тегло. Тъй като
доказахме за произволни $i, j$:

$1 \le i \le |P|$,

$1 \le j \le |W|$

$\Rightarrow \forall i, j: 1 \le i \le |P|, 1 \le j \le |W|$

$\Gamma(P_1^i, W_1^j)$ се конструира за

минимално тегло и в частност
$i = |P|, j = |W|$