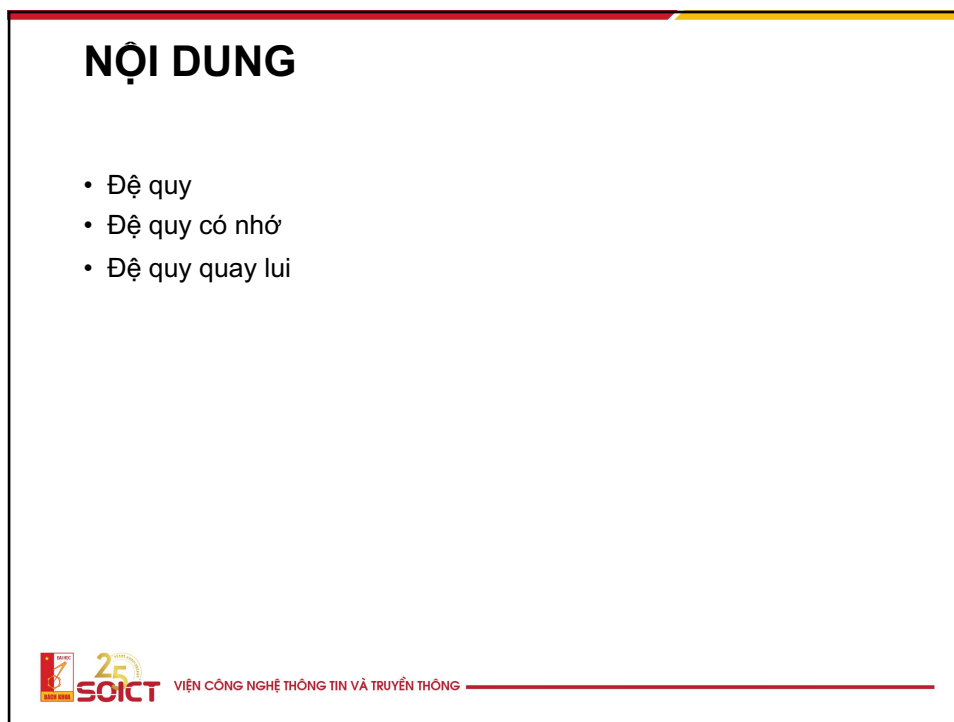




1



2

ĐỆ QUY

- Một chương trình con (thủ tục/hàm) đưa ra lời gọi đến chính nó nhưng với dữ liệu đầu vào nhỏ hơn
- Tình huống cơ sở
 - Dữ liệu đầu vào nhỏ đủ để đưa ra kết quả một cách trực tiếp mà không cần đưa ra lời gọi đệ quy
- Tổng hợp kết quả
 - Kết quả của chương trình con được xây dựng từ kết quả của lời gọi đệ quy và một số thông tin khác

$$f(n) = 1 + 2 + \dots + n$$

Other form

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ f(n-1) + n, & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

```
#include <stdio.h>
int f(int n){
    if(n == 1) return 1;
    return n + f(n-1);
}
int main(){
    printf("%d\n", f(4));
}
```



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

3

ĐỆ QUY

- Dãy Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0 \text{ or } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

```
#include <stdio.h>
int f(int n){
    if(n <= 1) return 1;
    return f(n-1) + f(n-2);
}
int main(){
    for(int i = 0; i <= 10; i++)
        printf("%d ", f(i));
}
```



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

4

ĐỆ QUY

- Tổ hợp chập k của n phần tử

$$C(k,n) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \\ C(k,n-1) + C(k-1,n-1), & \text{ngược lại} \end{cases}$$

```
#include <stdio.h>
int C(int k, int n){
    if(k == 0 || k == n) return 1;
    return C(k,n-1) + C(k-1,n-1);
}
int main(){
    printf("%d ", C(3,5));
}
```



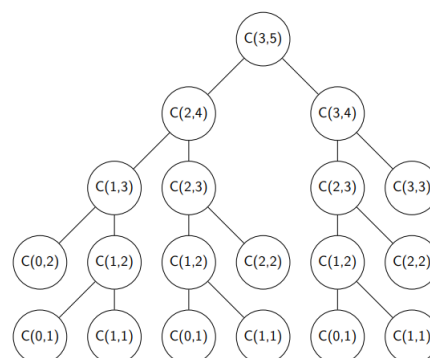
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

5

ĐỆ QUY CÓ NHỚ

- Tổ hợp chập k của n phần tử

$$C(k,n) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \\ C(k,n-1) + C(k-1,n-1), & \text{otherwise} \end{cases}$$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

6

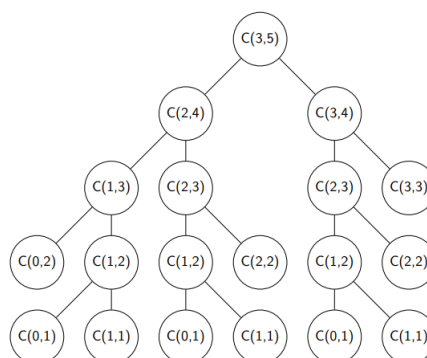
ĐỆ QUY CÓ NHỚ

- Tổ hợp chập k của n phần tử

$$C(k,n) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \\ C(k,n-1) + C(k-1,n-1), & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Dư thừa

- Một hàm với cùng giá trị tham số được gọi lặp đi lặp lại nhiều lần



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

7

ĐỆ QUY CÓ NHỚ

- Khắc phục tình trạng một chương trình con với tham số xác định được gọi đệ quy nhiều lần
- Sử dụng bộ nhớ để lưu trữ kết quả của một chương trình con với tham số cố định
- Bộ nhớ được khởi tạo với giá trị đặc biệt để ghi nhận mỗi chương trình con chưa được gọi lần nào
- Địa chỉ bộ nhớ sẽ được ánh xạ với các giá trị tham số của chương trình con



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

8

ĐỆ QUY CÓ NHỚ

- Khắc phục tình trạng một chương trình con với tham số xác định được gọi đệ quy nhiều lần
- Sử dụng bộ nhớ để lưu trữ kết quả của một chương trình con với tham số cố định
- Bộ nhớ được khởi tạo với giá trị đặc biệt để ghi nhận mỗi chương trình con chưa được gọi lần nào
- Địa chỉ bộ nhớ sẽ được ánh xạ với các giá trị tham số của chương trình con

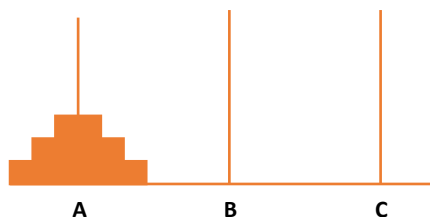


VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

9

THÁP HÀ NỘI

- Bài toán tháp Hà Nội
 - Có n đĩa với kích thước khác nhau và 3 cọc A, B, C
 - Ban đầu n đĩa nằm ở cọc A theo thứ tự đĩa nhỏ nằm trên và đĩa lớn nằm dưới

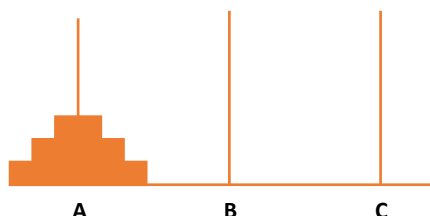


VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

10

THÁP HÀ NỘI

- Bài toán tháp Hà Nội
 - Có n đĩa với kích thước khác nhau và 3 cọc A, B, C
 - Ban đầu n đĩa nằm ở cọc A theo thứ tự đĩa nhỏ nằm trên và đĩa lớn nằm dưới
 - Tìm cách chuyển n đĩa này từ cọc A sang cọc B, sử dụng cọc C làm trung gian theo nguyên tắc
 - Mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa trên cùng từ 1 cọc sang cọc khác
 - Không được phép để xảy ra tình trạng đĩa to nằm bên trên đĩa nhỏ

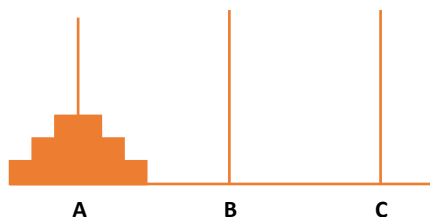


VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

11

THÁP HÀ NỘI

- Bài toán tháp Hà Nội
 - Có n đĩa với kích thước khác nhau và 3 cọc A, B, C
 - Ban đầu n đĩa nằm ở cọc A theo thứ tự đĩa nhỏ nằm trên và đĩa lớn nằm dưới
 - Tìm cách chuyển n đĩa này từ cọc A sang cọc B, sử dụng cọc C làm trung gian theo nguyên tắc
 - Mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa trên cùng từ 1 cọc sang cọc khác
 - Không được phép để xảy ra tình trạng đĩa to nằm bên trên đĩa nhỏ



Lời giải

- B1: $A \rightarrow B$
- B2: $A \rightarrow C$
- B3: $B \rightarrow C$
- B4: $A \rightarrow B$
- B5: $C \rightarrow A$
- B6: $C \rightarrow B$
- B7: $A \rightarrow B$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

12

ĐỆ QUY QUAY LUI

- Áp dụng để giải các bài toán liệt kê, bài toán tối ưu tổ hợp
- $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, \forall i = 1, \dots, n\}$
- Liệt kê tất cả các bộ $x \in A$ thoả mãn một thuộc tính P nào đó
- Thủ tục TRY(k):
 - Thử các giá trị v có thể gán cho x_k mà không vi phạm thuộc tính P
 - Với mỗi giá trị hợp lệ v :
 - Gán v cho x_k
 - Nếu $k < n$: gọi đệ quy TRY($k+1$) để thử tiếp giá trị cho x_{k+1}
 - Nếu $k = n$: ghi nhận cấu hình



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

13

ĐỆ QUY QUAY LUI

```

TRY( $k$ )
  Begin
    Foreach  $v$  thuộc  $A_k$ 
      if check( $v, k$ ) /* kiểm tra xem  $v$  có hợp lệ không */
        Begin
           $x_k = v$ ;
          if ( $k = n$ ) ghi_nhan_cau_hinh;
          else TRY( $k+1$ );
        End
      End
    End
  End
Main()
  Begin
    TRY(1);
  End
  
```



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

14

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê xâu nhị phân

- Mô hình hoá cấu hình:
 - Mảng $x[n]$ trong đó $x[i] \in \{0, 1\}$ là bit thứ i của xâu nhị phân ($i = 0, \dots, n-1$)



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

15

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê xâu nhị phân

- Mô hình hoá cấu hình:
 - Mảng $x[n]$ trong đó $x[i] \in \{0, 1\}$ là bit thứ i của xâu nhị phân ($i = 0, \dots, n-1$)

```
void printSolution(){
    for(int k = 0; k < n; k++){
        printf("%d", x[k]);
        printf("\n");
    }

    int TRY(int k) {
        for(int v = 0; v <= 1; v++){
            x[k] = v;
            if(k == n-1) printSolution();
            else TRY(k+1);
        }
    }

    int main() {
        TRY(0);
    }
}
```



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

16

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê xâu nhị phân

- Liệt kê các xâu nhị phân sao cho không có 2 bit 1 nào đứng cạnh nhau
- Mô hình hoá cấu hình:
 - Mảng $x[n]$ trong đó $x[i] \in \{0,1\}$ là bit thứ i của xâu nhị phân ($i = 1, \dots, n$)
 - Thuộc tính P : không có 2 bit 1 nào đứng cạnh nhau



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

17

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê xâu nhị phân

- Liệt kê các xâu nhị phân sao cho không có 2 bit 1 nào đứng cạnh nhau
- Mô hình hoá cấu hình:
 - Mảng $x[n]$ trong đó $x[i] \in \{0,1\}$ là bit thứ i của xâu nhị phân ($i = 1, \dots, n$)
 - Thuộc tính P : không có 2 bit 1 nào đứng cạnh nhau



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

18

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê tổ hợp

- Liệt kê các tổ hợp chập k của $1, 2, \dots, n$
- Mô hình hoá cấu hình:
 - Mảng $x[k]$ trong đó $x[i] \in \{1, \dots, n\}$ là phần tử thứ i của cấu hình tổ hợp ($i = 1, \dots, k$)
 - Thuộc tính P : $x[i] < x[i+1]$, với mọi $i = 1, 2, \dots, k-1$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

19

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê tổ hợp

- Liệt kê các tổ hợp chập k của $1, 2, \dots, n$
- Mô hình hoá cấu hình:
 - Mảng $x[k]$ trong đó $x[i] \in \{1, \dots, n\}$ là phần tử thứ i của cấu hình tổ hợp ($i = 1, \dots, k$)
 - Thuộc tính P : $x[i] < x[i+1]$, với mọi $i = 1, 2, \dots, k-1$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

20

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê hoán vị

- Liệt kê các hoán vị của $1, 2, \dots, n$
- Mô hình hoá cấu hình:
 - Mảng $x[1, \dots, n]$ trong đó $x[i] \in \{1, \dots, n\}$ là phần tử thứ i của cấu hình hoán vị ($i = 1, \dots, n$)
 - Thuộc tính P :
 - $x[i] \neq x[j]$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
 - Mảng đánh dấu $m[v] = \text{true}$ (false) nếu giá trị v đã xuất hiện (chưa xuất hiện) trong cấu hình bộ phận, với mọi $v = 1, \dots, n$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

21

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê hoán vị

- Liệt kê các hoán vị của $1, 2, \dots, n$
- Mô hình hoá cấu hình:
 - Mảng $x[1, \dots, n]$ trong đó $x[i] \in \{1, \dots, n\}$ là phần tử thứ i của cấu hình hoán vị ($i = 1, \dots, n$)
 - Thuộc tính P :
 - $x[i] \neq x[j]$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
 - Mảng đánh dấu $m[v] = \text{true}$ (false) nếu giá trị v đã xuất hiện (chưa xuất hiện) trong cấu hình bộ phận, với mọi $v = 1, \dots, n$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

22

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán xếp hậu

- Xếp n quân hậu trên một bàn cờ quốc tế sao cho không có 2 quân hậu nào ăn được nhau

- Mô hình hoá

- $x[1, \dots, n]$ trong đó $x[i]$ là hàng của quân hậu xếp trên cột i , với mọi $i = 1, \dots, n$

- Thuộc tính P

- $x[i] \neq x[j]$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
- $x[i] + i \neq x[j] + j$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
- $x[i] - i \neq x[j] - j$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$

	1	2	3	4
1		X		
2				X
3	X			
4			X	

Lời giải $x = (3, 1, 4, 2)$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

23

ĐỆ QUY QUAY LUI

- Liệt kê tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = M$$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

24

ĐỆ QUY QUAY LUI

- Liệt kê tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = M$$

- Duy trì biến T là tổng giá trị các biến đã được thử giá trị
- Hàm TRY(k)
 - Các biến x_1, x_2, \dots, x_{k-1} đã được thử giá trị
 - $T = x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}$
 - $x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n \geq n - k$
 - $\rightarrow 1 \leq x_k \leq M - T - (n - k)$



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

25

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán Sudoku

- Điền các chữ số từ 1 đến 9 vào các ô trong bảng vuông 9×9 sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi bảng vuông con 3×3 đều có mặt đầy đủ 1 chữ số từ 1 đến 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

26

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán Sudoku

- Mô hình hoá
 - Mảng 2 chiều $x[0..8, 0..8]$
 - Thuộc tính P
 - $x[i, j_2] \neq x[i, j_1]$, với mọi $i = 0, \dots, 8$, và $0 \leq j_1 < j_2 \leq 8$
 - $x[i_1, j] \neq x[i_2, j]$, với mọi $j = 0, \dots, 8$, và $0 \leq i_1 < i_2 \leq 8$
 - $x[3I+i_1, 3J+j_1] \neq x[3I+i_2, 3J+j_2]$, với mọi $I, J = 0, \dots, 2$, và $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \{0, 1, 2\}$ sao cho $i_1 \neq i_2$ hoặc $j_1 \neq j_2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

27

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán Sudoku

- Thứ tự duyệt: từ ô (0,0), theo thứ tự từ trái qua phải và từ trên xuống dưới

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	★			



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

28

ĐỀ QUY QUAY LUI: bài tập

- Cho số nguyên dương M, N và N số nguyên dương A_1, A_2, \dots, A_N .
Liệt kê các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_NX_N = M$$

- Giải bài toán xếp hậu và sudoku sử dụng kỹ thuật đánh dấu



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

29



25
SOICT

VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
SCHOOL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY

Thank you
for your
attentions!

soict.hust.edu.vn/ fb.com/groups/soict

30