

## باسمه تعالی

مسابقه دانشکده علوم ریاضی اسفند ۱۳۹۳

روز دوم، زمان: ۴ ساعت

۱. نشان دهید ماتریس  $3 \times 3$  با درایه‌های مختلط مانند  $X$  وجود ندارد که

$$X^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

۲. راس‌های یک گراف در تناظر با زیرمجموعه‌های  $\{1, \dots, n\}$  هستند و بین دو راس یال وجود دارد اگر اشتراک زیرمجموعه‌های متناظرشان حداکثر  $r$  عضوی باشد. نشان دهید عدد رنگی این گراف برابر است با

$$\sum_{i=0}^{r+1} \binom{n}{i}$$

(عدد رنگی کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ‌آمیزی راس‌های گراف است طوری که هیچ دو راس مجاوری هم‌رنگ نباشند).

۳. تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  هموار است و برای هر  $x$  دست‌کم یکی از  $f(x)$  یا  $f''(x)$  برابر صفر است. نشان دهید  $f$  تابعی خطی است.

۴. فرض کنید  $X = \{1, \dots, n\}$ . مجموعه  $S = \{f: S \rightarrow S\}$  با عمل ترکیب توابع یک نیم‌گروه است. نشان دهید در بین همه زیرنیم‌گروه‌های  $S$  که شامل نگاشت‌های یک به یک هستند دقیقاً یک زیرنیم‌گروه ماکسیمال وجود دارد و آن را معرفی کنید.

۵. نشان دهید برای هر دنباله  $x_1, x_2, \dots$  از اعداد در بازه  $[0, 1]$ ، عدد  $x$  در این بازه وجود دارد که سری زیر همگرا باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 |x - x_n|}$$