

مسابقه دانشکده علوم ریاضی

روز اول، زمان: ۴ ساعت

بهار ۱۳۹۶

سوال ۱

ثابت کنید برای هر تابع پیوسته $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ داریم:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_0^1 x^{\epsilon-1} f(x) dx = f(0)$$

سوال ۲

نشان دهید اگر A, B دو ماتریس $n \times n$ باشند که با هم جابه‌جا می‌شوند:

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$$

سوال ۳

فرض کنید $n_1, \dots, n_k \geq 2$ اعداد طبیعی باشند. نشان دهید گروه متناهی شامل اعضای g_1, \dots, g_k وجود دارد که مرتبه g_i برابر n_i است و هیچ دوتایی از g_i ها با هم جابه‌جا نمی‌شوند.

سوال ۴

نشان دهید در هر رنگ‌آمیزی یال‌های گراف کامل n راسی با دو رنگ، حداقل $\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ مثلث با یال‌های هم‌رنگ وجود دارد.

سوال ۵

فرض کنید \mathcal{F} خانواده‌ای از توابع پیوسته بر بازه $[0, 1]$ باشند که برای هر دو تابع متفاوت $f, g \in \mathcal{F}$ داریم $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$. نشان دهید \mathcal{F} حداکثر شمارا است.

موفق باشید