

مسابقه دانشکده علوم ریاضی

روز اول، زمان: ۴ ساعت

اسفند ۱۳۹۴

سوال ۱

قطرهای چهارضلعی مسطح $ABCD$ بر هم عمود هستند. نشان دهید اگر این چهارضلعی در صفحه طوری تغییر کند که طول اضلاع آن بی تغییر بماند، قطرهای همچنان بر هم عمود خواهند ماند.

سوال ۲

A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی و $x \in \mathbb{R}^n$ برداری یکه است که برای هر بردار یکه دیگر مثل x داریم $\|Ax\| \leq \|Ax_0\|$. ثابت کنید برای هر بردار $y \in \mathbb{R}^n$ اگر x_0 و y عمود باشند آنگاه Ax_0 و Ay هم عمود هستند.

سوال ۳

نشان دهید برای هر زیرمجموعه چگال و شمارا از اعداد حقیقی مثل X ، همیومورفیسمی مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(X) = \mathbb{Q}$.

سوال ۴

ثابت کنید بازه بسته $[0, 1]$ را نمی‌توان به صورت اجتماع مجزای تعداد نامتناهی شمارا بازه بسته نوشت. (مجموعه‌های تک نقطه‌ای را هم به عنوان حالت تباهیده، بازه بسته در نظر می‌گیریم).

سوال ۵

فرض کنید p یک عدد اول و $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد صحیح باشند که $\sum_{d|n} a_d = p^n$. ثابت کنید a_n بر n بخشپذیر است.

موفق باشید