

مسابقه دانشکده علوم ریاضی

روز دوم، زمان: ۴ ساعت

بهار ۱۳۹۶

سوال ۱

فرض کنید $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده و همبند تودرتو در فضای اقلیدسی، \mathbb{R}^n ، باشند. نشان دهید $\bigcap A_i$ نیز همبند است.

سوال ۲

فرض کنید z_1, z_2, \dots, z_n و ζ اعدادی در صفحه مختلط و p_1, p_2, \dots, p_n اعداد حقیقی نامنفی باشند که مجموع آن‌ها برابر یک است و داریم:

$$\sum_{j=1}^n \frac{p_j}{\zeta - z_j} = 0$$

ثابت کنید ζ در پوش محدب z_1, z_2, \dots, z_n قرار دارد.

سوال ۳

نشان دهید هر حلقه متناهی که مرتبه آن خالی از مربع باشد جابه‌جایی است.

سوال ۴

فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی یکانی (حافظ طول) باشد. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (x + Tx + T^2x + \dots + T^{n-1}x)$$

سوال ۵

۱۳۹۶ خط نامتناهی در فضای سه‌بعدی داده شده‌اند. نشان دهید می‌توان این خطوط را طوری حرکت داد که همه با هم موازی شوند و در طول حرکت هم هیچ‌گاه همدیگر را قطع نکنند.