

باسمه تعالی

مسابقه دانشکده علوم ریاضی، اردیبهشت ۱۳۹۷

روز دوم، زمان: ۴ ساعت

۱. نشان دهید نمی‌توان به راس‌های یک درخت نامتناهی سه-منتظم طوری اعداد صحیح متمایز نسبت داد که اعداد روی راس‌های مجاور حداکثر به اندازه ۱۳۹۷ واحد با هم اختلاف داشته باشند.

۲. فرض کنید G یک گراف همبند n راسی با مجموعه یال‌های E باشد. برای راس O و یال e ، $p(O, e)$ را برابر با احتمال این قرار دهید که یک قدم‌زن تصادفی با شروع از O از یال e بگذرد و به راسی وارد شود که تا کنون آن را ندیده است. نشان دهید $\sum_{e \in E} p(O, e)$ مستقل از O است. (یک قدم‌زن تصادفی متحرکی است که از یک راس گراف شروع به حرکت می‌کند و هر بار با احتمال برابر به یکی از راس‌های مجاور می‌رود).

۳. فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نُرم بر فضای اقلیدسی، \mathbb{R}^n ، و H یک زیرفضای سره از فضا باشد. نشان دهید بردار $u \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که $\|u\| = 1$ و $\min_{x \in H} \|u - x\| = 1$.

۴. تمام توابع هولومورفی را پیدا کنید که روی $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ تعریف شده‌اند و تصویر هر دایره به مرکز مبدا تحت آن‌ها در دایره‌ای به مرکز مبدا قرار می‌گیرد.

۵. نشان دهید برای هر میدان متناهی مثل \mathbb{F} و هر عدد طبیعی m ، ماتریس‌های $m \times m$ مثل A_1, \dots, A_m با درایه‌های در \mathbb{F} وجود دارند به طوری که برای هر بردار m -تایی ناصفر با درایه‌های در \mathbb{F} مثل x ، بردارهای $A_1 x, \dots, A_m x$ روی \mathbb{F} مستقل خطی باشند.