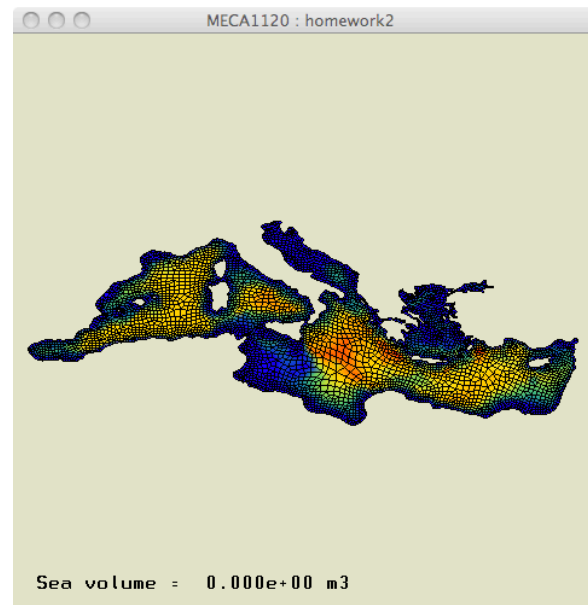


Finite elements for dummies : Quel est le volume de la Méditerranée ?

Il s'agit d'estimer le volume de la mer méditerranée en intégrant une bathymétrie connue sur un maillage de quadrilatères. Pour effectuer cette intégration, on utilisera, par exemple, une règle de Gauss-Legendre dont les quatre poids et points d'intégration sont donnés par :

ξ_k	η_k	w_k
$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1.0
$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1.0
$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1.0
$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1.0



Chaque noeud du maillage est défini par sa longitude θ et sa latitude ϕ exprimés en degrés (pas en radians, donc :-). Evidemment, il s'agira d'intégrer la bathymétrie sur la surface de notre planète de rayon R et donc de considérer un élément de sphère dans l'espace tridimensionnel lors de votre intégration numérique en notant que :

$$\begin{cases} x(\theta, \phi) &= R \cos(\theta) \cos(\phi) \\ y(\theta, \phi) &= R \sin(\theta) \cos(\phi) \\ z(\theta, \phi) &= R \sin(\phi) \end{cases}$$

Aujourd'hui, il est aisé d'obtenir des données géographiques précises à partir de sites des administrations américaines. Nos données proviennent du NOAA : National Oceanic and Atmospheric Administration http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gdas/gd_designagrid.html. La bathymétrie est fournie en mètres sur une grille régulière en termes de latitude et de longitude et on peut donc obtenir la profondeur ou l'altitude d'un point quelconque en effectuant une interpolation adéquate sur la cellule adéquate. Une valeur négative indique une profondeur sous le niveau de la mer, tandis qu'une valeur positive indique une altitude terrestre¹. L'origine, la taille et le pas de la grille complètent le fichier de données bathymétriques fournies. Pour effectuer ce devoir, voici ce qui est fourni par nos bons soins :

- le fichier `homework.c`, est une version vide du devoir à réaliser. Les quatre fonctions sont définies mais ne font pas vraiment ce qui est prévu.
- Le fichier `fem.c` contient une série de fonctions de base pour lire le maillage, la bathymétrie. Quelques autres fonctions pourraient aussi vous aider. Ces fonctions seront disponibles lors de la correction et il est donc permis de les utiliser. Il n'est toutefois pas permis de les modifier.²
- Les fichiers `mesh.txt` et `bath.txt` contiennent le maillage de la méditerranée et la grille des données bathymétriques.
- Le fichier `glfem.c` est une petite librairie pour visualiser facilement vos résultats en temps réel, sans devoir passer par un autre programme. Attention, vous ne pouvez pas faire appel aux fonctions

¹ Soyez attentifs à ne pas intégrer les îles oubliées par la discrétisation du maillage comme des volumes négatifs d'eau !

² Si vraiment vous voulez modifier ces fonctions, il faut en créer une nouvelle fonction avec un nom différent et inclure la nouvelle version comme une fonction distincte dans votre fichier de soumission.

graphiques dans la soumission finale de votre devoir. Ceci devrait juste vous permettre de visualiser facilement la bathymétrie et de vérifier si votre interpolation s'est effectuée correctement.

Plus précisément, on vous demande de :

1. Tout d'abord, écrire une fonction

```
double earthRadius()
```

qui fournit simplement le rayon de la Terre. Il n'y a pas vraiment grand chose à programmer : il suffit juste de trouver le rayon de notre bonne vieille planète.

2. Ensuite, écrire une fonction

```
double earthGridInterpolate(femGrid *theGrid, double lon, double lat)
```

qui interpole la bathymétrie définie dans la structure **femGrid** pour un point décrit par sa longitude et sa latitude.

3. Ecrire une fonction permettant de calculer le jacobien de la transformation entre le carré parent et un morceau de la sphère

```
double earthJacobian(double lon[4], double lat[4], double xsi, double eta, double R)
```

qui calcule le jacobien de la transformation en un point quelconque du carré parent $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Ce calcul est évidemment indispensable pour le calcul numérique d'une intégrale par la règle de Gauss-Legendre sur un morceau de la sphère... On suppose évidemment que le rayon est un réel strictement positif :-)

Attention, vous ne pouvez pas faire appel à votre propre fonction pour calculer le rayon de la Terre dans le corps de votre code : il faut impérativement utiliser la valeur fournie en argument !

4. Et finalement, écrire une fonction

```
double earthIntegrateBathymetry(femMesh *theMesh, femGrid *theGrid, femIntegration *theRule, double R)
```

qui intègre la bathymétrie afin d'obtenir le volume d'eau de la mer définie sur le maillage **theMesh**. Les deux autres arguments sont le rayon de la terre en mètre et la structure de données qui contient la bathymétrie **theGrid**. Il faut évidemment faire appel à la fonction précédente :-)

Attention, vous ne pouvez pas faire appel à votre propre fonction pour calculer le rayon de la Terre dans le corps de votre code : il faut impérativement utiliser la valeur fournie en argument !

Attention, nous utiliserons une autre règle d'intégration dans le correcteur automatique : il ne convient donc pas de définir directement les poids et points d'intégration dans votre fonction !

5. Un morceau de code `main.c` vous est fourni pour tester votre fonction.

```
#include "fem.h"

femMesh *theMesh = femMeshQuadRead("mesh.txt");
femGrid *theGrid = femGridRead("bath.txt");
femIntegration *theRule = femIntegrationCreate(4,FEM_QUAD);
double R = earthRadius();
double I = earthIntegrateBathymetry(theMesh,theGrid,theRule,R);
printf("Sea volume = %10.3e m^3 \n",I);

double *theField = malloc(sizeof(double) * theMesh->nNode); int i;
for (i = 0; i < theMesh->nNode; ++i)
    theField[i] = -fmin(0.0,earthGridInterpolate(theGrid,theMesh->X[i],theMesh->Y[i]));
int index=45;
printf("Bathymetry at node %d is : %10.3e m\n",index,theField[index]);

femIntegrationFree(theRule);
femMeshFree(theMesh);
femGridFree(theGrid);
exit(0)
```

6. Vos quatre fonctions seront incluses dans un unique fichier `homework.c`, sans y adjoindre le programme de test fourni ! Ce fichier devra être soumis via le web et la correction sera effectuée automatiquement. Il est donc indispensable de respecter strictement la signature des fonctions. Votre code devra être strictement conforme au langage C et il est fortement conseillé de bien vérifier que la compilation s'exécute correctement sur le serveur.