

UPPSALA UNIVERSITY

INTRODUKTION TILL BERÄKNINGSVETENSKAP

PROJEKT 1

Undersökning av numeriska integrations metoder

Author:

Anton Lindbro

May 12, 2024



Abstract

I denna rapporten utforskas olika numeriska metoder för integration. Metoderna utvärderas och verifieras och deras beteende i olika situationer utforskas. Vedertagna värden på noggrannhetgrader verifieras.

Contents

1	Inledning	3
2	Genomförande och resultat	3
2.1	Deluppgift 1	3
2.2	Deluppgift 2	5
2.3	Deluppgift 3	6
3	Diskussion	6
3.1	Deluppgift 1	6
3.2	Deluppgift 2	7
3.3	Deluppgift 3	7

1 Inledning

Numerisk integration är användbar i många situationer. Inom fysiken så finner man sig ofta i situationer där man har en funktion som behöver integreras men det är omöjligt att göra analytiskt, det finns helt enkelt inte en primitiv funktion. Då vänder man sig till de numeriska metoderna och människans bästa vän datorn. Därför utforskar denna rapporten två olika numeriska metoder för integration, trapets metoden och simpsons metod.

2 Genomförande och resultat

Här följer genomförande och resultat för samtliga deluppgifter i projektet.

2.1 Deluppgift 1

Den linjära modellen given i uppgiftsbeskrivningen implementeras i python och en funktion som plottar upp dess absolutvärde skrivs. Denna funktion ger upphov till följande figur.

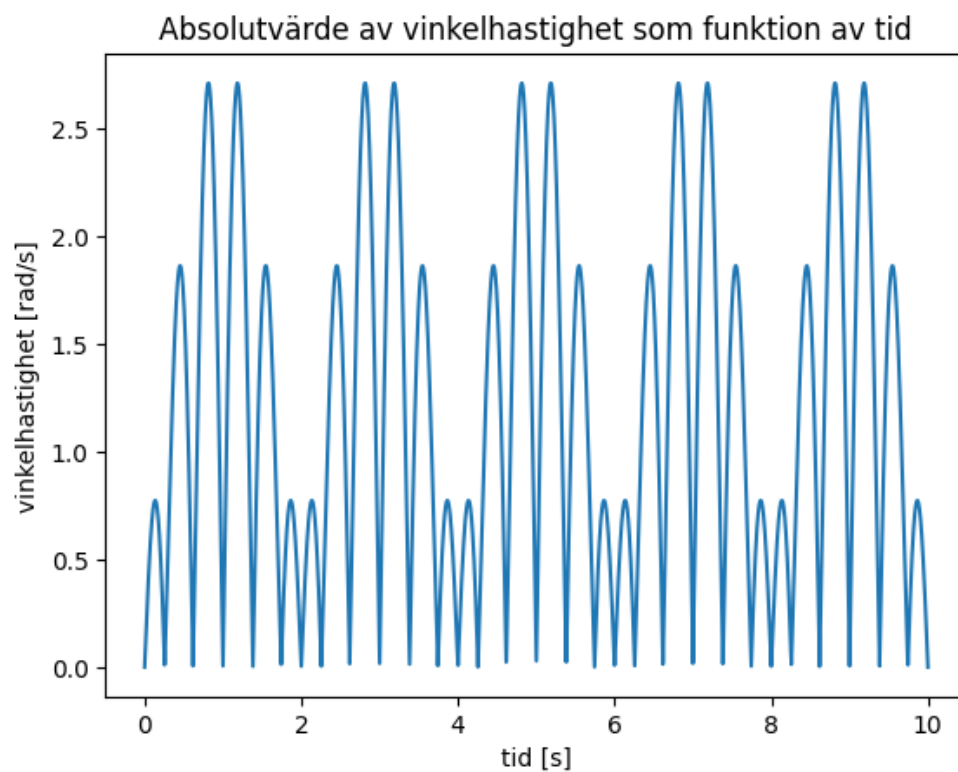


Figure 1: Absolutvärdet av vinkelhastigheten för pendeln med in parametrar $N = 4000$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 3\pi$, $\gamma = 0, 1$

Scipys inbyggda integrallösare QUAD användes för att integrera funktionen i 1. Denna gav värdet 12.03

Samma funktionen plottades över ett kortare tidsintervall $0 < t < 0,25$ och integralen på detta intervall beräknades till 0,1273

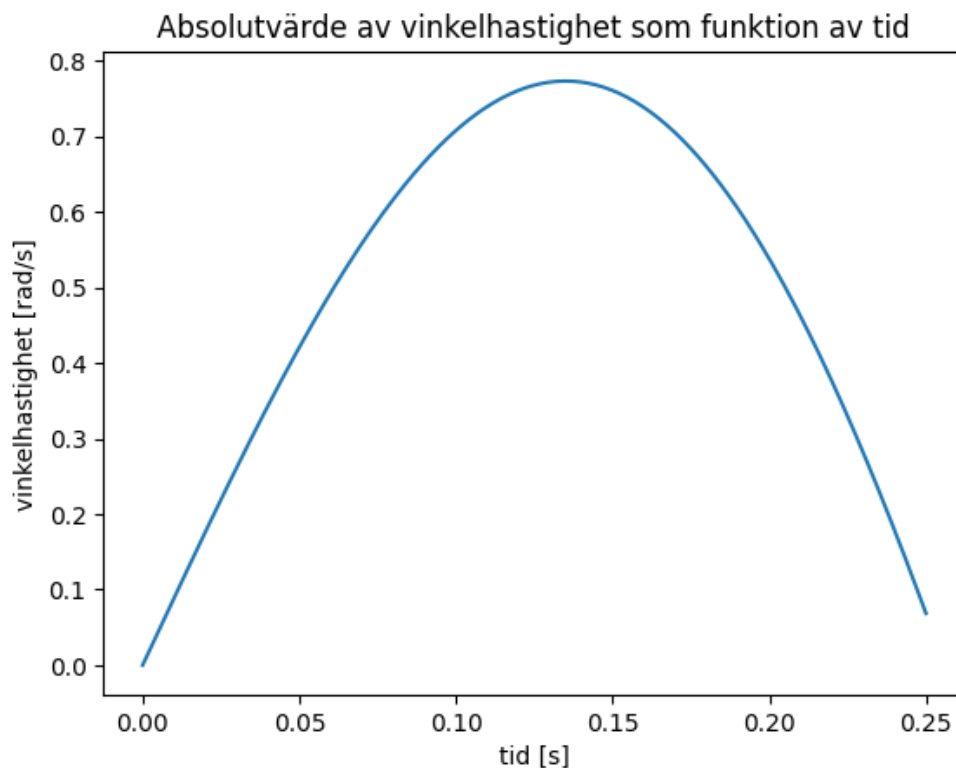


Figure 2: Absolutvärdet av vinkelhastigheten för pendeln med in parametrar $N = 200$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 3\pi$, $\gamma = 0, 1$

2.2 Deluppgift 2

Funktioner för att beräkna integrationsvärden, fel och noggrannhetsgrader implementerades i python för både trapets metoden och simpsons formel. Dessa värden redovisas i tabellen nedan. I tabellen så är $S_T(N)$ integrationsvärdet beräknat med trapets metoden vid N tidssteg och $S_S(N)$ samma fast för simpsons formel. e_N följande respektiive metod är felet och $q(N)$ är konvergenssen.

Table 1: Tabell över integrationsvärden med två olika metoder och felen i respektive metoder. $0 < t < 10$

N	$S_T(N)$	e_N	q(N)	$S_S(N)$	e_N	q(N)
100	12,0425					
200	12,0354	$1,04 \cdot 10^{-3}$		12,0400		
400	12,0323	$1,72 \cdot 10^{-4}$	2,61	12,0333	$1,37 \cdot 10^{-5}$	
800	12,0328	$2,52 \cdot 10^{-5}$	2,77	12,3309	$1,67 \cdot 10^{-5}$	-0,28

Ovan tabell är given av inparametrarna $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 3\pi$, $\gamma = 0,1$ och ett tidsintervall $0 < t < 10$ om vi använder samma inparametrar men ett kortare tidsintervall $0 < t < 0,25$ får vi följande tabell

Table 2: Tabell över integrationsvärden med två olika metoder och felen i respektive metoder. $0 < t < 0,25$

N	$S_T(N)$	e_N	q(N)	$S_S(N)$	e_N	q(N)
100	0,127					
200	0,127	$6,65 \cdot 10^{-7}$		0,127		
400	0,127	$1,65 \cdot 10^{-7}$	2,02	0,127	$5,16 \cdot 10^{-13}$	
800	0,127	$4,12 \cdot 10^{-8}$	2,01	0,127	$3,21 \cdot 10^{-14}$	4,00

2.3 Deluppgift 3

Med inparametrarna $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{3}{2}\omega$, $\beta = \frac{1}{4}\omega_0$, $\gamma = 1,07$ för den modellen som användes i föregående projekt får vi ett integrationsvärden på 286 för tidsintervall $0 < t < 40$

3 Diskussion

3.1 Deluppgift 1

När QUAD anropas utan en limit får man en varning som säger att max antal delningar har uppnåts och att man borde undersöka integranden närmare. Så in princip säger scipy att funktionen inte är så snäll. Varningen fås inte när man integrera mellan 0 och 0,25 bara mellan 0 och 10.

3.2 Deluppgift 2

Som ni kan se i tabell 1 så är konvergensen för simpsons formel mycket udda i det långa tidsintervall. Det beror på att funktionen inte är så snäll. I det korta tidsintervall som syns i tabell 2 så stämme konvergensen för de båda metoderna.

3.3 Deluppgift 3

Trunkeringsfelen som uppstår här är dels i ODE lösningen och sedan i integreringen. Eftersom båda utförs numersikt tillkommer trunkeringsfel i båda processerna. Dessa kan uppskattas med hjälp av taylorutvecklingar för respektive metoder.