UPPSALA UNIVERSITET

Institionen för informationsteknologi
Beräkningsvetenskap

Besöksadress:
Lägerhyddsvägen 1, hus 10

Postadress:
Box 337
751 05 Uppsala

Telefon:
018–471 0000 (växel)

Telefax:
018–51 19 25

Hemsida:
http://www.it.uu.se

Department of Information Technology
Scientific Computing

Visiting address:
Lägerhyddsvägen 1, hus 10

Postal address:
Box 337
SE-751 05 Uppsala
SWEDEN

Telephone:
+46 18–471 0000 (switch)

Telefax:
+46 18–51 19 25

Web page:
http://www.it.uu.se

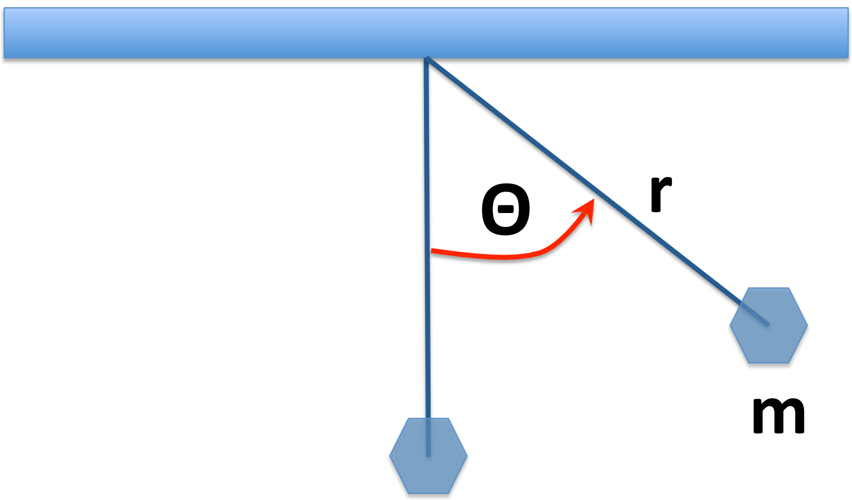
Introduktion till Beräkningsvetenskap

Projekt 2: Kaotisk pendel

I detta projekt ska ni använda resultat från det första projektet där ni tog fram numeriska lösningar till en ODE, som beskrev en dämpad och driven pendel. Vi ska nu ta reda på hur långt spetsen på pendeln rört sig under rörelsen, genom att utnyttja numeriska metoder för integrering. Du kommer att använda ett par av Pythons (SciPy) egna lösare för numerisk integrering, `quad` *och* `trapezoid`*. Du kommer analysera trunkeringsfel och noggrannhet. Nyckelbegrepp är* ***konvergens****.*

Matematisk beskrivning av en pendel

Om vi endast tar hänsyn till gravitationskraften beskrivs pendelns rörelse av $\theta'' = -\frac{g}{R}\sin(\theta)$, där θ är vinkeln som pendeln har (se Figur 1). Pendeln har massan m och dess längd är r. För att påbörja pendelrörelsen startar vi pendeln (vid tiden $t = 0$) från vila (dvs $\theta' = 0$) från en given vinkel $\theta = \theta_0$. $\theta' = 0$ och $\theta = \theta_0$ är våra begynnelsevillkor, dvs pendelns position och hastighet vid tiden $t = 0$.



Figur 1: Illustration av en pendel med massa m och längd r.

I verkligheten måste vi även ta hänsyn till friktionskraft, som vi här antar är proportionell mot pendels hastighet, $b\,\theta'$, där b är en friktionsparameter. Till sist lägger vi på en drivande kraft $F_0 \cos \omega t$, där F_0 är amplituden och

ω frekvensen hos den drivande kraften. Den fullständiga beskrivningen av pendelrörelsen ges av följande ODE,

$$\theta'' = -\frac{g}{r}\sin(\theta) - \frac{b}{m}\theta' + \frac{F_0}{m\,r}\cos(\omega\,t)\ . \tag{1}$$

I ekvation (1) har vi 6 parametrar: m, r, g, b, F_0 och ω. Genom att införa $2\beta = \frac{b}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{r}$ och $\gamma = \frac{F_0}{m\,r\,\omega_0^2}$, kan vi skriva om (1) med endast 4 parametrar (ω_0, ω, β och γ),

$$\theta'' = -\omega_0^2\sin(\theta) - 2\,\beta\theta' + \gamma\omega_0^2\cos(\omega\,t)\ . \tag{2}$$

För små pendelrörelser, dvs $|\theta| << 1$, kan vi linearisera (2) genom att Taylor-utveckla kring $\sin(0)$, vilket ger oss $\sin(\theta) \simeq \theta$ då $|\theta| << 1$. Om vi samtidigt sätter friktionen till noll, dvs $b = 0$, får vi följande förenklade (linjära) ODE,

$$\theta'' = -\omega_0^2\theta + \gamma\omega_0^2\cos(\omega\,t)\ . \tag{3}$$

Parametern ω_0 brukar benämnas systemets naturliga (eller egen) frekvens.

Uppgifter

Här följer 3 obligatoriska uppgifter (Deluppgift 1-3), och en slutlig frivillig uppgift. Dessa uppgifter testar centrala delar av kursen, och är en bra övning inför den slutliga examinationen.

Deluppgift 1

Vi inleder med den linjära modellen (3), där begynnelsevillkoren sätts till $\theta = \theta' = 0$. Man kan visa att vinkelhastigheten ges av,

$$\theta'(t) = \frac{\gamma\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\omega_0\sin(\omega_0\,t) - \omega\sin(\omega\,t)\right)\ , \tag{4}$$

då $\omega \neq \omega_0$. Hastigheten som spetsen rör sig med ges av $v(t) = r \cdot \theta'(t)$. För enkelhetens skull antar vi att $r = 1\ m$. Sträckan som pendeln har rört sig mellan $t = 0$ och $t = T$ ges av,

$$S(T) = \int_0^T |v(t)|\,dt \tag{5}$$

Skapa en funktion i Python, som givet en tidsvektor returnerar beloppet av hastigheten ($|v(t)|$) i motsvarande punkter där den analytiska vinkelhastigheten ges av (4) . Övriga 3 parametervärden (ω_0, ω och γ) ska tilldelas utanför funktionen, och ska vara inparametrar till funktionen. Redovisa en figur för hastigheten $|v(t)|$ mellan $t = 0$ och $t = 10$ då $\omega = 2\,\pi$, $\omega_0 = 3\,\pi$ och $\gamma = 0.1$. Använd $N = 4000$ intervall för en kontinuerlig kurva. Skriv sedan ett program i Python som beräknar (5) med den (i *SciPy*) inbyggda

UPPSALA UNIVERSITET

integral lösaren quad och redovisa resultatet. Då kurvan för $|v(t)|$ är relativt osnäll så är det lämpligt att höja noggrannheten i beräkningen. I python kan anropet till quad se ut som följande (där vi skapat en funktion som heter *vel*, och där vi tilldelat värden för alla parametrar),

```
from scipy.integrate import quad, trapezoid

S, err = quad(vel, 0, T, args = (omega0,omega,gamma), ...
    epsabs=1.49e-12, epsrel=1.49e-12, limit=500)
```

Här kan man fråga sig om man kommer se förväntad konvergens med Simpsons formel. Notera att strikta felformeln för Simpson innehåller en fjärdederivata av integranden, dvs absolutbeloppet av vinkelhastigheten given av (4). Ser ni också någon varning då ni anropar quad i detta fall?

Man ser att hastigheten för första gången (efter t=0) blir noll nära $t = 0.255$. Testa nu att räkna (med quad) mellan $t = 0$ och $t = 0.25$, där lösningen är snäll i hela intervallet, där ni också plottar upp $|v(t)|$. Använd $N = 200$ intervall i detta fall.

Deluppgift 2: *Konvergens*

Skriv ett program i Python som löser (5) med trapetsformeln, genom att anropa funktionen trapezoid. Sätt $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = 3\pi$, $\gamma = 0.1$. Sätt begynnelsevillkoren till $\theta = \theta' = 0$. Sluttiden sätts till $T = 10$. Låt N beteckna antalet steg (intervall). Tidssteget (k) ges då enligt $k = \frac{T}{N}$. Beräkna (5) med trapetsformen med $N = 100,\ 200,\ 400,\ 800$ intervall och redovisa resultaten i en tabell (se Tabell 1, för tydligt redovisad tabell-mall). Låt $S_T(N)$ beteckna trapetsformeln med N intervall. Använd nu 3e-dels regeln för att uppskatta felen (som vi betecknar med e_N) hos $S_T(200)$, $S_T(400)$ och $S_T(800)$. Redovisa de uppskattade felen, dvs e_{200}, e_{400} och e_{800} i samma tabell. Redovisa därefter den uppskattade konvergensen med hjälp av (6). Man bör här se 2a ordningens konvergens (om funktionen är tillräckligt snäll), dvs att felet skalar som $\simeq N^{-2}$. Om man mäter felen med N och $2N$ steg kan man uppskatta metodens noggrannhets-ordningen (konvergensen), som vi betecknar med $q(2N)$, med följande formel:

$$q(2N) = log_2\left(\frac{e_N}{e_{2N}}\right) . \qquad (6)$$

Beräkna nu sträckan med Simpsons formel som vi här betecknar som $S_S(N)$, då $N = 200$, $N = 400$ och $N = 800$. Notera att dessa värden kan räknas fram med hjälp av de tidigare trapetsberäkningarna och de uppskattade felen. Redovisa resultaten i samma tabell. Använd nu 15-dels regeln för att uppskatta felen hos $S_S(400)$ och $S_S(800)$, som ni redovisar i samma tabell. Redovisa till sist den uppskattade konvergensen, där ni jämför felen för olika steglängder. Man bör här se 4de ordningens konvergens om funktionen är tillräckligt snäll, dvs att felet skalar som $\simeq N^{-4}$. Frågan är

UPPSALA
UNIVERSITET

här om det antagandet gäller, då funktionen som ges av absolutbeloppet av (4) inte är speciellt snäll nära vändpunkterna (då hastigheten är noll).

N	$S_T(N)$	e_N	q(N)	$S_S(N)$	e_N	q(N)
100	$S_T(100)$					
200	$S_T(200)$	e_{200}		$S_S(200)$		
400	$S_T(400)$	e_{400}	$q(400)$	$S_S(400)$	e_{400}	
800	$S_T(800)$	e_{800}	$q(800)$	$S_S(800)$	e_{800}	$q(800)$

Tabell 1: Mall för en tydlig tabell över resultat, feluppskattning och konvergens. Ersätt med beräknade resultaten.

Vi ska nu genomföra samma konvergens verifiering, men med skillnaden att vi räknar till sluttiden $T = 0.25$, istället som tidigare $T = 10$. I detta fall gäller antagandet om en snäll lösning i hela intervallet. Använd i övrigt samma parametrar, och redovisa resultatet i form av Tabell 1. Får ni nu förväntad konvergens även för Simpsons formel?

Som en extra kontroll av de uppskattade felen kan ni jämföra skillnaden mellan de framräknade resultaten och det värde ni fick med `quad` i deluppgift 1.

Deluppgift 3: *Kaotisk pendel*

Utgå från ert tidigare program från projekt 1 (deluppgift 4), som löser (2) med ODE lösaren `solve_ivp`, med begynnelsevillkoren satta till $\theta = \theta' = 0$ och där parametrarna sätts till $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{3}{2}\omega$, $\beta = \frac{1}{4}\omega_0$ och $\gamma = 1.07$. Räkna fram till sluttiden $T = 40$. Använd nu lösningen (dvs t och $\theta'(t)$) från `solve_ivp` för att beräkna (5) med trapetsformeln, genom att anropa funktionen `trapezoid`. Redovisa resultatet.

Vilka olika trunkeringsfel inför vi i beräkningen av sträckan och hur kan man uppskatta dessa? (Ni behöver här inte genomföra några beräkningar, endast argumentera och resonera.)

Valfri uppgift: *Konvergens för ickelinjär model*

Utgå från ert tidigare program från projekt 1 (valfri uppgift), som löser (2) med RK4, med begynnelsevillkoren satta till $\theta = \theta' = 0$ och där parametrarna sätts till $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{3}{2}\omega$, $\beta = \frac{1}{4}\omega$ och $\gamma = 1.07$. Räkna fram till sluttiden $T = 40$. Genomför beräkningen med $N = 8000$.

Använd nu lösningen (dvs t och $\theta'(t)$) från RK4 beräkningen för att beräkna (5) med trapetsformen, som vi betecknar $S_T(8000)$. Beräkna sedan $S_T(4000)$ och $S_T(2000)$ genom att använda varannan respektive var fjärde punkt i lösningsvektorerna. Redovisa resultaten i en tabell. Använd nu 3e-dels regeln för att uppskatta felen hos $S_T(8000)$ och $S_T(4000)$, dvs e_{8000} och e_{4000} och redovisa i samma tabell. Redovisa därefter den uppskattade konvergensen med (6). Redovisa till sist resultatet med Simpsons metod då $N = 8000$. Försök till sist uppskatta konvergensen med Simpsons formel.

Får ni för detta fall den förväntade 4de ordningens konvergens (som bygger på antagandet att funktionen är tillräckligt snäll)?

Vilka olika trunkeringsfel inför vi i beräkningen av sträckan och hur kan man uppskatta dessa? Hur kan man försäkra sig om att trunkeringsfelet i trapetsberäkningen dominerar?