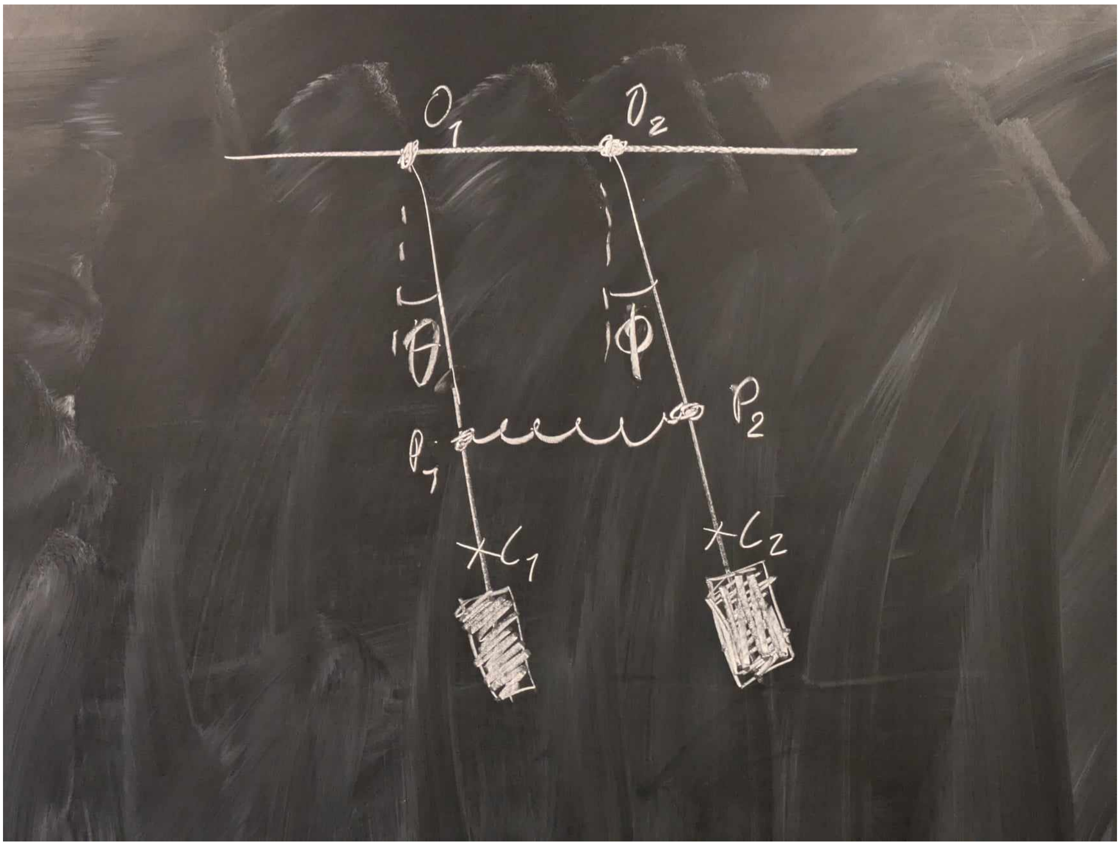
Förberedelser labb 1

Anton Lindbro

11 februari 2025

1 Lagrangian



Figur 1

För lagrangianen behöver vi T och U. Från fig 1 kan vi plocka fram T och U. T kommer från pendlarnas kinetiska energi som kommer från deras rotationella energi.

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_O \omega_2^2 \tag{1}$$

Där m är pendelns massa, I_O är pendelns tröghetsmoment runt punkten O och ω_i är pendlarnas respektive hastigheter och vinkelhastigheter. Generaliserade koordinater väljs till ϕ, θ och vi kan då uttrycka nödvändiga storheter i dessa koordinater.

$$\omega_1 = \dot{\theta} \tag{2}$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \tag{3}$$

Det ger

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_O \dot{\phi}^2 \tag{4}$$

U kommer nu dels från gravitations potentialen och dels från fjäderns potential.

$$U = mgh_1 + mgh_2 + \frac{1}{2} k d^2 \tag{5}$$

Där h_i är höjden för respektive masscentrum och d är längd förändringen av fjädern.

$$h_1 = L(1 - \cos\theta) \tag{6}$$

$$h_2 = L(1 - \cos\phi) \tag{7}$$

$$d = l(\sin\theta - \sin\phi) \tag{8}$$

Det ger

$$U = mgL(1 - \cos\theta) + mgL(1 - \cos\phi) + \frac{1}{2} k l^2 (\sin\theta - \sin\phi)^2 \tag{9}$$

Vid små svängningar använder vi ledande ordning 2. Därmed blir lagraniganen till ledande ordning

$$L \approx \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_O\dot{\phi}^2 - mgL\left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\phi^2}{2}\right) - \frac{1}{2}kl^2(\theta^2 + \phi^2 - 2\theta\phi) \tag{10}$$

2 Rörelse ekvationer

Från detta kan vi få rörelse ekvationerna

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgL\theta - kl^2\theta + kl^2\phi \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_O\dot{\theta} \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgL\phi - kl^2\phi + kl^2\theta \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_O\dot{\phi} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = I_O\ddot{\theta} + mgL\theta + kl^2\theta - kl^2\phi = 0 \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = I_O\ddot{\phi} + mgL\phi + kl^2\phi - kl^2\theta = 0 \tag{16}$$

Samlar vi termer och skriver om

$$\ddot{\theta}I_O + \theta(mgL + kl^2) - kl^2\phi = 0 \tag{17}$$

$$\ddot{\phi}I_O + \phi(mgL + kl^2) - kl^2\theta = 0 \tag{18}$$

3 Lösning

Vi förväntar oss en svängnings rörelse så vi ansätter det med $\theta = B_1e^{i\omega t}$ och $\phi = B_2e^{i\omega t}$. Sätter vi in det i ekv. 17 och 18 fås

$$-\omega^2B_1e^{i\omega t}I_O + B_1e^{i\omega t}(mgL + kl^2) - kl^2B_2e^{i\omega t} = 0 \tag{19}$$

$$-\omega^2B_2e^{i\omega t}I_O + B_2e^{i\omega t}(mgL + kl^2) - kl^2B_1e^{i\omega t} = 0 \tag{20}$$

För att vi ska få en svängningsrörelse måste vi anta $e^{i\omega t} \neq 0$, samlar vi termer får vi då ekvationerna

$$B_1(-\omega^2 I_O + (mgL + kl^2)) - B_2 kl^2 = 0 \tag{21}$$
$$B_2(-\omega^2 I_O + (mgL + kl^2)) - B_1 kl^2 = 0 \tag{22}$$

Detta kan vi skriva om till en matris ekvation

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 I_O + (mgL + kl^2) & -kl^2 \\ -kl^2 & -\omega^2 I_O + (mgL + kl^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{23}$$

För att denna ska ha icke triviala lösningar måste determinanten av koefficient matrisen vara 0.

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 I_O + (mL + kl^2) & -kl^2 \\ -kl^2 & -\omega^2 I_O + (mgL + kl^2) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{24}$$

Detta ger ekvationerna

$$(-\omega^2 I_O + (mgL + kl^2))^2 - (-kl^2)^2 = 0 \tag{25}$$
$$(-\omega^2 I_O + (mgL + kl^2))^2 = (kl^2)^2 \tag{26}$$
$$-\omega^2 I_O + (mgL + kl^2) = \pm kl^2 \tag{27}$$
$$\omega^2 = \frac{\mp kl^2 + mgL + kl^2}{I_O} \tag{28}$$

Detta ger egenfrekvenserna

$$\omega_- = \sqrt{\frac{mgL}{I_O}} \tag{29}$$
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{mgL + 2kl^2}{I_O}} \tag{30}$$

Nu när vi har egenfrekvenserna behöver vi ta fram egenmoderna. Adderar vi 17 och 18 får vi

$$\ddot{\theta} I_O + \theta(mgL + kl^2) - kl^2\phi + I_O\ddot{\phi} + \phi(mgL + kl^2) - kl^2\theta = 0 \tag{31}$$
$$I_0(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + (mgL + kl^2)(\theta + \phi) - kl^2(\theta + \phi) = 0 \Rightarrow q_+ = (\theta + \phi) \tag{32}$$

Subtraherar vi dom fås

$$\ddot{\theta}I_O + \theta(mgL + kl^2) - kl^2\phi - I_O\ddot{\phi} - \phi(mgL + kl^2) + kl^2\theta \tag{33}$$

$$I_0(\ddot{\theta} - \ddot{\phi}) + (mgL + kl^2)(\theta - \phi) - kl^2(\theta - \phi) \Rightarrow q_=(\theta - \phi) \tag{34}$$

Egenmoderna svänger med egenfrekvenserna.

$$q_+(t) = A\cos(\omega_+ t) + B\sin(\omega_+ t) \tag{35}$$

$$q_-(t) = C\cos(\omega_- t) + D\sin(\omega_- t) \tag{36}$$

θ och ϕ ges av q_+ och q_- enligt

$$\theta = \frac{1}{2}(q_+ + q_-) \tag{37}$$

$$\phi = \frac{1}{2}(q_+ - q_-) \tag{38}$$

Det ger den allmänna lösningen för θ och ϕ

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(A\cos(\omega_+ t) + B\sin(\omega_+ t) + C\cos(\omega_- t) + D\sin(\omega_- t)) \tag{39}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2}(A\cos(\omega_+ t) + B\sin(\omega_+ t) - C\cos(\omega_- t) - D\sin(\omega_- t)) \tag{40}$$

Vilket ger 4 konstanter vilket är rimligt då vi har två andragrads diff ekvationer.

4 Specialfall

A

Begynnelse värden

$$\theta(0) = \alpha \tag{41}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \tag{42}$$

$$\phi(0) = \alpha \tag{43}$$

$$\dot{\phi} = 0 \tag{44}$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
q_+(0) &= 2\alpha && (45)\\
q_-(0) &= 0 && (46)\\
\dot{q_+} &= 0 && (47)\\
\dot{q_-} &= 0 && (48)\\
& && (49)
\end{aligned}
$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
q_+(0) &= A = 2\alpha && (50)\\
\dot{q_+}(0) &= -B = 0 && (51)\\
q_-(0) &= C = 0 && (52)\\
\dot{q_-} &= -D = 0 && (53)
\end{aligned}
$$

Så vi får inget - bara + vilket var väntat

B

Begynnelse värden

$$
\begin{aligned}
\theta(0) &= \alpha && (54)\\
\dot{\theta}(0) &= 0 && (55)\\
\phi(0) &= -\alpha && (56)\\
\dot{\phi} &= 0 && (57)
\end{aligned}
$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
q_+(0) &= && (58)\\
q_-(0) &= 2\alpha && (59)\\
\dot{q_+} &= 0 && (60)\\
\dot{q_-} &= 0 && (61)\\
& && (62)
\end{aligned}
$$

Detta ger

$$q_+(0) = A = 0 \tag{63}$$
$$\dot{q_+}(0) = -B = 0 \tag{64}$$
$$q_-(0) = C = 2\alpha \tag{65}$$
$$\dot{q_-} = -D = 0 \tag{66}$$

Nu får vi inget + bara - vilket också var väntat

C

Begynnelse värden

$$\theta(0) = \alpha \tag{67}$$
$$\dot{\theta}(0) = 0 \tag{68}$$
$$\phi(0) = 0 \tag{69}$$
$$\dot{\phi} = 0 \tag{70}$$

detta ger

$$q_+(0) = \alpha \tag{71}$$
$$q_-(0) = \alpha \tag{72}$$
$$\dot{q_+} = 0 \tag{73}$$
$$\dot{q_-} = 0 \tag{74}$$
$$\tag{75}$$

$$q_+(0) = A = \alpha \tag{76}$$
$$\dot{q_+}(0) = -B = 0 \tag{77}$$
$$q_-(0) = C = \alpha \tag{78}$$
$$\dot{q_-} = -D = 0 \tag{79}$$

Detta ger konstant blanding av båda med samma amplitud vilket också var väntat.