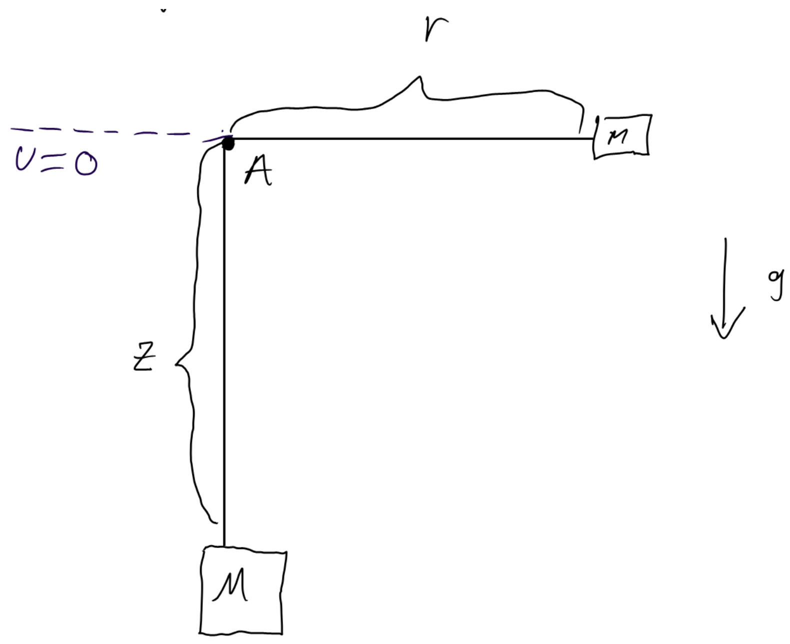
Inlämmning 1 mekanik III

Anton Lindbro

2 februari 2025

Uppgift 1

Uppställning



Figur 1: Problem uppställning

Problemet består av ett snöre med en fin gammal tekopp i ena änden och ett gem i den andra. Snörret löper friktionsfritt över punkten A. Vid $t = 0$ släpps gemet och uppgiften är att hitta rörelsen för gemet som funktion av tiden.

För att kunna göra en modell av gemets rörelse så behöver vi göra några idealiseringar.

- Icke elastiskt snöre med längden l
- Snöret löper friktionsfritt över A
- Diametern av A är mycket liten $\Rightarrow r + z = l$ gäller alltid
- Inget luftmotstånd

Jag har valt att använda polära koordinater för att beskriva systemet. Detta då vi antar att koppen faller vertikalt neråt. Jag har valt att sätta r som avståndet mellan gemet och punkten A, och θ vara vinkeln mellan snöret som sitter fast i gemet och ursprungsläget som visas i figuren.

Dom sambanden som används är

$$z + r = l \tag{1}$$
$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$
$$U = -mgh \tag{3}$$
$$L = T - U \tag{4}$$

Plan

1. Hitta kinetiskt och potentiell energi
2. Skriv upp lagrangianen
3. Beräkna relevanta derivator
4. Skriv upp rörelse ekvationerna
5. Lös dessa på lämpligt sätt
6. Plotta lösningen

Utförande

Den kinetiska energin för systemet är summan av den kinetiska energin för dom båda kropparna.

$$T = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{5}$$

Utifrån figuren kan vi ta fram $v_1 och v_2$

$$v_1 = \dot{z} = -\dot{r} \tag{6}$$
$$v_2 = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \tag{7}$$

Sätter vi in det i ekv. 5 och förenklar får vi.

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2(M+m) + mr^2\dot{\theta}^2) \tag{8}$$

För att ta fram den potentiella energin för de båda kropparna behöver vi ha det vertikala avståndet från noll nivån. För koppen blir det

$$h = z = l - r \tag{9}$$

För gemet behöver vi ha koll på vinkeln också

$$h = -r\sin\theta \tag{10}$$

Använder vi nu dessa höjderna får vi

$$U = -Mg(l-r) - mgr\sin\theta \tag{11}$$

Detta tillsammans med ekv.8 ger lagrangianen

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2(M+m) + mr^2\dot{\theta}^2) + Mg(l-r) + mgr\sin\theta \tag{12}$$

Nu behöver vi beräkna lite derivator

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\cos\theta \tag{13}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{14}$$
$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg + mg\sin\theta \tag{15}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}(M+m) \tag{16}$$

Dessa ger os rörelse ekvationerna

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\cos\theta = 0 \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}(M+m)) - mr\dot{\theta}^2 + Mg - mg\sin\theta = 0 \tag{18}$$

Beräknar vi tids derivatorna får vi

$$\ddot{\theta}r^2m + 2\dot{\theta}r\dot{r} + \sin\theta mgr = 0 \tag{19}$$

$$\ddot{r}(M+m) - mr\dot{\theta}^2 + g(M-m) = 0 \tag{20}$$

För att få något hum om hurvida dessa rörelsekvationerna stämmer eller inte så gör vi en enhets analys

$$s^{-2}m^2kg + s^{-1}mms^{-1} + kgms^{-2}m = \frac{kgm^2}{s^2} \tag{21}$$

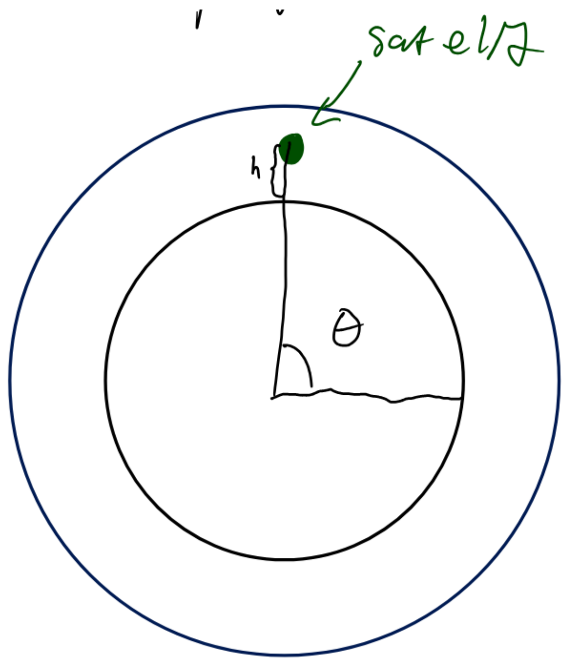
$$ms^{-2}kg - kgms^{-2} + ms^{-2}kg = \frac{kgm}{s^2} \tag{22}$$

Så enheterna är konsekventa i dom två ekvationerna. Eftersom det är kopplade ickelinjära ekvationer använder jag mathematica för att lösa dom. Det ger en lösning som ser ut som följnade.

Kommentar: Min numeriska lösning ger att θ är konstant så antingen är mina rörelse ekvationer fel eller så har jag skrivit nått fel i mathematica. Kan inte själv hitta några fel dock.

Uppgift 2

Uppställning



Figur 2: Problem uppställning

I denna uppgiften har vi en sattelit i omloppsbana kring jorden. Precis som alla satteliter utsätts den för luftmotstånd. Uppgiften är att plocka fram rörelse ekvationerna och lösa dessa under vissa förhållanden.

Vi börjar med idealiseringarna

- Luftmotståndet $F_l = -mk\mathbf{v}$ där k är en konstant
- k är liten $\Rightarrow$ långsam förändring i omloppsbanan

Jag väljer att återigen använda polära koordinater. Här använder vi istället sattelitens höjd över marken och vinkeln som syns i bilden.

Sambanden som används

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{23}$$
$$U = -mgh \tag{24}$$
$$\mathbf{F_l} = -mk\mathbf{v} \tag{25}$$
$$L = T - U \tag{26}$$

Plan

1. Ta fram T och U för satteliten
2. Ställ upp lagrangianen
3. Beräkna derivator
4. Ställ upp rörelsekvationerna med luftmotståndet som en generaliserad kraft
5. Lös dom under idealiseringarna

Utförande

Den kinetiska energin får vi som

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{27}$$

med r som avståndet från centrum och ut

Den potentiella energin är

$$U = mgr \tag{28}$$

med noll för potentiell energi i origo

Detta ger lagrangianen

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \tag{29}$$

Beräknar vi derivatorna

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg \tag{32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

Det ger rörelsekvationerna

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + mg \tag{36}$$

För att få med luftmotståndet behöver vi beräkna de generaliserade krafterna för varje koordinat. Detta görs enligt följande

$$Q_\theta = -mk\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\theta}} = -mkr^2\dot{\theta} \tag{37}$$

$$Q_r = -mk\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{r}} = -mk\dot{r} \tag{38}$$

Beräknar vi tids derivatorna och sätter ekvationerna lika med respektive generaliserad kraft

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -mkr^2\dot{\theta} \tag{39}$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg = -mk\dot{r} \tag{40}$$

För en sanity check kollar vi enheterna i höger leden

$$kgm^2s^{-2} + kgmms^{-1}s^{-1} = \frac{kgm^2}{s^2} \tag{41}$$

$$kgms^{-2} - kgms^{-2}kgms^{-2} = \frac{kgm}{s^2} \tag{42}$$

Detta ger $[k] = s^{-1}$ i båda ekvationerna så enheterna stämmer och vi verkara vara på rätt spår.

Kommentar: Nu är jag lite osäker på hur jag ska gå vidare. Kan jag anta att $\dot{r} = 0$ och därmed få ett ODE system för θ.