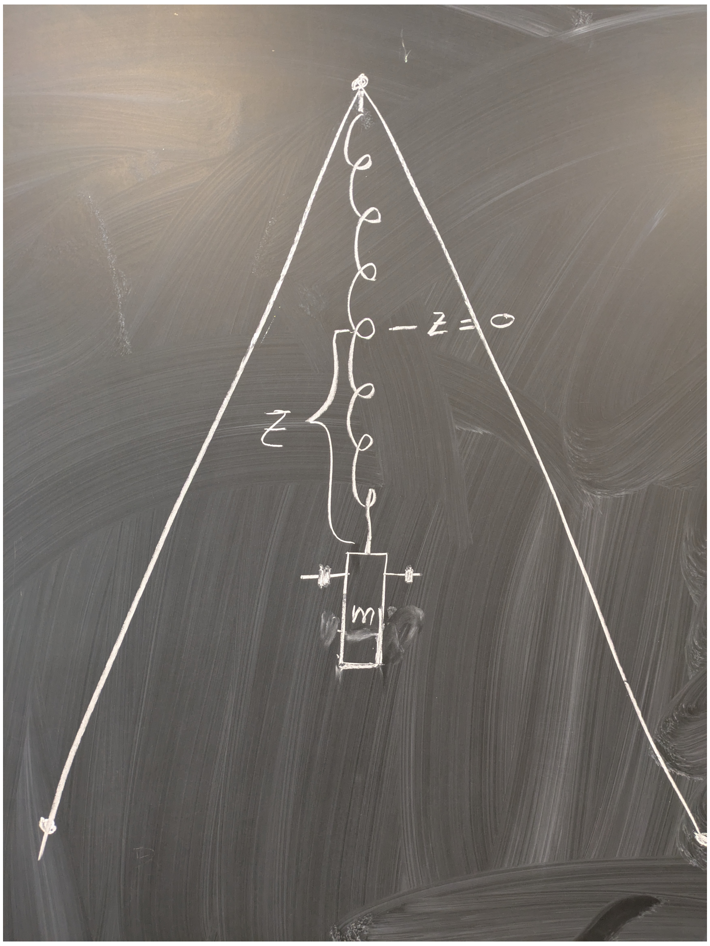
Inlämmning 2 mekanik III

Anton Lindbro

23 februari 2025

1 Uppgift 1

1.1 Uppställning och plan



Figur 1: Uppställning av systemet.

Vi har en Lagragian given

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kz^2 - \frac{\delta}{2}\theta^2 - \epsilon z\theta$$

Vi har parametrarna I, m, k, δ och ϵ som är konstanter. I är tröghetsmomentet för massan som hänger i fjädern, denna går att ändra genom att flytta på muttrarna som sitter på vikten. m är massan som hänger i fjädern. k är fjäderkonstanten för fjädern. δ är en konstant som beskriver hur mycket fjädern inte vill vridas termen med δ beskriver den potentiella energin i fjädern på grund av att den är vriden. ϵ är en kopplingskonstant.

För att ta fram och lösa rörelse ekvationerna behöver vi göra följande steg:

1. Skriv om Lagrangianen på matrisform
2. Diagnoalisera matriserna och hitta normalkoordinaterna
3. Skriv om Lagrangianen i normalkoordinaterna
4. Skriv ut rörelse ekvationerna
5. Lös rörelse ekvationerna

1.2 Genomförande

Vi skriver om Lagrangianen på matrisform

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{z} & \dot{\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}z & \theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k & \epsilon\\ \epsilon & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \theta\end{pmatrix}$$

Vi börjar med att byta koordinater så den första matrisen blir identiteten.

$$\begin{pmatrix}z\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{m}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{1}{I}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z'\\ \theta'\end{pmatrix}$$

Vi sätter också in $I = \frac{m\delta}{k}$.

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{z}' & \dot{\theta}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}z' & \theta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{k}{m} & \frac{\epsilon k}{m\delta}\\ \frac{\epsilon}{m} & \frac{k}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z'\\ \theta'\end{pmatrix}$$

Nu tar vi fram egenvärden och egenvektorer för den andra matrisen

$$\begin{vmatrix}\frac{k}{m}-\lambda & \frac{\epsilon k}{m\delta}\\ \frac{\epsilon}{m} & \frac{k}{m}-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)^2 - \frac{\epsilon^2 k}{m^2\delta} = 0$$

$$\lambda = \frac{k}{m} \pm \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}}$$

Detta ger egenvektorerna

$$\lambda = \frac{k}{m} + \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{k}{\delta}} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda = \frac{k}{m} - \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{k}{\delta}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Då kan vi skriva om Lagrangianen i normalkoordinaterna

$$\begin{pmatrix} q_+ \\ q_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{k}{\delta}} & -\sqrt{\frac{k}{\delta}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ \theta' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} z' \\ \theta' \end{pmatrix} = \frac{\delta}{k} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{\frac{k}{\delta}} \\ 1 & \sqrt{\frac{k}{\delta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ q_- \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{\delta}{2k} \begin{pmatrix} \dot{q_+} & \dot{q_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q_+} \\ \dot{q_-} \end{pmatrix} - \frac{\delta}{2k} \begin{pmatrix} \dot{q_+} & \dot{q_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{m} + \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}} & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} - \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q_+} \\ \dot{q_-} \end{pmatrix}$$

Det ger oss rörelse ekvationerna

$$\ddot{q_+} + \left(\frac{k}{m} + \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}} \right) q_+ = 0$$
$$\ddot{q_-} + \left(\frac{k}{m} - \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}} \right) q_- = 0$$

Dessa löses av

$$q_+(t) = A_+ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}}} t \right) + B_+ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}}} t \right)$$
$$q_-(t) = A_- \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}}} t \right) + B_- \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}}} t \right)$$

Nu behöver vi göra om dessa tillbaka till de ursprungliga koordinaterna.

$$z = \frac{\delta}{k}\left(-q_+ + \sqrt{\frac{k}{\delta}}q_-\right)$$
$$\theta = \frac{\delta}{k}\left(q_+ + \sqrt{\frac{k}{\delta}}q_-\right)$$

Vi sätter begynnelse vilkor för att lösa ut konstanterna. Vi sätter $z(0) = 1$, $\theta(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$ och $\dot{\theta}(0) = 0$. Dessa kan vi översätta till normalkoordinaterna $q_+(0) = \sqrt{\frac{k}{\delta}}$, $q_-(0) = 0$, $\dot{q_+}(0) = 0$ och $\dot{q_-}(0) = 0$.

Här fastnar jag, kan inte lösa ut konstanterna.

1.3 Rimlighet

Vi kan kolla dimensionen för att se om det vi har är rimligt.

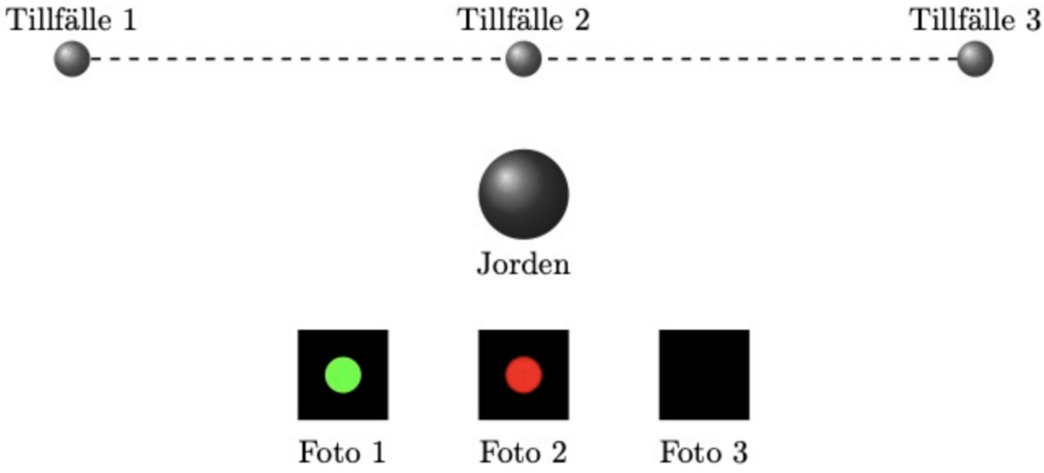
$$[k] = \frac{kg}{s^2}$$
$$[m] = kg$$
$$[\delta] = kg \cdot m^2$$
$$[\epsilon] = \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$[\frac{k}{m}] = \frac{1}{s^2}[\frac{\epsilon}{m}\sqrt{\frac{k}{\delta}}] = \frac{1}{s^2}$$

Så dimensionen i rörelse ekvationerna stämmer.

2 Uppgift 2

2.1 Uppställning och plan



Figur 2: Illustration av objekt och observationer.

Vi vill ta reda på objektets hastighet med hjälp av dessa tre observationerna. För att göra detta måste vi hitta någonting som relaterar en förändring i observerad våglängd på ljus till hastigheten hos ett objekt, detta fenomen kallas för relativistisk doppler eller röd/blå förkjutning. Så i den första observationen är alltså den våglängden vi uppfattar kortare än den objektet sände ut, i den andra observationen ser vi då våglängden hos objektet som den borde vara eftersom vi i det ögonblicket inte har någon relativ hastighet. I den tredje observationen ser vi ingenting för att våglängden nu är utsträckt så långt att den ligger utanför synligt ljus.

För att ta reda på objektets hastighet behöver vi göra följande steg:

1. Lösa ut hastigheten ur formeln för relativistisk doppler
2. Beräkna hastigheten med hjälp av de två första observationerna
3. Kontrollera vårt svar genom att se så den tredje observationen stämmer överens med vårt svar

2.2 Genomförande

Formeln för relativistisk doppler för objekt som rör sig motvarandra är

$$f = f_0\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

Där f är den observerade frekvensen, f_0 är den sända frekvensen, v är den relativa hastigheten och c är ljusets hastighet. Nu löser vi ut v.

$$\begin{aligned}
f^2 &= f_0^2\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \\
f^2(1-\frac{v}{c}) &= f_0^2(1+\frac{v}{c}) \\
f^2 - f^2\frac{v}{c} &= f_0^2 + f_0^2\frac{v}{c} \\
f^2 - f_0^2 &= f^2\frac{v}{c} + f_0^2\frac{v}{c} \\
f^2 - f_0^2 &= v\frac{f^2+f_0^2}{c} \\
v &= \frac{f^2-f_0^2}{f^2+f_0^2}c
\end{aligned}$$

Sedan kan vi sätta in värdena från observationerna $f = \frac{c}{550\text{nm}}$, $f_0 = \frac{c}{720\text{nm}}$. Det ger $v = 0.26$c

Då kan vi dubbelkolla vårt svar genom att kolla om den tredje observationen stämmer överens med vårt svar. Vi vet att våglängden är utsträckt så långt att den ligger utanför synligt ljus. Detta betyder att våglängden är större än 720 nm. Vi kan räkna ut våglängden med hjälp av relativistisk doppler och se att den stämmer överens med vårt svar.

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

Sätter vi in f_0 och v från förra beräkningen får vi $f = \frac{1}{1226}$ detta ligger långt utanför det synliga spektrat.

2.3 Rimlighet

Ja svaret är rimligt, hastigheten är under ljusets hastighet och den tredje observationen stämmer överens med vårt svar.

Dimensionen i uttrycket för hastigheten stämmer då vi har frekvens över frekvens vilket blir dimensionslöst multiplicerat med en hastighet så den slutgiltiga dimensionen blir hastighet.