Uppsala University

Introduktion till beräkningsvetenskap

Projekt 1

Undersökning av numeriska metoder för ODE

Author:
Anton Lindbro

May 5, 2024

Abstract

I denna rapporten så undersöks numeriska metoder för lösning av ODE. Detta görs genom lösning av ODEn för en pendel och de numeriska resultaten jämförs men en analytisk lösning för att verifiera nogrannhetsgrader. Allt detta görs med hjälp av python.

Contents

1 Inledning

Numeriska metoder för lösning av ODE är mycket användbara då en stor majoritet av ODE inte går att lösa analytiskt. I detta projektet har en metod som kallas runge-kutta 4(RK4) implementerats i python och de givna lösningarna har utvärderats. RK4 är en industri standard som funkar för en majoritet av ODE system och det var därför denna valdes. Projektet har bestått av 4 deluppgifter och genomförande och resultat för respektive beskrivs nedan.

2 Genomförande

Här följer beskrivning av genomförande för samtliga deluppgifter i projektet.

2.1 Deluppgift 1

För att kunna använda de analytiska lösningarna givna i projektbeskrivningen så behövde tre konstanter beräknas. Detta gjordes genom att sätta in den givna begynnelse datan och lösa för de sökta konstanterna. Med de givna begynnelse värdedna kan vi bilda ett ekvations system för de båda analytiska lösningarna englit följande:

$$0 = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{\gamma \omega_0^2 \cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{1}$$

$$0 = -c_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega \gamma \omega_0^2 \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{2}$$

Sätter vi in de givna begynnelse vilkoren kan vi simplifiera till förljande

$$c_1 = \frac{\gamma \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{3}$$

$$c_2 \omega_0 = 0 \tag{4}$$

Eftersom $\omega_0 \neq 0$ så ser vi att $c_2 = 0$.

För att ta fram d_1 följs samma procedur och $d_1 = 0$.

Respektive funktion implementeras i python och en ifsats används för att se vilken av de två analytiska lösningarna som bör användas för en given mängd parametrar.

2.2 Deluppgift 2

RK4 implementeras i python med hjälp av följande kod.

```
def RK4(func, initvalues, T, N, w, w_0, y):
k = T/N
t = np.linspace(0,T,N+1)
u = np.zeros((N+1,2),dtype = float)
u[0,:] = initvalues

for n in range(N):
    w1=func(t[n], u[n,:], w_0, w, y)
    w2=func(t[n] + k/2, u[n,:] + k/2 * w1, w_0, w, y)
    w3=func(t[n] + k/2, u[n,:] + k/2 * w2, w_0, w, y)
    w4=func(t[n+1], u[n,:] + k * w3, w_0, w, y)
    u[n+1,:] = u[n,:] + k/6*(w1 + 2*w2 + 2*w3 + w4)

return u, t
```

Eftersom RK4 bara kan användas för att lösa förstaordningens ODE så behöver vi dela upp den givna ODE i ett system av förstaordningens ekvationer.

$$\ddot{\theta} = -\omega_0 \theta + \gamma \omega_0^2 \cos(\omega t) \tag{5}$$

Nya variabler införs $a = \theta$ och $b = \dot{theta}$

$$\dot{a} = \dot{\theta} = b \tag{6}$$
$$\dot{b} = \ddot{\theta} = -\omega_0 a + \gamma \omega_0^2 \cos(\omega t) \tag{7}$$

Och då har vi ett system av förstaordningens ekvationer som kan lösas med RK4.

Genom att sedan jämföra resultatet från RK4 med de analytiska lösningarna erhölls ett fel som sedan utvärderades.

Noggranhets-ordningen av RK4 verifierades genom att beräkna den för de givna resultaten. Noggranhets-ordningen q erhölls enligt följande formel.

$$q(2N) = \log_2\left(\frac{e_N}{e_{2N}}\right) \tag{8}$$

Där e_N är felet vid N stycken tidsteg.

2.3 Deluppgift 3

Här undersöktes den numeriska stabiliteten hos RK4. Detta görs genom att undersöka hur RK4 presterar vid färre och färre tidsteg. Detta görs för en given mängd parametrar. RK1 testas också mycket kort på liknande sätt.

2.4 Deluppgift 4

Här används istället SciPys inbyggda ODE lösaren för att undersöka kaos. I denna deluppgift löses ekvationen

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin(\theta) - 2\beta\dot{\theta} + \gamma\omega_0^2\cos(\omega t) \tag{9}$$

även denna behövs delas upp, med samma variabler som användes för att delaupp ekv.5 får vi systemet

$$\dot{a} = b \tag{10}$$

$$\dot{b} = -\omega_0^2\sin(a) - 2\beta\dot{b} + \gamma\omega_0^2\cos(\omega t) \tag{11}$$

Sedan undersöks stabiliteten i RK45 för ovan system genom att variera γ och undersöka konsekvenserna.

3 Resultat

3.1 Deluppgift 1

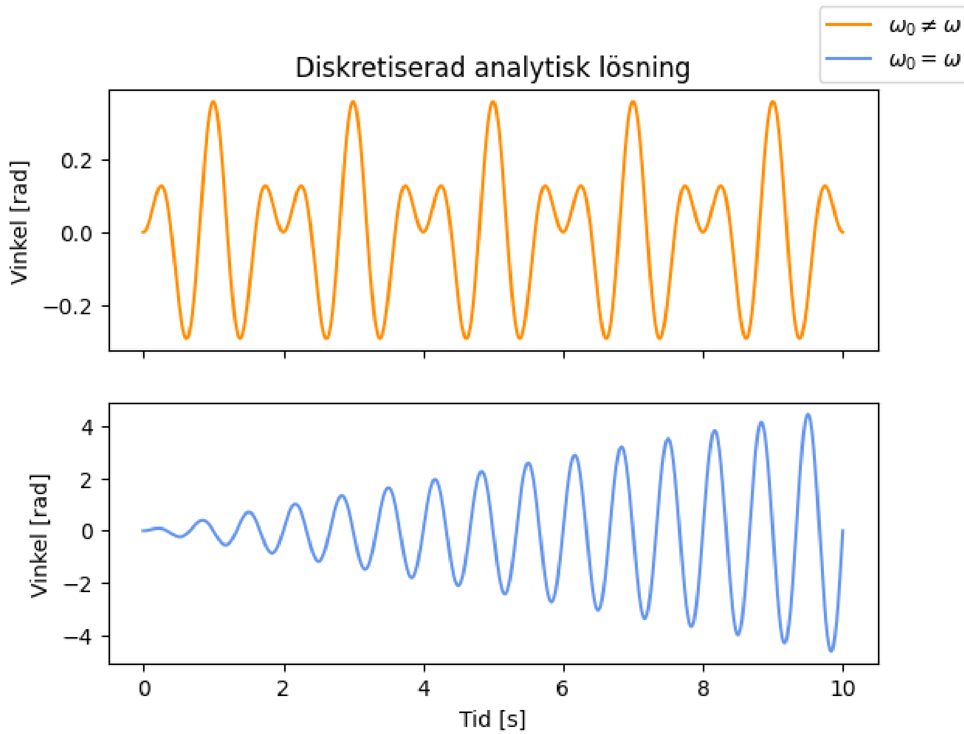

Figure 1: Graf över resultatet för de två olika i uppgiften givna analytiska lösningarna.

De parametrarna som användes för att framställan fig.1 var för den översta grafen

$$\omega = 2\pi$$
$$\omega_0 = 3\pi$$
$$\gamma = 0,1$$

och för den nedre grafen

$$\omega = 3\pi$$
$$\omega_0 = 3\pi$$
$$\gamma = 0,1$$

Båda är beräknade fram till tiden $T = 10$ med 1000 tidsteg.

3.2 Deluppgift 2

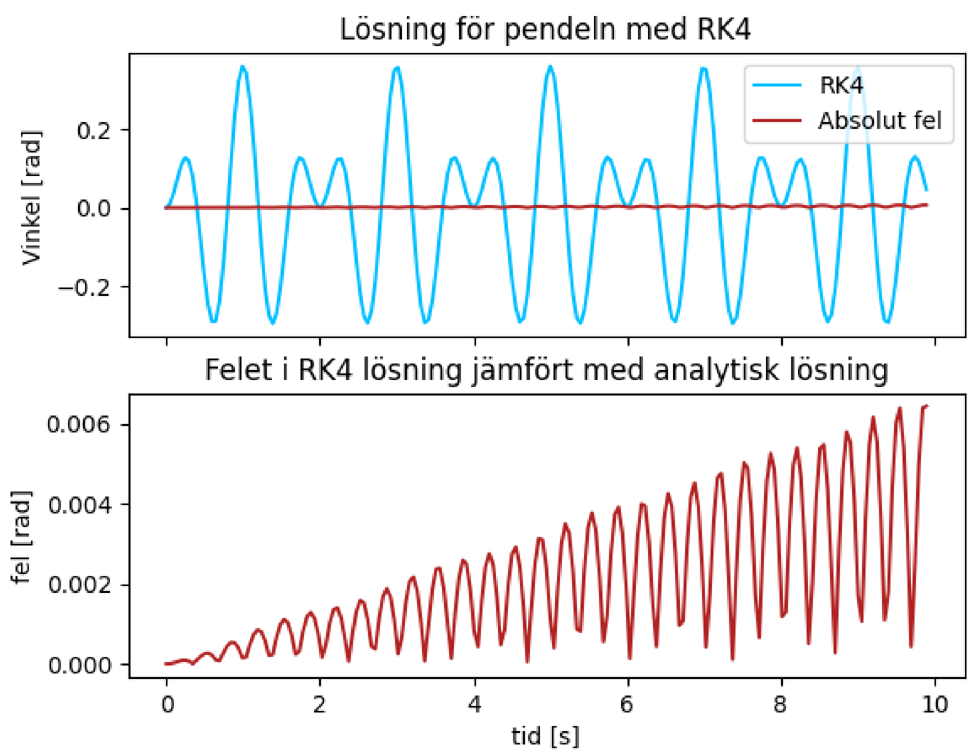

Figure 2: Lösning av ekv.5 med hjälp av RK4 samt det numeriska felet jämfört med den analytiska lösningen

Table 1: Fel och noggranhets-ordninga vid olika antal tidsteg

N	e_N	$q(N)$
200	$6,44 \cdot 10^{-3}$	
400	$3,77 \cdot 10^{-4}$	4,09
800	$2,24 \cdot 10^{-5}$	4,07

Figur 2 och tabell 1 har framstälts med parametrarna

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi \\ \omega_0 &= 3\pi \\ \gamma &= 0,1 \\ T &= 9,9 \\ N &= 200 \end{aligned}$$

3.3 Deluppgift 3

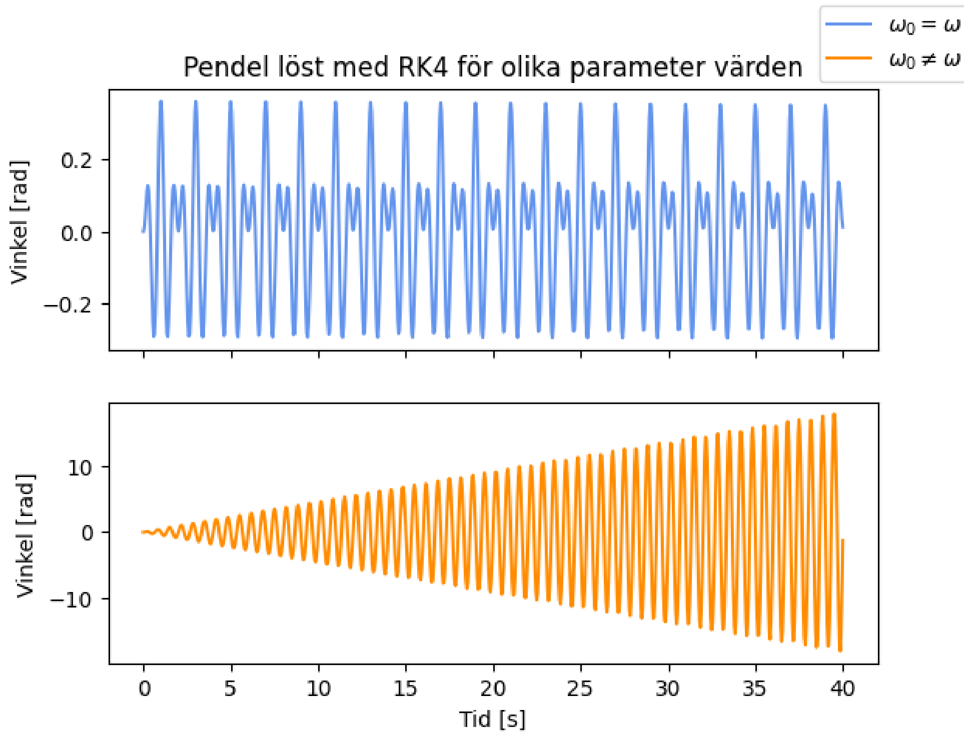

Figure 3: RK4 resultat för två olika mängder parametrar.

För att erhålla graferna i figur 3 användes parametrarna

$\omega = 2\pi$	$\omega = 3\pi$
$\omega_0 = 3\pi$	$\omega_0 = 3\pi$
$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,1$
$T = 40$	$T = 40$
$N = 800$	$N = 800$
Övre graf	Undre graf

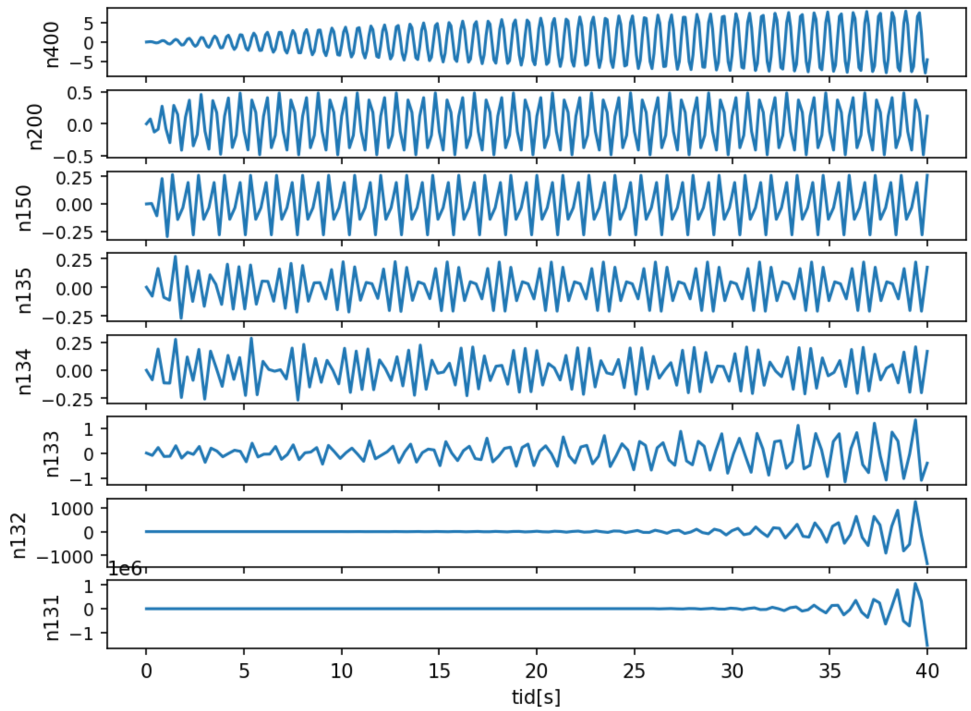

Figure 4: RK4 resultat för en mängd olika antal tidsteg.

Ovan grafer har alla samma inparametrar som nedregrafen i figur 3 och antalet tidsteg för varje graf syns till vänster i figuren.

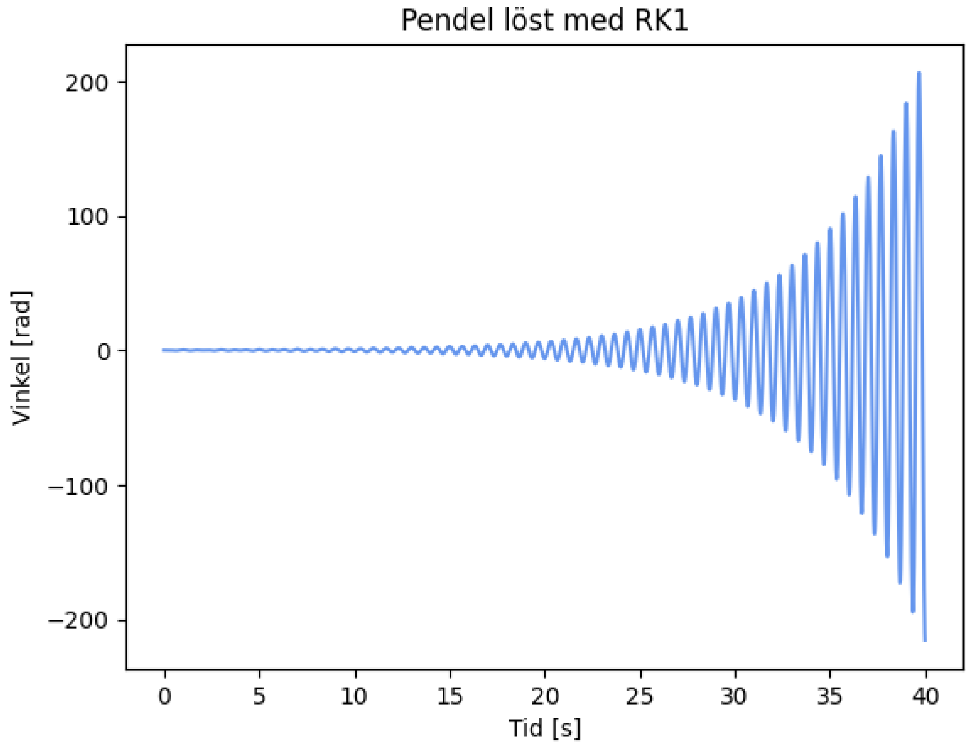

Figure 5: ODE löst med RK1

Figur 5 erhölls med in parametrar

$$\omega = 2\pi$$
$$\omega_0 = 3\pi$$
$$\gamma = 0,1$$
$$T = 40$$
$$N = 10\ 000$$

3.4 Deluppgift 4

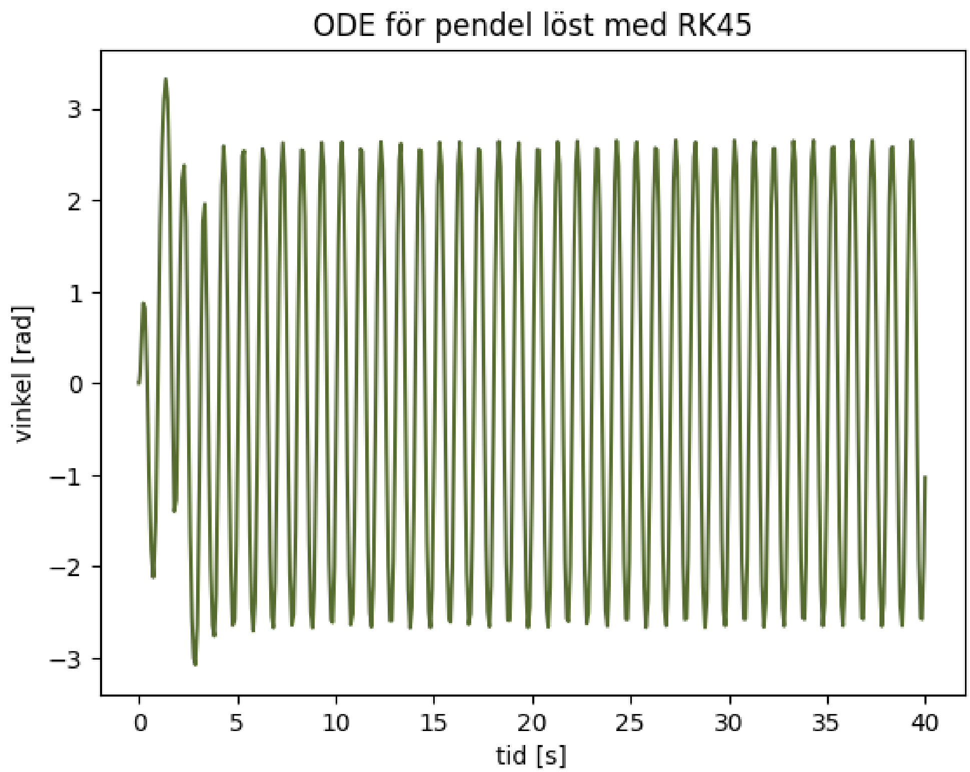

Figure 6

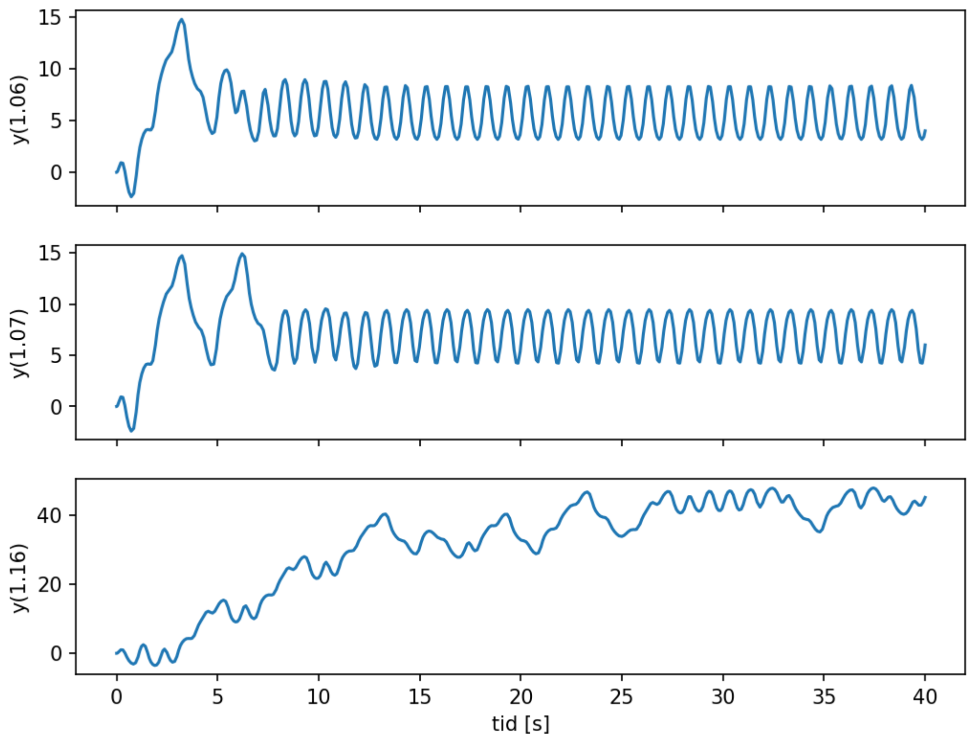

Figure 7

4 Diskussion

Det som resultaten i denna rapporten påskiner är vikten av att kontrollera sina numeriska lösningar och inte bara lita blint på dessa. I detta fallet var det mycket enkelt att kontrollera då vi hade analytiska lösningar för ekvationen dock så brukar man ofta ha någon idé om hur ett fysikaliskt system bör bete sig antingen genom observationer eller intuition. Så att undersöka och utvärdera de resultat en numerisk lösnings metod ger är av största vikt för bra vetenskap. Ett steg i processen kan vara att välja sin lösningsmetod mycket noga. Till exempel så visar figur 5 att trots mycket små tidsteg så är euler framåt inte en lämplig lösningsmetod för denna ekvationen. Det beror på att den ODE som löses i denna rapport ligger utanför stabilitetets området för euler framåt.