HA 1: CAD/CAE

Prof. Dr.-Ing. Christian Wetzel

Sommersemester 2022

Verfasser:	Adrian Huber (Matrikel-Nr. 187805)
Fakultät:	Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Studiengang:	Maschinenbau
Semester:	MA4
Lehrveranstaltung:	CAD/CAE
Abgabetermin:	25.05.2022

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabenstellung Teilaufgabe 1

Im ersten Teil der Hausarbeit wird die maximal vorkommenden Torsions- und Drehmomente M_T einer Antriebswelle an einer Kreissäge hergeleitet und simuliert. Im Rahmen der Vorlesungen werden einige Annahmen für das System definiert. Anhand dieser Rahmenbedingungen soll anschließend untersucht werden, wie die Welle im schlimmsten Fall (bei maximaler Belastung) auszulegen ist. Dabei wird das Lehrsche Dämpfungsmaß ($D = 0, \ldots 0{,}1$) variiert.

Des Weiteren soll das Verhältnis α angegeben werden, welches den Quotienten aus dem maximal auftretenden Drehmoment M_T und des statischen Belastungsmomentes M_0 im eingeschwungenen Zustand darstellt.

1.1. Modellbildung des Systems

Im Rahmen der Vorlesung wurde ein System für die Modellbildung der Kreissäge definiert.

Hierfür werden zunächst einige Annahmen getroffen. Die Kreissäge wird mit einer konstanten Drehzahl belastet, die Welle selbst kann als Drehfeder mit einer Torsionssteifigkeit c_t angenommen werden. Das Sägeblatt wird als starre Scheibe mit einem Trägheitsmoment J_s betrachtet:

$$J_s = \frac{1}{2} * m_s * \left(\frac{d_s}{2}\right)^2 \tag{1}$$

$m_s =$ Masse der Scheibe

$d_s =$ Durchmesser der Scheibe

Das System lässt sich modelliert wie in der folgenden Abbildung 1 darstellen:

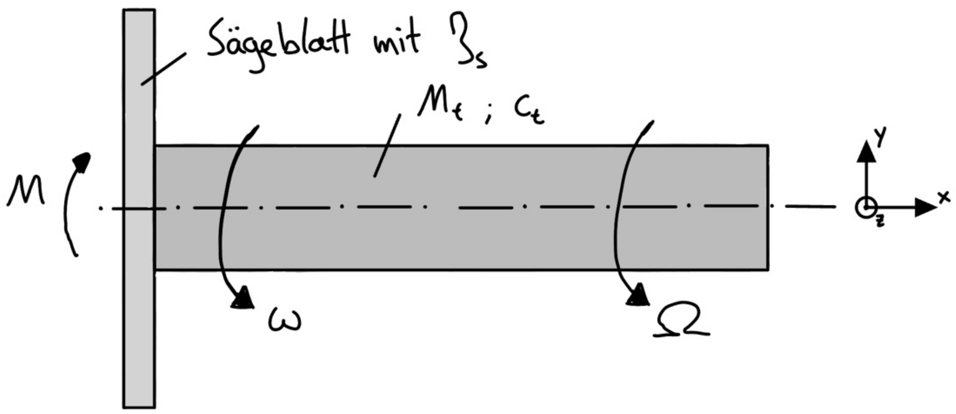

Abbildung 1: Modell der Kreissägewelle

Durch die konstante Drehzahl des Motors wirkt eine konstante Antriebswinkelgeschwindigkeit Ω auf die Welle. Durch das zusägende Objekt wird zusätzlich ein plötzlich auftretendes Lastmoment M aufgebracht, sodass die Welle zu einer Schwingung angeregt wird.

Diese Schwingung ist darauf zurückzuführen, dass die Welle sich wie eine Drehfeder verhält und somit „Träge“ auf die Belastung reagiert, sodass sich die Winkelgeschwindigkeit ω der Welle ergibt (Ableitung des zurückgelegten Winkels φ). Durch das „federn“ ergibt sich ein Verdrehwinkel im Inneren der Welle, welcher durch $\Delta\varphi$ beschrieben wird. Somit ergibt sich für das System:

$$\varphi = \Omega * \mathrm{t} + \Delta\varphi \tag{2}$$
$$\omega = \dot{\varphi} = \Omega + \dot{\Delta\varphi} \tag{3}$$
$$\ddot{\varphi} = \Delta\ddot{\varphi} \tag{4}$$

Nun betrachten wir lediglich die wirkenden Kräfte und Momente auf das Sägeblatt:

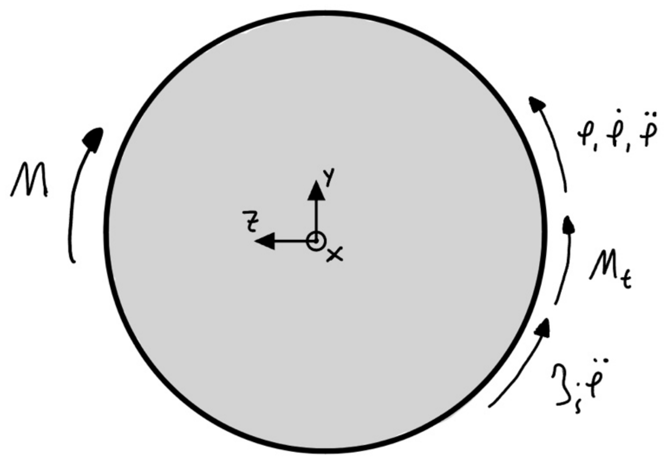

Abbildung 2: Freischnitt des Sägeblattes

Hierbei entspricht das auftretende Torsionsmoment:

$$M_t = c_t * \Delta\varphi \tag{5}$$

Stell man nun die Momentenbilanz der Scheibe auf, ergibt sich :

$$\sum M_x = M - c_t * \Delta\varphi - \mathrm{J_s} * \Delta\ddot{\varphi} = 0 \tag{6}$$

$$\rightarrow\ J_s * \Delta\ddot{\varphi} + c_t * \Delta\varphi = \mathrm{M}$$

Dies entspricht nun der Bewegungsgleichung des Systems im ungedämpften Zustand, weshalb im nächsten Schritt eine Dämpfung von:

$$M_d = d_t * \dot{\Delta\varphi} \tag{7}$$

eingeführt werden muss und sich die gedämpfte Bewegungsgleichung ergibt:

$$\rightarrow\ J_s * \Delta\ddot{\varphi} + c_t * \Delta\varphi + d_t * \dot{\Delta\varphi} = \mathrm{M} \tag{8}$$

Um diese Schwingungsgleichung zu lösen, wird sie normiert. Dazu wird zuerst durch $\mathrm{J_s}$ geteilt:

$$\Delta\ddot{\varphi} + \frac{d_s}{J_s} * \Delta\dot{\varphi} + \frac{c_t}{J_s} * \Delta\varphi = \frac{M}{J_s} \tag{9}$$

Anschließend wird das Lehrsche Dämpfungsmaß D und der Eigenkreisfrequenz ω_0 eingeführt:

$$\Delta\ddot{\varphi} + 2D * \omega_0 * \Delta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \; * \Delta\varphi = -\frac{M}{J_s} \tag{10}$$

Folgende Anfangsbedingungen werden angenommen:

$$\Delta\varphi(t = 0) = 0$$

$$\Delta\dot{\varphi}(t = 0) = 0$$

1.2. Bestimmung von α

Mithilfe der internen MATLAB Funktion „ode45" können nummerische Gleichungen einfach gelöst werden, unter anderem auch die oben hergeleitete Differentialgleichung. Hierfür benötigt diese vorab die geforderten relativen und absoluten Genauigkeiten/Abweichungen. Zudem wird eine Funktion definiert, welche die rechte Seite des Differentialgleichung Systems definiert (vgl. rhs_11).

Um das Ergebnis auf Plausibilität zu prüfen, wird zusätzlich eine Konvergenzanalyse durchgeführt. Hierbei wird die Schrittweite des nummerischen Zeitschrittes um die Hälfte verringert und geprüft, ob die Ergebnisse gegeneinander konvergieren.

Für die Lösung mit MATLAB werden folgende Zustandskoordinaten eingeführt:

$$\text{Weg: } \mathrm{q} \; = \; \Delta\varphi \tag{11}$$

$$\text{Geschwindigkeit } \mathrm{v} \; = \; \Delta\dot{\varphi} \tag{12}$$

Durch die beschriebenen Zusammenhänge in (3) und (4) entspricht somit die Ableitung von dem Weg q der Winkelgeschwindigkeit, die Ableitung von v entspricht der Winkelbeschleunigung.

Nun kann die Schwingungsgleichung in (10) nach $\Delta\ddot{\varphi}$ umgestellt werden:

$$\dot{\mathrm{v}} \; = \Delta\ddot{\varphi} = \text{-}2D * \omega_0 * \Delta\mathrm{v} \text{ - } \omega_0^2 \; * \Delta\varphi + \frac{M}{J_s} \tag{13}$$

Diese Gleichung wird nun in Form einer Matrix in MATLAB eingegeben:

$$\Delta\dot{\varphi} \; = \; \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{q}} \\ \dot{\mathrm{v}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Für das statische Lastmoment vereinfacht sich diese Gleichung und kann wie folgt nach $\Delta\varphi$ umgestellt werden:

$$\Delta\varphi_{\text{statisch}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{J_s} * \omega_0^2} \tag{15}$$

Nun kann der gesuchte Wert α bestimmt werden. Das Verhältnis α beschreibt den Quotienten aus dem Auftretenden maximalen Lastenmoment ($\mathrm{M_T}$, dynamisch) und dem Lastenmoment im eingeschwungenen Zustand ($\mathrm{M_0}$, statisch).

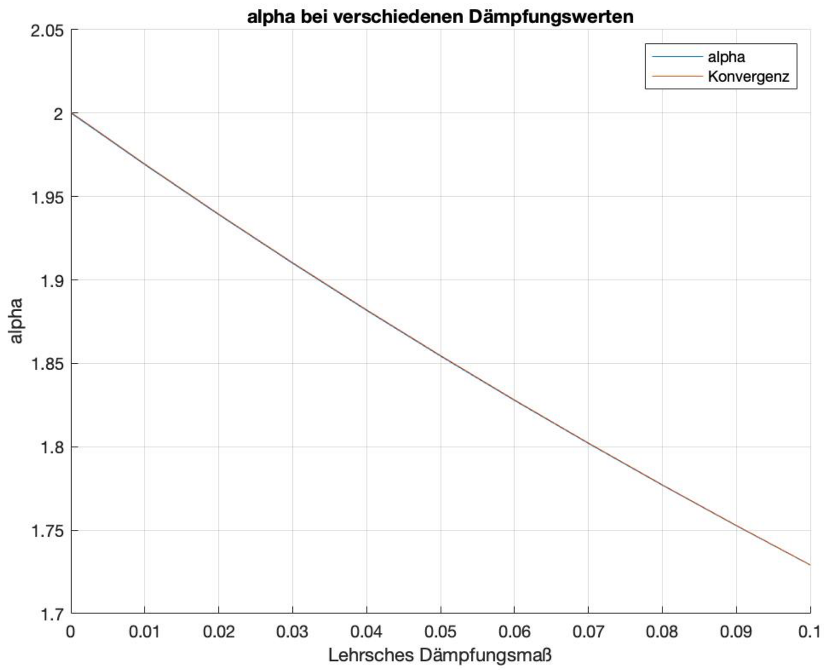

Abbildung 3: Auswertung von α bei verschiedenen Dämpfungswerten

1.3. Auswertung

Im schlimmsten Fall beträgt α = 2, das Lehrsche Dämpfungsmaß entspricht 0 (ohne Dämpfung). Die durchgeführte Konvergenzprüfung ist ebenfalls in Diagramm 1 dargestellt, die Funktion von α und deren Konvergenz sind nicht zu unterscheiden. Eine Auswertung der Wertetabellen ergab, dass sich die dargestellten Werte erst in der vierten Nachkommastelle unterscheiden. Somit haben wir bei unseren Berechnungen eine sehr hohe Genauigkeit.

Betrachtet man das MATLAB-Skript, scheint das Ergebnis zunächst nicht allgemeingültig zu sein, da viele Parameter frei gewählt wurden. Diese werden jedoch lediglich dafür benötigt, dass die ode45-Funktion eine nummerische Lösung ermitteln kann. Eine analytische Lösung macht hingegen deutlich, dass frei gewählte Parameter, wie Torsionssteifigkeit, Massenträgheitsmoment und äußeres Moment der Belastung, im Laufe des analytischen Lösungsprozesses wegfallen. Letztendlich ist lediglich die Dämpfung von Bedeutung.

2. Aufgabenstellung Teilaufgabe 2

In der zweiten Aufgabe der Hausarbeit wird die Vertikaldynamik eines Fahrrades mit Federgabel bei Überfahrt einer sinusförmigen Wegstrecke simuliert. Hierbei ist besonders das Verhalten der Federgabel (in vertikaler Richtung) von Bedeutung. Die Federgabel wird für die Berechnung als ein Feder-Dämpfer-System angenommen.

Die Schlechtwegstrecke wird mit folgender Funktion Approximiert:

$$y(x) = y_0 \sin(2\pi\lambda x) \qquad (16)$$

Die Amplitude wird mit $y_0 = 0{,}005\ m$ und die Anregung mit $\lambda = 0{,}275\frac{1}{m}$ festgelegt.

Die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz der Federgabel entspricht $f_0 = 2{,}7\ Hz$, die Masse m, die auf der Gabel abgestützt wird ist hierbei $m = 30\ kg$ und das Lehrsche Dämpfungsmaß ist $D = 0{,}1$.

Die Aufgabenstellung 2 teilt sich in Teilaufgaben auf:

1. Unter Berücksichtigung der Fußpunktanregung durch die Schlechtwegstrecke soll eine Bewegungsgleichung des Systems hergeleitet werden. Hierfür wird die Anregung der Unebenheiten in eine Funktion der konstanten Fahrgeschwindigkeit transformiert und als Funktion der Zeit definiert.
2. Dieses System soll in MatLab simuliert und nachvollziehbar kommentiert werden
3. Die Konstante Fahrgeschwindigkeit $v_0 = 1{,}2{,}\ldots{,}50\frac{km}{h}$ wird variiert und die Antworten des Fahrrads im eingeschwungenen Zustand werden mithilfe einer Schleifen-Funktion ermittelt. Hieraus lässt sich der Amplitudenfrequenzgang plotten.
4. Für variierende Fahrgeschwindigkeiten soll nun die Aufstandskraft des Rades $F_R(t)$ auf die Straße ermittelt und die jeweils minimale Kraft $F_{R,min}$ als Funktion der Fahrgeschwindigkeit geplottet werden. Des Weiteren wird durch Variation der Wegamplituden der Punkt ermittelt, bei dem das Rad (bei der jeweiligen Geschwindigkeit) vom Boden abhebt.
5. Es wird nun angenommen, dass das Fahrrad konstant (von 0 auf 50 km/h) beschleunigt. Hierfür sollen gewählte Zeitintervalle simuliert werden. Analog zur Teilaufgabe 3 soll der Amplitudenfrequenzgang ermittelt, geplottet und mit der Stationären Lösung verglichen werden. Es bietet sich an, diese beiden Lösungen in einem gemeinsamen Diagramm darzustellen. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Beschleunigte Bewegung als Funktion der Fahrgeschwindigkeit angegeben wird.

2.1. Bewegungsgleichung

Die Federgabel wird als Einmassenschwinger betrachtet, die Masse bewegt sich über dem Feder-Dämpfer-System auf der Straße.

Um die Bewegungsgleichung herzuleiten, führen wir zwei verschiedene Koordinatensysteme ein (System bewegt sich nicht parallel zur Schlechtwegstrecke). Die Bewegung wird zunächst mit konstanter Geschwindigkeit betrachtet, später mit konstanter Beschleunigung.

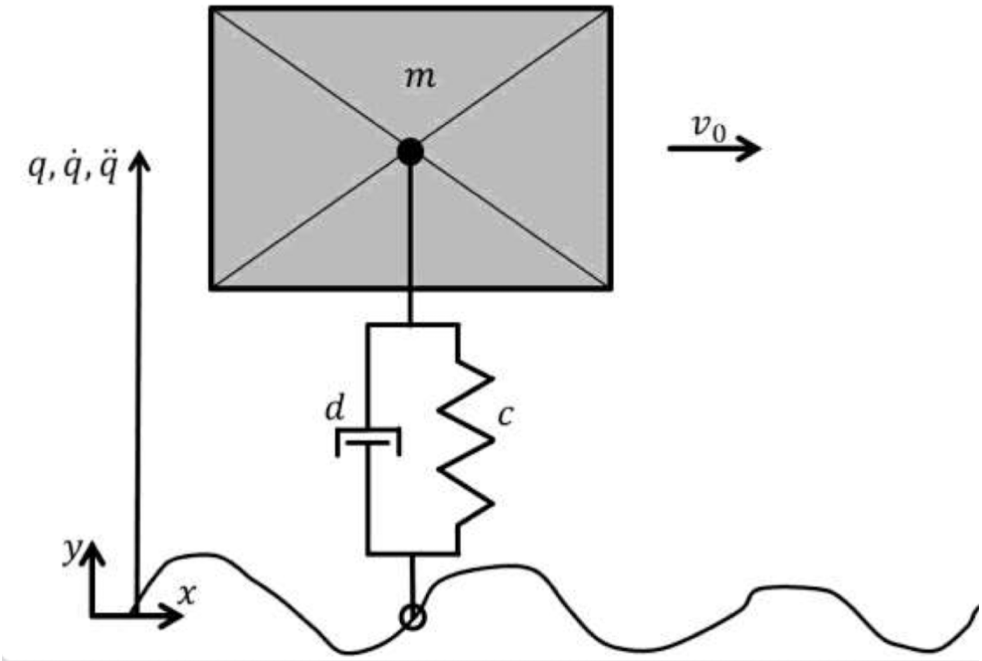

Abbildung 4: Skizze der Vertikaldynamik eines Fahrrads mit Federgabel

Nun wird ausschließlich die Masse betrachtet, d.h. die Masse wird freigeschnitten und alle wirkende Kräfte werden angebracht:

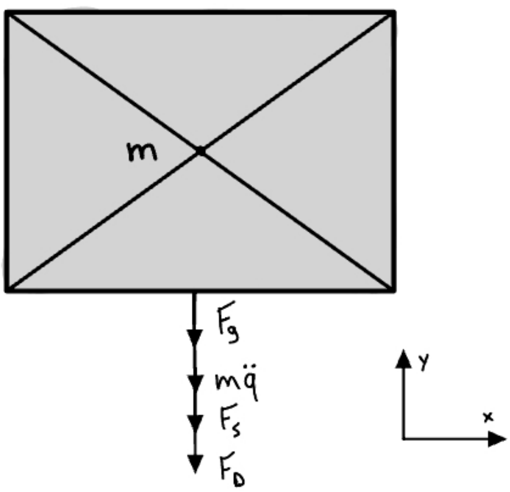

Abbildung 5: Freischnitt der Masse m

Wirkende Kräfte auf die Masse wie Gewichtskraft, Trägheitskraft oder Federkräfte können auch wie folgt beschrieben werden:

$$\mathrm{F_G} = \mathrm{m} * \mathrm{g} \tag{17}$$

$$\mathrm{F_S} = c * (\mathrm{q_s} - y) \tag{18}$$

$$\mathrm{F_D} = d(\dot{q} - \dot{y}) \tag{19}$$

Nach dem Prinzip von d'Alembert lässt sich folgende Gleichgewichtsbedingung aufstellen:

$$-m\ddot{q} - d(\dot{q} - \dot{y}) - c(\mathrm{q_s} - y) - mg = 0 \tag{20}$$

Für die Anfangsbedingungen (statische Ruhelage) gilt:

$$\mathrm{y}(t = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathrm{y}}(\mathrm{t} = 0) = \dot{\mathrm{q}} = 0 \tag{21}$$

Damit setzt sich die statische Auslenkung zusammen aus:

$$q_{\text{statisch}} = \frac{\mathrm{m} * \mathrm{g}}{\mathrm{c}} \qquad (\rightarrow \mathrm{g} = \frac{\mathrm{c} * \mathrm{q}_{\text{statisch}}}{\mathrm{m}}) \tag{22}$$

Wird nun die Auslenkung in statischen und dynamischen Anteil unterteilt,

$$\mathrm{q_s} = \mathrm{q}_{\text{statisch}} - \mathrm{y} \tag{23}$$

lässt sich in der Schwingungsgleichung (20) die statische Auslenkung und die Gewichtskraft F_G raus-kürzen. Anschließend wird das System normiert durch:

$$\frac{d}{m} = 2Dw_0 \quad \text{und} \quad \frac{c}{m} = w_0^2 \tag{24}$$

Nun wird nach $\ddot{q}$ aufgelöst:

$$\ddot{q} = -2Dw_0(\dot{\mathrm{q}} - \dot{\mathrm{y}}) - w_0^2(q - \mathrm{y}) \tag{25}$$

Abschließend wird die Ableitung von y gebildet. In der gegebenen Form ist y abhängig von der horizontalen Wegstrecke x, benötigt wird aber eine Abhängigkeit zu der Zeit t. Dafür wird die Wegstrecke x wie folgt definiert:

$$\mathrm{x} = \mathrm{v_0} * \mathrm{t} + \frac{1}{2} * \mathrm{a} * \mathrm{t}^2 \tag{26}$$

$$\rightarrow \mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathrm{y_0} * \sin(2 * \pi * \lambda * (\mathrm{v_0} * \mathrm{t} + \frac{1}{2} * \mathrm{a} * \mathrm{t}^2) \tag{27}$$

$$\rightarrow \dot{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) = 2 * \pi * \lambda * (\mathrm{v_0} + \mathrm{a} * \mathrm{t}) * \mathrm{y_0} * \cos(2 * \pi * \lambda * (\mathrm{v_0} * \mathrm{t} + \frac{1}{2} * \mathrm{a} * \mathrm{t}^2) \tag{28}$$

Die gesuchte Bewegungsgleichung wurde anschließend in MATLAB bestimmt:

$$\ddot{q} = w_0^2 * \mathrm{y_0} * \sin(2*\pi*\lambda* ((\mathrm{v_0}* \mathrm{t} + \frac{1}{2}*\mathrm{a}*\mathrm{t}^2) - w_0^2*\mathrm{q} - 2*D*w_0*\dot{\mathrm{q}} \tag{29}$$
$$+ 4*\mathrm{D}*\mathrm{w_0}*\pi*\lambda*\mathrm{y_0}*(\mathrm{v_0} + \mathrm{a}*\mathrm{t})*\cos(2*\pi*\lambda*(\mathrm{v_0}*\mathrm{t} + \frac{1}{2}*\mathrm{a}*\mathrm{t}^2)$$

2.2. Simulation

Für die Simulation des Systems wird erneut die interne MATLAB Funktion ode45 verwendet. Hierfür muss die Simulationsdauer T und der Zeitschritt h für die nummerische Schrittweite definiert werden. Zudem werden die Anfangsbedingungen festgelegt und die rechte Seite der Differentialgleichung definiert (vgl. rhs_122).

Analog zur Aufgabe 1 wird ebenso eine Konvergenzanalyse durchgeführt.

Um die Plausibilität der Ergebnisse weiter prüfen zu können wird die Auslenkung und die Auslenkungsgeschwindigkeit über die Zeit in einem Schaubild aufgetragen:

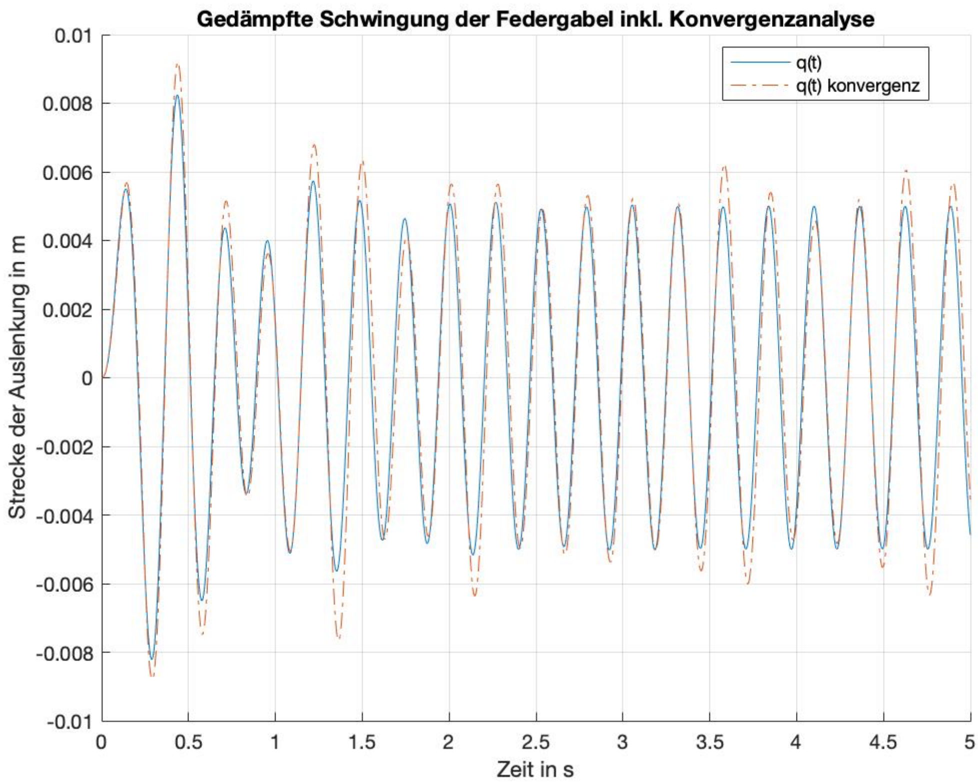

Abbildung 3: Schwingung der Federgabel über die Zeit inkl. Konvergenzanalyse

Nach einem kurzen Einschwingvorgang stellt sich eine sinusförmige Schwingung ein, die sich somit den Unebenheiten des Weges anpasst. Die anfänglichen Ausschläge lassen sich hierbei darauf zurückführen, dass die Anfangsbedingungen mit null angegeben wurden und das System träge auf die plötzlich auftretende Belastung reagiert. Anschließend ist das System eingeschwungen.

Die Konvergenzanalyse (gestrichelte Linie) zeigt eine geringe Abweichung bei einer absoluten Toleranz von 10^{-2}. Bei sinkender Toleranz konvergiert das Ergebnis jedoch immer weiter, weswegen das Ergebnis als ausreichend genau angenommen werden kann.

2.3. Amplitudenfrequenzgang

Um die Variation der konstanten Fahrgeschwindigkeiten zu realisieren, wird für die definierte Schrittgröße zwischen 1 und 50 km/h die maximale Amplitude berechnet. Zudem ist die Konvergenzananlyse definiert, die analog den gleichen Rechenweg mit feineren Fehlertoleranzen berechnet.

Zur Veranschaulichung des Ergebnisses wird der Amplitudenfrequenzgang als Funktion der Fahrgeschwindigkeit in einem Diagramm abgebildet:

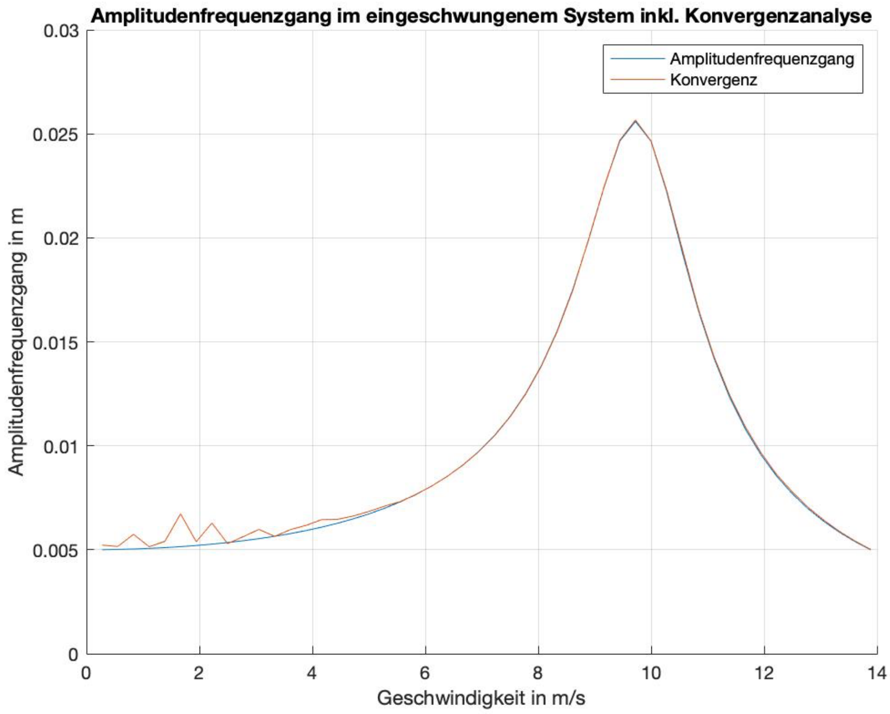

Abbildung 4: Amplitudenfrequenzgang inkl. Konvergenzanalyse

Auffällig ist, dass das System bei 9,7 m/s (35 km/h) einen Hochpunkt besitzt. In den folgenden Aufgabenteilen ist diese Geschwindigkeit ebenfalls als markanter Punkt abzeichnet. Die orangene Funktion zeigt die Konvergenzprüfung mit einer absoluten Toleranz von 10^{-3}. Es ist deutlich zu erkennen das bei fortlaufender Geschwindigkeit die Lösungen konvergieren und die Linien identisch sind. Das spricht für eine hohe Genauigkeit der Modellbildung.

2.4. Aufstandskräfte

Die Aufstandskraft $F_R(t)$ bezeichnet jene Kraft, die das Rad auf die Straße ausübt. Diese setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft F_G , der Federkraft F_S und der Dämpferkraft F_D.

Somit setzt sich die Aufstandskraft wie folgt zusammen:

$$F_R(t) = \mathrm{F_G} - F_\mathrm{S}(t) - F_\mathrm{D}(t) \tag{30}$$

Für die beschriebenen Kräfte ist folgende Definition noch gültig:

$$\mathrm{F_G} = \mathrm{m} * \mathrm{g} \tag{31}$$

$$\mathrm{F_S} = c * (\mathrm{q_s} - y) \tag{32}$$

$$\mathrm{F_D} = d(\dot{q} - \dot{y}) \tag{33}$$

Durch eine Umformung der oben definierten Normierung, kann die Aufstandskraft wie folgt berechnet werden:

$$\mathrm{d} = 2^*\mathrm{m}^*D^*w_0 \quad \text{und} \quad \mathrm{c} = w_0^2 * \mathrm{m} \tag{34}$$

$$F_R(t) = \mathrm{m}^*\mathrm{g} - w_0^2 * \mathrm{m}^*(\mathrm{q_s} - y) - 2^*\mathrm{m}^*D^*w_0^*(\dot{q} - \dot{y}) \tag{35}$$

Für einen frei gewählten Zeitbereich von 5 Sekunden werden nun die maximalen Werte der Aufstands-kraft bestimmt. Dabei spielt der genaue Zeitbereich keine Rolle, das System muss nur eingeschwungen sein. Zudem wird eine Konvergenzanalyse durchgeführt.

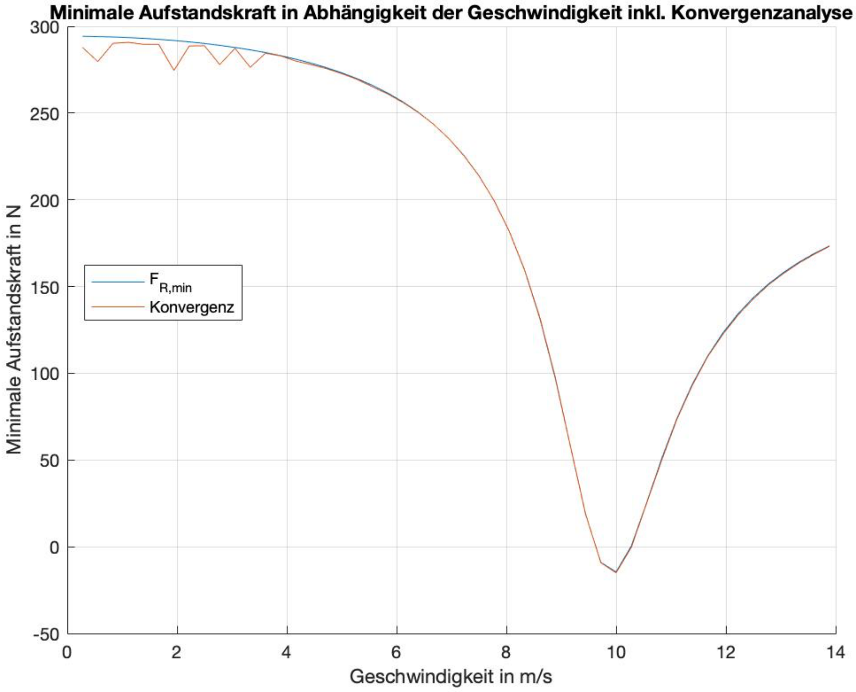

Abbildung 5: Aufstandskraft inkl. Konvergenzanalyse

Wie bereits in Kapitel 2.3 angekündigt, ist auch hier ungefähr bei 10 m/s (36 km/h) ein Extremwert zu erkennen. Die Aufstandskraft besitzt bei dieser Geschwindigkeit einen Tiefpunkt.

Die Aufstandskraft geht kurzzeitig in den negativen Bereich. Interpretieren lässt sich das durch ein kurzes Abheben des Vorderrades.

Die Konvergenz ist auch hier im eingeschwungenen Zustand nicht mehr von der Aufstandskraft zu unterscheiden, was auf eine gute Modellierung hindeutet.

2.5. Konstante Beschleunigung

In der letzten Aufgabe wird nun die horizontale Bewegung verändert. Anstatt einer konstanten Geschwindigkeit wird nun eine konstante Beschleunigung angenommen. In MATLAB werden gleich mehrere Beschleunigungen simuliert.

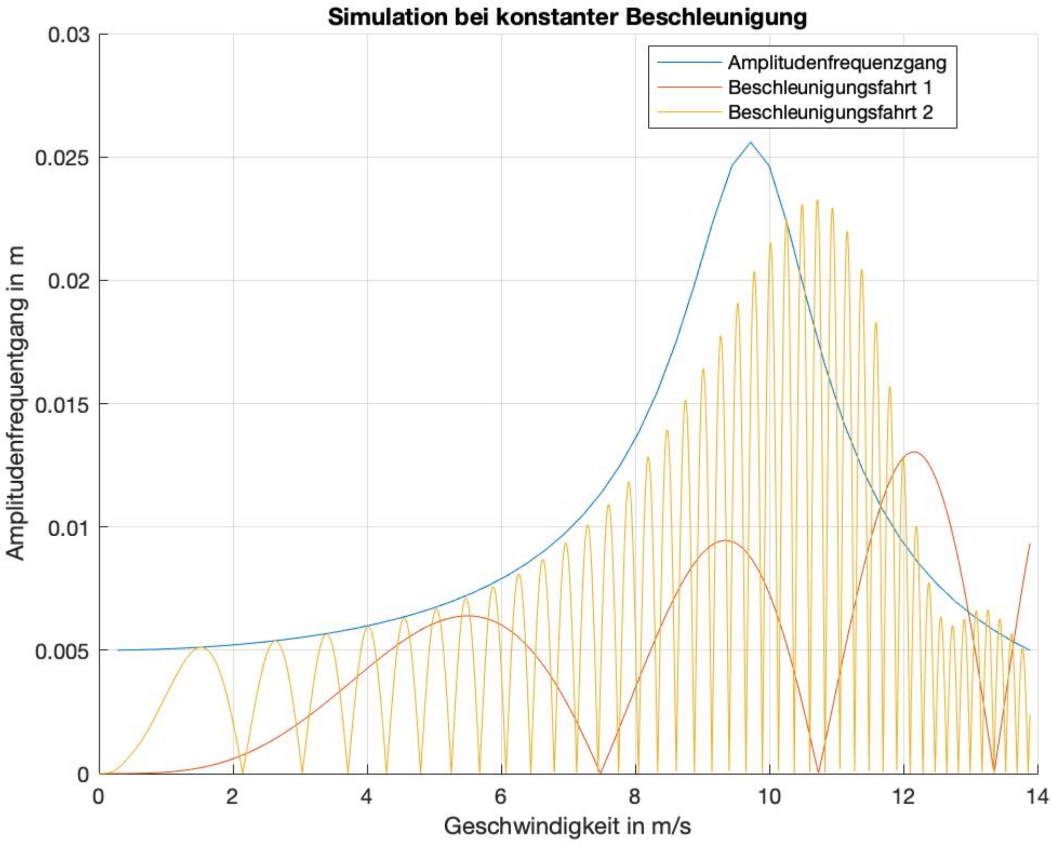

Abbildung 9: Simulation bei konstanter Beschleunigung

Simuliert wurde die Beschleunigungsfahrt 1 mit einer Beschleunigung von a = 13,89 m/s^2, die Beschleunigungsfahrt 2 besitzt einen Wert von a = 1,26 m/s^2.

Aus der Abbildung 9 lässt sich erkennen, dass bei höherer Beschleunigung die Resonanz später eintrifft. Zudem nimmt der Amplitudenfrequenzgang ab.

3. Literatur und Quellenverzeichnis

[1] Moodle-Kurs CAD/CAE: LeitfadenFuerDieBachelorThesisMA_final;
Prof. Dr.-Ing. Christian Wetzel (Stand 25.05.2022)

[2] Moodle-Kurs CAD/CAE: Hausarbeit_Nr1_CADCAE_SoSe2022_ (Stand:25.05.2022)