考点

第一题

1. 根据题意写约束和目标方程，并对此进行优化

   最小值情况下的单纯性表为：

	X^T	
X_0	A	B
	$C^T - C_0^T A$	$-C_0^T B$

   最大值情况下的单纯性表为：

	X^T	
X_0	A	B
	$C_0^T A - C^T$	$C_0^T B$

注意：约束非负，约束一定需要大于等于0

$$\Rightarrow \quad C=[-2 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T \qquad C_0=[0 \quad 0]^T$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

表：

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	3	4	1	0	12	$\times(-3)$
~~x_4~~ x_1	2 1	1 $\frac{1}{2}$	0 0	1 $\frac{1}{2}$	6	$\times 2$
	-2	-1	0	0	⊛ 0	

① 选最后一行最小的 -2

② 比较 $\frac{12}{3}$ 和 $\frac{6}{2}$ 大小，选小的 $\frac{6}{2}=3$

③ 直到所有 C（检验数）都 ≥ 0

⊛ 值如果目标函数是 min 则加负号，是 max 则不变.

2. 根据前面优化的单纯性法来进行敏感性分析

④ 敏感性分析

	X^T
X_B	SA^* SB
	$y^TA^*-C^{*T}$ y^TB

例: $\max\ z = 3x_1 + 5x_2$

Sub. to
$$x_1 \le 4$$
$$2x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

Simplex $\Rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36

得
$$S=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
※ S为松弛变量矩阵

$$y^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

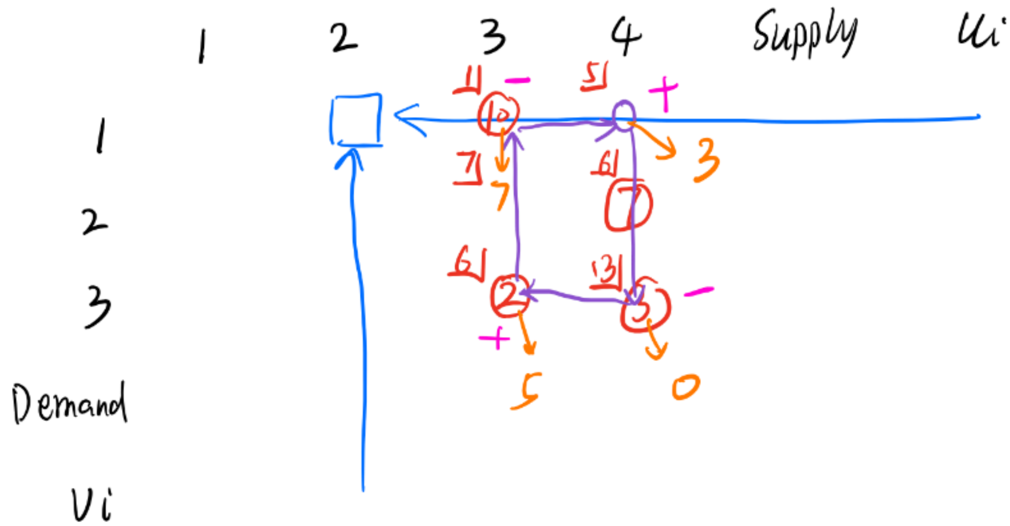
首先，确定改变的是基变量还是非基变量，因为改变基变量系数会导致基变量所在列不为1从而需要重新进行单纯性法的化简，有可能导致不是最优。

其次，计算的过程中只需要计算改变的部分，不需要全部计算。

3. 供需平衡关系

⑥ 运输问题（Vogel's 法）

1> 供=需　计算基变量数：m+n-1



1> 计算每行每列第2小减去最小的值

2> 选择结果最大的里面成本最小的先供应

3> 供应完或者满足需求的划去

4> 判断是否最优

如何判断是否最优呢?

i> 对基变量 计算 $u_i + v_i = c_i$

ii> 对非基变量计算 $c_i - u_i - v_i$

iii> 如果 $c_i - u_i - v_i$ 都 ≥ 0 则为最优

5> 不是最优怎么办

i> 设 Cell (u,v) 非最优 即 0

ii> 画闭合回路

iii> 从自己开始依次 +, − 循环 直至某一个基变量为0

6> 重复 4> 5> 直到最优

---

4. 供需不平衡关系
   增加0行或者0列，补充缺失的供给或者需求量，同理采用和平衡一样的方式进行操作
5. 供需问题的敏感性分析
   满足检验数规则即可以认为是保持最优解，反之则需要对新表进行优化
6. 带人工变量的单纯性法，以及敏感性分析
   带人工变量的单纯性法采用两阶段法:
   第一个阶段是将人工变量部分单独列出进行单纯性优化，然后将其删去
   第二个阶段是对删去人工变量后的单纯性表进行优化
   注意：尤其要注意需要在C中补充M，以及C_0的解也要为M的位置

Two-phase method

Solve the following program:

Min: $z = 80x_1 + 60x_2$

Subject to:

$0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$

$x_1 + x_2 = 1$

With: x_1 and x_2 nonnegative

The program is converted to standard matrix form, with

$X = [x_1\ x_2\ x_3\ \bar{x}_4]^T$

$C = [80\ 60\ 0\ M]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$X_0 = [x_3\ \bar{x}_4]^T$, $C_0 = [0\ M]^T$

$C^T - C_0^T A = [80\text{-}M\ \ 60\text{-}M\ \ 0\ \ 0]$

$C_0^T B = M$

	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	
x_3	0.2	0.32	1	0	0.25
$\bar{x}_4$	1	1	0	1	1
	80 - M	60 - M	0	0	-M

	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	
x_3	0.2	0.32	1	0	0.25
$\bar{x}_4$	1*	1	0	1	1
	80	60	0	0	0
	-1	-1	0	0	-1

Ratio

0.25/0.2 = 1.25

1/1 = 1

Col 4 removed

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	0.12*	1	0.05
x_1	1	1	0	1
	0	-20	0	-80

Ratio

0.05/0.12 = 5/12

1/1 = 1

对于**敏感性**分析，方法我认为是将基本可行解带入改变之后的式子保证最优的依然最大或者最小，因为约束中存在等式所以可以进行等价替换。

第二题

1. 拉格朗日法，等式

1> 等式约束　　$\min \; z = f(x)$　　$X = [x_1, x_2 \cdots x_n]$

$s.t. \; h_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \cdots m$

where $m < n$

① 拉格朗日乘数（Lagrange multipliers）

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$$

② 充分条件

对于有 n 个等式约束的模型，如果 X^* 是正则点

则 $\nabla h(x^*)^T$ 线性无关（即满秩）

2. 拉格朗日法，不等式

2> 不等式约束　　$\min: f(x)$

$s.t. \; g_j(x) \le 0$

Lagrange 为：$L = f(x) + \sum \mu g(x)$

① 局部最小的充分条件

1> $\nabla_x L(X^*, \mu^*) = 0$

2> $g(x) \le 0$

3> $\mu_i g_i(x) = 0$

4> $\mu_i \ge 0$

$\left.\begin{array}{l} 1> \\ 2> \\ 3> \\ 4> \end{array}\right\}$ K-T 条件（求得最优）

5> $Y^T \nabla_{xx}^2 L(X^*, \mu^*) Y$ on $M = \{ Y : \nabla g(x)^T Y = 0 \}$

5> 为检验是否最优

3. 拉格朗日法，有等式和不等式

3> 有等式有不等式约束

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \quad h_i(x)=0$$
$$g_i(x)\le 0$$

Lagrange， $L = f(x) + \lambda h(x) + \mu g(x)$

1> $\nabla_x L = 0$

2> $h_i(x) = 0$

3> $g_i(x) \le 0$

4> $\mu_i g_i(x) = 0$

5> $\mu \ge 0$

6> $y^T \nabla_{xx}^2 L \, y > 0$ on $M = \{y : \nabla h(x) y = 0 \quad \nabla g(x) y = 0\}$

注意：等式约束只需要1，2，6即可，不等式约束只需要1，3，4，5，6即可

4. 非线性敏感性分析

⑪ 非线性敏感性分析

例：

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_3$$

$$s.t.\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$\Rightarrow x^* = (2.5, -1.5, -1)^T \quad f(x^*) = -1.5 \quad \lambda^* = -3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 + \Delta$$

$$\Rightarrow \Delta = (2+\Delta) - 2$$

$$\Rightarrow \Delta f^* = -\lambda^* \Delta = 3 \cdot \Delta$$

$$f^*(\Delta) = f_{old} + \Delta f^* = -1.5 + 3\Delta$$

※ 如果有多个约束 则 $\Delta f^* = -\sum \lambda_i \Delta \alpha_i - \sum \mu_j \Delta \beta_j$

重点是记住步骤：

首先是计算变化量

然后带入计算f值得变化量，记住为负值

最后用老的f值去加变化得f值

5. 工作分配问题，工作等于人数

例：

	J_1	J_2	J_3	J_4	
P_1	M	~~30~~ 7	~~23~~ 0	~~25~~ 2	-23
P_2	~~34~~ 18	M	~~16~~ 0	~~24~~ 8	-16
P_3	~~22~~ 3	~~19~~ 0	~~21~~ 2	M	-19
P_4	~~21~~ 7	~~23~~ 9	~~14~~ 0	~~20~~ 6	-14
	-3	-0	-0	-2	

1> 每行减去最小值创造0

2> 每列减去最小值创造0

3> 横线竖线覆盖所有0

4> 找到未覆盖的最小值 4

5> 未覆盖元素减最小值

6> 相交处元素增加4

最终能实现4个0的分配

这只有3个0

	J_1	J_2	J_3	J_4
P_1	M	7	~~0~~ 4	0
P_2	~~15~~ 11	M	0	~~6~~ 2
P_3	0	0	~~2~~ 6	M
P_4	~~4~~ 0	~~9~~ 5	0	~~4~~ 0

	J_1	J_2	J_3	J_4
P_1	M	7	4	0
P_2	11	M	0	2
P_3	0	0	6	M
P_4	0	5	0	0

注意是在未被直线覆盖得数中减去最小得，在交叉点中加上最小的

6. 工作分配问题，工作不等于人数
   增加0行或者0列，使得人数和工作数相等

第三题

1. DTMC

- 利用poisson process得公式

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

得到每个状态转移的结果

- 停留时间

$$E(T_i) = \frac{1}{1-P_{ii}}$$

- 稳态

$$\Rightarrow Y = YP \quad \text{and} \quad \sum_j y_j = 1$$

例：

$$Y = [y_0 \ y_1] \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{from} \quad Y = YP \Rightarrow [y_0 \ y_1] = [y_0 \ y_1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y_0 = y_1 \\ y_1 = y_0 \end{matrix}$$

$$\text{又} \quad y_1 + y_0 = 1 \Rightarrow y_1 = y_0 = 0.5$$

1. CTMC
注意：CTMC中的状态转移表示的就是λ的大小，所以如果是CTMC则不需要通过公式计算，只需要带入即可。同时注意CTMC中每行的和为0，所以p_{ii}需要最后计算。

- 停留时间

$$T = \frac{1}{\lambda}$$

- 稳态

Steady State Analysis

$\pi_j = \lim_{t \to \infty} P_j(t)$

① $\sum_j \pi_j = 1$

② $\pi(t) Q = \pi Q = 0$ Q为转移矩阵

③ $\pi_j \geq 0$

注意 P_{ii} 放在最后算

第四题

1. 排队
   考试会给四种排队情况下的公式

第五题

1. 不确定策略选择

1> Maximin (Criterion of pessimism) 行 最小值的最大值

2> Maximax (Criterion of optimism) 最大值的最大值

3> Hurwicz Criterion　C_{OPT} - 乐观系数

期望payoff $H = C_{OPT}(\text{max payoff}) + (1 - C_{OPT})(\text{min payoff})$

期望cost $H = C_{OPT}(\text{min cost}) + (1 - C_{OPT})(\text{max cost})$

4> Criterion of regret (Savage criterion)

1. 计算每列最大值
2. 用最大值减各元素取绝对值
3. 取每行最大值，最大值的最小值为结果

5> Laplace Criterion

求每个策略的加权和（比如平均），取最大

2. 树状图