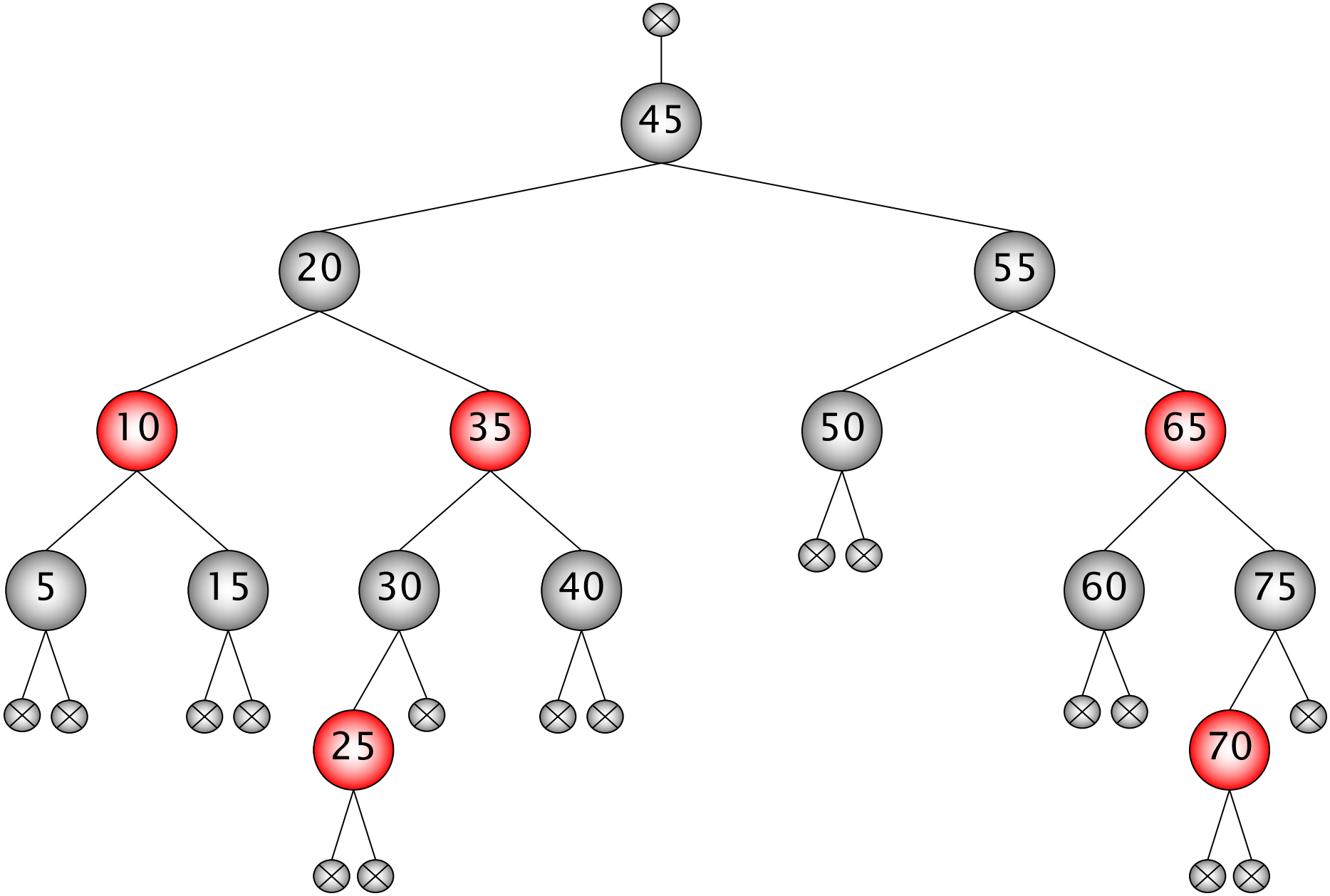
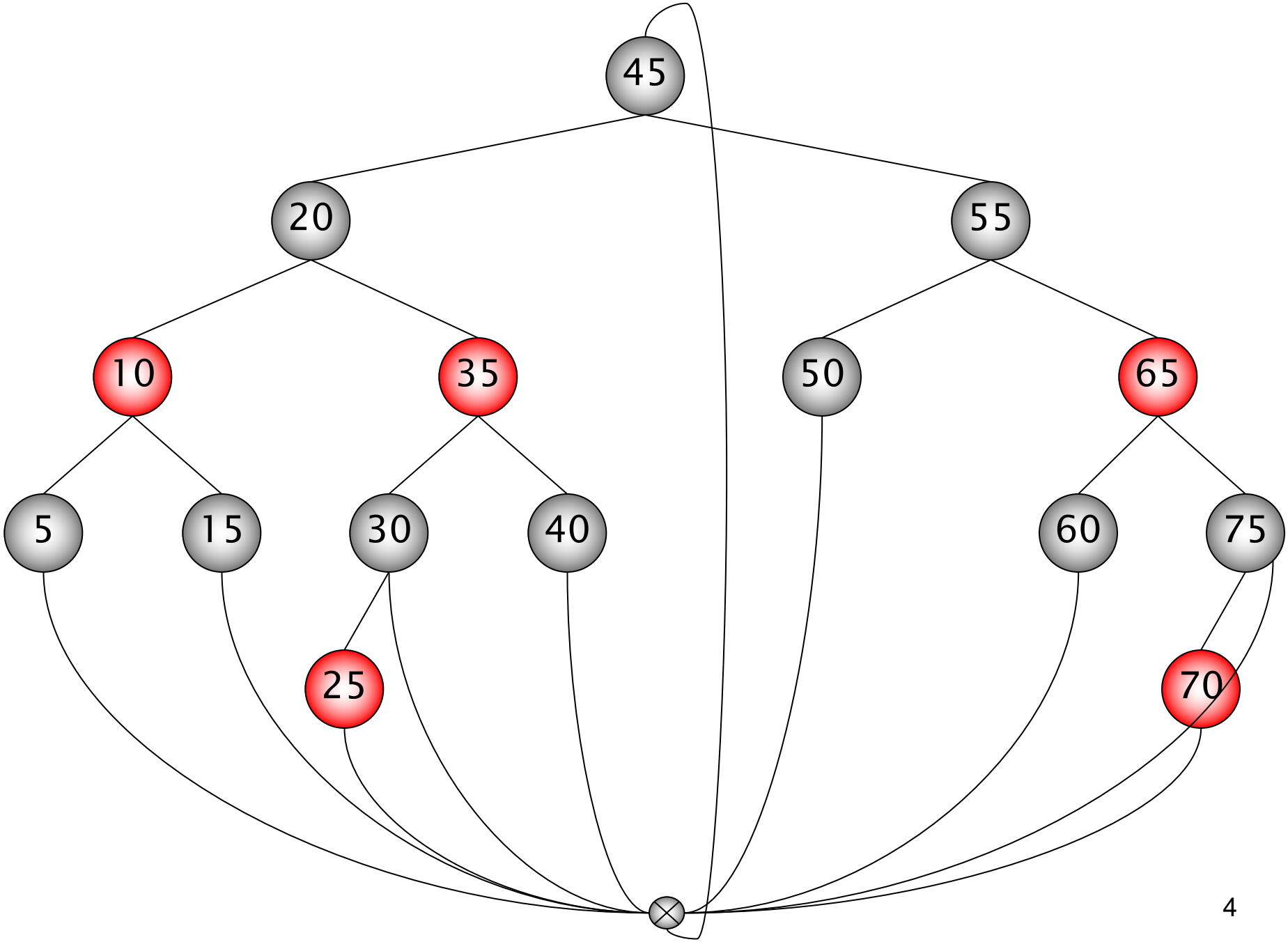
Cây Đỏ–Đen

Cây Đỏ–Đen

- Cây Đỏ-Đen thuộc nhóm cấu trúc cây tìm kiếm, duy trì tính "cân bằng" để đảm bảo các thao tác: thêm, hủy, tìm kiếm có chi phí lớn nhất là O(log*n*)
- Cây AVL (đệ qui): chiều duyệt xuống dùng để tìm và thêm/hủy phần tử, chiều duyệt lên để cập nhật tính cân bằng
- Cây Đỏ-Đen: quá trình lặp thay cho đệ qui khiến việc thực thi hiệu quả hơn


45
20
55
10
35
50
65
5
15
30
40
60
75
25
70


45
20
55
10
35
50
65
5
15
30
40
60
75
25
70

Định nghĩa: Cây Đỏ-Đen là cây nhị phân tìm kiếm thoả các tiêu chuẩn sau:

- Mỗi nút hoặc là nút đỏ, hoặc là nút đen
- Nút gốc luôn luôn là nút đen
- Nếu một nút là đỏ thì nút con của nó phải là đen
- Mỗi đường đi từ một nút bất kỳ đến các nút lá đều có cùng số lượng các nút *đen* (chiều cao đen – *black height*)

Nhận xét:

- Cây Đỏ–Đen với n *nút trong* có chiều cao tối đa là $2\log_2(n+1)$
- Các nút lá **`NIL`** (nút ngoài) luôn là nút đen
- Một cạnh dẫn đến một nút đen gọi là cạnh đen (*black edge*)
- Nếu không tồn tại nút cha hay nút con của một nút thì những con trỏ tương ứng sẽ trỏ về **`NIL`**
  - Một lính canh (**`Sent`**) sẽ đại diện cho tất cả các nút **`NIL`**

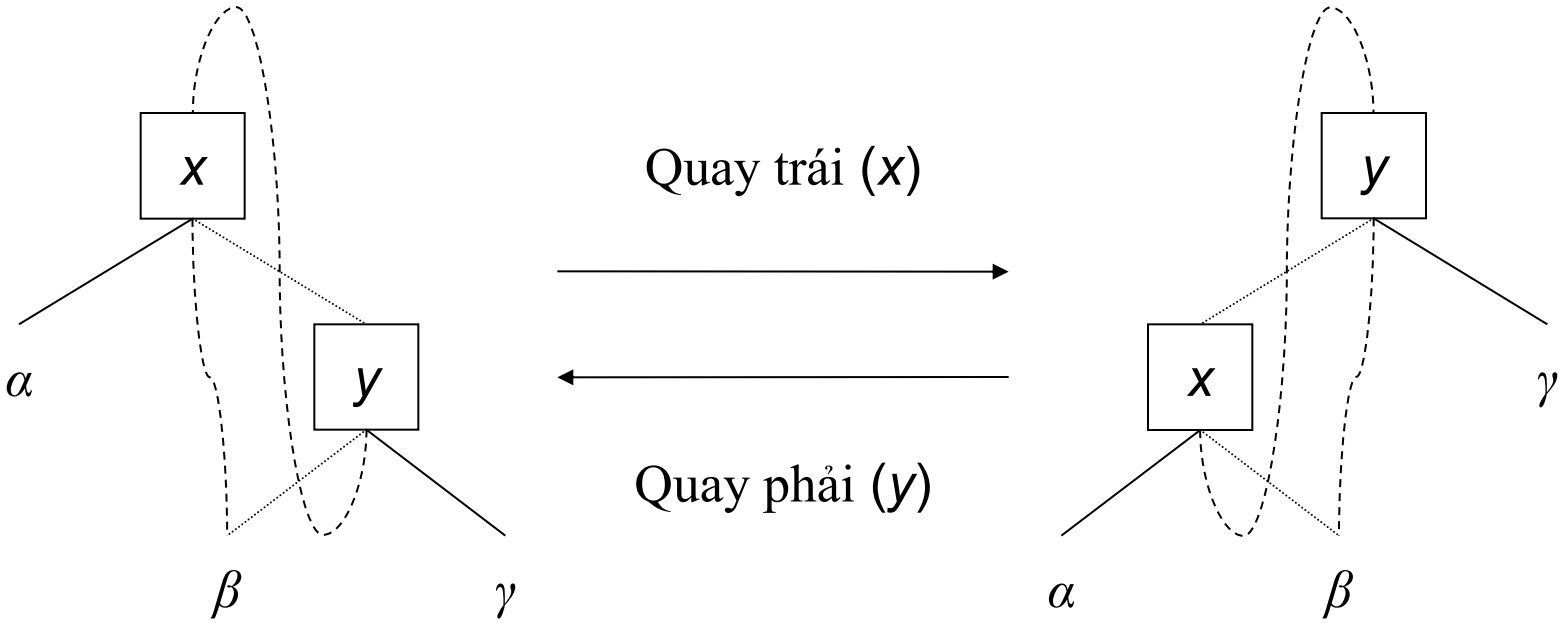
```
typedef struct Node * Ref;
struct    Node {
  int key;
  int color;
  Ref parent;
  Ref left;
  Ref right;
}

Ref getNode(int key, int color, Ref nil) {
  p = new Node;
  p->key   = key;
  p->color = color;
  p->left  = p->right = p->parent = nil;
  return  p;
}
```

Trạng thái ban đầu

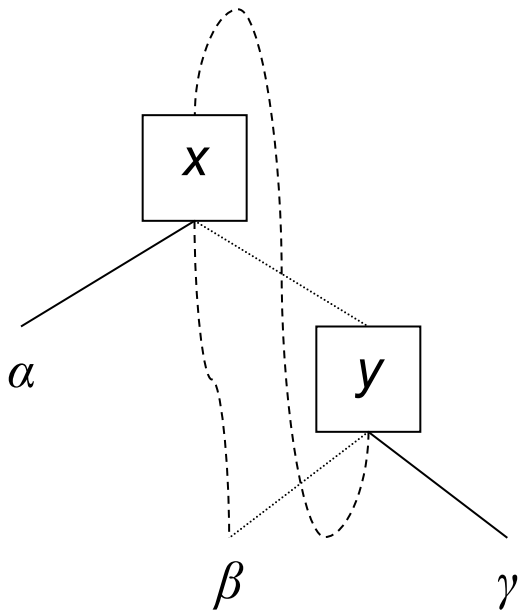
```
Ref nil, root;
…
nil = new Node;
nil->color = BLACK;
nil->left =
nil->right =
nil->parent = nil;
…
root = nil;
```

Thao tác quay



```
void  leftRotate(Ref & root, Ref x) {
  y = x->right;
  x->right = y->left;
  if (y->left != nil)
    y->left->parent = x;
  y->parent = x->parent;

  if (x->parent == nil)
    root = y;
  else
    if (x == x->parent->left)
      x->parent->left = y;
    else
      x->parent->right = y;
  y->left = x;
  x->parent = y;
}
```



Thao tác chèn (Insertion)

Phần tử chèn vào luôn luôn có màu đỏ

Giải thuật:

Bước 1: Chèn phần tử (tương tự cây nptk)

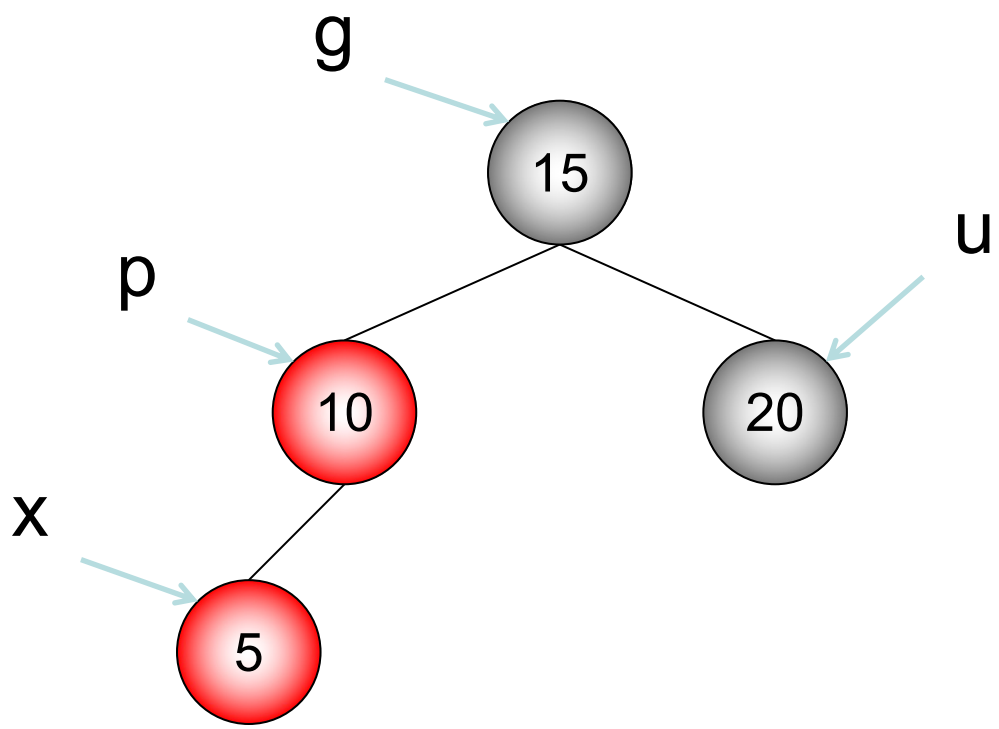
Bước 2: Cập nhật các trường thông tin cho nút mới

Bước 3: Để duy trì tính "cân bằng", nếu cần, phép tô màu nút và/hoặc phép quay sẽ được thực hiện

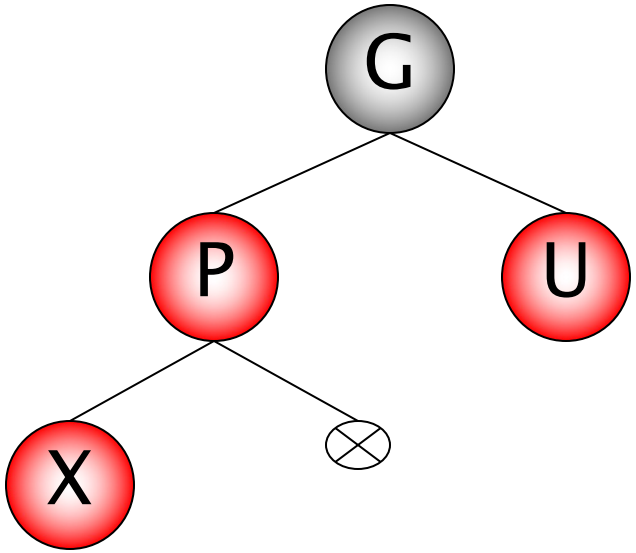
```
void    RBT_Insertion(Ref & root, int key) {
  x = getNode(key, RED, nil);
  BST_Insert(root, x);
  Insertion_FixUp(root, x);
}
```

```
void   BST_Insert(Ref & root, Ref x) {
  y = nil;
  z = root;
  while (z != nil) {
    y = z;
    if (x->key < z->key)       z = z->left;
    else if (x->key > z->key)  z = z->right;
    else                       return;
  }
  x->parent = y;
  if (y == nil)   root = x;
  else
    if (x->key < y->key)  y->left = x;
    else                  y->right = x;
}
```

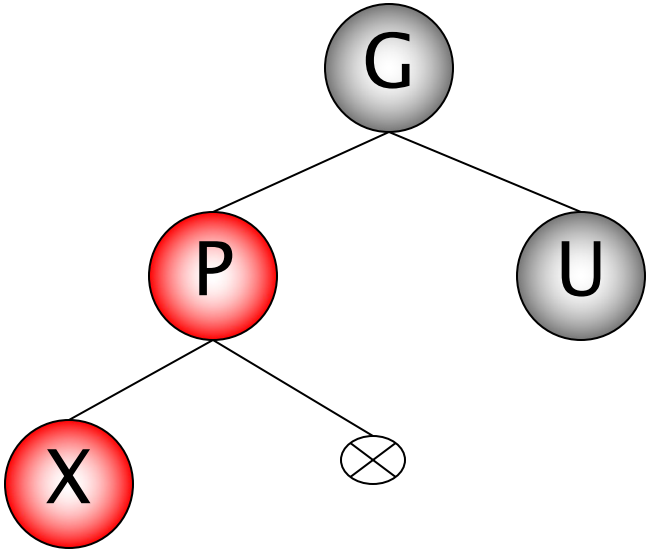
- Gọi:
  - *x*: con trỏ, trỏ đến nút vừa chèn vào
  - *p*: con trỏ, trỏ đến nút cha của nút trỏ bởi *x*
  - *u*: con trỏ, trỏ đến nút anh em của nút trỏ bởi *p*
  - *g*: con trỏ, trỏ đến nút cha của nút trỏ bởi *p*



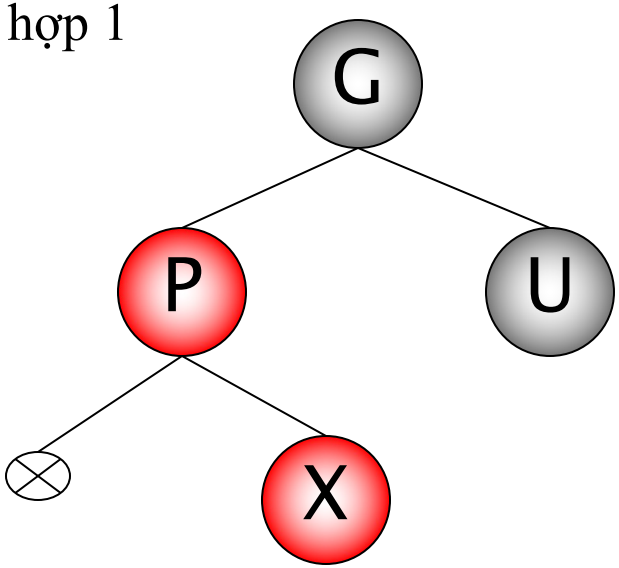
Các trường hợp mất cân bằng



Trường hợp 1



Trường hợp 2

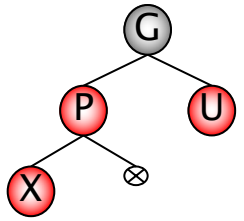


Trường hợp 3

Cân bằng lại cây

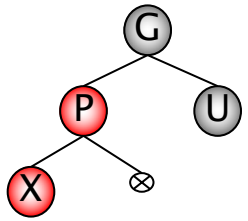
- Trường hợp 1 (*p* đỏ, *u* đỏ)

  → Đảo màu 3 nút *u*, *p* và *g*



- Trường hợp 2 (*p* đỏ, *u* đen, *x* là cháu ngoại)

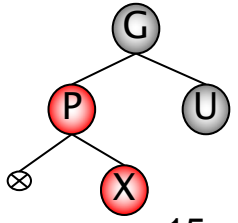
  → Đảo màu *p* và *g*, thực hiện phép quay tại *g*



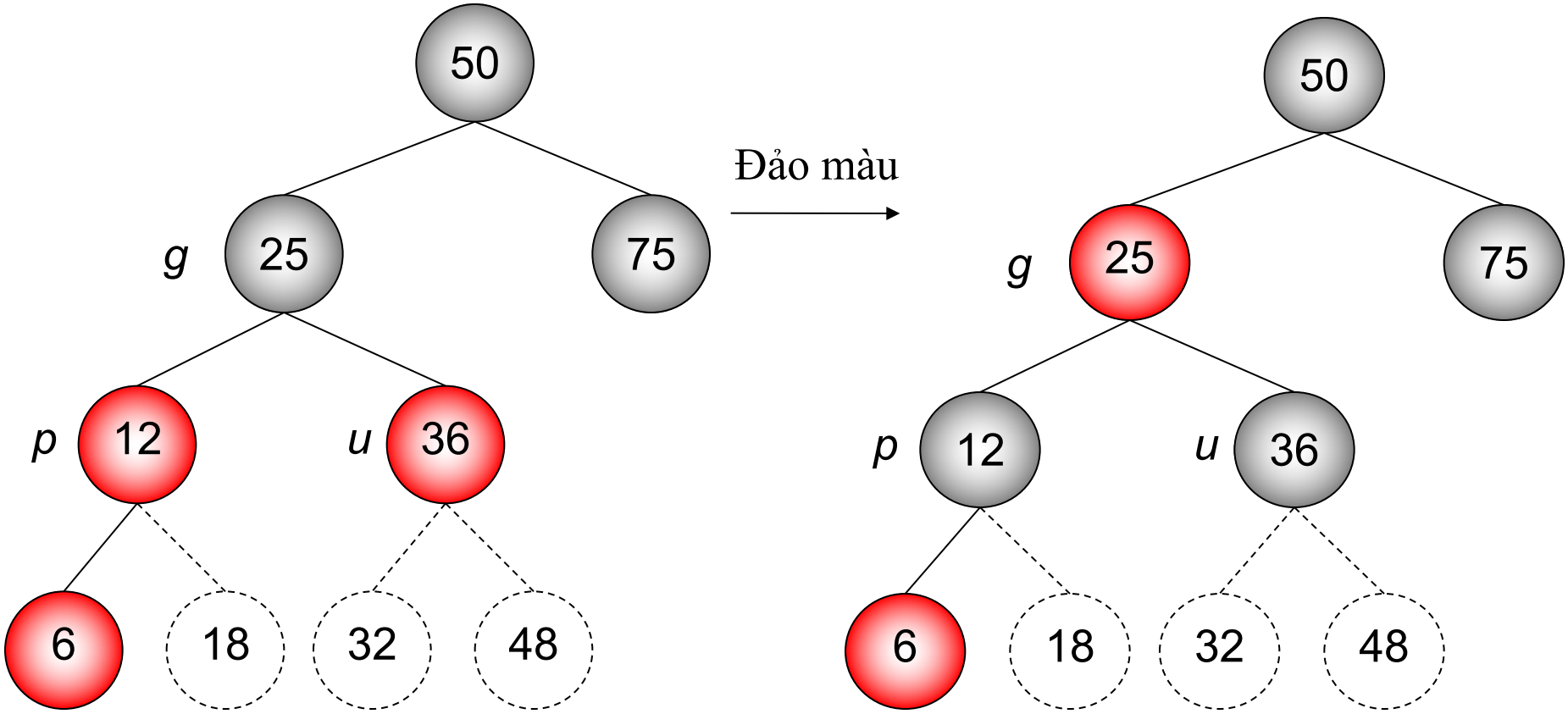
- Trường hợp 3 (*p* đỏ, *u* đen, *x* là cháu nội)

  → Quay tại *p*

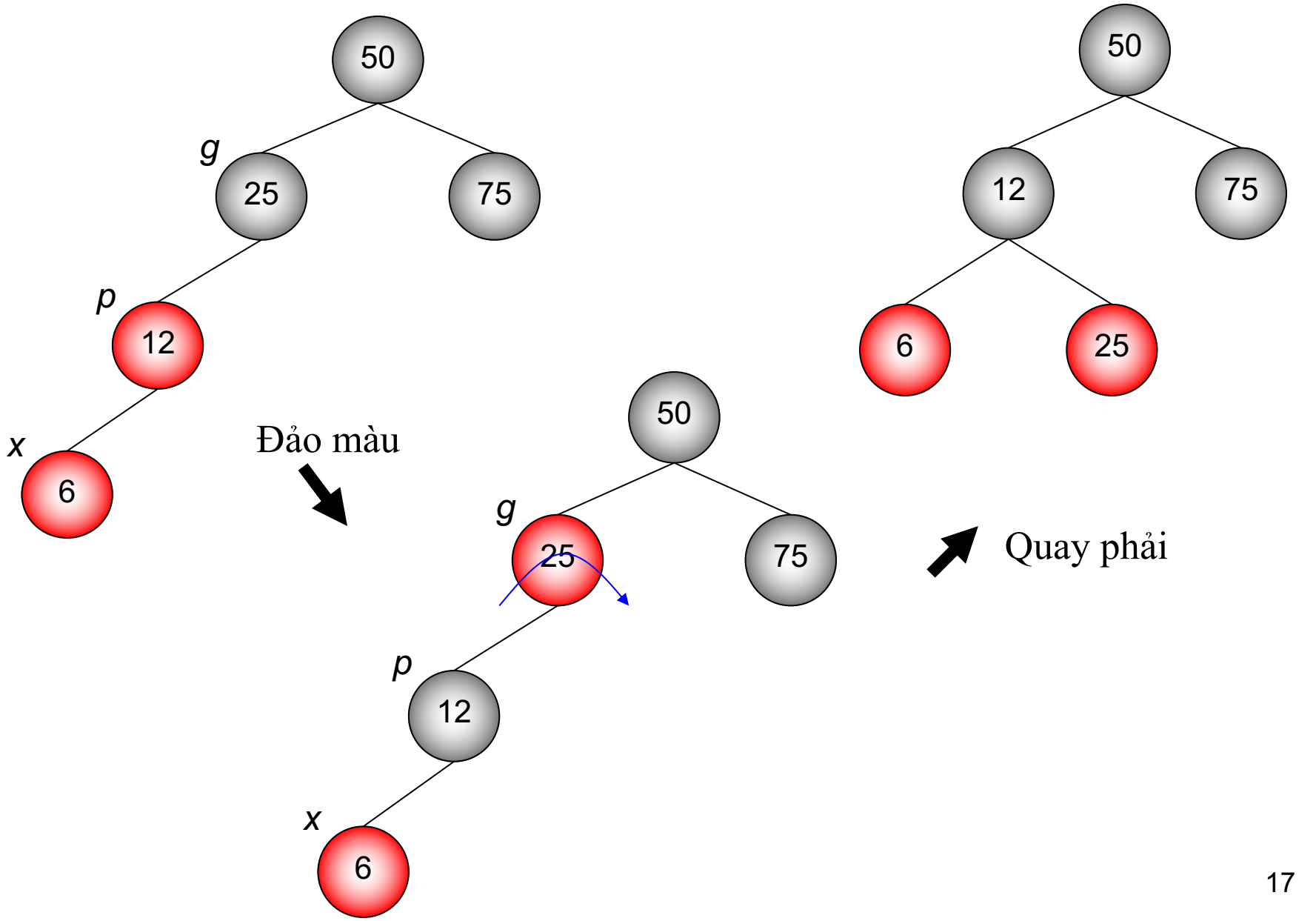
  → Chuyển sang trường hợp 2



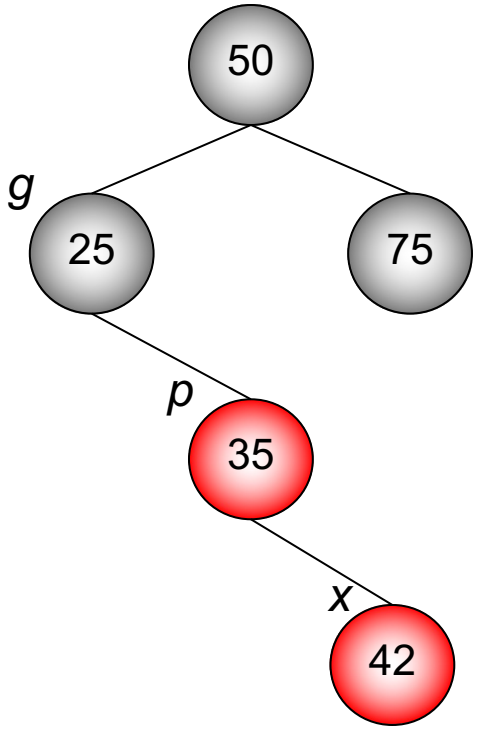
Trường hợp 1



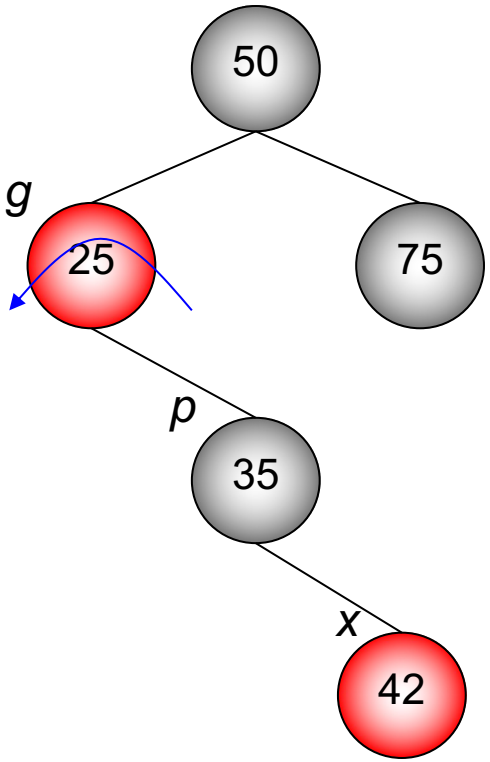
Trường hợp 2



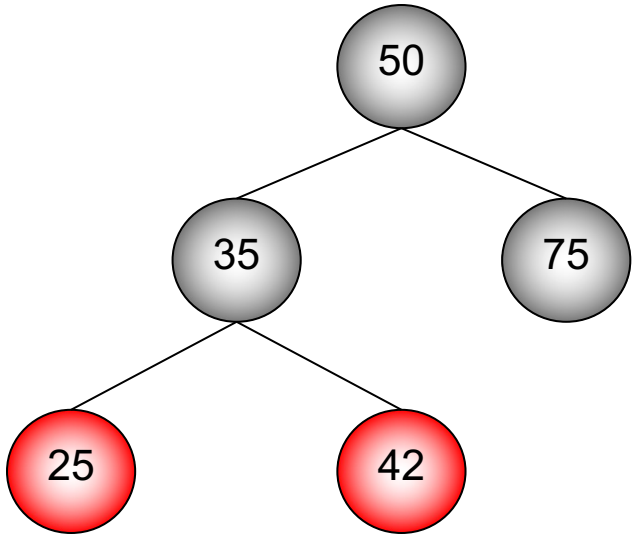
Trường hợp 2



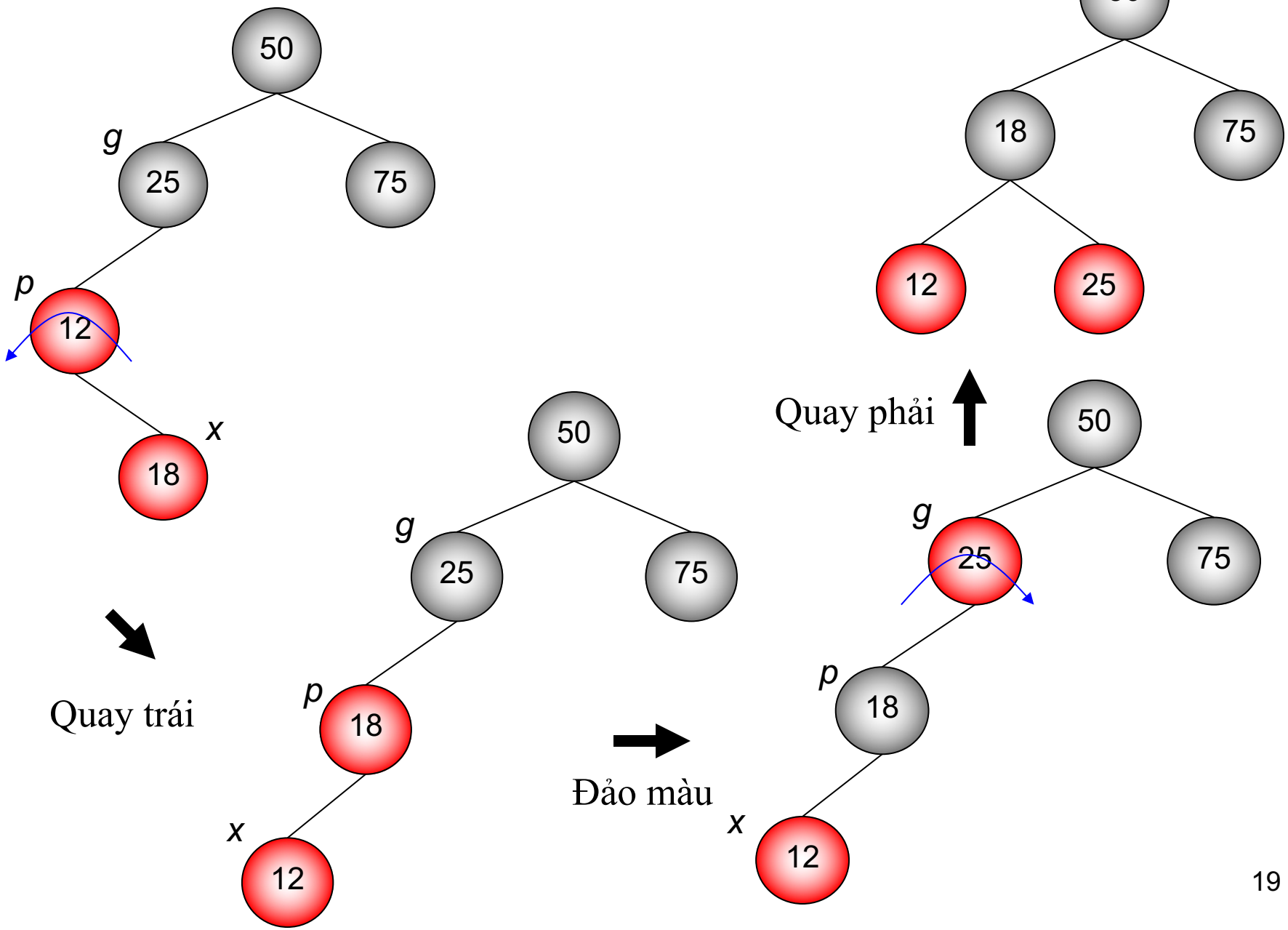
Đảo màu



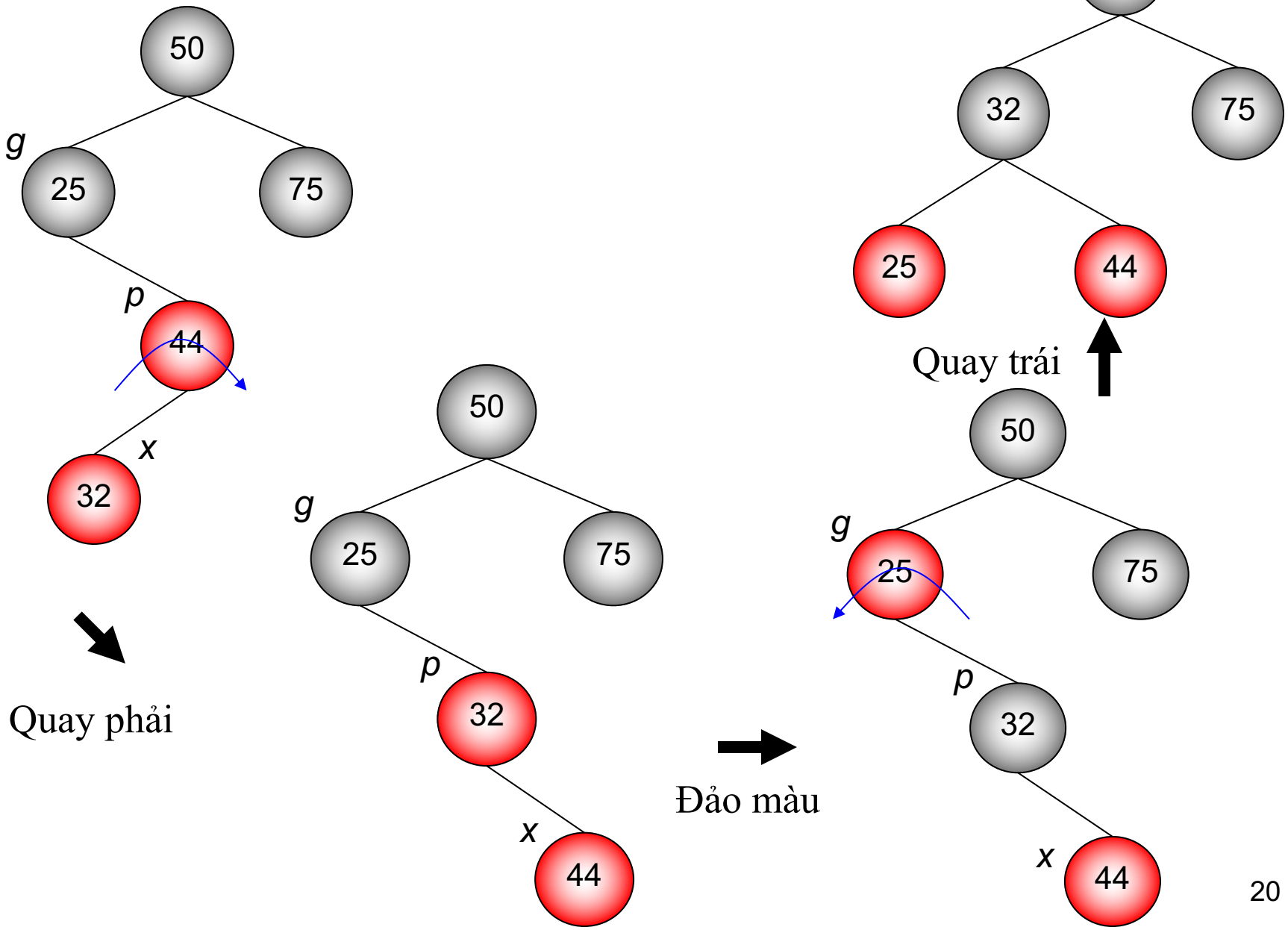
Quay trái



Trường hợp 3


50
g
25
75
p
12
x
18
Quay trái
50
g
25
75
p
18
x
12
Đảo màu
50
18
75
12
25
Quay phải
50
g
25
75
p
18
x
12

Trường hợp 3


50
g
25
75
p
44
x
32
Quay phải
50
g
25
75
p
32
x
44
Đảo màu
50
32
75
25
44
Quay trái
50
g
25
75
p
32
x
44

```
void    Insertion_FixUp(Ref & root, Ref x) {
  while (x->parent->color == RED)
    if (x->parent == x->parent->parent->left)
      ins_leftAdjust(root, x);
    else
      ins_rightAdjust(root, x);
  root->color = BLACK;
}
```

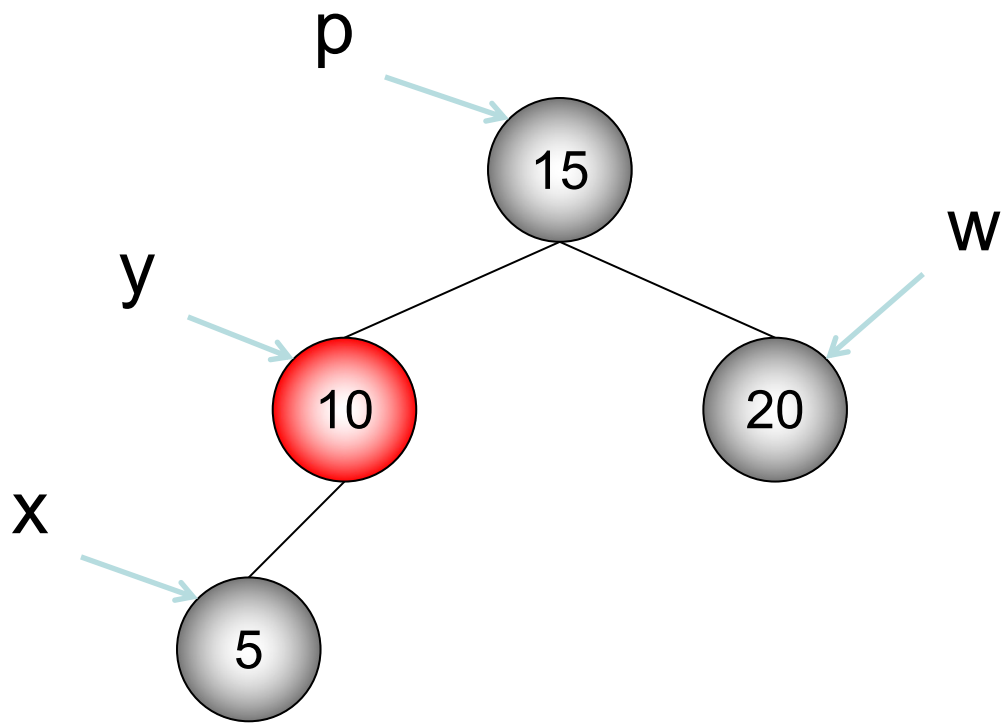
```
void   ins_leftAdjust(Ref & root, Ref & x) {
  u = x->parent->parent->right;
  if (u->color == RED) {
    x->parent->color = u->color = BLACK;
    x->parent->parent->color = RED;
    x = x->parent->parent;
  }
  else {
    if (x == x->parent->right) {
      x = x->parent;
      leftRotate(root, x);
    }
    x->parent->color = BLACK;
    x->parent->parent->color = RED;
    rightRotate(root, x->parent->parent);
  }
}
```

Thao tác hủy

- Diễn ra theo 2 giai đoạn:
  - Hủy nút: Tương tự cây nhị phân tìm kiếm
    - ✓ Nút lá
    - ✓ Nút có một cây con
    - ✓ Nút có đầy đủ hai cây con: tìm nút thay thế
  - Cân bằng lại cây
    - ✓ Chỉ quan tâm đến nút bị xóa thật sự

- Gọi:
  - *y*: con trỏ, trỏ đến nút bị xóa thật sự
  - *x*: con trỏ, trỏ đến nút con của nút trỏ bởi *y*

    $\rightarrow$ Sẽ thay thế nút trỏ bởi *y*
  - *w*: con trỏ, trỏ đến nút anh em của nút trỏ bởi *y*
  - *p*: con trỏ, trỏ đến nút cha của nút trỏ bởi *y*



- Sau khi xóa:
  - Nếu *y* là nút đỏ: dừng
  - Nếu *y* là nút đen:
    - Mọi con đường đi qua *y* sẽ giảm chiều cao đen
    - *p* và *x* có thể cùng là nút đỏ

  $\rightarrow$ Mất cân bằng

```
void  RBT_Deletion(Ref & root, int k) {
  z = searchTree(root, k);
  if (z == nil) return;
  y = (z->left == nil) || (z->right == nil) ?
            z : Successor(root, z);
  x = (y->left == nil) ? y->right : y->left;
  x->parent = y->parent;
  if (y->parent == nil)     root = x;
  else
    if (y == y->parent->left)
      y->parent->left = x;
    else
      y->parent->right = x;
  if (y != z)    z->key = y->key;
  if (y->color == BLACK)
    Del_FixUp(root, x);
  delete y;
}
```

- *Dấu hiệu đen* (*black token*)
  - Gán cho nút trỏ bởi *x* (con của nút bị xoá thật sự)
  - *Dấu hiệu đen* đi ngược lên cây cho đến khi tiêu chuẩn về *chiều cao đen* được giải quyết
  - Nếu nút chứa *dấu hiệu đen* là:
    - Nút đen $\rightarrow$ nút đen kép (*doubly black node*)
    - Nút đỏ $\rightarrow$ nút đỏ-đen (*red-black node*)
- *Dấu hiệu đen* chỉ là khái niệm trừu tượng

Trường hợp 1

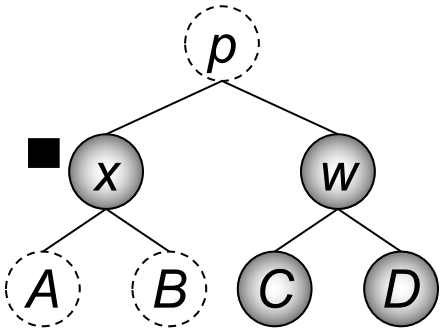
Nút đang xét (*x*) chứa *dấu hiệu đen* và là:

- Nút đỏ (nút đỏ–đen), hoặc
- Nút gốc

Xử lý:

- Tô màu nút đỏ-đen thành đen
- Loại bỏ *dấu hiệu đen* và kết thúc

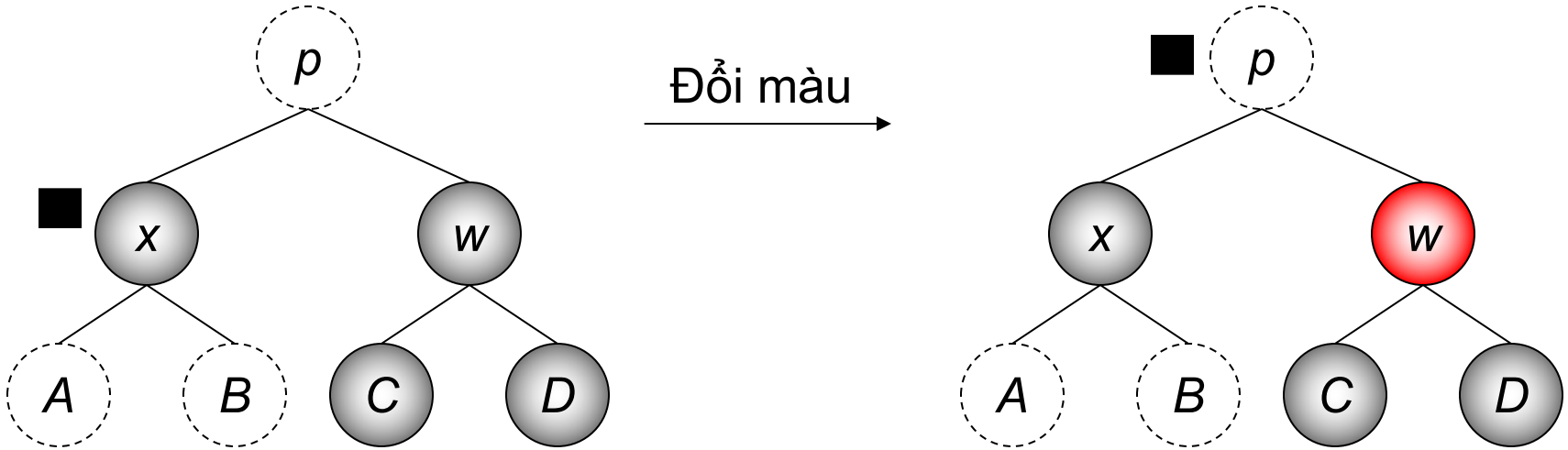
Trường hợp 2



- Nút đang xét (*x*) là nút đen kép
- Nút anh em *w* màu đen
- Hai nút con của nút anh em *w* (nút cháu) màu đen

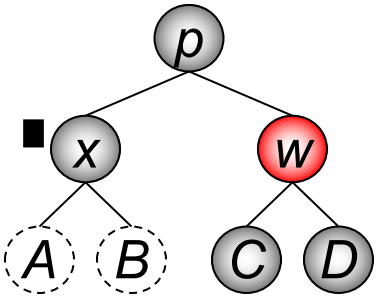
Xử lý:

- Đổi màu nút anh em *w* sang đỏ
- Di chuyển *dấu hiệu đen* lên một cấp


p
x
w
A
B
C
D
Đổi màu
p
x
w
A
B
C
D

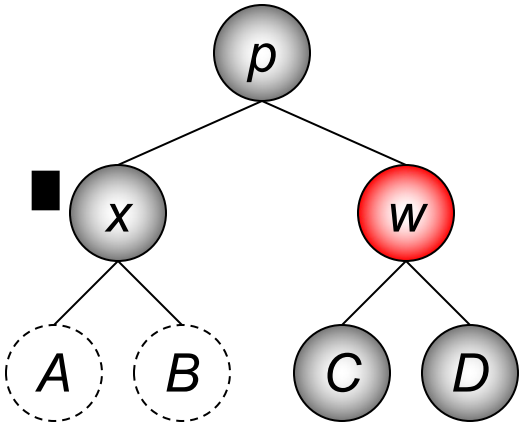
Trường hợp 3

- Nút đang xét (*x*) là nút đen kép
- Nút anh em *w* màu đỏ

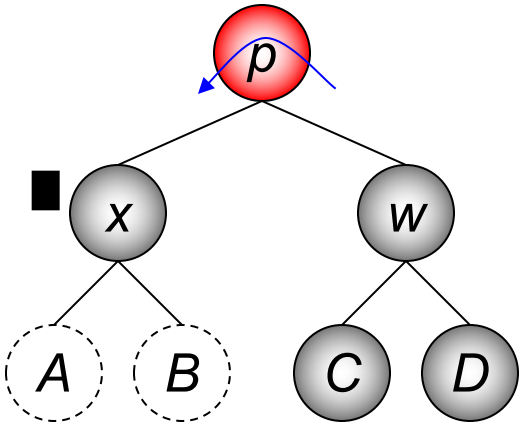


Xử lý:

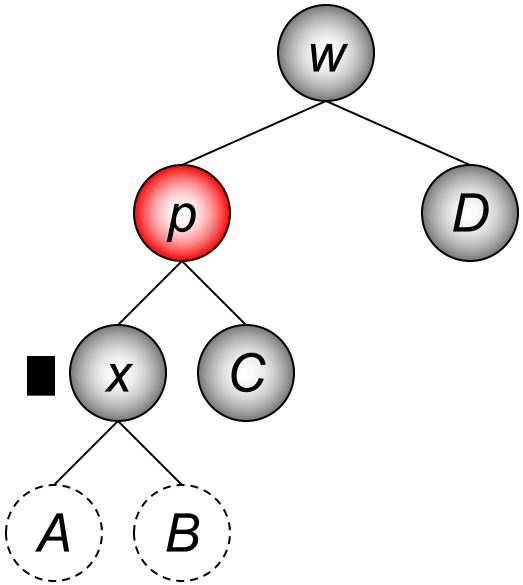
- Đảo màu nút cha *p* và nút anh em *w*
- Thực hiện phép quay tại cha
- *Dấu hiệu đen* vẫn thuộc nút *x* ban đầu



Đảo màu

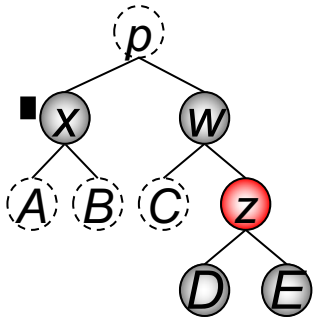


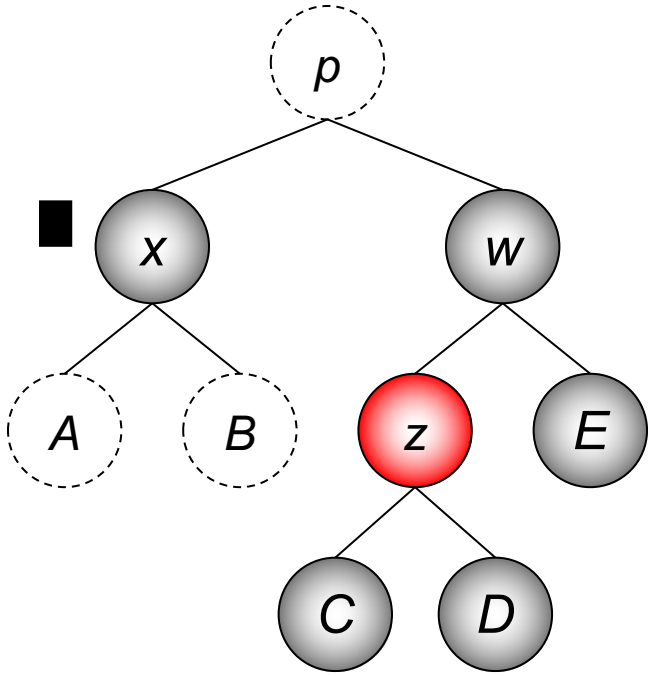
Quay trái

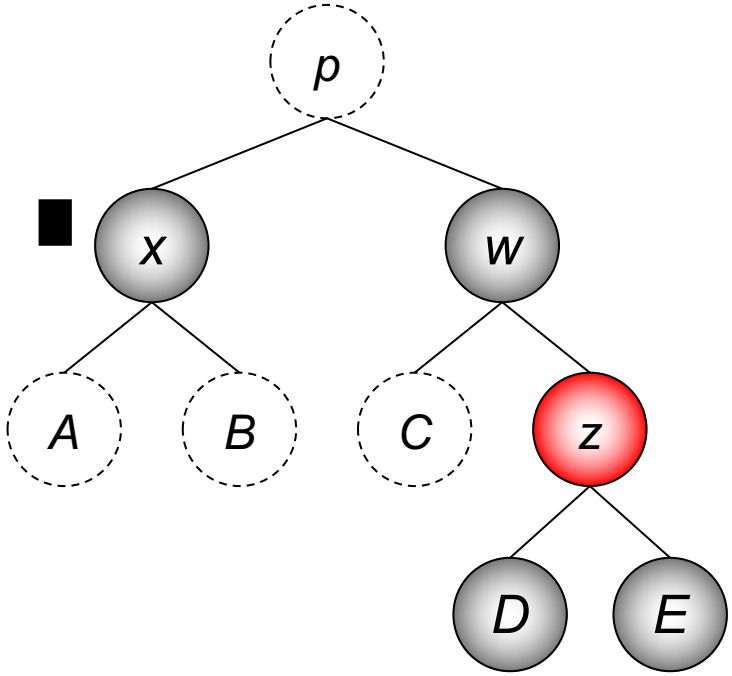


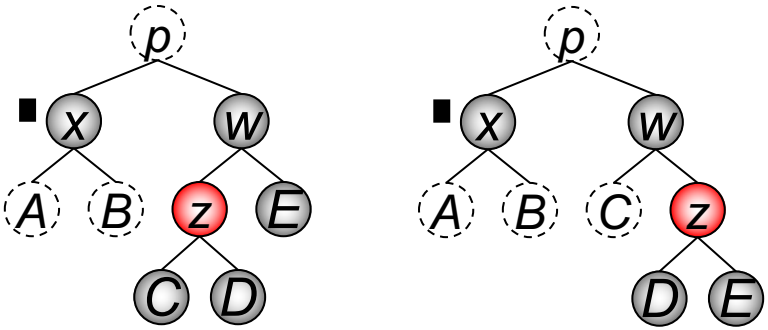
Trường hợp 4

- Nút đang xét (*x*) là nút đen kép
- Nút anh em *w* là đen
- Nút anh em có tối thiểu một nút con là đỏ









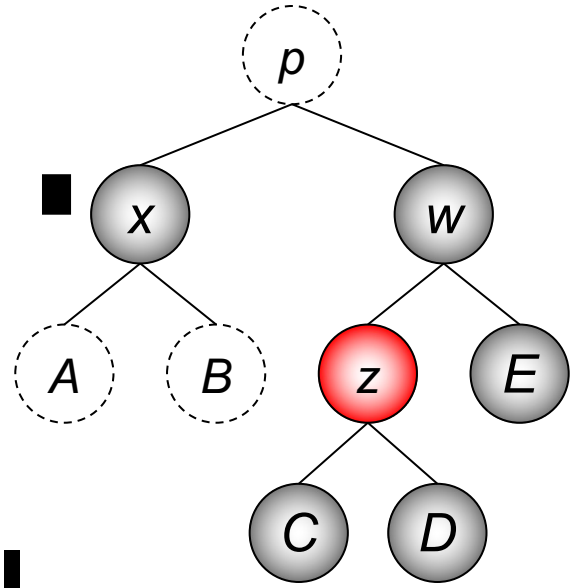
Xử lý: Xét 2 nút cháu của cha của nút đen kép

a) Nút cháu ngoại là đen
   - Đảo màu cháu nội và nút anh em (*w*)
   - Quay tại nút anh em (*w*)

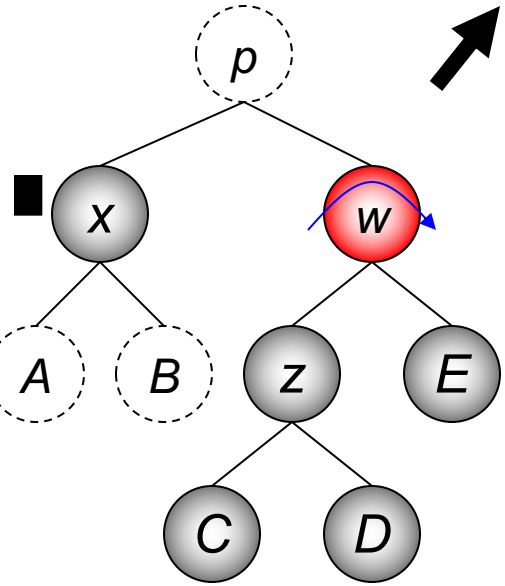
   → Chuyển sang trường hợp b

b) Nút cháu ngoại là đỏ
   - Nút anh em *w* (sẽ là gốc cục bộ) nhận màu nút cha
   - Nút ông (*p*) và nút cháu ngoại nhận màu đen
   - Quay tại nút ông

Trường hợp (a)

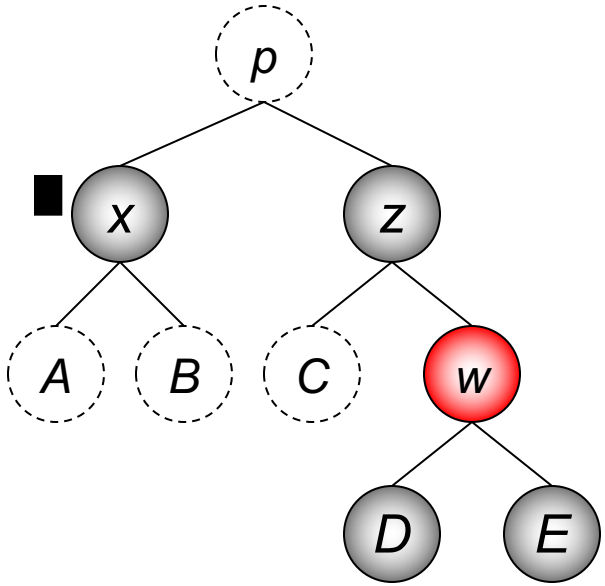


Đảo màu

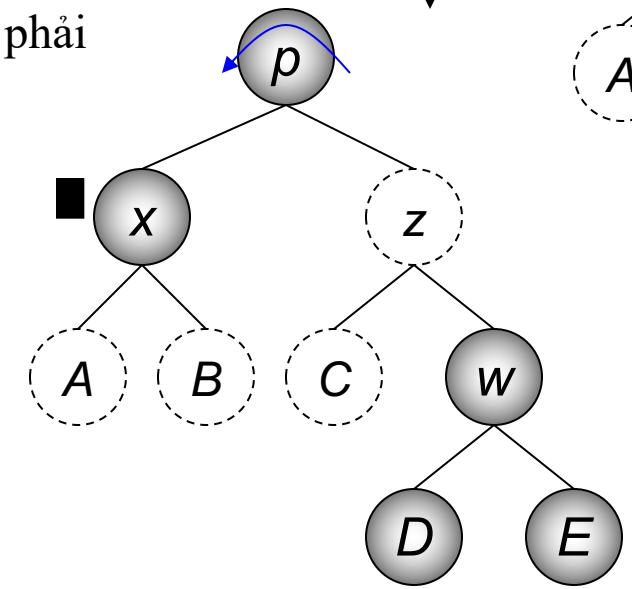


Quay phải

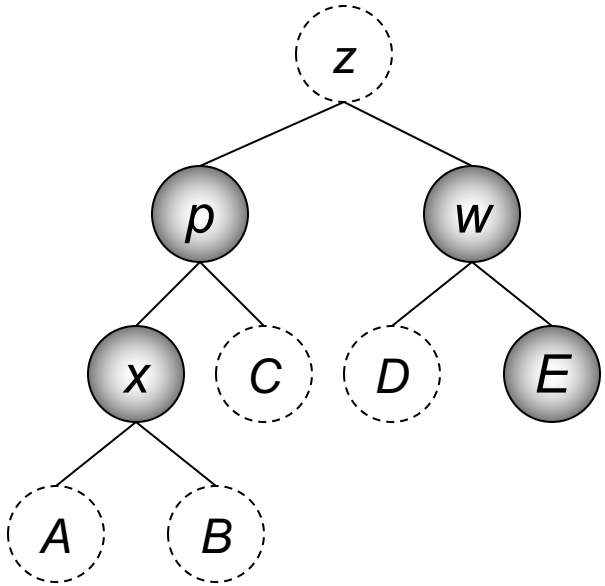
Trường hợp (b)



Chuyển màu



Quay trái



```
void   Del_FixUp(Ref root, Ref x) {
  while ((x->color == BLACK) && (x != root))
    if (x == x->parent->left)
      del_leftAdjust(root, x);
    else
      del_rightAdjust(root, x);
  x->color = BLACK;
}
void   del_leftAdjust(Ref & root, Ref & x) {
  w = x->parent->right;
  if (w->color == RED) {
    w->color          = BLACK;
    x->parent->color = RED;
    leftRotate(root, x->parent);
    w = x->parent->right;
  }
```

```
  if ((w->right->color == BLACK) &&
      (w->left->color == BLACK)) {
    w->color = RED;
    x = x->parent;
  }
  else {
    if (w->right->color == BLACK) {
      w->left->color  = BLACK;
      w->color        = RED;
      rightRotate(root, w);
      w = x->parent->right;
    }
    w->color          = x->parent->color;
    x->parent->color = w->right->color = BLACK;
    leftRotate(root, x->parent);
    x = root;
  }
}
```