Algorytmy Geometryczne

Ćwiczenie 1 - Predykaty geometryczne

Jakub Własiewicz - Grupa 2

1. Opis ćwiczenia

Ćwiczenie polegało na klasyfikacji położenia punktów względem prostej na położone po jej lewej, prawej oraz współliniowe z nią, a następnie wizualizacji wyników i opisania wniosków. Do analizy zostały dane następujące zbiory:

- **Zbiór A** : 10^5 punktów z płaszczyzny $[-1000, 1000]^2$
- **Zbiór B** : 10^5 punktów z płaszczyzny $\left[-10^{14}, 10^{14}\right]^2$
- **Zbiór C** : 1000 punktów spełniających równanie okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu $R = 100$
- **Zbiór D** : 1000 punktów z przedziału $[-1000, 1000]$ znajdujących się na prostej tworzonej przez wektor $\vec{ab}$, gdzie $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0.1)$

2. Dane techniczne

Program został uruchomiony na komputerze z następującymi specyfikacjami:

- **System Operacyjny -** Ubuntu 24.04.3 LTS
- **Architektura Procesora -** x86_64
- **Procesor -** AMD Ryzen 7 7840HS
- **Język i wersja kompilatora -** Rust 1.86.0

Oraz użyte zostały następujące biblioteki:

- **plotters 0.3.7**
- **rand 0.9.2**
- **ndarray 0.16.1**
- **ndarray-linalg 0.17.0**

3. Opis teoretyczny

Aby wyznaczyć położenie punktu c względem prostej danej punktami a i b, analizujemy wartość wyznacznika macierzy 2x2 lub 3x3 danym następującymi wzorami:

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \\ c_x & b_y & 0 \end{vmatrix} \quad \text{oraz} \quad \det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix}$$

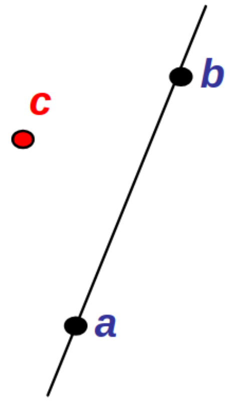
$$\det(a, b, c) = \begin{cases} > 0 - \text{punkt jest po lewej stronie prostej} \\ < 0 - \text{punkt jest po prawej stronie prostej} \\ = 0 - \text{punkt jest współliniowy} \end{cases}$$

Z tą wiedzą możemy dokonać obliczeń, ale ze względu na właściwości arytmetyki zmienno--przecinkowej, niezalecane jest bezpośrednie przyrówanie wyznacznika do zera.

Jedną z możliwości jest przyrównanie modułu różnicy liczby z zerem do jakiegoś małego ε :

$$|x - 0.0| \leq \varepsilon$$

Dla wszystkich obliczeń poniżej oprócz zbioru D, przyjmiemy $\varepsilon = 10^{-16}$.



Rysunek 1: Punkt c i prosta wyznaczona przez a, b. Punkt c znajduje się po lewej stronie.

4. Realizacja zadania

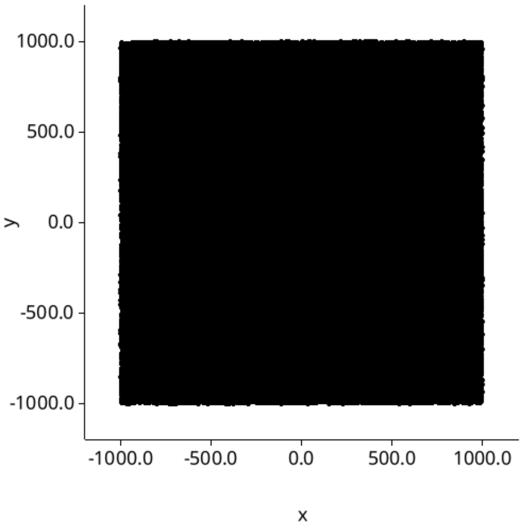
Na wszystkich poniższych wizualizacjach do oznaczenia położenia punktów względem prostej zostały użyte następujące kolory:

- **Niebieski** - dla punktów współliniowych,
- **Czerwony** - dla punktów po prawej,
- **Zielony** - dla punktów po lewej

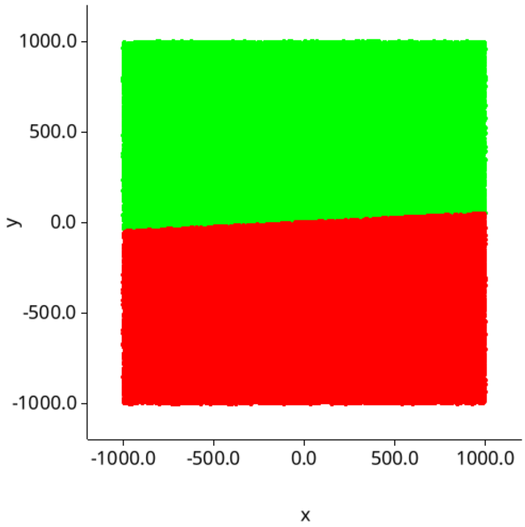
Oraz następujące oznaczenia dla tablic:

- **f32** - liczby zmienno-przecinkowe 32-bitowe
- **f64** - liczby zmienno-przecinkowe 64-bitowe
- **det_3x3** - wyznacznik macierzy 3x3
- **det_2x2** - wyznacznik macierzy 2x2
- **det_3x3_lib** - wyznacznik macierzy 3x3 z biblioteki *ndarray-linalg*
- **det_2x2_lib** - wyznacznik macierzy 2x2 z biblioteki *ndarray-linalg*

4.1. Zbiór A



Rysunek 2: Zbiór A - 10^5 punktów o współrzędnych z przedziału $[-1000, 1000]$



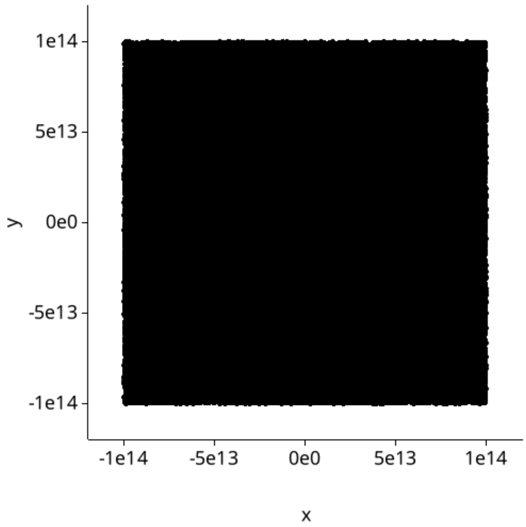
Rysunek 3: Zbiór A po pokolorowaniu punktów według kryterium

Typ liczb zmienno--przecinkowych	Rodzaj wyznacznika	Liczba punktów po lewej	Liczba punktów po prawej	Liczba punktów współliniowych
f32	det_2x2	50276	49724	0
	det_3x3	50276	49724	0
	det_2x2_lib	50276	49724	0
	det_3x3_lib	50276	49724	0
f64	det_2x2	50276	49724	0
	det_3x3	50276	49724	0
	det_2x2_lib	50276	49724	0
	det_3x3_lib	50276	49724	0

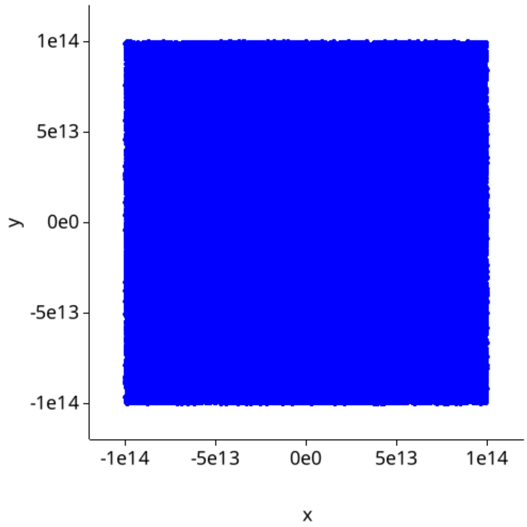
Tabela 1: Wyniki klasyfikacji zbioru A

W tym zbiorze, niezależnie od doboru precyzji czy wyznacznika, otrzymujemy te same rezultaty. Zostało to przedstawione w Tabeli 1.

4.2. Zbiór B



Rysunek 4: Zbiór B - 10^5 punktów o współrzędnych z przedziału $[-10^{14}, 10^{14}]$



Rysunek 5: Zbiór B po pokolorowaniu punktów według kryterium dla **f32**, **det_2x2**

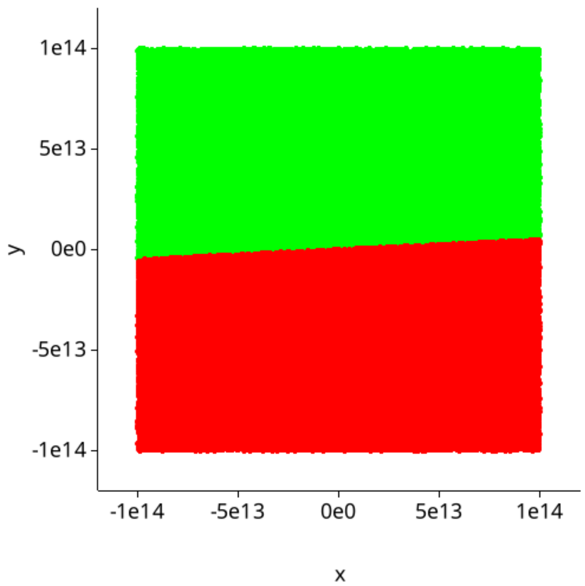
Typ liczb zmienno--przecinkowych	**Rodzaj wyznacznika**	**Liczba punktów po lewej**	**Liczba punktów po prawej**	**Liczba punktów współliniowych**
f32	det_2x2	0	0	100000
	det_3x3	49871	50129	0
	det_2x2_lib	12153	12182	75665
	det_3x3_lib	49871	50129	0
f64	det_2x2	49868	50125	7
	det_3x3	49871	50129	0
	det_2x2_lib	49869	50126	5
	det_3x3_lib	49871	50129	0

Tabela 2: Wyniki klasyfikacji zbioru B

Po analizie danych w Tabeli 2, możemy zauważyć, że w przypadku 32-bitowych liczb zmienno-przecinkowych i wyznaczniku 2x2 wszystkie punkty zostały zaklasyfikowane jako współliniowe. Wynika to ze sposobu liczenia tego wyznacznika, utraty precyzji oraz zakresu liczb. Ponieważ liczymy różnicę między liczbami których wszystkie bity mantysy określają cyfry przed przecinkiem, a 0.1 (druga współrzędna punktu b), nie posiadamy dostatecznej precyzji aby otrzymać poprawny wynik, co powoduje zerowanie wyznacznika. Jednym z rozwiązań jest przeskalowanie wektora $\vec{ab}$. Przykładowo, możemy pomnożyć przez 10^{10} każdą współrzędną otrzymując:

$$a = [-10^{10}, 0], b = [10^{10}, 10^9]$$

Dzięki temu otrzymujemy te same rezultaty dla każdej kombinacji precyzji i wyznacznika.

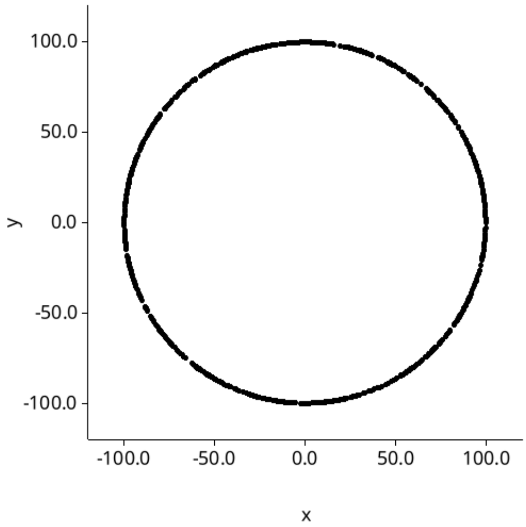


Rysunek 6: Pokolorowane punkty zbioru B po przeskalowaniu wektora $\vec{ab}$

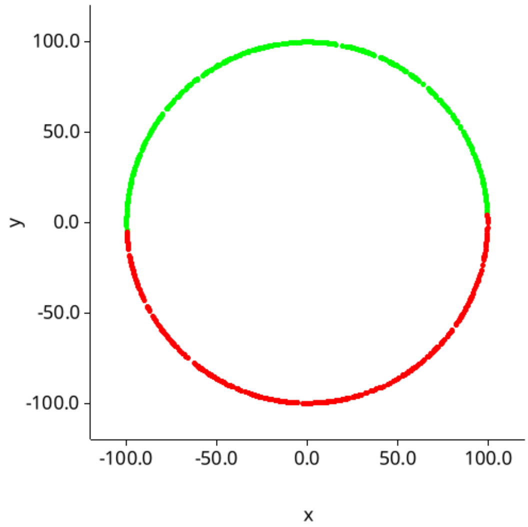
Typ liczb zmienno--przecinkowych	**Rodzaj wyznacznika**	**Liczba punktów po lewej**	**Liczba punktów po prawej**	**Liczba punktów współliniowych**
f32	det_2x2	49871	50129	0
	det_3x3	49871	50129	0
	det_2x2_lib	49871	50129	0
	det_3x3_lib	49871	50129	0
f64	det_2x2	49871	50129	0
	det_3x3	49871	50129	0
	det_2x2_lib	49871	50129	0
	det_3x3_lib	49871	50129	0

Tabela 3: Wyniki klasyfikacji zbioru B po przeskalowaniu wektora $\vec{ab}$

4.3. Zbiór C



Rysunek 7: Zbiór C - 1000 punktów położonych na okręgu o środku $(0, 0)$ oraz promieniu $R = 100$



Rysunek 8: Zbiór C po pokolorowaniu punktów według kryterium

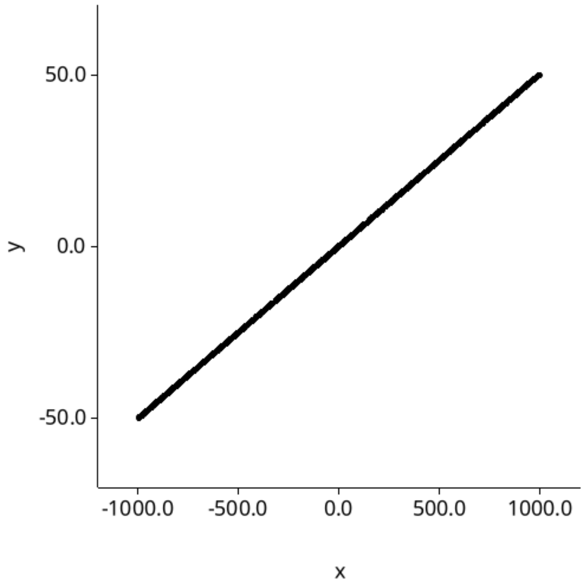
Typ liczb zmienno- -przecinkowych	**Rodzaj wyznacznika**	**Liczba punktów po lewej**	**Liczba punktów po prawej**	**Liczba punktów współliniowych**
f32	det_2x2	504	496	0
	det_3x3	504	496	0
	det_2x2_lib	504	496	0
	det_3x3_lib	504	496	0
f64	det_2x2	504	496	0
	det_3x3	504	496	0
	det_2x2_lib	504	496	0
	det_3x3_lib	504	496	0

Tabela 4: Wyniki klasyfikacji zbioru C

Otrzymujemy te same liczby punktów dla każdej precyzji i wyznacznika. W tym przypadku, aby wygenerować równomiernie punkty na okręgu, losowany był kąt θ z zakresu $[0, 2\pi]$, aby skorzystać z równania parametrycznego okręgu:

$$P = (R \cos \theta, R \sin \theta)$$

4.4. Zbiór D



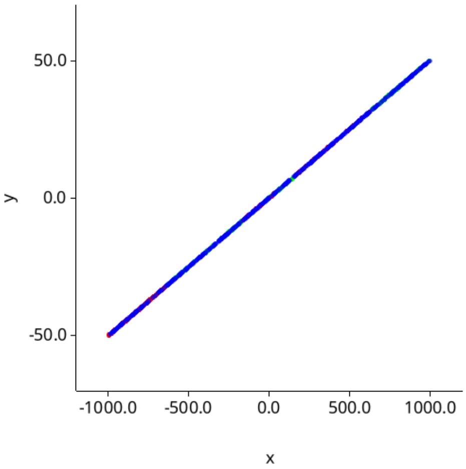
Rysunek 9: Zbiór D - 1000 punktów z zakresu $[-1000, 1000]$, leżących na prostej wyznaczonej przez wektor $\vec{ab}$

Punkty w tym zbiorze zostały wygenerowane za pomocą prostej $y = 0.05x + 0.05$, którą jednoznacznie wyznaczają punkty a i b.

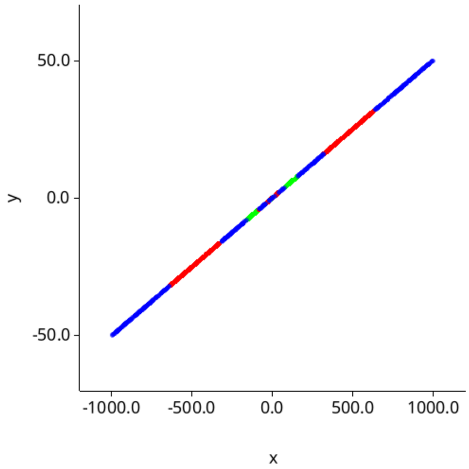
ε	Typ liczb zmienno--przecinkowych	Rodzaj wyznacznika	Liczba punktów po lewej	Liczba punktów po prawej	Liczba punktów współliniowych
10^{-16}	f32	det_2x2	167	170	663
		det_3x3	77	326	597
		det_2x2_lib	170	210	620
		det_3x3_lib	68	217	715
	f64	det_2x2	144	142	714
		det_3x3	183	411	406
		det_2x2_lib	158	170	672
		det_3x3_lib	116	171	713
10^{-10}	f32	det_2x2	167	170	663
		det_3x3	77	326	597
		det_2x2_lib	170	210	620
		det_3x3_lib	68	217	715
	f64	det_2x2	0	0	1000
		det_3x3	0	0	1000
		det_2x2_lib	0	0	1000
		det_3x3_lib	0	0	1000

Tabela 5: Wyniki klasyfikacji zbioru D

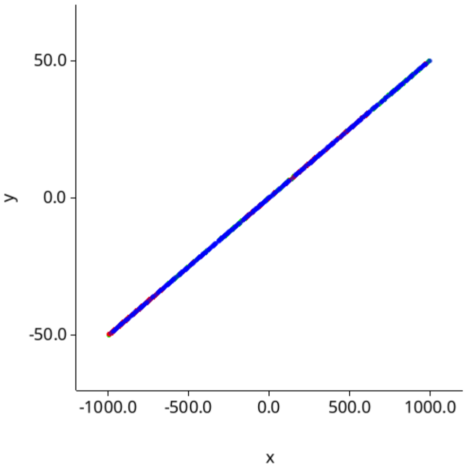
Wizualizacje wszystkich kombinacji dla $\varepsilon = 10^{-16}$ zbioru D:



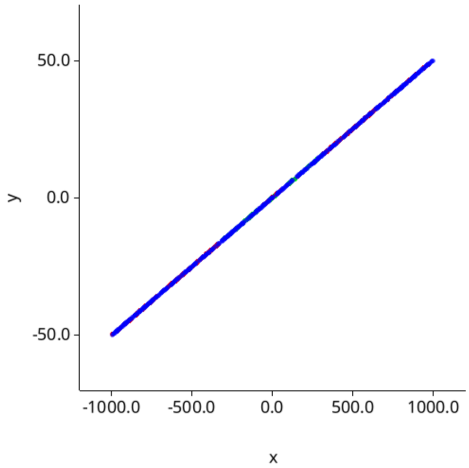
Rysunek 10: f32 - det_2x2



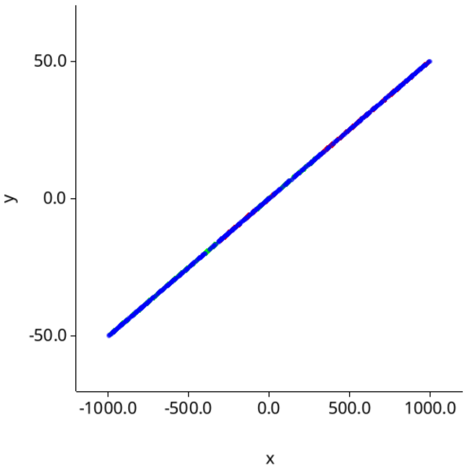
Rysunek 11: f32 - det_3x3



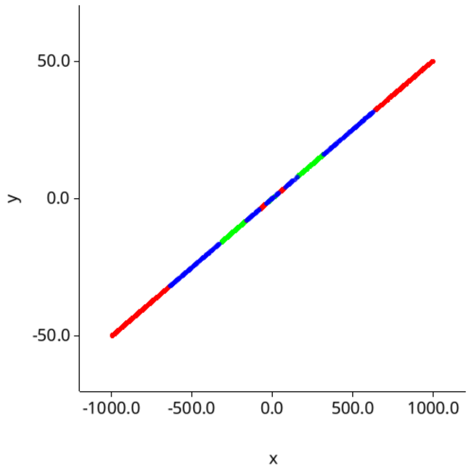
Rysunek 12: f32 - det_2x2_lib



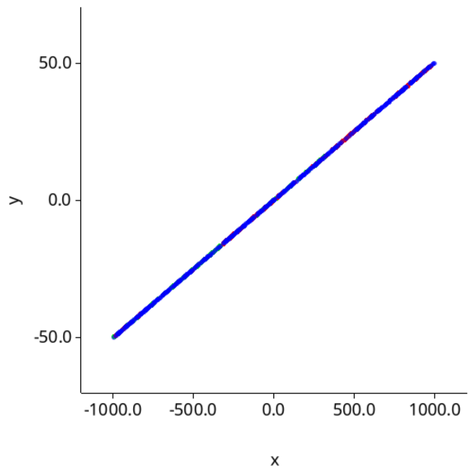
Rysunek 13: f32 - det_3x3_lib



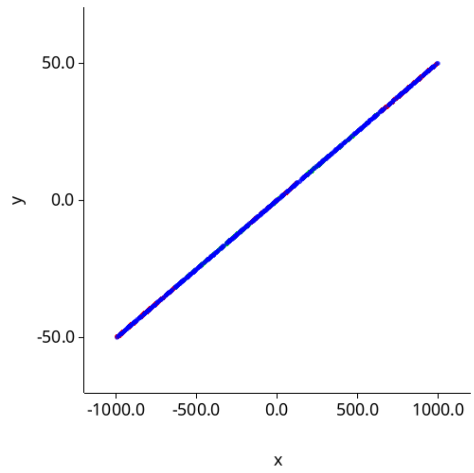
Rysunek 14: f64 - det_2x2



Rysunek 15: f64 - det_3x3



Rysunek 16: f64 - det_2x2



Rysunek 17: f64 - det_3x3_lib

W tym zbiorze wyniki stały się bardzo różnorodne w porównaniu do poprzednich. Dla $\varepsilon = 10^{-16}$ wyznacznik 3x3 klasyfikował jako należące do prostej mniej punktów od wszystkich innych wyznaczników. W przypadku $\varepsilon = 10^{-10}$, dla f64 jako współliniowe zostały zakwalifikowane wszystkie punkty, niezależnie od wyboru wyznacznika.

5. Wnioski

Z przeprowadzonych obliczeń można wyciągnąć następujące wnioski:

- Dobór precyzji liczb zmienno-przecinkowych ma ogromnie znaczenie, na ogół f64 zapewnia o wiele lepsze wyniki od f32, w szczególności dla dużych zakresów.
- Wybór odpowiedniego sposóbu porównywania liczb zmienno-przecinkowych do naszych potrzeb ma ogromne znaczenie, w tym dobór tolerancji dla zera.
- Implementacja własnego, szczególnego wyznacznika może przynieść wiele korzyści, aniżeli korzystanie z bibliotecznego, generalizowanego wyznacznika $n \times n$.
- Warto wykonać testy sprawdzające jak zachowują się dane operacje na liczbach zmienno-przecinkowych przy konkretnych zakresach, jak na przykład w przypadku zbioru B.
- Wizualizacje danych pozwalają czasami na zauważenie wcześniej nieoczywistych, niechcianych anomalii, które po tym jesteśmy w stanie rozwiązać.