Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

AULA 2 – Electrostática II

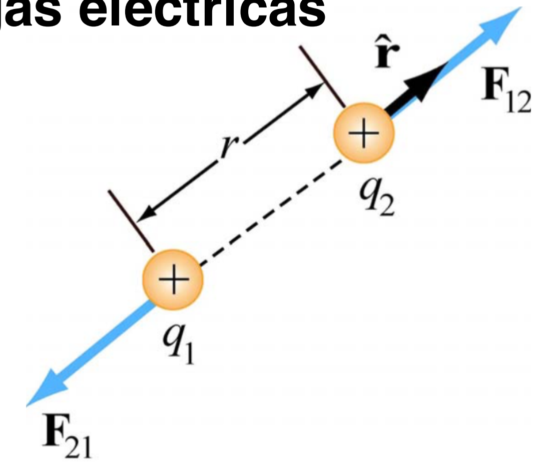
Campo eléctrico no vácuo e conceitos fundamentais da electrostática

- Trabalho da força eléctrica e campos conservativos
- Potencial eléctrico e diferença de potencial
- Potencial criado por distribuições de cargas estacionárias
- Relação entre potencial eléctrico e campo eléctrico
- Superfícies equipotenciais

Popovic & Popovic Cap. 4

Revisão da última aula

Cargas eléctricas



Lei de Coulomb

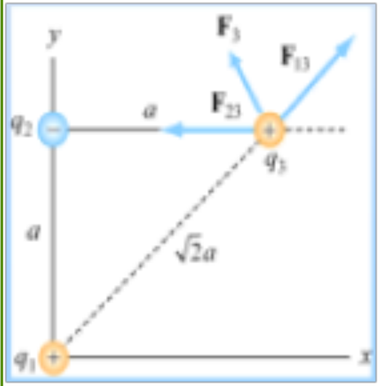
$$\vec{F} = k\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Campo eléctrico

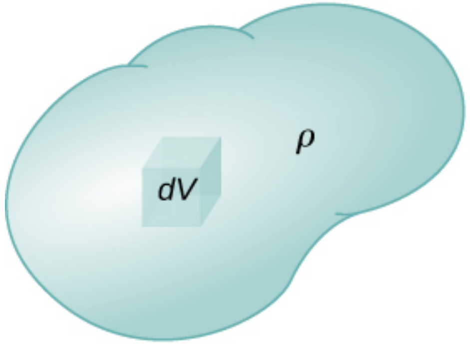
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\,\vec{u}_{r_i}$$

Princípio da sobreposição

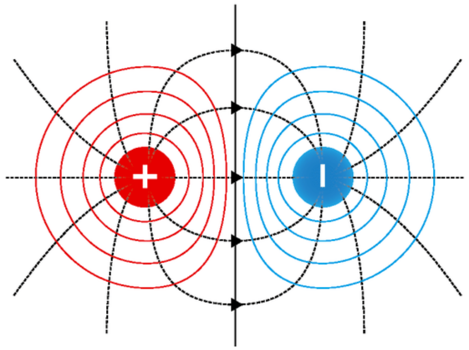


$$\vec{F}_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Densidade de carga



Dipolo eléctrico



Campos conservativos

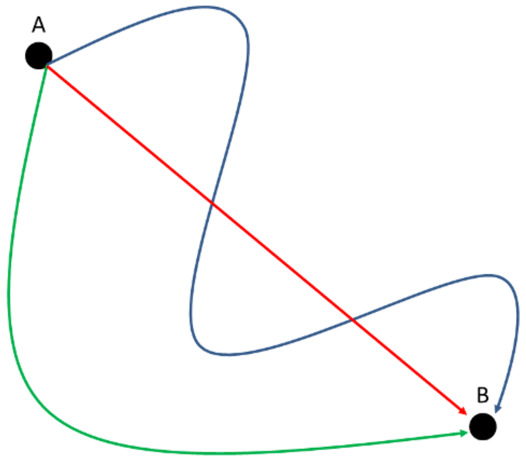
Num **campo conservativo**:

- O trabalho realizado pela força entre dois pontos A e B não depende do caminho escolhido

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} \qquad [\,\mathrm{J}\,]$$

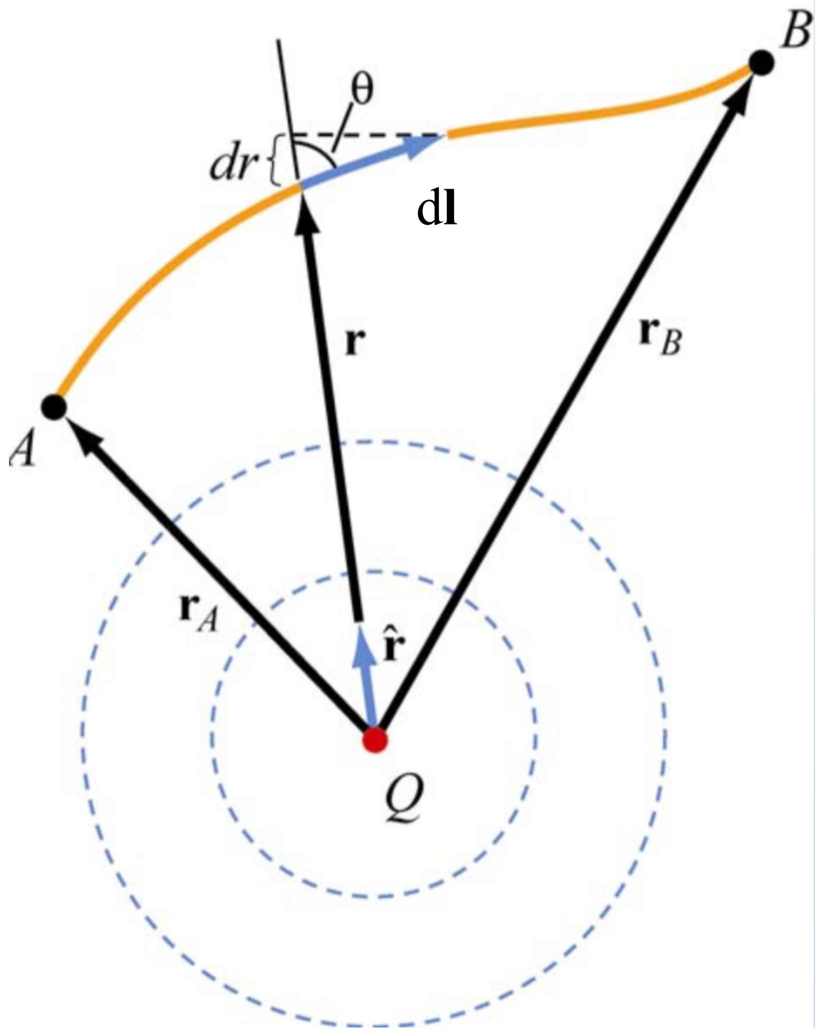
- Logo, o trabalho realizado num percurso fechado é nulo

$$W_{AA} = \oint \vec{F}.\overrightarrow{dl} = 0$$



Trabalho da força eléctrica entre dois pontos

Vamos calcular o trabalho da força eléctrica de uma carga Q sobre uma carga de teste Q_0 num percurso entre A e B*



$$W = \int \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{QQ_0}{r^2}\vec{u}_r.\overrightarrow{dl} = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr$$

$$= \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

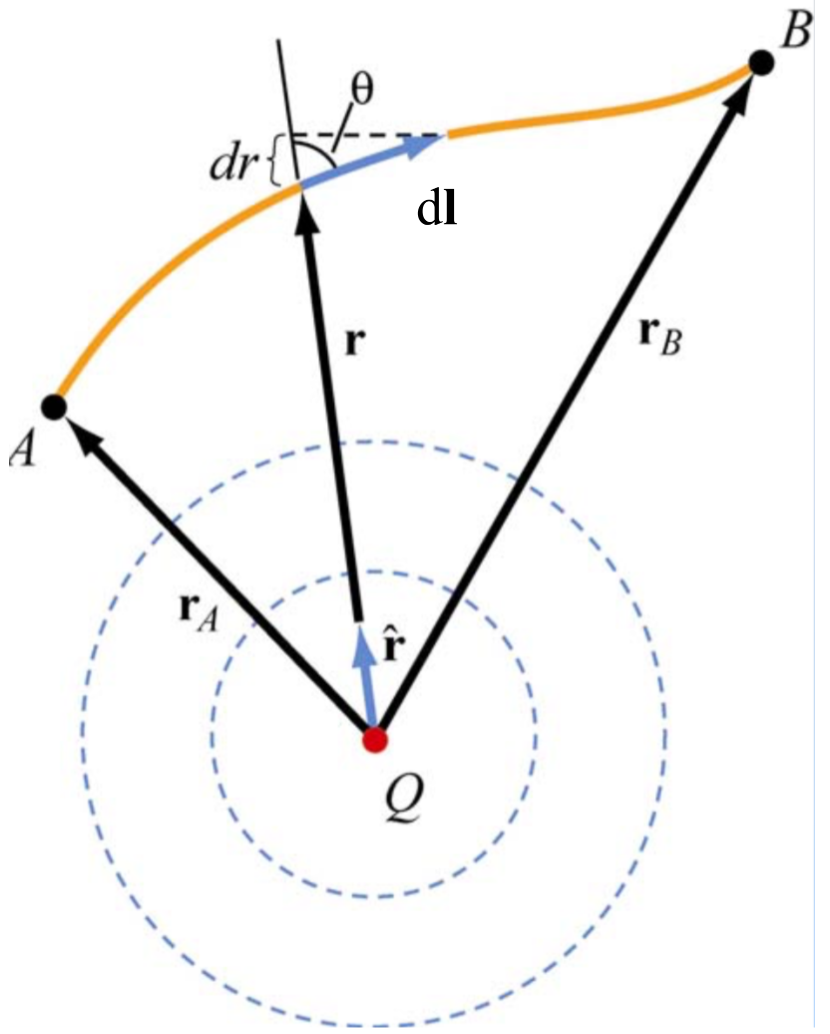
* Note que $\vec{u}_r.\overrightarrow{dl} = dl.\cos\theta = dr$, isto é, a projecção de $\overrightarrow{dl}$ na direcção radial.

O campo electrostático é conservativo

$$W_{AB} = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Assumindo $r_A < r_B$:
- Cargas com mesmo sinal: $W_{AB} > 0$
- Cargas com sinal oposto: $W_{AB} < 0$

- Se $A = B$ (percurso fechado): $W_{AA} = 0$



O campo electrostático é conservativo

Usando o princípio da sobreposição, pode-se generalizar esta conclusão para um qualquer número de cargas:

$$W = \oint \overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{dl} + \oint \overrightarrow{F_2}.\overrightarrow{dl} + \cdots = 0 \Longrightarrow \oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$$

Usando o Teorema de Stokes, podemos escrever esta expressão para concluir que **o rotacional do campo eléctrico é nulo**:

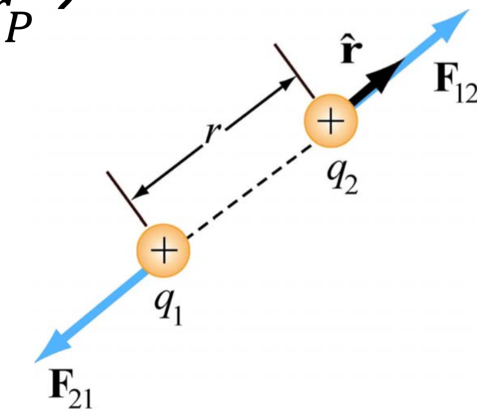
$$\boxed{\oint \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \iint (\vec{\nabla}\times\vec{F}).\overrightarrow{dA}} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

Teorema de Stokes

Energia potencial electrostática

Uma dada distribuição de cargas exige a realização de **trabalho**.

Consideremos uma carga $(+)Q_1$ num ponto do espaço. Qual o trabalho realizado a trazer uma carga $(+)Q_2$ até uma distância r_P?



$$W = \int_{\infty}^{P} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_P} \frac{1}{r^2} dr = - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r_p}$$

$\vec{F} \propto -\vec{E}$ porque as cargas se repelem

$$= \boxed{Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_P} \equiv U_e} \quad [\,\mathrm{J}\,]$$

A este trabalho chama-se **energia potencial electrostática**.

Potencial eléctrico

A expressão anterior pode ser escrita na forma $U_e = Q_2 V$, onde

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_P} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \boxed{\int_{P}^{\infty} \vec{E}.\overrightarrow{dl}} \quad [\mathrm{W/C}] = [\mathrm{V}]$$

é o **potencial eléctrico** no ponto P, criado pela carga Q_1. Como $V = U_e/Q$:

> O potencial eléctrico num ponto P do espaço corresponde ao **trabalho por unidade de carga** que é necessário realizar para trazer uma carga desde um ponto de referência até esse ponto.

Como para o campo, com mais que uma carga usa-se o princípio da sobreposição.

O potencial eléctrico é análogo ao potencial gravítico...

Força gravítica:

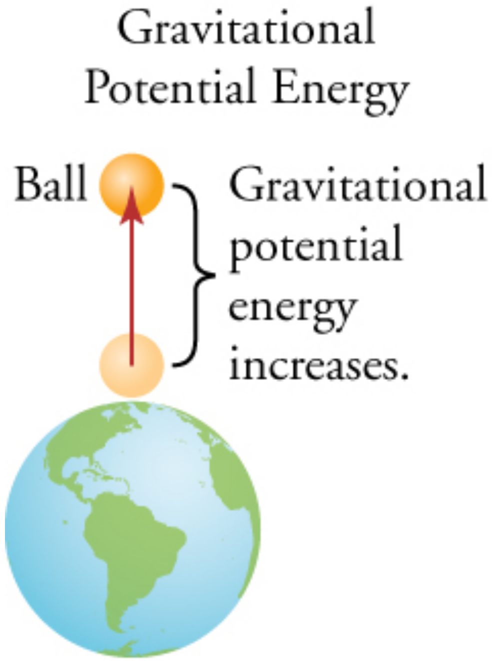
$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}$$

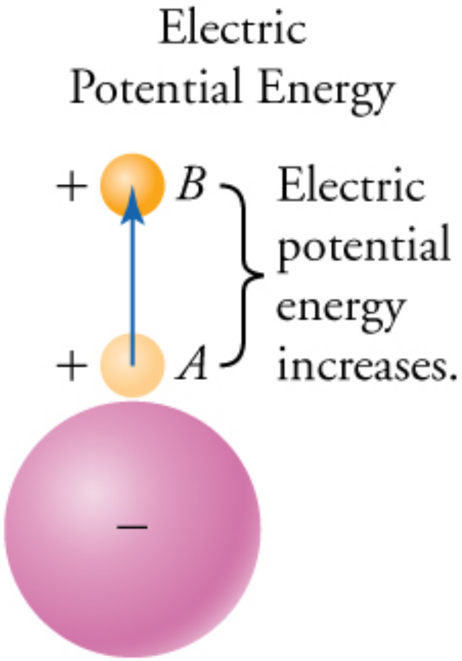
Energia potencial gravítica:

$$U_g = -G\frac{Mm}{r}$$

Potencial gravítico:

$$V = -G\frac{M}{r} = U_g/m$$





Força eléctrica:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

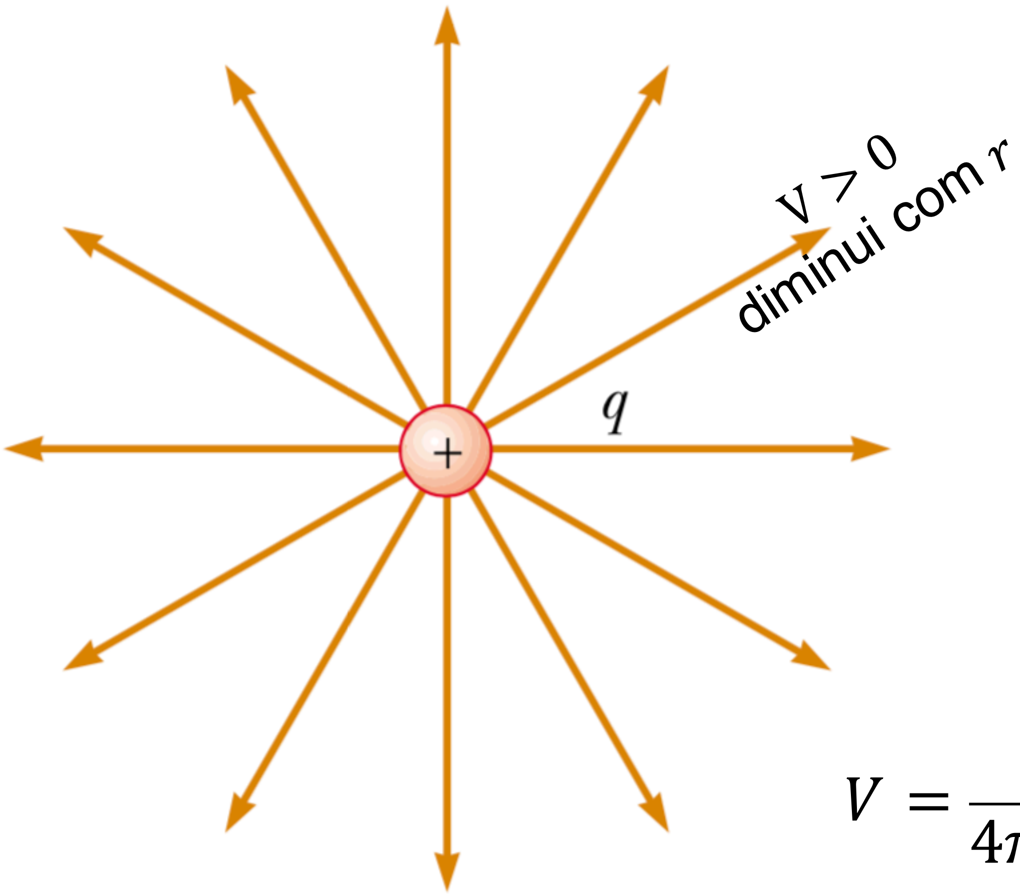
Energia potencial electrostática:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r}$$

Potencial eléctrico:

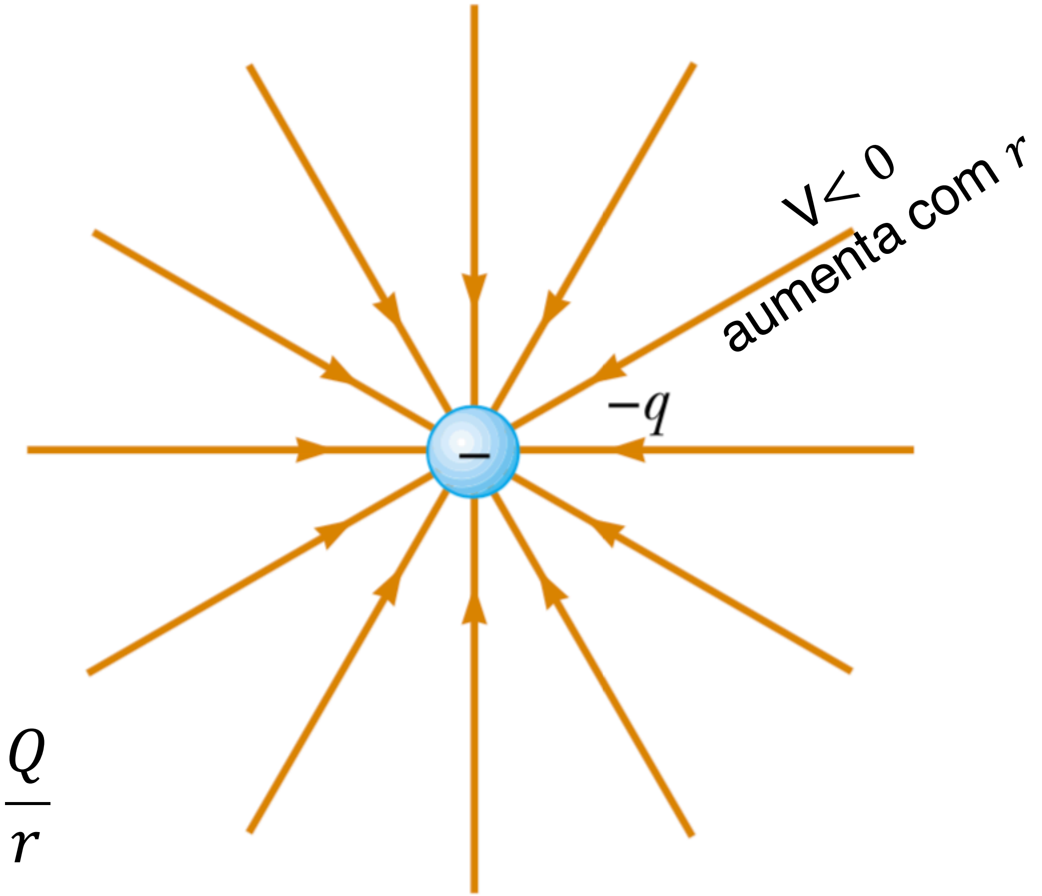
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} = U_e/q$$

... mas o potencial eléctrico pode ser positivo ou negativo



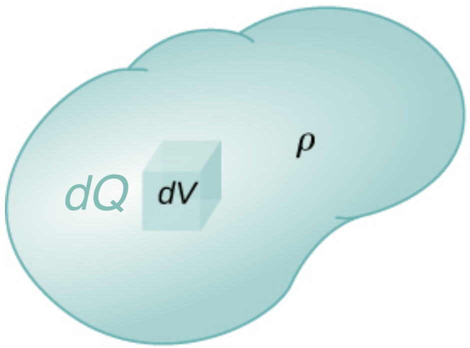
Carga positiva

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$



Carga negativa

Distribuições contínuas de carga

Densidade de carga linear	Densidade de carga em superfície	Densidade de carga em volume
		
$\lambda(\vec{r}) = \frac{dQ}{dl}\ [\mathrm{C.m^{-1}}]$	$\sigma(\vec{r}) = \frac{dQ}{dA}\ [\mathrm{C.m^{-2}}]$	$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV}\ [\mathrm{C.m^{-3}}]$
$Q = \int \lambda(\vec{r})dl$	$Q = \int_s \sigma(\vec{r})dA$	$Q = \int_v \rho(\vec{r})dV$

Potencial eléctrico de distribuições contínuas de carga

Distribuição linear

$$dq = \lambda dl$$

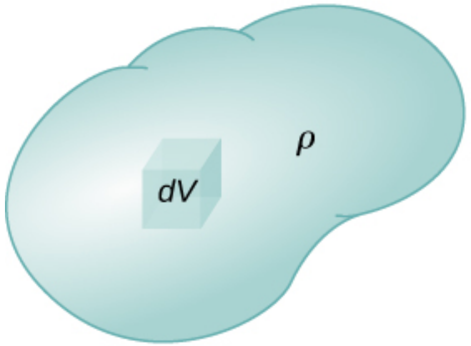
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{r}$$

Distribuição em superfície

$$dq = \sigma dA$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint \frac{\sigma dA}{r}$$

Distribuição em volume



$$dq = \rho dv$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho dv}{r}$$

Diferença de potencial

$$\left(V_P = \int_P^{\infty} \vec{E}.\overrightarrow{dl} \right)$$

A **diferença de potencial** entre dois pontos A e B é dada por

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^{Ref} \vec{E}.\overrightarrow{dl} - \int_B^{Ref} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_A^{Ref} \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \int_{Ref}^{B} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$\boxed{V_{AB} = \int_A^{B} \vec{E}.\overrightarrow{dl} \qquad [\,V\,]}$$

Diferença de potencial

Ref designa um ponto de referência, normalmente o infinito. Como se pode ver, a escolha da referência não contribui para a diferença de potencial.

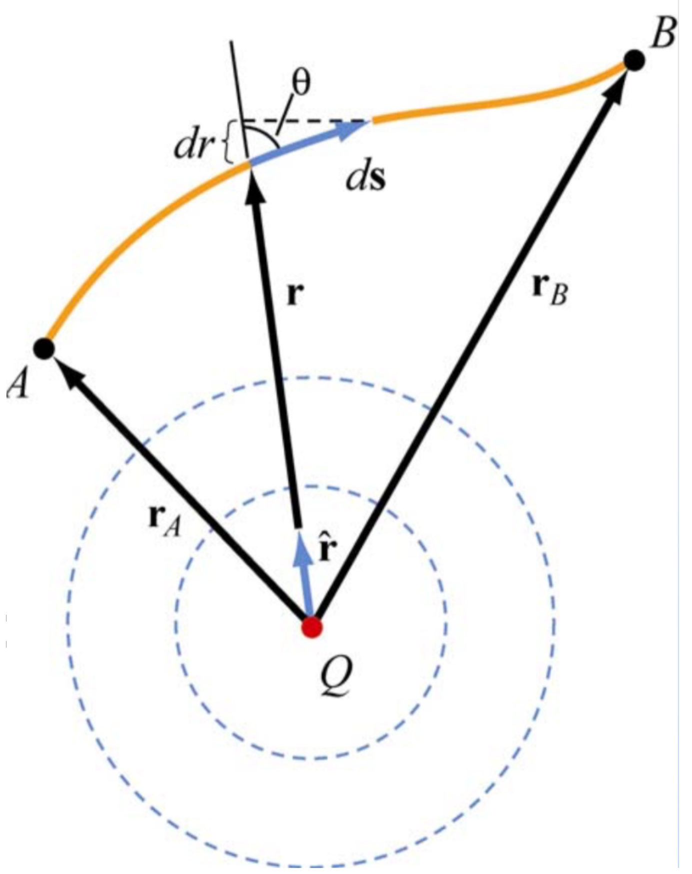
Exemplo: diferença de potencial no campo de uma carga pontual

$$\left(V_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}\right)$$

A d. d. p. $V_{AB} = V_A - V_B$ entre dois pontos A e B é:

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_A^B \frac{\vec{u}_r}{r^2}.\overrightarrow{dl}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$



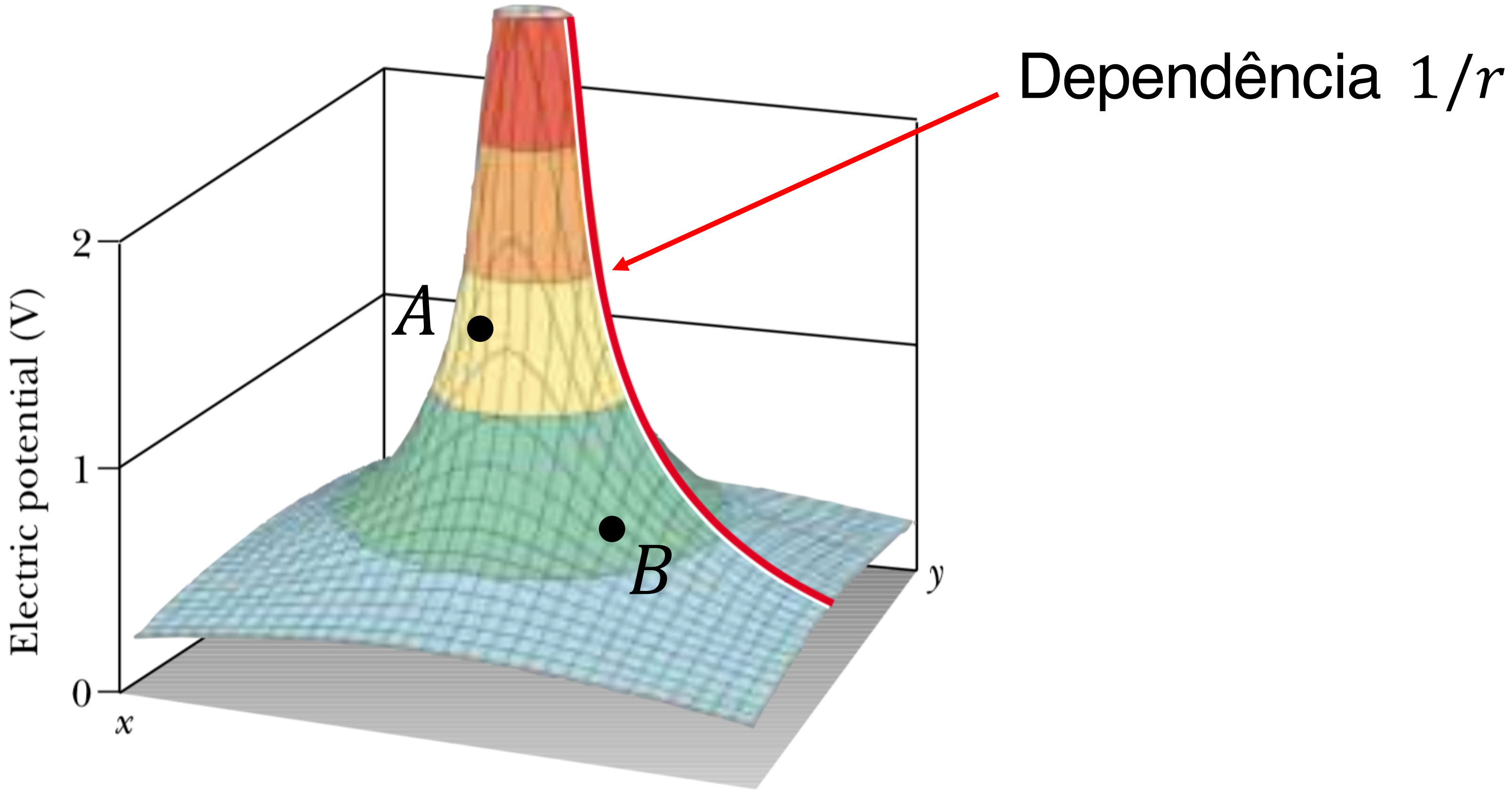
Tomando o ponto B no infinito, obtém-se a expressão geral:

$$V(r_A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_A}$$

Exemplo: diferença de potencial no campo de uma carga pontual

$$\left(V_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}\right)$$

Potencial de uma carga pontual positiva



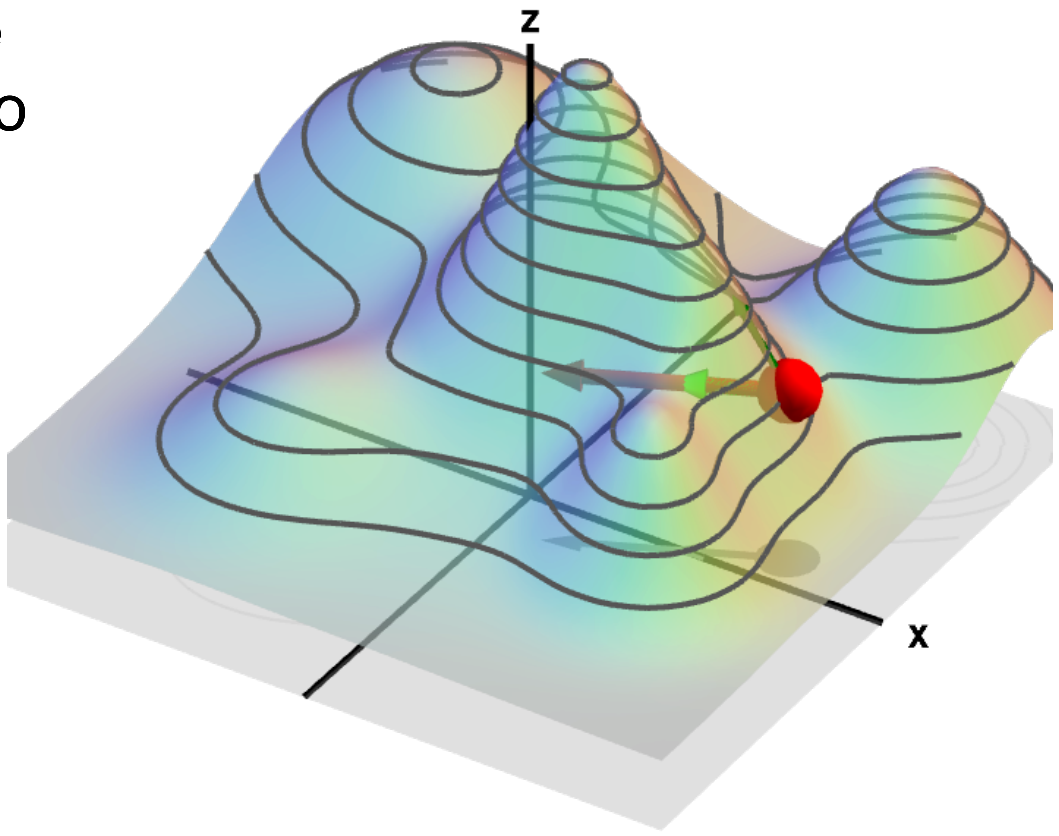
Gradiente de uma função escalar

Para um dado ponto no espaço (x, y) qual é a direcção que introduz a **maior variação** no valor de $z = f(x, y)$?

R: O **gradiente** $\nabla f(x, y)$:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y = \frac{df}{\overrightarrow{dl}}$$

É uma **função vectorial** que aponta na direcção do maior declive (crescimento).



O campo eléctrico é o gradiente do potencial eléctrico

$$\left(V_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}\right)$$

Tendo em conta a definição anterior:

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} = V_A - V_B = -\int_A^B dV = -\int_A^B \frac{dV}{\overrightarrow{dl}} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Daqui obtém-se uma relação entre $\vec{E}$ (campo vectorial) e V (campo escalar):

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{dV}{\overrightarrow{dl}} \equiv -\vec{\nabla} V} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right) \quad [\mathrm{V/m}]$$

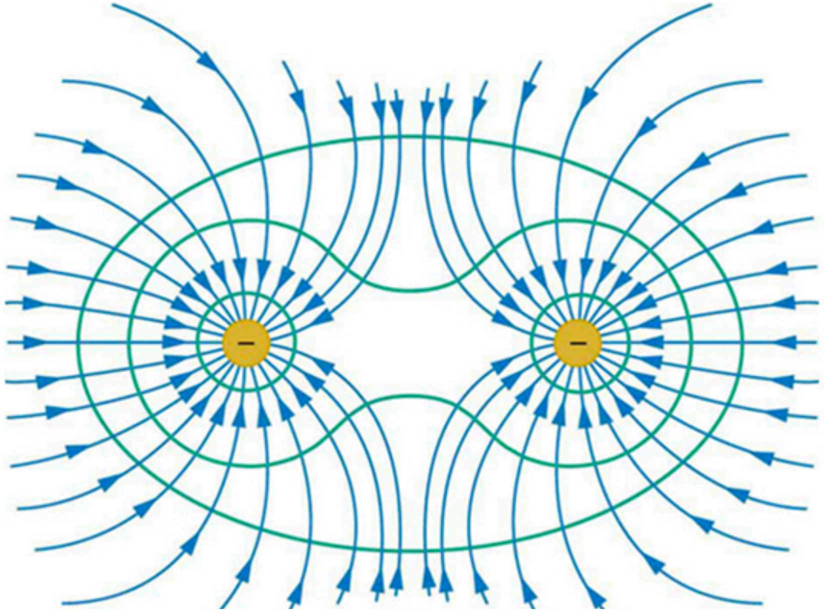
As linhas de campo apontam **na direcção em que o potencial diminui**.

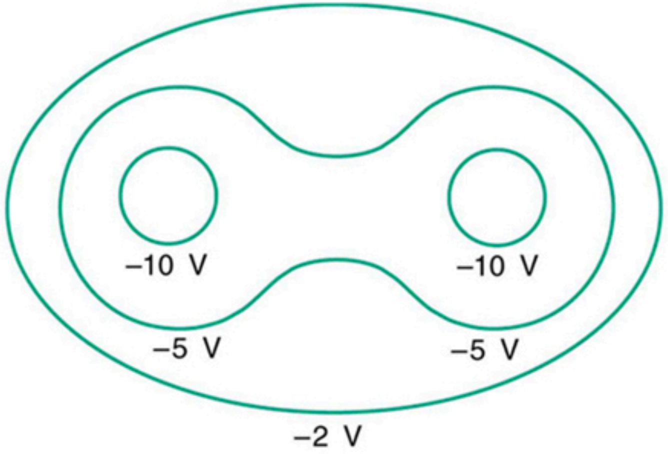
Superfícies equipotenciais

São superfícies ao longo das quais o potencial não varia:

$$dV = 0 = \vec{E}.\overrightarrow{dl} \ \rightarrow \vec{E} \perp \overrightarrow{dl}$$

As linha de campo são **perpendiculares** às superfícies equipotenciais.

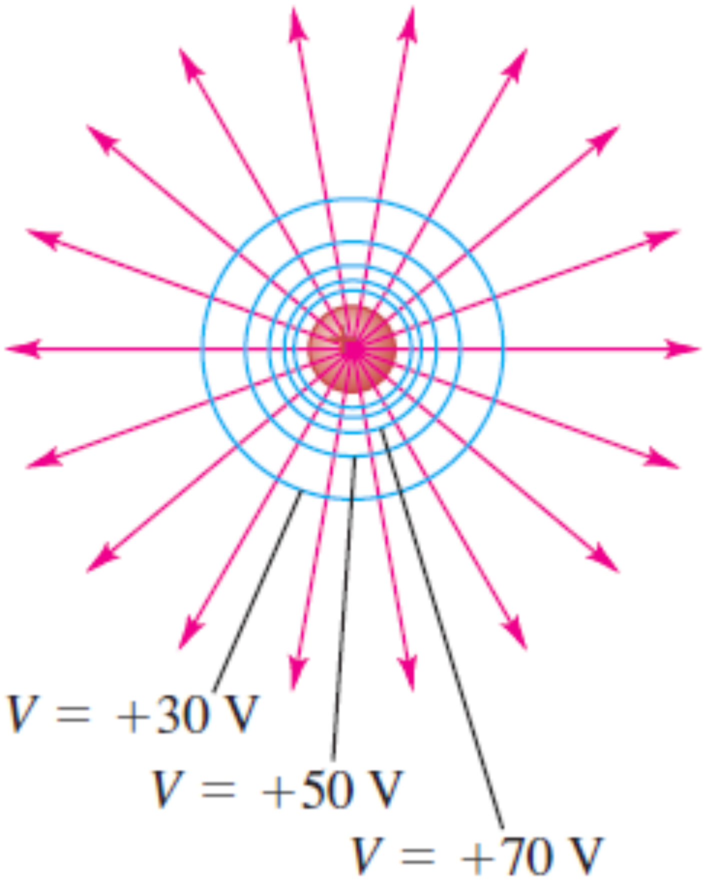




Exemplo: carga individual – equipotenciais e linhas de campo

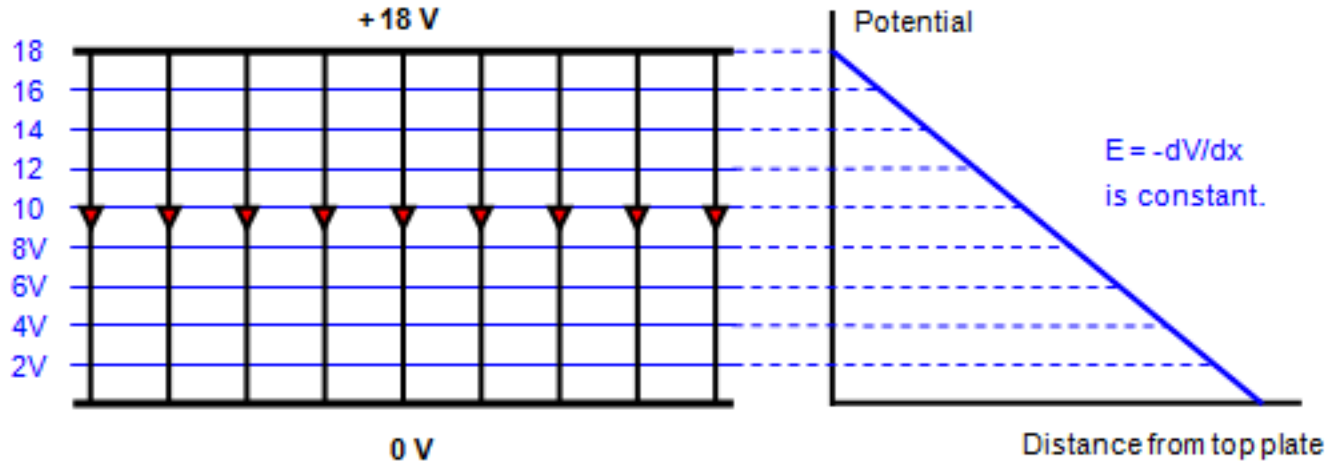
Para uma carga pontual positiva:

- As equipotenciais são **superfícies esféricas** centradas na carga
- As linhas de campo são **rectas** que emergem da carga em direcção ao infinito
- À medida que r aumenta, as equipotenciais ficam mais espaçadas e o potencial diminui



Exemplo: campo eléctrico uniforme – potencial e linhas de campo

Entre duas placas planas e carregadas em que exista uma diferença de potencial ΔV, surge um campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -(d\Delta V/dx)\vec{e}_x$

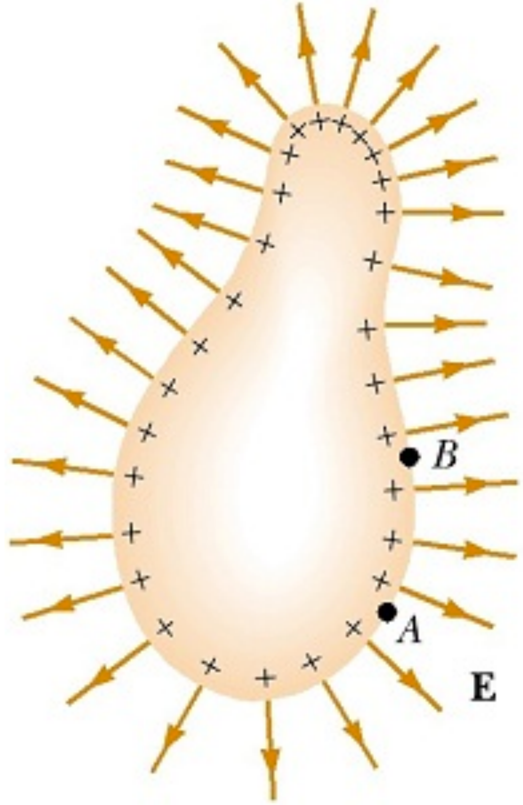


As superfícies equipotenciais são planos perpendiculares às linhas de campo e regularmente espaçados.

Exemplo: potencial, equipotenciais e campo eléctrico de um condutor

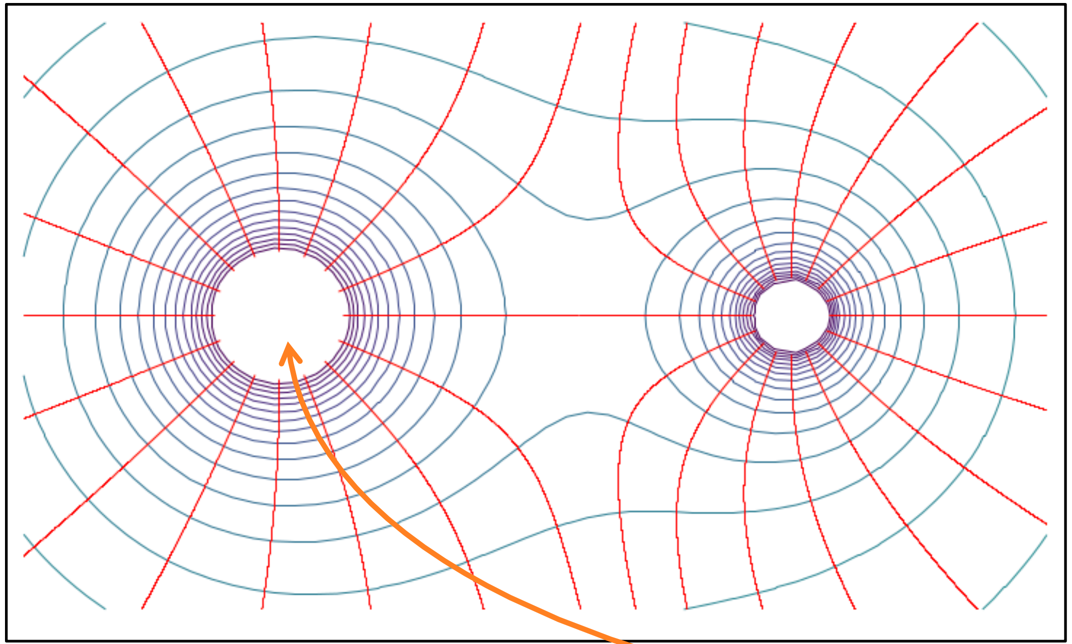
Num condutor de forma arbitrária:

- O campo eléctrico no interior é **nulo**
- Caso tenha carga, esta distribui-se pela superfície (distribuição superficial de carga σ)
- O campo eléctrico no exterior é **perpendicular** à superfície e tem o valor σ/ϵ_0
- Num condutor de forma irregular, a densidade de carga é maior nas regiões em que a superfície é mais curva
- **Todo o condutor é uma equipotencial**



Equipotenciais e curvas de nível

Equipotenciais: potencial eléctrico constante



Curvas de nível: potencial gravítico (altitude) constante

Regiões de potencial constante (condutores / lagos)

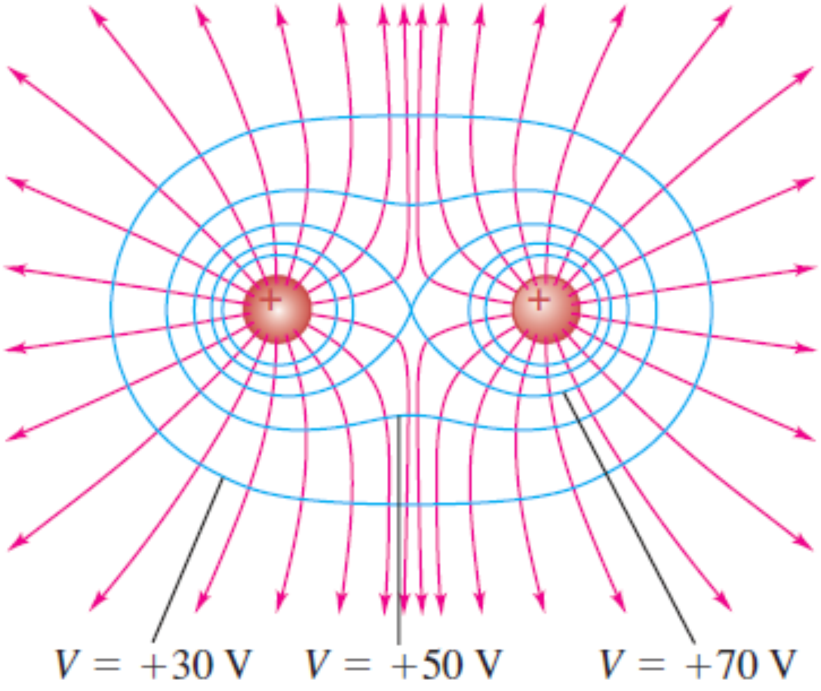
Exemplo: potencial e linhas de campo do dipolo eléctrico

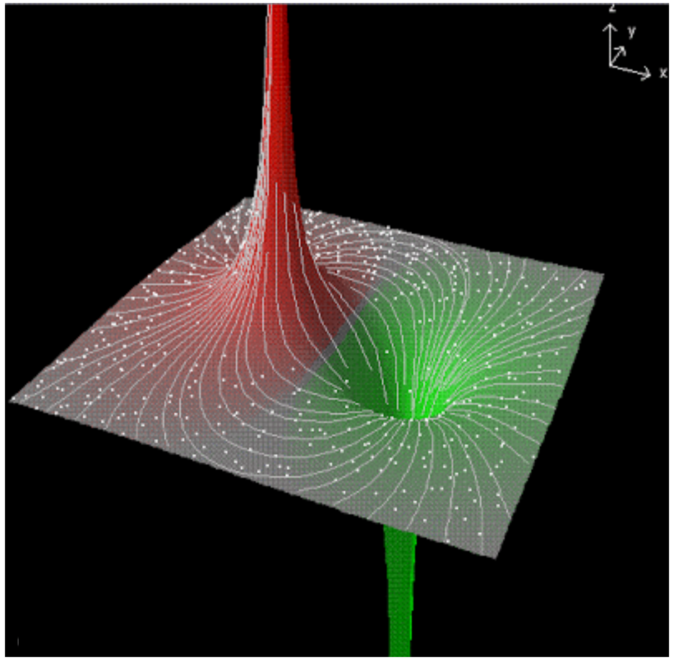
Usando o princípio da sobreposição:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-}$$

$$V_{total} = V_{+} + V_{\downarrow}$$

É muito mais fácil fazer cálculos com o potencial (escalar) e depois obter o campo eléctrico (vectorial)





Exemplo:
dipolo eléctrico – potencial

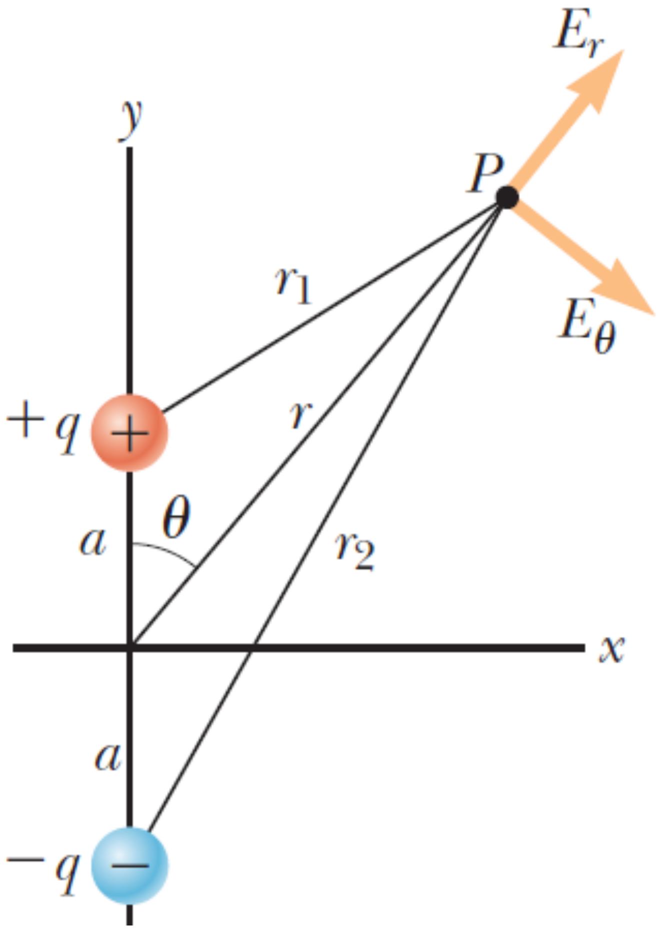
Queremos determinar $V_P = V_+ + V_\downarrow$ num ponto P:

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r} - a\vec{e}_y \\ \vec{r}_2 &= \vec{r} + a\vec{e}_y \end{aligned}$$

Na aproximação $a \ll r$ temos

$$V_P \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

onde $\vec{p} = 2aq\vec{e}_y$ é o **momento dipolar**, já definido.

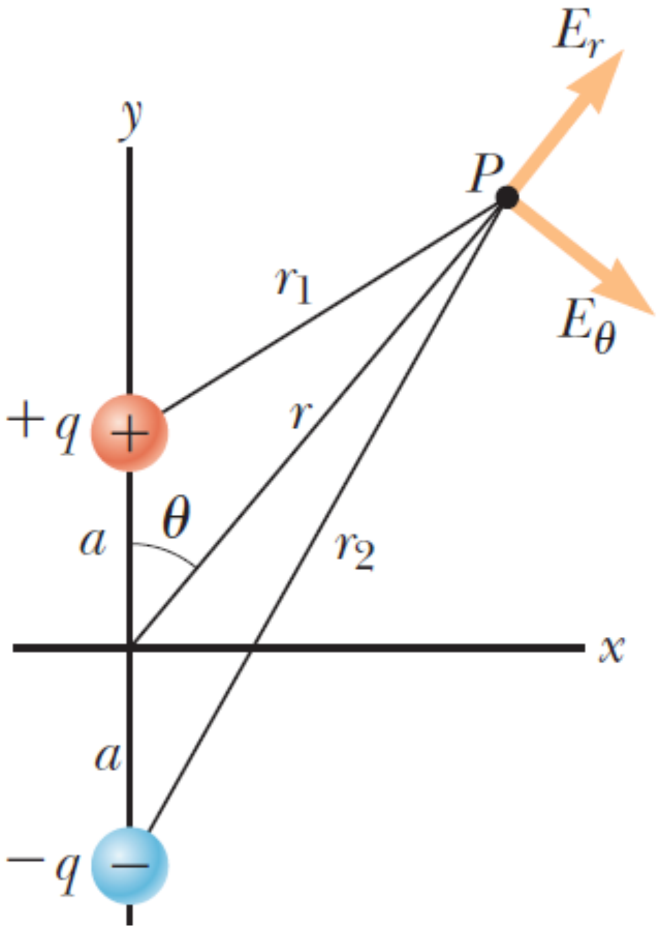


Exemplo:
dipolo eléctrico – campo eléctrico

Podemos determinar $\vec{E}$ calculando o gradiente de V_P.
Por conveniência, vamos usar coordenadas cilíndricas:

$$E_r = -\frac{\partial V_P}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_P}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$



O campo dipolar decresce mais rapidamente ($1/r^3$) do que o de uma carga pontual ($1/r^2$).

Revisão de conceitos

Trabalho da força eléctrica

Campo conservativo

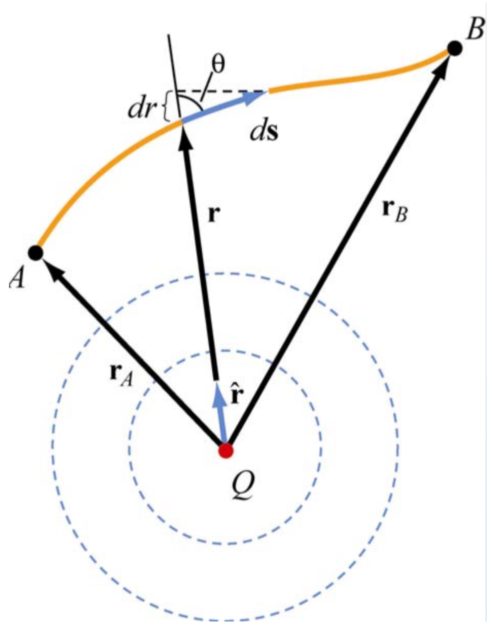
Energia potencial electrostática

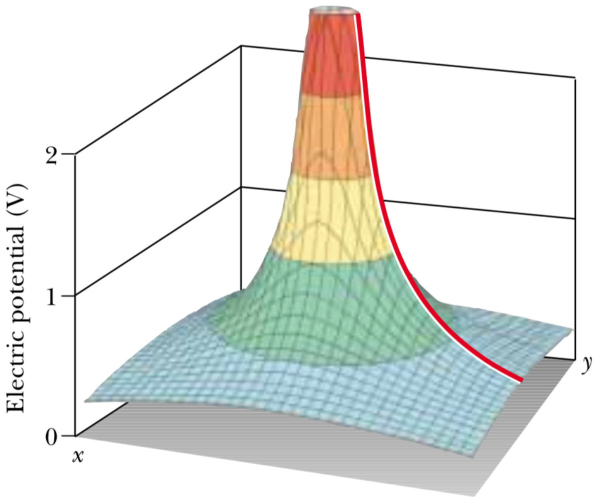
Potencial eléctrico

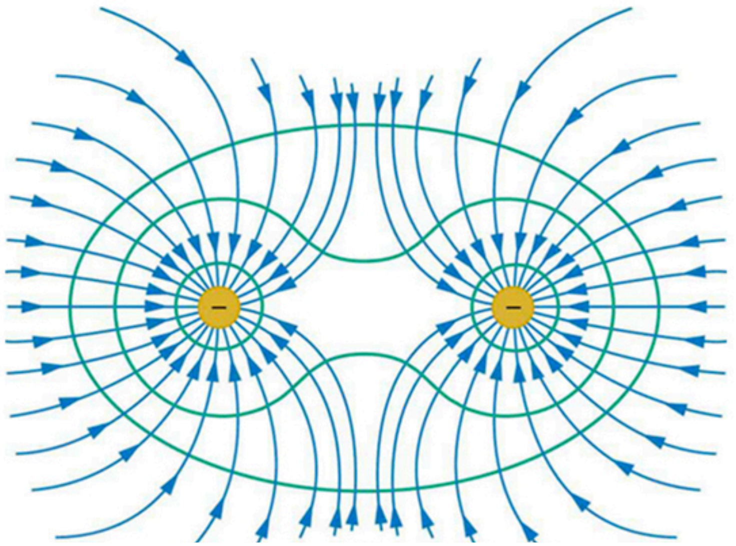
Diferença de potencial

$$\vec{E} = -\frac{dV}{\overrightarrow{dl}} \equiv -\vec{\nabla}V$$

Superfícies equipotenciais







Sumário

- O **potencial eléctrico** é um **campo escalar** que pode substituir $\vec{E}$ na descrição do campo eléctrostático, facilitando os cálculos
- O potencial é definido em relação a um ponto de referência, tomando-se normalmente o infinito
- Sabendo o potencial, pode-se determinar $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ usando um sistema de coordenadas adequado
- Numa **superfície equipotencial** o potencial é constante, e o vector campo eléctrico é perpendicular à superfície