Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC
Prof. Gonçalo Figueira

AULA 17 – Indutância

Indutância

- Indutâncias
- Coeficientes de auto-indução
- Coeficientes de indução mútua
- Circuito RL

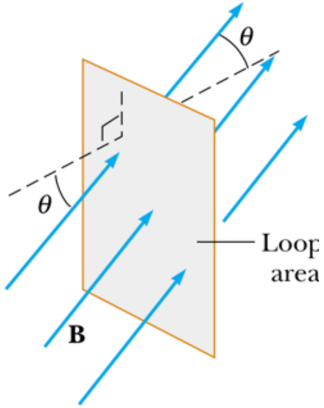
Popovic & Popovic Cap. 15

Serway Cap. 32

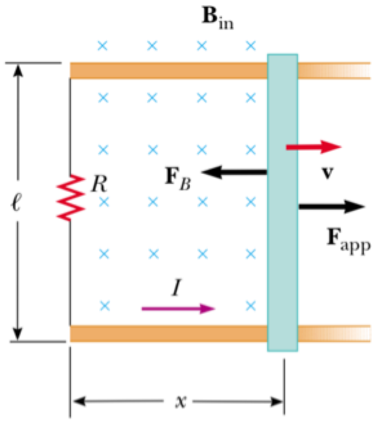
Conclusões

Lei de Faraday

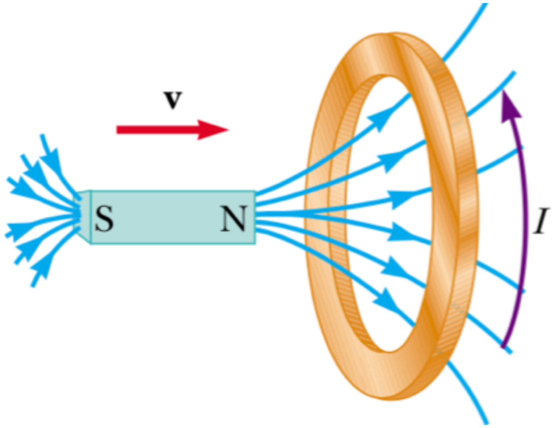
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



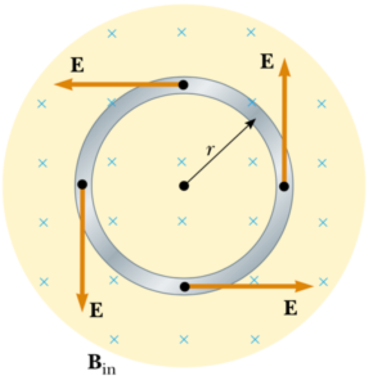
f.e.m. de movimento



Lei de Lenz



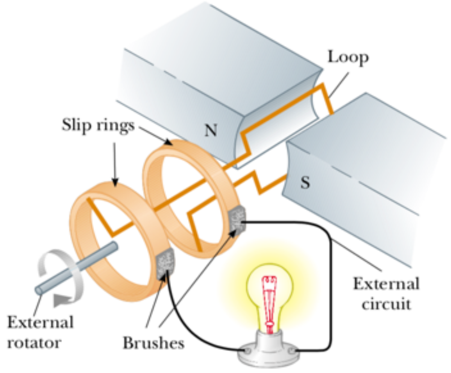
Campo eléctrico induzido



Lei de Faraday generalizada

$$\oint_C \vec{E}.\vec{d}l = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Geradores AC e DC



Revisão: força electromotriz induzida

Expressão para a f.e.m. induzida por um campo B variável:

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad [\,\mathrm{V}\,]}$$

Lei da indução de Faraday

É induzida uma f.e.m. no circuito quando o fluxo Φ do campo magnético através da superfície S delimitada pelo circuito varia em função do tempo.

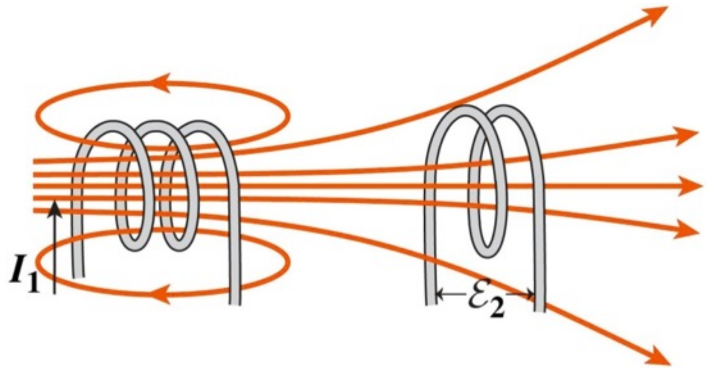
<u>Exemplo: solenóide com N espiras</u>

Como Φ_B é igual para cada uma, é induzida a f.e.m. total $\boxed{\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}}$

Indução mútua e auto-indução

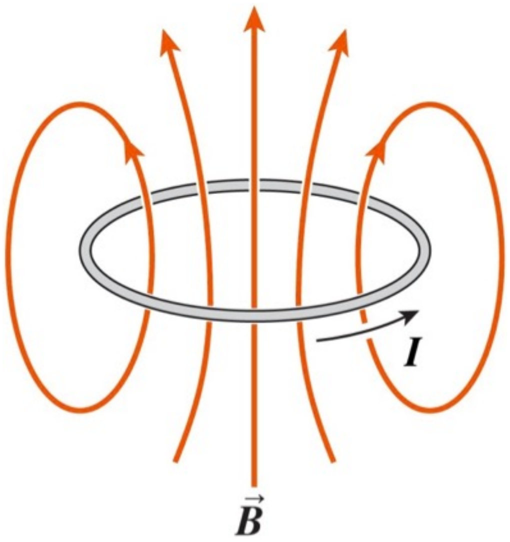
Indução mútua

Ocorre entre dois circuitos quando, ao mudar a corrente no circuito 1, mudamos o seu fluxo magnético Φ_{B1}; ao atravessar o segundo circuito, a variação de Φ_{B1} provoca uma f.e.m. induzida em 2.



Auto-indução

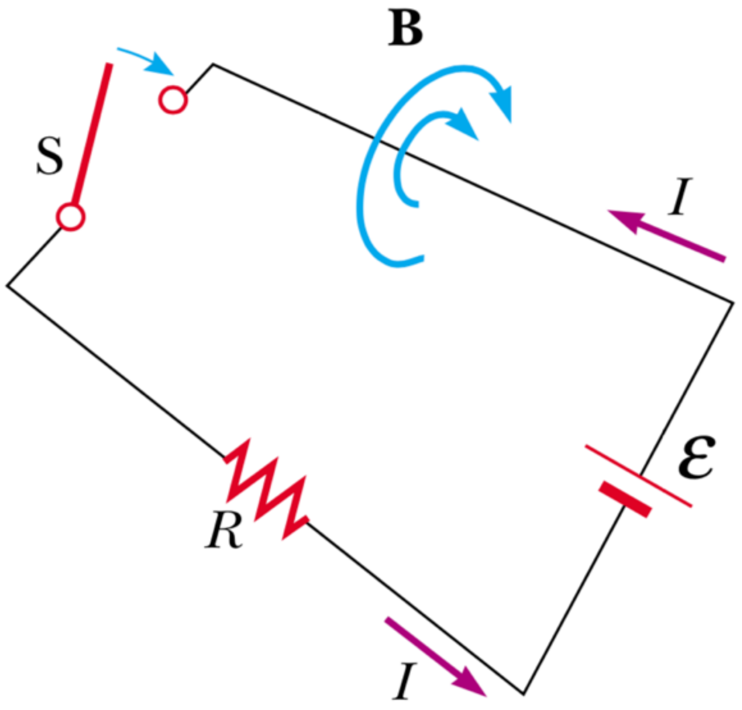
Ao variar a corrente num circuito, é criada uma variação do campo $\vec{B}$ do próprio circuito, o que resulta numa f.e.m. que gera um campo $\vec{B}_{ind}$ que se opõe a $\vec{B}$.



Auto-indução

O que sucede quando se fecha o interruptor?

- A **corrente** $\boldsymbol{I}$ aumenta, criando temporariamente um campo $\vec{B}$ variável
- O **fluxo magnético** $\boldsymbol{\Phi}$ desse campo através do circuito também aumenta
- A variação $d\Phi/dt$ cria uma **f.e.m. de sinal contrário** a $\mathcal{E}$ e cujo campo magnético se opõe a $\vec{B}$ (Lei de Lenz)

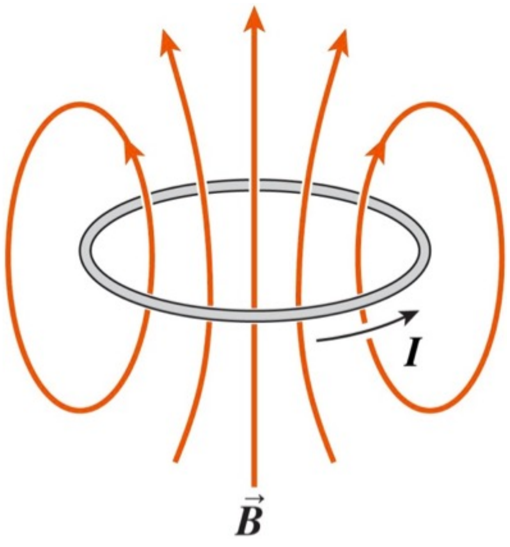


Resultado: a corrente aumenta de forma gradual, e não instantânea
(e sucede o contrário quando se desliga)

Auto-indução

$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \Phi_B \propto B \propto I$$

f.e.m. auto-induzida $\boxed{\mathcal{E}_L = -\boldsymbol{L}\frac{dI}{dt}} \rightarrow \boxed{L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt}}$ **Indutância** [H = Henry]



Exemplo: espira de corrente de raio *R*

Admitindo $\vec{B}$ uniforme: $B = \mu_0 I/2R$

Fluxo através da espira: $\Phi_B = B\pi R^2 = \mu_0 \pi R I/2$

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi R}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 \pi R}{2} = \boxed{\frac{\Phi_B}{I}}$$

Auto-indução

Solenóide de raio r e N espiras

Campo magnético: $B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$

Fluxo através de uma espira: $\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$

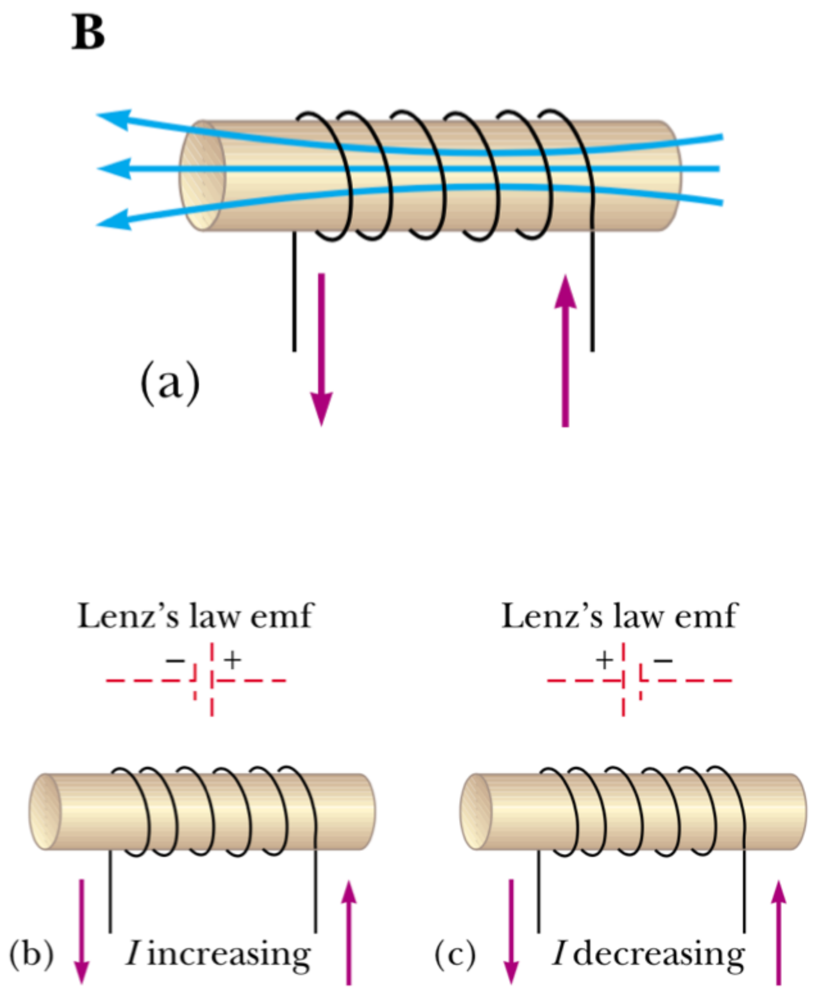
Para um solenóide com N espiras $\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$

Usando a definição de f.e.m. auto-induzida:

$$-L\frac{dI}{dt} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \rightarrow \quad \boxed{L = \frac{N\Phi_B}{I}}$$

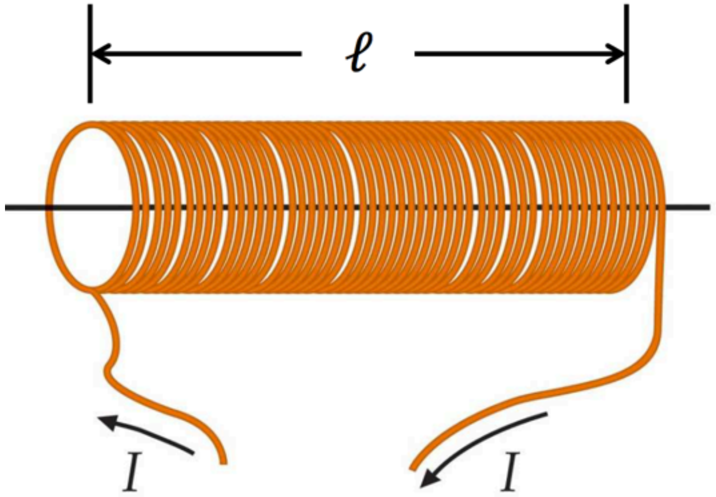
Indutância de um solenóide

[H = Henry]



Exemplo: auto-indutância de um solenóide

Solenóide uniforme de raio r, comprimento $l \gg r$ e com N espiras

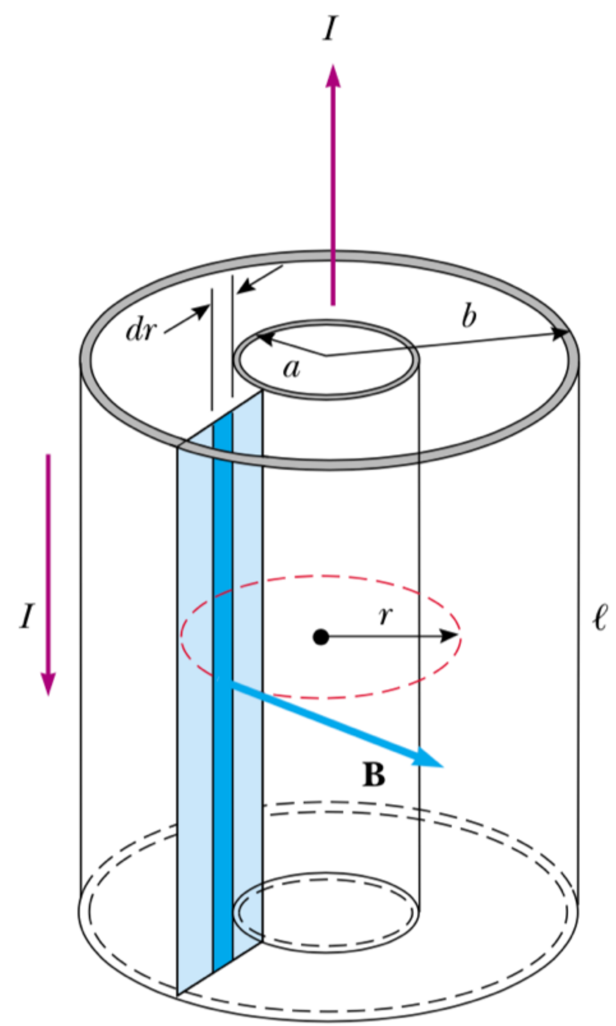


- Campo magnético no interior: $B = \mu_0 n I = \mu_0 N I / l$, $n = N/L$
- Fluxo em cada espira: $\Phi_B = BA = \boxed{\mu_0 N I \frac{A}{l}}$
- Indutância: $L = \frac{N\Phi_B}{I} = \boxed{\mu_0 N^2 \frac{A}{l}}$
- Como Al é o <u>volume</u> V do solenóide: $L = \mu_0 N^2 \frac{V}{l^2} = \mu_0 n^2 V$
- Só depende da geometria e do meio (comprimento, raio, μ_0...)

Exemplo: auto-indutância de um cabo coaxial

Cabo coaxial uniforme de comprimento $l \gg r$ e raios a e b
Vamos calcular o campo $\vec{B}$ num plano entre a e b (a azul)

- Campo magnético em r: $B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$
- Fluxo no rectângulo: $\Phi_B = l \int_a^b B(r) dr = \boxed{\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$
- Indutância: $L = \frac{\Phi_B}{I} = \boxed{\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$



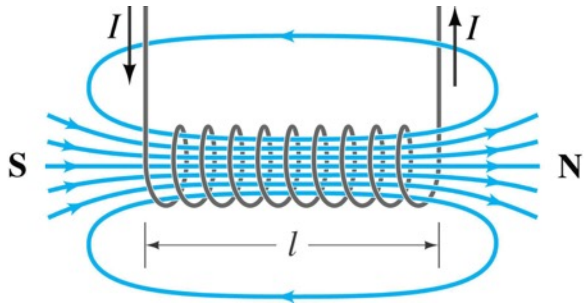
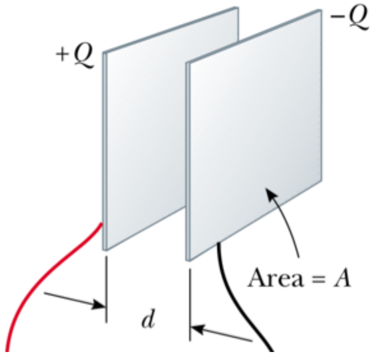
Aplicação: detectores de metais

O detector consiste num circuito enrolado em torno de uma abertura, no qual passa uma corrente variável.

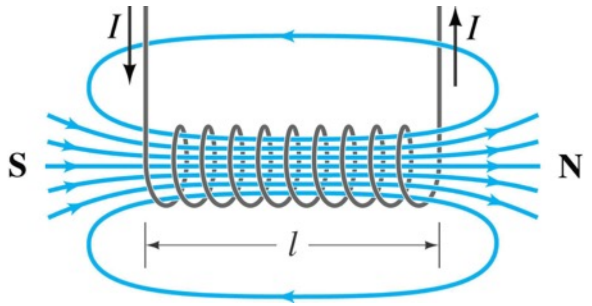
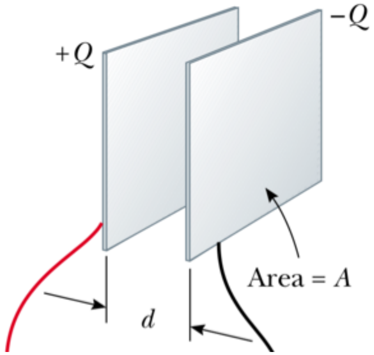
Quando uma substância ferromagnética ($\mu_F \gg \mu_0$) é aproximada do circuito, o fluxo magnético Φ_B aumenta.

Isto causa uma subida na indutância L, que pode ser medida, indicando a presença de metais.

Comparação: indutância vs. capacidade

Indutância (henry)	Capacidade (farad)
$L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$, para $r \ll l$	$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, para $d << \sqrt{A}$
Campo magnético aprox. uniforme	Campo eléctrico aprox. uniforme
L só depende da geometria e do meio	C só depende da geometria e do meio
Introdução de material magnético: $\mu_0 \to \mu$	Introdução de material dieléctrico: $\epsilon_0 \to \epsilon$
Armazena energia no campo magnético	**Armazena energia no campo eléctrico**
	

Comparação: indutância vs. capacidade

Indutância (henry)	Capacidade (farad)
Como calcular a indutância?	**Como calcular a capacidade?**
1. A partir da distribuição de corrente I, calcula-se o campo magnético $\vec{B}$	1. A partir da distribuição de carga Q, calcula-se o campo eléctrico $\vec{E}$
2. Sabendo $\vec{B}$, calcula-se $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$	2. Sabendo $\vec{E}$, calcula-se $V = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$
3. Determina-se $L = \Phi_b / I$	3. Determina-se $C = Q/V$
	

Indutância mútua

A interacção entre dois circuitos próximos induz uma f.e.m.

Exemplo: duas bobinas

I_i corrente em cada bobina ($i = 1{,}2$)

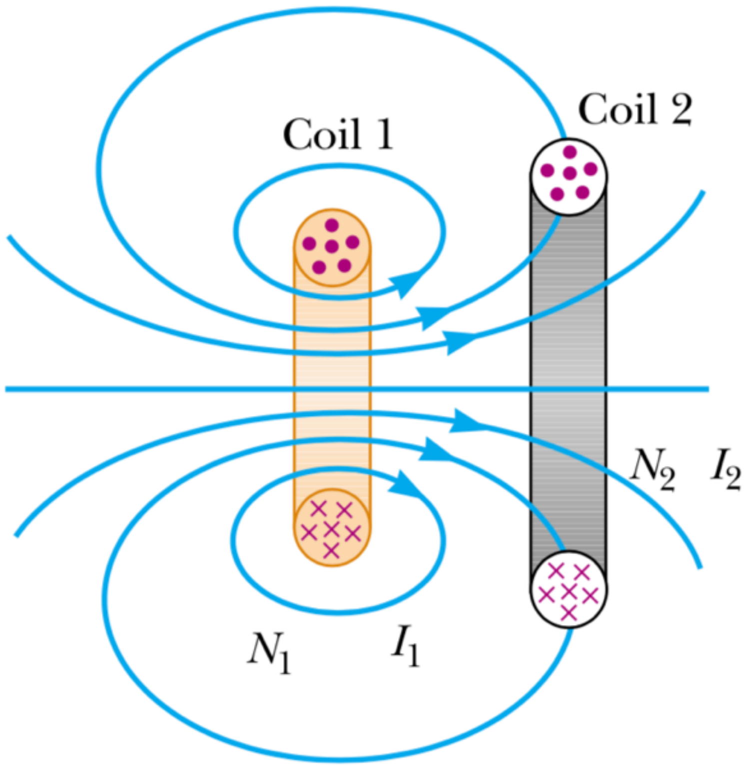
N_i número de espiras

Φ_{12} fluxo de $\vec{B}_1$ que passa na bobina 2

$$\boxed{M_{12} \equiv \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}}$$

Indutância mútua de 2 relativamente a 1

[H = Henry]



A indutância mútua depende da geometria (forma e orientação) dos dois circuitos.

Indutância mútua

f.e.m. induzida na bobina 2:

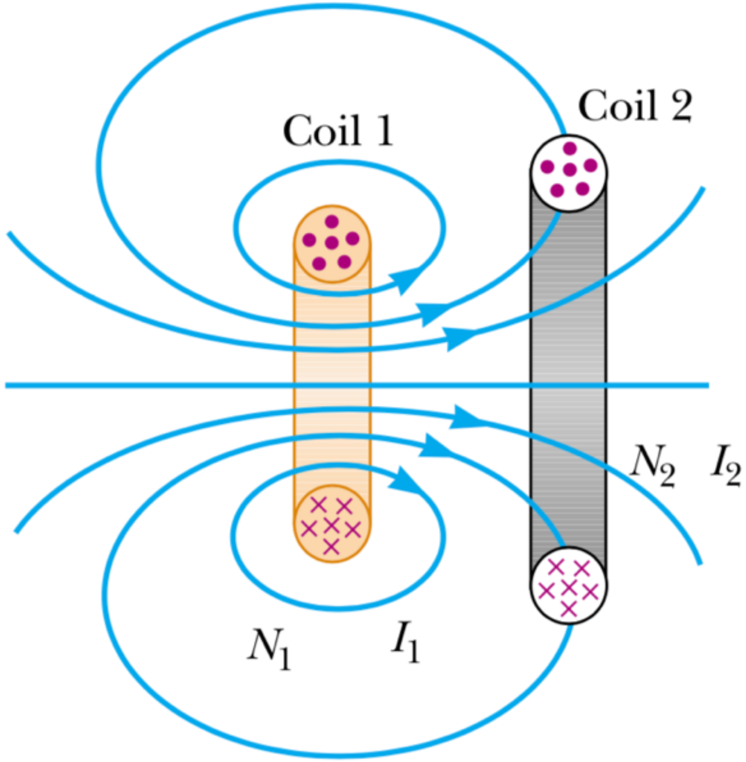
$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{M_{12} I_1}{N_2}\right) = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

Se existir corrente variável em 2 → f.e.m. induzida em 1:

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt}$$

É possível demonstrar que $M_{12} = M_{21} \equiv M$

Assim $\boxed{\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}}$ e $\boxed{\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}}$

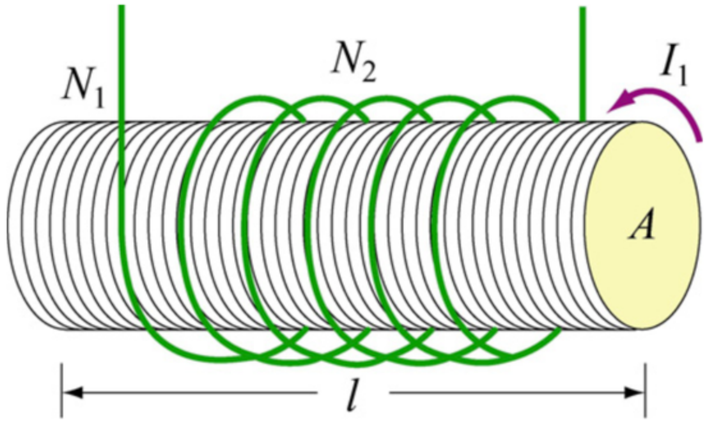


Exemplo: indutância mútua de dois solenóides

Solenóide N_1, I_1, l, A induz corrente em solenóide N_2

$$M_{12} \equiv \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

- Campo magnético: $B_1 = \mu_0 N_1 I_1 / l$



Fluxo no solenóide 2

- Em uma espira: $\Phi_{12} = BA = \mu_0 N_1 I_1 A / l$
- Em N_2 espiras: $N_2 \Phi_{12} = N_2 BA = \mu_0 N_1 N_2 I_1 A / l$

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

Coef. indutância mútua:

$$\boxed{M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}} = M_{21} = M$$

Aplicação: carregamento sem fios

(também chamado **carregamento indutivo**)

O carregador e o dispositivo a carregar estão equipados com um solenóide.

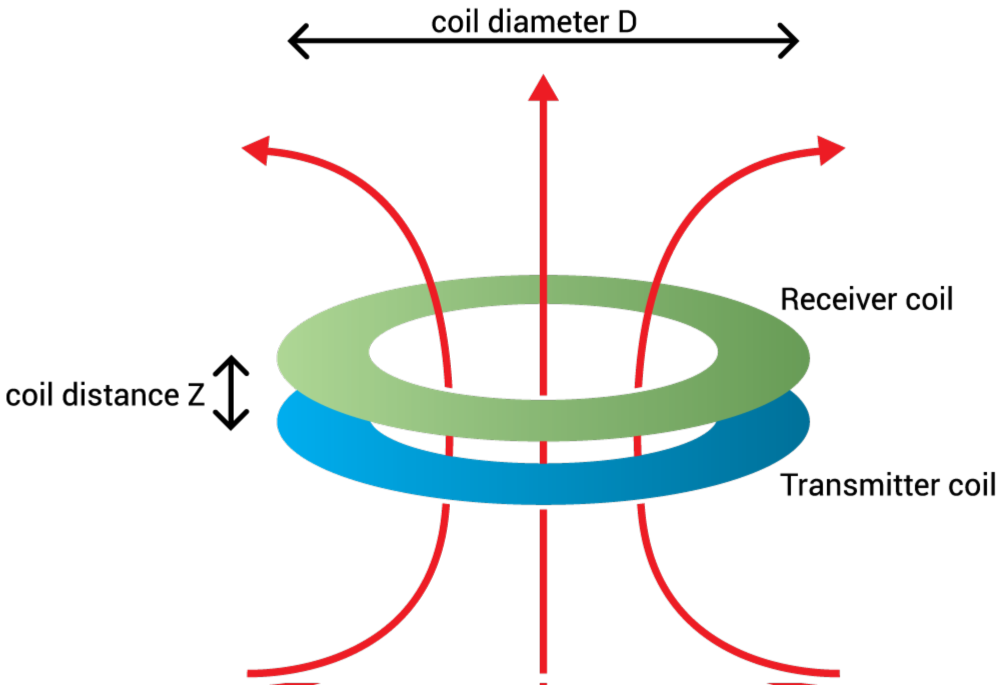
Quando uma corrente variável passa no solenóide do carregador, é induzida uma f.e.m. no solenóide do dispositivo.

A direcção da corrente induzida permite recarregar a bateria, sem haver contacto entre circuitos.

Exemplo: carregamento sem fios

Carregador: solenóide de comprimento l_1 e com N_1 espiras
Dispositivo: solenóide com N_2 espiras e área A_2

- Campo magnético do carregador: $B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1}$
- Fluxo no dispositivo: $\Phi_{12} = B_1 A_2 = \boxed{\frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} A_2}$
- Indutância mútua: $M = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \boxed{\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} A_2}$



Coeficientes de indução

No caso de dois circuitos 1 e 2 onde passam correntes I_1 e I_2, o fluxo magnético em cada um é

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2 \qquad \Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

Auto-induzido
Mutuamente induzido

No caso geral de N circuitos, o **fluxo total** Φ_i no circuito i é

$$\Phi_i = L_i I_i + \sum_{j=1, i\neq j}^{N} M_{ij} I_j \to \sum_{j=1}^{N} M_{ij} I_j$$

(usando a definição $M_{ii} = L_i$)

- L_i é o **coeficiente de auto-indução** do circuito i
- M_{ij} é o **coeficiente de indução** do circuito i sobre j

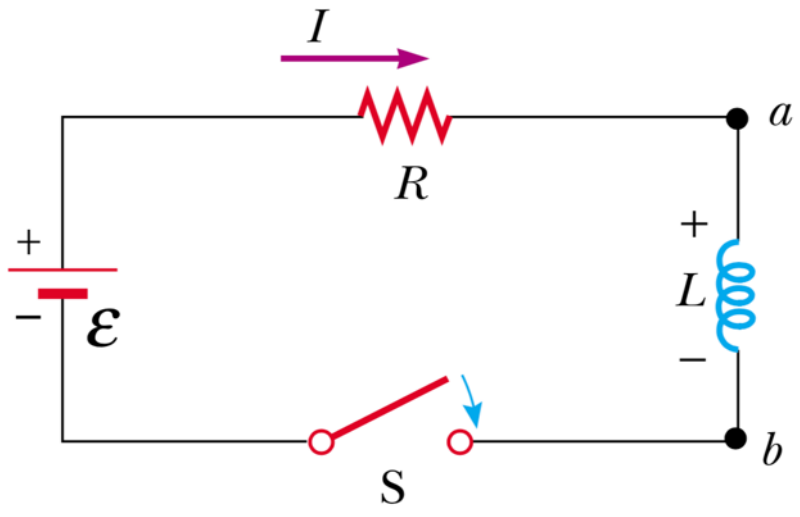
Circuito RL

Um circuito com uma resistência R e um indutor L designa-se circuito RL.

O indutor **opõe-se a uma alteração instantânea da corrente**, tentando preservar o valor antes da alteração: o indutor “atrasa” a reacção do circuito a mudanças.

Ao fechar o interruptor:

- $I(0) = 0$ vai aumentar, $dI/dt > 0$
- $\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} < 0$ (queda de potencial $V_b - V_a$)



Lei das malhas para o circuito: $$\boxed{\mathcal{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0}$$

Circuito RL

Usando a mudança de variável $x = \mathcal{E}/R - I,\ dx = -dI$:

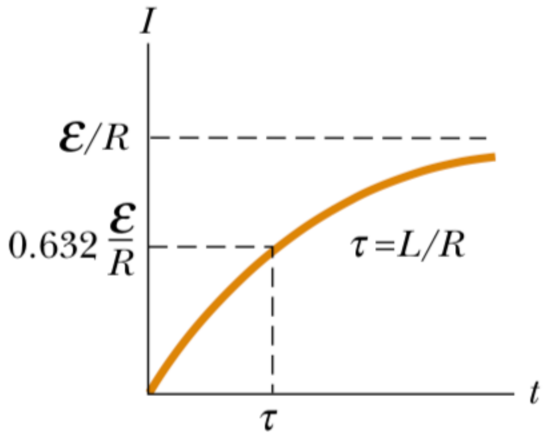
$$\mathcal{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{R}{L}x$$

A solução é da forma $x(t) = x_0 \exp(-Rt/L)$

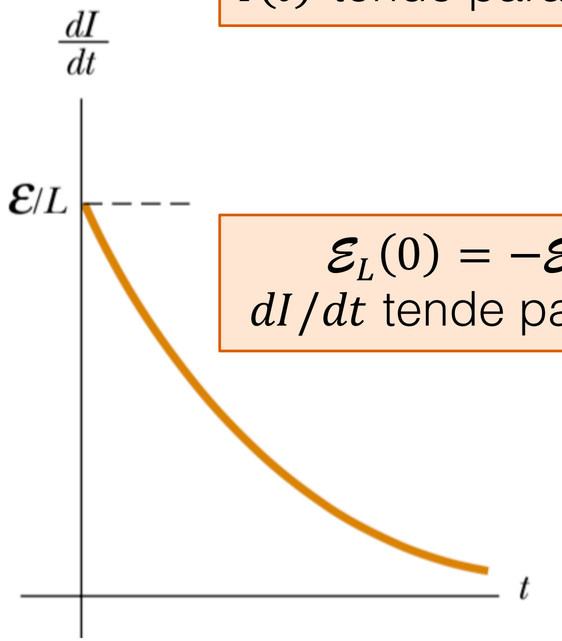
Como $I(0) = 0$ tem-se $x_0 = x(0) = \mathcal{E}/R$:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{Rt}{L}} \rightarrow \boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Onde $\boxed{\tau = L/R}$ é a *constante de tempo* do circuito RL.



$I(t)$ tende para $\mathcal{E}/R$



$\mathcal{E}_L(0) = -\mathcal{E}$
dI/dt tende para 0

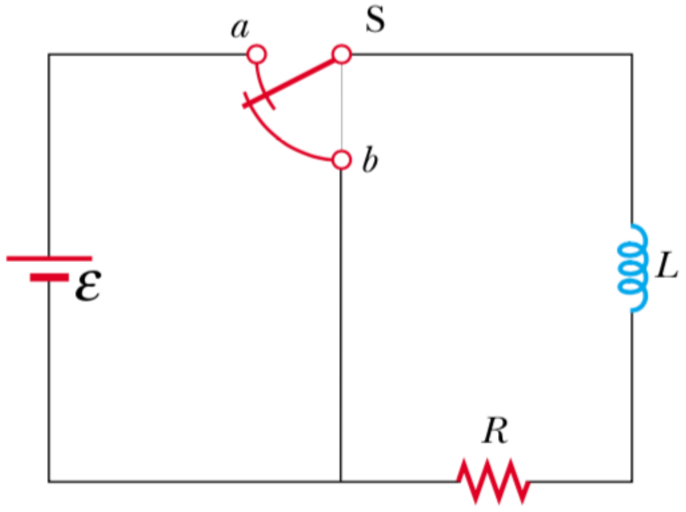
Circuito RL: descarga

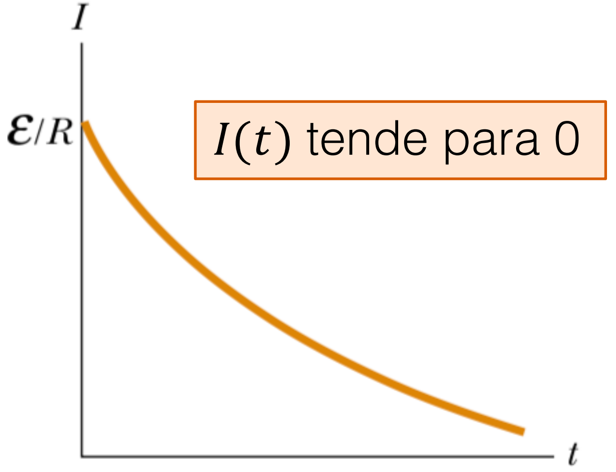
Vamos assumir que num circuito RC já está estabelecida a corrente limite $I = \mathcal{E}/R$.

Ao se separar a bateria de R e de L:

$$-RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow I + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

A solução é $\boxed{I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)}$ com $I_0 = \mathcal{E}/R$

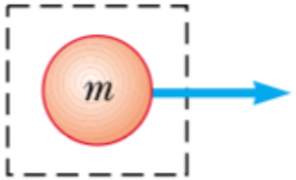




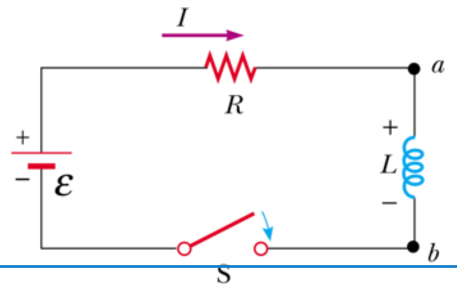
- O indutor impede que a corrente se anule de imediato
- A f.e.m. induzida é agora $\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} > 0$

O indutor conserva a “inércia” do fluxo

Movimento	
$$F = m\frac{dv}{dt}$$	
Massa	m
Posição	x
Velocidade	$v = dx/dt$
Força	F
Momento	$p = mv$
En. cinética	$mv^2/2$

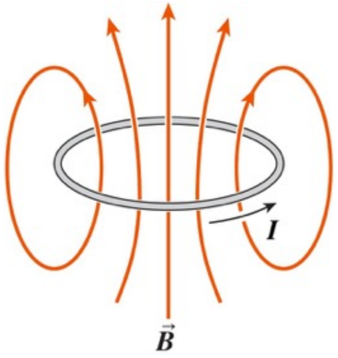


Indutância	
$$V = L\frac{dI}{dt}$$	
Indutância	L
Carga	Q
Corrente	$I = dQ/dt$
Potencial	V
Fluxo magnético	$\Phi_B = LI$
En. magnética	$LI^2/2$



Conclusões

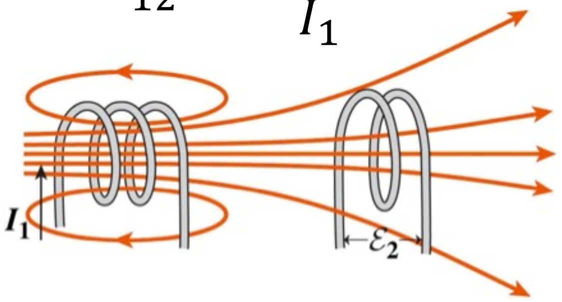
Auto-indução



$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

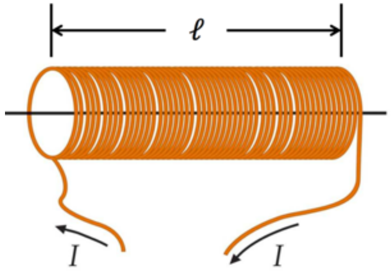
Indução mútua

$$M_{12} \equiv \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$



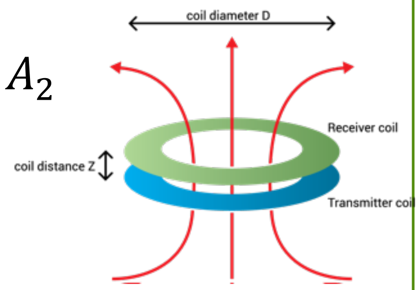
Auto-indutância de um solenóide

$$L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$$

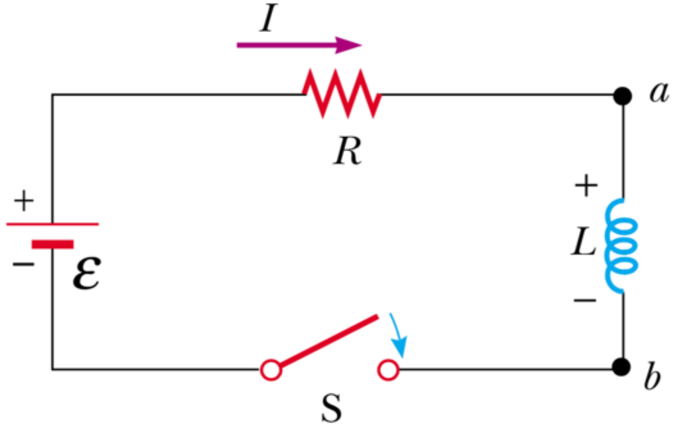


Indutância mútua de dois solenóides

$$M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} A_2$$



Circuito RL



Constante de tempo