Álgebra Linear

1° Ano ... 1° Semestre

○ Sistemas de Equações Lineares

- Uma equação linear de variáveis x_1 a x_n é uma equação que pode ser escrita na forma: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$,
  em que b e os coeficientes a_1 a a_n são números reais ou complexos.
- Um sistema de equações lineares é o conjunto de uma ou mais equações lineares com as mesmas variáveis, sendo a sua solução um conjunto de números que torna cada equação verdadeira; dois sistemas são considerados equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução.

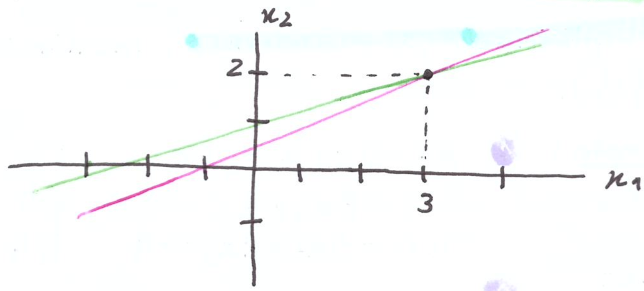
Exemplo:

$x_1 - 2x_2 = -1$

$-x_1 + 3x_2 = 3$

P(3,2)

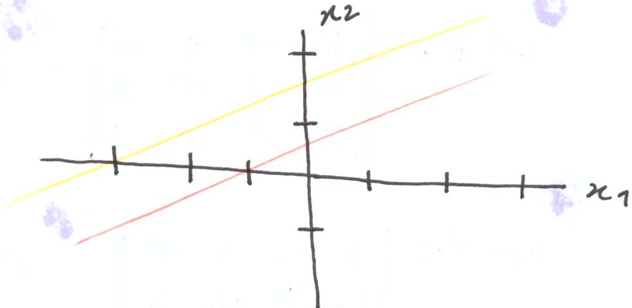
(1 solução)



$x_1 - 2x_2 = -1$

$-x_1 + 2x_2 = 3$

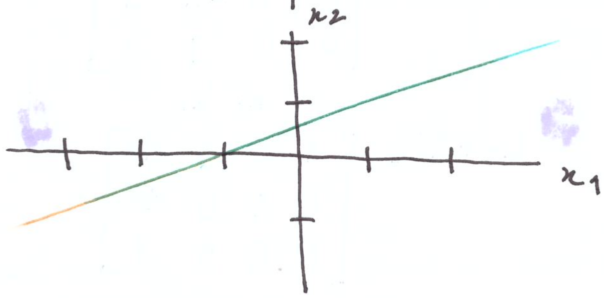
(s/ soluções)



$x_1 - 2x_2 = -1$

$-x_1 + 2x_2 = 1$

(soluções infinitas)



- Um sistema de equações lineares é consistente (possível) se tiver uma solução ou se for possível indeterminada.
- Um sistema é inconsistente (impossível) se não tiver soluções.

Matrizes

- A informação essencial de um SEL pode ser agrupada em matrizes.

Exemplo: Dado o sistema

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_2 - 8x_3 = 8$$
$$-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$$

Temos a matriz de coeficientes e a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & \underbrace{-9}_{\text{constantes}} \end{bmatrix}$$

- O tamanho de uma matriz indica quantas linhas e colunas tem. Seja m o número de linhas e n o número de colunas e A uma matriz, o seu tamanho é indicado por $A_{m \times n}$.

Resolver uma SEL

1. Substituição: substituir uma das linhas pela soma dessa linha com outra linha multiplicada por um escalar.
2. Troca: Trocar duas linhas.
3. Multiplicação por Escalares: multiplicar uma linha por um escalar ($\mathbb{R}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Exemplo:

① $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $2x_2 - 8x_3 = 8$, $-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

* Colunas pivot

② $L_3 + 4L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

③ $\frac{1}{2}L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

* Forma Triangular

④ $L_3 + 3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

⑤ $L_2 + 4L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

⑥ $L_1 + 2L_2$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

⑦ $x_1 = 29$, $x_2 = 16$, $x_3 = 3$ $\quad$ $(29, 16, 3)$ é solução do SEL

Teorema - Redução Matricial

- Aplicando as operações 1, 2 e 3 à matriz aumentada de uma SEL, obtemos SELs equivalentes.

…ema da Existência

- Um SEL é consistente se e só se a última coluna da matriz aumentad[a] …ão é coluna pivot.

∘ Teorema da Unicidade

- Um SEL é possível indeterminado se e só se existir pelo menos uma variável livre.

Exemplo:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -13 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

* incógnita livre (x_3)

$x_1 = -13 + 2x_3$
$x_2 = -9 + 3x_3$
x_3 é livre em $\mathbb{R}$ ou $x_3 \in \mathbb{R}$

ou

$x_3 = t \in \mathbb{R}$ (parâmet[ro])
$x_1 = -13 + 2t$
$x_2 = -9 + 3t$
$x_3 = t \in \mathbb{R}$

∘ Redução Matricial e Escada de Linhas - Eliminação de Gauss(-Jordan)

- A primeira entrada de uma linha refere-se à primeira entrada à esquerda diferente de zero. (pivot)

DEFINIÇÃO: Uma matriz retangular está em escada de linhas se:

1. Todas as linhas com entradas diferentes de 0 estão acima das linhas que têm apenas 0.
2. Todas as primeiras entradas (pivot) de uma linha estão numa coluna à direita do pivot da linha de cima.
3. Todas as entradas numa coluna abaixo do pivot são 0.

Se uma matriz em escada de linhas também seguir as seguintes regras, encontra-se na forma reduzida.

4. O pivot é igual a 1 em todas as linhas.
5. O pivot é a única entrada diferente de 0 na coluna.

TEOREMA 1: Cada matriz é equivalente por linhas a uma e só uma matriz em escada de linhas reduzida.

DEFINIÇÃO: Uma coluna pivot é uma coluna que contém um pivot, ou seja uma variável.

Exemplo:

Coluna Pivot

(1)
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

(2) Encontrar pivot ($\neq 0$) Trocar L_1 e L_3

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

(3) Zeros abaixo do pivot

$-L_1 + L_2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

coluna * pivot

(4) Repetir passos até chegar a:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(5) Zeros acima de cada pivot e pivot = 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Reduzida em Escada de Linhas

Soluções de Sistemas Lineares

- Seja a matriz seguinte a forma reduzida de uma matriz aumentada:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 - 5x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{array}$$

x_1 e x_2 são variáveis básicas

x_3 é uma variável livre

Conjunto solução: $\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ é livre ou } x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

- A solução pode representar-se em equações paramétricas:

$$\underbrace{x_3 = t}_{\text{parâmetro}} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 + 5t \\ x_2 = 4 - t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Matrizes Especiais

(i) $A = [a_{11} \; a_{12} \; \cdots \; a_{1n}]$ matriz linha / vetor linha / n-vetor linha

* $n \to$ nº de colunas

(ii) $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ matriz coluna / vetor coluna / m-vetor coluna / vetor $\mathbb{R}^m$

$(\underline{b} = \vec{b} \in \mathbb{R}^m)$

* $m \to$ nº de linhas

(iii) $A_{n \times n}$ isto é, $m = n$ é uma matriz quadrada

(iv) $0_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vetor 0

(v) $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ só tem 1 na diagonal principal e o resto é 0

é quadrada

Matriz Identidade

$I_1 = [1]$

(vi) Matrizes Triangulares

↳ Superiores U (upper)

↳ Inferiores L (lower)

$U = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ $\quad L = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$

(vii) Matrizes Diagonais – só a diagonal principal pode ser $\neq 0$

Matrizes Escalares – matrizes diagonais em que a diagonal é um número c (todos iguais).

$$cI_n = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Vetores em $\mathbb{R}^2$

- Uma matriz com apenas uma coluna é um vetor coluna:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \; v_1 \text{ e } v_2 \in \mathbb{R}$$

- O conjunto de todos os vetores com 2 entradas é $\mathbb{R}^2$.
- 2 vetores são iguais se as suas entradas correspondentes forem iguais.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ são iguais} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ não são iguais}$$

- A adição de vetores dá-se pela adição das entradas correspondentes de cada vetor:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \underline{u} + \underline{v} = \begin{bmatrix} 3+2 \\ 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- A multiplicação de um vetor por um número real c dá-se pela multiplicação de cada entrada por c:

$$c \times \underline{u} = 2 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 \\ 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$c = 2 \longrightarrow$ escalar

Nota: forma vetorial paramétrica

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Operações Vetoriais

Sejam $\underline{u}, \underline{v}$ e $\underline{w} \in \mathbb{R}^n$ e $c, d \in \mathbb{R}$

(i) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

(ii) $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$

(iii) $\underline{u} + 0 = \underline{u}$

(iv) $\underline{u} + (-\underline{u}) = 0$

(v) $c(\underline{u} + \underline{v}) = c\underline{u} + c\underline{v}$

(vi) $(c+d)\underline{u} = c\underline{u} + d\underline{u}$

(vii) $c(d\underline{u}) = (cd)\underline{u}$

(viii) $1 \times \underline{u} = \underline{u}$

Combinação Linear

- Sejam $v_1, v_2, \ldots, \underline{v}_p \in \mathbb{R}^n$ e $c_1, c_2, \ldots c_p \in \mathbb{R}$, então $y = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \ldots + c_p\underline{v}_p$, é o vetor combinação linear de $\underline{v}_1$ a $\underline{v}_p$, com os pesos $c_1 \ldots c_p$.

Exemplo:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} (-1)\times 2 + 1 \times 2 \\ 2\times 2 + 1 \times 2 \\ 1 \times 2 + (-2) \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 \\ 4+2 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Span - Expansão Linear

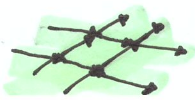
- Sejam $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p \in \mathbb{R}^n$, então a expansão linear, $\mathcal{L}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p\}$, é o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_p$ com pesos $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \ldots p$.

(i) $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{0} \in \mathcal{L}\{v_1 \ldots v_p\}$

(ii) $\underline{v}_j$ $(j = 1 \ldots p)$ então $\mathcal{L}\{\underline{v}_j\}$ = Reta em $\mathbb{R}^n$

(iii) Para $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ não nulos e não colineares, temos $\mathcal{L}\{v_1, v_2\}$ = plano em $\mathbb{R}^n$.

- O span $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ cria uma "Rede" de vetores:



Definição - Ax

- Sejam $A_{m\times n}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, então o produto $A\underline{x}$ (é um vetor):

$$[a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n \in \mathbb{R}^n$$

→ Combinação linear das colunas com as coordenadas de A

Teorema Conjunto - Solução

- Seja $A_{m\times n}$, com colunas $a_1 \ldots a_n$, e $\underline{b}$ pertencente a $\mathbb{R}^m$, a matriz $Ax=b$ (↓ vetor) tem como conjunto solução que:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$$

- Sendo o sistema com a matriz aumentada:

$$[a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n \; b]$$

- Existência de soluções: $A\underline{x} = \underline{b}$ tem solução se e só se b for combinação linear das colunas de A.

Propriedades do Produto Matriz Vetor

- Sejam A, $m\times n$, $\underline{u}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, então:

(i) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$

(ii) $A(c\,\underline{u}) = c\,A\underline{u}$

} vetores em $\mathbb{R}^m$

Nota: um sistema homogéneo é um sistema igualado a 0:
$-2x_1 - 14x_2 + 8x_3 = 0$

1º Teorema sobre Equivalências

- Seja $A_{m\times n}$, então para A (ou todas são verdadeiras ou falsas):

(i) $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $A\underline{x} = \underline{b}$ é possível.

(ii) $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ é combinação linear das colunas de A.

(iii) As colunas de A geram $\mathbb{R}^m$ ($\mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \mathbb{R}^m$).

(iv) A tem pivot em todas as linhas (matrizes de coeficiente, apenas).

Sistemas Lineares Homogéneos

- Um sistema é homogéneo se $Ax = 0$;
- É sempre possível, isto é $x = 0$ (solução trivial) é sempre solução.

Teorema

- Se $A\underline{x} = 0$ com conjunto solução $\underline{v}h$, então $A\underline{x} = b$ tem solução $\underline{p} + \underline{v}h$ com $\underline{p}$ solução particular e $\underline{v}h$ solução de $Ax=0$.
  ↳ ponto

Independência Linear

- Dado um conjunto (finito, indexado) de vetores $\mathbb{R}^n$, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p\}$ diz-se linearmente independente se a equação vetorial $x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \ldots + x_p\underline{v}_p = \underline{0}$ tem apenas a solução trivial.
- Caso contrário, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p\}$ é linearmente dependente quando existem pesos não simultaneamente iguais a 0, tal que, $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \ldots + c_p\underline{v}_p = \underline{0}$

1. Seja $\{\underline{v}_1\}$ ⇒ $\{\underline{v}_1\}$ é linearmente dependente quando $\underline{v}_1 = 0$

⇒ $\{\underline{v}_1\}$ é linearmente independente quando $\underline{v}_1 \neq 0$

- 2. Seja $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ $\Rightarrow$ é linearmente dependente quando um deles é nulo & $\underline{v}_2$=…
  $\Rightarrow$ é linearmente independente quando não são colineares e nenhum é nulo.

Nota: se for comb. lin dos anteriores é linearmente dependente, isto é, ao resol… a matriz há uma incógnita livre.

- **Teorema** (para $p \geq 2$)
  - Um conjunto $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se e só se pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos restantes, ou se… $\underline{v}_1 \neq 0$, $c\underline{v}_j$ $(j>1)$ pode escrever-se como:

$$\underline{v}_j = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \dots + c_{j-1}\underline{v}_{j-1}$$

Com $c_1, c_2, \dots, c_{j-1}$ não todos iguais a zero.

- **Teorema: Caracterização de Conjuntos Linearmente Dependentes**
  - Seja $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$, então se $\underline{v}_1 \neq 0$ e existe $\underline{v}_j$ $(j>i)$, então, é uma combinação linear dos anteriores & S é linearmente dependente.
  - Demonstração: se S, $\underline{v}_1 \neq 0$, $\exists\, \underline{v}_j : \underline{v}_j = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \dots + c_{j-1}\underline{v}_{j-1}$ $(j>2)$ então, S é linearmente independente
    S é LD quando $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \dots + c_{j-1}\underline{v}_{j-1} + \dots + c_p\underline{v}_p = \underline{0}$ e nem todos $c = 0$.

- **Transformações Lineares**
  - Exemplos: Transformação matricial com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Princípio das transformações lineares

  - No geral:

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\underline{x} \longmapsto A\underline{x} = \underline{y}$$

$\rightarrow$ Associa a cada vetor x em $\mathbb{R}^n$ um vetor $T(x)$ em $\mathbb{R}^m$.

Escreve-se $T(\underline{x}) = A\underline{x}$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$

  - $T(\underline{x}) = A(\underline{x})$ é linear porque:

- **Uma Transformação T é linear se:**
  (i) $T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + (\underline{v})$, $\forall \underline{u}, \underline{v} \in$ domínio
  (ii) $T(c\underline{u}) = cT(\underline{u})$, $cT(\underline{u})$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{u} \in$ domínio
  $\hookrightarrow$ $T(\underline{0}) = \underline{0}$

  - Exemplos: seja $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ com $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
    a) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ e $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
    b) Qual é a pré-imagem de $\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$?
    c) Descreva geometricamente a ação de T

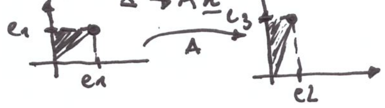
$\underline{u} = (1,1)$
$T(\underline{u}) = (2,-3)$

a) $T(1,1) = (2,3)$
$T(0,0) = (0,0)$

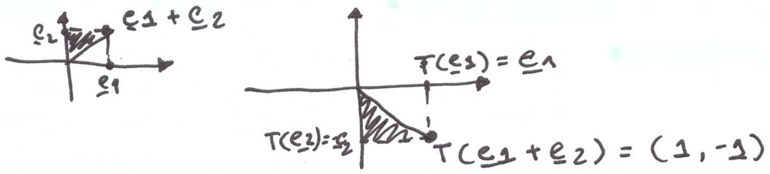
b) $T(x_1, x_2) = (-4, -6)$ $\quad x_1 = -2$, $x_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\underline{x} \to A\underline{x}$



- Com $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, qual é a imagem do quadrado unitário?



Conclusões da Transformação Linear

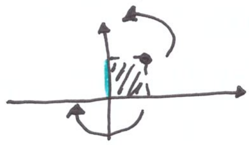
- $T(\underline{0}) = \underline{0}$
- $T(c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + \dots + c_p \underline{u}_p) = c_1 T(\underline{u}_1) + c_2 T(\underline{u}_2) + \dots + c_p T(\underline{u}_p)$

Teorema Matriz Canónica (standard) de uma Transformação Linear

- Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (transformação linear). Então existe e é única a matriz A tal que $T(\underline{x}) = \underset{m \times n}{A}\, \underline{x}$ $\begin{bmatrix} T(\underline{e}_1) & T(\underline{e}_2) & \dots & T(\underline{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

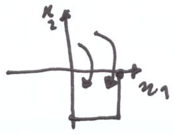
- Chama-se a esta matriz a matriz canónica.
- Exemplo: Qual é a matriz que representa a projeção de $\mathbb{R}^2$ no eixo x_2?

  R: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Transformações no Quadrado Unitário

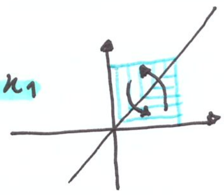
- Reflexões:



pelo eixo x_1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

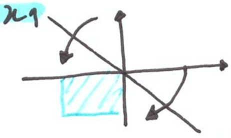
pelo eixo x_2 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x_2 = x_1$



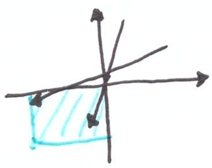
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = -x_1$



$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

pela origem



$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- Contrações e expansões:

horizontal

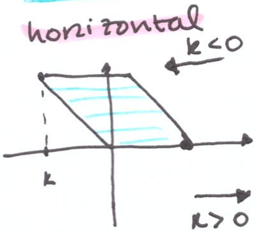
$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c: $0 < k < 1$ exp: $k > 1$

vertical

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ c: $0 < k < 1$ e: $k > 1$

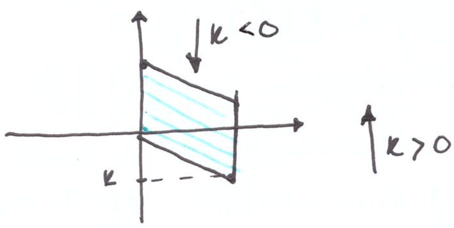
- Shear:

horizontal



$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

vertical



$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Projeções:

no eixo x_1

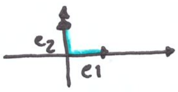
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no eixo x_2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sobrejetividade
  - $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva (onto) quando $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{b}$ é imagem de pelo menos um $\underline{x}$ em $\mathbb{R}^n$.
- Injetividade
  - $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva (one-to-one) quando $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^m$ é imagem, no máximo, de um vetor $\underline{x}$ de $\mathbb{R}^n$ (ou seja, imagem de 1 ou nenhum $\underline{x}$).
- Range - Imagem de T
  - $\text{Im}T = \{\underline{b} \in \mathbb{R}^m, \underline{b} = T(\underline{x}) \text{ para } \underline{x} \in \mathbb{R}^n\} \leq \mathbb{R}^m$
  - Conjunto das imagens de $T(\underline{x})$.
  - Exemplo:

T em $\mathbb{R}^2$ que roda α ↺



a) Deduza $A = [T(e_1), T(e_2)]$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

b) Classifique T quanto à injetividade e sobrejetividade

$\text{Im}T = \mathbb{R}^2$, logo é sobrejetiva

T é injetiva porque $T(\underline{x}) = \underline{0}$ quando $\underline{x}$ é o vetor nulo.

Nota:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \to \text{matriz rotação}$$

- Teorema (critério injetividade)
  - $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (linear), T é injetiva se e só se $T(\underline{x}) = \underline{0}$ só tem solução trivial.
- Exemplo: Seja T dada por multiplicação por $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ a) classifique T quanto à injetividade / sobrejetividade; b) Identifique ImT.

a) $T(\underline{x}) = A(\underline{x}) = 0 \to$ Tem solução não trivial, logo não é injetiva.

T não é sobrejetiva porque $\text{Im}T \neq \mathbb{R}^3$

b) $\text{Im}\,T = \{?\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}\right\} \to$ subconjunto de $\mathbb{R}^3$

- Teorema (critério inj./sobr. com matriz canónica):
  - Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (linear) e $A = [T(\underline{e}_1), T(\underline{e}_2), \ldots, T(\underline{e}_n)]$, então:
    (1) T é sobrejetiva se as colunas de A geram $\mathbb{R}^m$.
    (2) T é injetiva se e só se as colunas de A forem Linearmente Independentes.
- Operações Matriciais - Teorema
  - Sejam A, B e C matrizes do mesmo tamanho, e r e s escalares:
    (1) $A + B = B + A$ (2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (3) $A + 0 = A$
    (4) $r(A+B) = rA + rB$ (5) $(r+s)A = rA + sA$ (6) $r(sA) = (rs)A$
- Soma Matricial
  - Soma das entradas correspondentes de cada matriz.

exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ $A+B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

◦ Multiplicação de uma Matriz por um Escalar

- Multiplicação de cada elemento da matriz pelo escalar.

exemplo:

$2B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

◦ Multiplicação de Matrizes

- Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$ de colunas $b_1 \dots b_p$, então o produto $A \times B$ é a matriz $m \times p$ cujas colunas são $Ab_1 \dots Ab_p$.

exemplo: Regra linha - coluna

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Nota: No geral $AB \neq BA$

- Cada coluna de AB é uma combinação linear das colunas de A usando como pesos a coluna correspondente de B.

◦ Propriedades da Multiplicação de Matrizes

(1) $A(BC) = (AB)C$ (2) $A(B+C) = AB + AC$ (3) $(B+C)A = BA + CA$

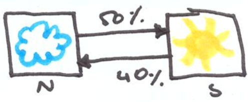
(4) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ (5) $I_m A = A = A I_n$

• Potência de uma Matriz

- Potência de A^k $(k \in \mathbb{N})$ quando $A_{n \times n}$:
  - $A^0 = I_n$
  - $A^{k+1} = AA^k$ $(k \geq 1) \rightarrow A^5 = A \times A \times A \times A \times A$

◦ Aplicação A^k: Cadeias de Markov

Probabilidades



$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} N & S \end{array}$$

$$\underset{\text{atrizes de Markov}}{M} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} N \\ S \end{array}$$

$\underset{\text{dia 0}}{\underline{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} N \\ S \end{array}$ $\underset{\text{dia 1}}{\underline{x}_1} = M\underline{x}_0$

↳ 2 dias depois:

$$\underline{x}_2 = M\underline{x}_1 = M(M\underline{x}_0) = M^2\underline{x}_0$$

↳ k dias depois:

$$\underline{x}_k = M^k \underline{x}_0, \quad k \to +\infty$$

◦ Matrizes Elementares

- Uma matriz elementar E_j, $n \times n$, vem da matriz identidade com uma das seguintes alterações:

- (1) colocamos $k \in \mathbb{R}$ na entrada (i,j), $i \neq j$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (2) Trocamos 2 linhas de I_n $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  ↳ Reflexão em $x_2 = x_1$
- (3) Colocamos k numa entrada j,j

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}}_{\text{contrações e dilatações}}$$

Teorema (Propriedades de Matrizes Elementares)

- Seja $A_{m\times n}$, então existem matrizes elementares tal que:

$$E_k \dots E_2 E_1 A = U \rightarrow \text{escada de linhas}$$

Teorema

- Uma matriz A, $n\times n$, diz-se invertível se e só se A é equivalente por linhas a I_n, e nesse caso, qualquer sequência de operações de linhas elementares que reduza A a I_n, também transforma I_n em A.

Inversa de Uma Matriz

- Uma matriz A, $n\times n$, diz-se invertível quando existe B, $n\times n$, tal que $AB = BA = I_n$ → B diz-se inversa de A. Caso contrário, A diz-se não-invertível. (singular)

Teorema

- A matriz inversa, quando existe, é única;
- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

#1 Procedimento

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

exemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & I_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} I_n & A^{-1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Teorema da Inversa de uma 2x2

- Seja A, 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então se $ad - bc \neq 0$, então A é invertível e

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\det A = ad - bc}$$

- se $ad - bc = 0$, então A não é invertível.

Teorema

- Se A, $n\times n$ é invertível, então para cada b em $\mathbb{R}^n$, a equação $Ax = b$ tem solução única: $x = A^{-1}b$.

Teorema das Matrizes Invertíveis

→ seja A, $n\times n$, então é equivalente:

(a) A é invertível
(b) $A \sim I_n$
(c) A tem n pivots
(d) $A\underline{x} = \underline{0}$ tem só solução trivial
(e) As colunas de A são linearmente independentes
(f) $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ é injetiva
(g) $A\underline{x} = \underline{b}$, $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}$ tem solução única
(h) As colunas de A geram $\mathbb{R}^n$
(i) $\underline{x} \rightarrow A\underline{x}$ é uma transformação linear sobrejetiva
(j) $\exists C : CA = I$
(k) $\exists D : AD = I$
(l) A^T é invertível

Nota:
$(A^{-1})^{-1} = A$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Transposta de uma Matriz

- Dada uma matriz A, $m\times n$, a sua transposta é a matriz A^T, $n\times m$, cujas colunas são formadas pelas linhas de A.

exemplo:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

- Propriedades

(1) $(A^T)^T = A$ (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (3) $(rA)^T = rA^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

- Transformações Lineares

– Se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é injetiva e sobrejetiva, então T é bijetiva.

- Teorema das Transformações Lineares Invertíveis

– Se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear em que $T(\underline{x}) = A\underline{x}$, então T é invertível se e só se A é invertível, e existe S (transformação linear inversa de T), tal que:

$$\boxed{S \circ T = T \circ S = I} \quad \text{é única e} \quad \boxed{S(\underline{x}) = A^{-1}\underline{x}}$$

Demonstração:

T é linear e $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ com T-invertível $S(T(\underline{x})) = S(A\underline{x}) = (A^{-1}A)\underline{x} =$

$= I\underline{x} = \underline{x} \qquad T(S(x)) = \underline{x}$

- Transformações em $\mathbb{R}^2$:

– Reflexão: sempre invertível

– Rotação: G_α $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

– Scaling: é invertível

$k>1$ dilata

$0<k<1$ contrai

$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

$\downarrow$ inversa $\downarrow$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$

– Projeção: não é invertível

– Shear: é invertível

- Coordenadas Homogéneas em 2D

– Um vetor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tem coordenadas homogéneas $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ Plano de $\mathbb{R}^3$ com $z=1$

exemplo Seja o triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$. Faça uma translação em $(0,5, -1)$, seguida de uma rotação em $\mathbb{R}^2$ $\frac{\pi}{2}$ e finalmente, um reflexão em $x_2 = x_1$.

$$\underset{\text{Matriz dos vértices}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\text{Reflexão}}{\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \underset{\text{Rotação } \frac{\pi}{2}}{\left[\begin{array}{cc|c} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \underset{\text{translação em } \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1 \end{bmatrix}}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Matrizes por Blocos

exemplos

1. A matriz $A = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right]$ pode ser escrita $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$

2. Se $\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$ com A_{11}, $p \times p$, e A_{22}, $q \times q$, tiver inversa, como calcular os blocos de $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

$A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = I_p$

$A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = 0$

$A_{22} B_{21} = 0$

$A_{22} B_{22} = I_q$

↳ $B_{11} = A^{-1}_{11}$

$B_{12} =$

$B_{21} = 0$

$B_{22} = A^{-1}_{22}$

Teorema (multiplicação AB)

- Sejam A $m \times n$ e B $n \times p$, então:

$$AB = [\,col_1(A) \;\; col_2(A) \dots col_n(A)\,] \begin{bmatrix} Row_1(B) \\ Row_2(B) \\ \vdots \\ Row_n(B) \end{bmatrix} =$$

$$= col_1(A)\, row_1(B) + \dots + col_n(A)\, row_n(B)$$

Determinantes

- $\det A = |A|$ → para uma matriz 2x2, o seu determinante calcula-se:

$\boxed{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ $\qquad |A| = ad - bc$

- O determinante de $A = [a_{ij}]$, $n \times n$, é dado pela soma de n termos na forma de $\pm (a_{ij}) \det A_{ij}$, isto é: (em que os sinais − e + alternam)

$$\det A : \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Teorema - Expansão em Coeficientes Linha de Coluna

- Seja A, $n \times n$, então:

$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$ - linha k

$\det A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj}$ - coluna j

Teorema - A, $n \times n$

(1) Se A for triangular (superior ou inferior), então o seu determinante é o produto das entradas da sua diagonal principal.

(2) $A = I_n$, então $\det A = \det I_n = 1$

(3) Se A for elementar:

- Permuta das linhas → $\boxed{\det = -1}$
- Multiplicar por um escalar α → $\boxed{\det = \alpha}$
- Somar à linha r a linha s multiplicada por α → $\boxed{\det = 1}$