Cálculo Diferencial e Integral I

2016/2017

→ Expressões sem variáveis:
- Designações (Sandro, três);
- Proposições - afirmações que têm um valor lógico (V/F);
  ↳ designadas por uma letra minúscula $p, q, \dots$ / $p_1, p_2 \dots$

- As designações são iguais
  $3 = 2 + 1$
- As proposições são equivalentes (têm o mesmo valor lógico)
  $p \Leftrightarrow q$, $4 < 15$, $56 + 1 = 57$

Operações:
- $\sim$ - operação unária ($p, \sim p$)
- $\wedge, \vee$ - operações binárias (p e q)
  - $p \wedge q$ é proposição verdadeira se e só se ambas forem verdadeiras.
  - $p \vee q$ é proposição verdadeira quando uma é verdadeira;
    é proposição falsa se e só se ambas forem falsas.

(*): $\Rightarrow$ $(p \Rightarrow q)$

Primeiras leis de De Morgan:
- $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
- $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

(*): Def.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A nova proposição só será falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.

Teoremas:
- $[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ (1)
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$ (2)

Dem (2):

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Num teorema: hipótese $\Rightarrow$ tese

Demonstração por absurdo - $\sim T \Rightarrow \dots \Rightarrow \sim H$

→ Expressões com variáveis
- Expressão designatória - $x + 1$
- Expressão proposicional - $x + 1 > 3$ (condições)

$A = \{x : p(x)\}$
proposição verdadeira

$A^c = \{x : \sim p(x)\}$
↳ complementar de A

$B = \{x : q(x)\}$

- $A \cap B = \{x : p(x) \wedge q(x)\}$
  As duas prop. têm que ser verdadeiras
- $A \cup B = \{x : p(x) \vee q(x)\}$
  Apenas uma das duas prop. tem que ser verdadeira

- $p(x) \Rightarrow q(x)$
  $x \in A \Rightarrow x \in B$
  $\underline{A \subset B}$

Uma condição é transformada numa proposição através de:
- Realização de variáveis;
- Quantificadores:
  - Universal - $\forall$ (qualquer que seja);
  - Existencial - $\exists$ (existe (pelo menos) um).

condição ——— quantificar ———→ proposição (*)₂
$x^2 = 1$ (dar valor à variável)

(*)₂ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 1$ (F) $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$ (V)
$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 1$ (V) $\qquad \exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$ (V)

<u>Nota</u>:
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+1 > y$ é uma condição em y; para ser proposição tem que se quantificar as duas variáveis.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+1 > y$ (V)
$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x+1 > y$ (F) → não existe um valor (y), para qualquer outro valor (x), em que y seja sempre mais pequeno.

A <u>ordem</u> dos quantificadores não é arbitrária:
→ se se trocar a ordem pode-se alterar o valor lógico das proposições.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq y$ (V)
$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq y$ (V)

<u>Segundas leis de DeMorgan</u>:
- $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, \sim p(x))$;
- $\sim(\exists x \in \mathbb{R}, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \sim p(x))$.

<u>ex</u>: $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+1 > y) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+1 \leq y$
Existe pelo menos um número mais pequeno que todos os outros.

(R) <u>Conjunto dos números reais</u> (definição <u>axiomática</u>)
$\mathbb{R}, +, \times, \mathbb{R}^+$ · prop. tida como verdade

→ <u>Axioma 1</u> (propriedades comutativas)
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y = y+x$
$\forall x, y \in \mathbb{R} : x.y = y.x$

→ <u>Axioma 2</u> (associatividade da adição)
$\forall x, y, z : (x+y)+z = x+(y+z)$

→ Axioma 3 (propriedade distributiva)
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \underline{x(y+z)} = xy + xz$ $\qquad [(y+z).x]$
↳ distributividade à direita $\qquad$ ↳ dist. à esq.

→ <u>Axioma 4</u> (elemento neutro)
$\exists u \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u + x = x$
$\exists v \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v . x = x$
O elemento neutro da adição é diferente do da multiplicação

→ Teorema

u e v são únicos

$u_1, u_2 \quad \underline{u_1} + u_2 = u_2 \quad = \quad \underline{u_2} + u_1 = u_1$

$$u_1 = u_2$$

• **Def.:** O elemento neutro da adição, que é único, é zero (0).
O elemento neutro da multiplicação, que é único, é um (1).

A axiomática 4 garante que $0 \neq 1$. Com isto, retira-se que 0 e 1 pretencem a $\mathbb{R}$.

→ Axiomática 5 (inverso da soma e da multiplicação)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0$

↳ simétrico de x

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1$

↳ inverso de x

• **Def.:** simétrico - $\quad x \quad -x$

inverso para a multiplicação - $\quad x^{-1} = \frac{1}{x}$

Def.: A é conjunto indutivo se e só se $\forall x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$

$\mathbb{N}$ é a intersecção de todos os conjuntos indutivos que contêm o 0.

$\mathbb{N}$ é o "menor" de todos os conjuntos indutivos que contêm o 0.

→ Princípio da indução finita

(1) $\left.\begin{array}{l} A \subset \mathbb{N} \\ 0 \in A \\ A \text{ é indutivo} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Nota:
- $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}_1$
- $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\} = \mathbb{N}_2$
- $\mathbb{N} \setminus \{3\}$

Dem:

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N} \subset A \\ A \subset \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{N} = A$

(2) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \ n \in \mathbb{N}_1$

$\rightarrow p(n)$

Dem:

- $n = 1$

$1 \geq \sqrt{1}$ Verdade

- Supomos que para um certo $m \in \mathbb{N}_1$, temos $p(m)$ verdade

Hipótese - $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{m}$

Tese - $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \geq \sqrt{m+1}$

Para isso:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m}}\right) + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \geq \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} = \frac{(\sqrt{m})(\sqrt{m+1})}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{m\overbrace{(m+1)}^{\text{é} \geq \text{a } m}} + 1}{\sqrt{m+1}} \geq \frac{\sqrt{m \cdot m} + 1}{\sqrt{m+1}} = \frac{m+1}{\sqrt{m+1}} = \sqrt{m+1}$$

Nota:

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{p} : m \in \mathbb{Z} \wedge p \in \mathbb{N}_1 \right\}$

$\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$

→ Axioma 6 (Axiomática de ordem)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad x+y,\ x \cdot y \in \mathbb{R}^+$

$\mathbb{R}^+$ é fechado para a soma e multiplicação. → tudo o que está lá dentro não sai

→ Axioma 7 (Axiomática de ordem)

$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

Def.: $x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$

$a > b \Leftrightarrow a + (-b) > 0$ (Relação de ordem)

$\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, mas também $\mathbb{Q}$ o é.

A é um conjunto, $A \subset \mathbb{R}$

a, $a \in \mathbb{R}$, é número majorante de A, se e só se $\forall x \in A \quad x \leq a$.

A é majorado se tiver majorante.

Se A é majorado, s é supremo de A $\Leftrightarrow$ s é o menor dos majorantes de A. ($s = \sup A$)

Se o $\sup A \in A \Leftrightarrow$ A tem máximo.

c, $c \in \mathbb{R}$, é minorante de A, se $\forall x \in A \quad x \geq c$

O maior dos minorantes, chama-se ínfimo de A, inf A.

$\tilde{M}_A$ - conjunto dos minorantes

Ex.:

$A_1 = \{0, 1\}$	$M_{A_1} = [1, +\infty[$	$\sup A_1 = 1$	$\tilde{M}_{A_1} =]-\infty, 0]$
$A_2 =]-3, 4] \cup \{6\}$	$M_{A_2} = [6, +\infty[$	$\sup A_2 = 6$	$\tilde{M}_{A_2} =]-\infty, -3]$
$A_3 = \{-1\} \cup [5, +\infty[$	$M_{A_3} = \emptyset$	$\sup A_3 = -$	$\tilde{M}_{A_3} =]-\infty, -1]$
$A_4 =]2, \pi[$	$M_{A_4} = [\pi, +\infty[$	$\sup A_4 = \pi$	$\tilde{M}_{A_4} =]-\infty, 2]$
$A_5 = \{30\}$	$M_{A_5} = [30, +\infty[$		$\tilde{M}_{A_5} =]-\infty, 30]$

$\min A_5 = \inf A_5 = \sup A_5 = \max A_5 = 30$

→ Supremo de A

A é conjunto majorado

$$\sup A = s \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad x \leq s \\ \forall_{s-\varepsilon\ (\varepsilon > 0)} \ \exists x \in A \quad x > s - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \quad x > s - \varepsilon \end{cases}$$

→ Qualquer que seja um número mais pequeno que s, não irá ser majorante

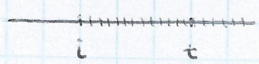
→ para não ser majorante

$t = s - \varepsilon$
$(\varepsilon > 0)$

Nota: Como s é um valor dado, a única variável é ε.

→ Ínfimo de A

$$i = \inf A = \begin{cases} \forall x \in A \quad x \geq i \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \quad x < i + \varepsilon \end{cases}$$



→ Axioma 8 (do supremo)

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \mathbb{R} \\ A \text{ é majorado} \\ A \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ tem supremo}$$

Nota que:

- $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado que verifica o axioma do supremo
- $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado que não verifica o axioma do supremo

→ Teorema

$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x^2 < 2\}$ ①

$1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

3 é majorante de A (tal como 2)

A é majorado, A tem supremo ($s = \sup A$) → Axioma do supremo

$s^2 < 2$ Ⓕ por demonstrações

$s^2 > 2$ Ⓕ por demonstrações

$s^2 = 2$ ✓

Se $s \in \mathbb{Q}$ (s é positivo) ①

$s = \dfrac{m}{p}$ $m, p \in \mathbb{N}_1$

$m.d.v(m, p) = 1$ → Se o máximo divisor comum é 1, então m e p são primos

$s^2 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{p^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2p^2 \Rightarrow m^2$ é par $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m$ é par

$\boxed{\begin{array}{l} 2K \text{ é par} \\ 2K+1 \text{ é ímpar} \end{array}}$

$(2K)^2 = 2p^2 \Leftrightarrow 4K^2 = 2p^2 \Leftrightarrow p^2 = 2K^2 \Rightarrow p^2$ é par $(m = 2K)$

$\Rightarrow p$ é par

Pela redução ao absurdo / Contradição:

$s \notin \mathbb{Q}$, porque ao afirmar que m e p são coprimos (não têm quaisquer fatores comuns além do ± 1), não podem ambos ser pares

$s \in$ ao conjunto de números irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

→ Teorema

$\mathbb{N}$ não é conjunto majorado

Dem.: Se $\mathbb{N}$ é majorado, tem supremo (menor dos majorantes)

$s = \sup \mathbb{N}$

não existe um número maior que o supremo

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{n \leq s}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N} : m > s - \varepsilon$

se $\varepsilon = 1$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $m > s - 1$

$\boxed{m + 1 > s}$

Contradição

existe um número maior que o supremo

Assim, $\mathbb{N}$ não é majorado

Nota que:

- Um conjunto é finito se tiver n elementos;
- Todo conjunto finito tem máximo e mínimo;
  - ↳ Um conjunto é infinito quando não é finito.

Se $\mathbb{N}$ não é majorado, não tem máximo, logo não é finito.

→ Teorema

$a, b \in \mathbb{R} : a < b$

Então :

$]a,b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$
$]a,b[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$ } Num conjunto existem tantos números racionais como irracionais

? Rever

Dem. : 1º caso - $a = 0$

$]0,b[$ Se $b > 0$ e $b \neq 0$, $\frac{1}{b}$ existe e $\frac{\sqrt{2}}{b}$ existe

Como os conjuntos não são majorados :

$\exists m \in \mathbb{N} \quad m > 1/b \Leftrightarrow b > 1/m > 0$

$\exists k \in \mathbb{N} \quad k > \sqrt{2}/b \Leftrightarrow b > \sqrt{2}/k > 0$

→ Corolário

$a, b \in \mathbb{R} : a < b$

Então :

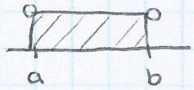
$]a,b[\cap \mathbb{Q}$ é infinito

$]a,b[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é infinito

Dem. : Se $]a,b[$ é finito e $\neq \emptyset$

Seja σ o máximo do conjunto,

em que $\sigma \neq a \wedge \sigma \neq \beta$, então $\sigma \in]a,b[$



→ Sucessões

Sucessão é uma aplicação de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \to \boxed{a_n}$ → valor do termo
n → ordem do termo (sempre $\mathbb{N}$)

$\{a_n : n \in \mathbb{N}_1\}$

É limitada se sucessão tiver majorante e minorante.

- a_n é limitada $\Leftrightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ é limitada
  $\Leftrightarrow \exists m, l \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N}_1 \quad l \leq a_n < m$

- a_n é crescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_1 \quad a_n \leq a_{n+1}$

- a_n é estritamente crescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_1 \quad a_n < a_{n+1}$

→ Vizinhança de a de raio ε

- $\varepsilon > 0$
  $V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

- $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to V_{\varepsilon_1}(a) \subset V_{\varepsilon_2}(a)$

- $0 \leq \varepsilon < \frac{|b-a|}{2} \quad V_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) = \emptyset$
  os intervalos são abertos

Def. :

$a_n \to a \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}_1 \; \forall n > p : a_n \cap V_\varepsilon(a)]$
$\Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

$[\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}_1 \; \forall n > p : a_n \in V_\varepsilon(a)]$

Nota: Pretende-se estudar raios + pequenos

→ Teorema

$(a_n \to a \text{ e } a_n \to b) \Rightarrow a = b$ △ demonstração

$a_n \to a \Leftrightarrow \lim a_n = a$

Limitada ≠ ter limite
↳ ser majorada ou minorada
↳ ser convergente

→ Teorema

Se a_n é convergente ⇒ a_n é limitada $\sim p \Rightarrow \sim q$

→ Teorema

Se a_n é sucessão monótona e limitada, então a_n é convergente.

Dem.:

Seja a_n crescente: $s = \sup\{a_n : n \geq 1\}$

Seja $\varepsilon > 0$.

$s - \varepsilon$ não é majorante

$\exists k \in \mathbb{N}_1 \quad s - \varepsilon < a_k$

$\forall n > k \quad s - \varepsilon < a_k \leq a_n \leq s < s + \varepsilon$

→ Teorema

$u_n \to a \Rightarrow |u_n| \to a$

$\not\Leftarrow$ ex.: $u_n = (-1)^n$ → Apenas uma:

$u_n = 0 \Leftrightarrow |u_n| \to 0$

→ Teorema

$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a_n e b_n são suc. convergentes, então:

$\lim a_n \leq \lim b_n$

Observações:

- ∀ valores a partir de uma determinada ordem
- Não se pode garantir a convergência das duas: $(-1)^n \leq 1$
- $a_n < b_n$ é igual: $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, o lim de ambas é zero

→ Teorema das sucessões enquadradas

$a_n \leq u_n \leq b_n$, a partir de certa ordem

a_n, b_n são convergentes

$\lim a_n = \lim b_n = \sigma$

então,

u_n é convergente e $\lim u_n = \sigma$

→ Corolário

Se u_n é suc. limitada

e $u_n \to 0$

então, $u_n . v_n$ é convergente e $\lim(u_n . v_n) = 0$

O produto de uma suc. limitada por um infinitésimo é um infinitésimo.

→ Teorema

Se qualquer suc. converge, qualquer sua subsucessão converge e tem o mesmo limite.

→ O limite de uma subsucessão chama-se de sublimite.

→ Teorema de Bolzano - Weierstrass

Toda a sucessão limitada tem (pelo menos) um sublimite.
(Toda a sucessão limitada tem pelo menos uma subsucessão convergente)

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\tilde{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = [-\infty, +\infty]$ → reta acabada

$\boxed{\lim a_n = +\infty} \overset{Def.}{\Leftrightarrow} [\forall e > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad \forall n > p \quad a_n > e]$

$\varepsilon > 0 \qquad a_n > 1/\varepsilon$

$\boxed{\overline{\mathbb{R}}}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty$

Soma:

- $a + (+\infty) = +\infty$
- $a + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) + (-\infty)$ → Indeterminação

Produto:

- $a.(+\infty)$ → $a > 0$, $a.(+\infty) = +\infty$
  $a < 0$, $a.(+\infty) = -\infty$
  $a = 0$, $0.(+\infty)$ → Indeterminação
- $(+\infty).(-\infty) = -\infty$

Nota:

$p > 0$ $\qquad n^p \quad a^n \quad n! \quad n^n$
$a > 1$ $\qquad$ ——— crescente ———→

→ Teorema

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to l$$

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(D) = \{f(x) : x \in D\}$

monótona crescente: $\forall x, y \in D \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Nota: A continuidade é uma definição local

$a \in D$

f é contínua em $a \Leftrightarrow \forall V_\delta(f(a)) \ \exists V_\varepsilon(a) \ \forall x \in D \ \ x \in V_\varepsilon \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a))$

$\overset{Def.}{\Leftrightarrow} [\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in D \ |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta]$

→ Função de Dirichet

$$D(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

∼ da definição $[\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in D \ |x-a| < \varepsilon \wedge |f(x) - f(a)| \geq \delta]$

$[\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in D \ |x-3| < \varepsilon \wedge \underbrace{|D(x)|}_{1} \geq \delta]$ → Verdadeiro
$\delta > 1/2$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

↓

Prova de que não é contínua

→ Teorema

f é contínua em $a \Leftrightarrow [\forall x_n \in D \ \ x_n \to a \Rightarrow f(x) \to f(a)]$

→ Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 \Leftarrow x < 0 \\ 1 \Leftarrow x \geq 0 \end{cases}$$

$-\frac{1}{n} \to 0 \wedge H\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \to 0 \neq H(0)$

$\frac{P}{Q}$ → função racional } função contínua no domínio

e^x, sen x } funções contínuas em $\mathbb{R}$

A partir de $1, x$, sen x, e^x todas as outras funções são definidas.

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) = y \arrow[r] & g(y) \end{tikzcd}$$

$D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$
$\forall x \in D_{g \circ f} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

→ Aderência

$A \subset \mathbb{R}$
b é aderente a A se e só se $[\forall \varepsilon > 0 \ V_\varepsilon(b) \cap A \neq \emptyset]$

↓

O conjunto de pontos aderentes de um conjunto é chamada aderência de um conjunto ($\bar{A}$).
$A \subset \bar{A}$

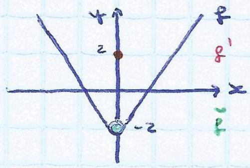
Nota: $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$a \in \bar{D}$
$\lim_{x \to a} f(x) = b \overset{Def.}{\Leftrightarrow} [\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \ |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta]$

$\boxed{a \in D}$ $\left[\forall \delta > 0 \quad f(a) \in V_\delta(b) \atop a = b\right]$

f tem limite em $a \Leftrightarrow f$ é contínua em a

$\boxed{a \in \overline{D} \setminus D}$



→ zero é aderente ao domínio

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

$D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}$

f' é um prolongamento de f

$\tilde{f}$ é um prolongamento por continuidade de f

→ f tem limite em $\underline{a}$ $\Leftrightarrow$ f é prolongável por continuidade de f

⚠ Os teoremas por continuidade são válidos para limites

→ Restrição

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$A \subset D$
$a \in \overline{A}$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \overset{Def}{=} \lim_{x \to a} f\big|_A$$ → restrição de f em A

— " —

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
D não é majorado

$$\lim_{x \to \boxed{+\infty}} f(x) = \boxed{-\infty} \overset{Def}{\Leftrightarrow} [\forall R > 0 \ \exists p > 0 \ \forall x \in D \ \ x > p \Rightarrow f(x) < -R]$$

Se isto é verdade iremos provar que não é minorada

→ Def. intervalo: $\forall a, b \in A$, $a < b$: $\quad a < x < b \Rightarrow x \in A$

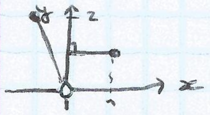
→ Teorema da continuidade global / Teorema do valor intermédio / teorema de Bolzano

I, intervalo
$f: I \to \mathbb{R}$ contínua
$a, b \in I : a < b \wedge f(a) \neq f(b)$
então,
$\forall \sigma$ entre $f(a)$ e $f(b)$ $\exists c \in]a, b[: f(c) = \sigma$ ⚠ dem.

→ Corolário

$f: I \to \mathbb{R}$ contínua
então $f(I)$ é um intervalo

⚠ Não é característica de ser contínua



$D' =]0, 2]$ não é contínua e "gera" um intervalo

→ Teorema

I, intervalo
$f: I \to \mathbb{R}$ monótona
$f(I)$ é um intervalo
então: f é contínua
Dem:
Seja $f: I \to \mathbb{R}$ crescente, $c \in I$
$K = \sup\{f(x) : x \in I \wedge x < c\} \neq 0$
$K = \lim_{x \to c^-} f(x)$

→ Teorema (da continuidade da função inversa)

$f: I \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente monótona $\quad x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(x)$

é injetiva → tem inversa

logo,

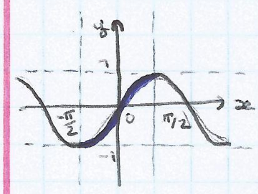
$f^{-1}: f(I) \to I$

é contínua

Dem. funções que transformam intervalos em intervalos e são monótonas, são contínuas.

(1) $f(x) = \text{sen } x \quad \cancel{\forall x \in \mathbb{R}}$

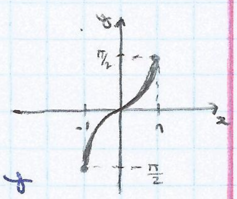
$x \in [-\pi/2, \pi/2]$



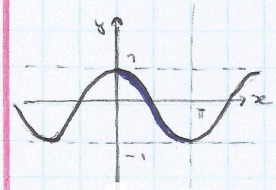
$\underline{\text{arcseno}}: [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

$\forall x \in [-1, 1]$

$\forall y \in [-\pi/2, \pi/2] \qquad y = \text{arcsen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } y$



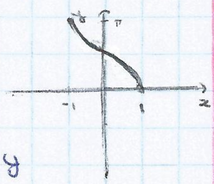
(2) $f(x) = \cos x \;, \quad x \in [0, \pi]$



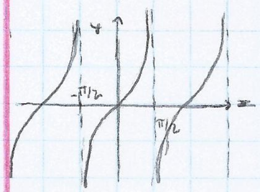
$\underline{\text{arccosseno}}: [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\forall x \in [-1, 1]$

$\forall y \in [0, \pi] \qquad y = \text{arccosseno } x \Leftrightarrow x = \cos y$



(3) $f(x) = \text{tg } x \;, \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[$

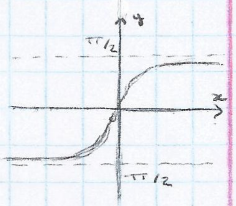


$\underline{\text{arctg}}: \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$

contínua

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\forall y \in]-\pi/2, \pi/2[\qquad y = \text{arctg } x \Leftrightarrow x = \text{tg } y$



→ Teorema de Weierstrass

$a < b \;;\; a, b \in \mathbb{R}$

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua

então,

$f([a,b])$ é um $\underset{\text{Teo. valores intermédios}}{\underline{\text{intervalo}}}$, $\underline{\text{limitado}}$, $\underline{\text{fechado}}$.

Dem.:

$n \in \mathbb{N}_1 \quad \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) \geq n$

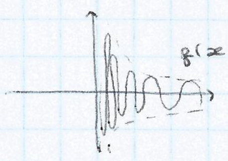
$\lim f(x_n) = +\infty$

$x_{m_n} \to c \qquad a \leq x_{n_m} \leq b$

$c \in [a, b]$

—//—

Tomemos como exemplo:



$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

função de domínio $]0, 1]$

$f(x):]0, 1] \to \mathbb{R}$ ⟿ não é limitada

CÁLCULO DIFERENCIAL

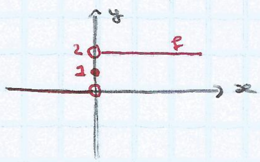
→ Razão incremental de f no ponto a

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = Df(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

$f'(a) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f$ é <u>diferenciável</u> em a

<u>Nota:</u>



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2-1}{x} = +\infty \quad \left(f'_d(a) = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty \quad \left(f'_e(a) = +\infty \right)$$

f tem derivada e não é contínua.

→ Teorema

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f é diferenciável em $a \Rightarrow f$ é contínua em a

<u>Dem.:</u>

$f'(a) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \left[f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

é contínua

→ Teorema

f é diferenciável em a
g é diferenciável em $f(a)$
$g \circ f$ é diferenciável em a
e

$(g \circ f)'(a) = g'.f(a).f'(a)$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(a) \arrow[r, "g"] & g(f(a)) \end{tikzcd}$$

<u>Ex.:</u>

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 - x)$

$(\cos x)' = \cos(\pi/2 - x).(-1) = -\operatorname{sen} x$

→ Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, é contínua e estritamente monótona
f é diferenciável em <u>a</u> e $f'(a) \neq 0$
então,

f^{-1} é diferenciável em $f(a)$

e $(f^{-1})'.(f(a)) = \dfrac{1}{(f'(a))}$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] & f(a) \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$f^{-1} \circ f = f'(a).[f^{-1\prime}(f(a))] = 1$

⚠ dem.

31/10

(1) $f(x) = \log x \,, \ \forall x > 0$

$f^{-1}(x) = e^x$

$(f^{-1})' = e^x \neq 0$

$$x \underset{e^y}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \log x$$

$\forall x > 0 \,, \ f'(x) = \dfrac{1}{e^{\log x}} = \dfrac{1}{x}$

(2) $f(x) = \operatorname{arctg} x \,, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x \,, \ \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$

$(f^{-1})' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{sen}^2 x \neq 0 \,, \ \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$

$$x \underset{\operatorname{tg} y}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \operatorname{arctg} x$$

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{[\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)]^2 + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} u(x) = \frac{u'}{1+(u(x))^2}$$

⚠ **Notas:**

$\sec$ = secante

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{tg}^2 x + 1 = \operatorname{sen}^2 x}$$

(3) $f(x) = \operatorname{arcsen} x \,, \ \forall x \in [-1,1]$

$D(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+1}} \,, \ \forall x \in]-1,1[$

$$\frac{d(\operatorname{arcsen} x)}{dx} = \frac{1}{\frac{d(\operatorname{sen} y)}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(4) $f(x) = \arccos x \,, \ \forall x \in [-1,1]$

$D(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+1}} \,, \ \forall x \in]-1,1[$

arcos é a inversa da restrição do cos a $[0,\pi]$. arcos : $[-1,1] \to \mathbb{R}$, arcos $([-1,1]) = [0,\pi]$ é estritamente decrescente, contínua e diferenciável em $]0,\pi[$

→ **Teorema**

$f(a)$ é máximo local de f $\quad$ a é ponto máximo local

$\overset{Def.}{\Leftrightarrow} \ \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D \quad f(x) \leq f(a)$

→ **Teorema**

Se $\underline{a}$ é ponto máximo local de f

$\underline{f}$ é diferenciável em a.

Então,

$f'(a) = 0$

__Dem.:__

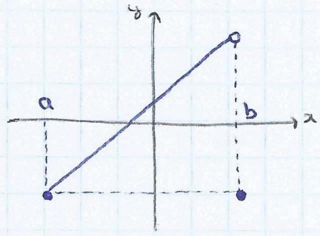
$f(a)$ é máx. local de f

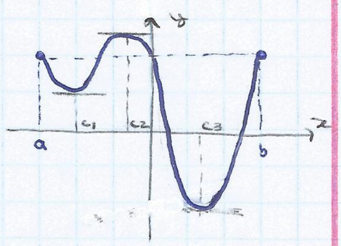
$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D \quad f(x) \leq f(a)$

$$\mathbb{R} \ni f'(a) = \lim_{\substack{x \to a^+ \\ x \to a^-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \left.\begin{matrix} x \to a^+ & f'(a) \leq 0 \\ x \to a^- & f'(a) \geq 0 \end{matrix}\right] f'(a) = 0$$

→ Teorema de Rolle

$a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$
f é contínua em $[a,b]$
f é diferenciável em $]a,b[$
$f(a) = f(b)$
Então,
$\exists\, c \in]a,b[\; : \; f'(c) = 0$



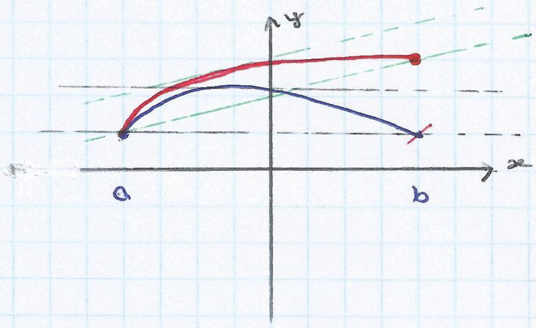


Dem.:
T. Weierstrass $f([a,b])$ é intervalo limitado e fechado
$M = \max f$
$m = \min f$

(02/11)
(continua)

→ Teorema de Lagrange

$a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$
f é contínua em $[a,b]$
f é diferenciável em $]a,b[$
então,
$\exists\, c \in]a,b[\; : \; \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

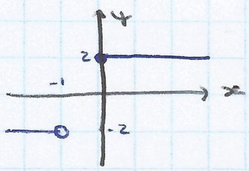


Ex.:
$\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\qquad f(x) = \operatorname{sen} x, \; \forall x \in \mathbb{R}$
$x > 0 \quad [0,x]$
$x < 0 \quad [x,0]$ $\qquad \exists\, y_x$ entre 0 e y

$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos \boxed{y(x)}$
↳ se $x \to 0, y \to 0$

Nota:
$\mathbb{R} \setminus [-1,0[\; \to \;]-\infty,-1[\cup [0,+\infty[$

$f(]-\infty,-1[) = \{-2\} = [-2,-2]$

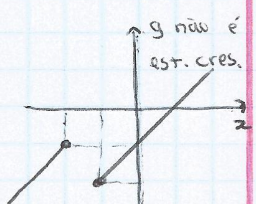


Tem derivada nula, é contínua no domínio, não é um intervalo

→ Corolário
I, intervalo
$\forall x \in I$, $f'(x) = 0$,
então, f é constante

Dem.: $x, y \in I : x < y$
$[x,y] \subset I$
$\exists\, z \in]x,y[\; : \; \dfrac{f(y) - f(x)}{y-x} = f'(z) = 0$
O quociente é zero, então $f(x) = f(y)$

→ Corolário
I, intervalo
$\forall x \in I$, $f'(x) > 0$
então, f é estritamente crescente em I



Dem.: $x, y \in I : x < y$
$[x,y] \subset I$
$\exists\, z \in]x,y[\; : \; \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$ (crescente) $= f'(z) > 0$
>0

→ Teorema de Cauchy

Generalização teorema de Lagrange com $g(x)=x$

$a, b \in \mathbb{R} : a < b$

f, g contínuas em $[a,b]$

f, g diferenciáveis em $]a,b[$

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Então, $\exists c \in]a,b[\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ → Garante a existência de dois num.

Exemplo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{cx}}{2cx} = +\infty$$

$f(x)$, $g(x)$

$[0, x]$

$c_x \in [0, x]$

→ Corolário (Regra de Cauchy)

⚠ Só usado em caso de indeterminações

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$

f, g são diferenciáveis em $]a,b[$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou ambos $\pm\infty$

$g'(x) = 0$

Se existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Então também existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Exemplos:

① $f(x) = x^2 . \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0$

$g(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x . \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2 . \cos\frac{1}{x} . \frac{1}{x^2} = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Não existe

② $$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2-8x+12}{3x^2+2x} = +\infty \neq \lim_{x\to 0} \frac{8x-8}{6x+2} = -4$$

③ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} . e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$a^x \stackrel{Def.}{=} e^{x \log a}, \quad a > 0$

$f(x) > 0, \quad [f(x)]^{g(x)} \stackrel{Def.}{=} e^{g(x) . \log[f(x)]}$

④ $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \log(1+\frac{a}{x})}$$

$a = 0 \quad 1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[x . \log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x+a} . \left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{x+a} = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x \log(1+\frac{a}{x})} = e^a$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

→ Teorema de Lagrange

I, intervalo

$a \in I$

$\forall x \in I$

f é diferenciável em I

$\exists$ $\underline{c_x}$ entre $\underline{a}$ e $\underline{x}$ $\qquad f(x) = f(a) + f'(c_x)(x-a)$

Se $g(x)$ for continuamente diferenciável → existe $(f')' = f''$

é diferenciável

Existe

é contínua

$n \in \mathbb{N}$

$f \in C^n(I) \rightarrow$ função de classe n

função é n vezes continuamente diferenciável

$f \in C^\infty(I) \rightarrow f$ é indefinidamente diferenciável em

(ex.: $f(x) = e^x$)

Todas as funções básicas (polinomiais, e^x, sen x) são indefinidamente diferenciáveis.

→ Teorema de Taylor com resto de Lagrange

$n \in \mathbb{N}_1$

f é $(n+1)$ vezes diferenciável em I

$a \in I$

$\forall x \in I$ $\exists c_x$ entre $\underline{a}$ e $\underline{x}$

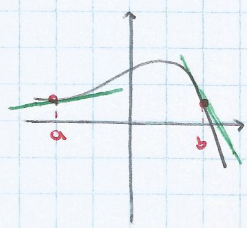
$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \ldots}_{\text{Fórmula de Taylor de ordem } n \text{ de } f \text{ em } a} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}}_{\text{resto de Lagrange}}$$

com termos n

$f(a) + f'(a)(x-a)$

f é diferenciável em a

- f é convexa em $(a, f(a))$ sse,
  $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in V_\varepsilon(a) \ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$
- f é concava em $(a, f(a))$ sse,
  $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in V_\varepsilon(a) \ f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)$



Se a derivada no ponto for positiva, f é convexa. $\qquad$ dem $g(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a)$

→ PRIMITIZAÇÃO

$g: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f em I $(P_f = g)$

$\Leftrightarrow \forall x \in I \quad g'(x) = f(x)$

O processo de primitivação não leva a uma função única.

Exemplos:

- A expressão geral das primitivas e^x.
  $P\, e^x = e^x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$: $]-\infty, 1[\quad P\, e^x = e^x + \alpha$

$]1, +\infty[\quad P\, e^x = e^x + \beta$

$\frac{1}{3} \cdot P\, 3x^2 = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Leftrightarrow P\, x^2 = \frac{x^3}{3}$

◦ Nota:
$D(\log(-x)) \neq (D.\log)(-x)$

→ As expressões que ainda não possuem expressões designatórias, mas que existem, chamam-se <u>não elementarmente primitiváveis</u>
e.g.: $P(e^{\cos x})$

→ Teorema
Toda função contínua é primitivável

→ A primitiva da derivada é a própria função

→ Primitivação <u>por partes</u>
$(fg)' = f'.g + f.g'$
$\Leftrightarrow f'g = (fg)' - fg'$
$\Leftrightarrow \boxed{P(f'g) = fg - P(fg')}$

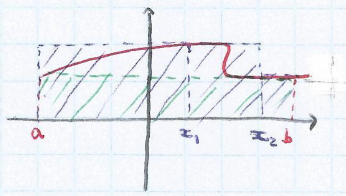
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

⚠ Primitivação de funções lineares
• Funções <u>próprias</u> - quando o grau do numerador é $<$ que o do denominador.
• Funções <u>impróprias</u> - procedimento:
1º - $\frac{P}{Q} = Q_1 + \frac{R}{Q_2}$
2º - Fatorizar

→ Primitivação <u>por substituição</u>
Seja <u>$f(x)$</u> uma função que pretendemos primitivar e suponhamos que <u>$F(x)$</u> é uma primitiva de $f(x)$ num determinado intervalo real. Se substituirmos x por uma função bijetiva <u>$u(t)$</u> como
$$(F(u(t)))' = F'(u(t))\,u'(t) = f(u(t))\,u'(t),$$
temos que
$$(P(F(u(t)))) = P(f(u(t))u'(t))$$
$$\Leftrightarrow \boxed{F(u(t)) = P(f(u(t)).u'(t))}$$
Assim a função $F(u(t))$ pode ser calculada primitivando a função $f(u(t))\,u'(t)$
Como $u(t)$ é bijetiva de $x = u(t)$, obtemos $t = u^{-1}(x)$.
Substituindo em $F(u(t))$ a variável t por $u^{-1}(x)$, ficamos com $F(u(u^{-1}(x))) = F(x)$, que é a primitiva pretendida

→ INTEGRAIS (de Reiman)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>limitada</u>



(conjunto finitos de pontos no intervalo aberto)

$d = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset]a,b[\to$ decomposição do intervalo $[a,b]$
$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b = x_{n+1}$

$i = 0 \dots n$ $[x_i, x_{i+1}]$
$M_i = \sup f([x_i, x_{i+1}])$
$m_i = \inf f([x_i, x_{i+1}])$

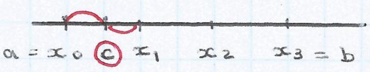
$$\sum_{i=0}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i) = S_d$$
soma sup relativa à decomposição <u>d</u>

$$\sum_{i=0}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i) = s_d$$

$\forall d$ $\boxed{s_d \leq S_d}$

$d_1 = d \cup \{c\}$ $\quad$ $A \subset B$

$x_0 < c < x_1$ $\quad$ $\sup A \leq \sup B$



$M_0'(c - x_0) + M_0''(x_1 - c) \leq M_0(c - x_0) + M_0(x_1 - c) = M(x_1 - x_0)$

$d \subset d_1$, $\quad S_{d_1} \leq S_d$

$s_{d_1} \leq s_d \leq S_{d_1} \leq S_d$

d_1 é <u>mais fina</u> do que d. (tem mais pontos)

d é <u>menos fina</u> do que d_1.

→ <u>Notas</u>:

$\forall\, d_1, d_2$ $\quad d = d_1 \cup d_2$

$d_1 \subset d$

$d_2 \subset d$

$S_d \leq S_{d_1}$

$s_{d_2} \leq s_d$, $\quad s_{d_2} \leq s_d \leq S_d \leq S_{d_1} \iff \boxed{s_{d_2} \leq S_{d_1}}$

Qualquer que seja a soma <u>inf.</u> é sempre menor ou igual à soma <u>sup</u>.

$\{S_d : d\} \neq \emptyset$ → conjunto formado por todas as somas superiores

$\{s_d : d\} \neq \emptyset$ → conjunto formado por todas as somas inferiores

$\inf\{S_d : d\} \neq \emptyset$ → conjunto minorado ⊛ $\quad \boxed{s_{d_2} \leq S_{d_1}}$

$\sup\{s_d : d\} \neq \emptyset$ → conjunto majorado

⊛ $\boxed{\int}$ integral superior de f em $[a, b]$: $\overline{\int}_a^b F$ → ínfimo das somas

<u>Se</u> $\overline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f$, <u>então</u> a função é integrável à Reiman.

$f : [a,b] \mapsto$ limitada

$\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f \iff f$ é integrável (à Reiman em $[a,b] = I$)

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx}$$

I - intervalo de integração

f - função integrante

dx - indica a variável de integração

→ Teorema

$f(x) = \alpha$, $\forall x \in [a,b]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$\int_a^b \alpha\, dx = \alpha(b - a)$$

$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$

$f = 0$, excepto num conjunto <u>finito</u>

Então, f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

→ Teoremas

① $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona $\Rightarrow f$ é integrável em $[a,b]$

② $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua $\Rightarrow f$ é integrável em $[a,b]$

→ Propriedades do integral

Em $[a,b]$ $((a,b) \in \mathbb{R} : a < b)$

→ Teorema

f, g integráveis em $[a,b]$

$\alpha \in \mathbb{R}$

então, $f+g$, αf são integráveis em $[a,b]$ e

$$\boxed{\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx}$$

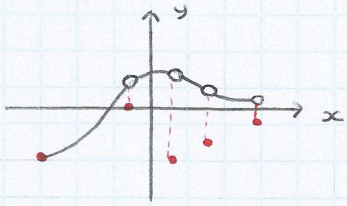
→ Corolário

f integrável em $[a,b]$

$g = f$ excepto num conjunto finito

Então, g é integrável em $[a,b]$

$$\boxed{\int_a^b g = \int_a^b f}$$



⚠ dem. por definição

→ Teorema ↦ Comportamento do integral com a ordem

f, g integráveis em $[a,b]$

$f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$

então,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

O resultado não é um critério de integrabilidade, ou seja, é necessário ter a integrabilidade 'a priori'

Dem.:

$h = g - f$, h é integrável em $[a,b]$

$h(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$

$\inf h([a,b]) \geq 0 \Rightarrow sd \geq 0$

$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ ▨

→ Teorema

f é integrável em $[a,b]$

$\Rightarrow$ $|f|$ é integrável em $[a,b]$

e $\boxed{\left|\int_a^b f(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$

Nota: Uma função pode ter módulo integrável, mas ela própria pode não ser integrável

O integral de uma função é o supremo ou o ínfimo das somas

$|a+b| \leq |a| + |b|$ ↦ desigualdade triangular

resultado válido para um número finito

→ Teorema

$a \leq c < d \leq b$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$

f é integrável em $[a,b]$

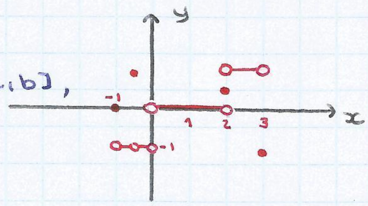
$\Rightarrow$ f é integrável em $[c,d]$

→ Teorema

f é integrável em $[a,c]$ e é integrável em $[c,b]$,

então, f é integrável em $[a,b]$

e $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$



$c = a$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -\,dx = \underline{1}$

$\int_0^2 f(x)\,dx = \underline{0}$

$\int_2^3 f(x)\,dx = \underline{4}$

Def.: $\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$ ← convenção

$b = a$

$\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$

Def.: $\boxed{\int_c^a f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx}$

→ Teorema da média

f é integrável em $[a,b]$ $(a < b)$

$M = \sup f([a,b])$;

$m = \inf f([a,b])$

então,

$$\boxed{\exists \lambda \in [m, M] : \int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)}$$

Dem.:

$\forall x \in [a,b]$

$m \leq f(x) \leq M$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leq \boxed{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}} \leq M \quad \lambda$$

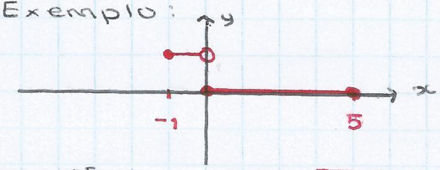
Valor médio função

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

→ Considerações:

- λ é único;
- $[m, M]$ tem de ser fechado, já que se a função fosse constante o teorema não funcionava.
- λ não tem que ser um valor assumido pela função

→ Exemplo:



$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 1 = \underbrace{\boxed{1/6}}_{\lambda} \cdot \underbrace{6}_{b-a}$$

→ Corolário

Se f é contínua em $[a,b]$,

então,

$$\boxed{\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)}$$

→ Teorema do valor intermédio

I, intervalo

$f : I \mapsto \mathbb{R}$, integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em I.

$a \in I$

$$\boxed{\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in I}$$

Função integral indefinido de f com origem em a.

→ Teorema

I, intervalo

$f : I \mapsto \mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em I.

$a, b \in I$

$\varphi_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\varphi_b(x) = \int_b^x f(t)\,dt$, $\forall x \in I$

então,

1. $\varphi_a - \varphi_b$ é função constante em I
2. φ_a é função contínua em I

Dem.:

① $x \in I$

$$\varphi_a(x) - \varphi_b(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_b^x f(t)\,dt$$
$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt \mapsto \text{não depende de } x\text{, logo é constante}$$

② $c \in I$

$$0 \leq |\varphi_a(x) - \varphi_a(c)| = \left|\int_c^x f(t)\,dt\right| \leq \int_c^x \underbrace{|f(t)|}\,dt \leq \alpha\, \underline{|x-c|}$$
$$\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt\right)$$

f é limitada

então $|f|$ é limitado

→ $\boxed{\text{Teorema fundamental da análise}}$

→ Relaciona:
- continuidade
- integrabilidade
- diferenciabilidade

$a \in I$

f é contínua em I, então

$$\boxed{\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt}, \ \forall x \in I$$

é diferenciável em I, e

$$\boxed{\varphi'(x) = f(x)}, \ \forall x \in I$$

Dem.:

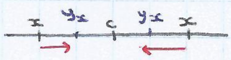
$c \in I$

$$\lim_{x \to c} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} \overset{?}{=} f(c)$$

$$\varphi(x) - \varphi(c) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt$$

$\exists\, y_x$ entre $\underline{c}$ e $\underline{x}$: $\varphi(x) - \varphi(c) = f(y_x).(x-c)$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) - \varphi(c) = f(y_x) \underset{x \to c}{\longmapsto} f(c)$$



▨

→ Corolário

f é contínua em I $\Rightarrow$ f é primitivável em I

→ Teorema (Regra de Barrow)

I, intervalo

f contínua em I

G, uma primitiva de f em I

$a, b \in I$

então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Dem.:

$$\varphi(x) = \int_a^x f'(t)\,dt, \ \forall x \in I$$
$$\varphi'(x) = f(x), \ \forall x \in I$$

$$\boxed{\exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \varphi(x) = G(x) + \alpha}, \ \forall x \in I$$

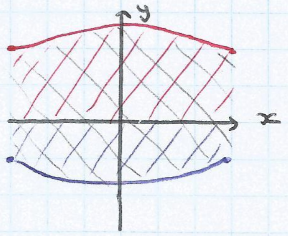
$\int_a^a \rightarrow \varphi(a) = 0 = G(a) + \alpha \Rightarrow \alpha = -G(a)$

$\varphi(b) = G(b) - G(a)$ ▨

⚠ Nota:

Primitivação:
- Substituição $\mapsto$ integração por substituição
- Por partes $\mapsto$ integração por partes

→ Área de funções



- A área não varia com a translação

$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

$= \boxed{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$

→ SÉRIES

$\boxed{a_n}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \rightarrow$ série termo geral a_n
- $k \in \mathbb{N}_1$, $S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \rightarrow$ sucessão das somas parciais da série
- S_k é convergente $\overset{Def.}{\Leftrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente

Nota:

Natureza da série
↳ convergente
↳ divergente

- $\lim S_k = S \rightarrow$ soma da série
- $\sum_{n=0}^{+\infty} cr^n = c + cr + cr^2 + cr^3 + \dots \rightarrow$ série geométrica de 1º termo c e razão r

$n \in \mathbb{N}_1$

$S_n = c + cr + cr^2 + \dots + cr^{n-1}$

$= c \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$, se $r \neq 1$

$c \cdot r$, se $r = 1$ $\qquad$ $c = 0 \rightarrow$ série trivial

Série converge sse $|r| < 1$

Se $|r| < 1$, a soma da série é $\boxed{\frac{1^{\circ}\text{ termo}}{1 - r}}$ $\qquad$ $|r^n| \rightarrow$ converge para 0

→ Teorema

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são convergentes

$c \in \mathbb{R}$

então, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (c \cdot a_n)$ são convergentes

e $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n}$

e $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$

Comentário: O conjunto das séries é a soma dos espaços vetoriais.

→ Teorema

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim a_n = 0$

$\sim(\lim a_n = 0) \Rightarrow \sum a_n$ diverge

$n \in \mathbb{N}_1$, $\boxed{S_n - S_{n-1} = a_n}$

• Nota:

$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \rightarrow$ série harmónica

→ Série de Dirichlet

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}}$, convergente sse $\alpha > 1$

→ Teorema

① $\sum |a_n|$, converge $\Rightarrow \sum a_n$, converge

② $\sum |a_n|$, converge $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \sum a_n$, absolutamente convergente

③ $\sum |a_n|$ diverge e $\sum a_n$ converge $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \sum a_n$ é simplesmente convergente

→ Teorema (Critério geral da comparação)

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, converge

→ Corolário (c.g.c.)

$0 \leq a_n$, $0 \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$

Se existe o $\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell$

$\ell \in]0, +\infty[$

Então,

$\sum a_n$ e $\sum b_n$ têm a mesma natureza

→ Teorema (Critério de D'Alembert)

$|a_n| > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$

Se existe $\boxed{\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell}$

Então:

- $\ell < 1 \Rightarrow \sum |a_n|$ converge
- $\ell > 1 \Rightarrow \sum |a_n|$ diverge

• $a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n \rightarrow$ série de potências de x de termo geral a_n

→ Teorema

$\boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}} \in [0, +\infty]$

↳ limite superior

↳ raio de convergência

Então:

- $|x| < R \Rightarrow$ A série é absolutamente convergente
- $|x| > R \Rightarrow$ A série é divergente

→ Corolário

$a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \dots = \sum a_n.x^n$

Se existe $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (em $\overline{\mathbb{R}}$),

Então é igual a R.

→ Critério de Leibniz

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots = \boxed{\sum (-1)^n \cdot a_n}$

$a_n > 0$, $\forall n$

a_n é suc. decrescente

$\lim a_n = 0$

Então, série é convergente.

Def.:

- $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $e^x = \sum \frac{1}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \sum (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos x = \sum (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

→ Séries de Mengoli:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é série de Mengoli

Se $\boxed{a_n = u_n - u_{n+p}}$

→ Convergência

- Se (u_n) converge, então $\sum a_n$ converge;
- Se (u_n) diverge, então $\sum a_n$ diverge;
- A sua soma é dada por:

$S = u_1 + \ldots + u_p - p \times \lim u_n$

Geral

$\boxed{S = u_k + \ldots + u_{k+p-1} - p \cdot \lim u_n}$

Notas apontamentos aula prática:

- $\log a = b \Leftrightarrow a = e^b$

- $(x-a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

- Sucessões reais: aplicações de um subconjunto infinito de $\mathbb{N}_1$ com valores de $\mathbb{R}$
  - As suc. monótonas e limitadas são convergentes

- O quociente entre racionais é racional

$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z} : x = \frac{p}{q}$

- Progressões geométricas

$V_n = (Cr^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $C, r \in \mathbb{R}$

C - primeiro termo
r - razão

$W_n = C + Cr + Cr^2 + \dots + Cr^n = \sum_{k=0}^{n} C \cdot r^k$

$r \cdot W_n = Cr + Cr^1 + Cr^2 + \dots + Cr^{n+1}$

$W_n - r \cdot W_n = C - Cr^{n+1}$

Se $\begin{cases} C(n+1), & \text{se } r = 1 \\ \boxed{\dfrac{C(1-r^{n+1})}{r-1}}, & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$

- Def. limite e convergência

$a_n \to a$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \varepsilon$
$a_n \in V_\varepsilon(a)$

- Teorema

$a_n \to a$
$b_n \to b$
Então: $a_n + b_n \to a + b$
$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
Se adicionalmente $b \neq 0$,
Então: $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

- Teorema

Se (a_n) é convergente, (a_n) é limitada.

- Proposição

Se $a_n = C \in \mathbb{R}$, então $a_n \to C$.

- Proposição

Se $\alpha > 0$, $\lim \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$

- Teorema

$a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Se $a_n \to a$ e $b_n \to a$,
Então $c_n \to a$

- Definições:

  - $\lim +\infty$ $\quad a_n \to +\infty$
  $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p \ \ a_n > M$

  - $\lim -\infty$ $\quad \lim a_n = -\infty \Leftrightarrow -\lim(a_n) = +\infty \Leftrightarrow \lim(-a_n) = +\infty$

  - $\lim \infty$ $\quad \lim a_n = \infty \Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$

- $\lim \dfrac{c^n}{n^p} = +\infty$, $c > 1$, $n \in \mathbb{N}_1$

- Teorema

Suponha-se que (a_n) é uma sucessão de termos positivos
- Se $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in [0,1[$, então $a_n \to 0$
- Se $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in]1,+\infty]$, então $a_n \to +\infty$

- Teorema

Seja (a_n), tal que existe $c > 1$, verificando $a_n \geq c^n$.
Então, $a_n \to +\infty$

- Teorema

Seja (a_n) uma sucessão de termos não nulos, tal que existe $c \in [0,1[$, verificando $a_n \leq c^n$.
Então, $a_n \to -\infty$

- Teorema

Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos, tal que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe em $\overline{\mathbb{R}}$.
Então, $\boxed{\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$

- Teorema

Seja $x \in \mathbb{R}$.
Então $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x}$

• **Teorema (Crítica de Heine)**

Seja f:

$A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x_0 \in A$

f é contínua em x_0, se e só se qualquer que seja a sucessão (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, $x_n \mapsto x$, teremos $f(x_n) \mapsto f(x)$.

• **Teorema (da Continuidade da função composta)**

Seja:

$F : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$G : B \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x_0 \in A$

$F(x_0) \in B$

Se F é contínua em x_0 e G é contínua em $F(x_0)$, então $G \circ F$ é contínua em x_0.

• **Teorema (da Diferenciabilidade da função composta)**

Seja:

$F :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$, com $a < b$

$G :]c,d[\mapsto \mathbb{R}$, com $c < d$

$x_0 \in]a,b[$

$F(x_0) \in]c,d[$

Se F é diferenciável em x_0 e G é diferenciável em $F(x_0)$, então $\boxed{(G \circ F)'(x_0) = G'(F(x_0)) \cdot F'(x_0)}$.

• Teorema (da Continuidade da função inversa)

Seja:

$F : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

I, intervalo

Se F é estritamente monótona em I, então F^{-1} é contínua em $F(I)$.

• **Teorema (da Diferenciabilidade da função inversa)**

Seja:

$F :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$, com $a < b$

$x_0 \in]a,b[$

Se F é diferenciável em x_0, F estritamente monótona em $]a,b[$, $F'(x_0) \neq 0$.

Então, F^{-1} é diferenciável em $\boxed{F(x_0) \text{ e } (F^{-1})' . F(x_0) = \frac{1}{F'(x_0)}}$

Obs: A fórmula anterior pode obter-se de:

$\boxed{F^{-1}(F(x)) = x}$

derivando os dois lados da igualdade

- Teorema de Cauchy

$f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, $a < b$
f, g contínuas em $[a,b]$, diferenciáveis em $]a,b[$.

$\exists\, c \in]a,b[: \ (f(b)-f(a)) \cdot g'(c) = (g(b)-g(a)) \cdot f'(c)$

Obs.: Muitas vezes assume-se $g'(x) \neq 0$ em $]a,b[$ e escreve-se:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Obs.: Com $g(x) = x$ obtem-se o Teorema de Lagrange

- Teorema Regra de Cauchy

$f, g : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
I é um intervalo aberto com a um extremo de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$).
f, g diferenciáveis em $\mathbb{R}$.
Supondo que $g'(x) \neq 0$ em I:
Se,
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$
ou
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

Então, se existe $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
então também existe e é igual a $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

- Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

$f : V_\varepsilon \mapsto \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$
f $(n+1)$ vezes diferenciável em $V_\varepsilon(a)$, com $x \in V_\varepsilon(a)$.
Então, existe c_x no intervalo aberto de extremos a e x tal que,

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^n}_{\text{polinómio de Taylor relativo a } f \text{ e } a \text{ de ordem } n.} + \underbrace{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c_x)}_{\text{Resto de Lagrange}}$$

Obs.: $n = 0 \Rightarrow$ Teorema de Lagrange

- Observações:

↳ Admitimos saber que o produto de uma função contínua por uma função integrável é integrável.

↳ $F \leq G$ integráveis em $[a,b] \Rightarrow \int_a^b F \leq \int_a^b G$

↳ Se f é contínua em $[a,b]$, o Teorema de Weierstrass garante que f tem um máximo e um mínimo em $[a,b]$
$m = \min F[a,b]$
$M = \max F[a,b]$

- Teorema Fundamental do Cálculo

Seja:

$f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ em I num intervalo aberto

$a \in I$

Se f é contínua em I, então a função $I \ni x \mapsto \int_a^b f$ é diferenciável em I e:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^b f\right] = f(x)}$$

- Observações

↳ $\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$

com $a \leq c \leq b$ e f integrável

↳ $\varphi(x) = \int_f^g h(t)\, dt$

$\varphi'(x) = g' . h(t) - f' . h(t)$

$\varphi''(x) = g'' . h(t) + g' . h'(t) - f'' . h(t) - f' . h'(t)$