Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 8 – Energia potencial electrostática

Campo eléctrico no vácuo e conceitos fundamentais da electrostática

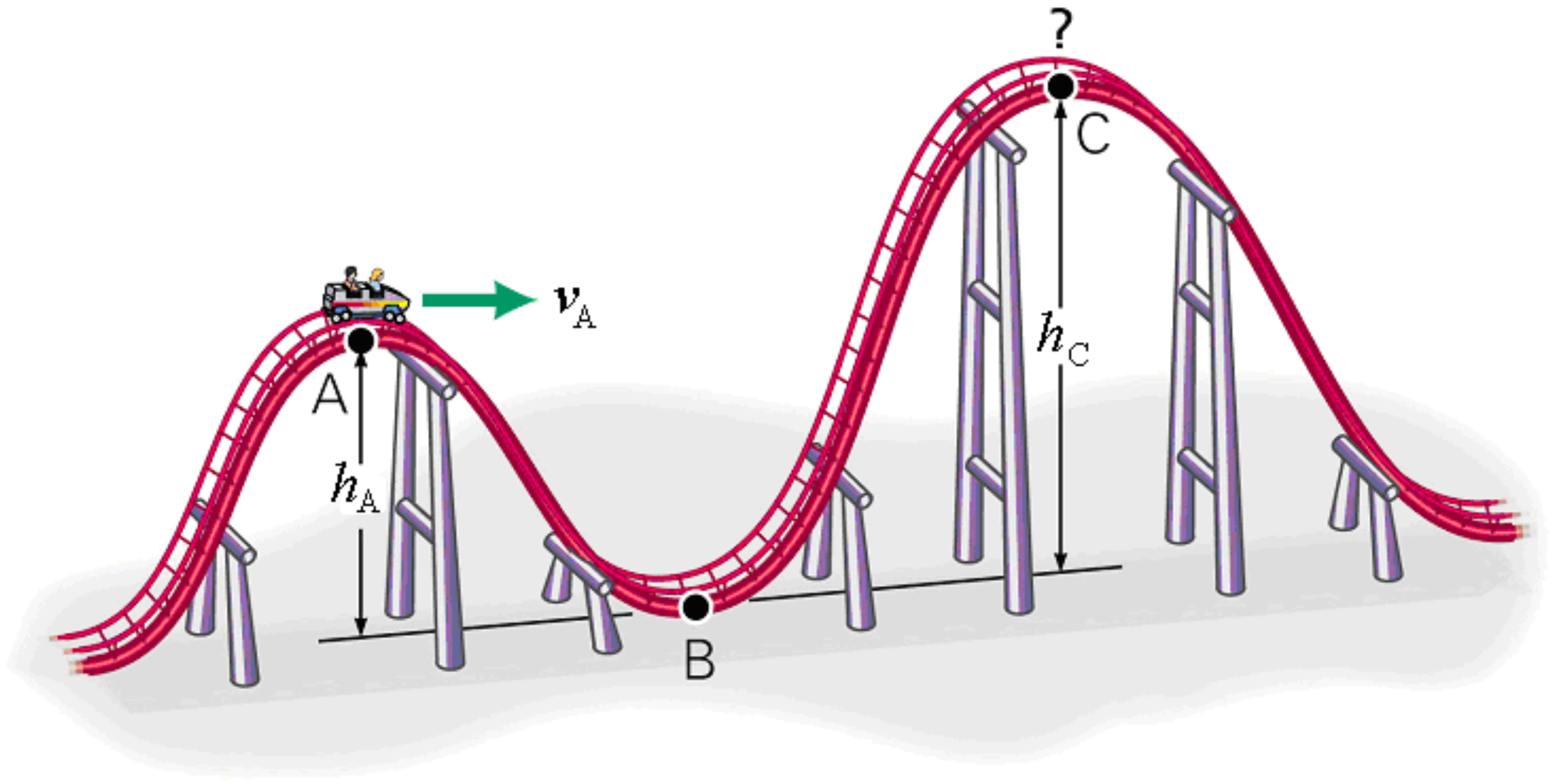
Energia potencial electrostática

- Energia potencial para:
  - distribuição de cargas
  - distribuição contínua de cargas
  - condensador
- Energia e densidade de energia do campo eléctrico
- Cálculo de forças eléctricas e pressões a partir da energia potencial electrostática

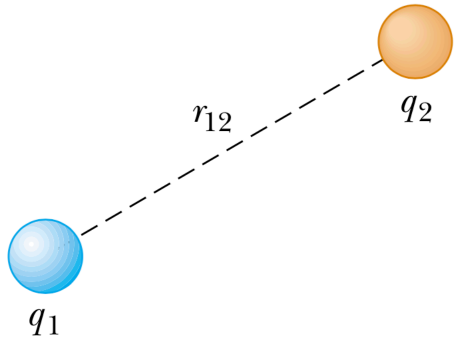
Popovic & Popovic Cap. 9

Conservação de energia em problemas de mecânica

A noção de energia potencial e cinética pode ser útil para fornecer informação sobre a evolução do sistema no tempo.



Energia potencial no campo electrostático



Para construir uma dada distribuição de cargas,
é preciso realizar **trabalho exterior**.

Consideremos uma carga $(+)Q_1$ num ponto do espaço. Qual o trabalho realizado a trazer uma carga $(+)Q_2$ até uma distância r_{12}?

$$W = \int_{\infty}^{P} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{1}{r^2} dr = \boxed{Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} \equiv U_e}$$

$\vec{F} \propto -\vec{E}$ porque as cargas se repelem

A este trabalho chama-se **energia potencial electrostática**.

Potencial eléctrico

A expressão anterior pode ser escrita na forma $U_e = Q_2 V$, onde

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_P} = \int_\infty^P \vec{E}.\overrightarrow{dl} \qquad [\mathrm{W/C}] = [\mathrm{V}]$$

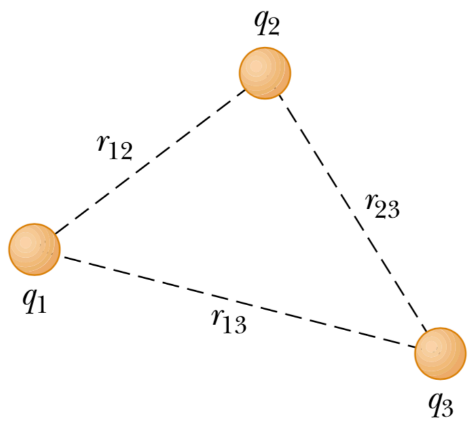
é o **potencial eléctrico** no ponto P, criado pela carga Q_1. Como $V = U_e/Q$:

O potencial eléctrico num ponto P do espaço corresponde ao **trabalho por unidade de carga** que é necessário realizar para trazer uma carga desde um ponto de referência até esse ponto.

Como para o campo, com mais que uma carga usa-se o princípio da sobreposição.

Energia potencial electrostática de uma distribuição de cargas

Para mais do que um par de cargas, deve-se considerar a contribuição de cada par:



$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\overset{2\to 1}{\frac{Q_1Q_2}{r_{12}}} + \overset{3\to 2}{\frac{Q_2Q_3}{r_{23}}} + \overset{3\to 1}{\frac{Q_1Q_3}{r_{13}}}\right) = \frac{1}{2}(Q_1\boxed{V_1} + Q_2V_2 + Q_3V_3)^*$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}}\right)$$

A expressão geral para N cargas é

$$\boxed{V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{Q_j}{r_{ij}}}$$

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_iV_i}$$

Energia potencial de uma distribuição de N cargas

*O factor de ½ surge para compensar pares repetidos, p.ex. r_{12} e r_{21}

Energia potencial electrostática de uma distribuição contínua de cargas

Passando a uma distribuição contínua:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_v \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\overrightarrow{dr}'$$

$$U_e = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\,V(\vec{r})\overrightarrow{dr}$$

Usando $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ e $\vec{E} = \vec{\nabla}V$ pode-se demonstrar que

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\int \epsilon_0\, E^2(\vec{r})\,dv}$$

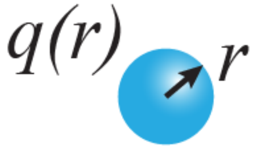
Energia potencial de uma distribuição contínua de cargas

A energia está *distribuída pelo campo eléctrico*.

Exemplo: energia potencial electrostática de uma esfera com carga uniforme

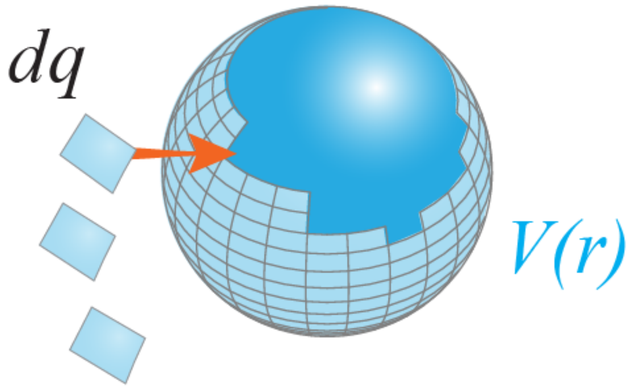
Objectivo: esfera de raio a, densidade ρ, carga $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$.

1. Considere-se uma esfera de raio r com carga $q(r)$:



$$q(r) = \rho \tfrac{4}{3}\pi r^3 \qquad W = 0$$

2. Trazem-se do infinito cargas elementares dq formando uma camada esférica de raio interior r e espessura dr:



$$dq = \rho(4\pi r^2 dr) \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(r)}{r}$$

$$dW = dq \cdot V(r) = \rho(4\pi r^2 dr) \times \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} r^4 \rho^2 dr$$

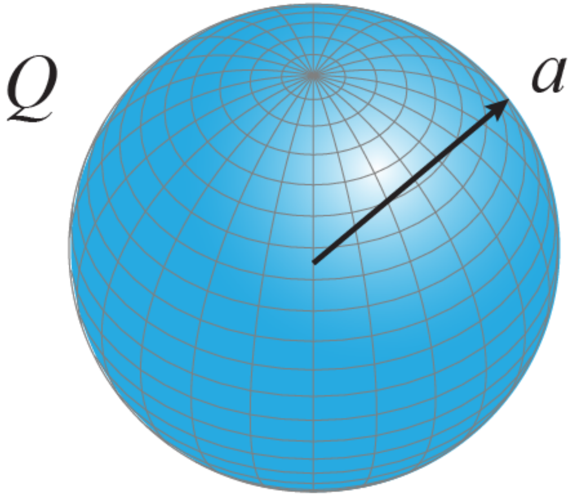
Exemplo: energia potencial electrostática de uma esfera com carga uniforme

3. Continua-se o processo até atingir o raio a

$$W = \int dW = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0}\int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0}\rho^2 a^5$$

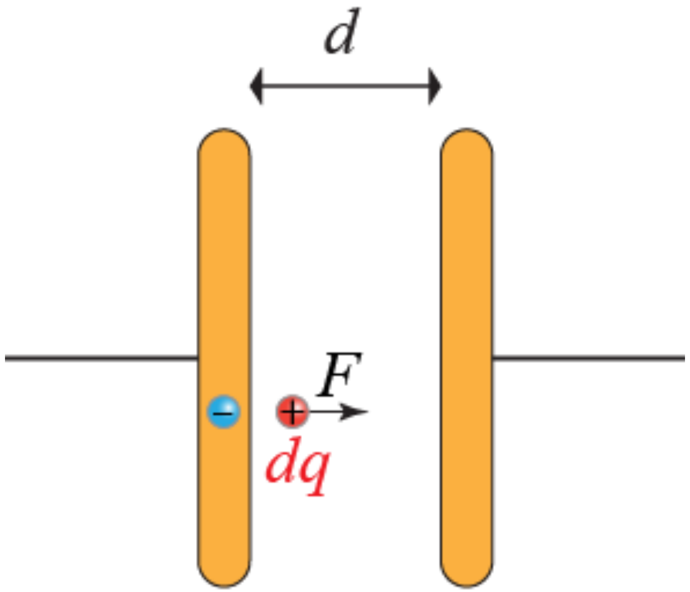
4. Usando a definição $Q = \frac{4\pi}{3}a^3\rho$:

$$W = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = U_e$$

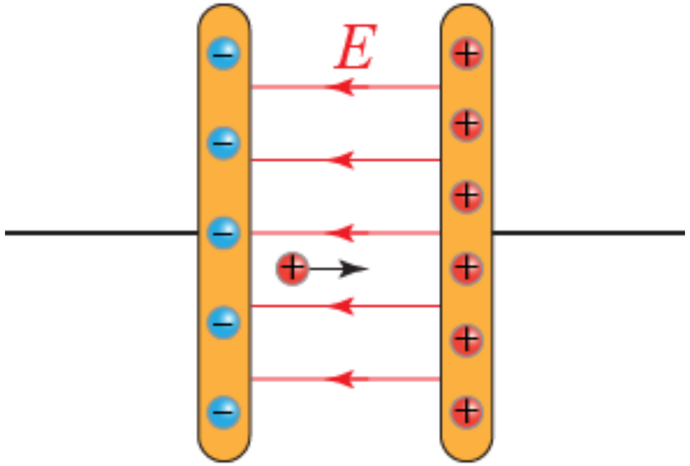


Energia potencial electrostática de um condensador

A energia (potencial electrostática) de um condensador corresponde ao **trabalho** necessário para o **carregar**.



1. No estado inicial ($V = 0, E = 0$) uma carga dq é transportada de um eléctrodo ao outro, com trabalho nulo

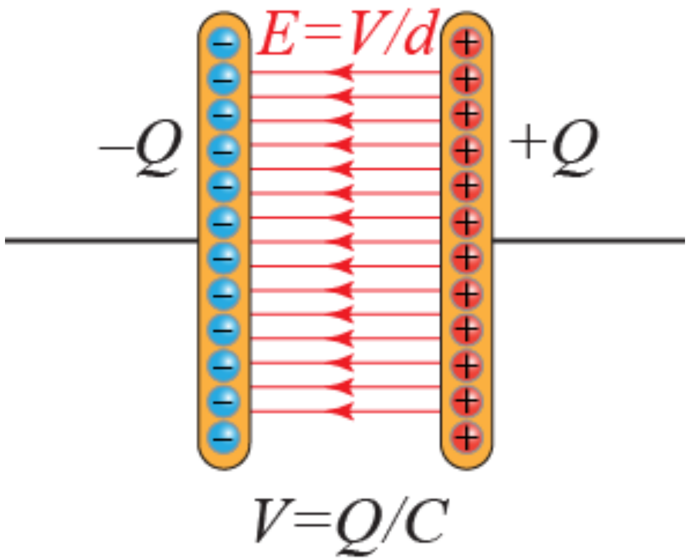


2. À medida que a carga transportada Q cresce, também aumentam V e $E = V/d$. O trabalho para transportar uma carga dQ é agora

$$dW = V.dq$$

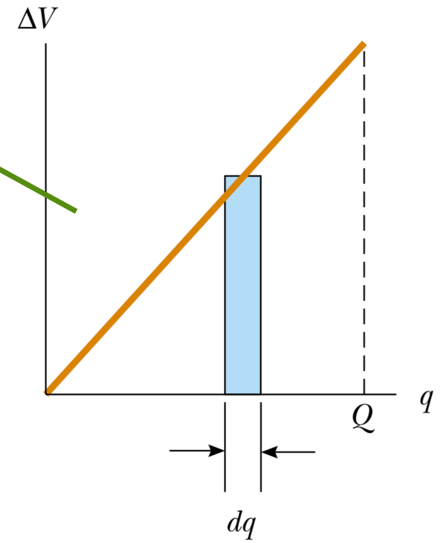
Energia potencial electrostática de um condensador

3. A energia potencial final do condensador corresponde ao trabalho total necessário para o carregar:



$$U_E = \int_0^Q dW = \int_0^Q V dq$$

4. A d.d.p. V e a carga Q relacionam-se por $V(q) = Q/C$:



$$U_e = \frac{1}{C}\int_0^Q Q dq = \boxed{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2}$$

Esta expressão é válida para qualquer condensador.

Exemplo: energia de dois condensadores

Capacidade: 100 pF = 10^{-10} F
Tensão máxima: 500 V
Energia máxima:

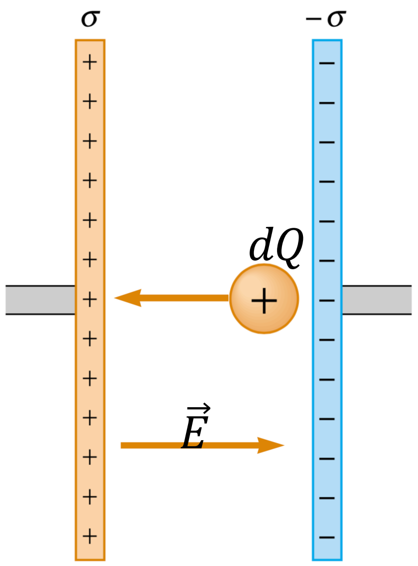
$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\times 10^{-10}\times 500^2 = 25\ \mu\text{J}$$

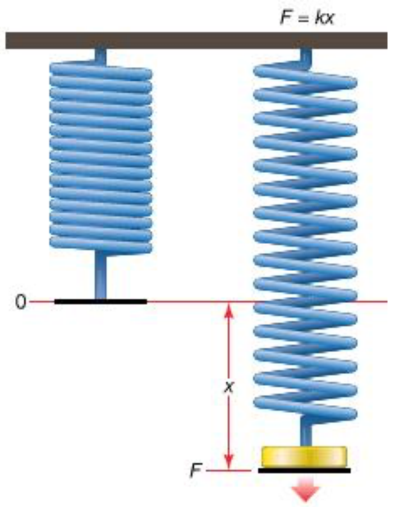
Capacidade: 100 µF = 0,1 mF
Tensão máxima: 3000 VDC
Energia máxima:

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\times 0{,}0001\times 3000^2 = 450\ \text{J}$$

Analogia entre condensadores e molas

Condensador		Mola	
D.d.p.	V	F	Força
Carga	Q	x	Deslocamento
Capacidade	$V = \frac{1}{C}Q$	$F = kx$	Cte. elástica
Trabalho	$W = \int V dq$	$W = \int F dx$	Trabalho
En. potencial	$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$	$U = \frac{1}{2}kx^2$	En. potencial





Densidade de energia

Podemos admitir que a energia do condensador está armazenada no campo eléctrico entre as placas. Para um condensador plano:

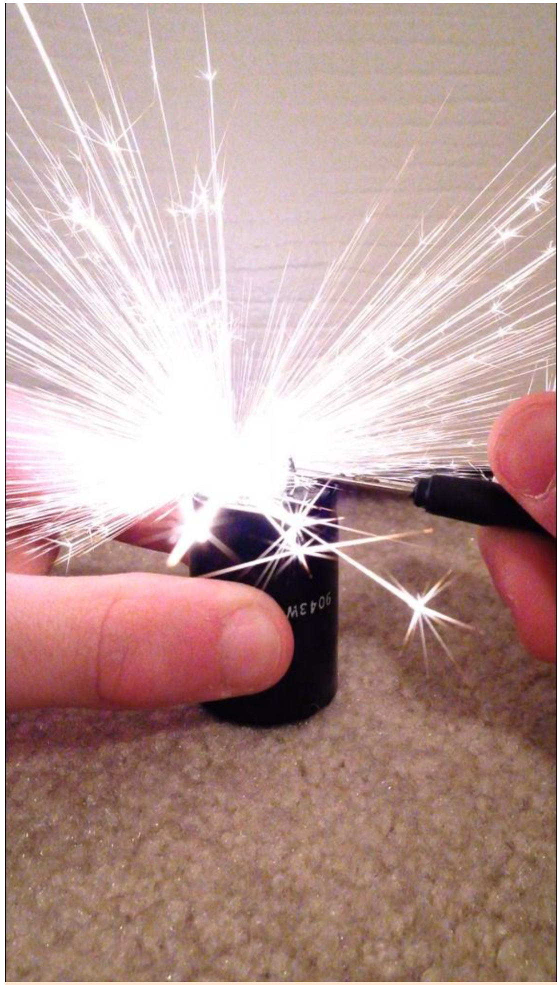
$$V = \left|\vec{E}\right| d \qquad C = \epsilon_0 A/d$$

$$U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A d) E^2$$

Como $Ad =$ volume do espaço entre as placas, definimos:

$$\boxed{u_E = \frac{U_E}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$$

densidade de energia [J/m^3]



Um condensador armazena energia!

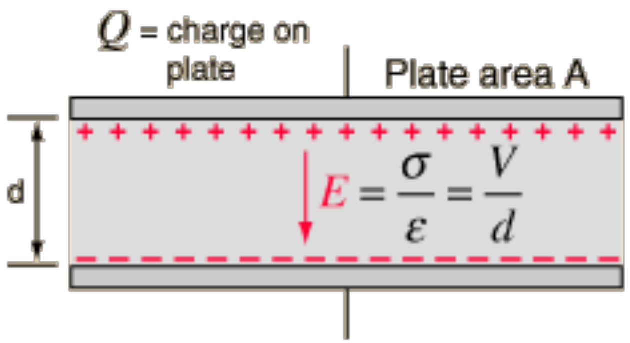
Densidade de energia

No caso de um condensador com um dieléctrico ϵ entre as placas:

Capacidade: $C = \epsilon A/d$

Energia armazenada: $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(\epsilon A d)E^2$

Densidade de energia: $u_E = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2}\epsilon E^2$



- A energia contida num sistema electrostático pode ser calculada se admitirmos que está distribuída pelo campo com uma densidade u_E
- A energia pode ser armazenada no dieléctrico (polarização) ou no vácuo (campo eléctrico)

Cálculo da força electrostática entre dois corpos

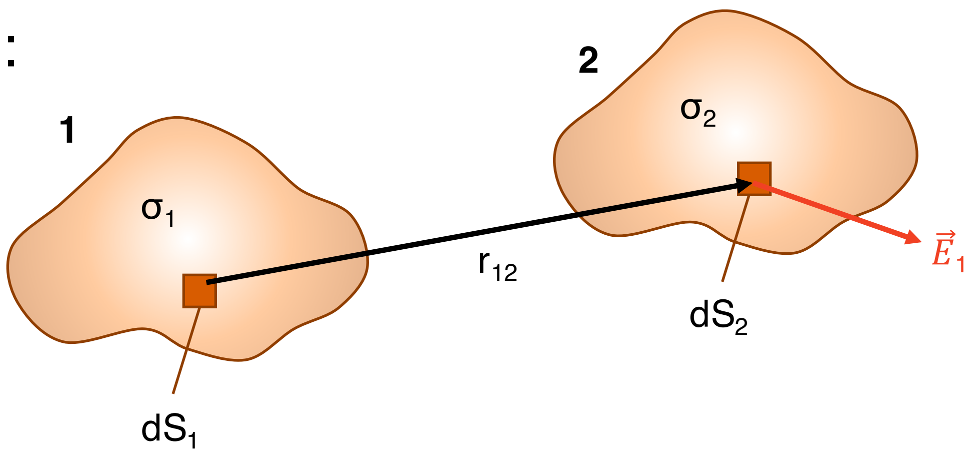
Sabemos como calcular a força entre **duas cargas pontuais**.
Como fazer no caso de **dois corpos carregados**?

Força sentida em 2 causada pela carga em dS_1:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{S_2} \vec{E}_1 \sigma_2 dS_2$$

em que $\vec{E}_1$ é o campo em cada elemento de S_2 causado por um elemento dS_1

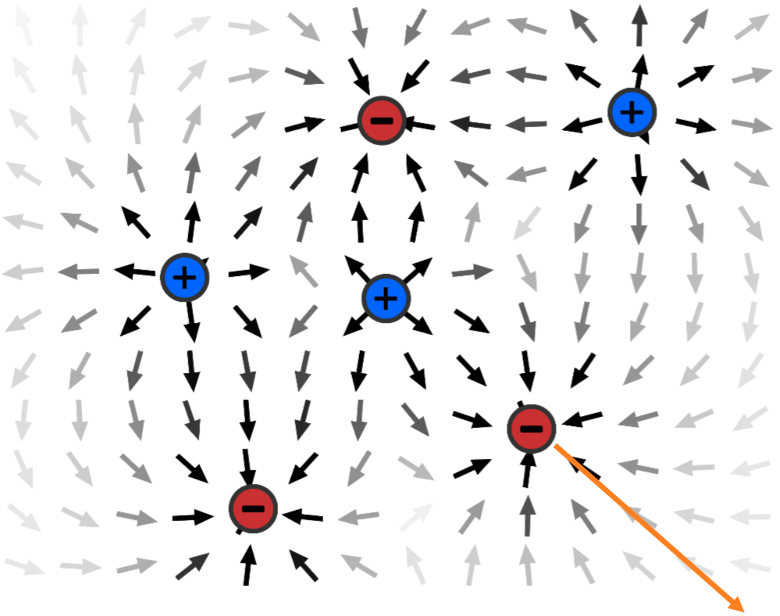
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$



Haverá um método mais prático?

Cálculo de forças eléctricas a partir de U_e
Caso 1: cargas isoladas

Consideremos um sistema de cargas **isoladas** e fixas.
Como se altera a energia U_e ao movermos uma carga?



O trabalho realizado é o oposto do da força eléctrica $\vec{F}_E$:

$$dW_{ext} = \vec{F}.d\vec{l} = -\vec{F}_E.d\vec{l}$$

Como as cargas estão isoladas, o trabalho realizado reverte para a energia potencial do sistema:

$$dU_e = dW_{ext} = -\vec{F}_E.\overrightarrow{dl} \rightarrow \vec{F}_E = -\frac{dU_e}{\overrightarrow{dl}}$$

$$\boxed{\vec{F}_E = -\left(\frac{dU_e}{ds}\right)_q \vec{u}_s}$$

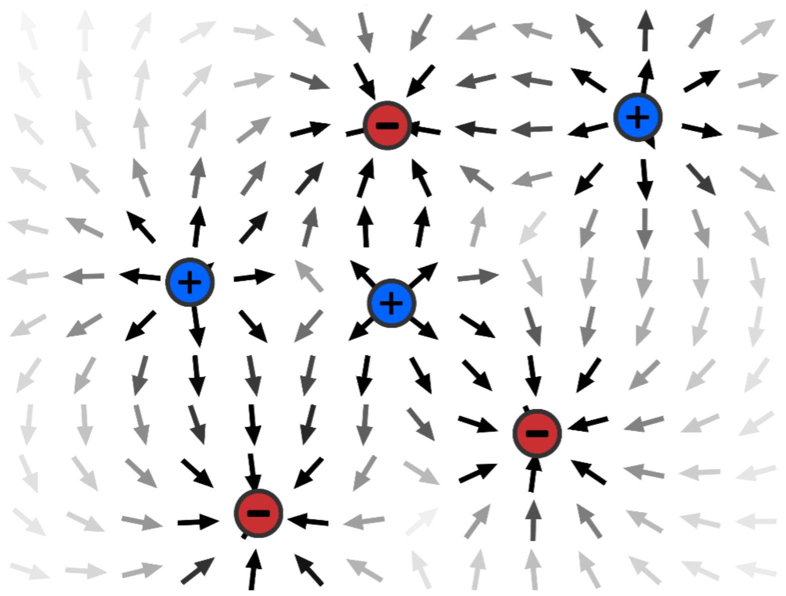
Derivada calculada com q =constante

Cargas isoladas: força eléctrica na direcção $\overrightarrow{u_s}$

Cálculo de forças eléctricas a partir de U_e Caso 2: cargas não isoladas

E se as cargas não estiverem **isoladas**?
P. ex. podem estar ligadas a baterias que mantém as diferenças de potencial constantes para alterações da distribuição.

Nesse caso, as fontes realizam trabalho, pondo e retirando cargas.



$$dU_e = dW_{ext} + dW_f = \vec{F}_E.\overrightarrow{dl}$$
$$\rightarrow \vec{F}_E = \frac{dU_e}{\overrightarrow{dl}}$$

$$\boxed{\vec{F}_E = \left(+\frac{dU_e}{ds}\right)_V \vec{u}_s}$$

Cargas *não-isoladas*: força eléctrica na direcção $\overrightarrow{u_s}$

Exemplo: força entre as armaduras de um condensador de placas paralelas

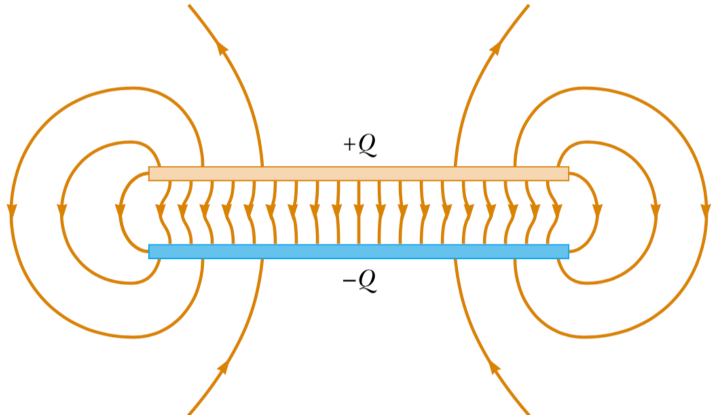
Recordemos as expressões para um condensador de placas paralelas:

- Campo eléctrico entre as placas: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n} = \frac{Q}{A\epsilon_0}\vec{n}$

- D. d. p entre as placas: $V = \left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$

- Capacidade: $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

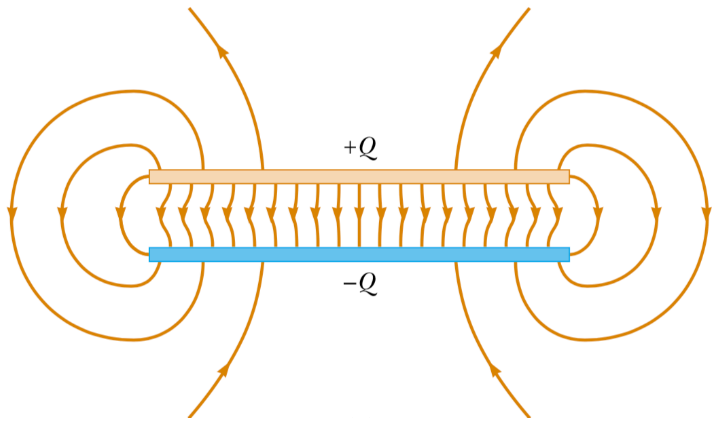
- Energia potencial: $U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$



Exemplo: força entre as armaduras de um condensador de placas paralelas

1. Usando a Lei de Coulomb

Campo eléctrico gerado pela placa 1 na placa 2:



$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2}\frac{Q}{A\epsilon_0}\vec{n}$$

Força sentida em 2 causada pela carga em dS_1:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{S_2} \vec{E}_1 \sigma_2 dS_2 = \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2}\frac{Q}{A\epsilon_0}\vec{n}\right)\sigma_2 dS_2$$

Como $\sigma_2 A = -Q$:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\epsilon_0}\vec{n} = -\frac{\epsilon_0}{2}\frac{AV^2}{d^2}\vec{n}}$$

Exemplo: força entre as armaduras de um condensador de placas paralelas

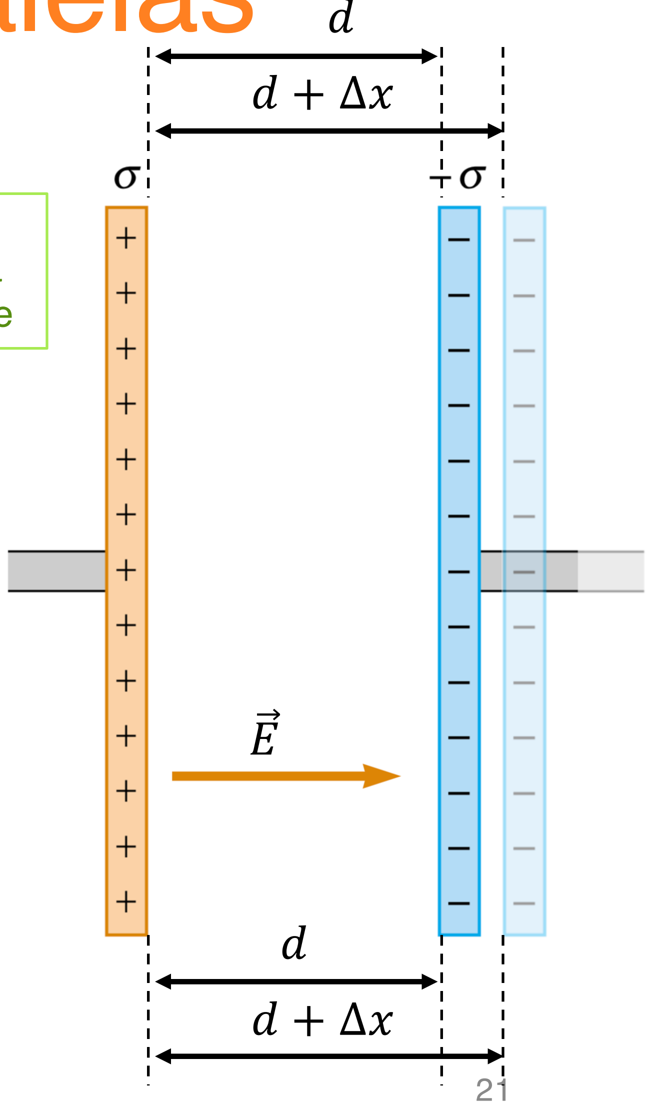
2. Usando U_e, placas isoladas ($Q = \text{cte.}$)

Ao afastar as placas, com Q constante:

- $V \equiv V(x)$ aumenta: $\Delta V = \frac{Q}{A\epsilon_0}\Delta x$
- $U_e \equiv U_e(x)$ aumenta: $\Delta U_e = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\epsilon_0}\Delta x$

Ao afastar, C diminui: é preciso maior d.d.p. para manter a carga constante

$\Delta U_e = \Delta W_{ext}$



O trabalho realizado é igual à variação de energia potencial:

$$\Delta W_{ext} = -F_E \Delta x = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\epsilon_0}\Delta x = \Delta U_e$$

Força entre as placas (segundo $\vec{x}$):

$$\boxed{F_E = -\left(\frac{\Delta U_e}{\Delta x}\right)_q} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\epsilon_0} = \boxed{-\frac{\epsilon_0}{2}\frac{AV^2}{d^2}}$$

Exemplo: força entre as armaduras de um condensador de placas paralelas

3. Usando U_e, placas não isoladas $(V = \text{cte.})$

Ao afastar as placas, com V constante:

- $Q \equiv Q(x)$ diminui: $Q(x) = C(x)V = \left(\frac{\epsilon_0 A}{d+\Delta x}\right)V$
- $U_e \equiv U_e(x)$ diminui: $U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d+\Delta x}\right)V^2$

$$\Delta U_e \approx -\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d^2}V^2\Delta x$$

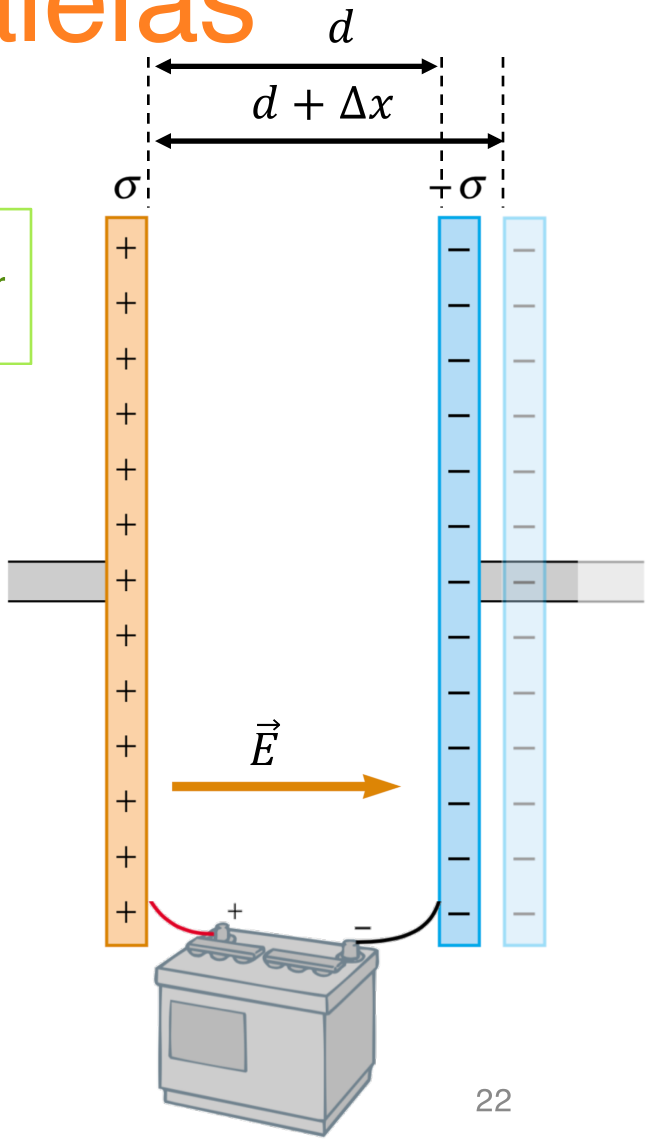
Para evitar que V suba, a bateria tem que retirar cargas das placas

$$\Delta U_e = \Delta W_{ext} + \Delta W_{bat}$$

Trabalho realizado pela bateria: $W_{bat} = V\Delta Q = -\frac{\epsilon_0 A V^2}{d^2}\Delta x$

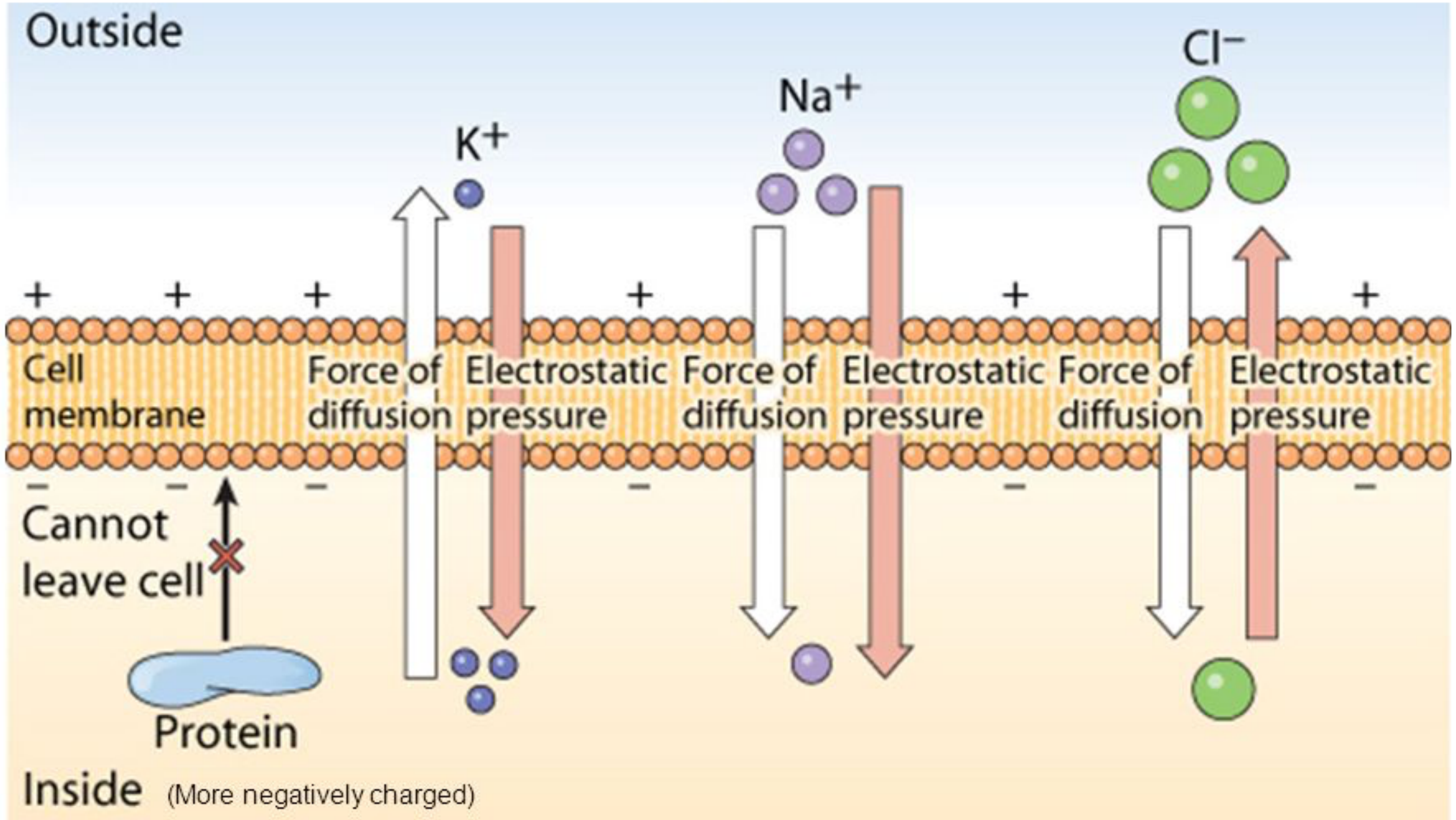
Força entre as placas (segundo $\vec{x}$) :

$$\boxed{F_E = \left(+\frac{\Delta U_e}{\Delta x}\right)_V} = \boxed{-\frac{\epsilon_0}{2}\frac{AV^2}{d^2}}$$



Pressão electrostática

Num campo electrostático existe **pressão** em todas as fronteiras. Vamos usar a energia electrostática para calcular essa pressão.

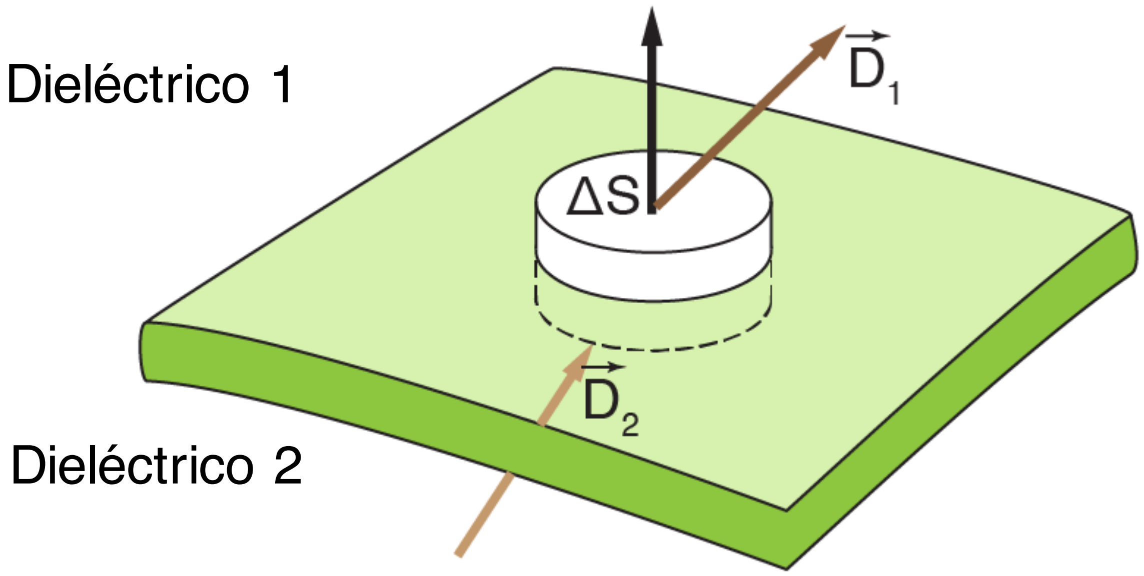


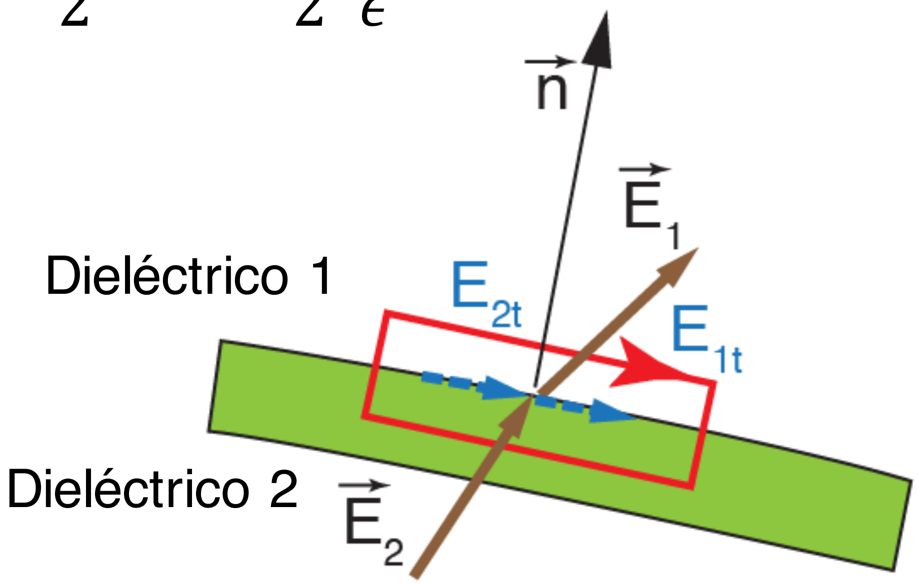
Pressão electrostática, difusão e o movimento de iões através da membrana de um neurónio

Condições fronteira em dieléctricos

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E} \qquad D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

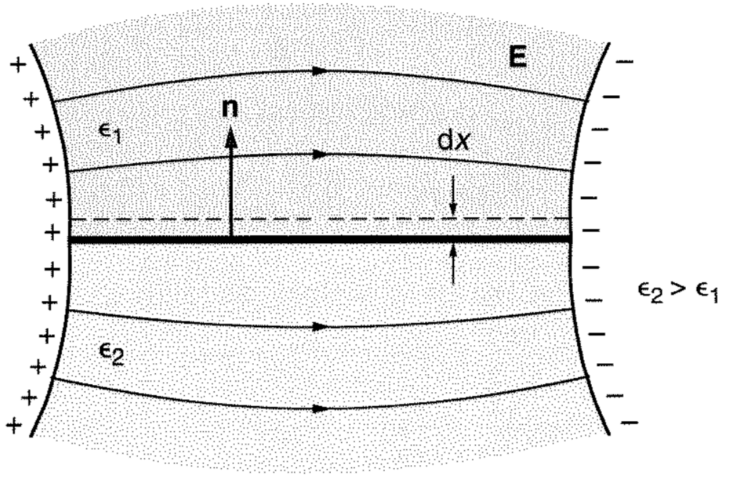
$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = Q_{livre} \qquad u_E = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon}$$





Pressão electrostática na fronteira entre dois dieléctricos: campo tangencial

- Fronteira tangencial às linhas de campo: $E \equiv E_t$
- Admite-se que a força empurra a fronteira uma distância dx na direcção $2 \rightarrow 1$



Na fronteira $E_{1t} = E_{2t}$:

- $\vec{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{V} =$ **constantes**: $F_E = \left(+\frac{dU_e}{dx}\right)_V$
- $u_E = \frac{1}{2}\epsilon E_t^2$ **muda**: $\Delta u_E = \frac{1}{2}(\epsilon_2 - \epsilon_1)E_t^2$

$$\Delta U_e = \Delta u_E(dx\Delta S) \rightarrow F_E = \Delta u_E \Delta S$$

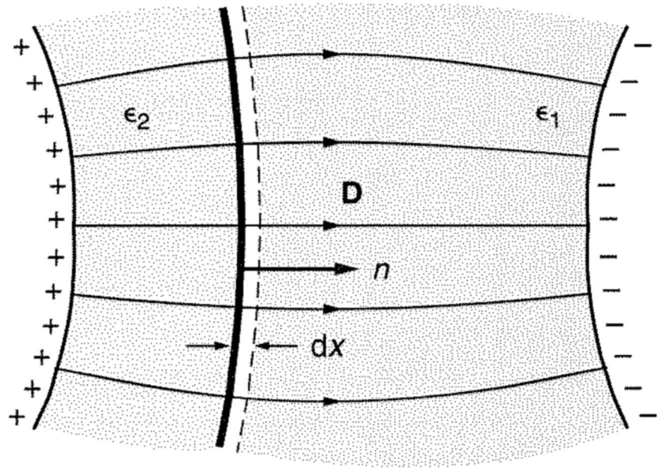
$$p_E = \frac{F_E}{\Delta S} = \Delta u_E = \boxed{\frac{1}{2}(\epsilon_2 - \epsilon_1)E_t^2}$$

Pressão electrostática dirigida de 2 para 1

A pressão aponta no sentido do dieléctrico de menor permitividade

Pressão electrostática na fronteira entre dois dieléctricos: campo normal

- Fronteira normal ao vector $\vec{D}$: $D \equiv D_n$
- Admite-se que a força empurra a fronteira uma distância dx na direcção $2 \rightarrow 1$



Na fronteira $D_{1n} = D_{2n}$:

- $\vec{\boldsymbol{D}}, \boldsymbol{Q}$ **= constantes**: $F_E = \left(-\frac{dU_e}{dx}\right)_Q$
- $u_E = \frac{1}{2} D_n^2/\epsilon$ **muda**: $\Delta u_E = \frac{1}{2}(1/\epsilon_2 - 1/\epsilon_1) D_n^2$

A pressão aponta no sentido do dieléctrico de menor permitividade

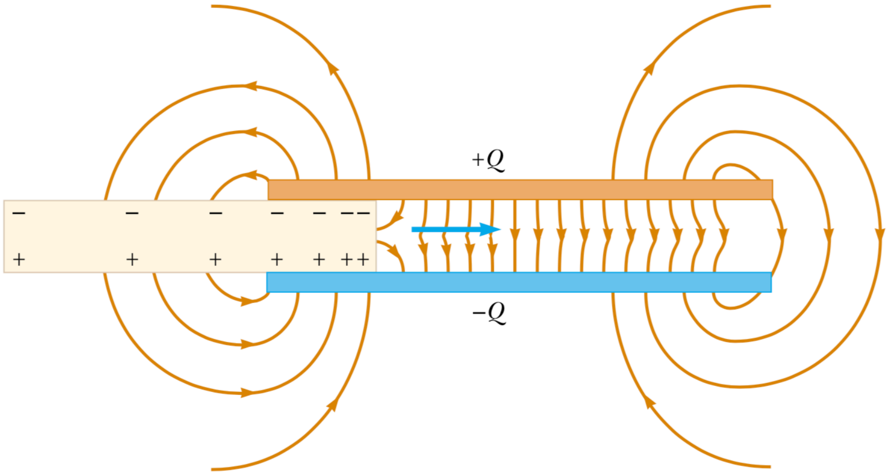
$$\Delta U_e = \Delta u_E (dx \Delta S) \rightarrow F_E = -\Delta u_E \Delta S$$

$$p_E = \frac{F_E}{\Delta S} = -\Delta u_E = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2}\right) D_n^2}$$

Pressão electrostática dirigida de 2 para 1

Exemplo: condensador parcialmente preenchido com dieléctrico

O espaço entre as placas (isoladas) do condensador encontra-se parcialmente preenchido por um dieléctrico ϵ



$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\epsilon_0}\Delta x = \Delta U$$

O campo $\vec{E}$ é tangencial à fronteira $\epsilon \to \epsilon_0$

$$p_E = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0)E_t^2 = \boxed{\frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0)\left(\frac{V}{d}\right)^2}$$

Sumário

1. Uma distribuição de cargas possui **energia electrostática**
2. A energia pode estar associada às interacções entre as cargas, ou estar distribuída pela campo eléctrico, com intensidade $\frac{1}{2}\epsilon E^2$
3. As **forças eléctricas** entre cargas só podem ser obtidas *directamente* quando se sabe a distribuição de cargas
4. Como alternativa, pode-se derivar as forças *indirectamente*, a partir da energia electrostática e do princípio da conservação de energia
5. Existe sempre **pressão** na fronteira entre dois dieléctricos, dirigida para o dieléctrico de menor permitividade.