Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

AULA 11 – Magnetostática I

Campo magnético no vácuo

- Força entre correntes
- Campo magnético
- Lei de Biot-Savart
- Exemplos de campo magnético e linhas de campo
- Correntes em campos magnéticos
- Momento magnético e fluxo magnético

Popovic & Popovic Cap. 12.1 – 12.4

Serway Cap. 29 e 30

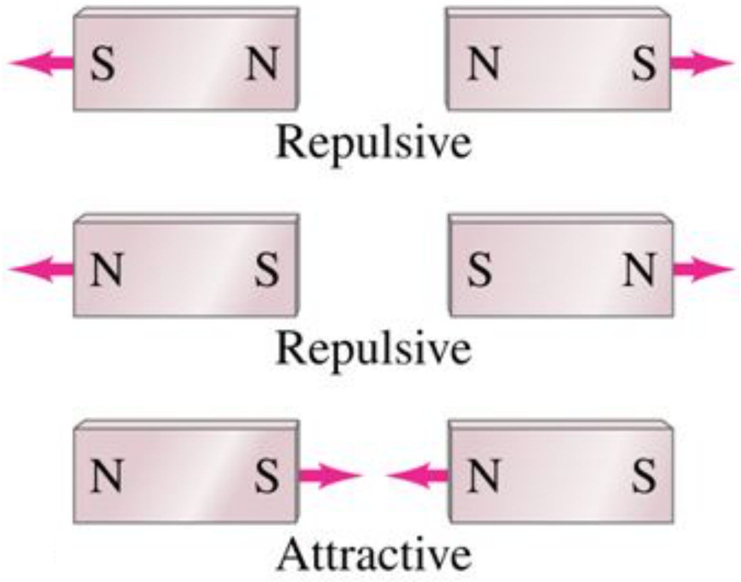
A força magnética está associada a **pólos magnéticos**

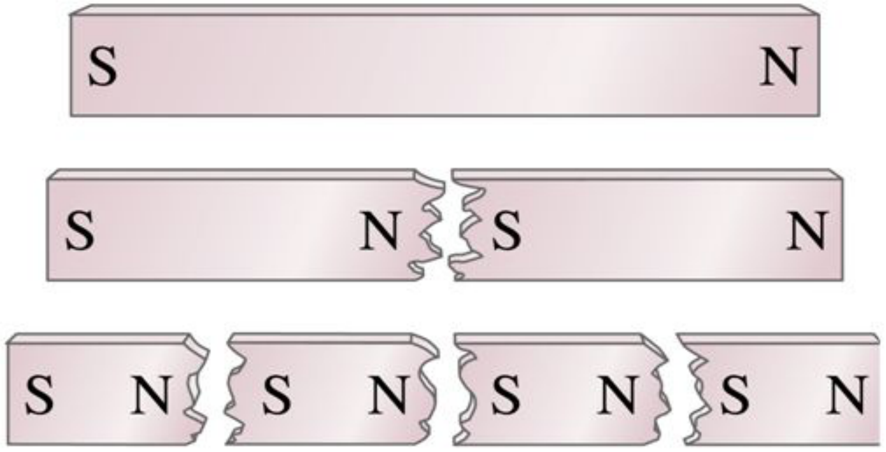
Um íman tem sempre dois pólos: “norte” e “sul”

Entre dois pólos existe uma **força magnética**

- *Repulsiva* se forem iguais: NN ou SS
- *Atractiva* se forem opostos: NS

Não existem pólos individuais (monopolos) magnéticos





A força magnética também está associada à corrente eléctrica

Duas cargas eléctricas **em movimento** atraem-se pela força magnética.

Mas a força magnética entre cargas individuais é muito pequena ($F_m \ll F_e$) e impossível de medir.

Um número muito grande de cargas em movimento – uma **corrente eléctrica** –produz uma força magnética potente e mensurável.

Um electroíman consegue levantar massas de toneladas

Breve história do magnetismo

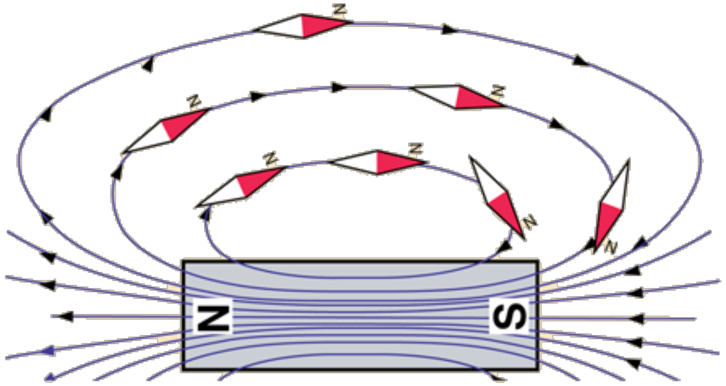
Os antigos gregos descobriram que pedras de *magnetite* (Fe_3O_4) atraíam objectos de ferro.

magnetite em grego: μαγνῆτις λίθος (*magnētis lithos)*

Os antigos chineses usaram o mesmo material para construir as primeiras bússolas.

Breve história do magnetismo

No séc. XIII Pierre de Maricourt descobriu a orientação das linhas do campo magnético e os pólos.



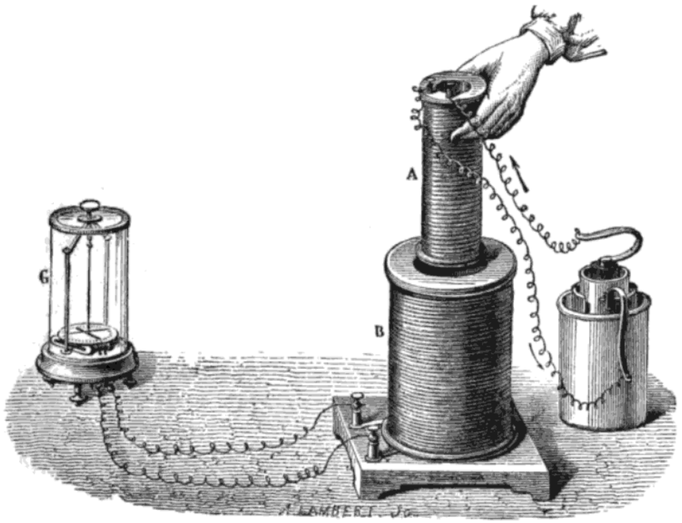
Em 1750 foram realizadas as primeiras experiências de medição da força magnética, usando uma balança de torção (idêntica à de Coulomb)

Breve história do magnetismo

H. C. Oersted (1819) descobriu que uma **corrente eléctrica num fio** deflecte a agulha de uma bússola

M. Faraday e J. Henry mostraram que se pode produzir corrente eléctrica num circuito quer movendo um íman próximo, quer variando a corrente num circuito vizinho.

Maxwell teorizou correctamente que um **campo eléctrico variável** gera um campo magnético.

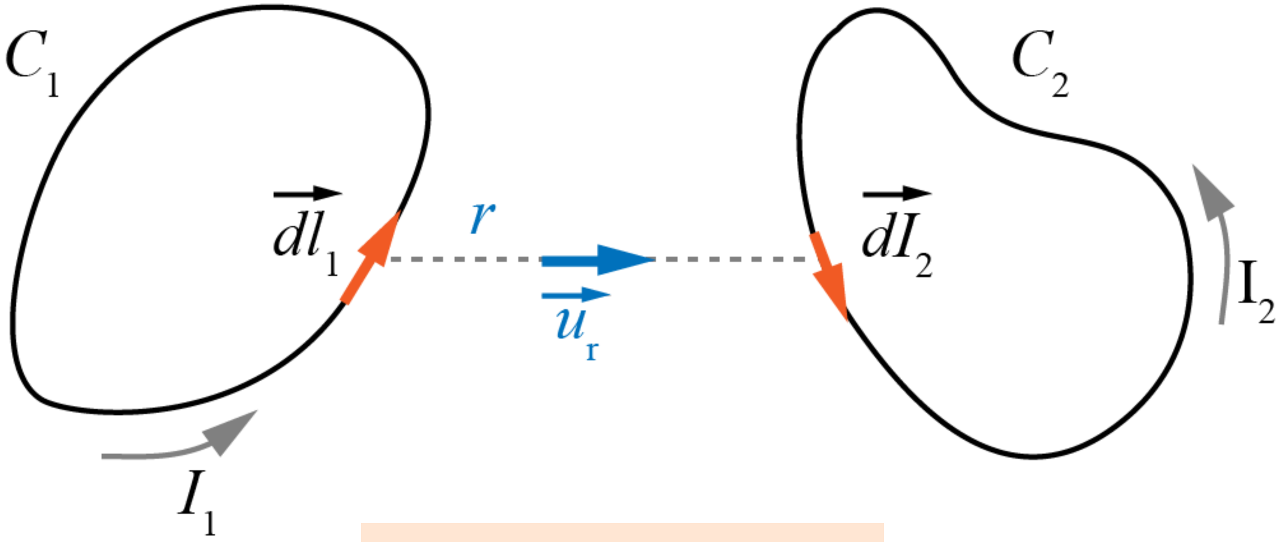


Força magnética entre dois elementos de corrente

Dois circuitos C_1 e C_2 são percorridos pelas corrente I_1 e I_2.
Dividimos cada um dos circuitos em segmentos $\overrightarrow{dl}$, cada um percorrido por um *elemento de corrente* $I\overrightarrow{dl}$, orientado no sentido da corrente.

Experimentalmente, verifica-se que a força magnética entre pares de elementos de corrente é

$$\boxed{\overrightarrow{dF}_{12} = I_2\overrightarrow{dl}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\overrightarrow{dl}_1 \times \vec{u}_r}{r^2}\right)}$$



Força causada por $I_1\overrightarrow{dl}_1$ em $I_2\overrightarrow{dl}_2$

De que depende a força magnética?

Constante multiplicativa: $\boxed{\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}}$ $[\,\mathrm{N.A^{-2} = H.m^{-1}}\,]$ **Permitividade magnética do vácuo**

É uma medida da aptidão (grau de *magnetização*) de um meio para suportar a formação de um campo magnético.

Comparação com a Lei de Coulomb:

$$\boxed{\overrightarrow{dF}_{12} = Q_2\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ_1}{r^2}\vec{u}_r\right)}$$

$$\overrightarrow{dF} \parallel \vec{u}_r$$

$$\boxed{\overrightarrow{dF}_{12} = I_2\overrightarrow{dl}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1}{r^2}\overrightarrow{dl}_1 \times \vec{u}_r\right)}$$

$$\overrightarrow{dF} \parallel \overrightarrow{dl}_2 \times (\overrightarrow{dl}_1 \times \vec{u}_r)$$

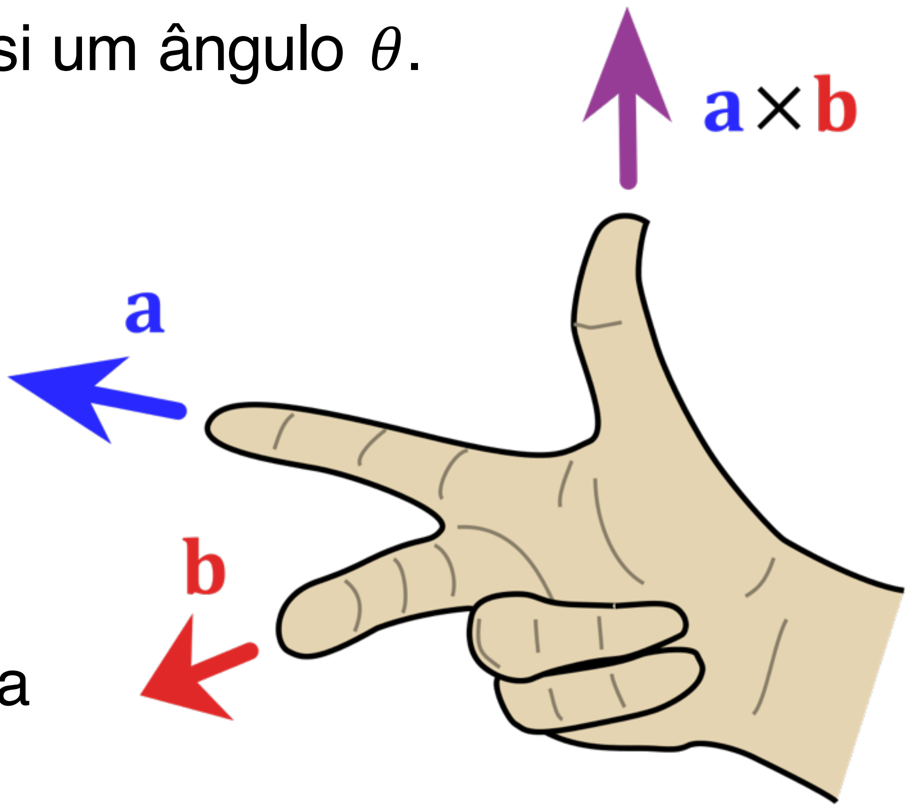
Lembrete: produto externo de vectores

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vectores que fazem entre si um ângulo θ.
O seu **produto externo** $\vec{a} \times \vec{b}$:

- Tem módulo $ab \sin \theta$

- Tem direcção perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$

- Tem sentido dado pela regra da mão direita

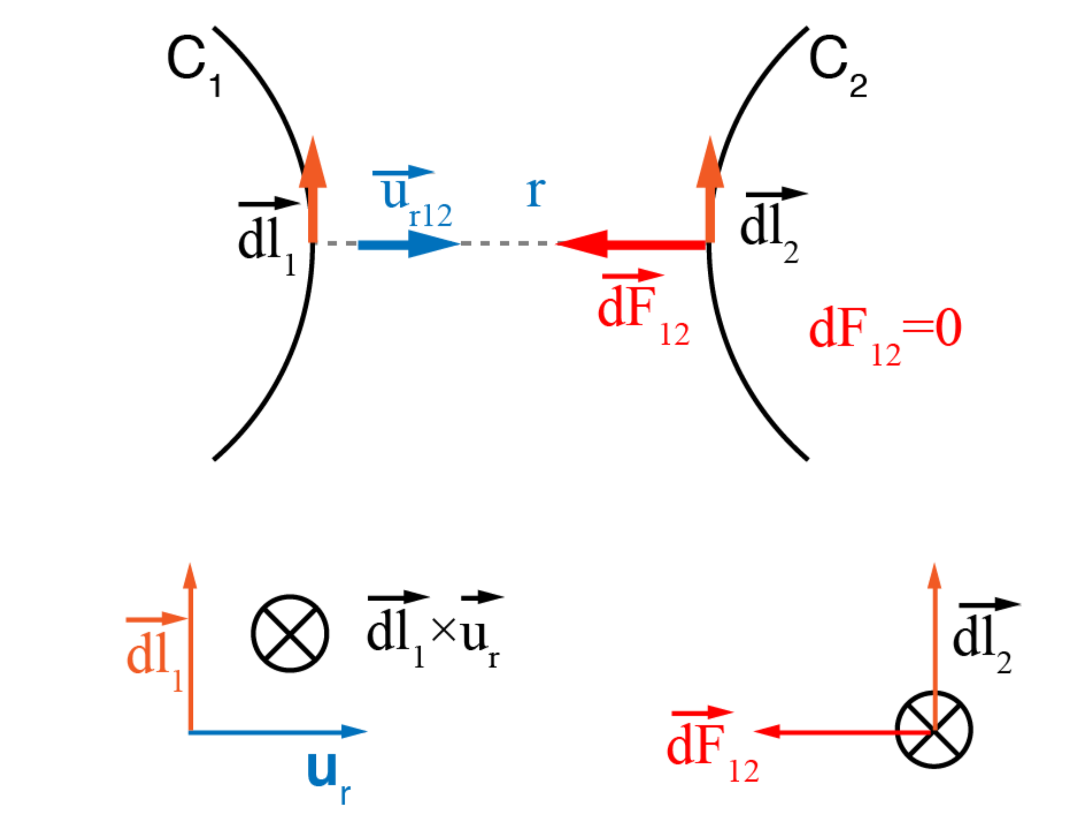


Regra da mão direita para o produto externo entre vectores

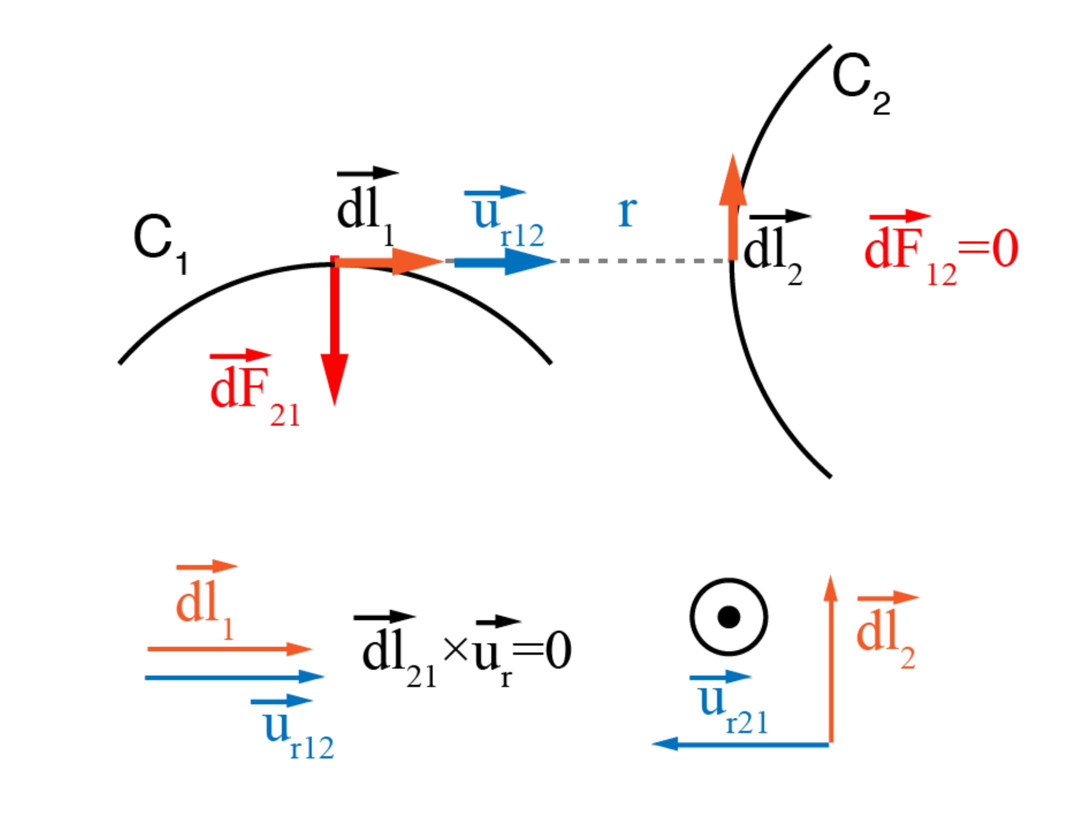
Exemplo: pares de correntes

$$\vec{dF}_{12} = I_2 \vec{dl}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \vec{dl}_1 \times \vec{u}_r}{r^2} \right)$$

Correntes paralelas



Correntes perpendiculares

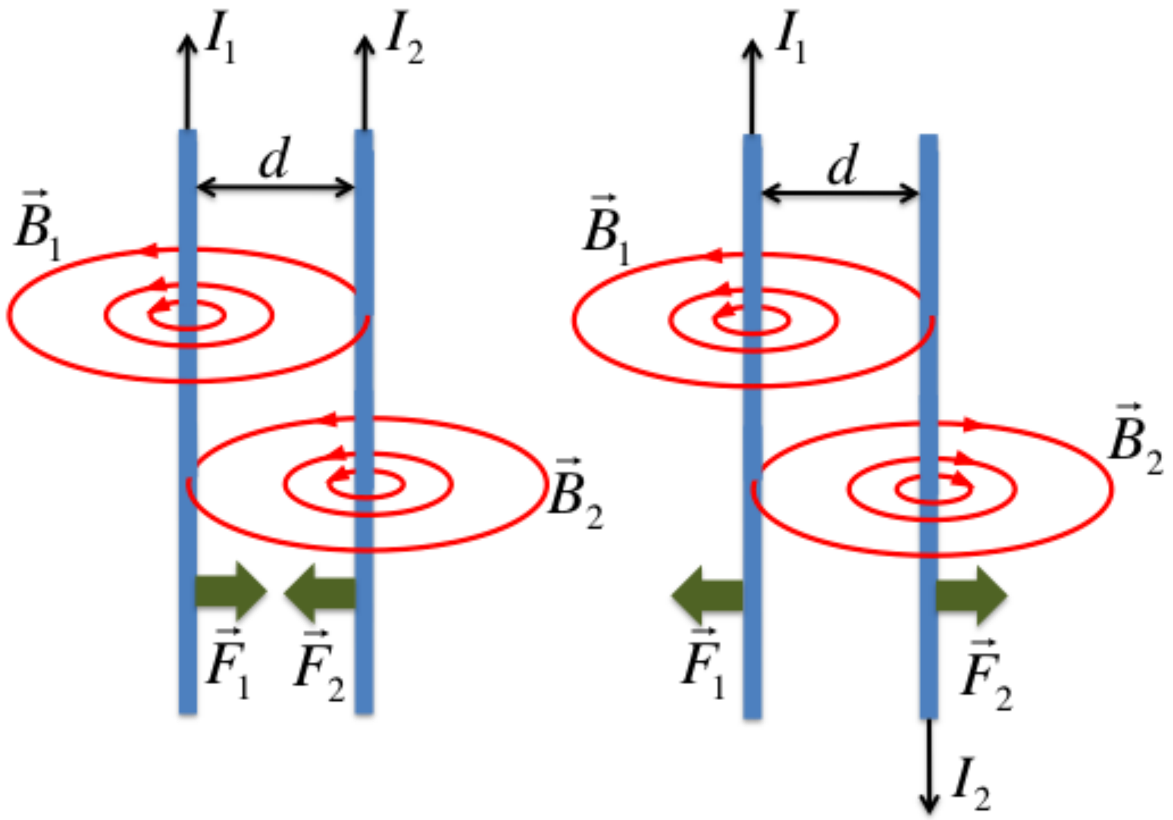


Força entre fios paralelos

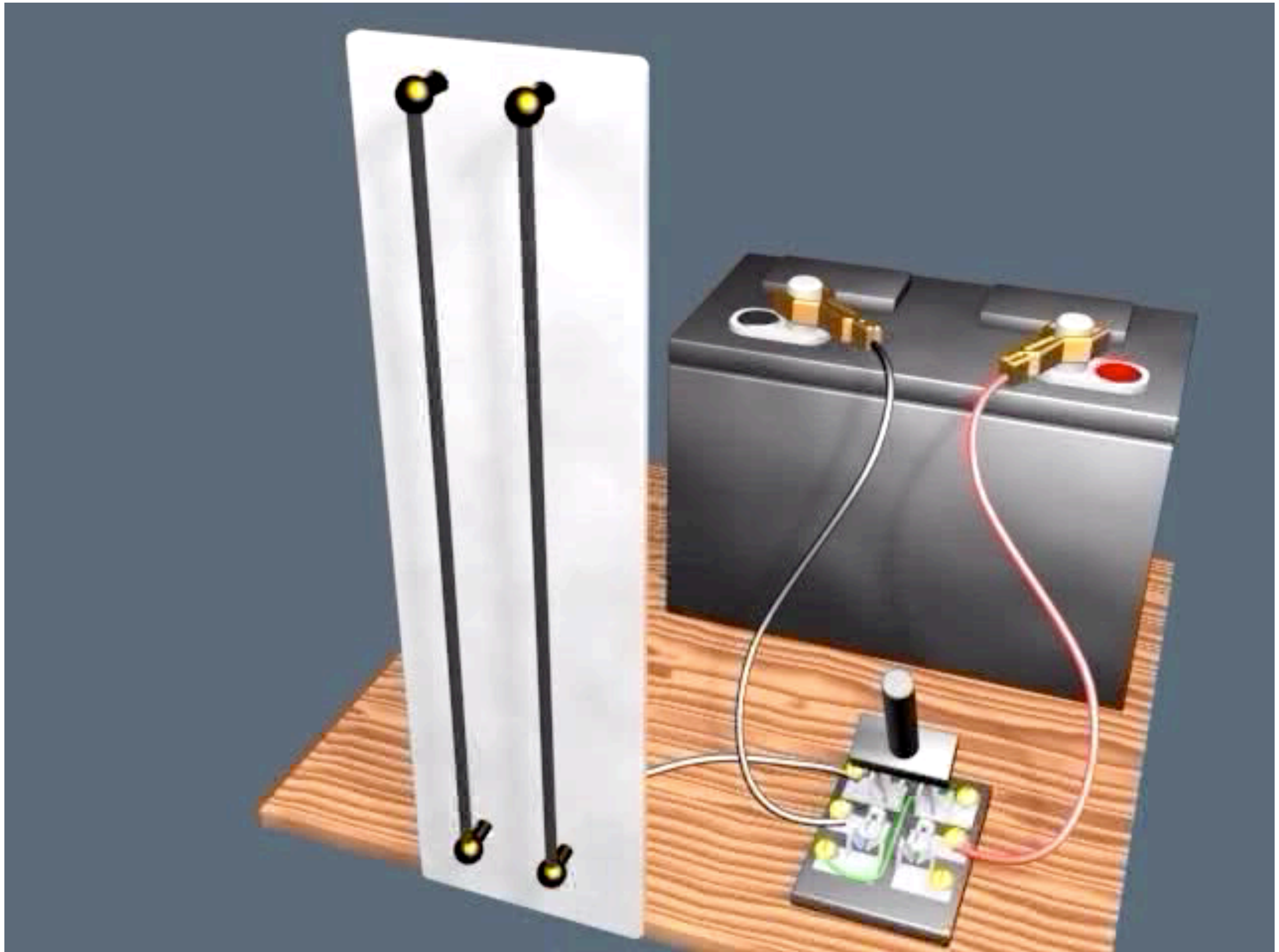
A força magnética entre dois fios condutores paralelos nos quais passam correntes I_1 e I_2 é:

- **Atractiva**, se as correntes têm o **mesmo sentido**
- **Repulsiva**, se as correntes têm **sentido oposto**

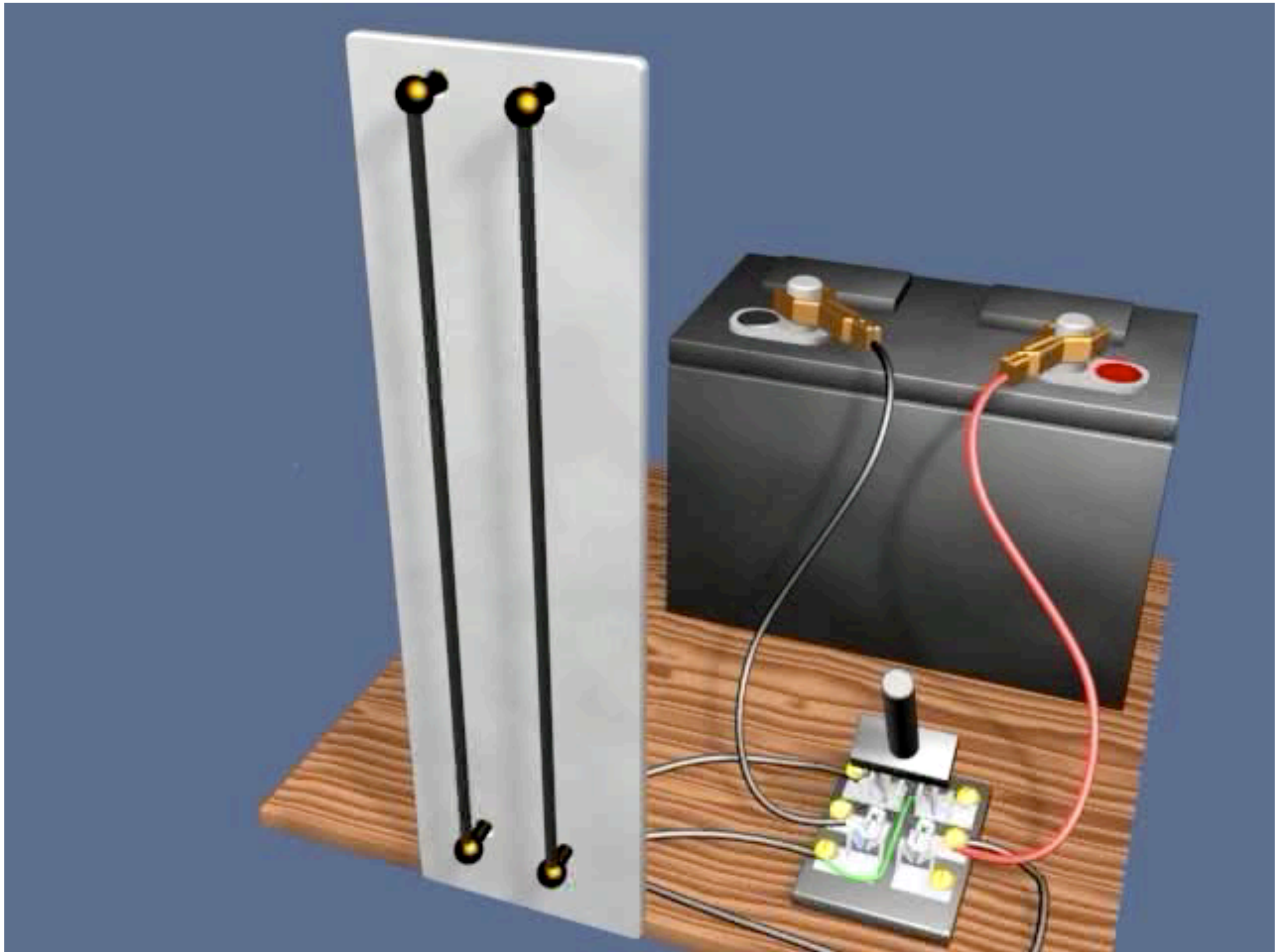
(compare com a força eléctrica e o sinal das cargas)



Força entre fios paralelos: correntes no mesmo sentido



Força entre fios paralelos: correntes no sentido oposto

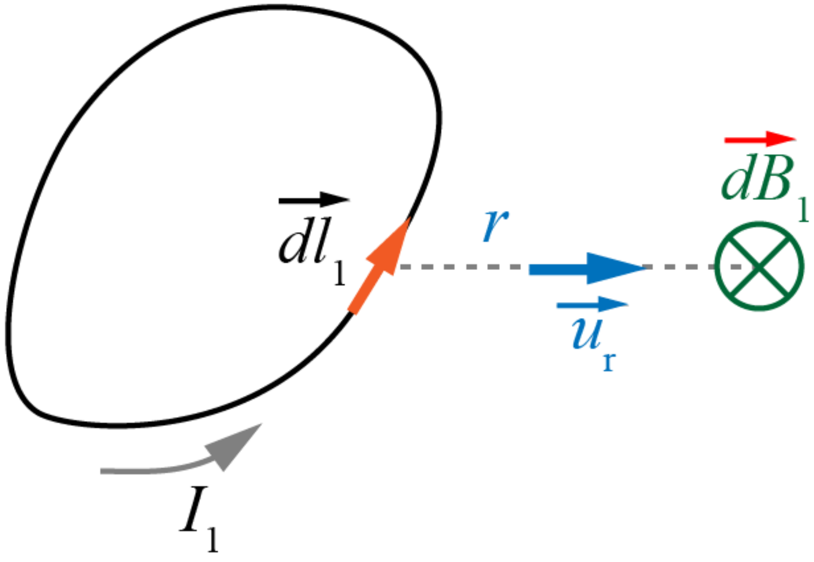


Campo magnético

A expressão para a força magnética pode-se escrever

$$\overrightarrow{dF}_{12} = I_2\overrightarrow{dl}_2 \times \boxed{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\overrightarrow{dl}_1 \times \vec{u}_r}{r^2}\right)} = I_2\overrightarrow{dl}_2 \times \overrightarrow{dB}_1$$

Campo magnético criado por $I_1\overrightarrow{dl}_1$



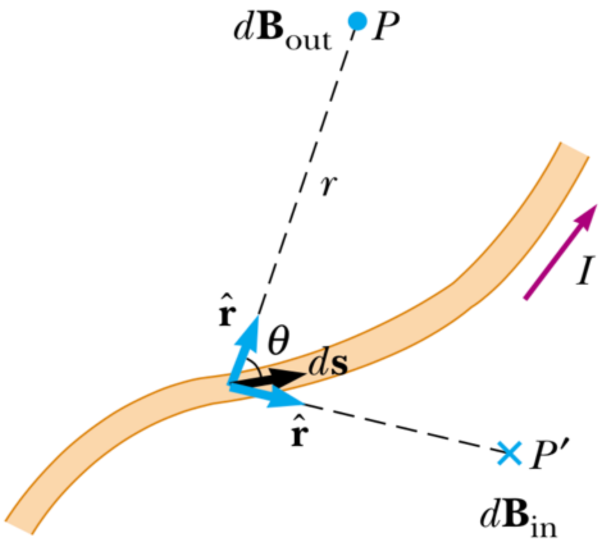
Na região do espaço onde está o elemento de corrente $I\overrightarrow{dl}_2$ existe um **campo magnético** $\overrightarrow{dB}_1$:

$$\left|\overrightarrow{dB}_1\right| = \frac{\left|\overrightarrow{dF}_{12}\right|}{I_2\left|\overrightarrow{dl}_2\right|} \qquad [\,\mathrm{NA^{-1}m^{-1}} \equiv \mathrm{T} = \mathrm{Tesla}\,]$$

Lei de Biot-Savart

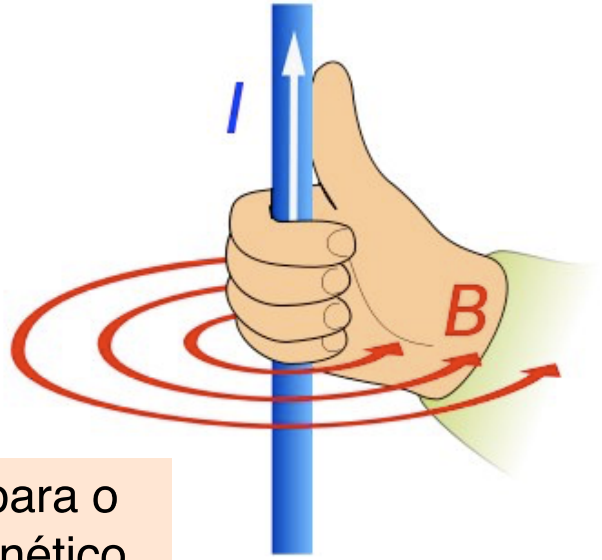
$$\boxed{\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl}\times\vec{u}_r}{r^2}}$$

Campo $\overrightarrow{dB}$ de um elemento de corrente – Lei de Biot-Savart (forma diferencial)



O **campo magnético** $\overrightarrow{dB}$ criado por um elemento de corrente $I\overrightarrow{dl}$ a uma distância r é

- **proporcional** a $I\overrightarrow{dl}$
- **inversamente proporcional** a r^2
- **perpendicular** ao plano definido por $\overrightarrow{dl}$ e $\vec{u}_r$



Regra da mão direita para o sentido do campo magnético

O campo magnético total é obtido por integração do circuito de corrente

Considerando todos os segmentos de corrente num circuito fechado:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I\overrightarrow{dl} \times \vec{u}_r}{r^2}}$$

Campo $\vec{B}$ de um circuito – Lei de Biot-Savart (forma integral)

Assim, um campo magnético $\vec{B}$ exerce uma força sobre um elemento de corrente $I\overrightarrow{dl}$ (comparar com a expressão inicial para $\overrightarrow{dF}$):

$$\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \times \vec{B}$$

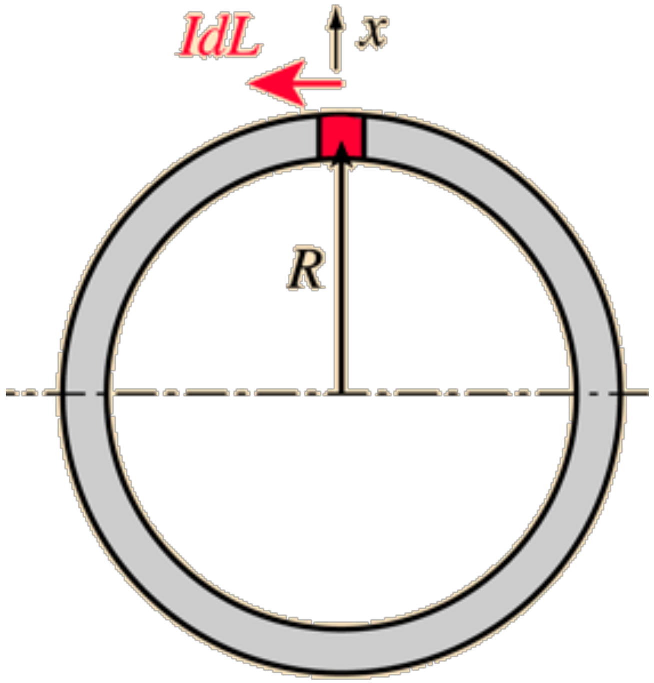
O campo magnético pode assumir uma grande gama de valores

Ordens de grandeza típicas de campos magnéticos (T):

Magnetoencefalografia	$5 \cdot 10^{-13}$
Campo magnético da Terra	$5 \cdot 10^{-5}$
Íman de frigorífico	$5 \cdot 10^{-3}$
Electroíman	1
Equipamento RMN clínico	0,5-3
Equipamento RMN de investigação	7-11
Maior campo não-destrutivo	97
Maior campo criado	730

Exemplo: campo magnético de uma espira circular

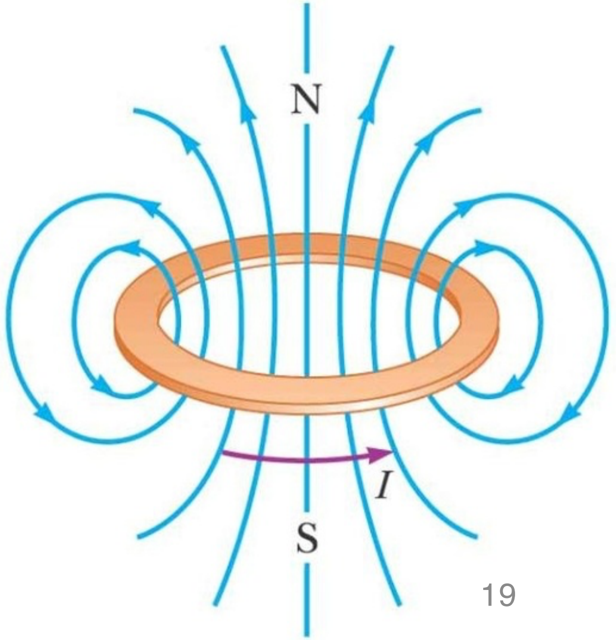
Qual o campo magnético no centro de uma espira circular de raio R percorrida por uma corrente I?



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I\overrightarrow{dl}\times\vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint_C \overrightarrow{dl}\times\vec{u}_r$$

Para qualquer posição, $\overrightarrow{dl}\times\vec{u}_r = \overrightarrow{dz}$ (**para fora** do plano)

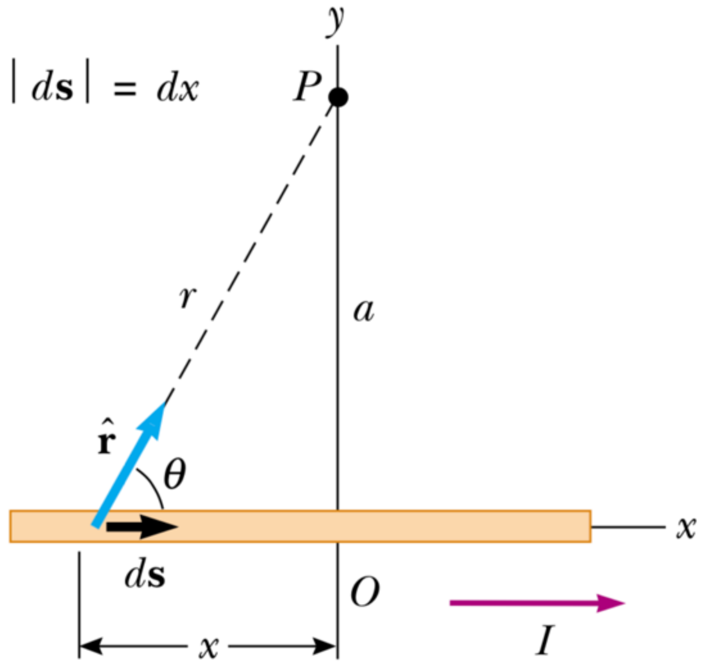
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}(2\pi R\vec{u}_z) = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{u}_z$$



Exemplo: campo magnético de um fio infinito

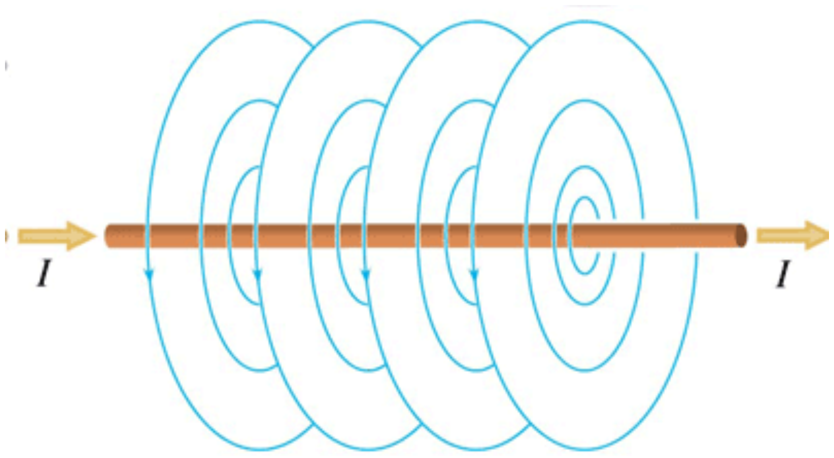
Num ponto P a uma distância a do fio:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\overrightarrow{dl}\times\vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{dx}\times\vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\sin\theta}{r^2}\vec{u}_z$$



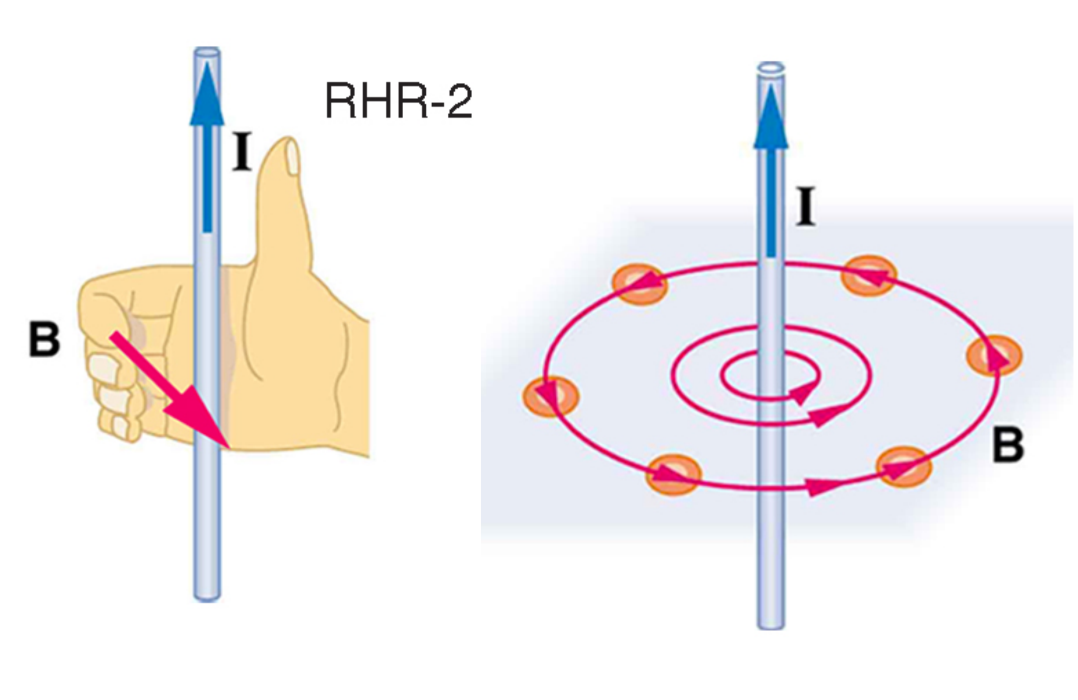
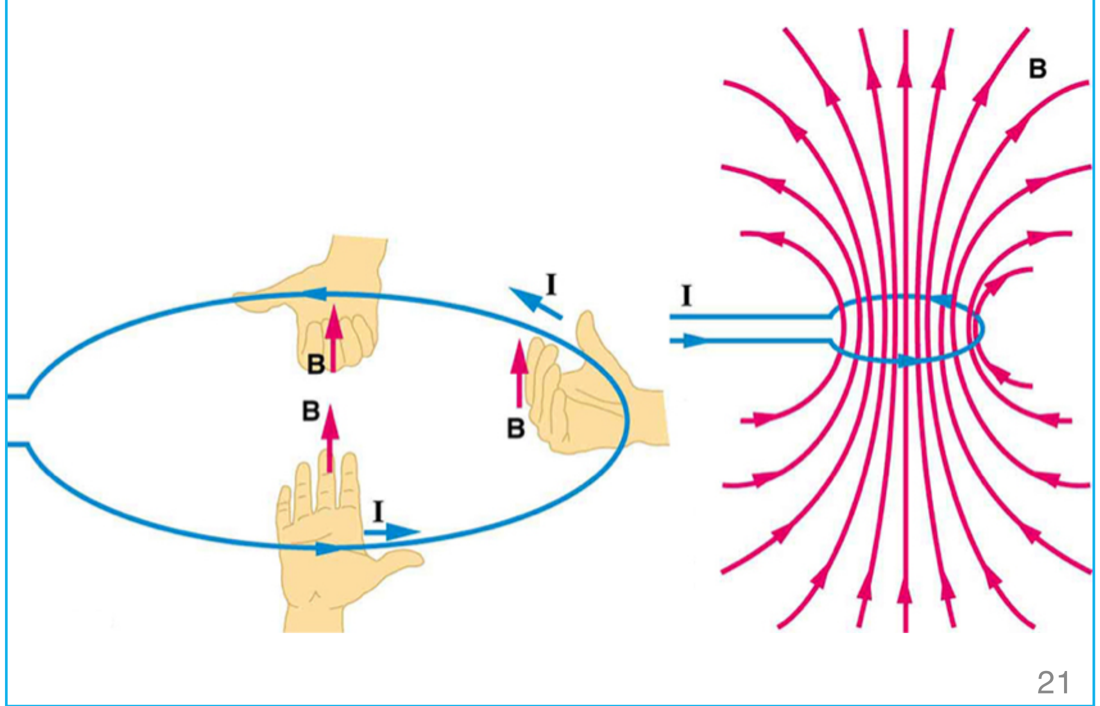
Usando $\mathrm{x} = -\mathrm{a}\cot\theta$, $dx = a/\sin^2\theta$, $\sin\theta = a/r$
e passando as coordenadas de integração para θ:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{u}_z[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{u}_z$$

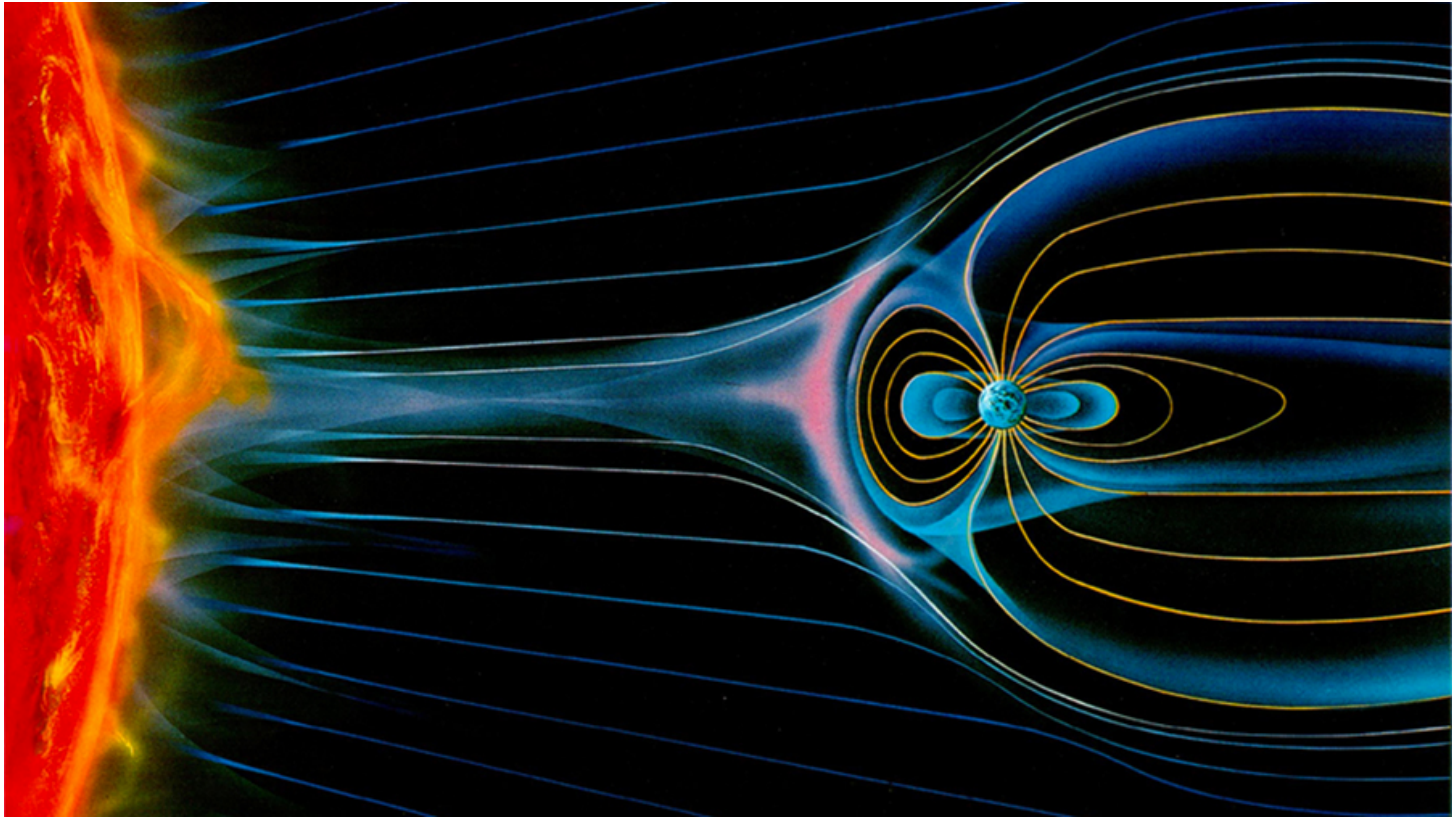


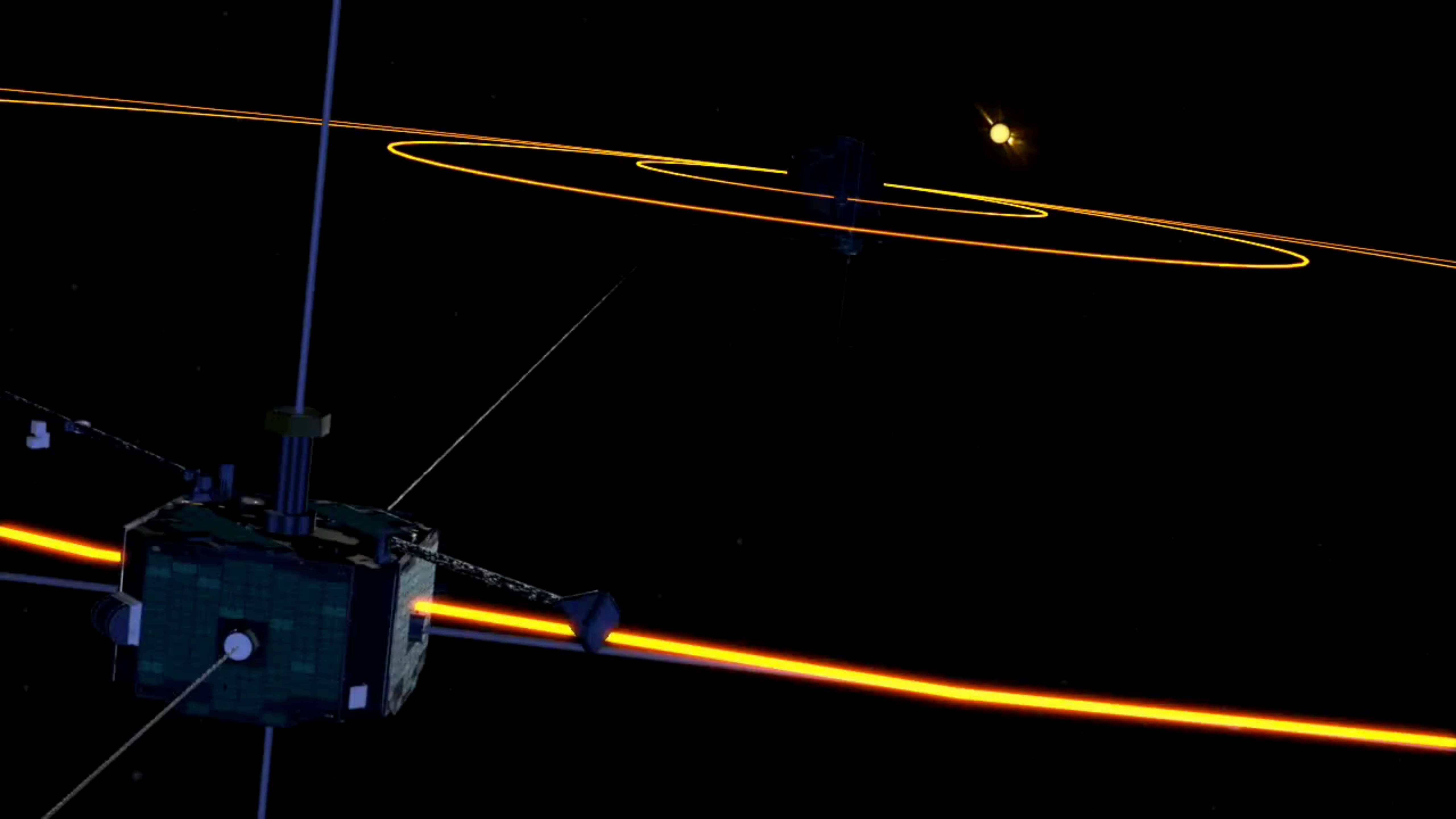
Linhas de campo do campo magnético

Tal como para o campo eléctrico, as **linhas do campo magnético** auxiliam a visualização deste campo vectorial.

Fio infinito	Fio circular
	

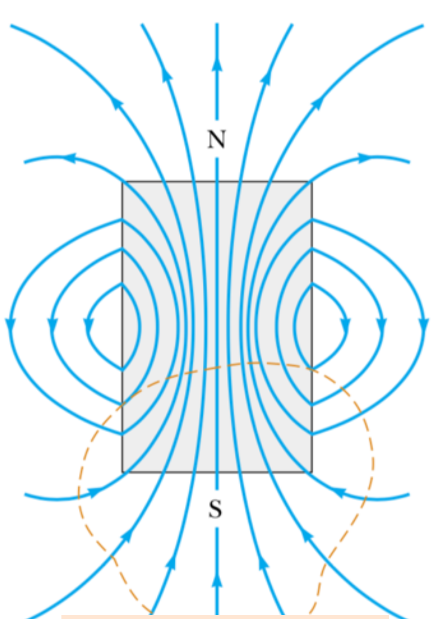
Campo magnético da Terra



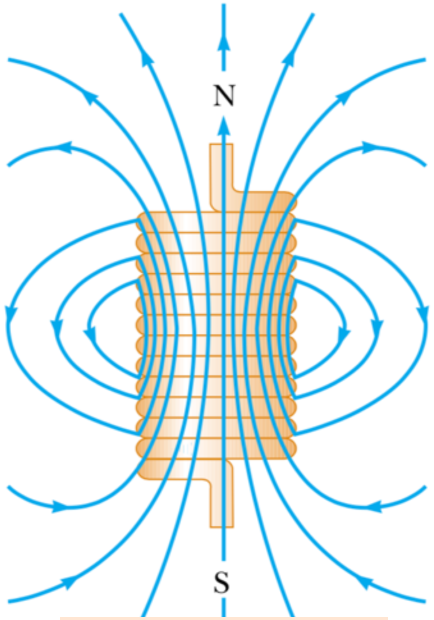


As linhas de campo magnético são fechadas

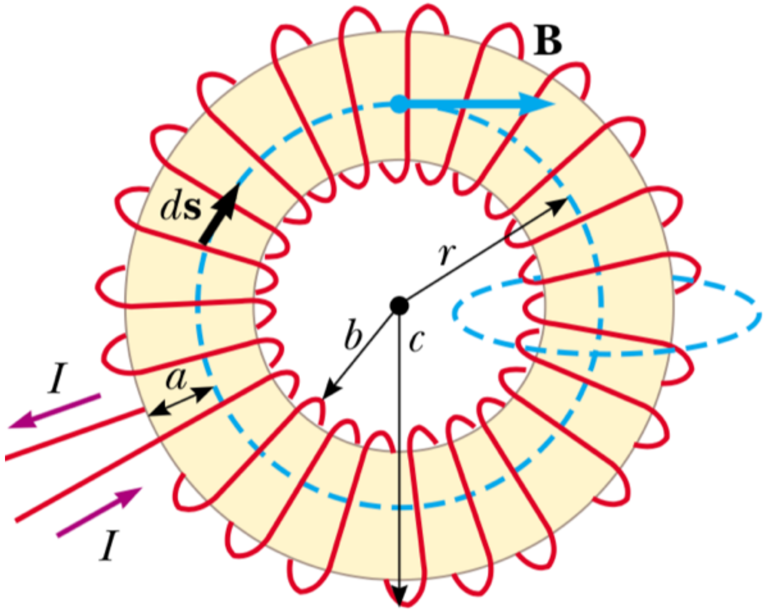
No caso do campo eléctrico, as linhas de campo têm origem nas cargas positivas e terminam nas cargas negativas.
Não há “cargas magnéticas” pelo que as linhas de campo são **fechadas**.



Íman



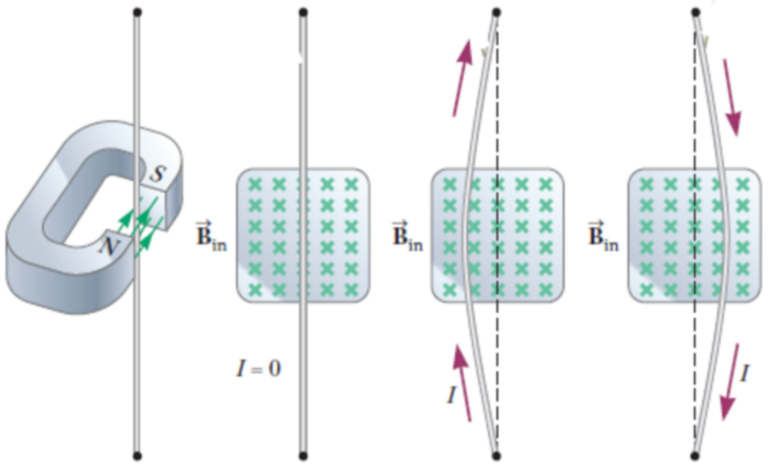
Bobina



Toroide

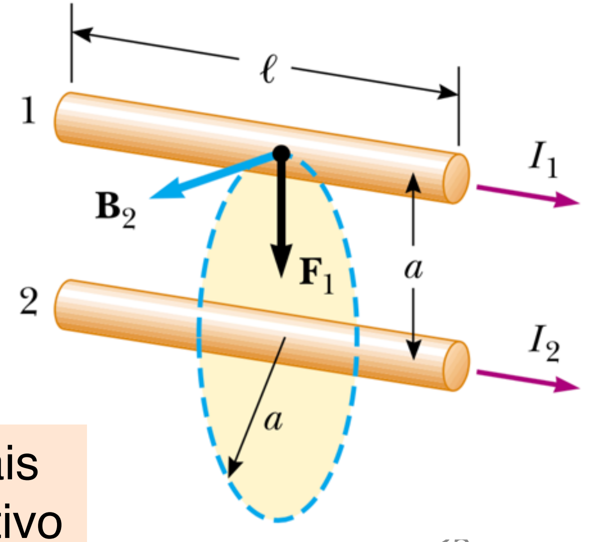
Um fio com corrente colocado num campo é actuado por uma força

Num campo $\vec{B}$ uniforme: $\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl}\times\vec{B}$



$$\vec{F} = \int_L \overrightarrow{dF} = I\int_L \overrightarrow{dl}\times\vec{B} = I\vec{L}\times\vec{B}$$

Entre dois fios onde passam correntes I_1 e I_2:

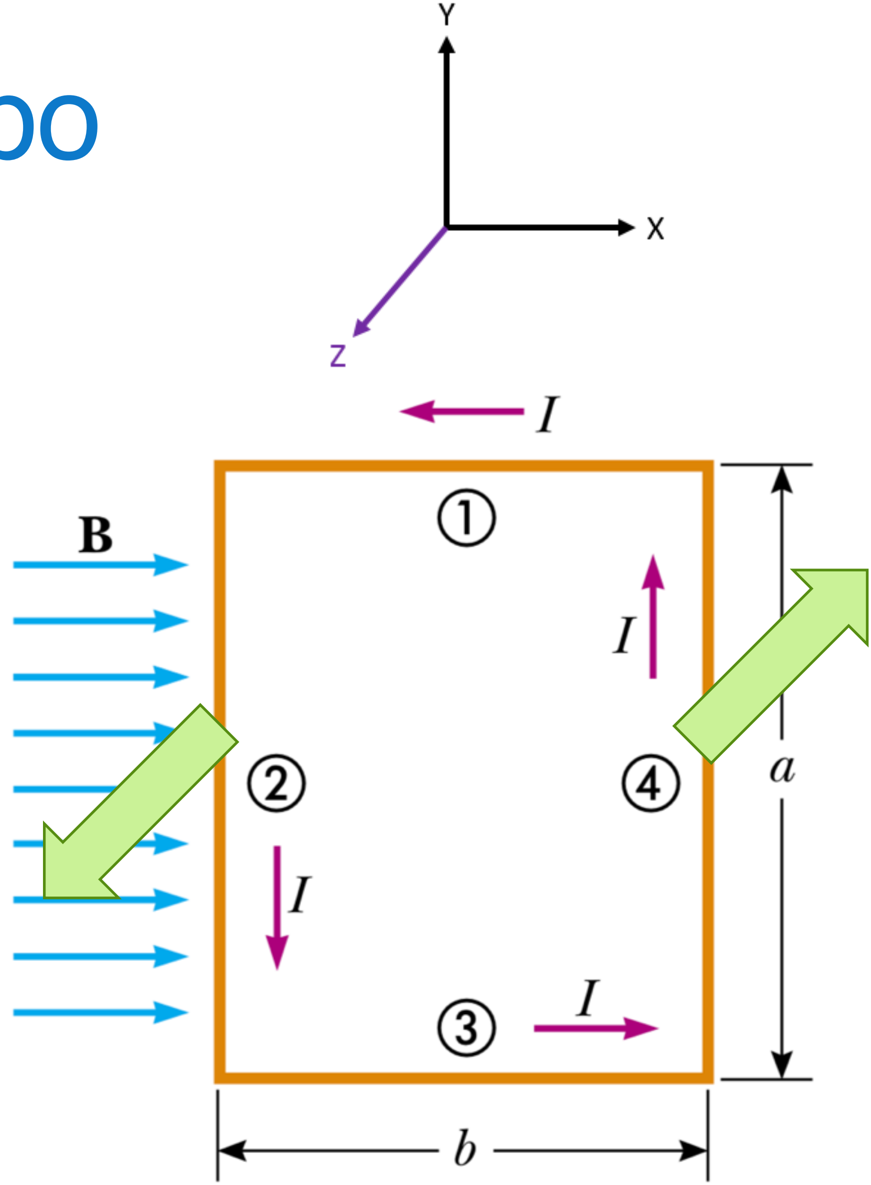


$$I\vec{L}\times\vec{B} = (I_1\vec{L})\times\left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\vec{u}_\theta\right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}L\vec{u}_r$$

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\vec{u}_r$$

Se as correntes tiverem sinais contrários surge o sinal negativo

Espira rectangular num campo magnético uniforme



Qual a força resultante do campo sobre a espira?

$$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B}$$

Tem-se:

$$\vec{B} \parallel \vec{L}_1, \vec{B} \parallel \vec{L}_3 \rightarrow \vec{L}_1\times\vec{B} = \vec{L}_3\times\vec{B} = 0$$

$$I\vec{L}_2\times\vec{B} = IaB\vec{u}_z \qquad I\vec{L}_4\times\vec{B} = -IaB\vec{u}_z$$

O lado 2 é *empurrado* para fora, o lado 4 é *puxado* para dentro: a espira **roda**

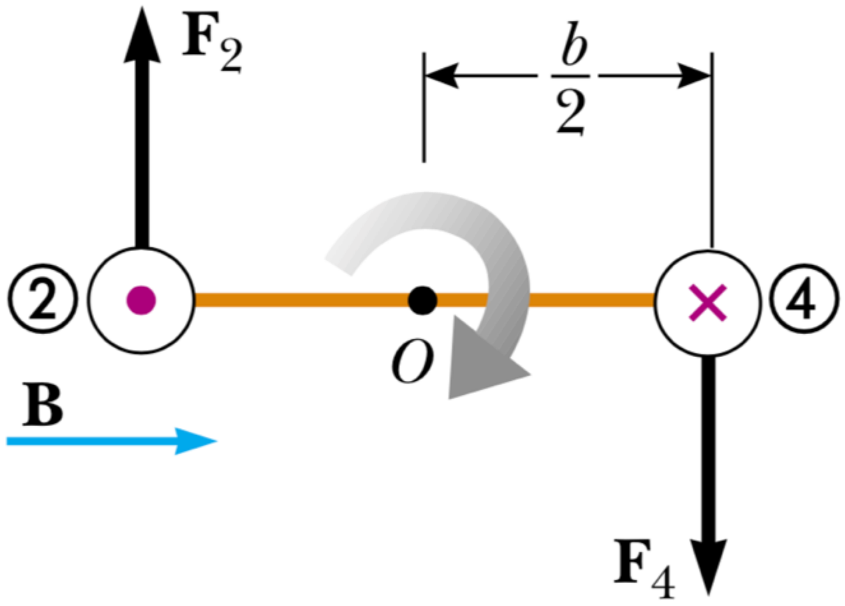
Momento da força de uma espira rectangular num campo magnético uniforme

Para o movimento de rotação deve-se usar o conceito de **momento da força** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \frac{b}{2} IaB\vec{u}_y + \frac{b}{2} IaB\vec{u}_y$$

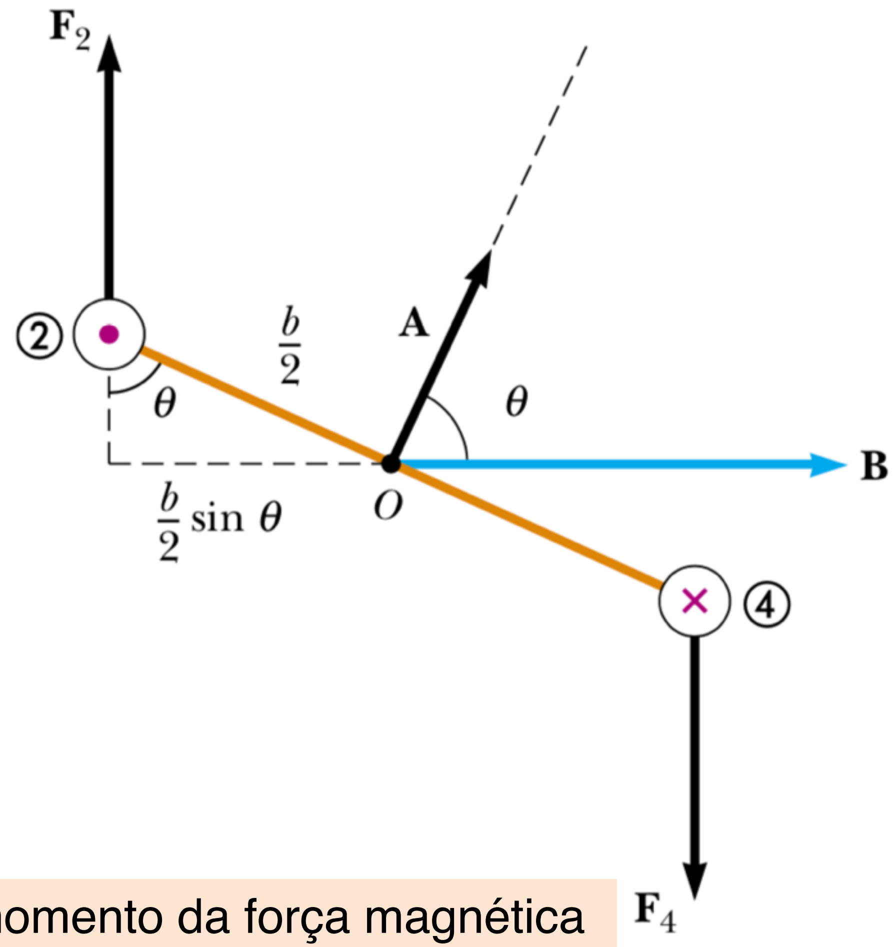
$$\vec{M} = IabB\vec{u}_y = \boxed{IAB\vec{u}_y}$$

O momento da força é igual ao produto da corrente I pela área A e pelo campo B.



Momento da força de uma espira rectangular num campo magnético uniforme

Qual o momento da força se o plano da espira fizer um ângulo θ com o campo $\vec{B}$?



$$\vec{M} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \frac{b}{2} IaB \sin\theta\, \vec{u}_y + \frac{b}{2} IaB \sin\theta\, \vec{u}_y$$

$$\vec{M} = IabB \sin\theta\, \vec{u}_y = IAB \sin\theta\, \vec{u}_y$$

Isto é equivalente a $\boxed{\vec{M} = I\vec{A}\times\vec{B}}$ em que $\vec{A}$ é um vector de módulo A normal ao plano da espira.

O momento da força magnética actua de modo a **alinhar** $\vec{A}$ e $\vec{B}$

Momento magnético de uma espira

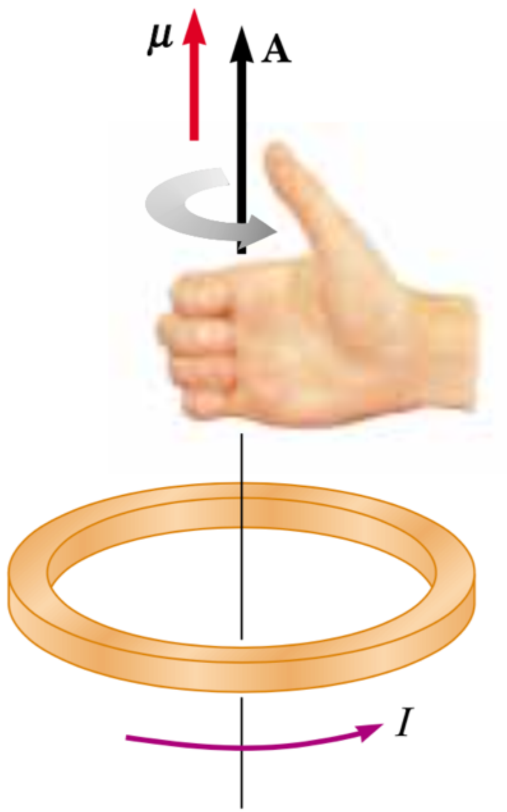
Define-se o **momento magnético** $\vec{\mu}$ de uma espira de área A atravessada por uma corrente I:

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$

Momento da força exercido por um campo $\vec{B}$ sobre a espira:

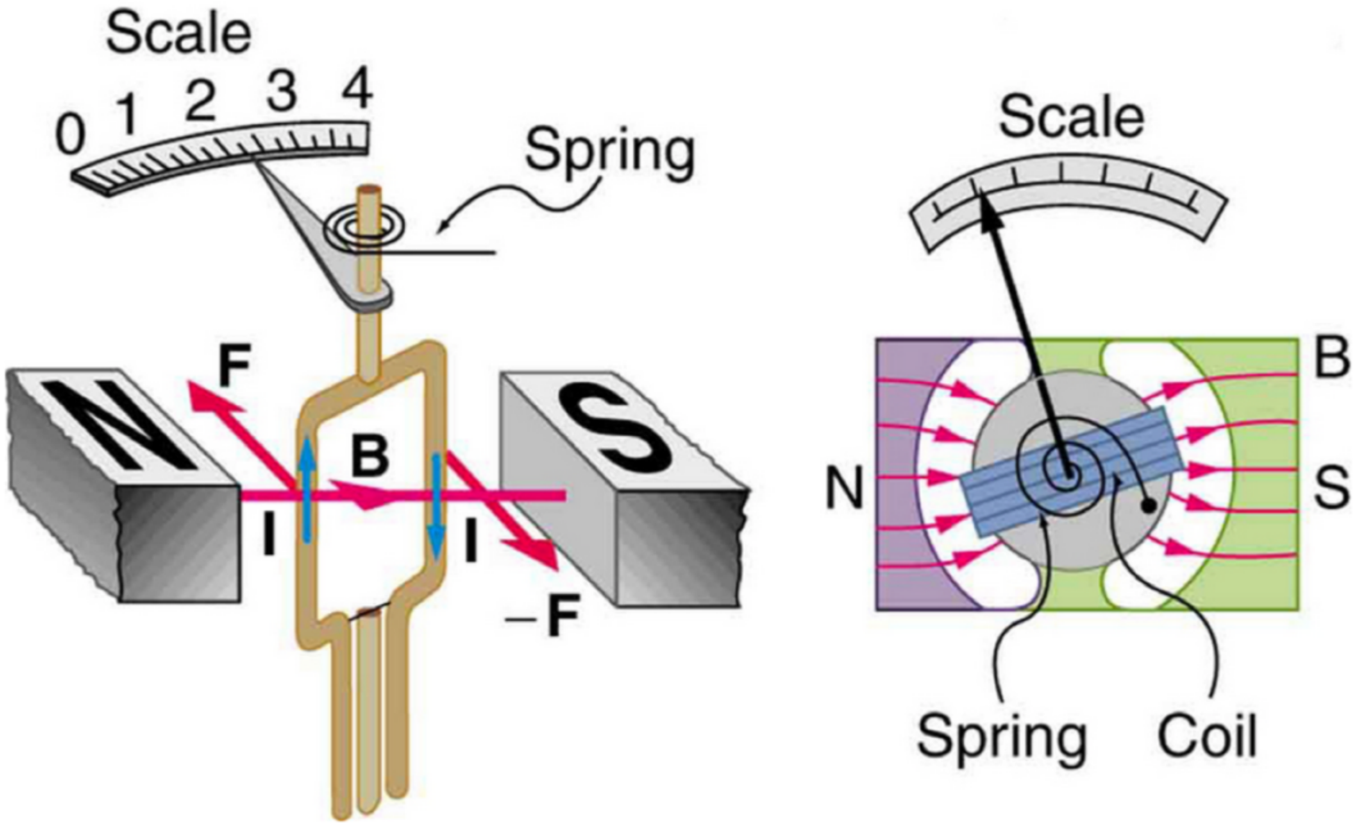
$$\vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B}$$

A orientação de $\vec{\mu}$ é dada pela regra da mão direita.



Aplicação: amperímetro

Um amperímetro é um dispositivo que **mede a intensidade corrente**, usando para isso a proporcionalidade entre I e a torção numa espira.



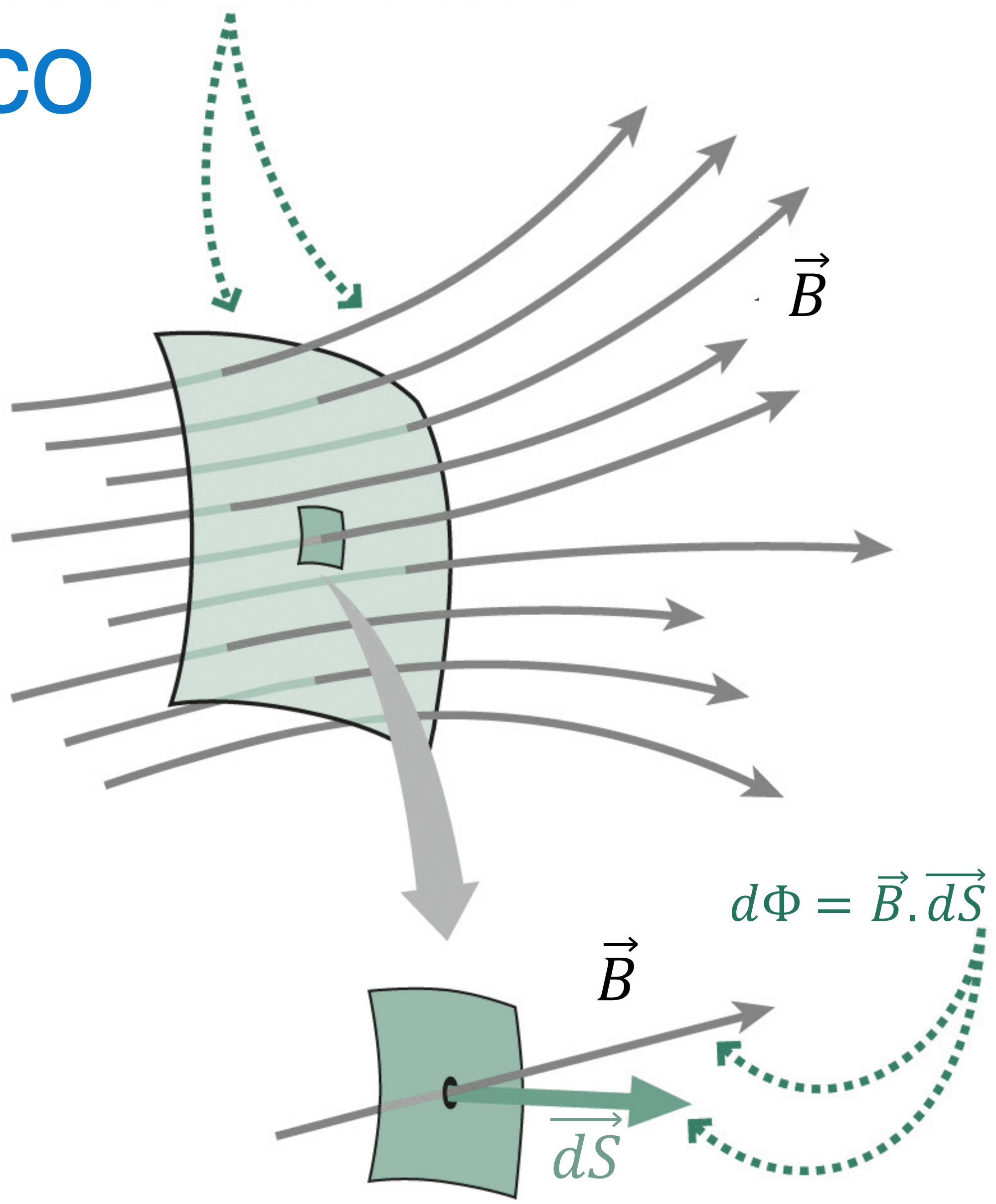
Fluxo do campo magnético

Fluxo do campo $\vec{B}$ através de uma superfície:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad [\,\mathrm{Tm^{-2}} = \mathrm{Wb}\,]$$

em que $\overrightarrow{dS} = \vec{n}.dS$ é um vector perpendicular à superfície e de módulo dS. O fluxo é proporcional ao "número" de linhas de campo.

A unidade do fluxo magnético é o **Weber** (Wb).

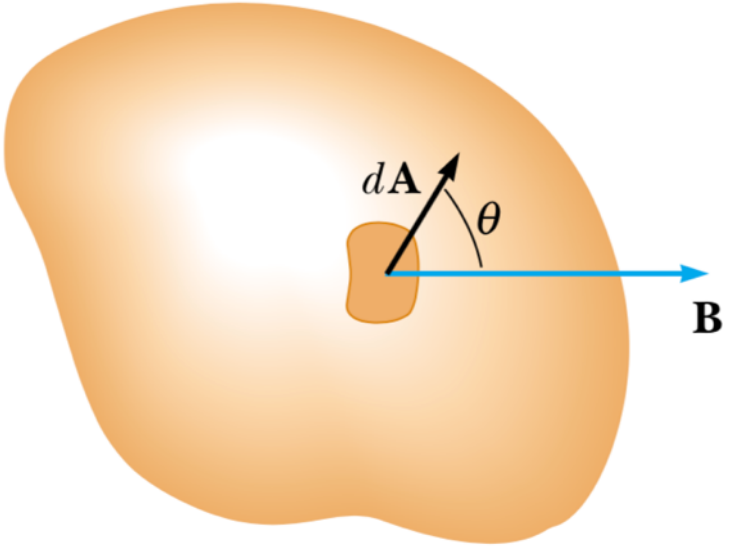


Lei da conservação do fluxo magnético

Pode-se demonstrar* que o fluxo através de qualquer **superfície fechada** obedece:

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0}$$

Lei de Gauss para o campo magnético

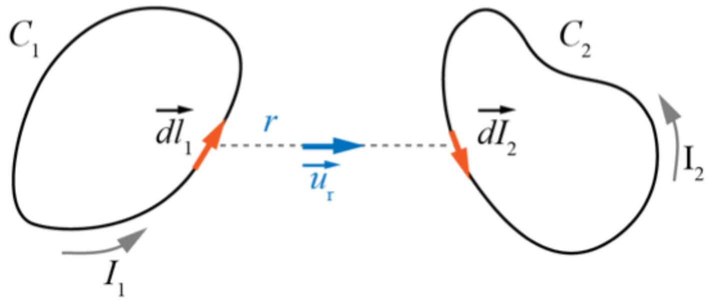


Esta lei deriva de não existirem “cargas” (monopolos) magnéticos que originem linhas de campo.

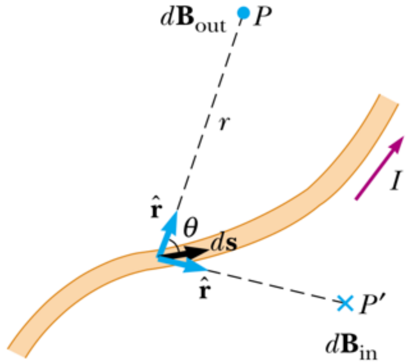
* Popovic & Popovic, 12.4

Sumário

Força entre correntes



Campo magnético

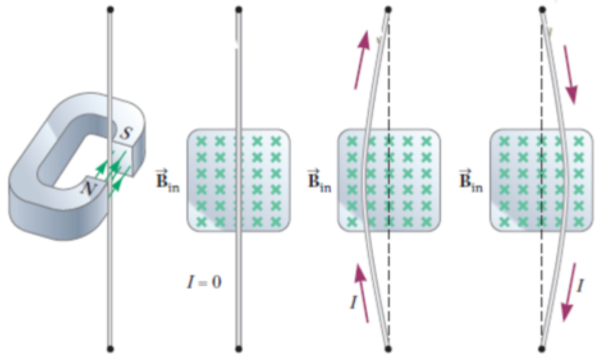


Lei de Biot-Savart

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl}\times\vec{u}_r}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\vec{dl}\times\vec{u}_r}{r^2}$$

Corrent + c. magnético



Momento magnético

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$

$$\vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B}$$

Fluxo magnético

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$$