exemplo: Faça uma rotação $\frac{\pi}{2}$ em torno do ponto $(2,-1)$ do triângul[o] $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\text{transf em } f}\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}&0\\\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\circlearrowleft\frac{\pi}{2}\text{ em torno de }(0,0)}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\text{transf em } -f=(-2,1)}\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&2\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}}_{\text{objeto}}=$$

($-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=-1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$)

$$=\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-3&-2&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

* Rotação num ponto (h,k):

$$\begin{bmatrix}1&0&h\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{Rotação}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-h\\0&1&-k\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Translação:

$$\begin{bmatrix}1&0&h\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\ (h,k)$$

p.1?

Transformações Lineares em $\mathbb{R}^3$

Reflexão:

plano xy
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

plano xx
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

plano xz
$$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

plano x=y
$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Rotação:

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\operatorname{sen}\varphi&0\\\operatorname{sin}\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
em φ relativamente ao eixo-zz

$$\begin{bmatrix}\cos y&0&\operatorname{sen} y\\0&1&0\\-\sin y&0&\cos y\end{bmatrix}$$
em φ relativamente ao eixo-yy

Teorema das Operações Elementares sobre Linhas

- seja A $n\times n$:

(i) se $B=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}\times A$, então $\det B=\det A$ $(L_n=L_k\times\alpha+L_n)$

(ii) se $B=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\&&\vdots&&\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\times A$, então $\det B=-\det A$ (se duas linhas estão trocadas)

(iii) se $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times A$, então $\det B=k\det A$

Exemplos:

$$\det\begin{bmatrix}1&2&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&2&0&0\\8&0&0&2&3\\8&0&0&4&5\end{bmatrix}=\det\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&-1\end{vmatrix}=1\times5\times2\times2\times(-1)=-20$$

$\det=2\times(-1)-12=-10$

$\det=-18-10=-28$

$$\begin{vmatrix}3&2&-2&0\\5&-6&-1&0\\-6&0&3&0\\4&7&0&-3\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}3&2&-2\\5&-6&-1\\-6&0&3\end{vmatrix}=-3\times(-6)\begin{vmatrix}2&-2\\-6&-1\end{vmatrix}-3\times3\begin{vmatrix}3&2\\5&-6\end{vmatrix}=18\begin{vmatrix}2&-2\\-6&-1\end{vmatrix}-9\begin{vmatrix}3&2\\5&-6\end{vmatrix}=$$

$$=-10\times18-9\times(-28)=-180+180=0$$

AL

Determinante matriz triangular A

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \times (\text{produto elementos diagonal principal}), & \text{se } A \text{ é invertível} \\ 0, & \text{se } A \text{ não é invertível} \end{cases}$$

- Teorema
  - Uma matriz A é invertível se e só se $\det A \neq 0$.
- Teorema
  - Se A for quadrada, então $\det A^T = \det A$.
- Propriedade Multiplicação
  - Se A e B forem matrizes $n \times n$, então $\det AB = (\det A)(\det B)$
- Teorema
  - Seja A quadrada e invertível, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- Cramer's Rule
  - Seja $A_{n\times n}$, invertível, a solução $\underline{x}$ de $A\underline{x} = \underline{b}$ é dada por:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow x_j = \frac{\det A_j(\underline{b})}{\det A}$$

$$A_j = [\underline{a_1}, \underline{a_2}, \dots, \underline{b}, \dots \underline{a_n}]$$

  - exemplo:

$$3s\,u_1 - 2u_2 = 4$$
$$-6u_1 + s\,u_2 = 1$$

- Use a regra de Cramer para indicar S para os quais o SEL tem solução única, e calcule u_1.

S = parâmetro transformada de Laplace

Res:

$$\det \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix} = 3s^2 - 12$$

$$u_1 = \frac{\left| \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \right|}{3s^2 - 12} = \frac{4s + 2}{3(s^2-4)}$$

$\det(\ ) \neq 0 \Leftrightarrow s \neq -2 \wedge s \neq 2$

- Inversa
  - Seja A uma matriz $n\times n$, então:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \qquad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & C_{3n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

- Área e Volumes
  - Se A é uma matriz 2×2, a área do paralelogramo determinado pelas colunas de A é $|\det A|$. Se A é uma matriz 3×3, o volume de um paralelipípedo definido pelas colunas de A é $|\det A|$.
- Transformações Lineares
  - Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por uma matriz 2×2. Se S é um paralelogramo em $\mathbb{R}^2$, então

$$\{\text{area de } T(S)\} = |\det A| \times \{\text{area de } S\}$$

  - Se T for definido por uma matriz 3×3 A, e S é um paralelipípedo em $\mathbb{R}^3$, então

$$\{\text{volume de } T(S)\} = |\det A| * \{\text{volume de } S\}$$

Espaço Vetorial

- Um espaço vetorial é um espaço não vazio de objetos V (vetores), em que se usa duas operações, chamadas adição e multiplicação por escalares.

- Propriedades

1. $\underline{u}+\underline{v}$ está em V
2. $\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u}$
3. $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$
4. Existe um vetor $\underline{0}$ em V tal que $u+0=\underline{u}$
5. Para cada vetor $\underline{u}$ em V, existe um vetor $-\underline{u}$ tal que $\underline{u}+(-\underline{u})=\underline{0}$
6. O múltiplo escalar $\underline{u}$ por c, $\underline{u}c$ está em V.
7. $c(\underline{u}+\underline{v}) = c\underline{u}+c\underline{v}$
8. $(c+d)u = c\underline{u}+d\underline{u}$
9. $c(d\underline{u}) = (cd)\underline{u}$
10. $1\underline{u}=\underline{u}$

Subespaços

- Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto H de V e tem três propriedades:

a) O vetor zero de V está em H
b) Para cada $\underline{u}$ e $\underline{v}$ em H, a sua soma está contida em H
c) Para cada $\underline{u}$ e $\underline{v}$ em H e c, o vetor $c\underline{u}$ está em H.

Teorema Span = Subespaço Vetorial

- Qualquer que seja o span $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p\}$ é um espaço vetorial de V, sejam $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p \in V$

Espaço Nulo

- O espaço nulo de $A_{m\times n}$, nul A, é o conjunto de soluções $A\underline{x}=\underline{0}$, isto é,

$$\text{Nul } A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x}=\underline{0}\}$$

Espaço Colunas

- O espaço colunas de uma matriz $m\times n$ A, Col A, é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas de $A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n]$, isto é,

$$\text{Col } A = \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$$

Teorema

- Seja A, $m\times n$, então:

1. Nul A é subespaço de $\mathbb{R}^N$
2. Col A é subespaço de $\mathbb{R}^M$

* Se $w \in$ Nul A: $[A][w] = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ | Nul $A \to$ Resolver p/ $\emptyset$

Exemplos:

1. Mostre que $w = \left\{\begin{bmatrix}a+b\\-2b\\3a\end{bmatrix} a,b \in \mathbb{R}\right\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{a\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

logo é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Base

(H é subespaço de V)

- Seja $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p\}$ um conjunto indexado de vetores de V, é base se def

(i) S é um conjunto linearmente independente;
(ii) O subespaço spanned de B coincide com H, $H = \text{Span}\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$

AL

...mplo:

§ 1. Classifique o conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ quanto à independência linear, ...do $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1-2t$, $p_3 = 4t+t$

$$p_3 = \left(\frac{9}{2}\right)1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(1-2t) = \frac{9}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2 \Rightarrow \{p_1, p_2, p_3\} \text{ é LD}$$

2. Classifique $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$ e $\{\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t\}$ quanto à independência linear em $[0, 2\pi]$:

$\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$ é LI $\quad \{\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t\}$ é LD

* → Pivot todas as linhas = Span $\mathbb{R}^n$
→ Pivot todas as colunas = LI

Teorema Spanning set

- Seja $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ pertencente a V e $H = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$

a) Se um dos vetores em S é combinação linear dos restantes, o conjunto formado por S sem esse vetor continua a gerar H (span).

b) Se $H \neq \{0\}$, algum subespaço de S é base de H.

Teorema

- As colunas pivot de uma matriz A formam a base para Col A.

Vetor Coordenada

- Seja $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\}$ uma base para um subespaço H, para cada $\underline{x}$ em H, as coordenadas de $\underline{x}$ relativamente à base $\mathcal{B}$ são pesos $c_1, \ldots, c_p$, tal que $\underline{x} = c_1 \underline{b_1} + \ldots + c_p \underline{b_p}$ e o vetor em $\mathbb{R}^p$

$$[\underline{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

Dimensão de um Subespaço

- A dimensão de um subespaço não nulo H (dim H), é o número de vetores em qualquer base de H. A dimensão do subespaço $\{\underline{0}\}$ é 0.

Dimensão de uma Matriz

- A dimensão de uma matriz A, é a dimensão do espaço colunas de A.

Teorema do Rank

- Se A tem n colunas, então $\boxed{\dim A + \dim \operatorname{Nul} A = n}$.

Teorema da Base

- Seja H um subespaço de dimensão p de $\mathbb{R}^n$. Qualquer conjunto de p elementos que seja linearmente independente em H, é uma base de H. Qualquer conjunto de p elementos cujo span é H, é base de H.

Teorema das Matrizes Invertidas (continuação)

- Seja A uma matriz $n \times n$:

(m) As colunas de A são base para $\mathbb{R}^n$

(n) Col $A = \mathbb{R}^n$

(o) dim Col $A = n$

(p) Rank $A = n$

(q) Nul $A = \{\underline{0}\}$

(r) dim Nul $A = 0$

- Teorema da Representação Única
  - Seja $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ base de V. Então, para cada $\underline{x}$ em V, existe um único conjunto de escalares $c_1, \dots, c_n$ tal que:

$$\underline{x} = c_1 \underline{b}_1 + \dots + c_n \underline{b}_n$$
$$\underline{x} = P_{\mathcal{B}} [\underline{x}]_{\mathcal{B}}$$

$P_{\mathcal{B}} = [b_1\ b_2 \dots b_n]$

- Teorema
  - Seja $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ base de V. Então a coordenada $\underline{x} \to [\underline{x}]_{\mathcal{B}}$ é uma transformação linear injetiva de V para $\mathbb{R}^n$.

- Teorema
  - Se um espaço V tem base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, então, qualquer conjunto em V que contenha mais de n vetores é linearmente dependente.

- Teorema
  - Se um espaço V tem uma base de n vetores, então todas as bases de V têm exatamente n vetores.

- Definição
  - Se span V é um conjunto finito, então V é dimensionalmente ~~finitos~~, e a dimensão de V, é o número de vetores na base de V.

- Teorema
  - Seja H um subespaço de V (dimensionalmente finito), qualquer conjunto linearmente independente em H pode ser spanned para uma base de H e H também é dimensionalmente finito e $\dim H \leq \dim V$.

- Dimensão de Nul A e de Col A
  - A dim Nul A é o número de variáveis livres na equação $A\underline{x} = 0$, e a dimensão de Col A é o número de colunas pivot em A.

- Teorema
  - Se duas matrizes A e B forem equivalentes por linhas, então os seus Col são os mesmos. Se B está em escada de linhas, então as colunas $\neq 0$ de B formam a base para o espaço colunas de A e vice-versa.

- Teorema (Mudança de Bases)
  - Sejam $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$ bases de V. Então existe uma única matriz $n \times n$ $\underset{C \leftarrow B}{P}$ tal que:

$$[\underline{x}]_C = \underset{C \leftarrow B}{P} [\underline{x}]_B$$

  - As colunas de $\underset{C \leftarrow B}{P}$ são os vetores C-coordenadas na base B, ou seja:

$$\underset{C \leftarrow B}{P} = [[\underline{b}_1]_C\ [\underline{b}_2]_C \cdots [\underline{b}_n]_C]$$

- Inversa
  - $\left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \underset{B \leftarrow C}{P}$

- Mudança de Base (Processo)
  - $[c_1\ c_2 \mid b_1\ b_2] \sim [I \mid \underset{C \leftarrow B}{P}]$

- Relação com Matrizes de Markov
  - Seja $P_{n \times n}$ uma matriz estocástica* regular, então P tem um único vetor estacionário q. Assim se, $\underline{x}_0$ (estado inicial) e $\underline{x}_{k+1} = P\underline{x}_k$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, então a matriz de Markov $\{\underline{x}_k\}$ converge para q, $k \to \infty$.

* de probabilidades

AL

Próprios

Um vetor próprio de uma matriz A $n \times n$, é um vetor não nulo $\underline{x}$ tal que $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$, para um escalar λ. O escalar λ é um valor próprio de A se existir uma solução não trivial para $\underline{x}$ em $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$; $\underline{x}$ é o vetor próprio associado a λ.

- Teorema
  - Os valores próprios de uma matriz triangular são as entradas na sua diagonal principal.
- Teorema
  - Se $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_r$ são vetores próprios que correspondem a valores próprios $\lambda_1 \dots \lambda_r$ de uma matriz $A_{n \times n}$, então o conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ é linearmente independente.

- Matrizes de Markov e Vap

$$A \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix} \quad \dots \quad A^{100} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{c} \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

↳ estabiliza

- Vap dominante $\lambda_1 = 1$

↳ não se altera

$$A\underline{x} = 1\underline{x} \Leftrightarrow (A - I)\underline{x} = \underline{0}$$

$$\text{Nul} \begin{bmatrix} 0,7-1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8-1 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,2 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ni \underline{x}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↳ exemplo

$$\underline{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

Vap	Vep
$\lambda_1 = 1$	$x_1 = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$
$\lambda_2 = 0,5$	$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- Encontrar Valor Próprio
  - $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 0,7-\lambda & 0,2 \\ 0,3 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 0,15\lambda + 0,5 = (\lambda - 1)(\lambda - 0,5) = 0$

Vap $= 1, 0,5$

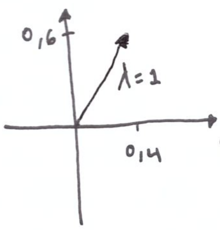
- Potências dos Vap de A

vap dominante $= 1$

$A\underline{x}_1 = 1\underline{x}_1 = \underline{x}_1$

$A(A\underline{x}_1) = A\underline{x}_1 \Leftrightarrow A^2\underline{x}_1 = 1^2\underline{x}_1$

$A(A^2\underline{x}_1) = A(1^2\underline{x}_1) = \underline{x}_1$



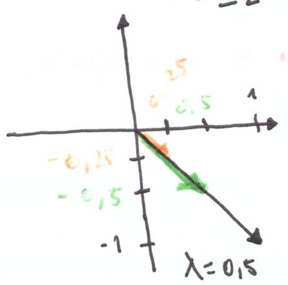
- Ao aplicar potências não há alteração uma vez que $A_x^1 = A_x^2 = A_x^3 = \dots = A_x^k$

$\lambda_2 = 0,5$

$A\underline{x}_2 = 0,5\underline{x}_2$

$A(A\underline{x}_2) = A(0,5\underline{x}_2) = 0,5^2\underline{x}_2$

$A(A^2\underline{x}_2) = A(0,5)^2\underline{x}_2 = 0,5^3\underline{x}_2$



- $A_x = 0,5$ do original
  Vai sempre reduzindo a metade

- Demonstração

$$A\begin{bmatrix}0,7\\0,3\end{bmatrix} = A\,\underline{c}_1 = A\underbrace{\begin{bmatrix}0,4\\0,6\end{bmatrix}}_{\underline{x}_1} + A\begin{bmatrix}0,3\\-0,3\end{bmatrix} = 0,3\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}_{\underline{x}_2}$$

$$\begin{bmatrix}0,3\\-0,3\end{bmatrix}$$

$$A\,\underline{c}_1 = A\underline{x}_1 + 0,3\,A\underline{x}_2 \qquad A^2\underline{c}_1 = 1^2\underline{x}_1 + 0,3\,(0,5)^2\underline{x}_2 \quad \dots \quad A^{99} = 1^{99}\underline{x}_1 + 0,3\,(0,5)^{99}\underline{x}_2$$

$$A^3\underline{c}_1 = 1^3\underline{x}_1 + 0,3\,(0,5)^3\underline{x}_2$$

$1^{99}\underline{x}_1 = \begin{bmatrix}0,4\\0,6\end{bmatrix}$, $0,3(0,5)^{99}\underline{x}_2 \approx 0$

matriz A aplicada à 1ª coluna $\underline{c}_1$

- Potências

  - Para qualquer matriz $A_{n \times n}$, A^k tem os mesmos vep de A e os vap são λ^k.
  - Quanto maior a potência de A, mais a primeira coluna se aproxima do vetor estacionário.

- Vap em Projeções

  - Matriz de Projeção (2x2):
    - É estocástica regular (soma 1 em coluna e não tem entradas negativas);
    - Tem como vap 1 e 0;
    - Singular (entradas iguais);
    - P é simétrica;
    - Os vep associados a 0 estão no núcleo da matriz;
    - Os vep associados a 1 estão nas colunas da matriz.

- Vap em Reflexões

  - Matriz Reflexão em xx:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \qquad \det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda&0\\0&-1-\lambda\end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

vap = -1, 1

  - Matriz Reflexão y = x:

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} \qquad \det\left(\begin{bmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \text{vap} = -1, 1$$

Obs: $\underset{\text{Matriz Rotação}}{R} = 2\underset{\text{Matriz Projeção}}{P} - I$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Vap: $(1,-1) = (1,0) - (1,1)$

- Conclusões

  - Quando uma matriz é multiplicada por α, cada vap é multiplicado por α.
  - Quando uma matriz se desloca na identidade (ex: 2P-I), os vap deslocam-se também 1 unidade.

- Teorema

  - Toda a matriz $n \times n$ tem n valores próprios.

- Calcular Vap e Vep

1. Calcular $\det(A - \lambda I)$
2. Resolver $\det(A - \lambda I) = 0$
3. Resolver $(A - \lambda I)\,x = 0$

... uma matriz $n \times n$, o polinómio resultante de $\det(A - \lambda I) = 0$ tem grau n.

Propriedades

- Se A é singular, então 0 é vap.
- Se as colunas são múltiplas 0 é vap.
- Se a soma das linhas é igual para todas as linhas, então o resultado da soma é vap.

○ Descobrir Vep

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 6 \qquad (A - 6I)\underline{x} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alternativa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{x}_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \underbrace{6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{6\,\underline{x}_1}$$

○ Traço da Matriz

- Soma das entradas da diagonal principal é igual à soma dos vap.

○ Determinante

- Determinante de $A_{n \times n}$ é sempre igual ao produto de todos os vap da matriz.

○ Valores Próprios em Rotações

- Matriz Rotação:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

∘ Em 90°

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{vap}} \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$Q^4 = Q$ em rotações em 90° // Vap: $i, -i$ //

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Vap complexos:
  - Vap são i e $-i$
  - Os vep são complexo conjugados

- Rotação em 180°:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad // \lambda = -1, -1 // \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} [\;] = -1 [\;]$$

Qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$

- Vap complexos:
  - Vap é $-1, -1$
  - Vep são todos os vetores de $\mathbb{R}^2$
  - $Q^2 = Q$ em rotações 180°

Teorema (2×2)

1. Os vap de Q quando são complexos, são sempre conjugados;
2. Todos os vap têm módulo 1
3. Os vep associados a vap complexos são conjugados.

Nota:

sentido (+) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (−) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

- Matrizes com vap complexo
  - Podem representar rotações ou composições (escala + rotação).

$\lambda = a \pm bi$

$|\lambda| = \sqrt{a^2+b^2}$

$Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ vap $= \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$

$|\lambda| = \sqrt{2+2} = 2$

$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{2I} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

$2I = |\lambda|$

$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$

$\frac{\pi}{4} = \varphi = \arg \lambda$

- Sistemas Dinâmicos Discretos
  - $x_{k+1} = Ax_k$
- Sistemas Dinâmicos Contínuos
  - $x'(t) = Ax(t)$
- Condições sobre Vep e Vap
  - A é $n \times n$ e tem:
    - n vep's linearmente independentes;
    - $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

- Sistema Dinâmico Discreto: Raposas e Coelhos
  - Dados:

Taxa de sobrevivência das raposas sem coelhos: 50%.
Taxa de aumento da população de coelhos sem raposas: 40%.
Taxa de contribuição dos coelhos para o aumento da pop. de raposas: 60%.

$\begin{cases} r_{k+1} = 0{,}5r_k + 0{,}6c_k \\ c_{k+1} = -pr_k + 1{,}4c_k \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ -p & 1{,}4 \end{bmatrix}$ → dinâmica reprodução e sobrevivência

p → Taxa de morte dos coelhos quando há raposas por perto

- Seja $p = 0{,}3$ (em média, uma raposa, alimenta-se de 30 coelhos por mês)

$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ -0{,}3 & 1{,}4 \end{bmatrix}$

vap	vep
$\lambda_1 = 1{,}1$	$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\lambda_2 = 0{,}8$	$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- População Inicial $k=0$

$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$

$x_1 = Ax_0 = A(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2$

$x_2 = Ax_1 = A(c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2) = c_1 (\lambda_1)^2 v_1 + c_2 (\lambda_2)^2 v_2$

$x_k = c_1 (\lambda_1)^k v_1 + c_2 (\lambda_2)^k v_2$

- População para $k \to \infty$

$x_k = c_1 (1{,}1)^k v_1 + \underbrace{c_2 (0{,}8)^k v_2}_{\text{tende para } 0}$

- Para $c_1 > 0$

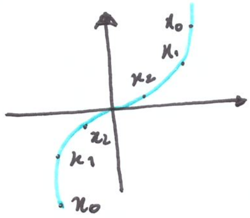
$\underset{k\to\infty}{x_k} \approx c_1 (1{,}1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_{k+1} \approx 1{,}1\, x_k$ ⇒ A taxa de crescimento das raposas e dos coelhos é 10% ao mês

- De acordo com o vep $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, para cada 10 raposas existem 1000 coelhos (o aumento aplica-se proporcionalmente)

[illegible] no espaço de fase

Pode obter-se uma descrição geométrica do que acontece ao ponto x_0 no plano, aplicando sucessivamente a matriz A ao ponto anterior $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$

- Chama-se uma trajetória do sistema dinâmico.



→ tende para (0,0)

→ (0,0) é um ponto de atração das trajetórias (ponto atrator)

* Atrator → aproximam-se da origem
  Repulsor → afastam-se da origem
  Ponto de sela → misto

∘ População de Equilíbrio

- Estádios de desenvolvimento do lince:

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_k = \begin{bmatrix} c_k \\ j_k \\ a_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{crias no ano } k \\ \text{jovens linces} \\ \text{linces adultos} \end{matrix}$$

0,33 → taxa de reprodução anual
0,18 → crias jovens sobrevivem
0,71 → linces jovens tornam-se adultos
0,94 → taxa sobrevivência de adultos

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \quad + \quad + 0{,}33a_k \\ j_{k+1} &= 0{,}18c_k + \quad + \\ a_{k+1} &= \quad + 0{,}71j_k + 0{,}94a_k \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0{,}98$

$\lambda_{2,3} = -0{,}02 + 0{,}21i$

$|\lambda_{2,3}| = \sqrt{(-0{,}02)^2 + (\pm 0{,}21i)^2} = \approx 0{,}045 < 1$

População para $k \to \infty$

$$x_k = \underbrace{c_1(\lambda_1)^k v_1}_{\text{tende p/0}} + \underbrace{c_2(\lambda_2)^k v_2}_{\text{tende p/0}} + \underbrace{c_3(\lambda_3)^k v_3}_{\text{tende p/0}}$$

$\underline{x}_k \to \underline{0} + \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ → extinção da espécie

- Se a taxa de sobrevivência das crias subir para 0,30

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \quad + \quad + 0{,}33a_k \\ j_{k+1} &= 0{,}3c_k + \quad + \\ a_{k+1} &= \quad + 0{,}71j_k + 0{,}94a_k \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1{,}01 > 1$

$\lambda_{2,3} = |-0{,}03 \pm 0{,}26i| < 1$

População para $k \to \infty$

$$\underline{x}_k = c_1(1{,}01)^k \underline{v}_1 + \underbrace{c_2(\lambda_2)^k \underline{v}_2}_{\text{tende p/0}} + \underbrace{c_3(\lambda_3)^k v_3}_{\text{tende p/0}}$$

Para $c_1 > 0$ e $k \to \infty$

↳ $\underline{x}_k \approx c_1(1{,}01)^k \underline{v}_1$ → sobrevivência do lince ibérico

- Conclusões:
  - $\underline{x}_{k+1} \approx 1{,}01\,\underline{x}_k$
  - A taxa de aumento anual em cada faixa etária é 1%.

∘ Atratores, Repulsores e Selas

- Atrator: $A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}65 \end{bmatrix}$

Vap	Vep
$\lambda_1 = 0{,}8$	$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\lambda_2 = 0{,}65$	$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x_k = \underbrace{c_1(0{,}8)^k}_{\to 0}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \underbrace{c_2(0{,}65)^k}_{\to 0}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$ a origem é um atrator

- Repulsor:

$A = \begin{bmatrix}1{,}4 & 0\\0 & 1{,}1\end{bmatrix}$

Vap	Vep
$\lambda_1 = 1{,}4$	$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$\lambda_2 = 1{,}1$	$v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$x_k = \underbrace{c_1(1{,}4)^k}_{\to\infty}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \underbrace{c_2(1{,}1)^k}_{\to\infty}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{bmatrix}\infty\\\infty\end{bmatrix}$$ a origem é um repulsor

- Ponto de Sela:

$A = \begin{bmatrix}1{,}4 & 0\\0 & 0{,}6\end{bmatrix}$

Vap	Vep
$\lambda_1 = 1{,}4$	$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$\lambda_2 = 0{,}6$	$v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$x_k = c_1(1{,}4)^k\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2(0{,}6)^k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \xrightarrow[k\to\infty]{} ? \to$$ depende do x_0

- Se x_0:
  - $(0,y) \to$ converge para a origem
  - $\to$ torna-se infinitamente grande

$\to$ ponto de sela

Vap e Funções Próprias - Sistemas Dinâmicos Contínuos

- $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ matriz $n\times n$

$$\begin{bmatrix}x_1'(t)\\ \vdots \\ x_n'(t)\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix}$$

- Solução geral da forma:

$$\underline{x}(t) = \underline{v}e^{\lambda t} \xRightarrow[\text{Derivada}]{} x'(t) = \lambda(\underline{v}e^{\lambda t})$$

$\Downarrow A$

$$A\underline{x}(t) = A v e^{\lambda t} \qquad A\underline{x}(t) = \underline{x}'(t) \Leftrightarrow A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

- Funções próprias:

$$\begin{bmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{-t}$$

Sol. Geral $\Rightarrow$ $x(t) = \begin{bmatrix}c_1 e^{-3t}\\c_2 e^{-t}\end{bmatrix}$, $t \geq 0$

- Uma partícula num campo de forças:

$$x(t) = \underbrace{c_1 \underline{v}_1 e^{-3t}}_{\underline{x}_1(t)} + \underbrace{c_2\underline{v}_2 e^{-t}}_{\underline{x}_2(t)}$$

Vap	Vep
$\lambda_1 = -3$	$v_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
$\lambda_2 = -1$	$v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$t \geq 0$

$$x(0) = \underbrace{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\text{Sol.: } c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{5}{2}}$$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}_{\text{decai + rápido pois é + negativo}}e^{-3t} + \frac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-t}$$

$t \geq 0$

- Exponenciais negativas $\to$ todas as trajetórias convergem para a origem
- A origem vai ser um atrator e as trajetórias vão ter um decaimento em espiral

Rotação Escondida

- Matriz real com vap complexos:
  - É uma matriz rotação

$A = \begin{bmatrix}1 & 5\\-2 & 3\end{bmatrix}$ $\lambda = 2 \pm 3i$

$\hookrightarrow$ tem rotação escondida

$$Q = r\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix} \qquad \lambda = a \pm bi$$