1º Teste

Álgebra Linear

→ Sistema de equações lineares

- Uma eq. <u>linear</u> é uma eq. do tipo:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n . x_n = b$$

$x_1 \dots x_n$ - incógnitas
$a_1 \dots a_n$ - coeficientes/(números reais dados)
b - (número dado)/ termo independente

São eq. lineares // Não são eq. lineares

$2x = 5 \Leftrightarrow x = 5/2$ — $3x^2 = 25$

$3x + 2y = 1$ — $2 \sin x = 1$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

- Um <u>sistema</u> de eq. <u>lineares</u> com <u>m</u> equações e <u>n</u> termos é um sistema do tipo:

$$\begin{cases} a_{11} . x_1 + \dots + a_{1n} . x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1} . x_1 + \dots + a_{mn} . x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ii} - coeficientes do sistema
b_i - termo independente

É sist. linear // Não é sist. linear

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 4x + 2y = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^3 + y + z = 4 \\ x^2 + 1 = 5 \end{cases}$$

→ Se $b_1 = b_m = 0$, o sist. diz-se homogéneo.
→ Chama-se solução do sist. geral o conjunto das suas soluções.

- Sistema possível (tem solução) e determinado (solução única).

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

- Sistema possível e indeterminado.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Sistema impossível

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + y = 4 \\ x + 2y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x = 1 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \\ 3 \neq 25 \end{cases}$$

→ Método da eliminação de Gauss

<u>1º Objetivo</u> - usar L1 para eliminar a variável <u>x</u> nas restantes equações;
<u>2º Objetivo</u> - usar a L2 para eliminar <u>y</u> nas restantes eq.
<u>Conclusão</u> - concluir se o sistema é possível ou impossível.

$$L_1\begin{cases} 2x+y+4z=2 \\ 6x+y=-10 \\ -x+2y-10=-4 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 \mapsto L_2 - L_1 \begin{cases} 2x+y+4z=2 \\ -2y-12z=-16 \\ -x+2y-10z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$L_3 \mapsto L_3 + \tfrac{1}{2}L_1 \begin{cases} 2x+y+4z=2 \\ -2y-12z=-16 \\ \tfrac{5}{2}y-8z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow L_3 \mapsto L_3 + \tfrac{5}{4}L_2 \begin{cases} 2x+y+4z=2 \\ -2y-12z=-16 \\ -23z=23 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Sist. possível e determinado, com soluções: $x=-2, y=2, z=1$

→ Operações elementares sobre as "linhas" de um sist. linear
- Trocar linhas;
- Multiplicar uma linha por um número a, $a \neq 0$;
- Substituir uma linha L_i por $L_i + aL_j$, $a \neq 0$, $i \neq j$.

São as operações que transformam o sist. noutro que lhe é equivalente (tem as mesmas soluções).

→ Matrizes

Dado $\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$ $\underline{n}$ incógnitas, $\underline{m}$ equações

Chama-se <u>matriz aumentada</u> do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

<u>ex:</u>
$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=7 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4=4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

→ Operações elementares sobre as linhas de uma matriz
- Trocar linhas;
- Multiplicar de uma linha por a, $a \neq 0$;
- Substituir uma linha L_i por $L_i + aL_j$, $a \neq 0$, $i \neq j$;

<u>Def.</u> - Chama-se pivot, de uma linha (numa matriz), a primeira entrada não nula dessa linha.

<u>Def.</u> - Uma matriz diz-se em **escada** por linhas se:
- Não tem linhas nulas seguidas de linhas não nulas;
- O pivot de cada linha (quando existe) encontra-se numa coluna à direita de onde está o pivot da linha anterior

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

<u>Nota:</u> debaixo de cada pivot só há zeros (se for em escada)

→ Objetivo

Para uma matriz aumentada de um sistema, através de operações elementares de linhas chegar a uma matriz em escada por linhas

Ex.:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ 5x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \mapsto L_3 - 5L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \mapsto L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Def.: Uma matriz diz-se em escada por linhas na forma reduzida se for em escada por linhas, todos os pivôs forem iguais a 1 e sejam os únicos elementos não nulos em cada coluna.

Ex.:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Em escada por linha, na forma não reduzida.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Em escada por linha, na forma reduzida

→ Método de eliminação de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - z = 1 \\ 4x + 5z = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 \end{array}\right]$$

sistema possível e determinado

Def.: Chama-se variáveis livres ou independentes as variáveis que correspondem a colunas sem pivô. As outras chama-se variáveis dependentes.

Número de variáveis dependentes → característica do sistema;

Número de variáveis independentes → grau de liberdade do sistema.

Tem-se:

1) Um sist. impossível se o pivô está na coluna da direita da matriz aumentada do sistema;

2) Um sist. possível e determinado, se for possível e não tem variáveis livres;

3) Um sist. possível e indeterminado, se não for possível e tiver variáveis livres.

De outra forma: Se [A|b] for matriz (aumentada) do sistema, então:

- O sist. é possível se car(A) = car([A|b]);
- É determinado se o nr de colunas [A] = car(A).

→ Operações sobre matrizes

Uma matriz A diz-se do tipo $m \times n$ se tiver m linhas e n colunas

$$[A]_{ij} = a_{ij}$$

i ↓ índice linha, j → índice coluna

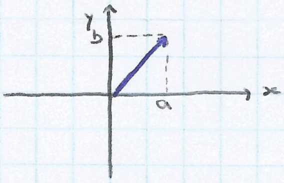
Ex: $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ $[A]_{22} = 5$

Uma <u>matriz coluna</u> é do tipo $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Identificamos uma matriz coluna através de <u>vetores</u>

Ex: $\mathbb{R}^2$



$\vec{v}\,(a,b)$ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

(1) Soma de matrizes

$A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$
$[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$
$[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

→ <u>Propriedades</u>
- $A + B = B + A$ (comutativa)
- $c\,(A+B) = cA + cB$, $c \in \mathbb{R}$ (distributiva)
- $(c+d)A = cA + dA$, $c, d \in \mathbb{R}$ (distributiva)
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativa)

→ Matrizes nulas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A + O = \underline{A}$

(2) Produto de matrizes

$$\underset{m\times n \;\; n\times p}{[AB]_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{in}\cdot b_{nj}$$

Ex:

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} \times \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 9 & 5 \end{bmatrix}}$$

1ª linha com 1ª coluna
$a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21}$
$1 \times 1 + 0 \times (-1)$

⚠ O produto de matrizes <u>não é comutável</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

$\neq$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

se $AB = BA$ $p = m$
$m = n = p$

As matrizes têm que ser quadradas. Ora, mesmo assim, o produto não é comutável.

→ Propriedades

- $A(BC) = (AB).C$ (associativa)
- $A(B+C) = AB + AC$ (distributiva)
- $(A+B).C = AC + AB$ (distributiva)
  ↳ Desde que os produtos estejam bem definidos

→ Matrizes identidade

$$I_{n\times n} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [I_n]_{ij} = \begin{cases} 1 \Leftarrow i = j \\ 0 \Leftarrow i \neq j \end{cases}$$

$A_{m.n} \times I_{n.n} = A$

$I_{n.n} \times A_{m.n} = A$

→ Matriz inversa de uma matriz quadrada $A_{n\times m}$ $\quad n = m$

Def.: Seja A matriz quadrada. ($A_{n\times n}$). Se $B_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_{n\times n}$, diz-se que B é a matriz inversa de A e escreve-se $B = A^{-1}$

$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$

⚠ Nem sempre existe matriz inversa.

Ex:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2a & a \\ 2c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a = 0 \\ a = 1/2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Impossível

Ex: $\begin{cases} 5x + y + z = 1 \\ 2x + 3y = 0 \\ x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} \qquad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}}_{3\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 5x + y + z \\ 2x + 3y \\ x + 4y + 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x$$

O sistema escreve-se na forma $Ax = b$.

Duma forma geral, se $A_{m\times n}$ é a matriz do coeficiente de um sistema com termo independente b.

$Ax = b$ é equivalente ao sistema $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Se $m = n$ e A for invertível, $Ax = b$ tem solução única.

Se $A^{-1}.Ax = A^{-1}.b$

$x = A^{-1}.b$ (o sist. é possível e determinado)

(*) Ver pág. 6

→ Propriedades matriz inversa

Se A^{-1} existe e B^{-1} existe tem-se:

- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$, porque $(AB)(B^{-1}.A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$ (X)
  $(B^{-1}.A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = BB^{-1} = I$
- A matriz inversa é única;
- Se $c \neq 0$, $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$.

→ Matriz Transposta

Def.: Matriz transposta da matriz $A_{m \times n}$ é uma matriz $n \times m$, A^T.

$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$ → Troca de linhas com colunas

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $2.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = 2.\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 2.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^T$

→ Propriedades
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T . A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c A^T$

→ Matrizes elementares

Transformações elementares sobre as linhas de uma matriz:
- $L_i \leftrightarrow L_j$, $i \neq j$;
- $L_i \rightarrow cL_i$, $c \neq 0$;
- $L_i \rightarrow L_i + cL_j$, $c \neq 0$, $i \neq j$.

Def.: Uma matriz elementar é uma matriz (quadrada) que resulta de aplicar uma transformação elementar na matriz I_n.

Ex.^{os}: $E_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \neq 0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{L_3 \to L_3 + cL_1}$ $E_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $c \neq 0$

Prop. 1

Se E é uma matriz elementar AE obtem-se pela mesma equação elementar sobre A que transferiu I em E.

$$E_1 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Prop. 2

30/9 As matrizes elementares têm inverso.

(*) → Cálculo da Matriz Inversa

$A_{n \times n}$ $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$

A é invertível $\Leftrightarrow$ $\forall b$: o sistema $Ax = b$ é possível e determinado ($x = A^{-1}.b$ $\Leftrightarrow$ pode-se reduzir a matriz A à matriz I_n através de operações elementares sobre linhas (método Gauss-Jordan)

Lembremos que aplicar uma operação elementar deste tipo na matriz A é o mesmo que multiplicar E.A, onde E é a matriz elementar consequente.

→ Resumindo

A é invertível ⇔ há uma sucessão $E_1, \dots, E_p$ de matrizes elementares tais que:

$$\begin{cases} (E_p \cdots E_2 E_1) . A = I_n \\ (E_p \cdots E_2 E_1)^{-1} . (E_p \cdots E_2 E_1) . A = (E_p \cdots E_2 E_1)^{-1} . I_n \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} A = (E_p \cdots E_2 E_1)^{-1} . I_n \\ A^{-1} = (E_p \cdots E_2 E_1) . I_n \end{cases}$$

Vemos que a mesma sucessão de passos (operações elementares) que reduz A a I_n, também reduz I_n a A^{-1}.

Prop^s: São equivalentes as seguintes expressões:

1) $A_{n \times n}$ é inevitável
2) A forma reduzida de A em escada por linhas $= I_n$.
3) A forma reduzida de A em escada tem n pivôs.
4) $\forall b$ o sistema $Ax = b$ é possível e determinado
5) Não há variáveis livres
6) $Car(A) = n$; grau de interminação de $A = 0$
7) Um sistema homogéneo $Ax = 0$, tem com única solução $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Ex.: Calcula, se possível, a matriz inversa de $\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{matrix}$

$$\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{I_n} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 4L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & -1/2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{-9}{2} & 7 & \frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{-1}{2} \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right]$$

Espaços Vetoriais (ou lineares)

→ Espaços vetoriais

Vetores em $\mathbb{R}^n$

$u, v \in \mathbb{R}$ $\quad u + v$

$\sigma \in \mathbb{R}$ $\quad \sigma . u$

Prop. destas operações

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. O vetor $0 + u = u$ (elemento neutro para a soma)
4. Todo o vetor u tem um simétrico, $-u$, com $u + (-u) = 0$.
5. $\sigma(u + v) = \sigma u + \sigma v$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}$
6. $(\sigma + \beta) u = \sigma u . + \beta u$, $u \in \mathbb{R}^n$, $\sigma, \beta \in \mathbb{R}$
7. $1u = u$ (elemento neutro da multiplicação)
8. $\sigma(\beta u) = (\sigma \beta) u$

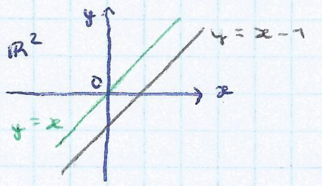
Def.: Um espaço vetorial é um conjunto E no qual está definida uma soma e uma multiplicação por números (reais) e tal que estas operações têm as 8 propriedades atrás citadas.

Nota: os espaços vetoriais têm sempre a origem.

Ex.os:

• São espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}$ {matrizes do tipo $m\times n$}, $F = \{$funções $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas$\}$

• Não são espaços vetoriais:



$\hookrightarrow \mathbb{R} = \{(x,y) : y = x - 1\}$
$0 \notin$

$\mathbb{R}' = \{(x,y) : x = y\} \to$ é esp. vetorial

Def.: E espaço vetorial
F⊂E é um subespaço vetorial se ele próprio é um espaço vetorial.

F⊂E é um subespaço vetorial:
- $0 \in F$;
- Se $u, v \in F$, então $u+v \in F$;
- Se $u \in F$ e $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma u \in F$.

Seja E um espaço vetorial:
Uma combinação linear de vetores $u_1, \dots, u_p \in E$ é um vetor do tipo $\sigma_1 . u_1 + \dots + \sigma_p . u_p$.

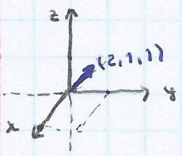
$Sp(\{u_1, \dots, u_p\}) = \mathcal{L}(\{u_1, \dots, u_p\}) = \{$combinações lineares de $u_1, \dots, u_p\}$

Chama-se espaço geral por $u_1, \dots, u_p$. É um subespaço vetorial de E.

Ex.os:

(1) Em $\mathbb{R}^3$, $Sp = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

$\{(\sigma, \beta, 0); \sigma, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\sigma(1,0,0) + \beta(0,1,0), \sigma, \beta \in \mathbb{R}\}$
= plano $\{z = 0\}$



$Sp = \{(2,1,1)\}$
$= \{\sigma(2,1,1), \sigma \in \mathbb{R}\}$ = reta que passa por $(2,1,1)$

(2) Prove que $\mathcal{L}\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} = \mathbb{R}^3$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ queremos verificar que existem $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tais que

$(x,y,z) = \sigma_1(1,0,0) + \sigma_2(1,1,0) + \sigma_3(1,1,1) = (\sigma_1, 0, 0) + (\sigma_2, \sigma_2, 0) + (\sigma_3, \sigma_3, \sigma_3)$
$= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \sigma_2 + \sigma_3, \sigma_3)$

$$= \begin{cases} x = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ y = \sigma_2 + \sigma_3 \\ z = \sigma_3 \end{cases}$$

Portanto, queremos verificar que este sistema (incógnitas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; termos independentes x, y, z) é possível.

(3) Em $\mathbb{R}^4$ encontrar vetores que geram o seguinte subespaço vetorial: $\{(a-3b, b-a, a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$

$(a, -a, a, 0) + (-3b, b, 0, b) = a(1,-1,1,0) + b(-3,1,0,1)$

$\mathcal{L} = \{(1,-1,1,0), (-3,1,0,1)\}$

(4) Prove que $\mathcal{L}\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} = \mathbb{R}^3$
ou $\mathcal{L}(\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}) = \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

(5) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ sist. p. ind

$\begin{cases} z = 6y - y \\ x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5y \\ x = -3y \end{cases}$ $\{(-3y, y, 5y) : y \in \mathbb{R}\}$

$y(-3, 1, 5)$

$\mathcal{L}\{(-3, 1, 5)\}$

→ vetores linearmente independentes

Def.: E esp. vetorial

$v_1, \dots, v_p \in E$ dizem-se l.i se

$\forall\ \alpha_1 . v_1, \dots, \alpha_p . v_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$

Ex.:

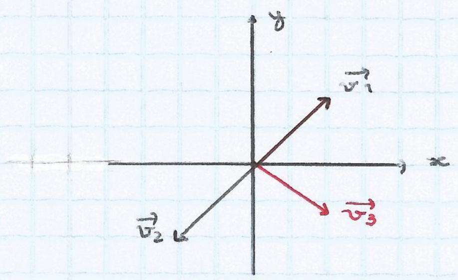
$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$\alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2 = 0$ e algum α_1 (ou α_2) $\neq 0$ (são l. dependentes)

↳ é gerado por outro

$\boxed{v_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} . v_2}$, ou seja, v_1 escreve-se "à custa" de v_2.

como combinação linear



$\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são l.d

$\vec{v_1}$ e $\vec{v_3}$ são l.i.

Em geral, se $v_1, \dots, v_p$ são l.d:

$\exists\ \alpha_1 . v_1 + \dots + \alpha_p . v_p = 0$ e algum $\alpha_i \neq 0$

$\dfrac{\alpha_1}{\alpha_i} + v_1 + \dots + \dfrac{\alpha_p}{\alpha_i} . v_p = 0$

$v_i = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_i} . v_1 + \dots + \dfrac{\alpha_p}{\alpha_i} . v_p$

Ex.os:

(1) Verificar se, em $\mathbb{R}^4$, os vetores $\{(1,0,2,-1), (-1,0,2,2)\}$ são ou não l.i.:

Nota: Os vetores serão l.i, se o sistema for possível e determinado

$\alpha_1 (1,0,2,-1) + \alpha_2 (-1,0,2,2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, 0, 2\alpha_1, -\alpha_1) + (-\alpha_2, 0, 2\alpha_2, 2\alpha_2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

são l.i.

(2) Verificar se são l.i ou l.d os vetores de $\mathbb{R}^3$

$\{(-2,1,1), (1,-2,1), (1,1,-2)\}$

$\alpha_1(-2,1,1) + \alpha_2(1,-2,1) + \alpha_3(1,1,-2) = 0$

$\Leftrightarrow (-2\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, -2\alpha_3) = 0$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{s.p.d.} \rightarrow \text{l.d}$$

Nota: Se os vetores forem l.d:
↳ Em $\mathbb{R}^2$ ∈ à mesma reta;
↳ Em $\mathbb{R}^3$ ∈ ao mesmo plano.

→ Base dum esp. vetorial

Def.: Chama-se base de um espaço vetorial E a um conjunto de vetores que gera E e que são l.i.

Ex.: Em $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ forma uma base

$\{(1,0,\dots,0), (\dots), (0,\dots,0,1)\}$ → base canónica $\mathbb{R}^n$

Prop. 1.: Todas as bases de um esp. vetorial têm um número de vetores A. Esse número chama-se dimensão de E.

Prop. 2.: Em $\mathbb{R}^n$ $\{v_1, \dots, v_p\}$, com $p > n$ eles não podem ser l.i

Prop. 3.: Em $\mathbb{R}^n$ $\{v_1, \dots, v_p\}$ com $p < n$, eles não geram $\mathbb{R}^n$. Porque se gerassem $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^n$,
$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) : (x_1, \dots, x_p) = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_p \cdot v_p = 0$,
ou seja, o sistema seria possível e determinado

Ex.:
(1) Em $\mathbb{R}^3$ $\{(1,2,0), (-1,1,1), (0,3,1)\}$
verificar se formam uma base e caso contrário, descrever o espaço que eles geram.

$$\alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(-1,1,0) + \alpha_3(0,3,1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{p. ind} \rightarrow \text{l.d}$$

Traço de uma matriz

→ O traço de uma matriz quadrada é a função matricial que associa a matriz à soma dos elementos da sua diagonal principal.

→ Propriedades:
- O traço é linear
  - $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
  - $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$
- $tr(A) = tr(A^T)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

Base

Um subconjunto (finito) B de um espaço linear $W \neq \{0\}$ diz-se base de W se são verificadas as duas condições seguintes:

- B é linearmente independente.
- B gera W, isto é, Span(B) = W.

2º Teste

Seja $A_{m \times n}$. dim → número de elem. que constituem uma base

Def.: Chama-se espaço de colunas de A e escreve-se Col(A) ao subespaço vetorial $\mathbb{R}^m$ gerado pelos vetores das colunas de A
dim Col(A) = car(A)

Def.: Chama-se espaço nulo ao subespaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

$Nul(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ = {solução sist. homogéneo $Ax = 0$} =
dim Nul(A) = nul(A) realidade de A
dim(Nul(A)) é o número de variáveis livres

Ex.os:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

variáveis

variáveis dependentes

$Col(A) = Sp\{(-3,1,2), (-1,2,5)\}$
car(A) = 2

Soluções sist. homogéneo $Ax = 0$:

→ Teorema
Seja A uma matriz $m \times n$
car(A) + nul(A) = n

→ Corolário
$A_{n \times n}$ é invertível se e só se:
- nul(A) = 0
- car(A) = n
- $Col(A) = \mathbb{R}^n$
- $Nul(A) = \{0\}$
- O sist. $Ax = 0$ só tem solução nula.

→ Esp. vetorial das funções polinomiais de grau ≤ n

$\mathbb{P} = \{p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n . t^n\}$, $a_0, \dots, a^n \in \mathbb{R}$
= {combinação linear dos polinómios $\underbrace{1, t, t^2, \dots, t^n}_{\text{são l.i.}}$}

→ Interseção e União de subespaços vetoriais
E esp. vetorial
$U, V \in E$, subespaços vetoriais de E

$U \cap V$ também é subespaço vetorial de E
- $0 \in U \cap V$
- $u_1 . v \in U \cap V$, $u_1 . v \in V$ e $u_1 . v \in U$
- $u + v \in U \cap V$
- $\sigma u \in U \cap V$, $u \in U \cap V$, $\sigma \in \mathbb{R}$

$U \cup V$ não é necessariamente um esp. vetorial
$U + V = \{u + v, u \in U$ e $v \in V\}$ é um esp. vetorial

→ Teorema (da dimensão)

$\dim(U+V) = \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V$

Seja $w = \{w_1, \dots, w_p\}$ uma base de $U \cap V$
Podemos completar esta lista de vetores de modo a obter uma base de U.

$\{u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ bases de U
$\{u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_n, v_1, v_2, \dots, v_p\}$ base $U+V$

→ Representação de vetores em bases

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de um esp. vect. E de dimensão n

$\forall v \in E \quad v = \sigma_1 . v_1 + \dots + \sigma_n . v_n$, ou seja, escreve-se como combinação linear de vetores da base de maneira única, porque se:

- $v_1 = \sigma_1 . v_1 + \dots + \sigma_n . v_n$
- $v_2 = \beta_1 . v_1 + \dots + \beta_n . v_n$

demonstração

$(\sigma_1 - \beta_1).v_1 + \dots + (\sigma_n - \beta_n).v_n = 0$

Logo, $\begin{cases} \sigma_1 - \beta_1 = 0 \\ \dots \\ \sigma_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \beta_n \\ \\ \sigma_n = \beta_n \end{cases}$

$v = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \dots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)_B$ Ao vetor $\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \dots \\ \sigma_n \end{bmatrix}_B$ chama-se vetor de coordenadas de v na base B.

→ Matrizes mudança de base

Em $\mathbb{R}^n$ a base canónica escreve-se $\mathcal{E}_n = \{(1,0,\dots,0), (\dots), (0,\dots,0,1)\}$
seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ outra base $\mathbb{R}^n$.

$v = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}_{\mathcal{E}_n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \dots \\ \sigma_n \end{bmatrix}_B$

$v = \sigma_1 . v_1 + \dots + \sigma_n . v_n$
$v_1 = v_{11} . \varepsilon_1 + \dots + v_{1n} . \varepsilon_n$
$\dots$
$v_n = v_{n1} + \varepsilon_1 + \dots + v_{nn} . \varepsilon_n$

$v = \sigma_1 (v_{11} . \varepsilon_1 + \dots + v_{1n} . \varepsilon_n) + \dots + \sigma_n (v_n . \varepsilon_1 + \dots + v_{nn} . \varepsilon_n)$
$= (\sigma_1 . v_{11} + \dots + v_n . v_{n1}) \varepsilon_1 + \dots + (\sigma_1 . v_{1n} + \dots + \sigma_n . v_{nn}) \varepsilon_n$

$$\boxed{[v]_{\mathcal{E}_n} = M_{\mathcal{E}_n \leftarrow B} [v]_B = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \dots \\ \sigma_n \end{bmatrix}_B}$$

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$

$M_{\mathcal{E}_n \leftarrow B} = \begin{bmatrix} v_1 & & v_3 \end{bmatrix}_{n \times n}$

As matrizes mudança de base são invertíveis

$$\boxed{M_{\mathcal{E}_n \leftarrow B} = M^{-1}_{B \leftarrow \mathcal{E}_n}}$$

$[v]_{\mathcal{E}_n} = M_{\mathcal{E}_n \leftarrow B} [v]_B$

$[v]_B = M^{-1}_{\mathcal{E}_n \leftarrow B} [v]_{\mathcal{E}_n}$

$$\boxed{M_{\varepsilon \leftarrow B} = M_{\varepsilon \leftarrow \mathcal{E}_n} . M_{\mathcal{E}_n \leftarrow B}}$$

→ Transformações Lineares

Def.: Sejam E e F dois espaços vetoriais.

$T: E \to F$ é uma transformação linear se:

- $\forall u,v \in E \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$
- $\forall u \in E, \sigma \in \mathbb{R} \quad T(\sigma u) = \sigma . T(u)$

Alternativamente: $T: E \to F$ é linear se:

- $\forall u,v \ , \ \forall \sigma, \beta \in \mathbb{R}$
- $T(\sigma u + \beta v) = \sigma . T(u) + \ T(\ )$

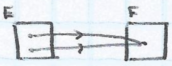
→ Prop.s:

1 - $T(0_E) = 0_F$, porque $0.0_E = 0 \Leftrightarrow T(0.0_E) = 0.T(0_E)$

2 - $T(u) + T(-u) = 0 \qquad \Leftrightarrow T(0_E) = 0_F$

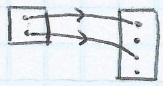
Notas:

- T é injetiva, $\forall u,v \in E$, $u \neq v$ então $T(u) \neq T(v)$



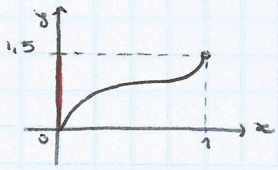
não é injetiva

- T é sobrejetiva, $\forall w \in F \ \exists u \in E : T(u) = w$



não é sobrejetiva

- T é bijetiva, se for injetiva e sobrejetiva



é bijetiva

- T diz-se um isomorfismo, se for linear e bijetiva

→ Mais geralmente

$$T(x_1, \dots, x_n) = A \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$T(x) = Ax$

$T(x) = x$ → transformação pela identidade

A matriz $m \times n$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear

→ Prop.s: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear se:

1 - $T(v_1), \dots, T(v_p)$ são l.i $\Rightarrow v_1, \dots, v_p$ são l.i

$\sigma_1 . v_1 + \dots + \sigma_n . v_n = 0$

$\Leftrightarrow T(\sigma_1 . v_1) + \dots + T(\sigma_n . v_n) = T(0)$

$\Leftrightarrow \sigma_1 . T(v_1) + \dots + \sigma_n . T(v_n) = 0$

$\to d_1 = \dots = \sigma_n = 0$

2 - Se $\{v_1, \dots, v_p\}$ é uma base de V, então $T(v_1), \dots, T(v_p)$ determinam a transformação linear de T.

Se $v \in V$

$v = \sigma_1 . v_1 + \dots + \sigma_p . v_p$

$\Leftrightarrow T(v) = \sigma_1 . T(v_1) + \dots + \sigma_p . T(v_p)$

3 - Qualquer espaço da dimensão de n é isomorfo de $\mathbb{R}^n$.

V esp. vect. dim n

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V

- $T(v_1) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
- $T(v_2) = e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$
- $T(v\ ) = e_n = (0, \dots, 0, 1)$

- $T: V \to \mathbb{R}^n$
- Está completamente definida (prop.2 causa)
- É linear
- T é uma bijeção

$v = \sigma_1 . v_1 + \dots + \sigma_n . v_n$

e $T(v) = \sigma_1 . \underbrace{T(v_1)}_{e_1} + \dots + \sigma_n . \underbrace{T(v_n)}_{e_n}$

$= (\sigma_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, \sigma_n)$

(=) $T(v) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

→ T é injetiva:

se $T(w) = T(z)$

$w = \beta_1 . v_1 + \dots + \beta_n . v_n$ $\quad T(w) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$z = \sigma_1 . v_1 + \dots + \sigma_n . v_n$ $\quad T(z) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

$\sigma_i = \beta_i \,, \; \forall i = 1, \dots, n$

então $z = w$

→ T é sobrejetiva

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$x = T\underbrace{(x_1 . v_1 + \dots + x_n . v_n)}_{\in V}$

→ Representação matricial de transformações lineares

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformações lineares , base C

Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base $\mathbb{R}^n$

$v = \sigma_1 . v_1 + \dots + \sigma_n . v_n$

$T(v) = \sigma . T(v_1) + \dots + \sigma_n . T(v_n)$

$$[T(v)]_C = \begin{bmatrix} T(v_1) & \dots & T(v_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \dots \\ \sigma_n \end{bmatrix}$$

escritos na base C

→ $[M_T]_{CB}$

→ Geral

De um modo geral,

$$\begin{array}{ccccc} & T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m & \\ \text{(bases} & & B \downarrow & & \uparrow C & \text{(bases} \\ \text{de } \mathbb{R}^n) & & B' & \longrightarrow & C' & \text{de } \mathbb{R}^m) \end{array}$$

$$\boxed{[M_T]_{C'B'} = M_{C' \leftarrow C} . [M_T]_{CB} . M_{B \leftarrow B'}}$$

→ Composição de transformações lineares

$T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$

linear $\qquad$ linear

composição T_1, T_2:

$T_2 \circ T_1 : U \to W$

$T_2 \circ T_1 (u) = T_2(T_1(u))$

→ Prop.[3]: $T_2 \circ T_1$ é linear

- $T_2 \circ T_1 (u_1 + u_2) = T_2(T_1(u_1 + u_2)) = T_2(T_1(u_1) + T_1(u_2))$
- $T_2 \circ T_1 (\sigma u) = T_2(T_1(\sigma u)) = \sigma(T_2(T_1(u))) = \sigma . T_2 \circ T_1$
- $T_2 \circ T_1 (u) = T_2(T_1(u)) = T_2([M_T]_{CB} . u) = [M_{T_2}]_{DC} . [M_{T_1}]_{CB} . u$

$\overset{B}{U} \xrightarrow{T_1} \overset{C}{V} \xrightarrow{T_2} \overset{D}{W}$, $\;T_2 \circ T_1$

$$\boxed{[M_{T_2 \circ T_1}]_{DB} = [M_{T_2}]_{DC} [M_{T_1}]_{CB}}$$

* ver pg.15

→ Transformação inversa

Def.: Se $T : U_B \to V_C$ transf. linear,
$T^{-1} : Im(U) \subset V \to U$
é tal que $T^{-1} = T(u) = u$
T^{-1} chama-se <u>transformação inversa</u> de T

→ <u>Prop.s</u>:
- T^{-1} é linear
- $M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1}$

⊛

→ Composição de transformações lineares

$T_1 : U_B \to V_C$, $T_2 : V \to W_D$ bases dos respetivos esp. vect.
$u \in V$

$T_2(T_1(u)) = T_2 \circ T_1(u)$ é <u>linear</u>

$[T_1(u)]_C = [M_{T_1}]_{CB} [u]_B$

$[T_2(v)]_D = [M_{T_2}]_{DC} . [v]_C$ $\quad v = T_1(u)$

$$[T_1 \circ T_2] = \underbrace{[M_{T_2}]_{DC} [M_{T_1}]_{CB}}_{[M_{T_1 \circ T_2}]_{DB}} [u]_B$$

→ <u>Espaço de polinómios</u> (exercício)

No espaço de polinómios considerar as seguintes transformações lineares:
$(Dp)(t) = p'(t)$, $D : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1}$
$(Mp)(t) = t . p(t)$, $M : \mathbb{P}_{n-1} \to \mathbb{P}_n$

$\mathbb{P}_n \xrightarrow{D} \mathbb{P}_{n-1} \xrightarrow{M} \mathbb{P}_n$

$\mathbb{P}_{n+1} \xrightarrow{M} \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$

$T : U \to V$ transformação linear
$Im(T) \in V = \{T(u) : u \in U\}$

Se U tem uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$
$Im(T)$ é o subespaço vetorial de U que é gerado por $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ ⚠ pode não ser uma base

$$[M_T]_{CB} = \underbrace{\begin{bmatrix} T(u_1) & \cdots & T(u_n) \end{bmatrix}}_{A} \text{ escritos na base C}$$

$Im(T) = Col(A)$
$car(A)$

$T : U \to V$ transformação linear
$\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ em U, se $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_p)\}$ forem l.i.

→ <u>Prop.</u>
- T é invertível se e só se $\forall \{v_1, \dots, v_p\}$ de V forem l.i. $\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$ são l.i.

T é <u>invertível</u> $\Leftrightarrow$ T é <u>injetiva</u> $\Leftrightarrow$ $Nuc(T) = \emptyset$

<u>Reciprocamente</u>:
Se T transforma vetores l.i. em vetores l.i., então vamos provar que T é invertível, provando que $Nuc(T) = 0$.

Ora se $Nuc(T) \neq \emptyset$, seja $u \in Nuc(T)$, $u \neq 0$

$\{u\} \rightarrow \{T(u) = 0\}$
li não são li

$n = \dim U$

$$\boxed{n = \dim Im(T) + \dim Nuc(T)}$$

Se $T: U \rightarrow V$:
$\quad$ dim n $\quad$ dim n

- É injetiva, $n = n + 0$ $\quad \dim Im(T) = 0$
  então é sobrejetiva
- É sobrejetiva,
  então T é injetiva
- É invertível, se e só se T transforma bases de U em bases de V

→ Imagem e Núcleo de uma transformação linear

$T: U \rightarrow V$ transformação linear
$B = \{v_1, \dots, v_p\}$
$C = \{u_1, \dots, u_p\}$

$Im(T) = \{T(u) : u \in U\} \subset V$ → é um subespaço vetorial de V

$A = [M_T]_{CB}$

$[T(u)]_C = A[u]_B$

$Im(T) = Col(A)$ $\qquad$ T é sobrejetiva se $Im(T) = V$
$\qquad \dim Col(T) = car(T)$

$$A = \begin{bmatrix} T(u_1) & T(u_2) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$u = \sigma_1 . u_1 + \dots + \sigma_p . u_p \Leftrightarrow \underline{T(u)} = \sigma_1 . \underline{T(u_1)} + \dots + \sigma_p . \underline{T(u_p)}$
$\in \dim Im(T)$

$Nuc(T) = \{u \in U : T(u) = 0\} \subset U$ $\quad [Nuc(T) = Ker(T)]$

É um subespaço vetorial de U:
- $0 \in Nuc(T)$ $\quad T(0) = 0$
- $u, v \in Nuc(T)$ $\quad T(u) = 0 = T(v)$

Então $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0$, logo
- $u + v \in Nuc(T)$
- $u \in Nuc(T)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ → $T(u) = 0$
- $\sigma u \in Nuc(T)$ $\quad T(\sigma u) = \sigma T(u) = 0$

$T(u) = 0 \Leftrightarrow Au = 0$
$u \in Nuc(T) \Leftrightarrow u$ é solução do sistema linear homogéneo associado a A.

$Nuc(T) = Nuc(A)$
$\dim Nuc(T) = nul(A)$

$T: U \rightarrow V$
$\quad$ dim n $\quad$ dim n

$\dim U = \dim Nuc(T) + \dim Im(T)$
$n = nul(A) + car(A)$

- T é injetiva $\Leftrightarrow T(u) = T(u') \Rightarrow u = u'$
$\Leftrightarrow \underbrace{T(u) - T(u')}_{T(u-u')} = 0 \Rightarrow u - u' = 0$

- T é injetiva $\Leftrightarrow Nuc(T) = \{0\}$

$A = [M_T]_{CB} \Leftrightarrow Nul(A) = \{0\}$
$\Leftrightarrow$ O sist. linear $Au = 0$ só tem soluções nula, ou seja, é possível e determinado.

Se T é injetiva, podemos transformar T para a sua inversa $T(T^{-1})$, tal que:
- $T^{-1}: Im(T) \to U$
- $T^{-1}(T(u)) = u$

São equivalentes as afirmações:
- T é injetiva
- Existe T^{-1}
- $Nuc(T) = \{0\}$
- $Nuc(M_T) = \{0\}$
- $nul(M_T) = 0$

$T(u) = Au$
$A^{-1}.T(u) = u$, ou seja, $[M_{T^{-1}}]_{BC} = [M_{T^{-1}}]_{CB}$

Exº:
$D: \underset{\dim n+1}{P_n} \to \underset{\dim n}{P_{n-1}}$
$D(p(t)) = p'(t)$ transformação linear
É injetiva? Não.
$Nuc(D) = \{p(t) \in P_n : p'(t) = 0\} \neq \{0\}$
teste 2º → Porque todos os polinómios constantes Nuc nulo. É sobrejetiva

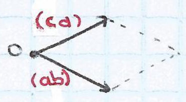
→ Determinantes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \mapsto L_2 - \frac{aL_1}{c}]{} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & (d - \frac{c}{a}b) \end{bmatrix} \quad (\text{se } a \neq 0)$$

A matriz é invertível se $ad - cb \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Determinantes da matriz A = Área paralelogramo



Escreve-se $\boxed{\det(A) = ab - bc = |A|}$

→ Propº:
1) $\det\left(\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}\right) = cb - ad = -\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$

2) $\det\left(\begin{bmatrix} \sigma a & \sigma b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \sigma ad - \sigma bc = \sigma(ad - bc) = \sigma . \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$

3) $\det_{\sigma \in \mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ (\sigma a + c) & (\sigma b + d)\end{bmatrix}\right) = a(\sigma b + d) - b(\sigma a + c)$
$= ad - bc + \sigma ab - \sigma ac$

4) $\det(\sigma A) = \det\left(\begin{bmatrix} \sigma a & \sigma b \\ \sigma c & \sigma d\end{bmatrix}\right) = \sigma^2 (ad - bc) = \sigma^2 . \det(A)$

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

$c_{ij} = (-1)^{i+j} . \det A_{ij}$ — (ij) - coeficientes da matriz A → cofatores da matriz A

A_{ij} a matriz que se obtém retirando a A a linha i e coluna j.

$A_{n \times n}$ $\boxed{\det(A) = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + \dots + a_{1n}.C_{1n}}$

Relembrar que se $\det(A) \neq 0$, sse A é invertível — Regra de LaPlace

Tem-se Regra de LaPlace:

$\det(A) = a_{11}.C_{11} + \dots + a_{1n}.C_{1n} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{in} . C_{ik}}$ com linha i qualquer

→ Props.:
1) Se A tem duas linhas iguais, então $\det(A) = 0$;
2) Se A tem linha nula, então $\det(A) = 0$;
3) $\det(A) = \det(A^T)$.

porque neste caso A não é invertível, logo, não tem pivôs suficientes.

$\det(I_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{1}$

Se a matriz for escada por linhas

$\det \begin{bmatrix} \boxed{a} & b & c \\ 0 & \boxed{d} & e \\ 0 & 0 & \boxed{f} \end{bmatrix} = f . \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = f.a.d.$

Então o determinante é o produto dos elem. da diagonal.

→ Props. (dos determinantes)

Determinante do produto

Transfº elem. sobre linhas de uma matriz $A_{n \times n}$

- Troca de linhas: $E_1 A$, E_1 matriz elementar onde se troca duas linhas à I_n. $\det(E_1.A) = -\det(A)$
$= \det(E_1).\det(A) = -1$
- Multiplicar σ por uma linha: $E_2.A$; E_2 matriz elem. onde se multiplica uma linha de I_n a σ.
$\det(E_1.A) = \sigma.\det(A)$
$= \underbrace{\det(E_1)}_{\sigma}.\det(A)$
- 3º tipo de transformações: $\det(E_3.A) = \det(E_3).\det(A)$

→ Props.: $\det(AB) = \det(A).\det(B)$

- ou A não é invertível → neste caso AB não é invertível
$\det(\overset{=0}{AB}) = \det(\overset{=0}{A}).\det(B) = 0$
- ou A é invertível → $A = E_1 \dots E_p . I_n$
$AB = E_1 \dots E_p . I_n \; B$
$\Leftrightarrow \det(AB) = \det(E_1) \dots \det(E_p)$.
$\Leftrightarrow \det(AB) = \det(A).\det(B)$

Determinante da Soma $\quad \det(AB) \neq \det(A) + \det(B)$

$$\det\begin{bmatrix} a & b+b' \\ \cancel{x}c & d+d' \end{bmatrix} = a(d+d') - c(b+b') = (ad-bc)+(ad'-b'c)$$
$$= \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a & b' \\ c & d' \end{bmatrix}$$

Se A é invertível, $A \cdot A^{-1} = I_n$

$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$

como $\det(A) \neq 0$, $\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$

→ Matriz dos Cofatores

$A_{n \times n}$ $\quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$

onde A_{ij} é a matriz que se obtém de A retirando a linha i e a coluna j.

A matriz dos cofatores de A: $[C]_{ij} = C_{ij}$

→ Props.: $A_{n \times n}$ $\quad A \cdot \underbrace{[\text{Cof } A]^T}_{\text{matriz adjunta}} = \det(A) \cdot I_n$

→ Consequência importante

Se A é invertível, então $\det(A) \neq 0$:

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot A [\text{Cof } A]^T = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = \det(A) \cdot [\text{Cof } A]^T$$

$$(A[\text{Cof } A]^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (\text{Cof } A)^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (\text{Cof } A)_{jk}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det A_{jk} \begin{cases} \det A & \Leftarrow i = j \\ 0 & \Leftarrow i \neq j \end{cases}$$

porque o determinante de uma matriz com linha igual à linha j

$n \times n$ $\quad Ax = b$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$

sist. linear

A é invertível (sist. possível e determinado)

$A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot b$

$\Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$

→ Regra de Cramer

O sistema $Ax = b$, onde $A_{n \times n}$ é invertível tem como solução

$x = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Cof}(A)]^T$, isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}$$

→ Propriedades

→ Prop. 1:

Se $A_{n\times n}$, n é ímpar e $A = A^T$, então $\det A = 0$

Dem.:

$\det(A) = \det(A^T)$
$= (-1)^n \cdot \det(A^T)$
$= -\det(A)$ ⇒ $\det(A) = 0$

→ Prop. 2:

Se $A_{n\times n}$ é tal que $A^{-1} = A^T$ (matrizes ortogonais)
$\det(A) = \pm 1$

Dem.:

$\det(A^{-1}) = \det(A^T)$
⇔ $\frac{1}{\det(A)} = \det(A)$
⇔ $[\det(A)]^2 = 1$

→ Prop. 3:

Duas matrizes A e B ($n\times n$) dizem-se semelhantes se existe uma matriz invertível M tal que, $\boxed{B = M^{-1} A M}$
Neste caso, $\det A = \det B$

Dem.:

$\det(B) = \det(M^{-1}) \times \det(A) \times \det(M) = \det(A)$

→ Vetores próprios e valores próprios

$A_{n\times n}$ matriz quadrada

Def.: Se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{v \neq 0}$ e um número $\boxed{\lambda}$ tal que, $\boxed{Av = \lambda v}$ diz-se <u>v</u> é um <u>vetor próprio</u> de A e o <u>λ valor próprio</u> correspondente.

$\boxed{\lambda}$ é um número real complexo.

Def.: O conjunto dos valores próprios de A, chama-se <u>espetro</u> de A, e escreve-se $\boxed{\sigma(A)}$

$\boxed{v}$ vetor próprio de A, $\boxed{\lambda}$ o correspondente valor próprio.
$v \neq 0$

$Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (A - I\lambda)v = 0 \Leftrightarrow v \neq 0$ é a solução do sist. homogéneo. ⇔ O sist. não é determinado ⇔ $\boxed{\det(A - I\lambda) = 0}$

Em resumo:

$\vec{v}$ é vetor próprio de $A_{n\times n}$ e λ o valor próprio correspondente, se e só se $\underline{\det(A - I\lambda) = 0}$.

eq. característica da matriz A

$$\det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad \boxed{(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0}$$

$$\det\begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) \end{bmatrix} = (a_{11}-\lambda)\left((a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - (a_{23} \cdot a_{32})\right) + \dots +$$
$-\lambda^3$ + termos de maior grau em λ

Se λ é valor próprio de $A \Rightarrow \exists \vec{v} \neq 0 : A\vec{v} = \lambda \vec{v}$
$(A - I\lambda)\vec{v} = 0$
$\vec{v}$ é a solução deste sistema (homogéneo) $\Leftrightarrow$
$\boxed{\vec{v} = Nul(A - \lambda I)}$
valor próprio associado

Def.: Chama-se espaço próprio associado ao valor próprio λ ao espaço vetorial.

$\boxed{E(\lambda) = Nul(A - I\lambda)}$ que é espaço vetorial dos vetores próprios associados ao vetor próprio λ.

→ Valores próprios de vetores próprios de A $n \times n$.

$v \neq 0$ é o vetor de A se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - I\lambda)v = 0$
eq. car. $A \rightarrow \Leftrightarrow \det(A - I\lambda) = 0$
$\Leftrightarrow$ o sist. homogéneo $(A - \lambda I) = 0$ tem uma solução não nula. $\Leftrightarrow Nul(A - I\lambda) \neq \{0\}$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ← polinómio característico (de grau n)

$E(\lambda) = Nul(A - \lambda I)$ ← espaço próprio λ
$= \{$ vetores próprios associados a λ mais o vetor nulo $\}$

Def.: Se $\boxed{p(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k \cdot \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_j}}$

Ao mínimo k chama-se <u>multiplicidade algébrica</u> do valor próprio λ

Aparte: $a_1 + \dots a_n = \sum_{k=1}^{n} a$ $\qquad a_1 \times \dots \times a_n = \prod_{k=1}^{n} a$

Def.: $\dim(E(\lambda_1))$ chama-se <u>multiplicidade geométrica</u> de λ_1.

→ Propriedades:

→ Prop. 1:
A $n \times n$ matriz real
Se v vetor próprio com λ valor próprio associado
$Av = \lambda v$, $v \neq 0$
$\overline{A}\,\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$
$A\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$, então $\boxed{\overline{\lambda}}$ também é valor próprio de A.

→ Prop. 2:
Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores próprios de A (tudo distintos) e $v_1, \dots, v_n$ vetores próprios associados.
Então $\{v_1, \dots, v_n\}$ são l.i.
$\boxed{\exists\, v_j = \underbrace{\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_{j-1} \cdot v_{j-1}}_{l.i.}}$

→ Diagonalização de matrizes

Def.: $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ dizem-se semelhantes se existe $P_{n\times n}$ invertível tal que $\boxed{A = P.B.P^{-1}}$
e A diz-se diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal, ou seja, ∃ P invertível e D diagonal : $\boxed{A = PDP^{-1}}$

Se A e B são semelhantes,

$$\det(A-\lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1})$$
$$= \det(P(B-\lambda I).P^{-1})$$
$$= \det(P).\underbrace{\det(B-\lambda I)}_{\text{pol. car. } B}.\det(P^{-1})$$

Então, A e B têm os mesmos valores próprios.

→ Propriedade: A é diagonalizável ⇔ $D \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$, com $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores próprios de A.

Para além disto, as colunas da matriz P formam uma base constituída por vetores próprios de A.

$A = [c_1 \dots c_n]$ $\quad A = PDP^{-1}$ $\quad AP = [Av_1 \dots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n] = PD$

$P = [v_1 \dots v_n]$ $\quad AP = PD$ $\quad$ portanto, $Av_1 = \lambda_1 v_1$

...

$Av_n = \lambda_n . v_n$

→ Proposições:

→ Prop. 1: Não é diagolizável ⇔ Soma das multiplicidades geométricas dos seus próprios valores próprios for igual a n

→ Prop. 2: Mul. geométrica de λ_1 ≤ mul. algébrica de λ_2

Notas:

- É diagonalizável se mul. geo de λ_1 + mul. geo. de λ_2 $= n \to A_{n\times n}$
- vetores próprios associados a valores próprios diferentes são l.i.

$A = \boxed{S}\,D\,\boxed{S^{-1}}$ → M diagonal

qualquer

MMB

det A = ?
tr A = ?

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_3 & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\det D = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \overset{?}{=} \det A$

$\det A = \det SDS^{-1} = \cancel{\det S}.\det M.\frac{1}{\cancel{\det S}}$

$\operatorname{tr} D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 = \operatorname{tr} A$

→ Valores próprios complexos

Matriz: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$p(\lambda) = \det(A - I\lambda) = 0$

polinómio de grau n

Nota: Soluções - Teorema fundamental da Álgebra: n soluções

Ver exemplos aula

$$A \vec{v_1} = \lambda \vec{v_1}$$

$A \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v_1} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $\vec{v_1} \in \mathbb{C}^n$ $\boxed{\lambda \in \mathbb{C}}$

$\lambda \in \mathbb{C}$ - valor próprio <u>complexo</u>

$\vec{v_1} \in \mathbb{C}^n$ - vetor próprio <u>complexo</u>

$$\overline{A \vec{v_1}} = \overline{\lambda \vec{v_1}}$$

$\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ valor próprio <u>complexo</u>

$\bar{\vec{v_1}} \in \mathbb{C}^n$ vetor próprio <u>complexo</u>

→ Produto Interno e Ortogonalidade

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

→ Produto Interno

$\vec{x} . \vec{y}$

$\langle \vec{x} . \vec{y} \rangle = x_1 . y_1 + \dots + x_n . y_n$

$\vec{x}^T . \vec{y}$

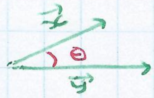
$\mathbb{R}^2$ - <u>Coordenadas Polares</u>

$\vec{x} = (x_1, x_2) = (r_1 \cos \theta_1, r_1 . \sin \theta_1)$

$\vec{y} = (y_1, y_2) = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2)$

$\vec{x} . \vec{y} = r_1 . r_2 (\cos \theta_1 . \cos \theta_2 + \sin \theta_1 . \sin \theta_2)$

$= \underline{r_1} . \underline{r_2} . \cos \underline{(\theta_1 - \theta_2)}$



→ Propriedades:

- $\vec{x} . \vec{y} = \vec{y} . \vec{x}$
- linear
- $\vec{x} . \vec{x} \geq 0$
- $\vec{x} . \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$

<u>Norma</u>

$\| \vec{x} \| = \sqrt{\vec{x} . \vec{x}}$ $\| \vec{u} \| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$

$\vec{x} . \vec{y} = \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| . \cos \theta$

<u>Distância</u>

$d(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|$

<u>Ângulo</u>

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} . \vec{y}}{\| \vec{x} \| . \| \vec{y} \|} \Leftrightarrow \theta = \arccos \frac{\vec{x} . \vec{y}}{\| \vec{x} \| . \| \vec{y} \|}, \quad \vec{x}, \vec{y} \neq 0$$

→ Propriedades norma:

- $\| \vec{x} \| \geq 0$
  - $\| \vec{x} \| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $\| \alpha \vec{x} \| = |\alpha| \| \vec{x} \|$

(1) $| \vec{x} . \vec{y} | \leq \| \vec{x} \| . \| \vec{y} \|$ → Cauchy - Shwarz

(2) $\| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|$ → Desigualdade triangular

<u>Dem. 1</u>:

$(\vec{x} . \vec{y})^2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = \cancel{x_1^2 . y_1^2} + \boxed{2 x_1 y_1 x_2 y_2} + \cancel{x_2^2 y_2^2}$

$\| \vec{x} \|^2 . \| \vec{y} \|^2 = (x_1^2 + x_2^2) * (y_1^2 + y_2^2) = \cancel{x_1^2 y_1^2} + \boxed{x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} + \cancel{x_2^2 y_2^2}$

$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

Dem. 2:

$\|\vec{x}+\vec{y}\| = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \leq$

$\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\| = [\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|]^2$ ✓

→ Vetores Ortogonais

$\vec{x}, \vec{y}$ $\quad \vec{x} \perp \vec{y}$ sse $\boxed{\vec{x}.\vec{y} = 0}$

• Teorema de Pitágoras

se $\vec{x}.\vec{y} = 0 \Rightarrow \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$

U, V Espaços Vetoriais

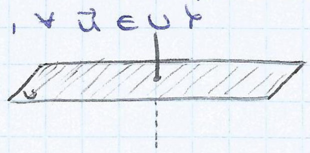
$U \perp V$ Ortogonais sse $\forall \vec{u} \in U \ \forall \vec{v} \in V \quad \vec{u}.\vec{v} = 0$

$U \in \mathbb{R}^n$,

$\boxed{\dim U + \dim U^\perp = n}$

U - espaço vetorial ⇒ Complemento Ortogonal

$U^\perp = \{\vec{v} \mid \vec{v}.\vec{u} = 0, \forall \vec{u} \in U\}$



→ Ortogonalidade

2 vetores dizem-se ortogonais (ou perpendiculares) se $u.v = 0$

$U \in \mathbb{R}^n$ subespaço vetorial, chama-se <u>complemento ortogonal de U</u> ao subespaço vetorial:

$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v.u = 0, \forall u \in U\}$

→ Propriedades

• $(U^\perp)^\perp = U$

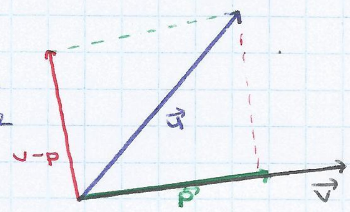
• $U^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

• U e $U^\perp$ são ortogonais entre si, porque se $u \in U$ e $v \in U^\perp$, então $u.v = 0$.

→ Projecção Ortogonal

<u>Def.</u>: A projecção ortogonal de um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ sobre um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$ é o vetor p que tem a direcção de v, tal que:

$\boxed{(u-p) \perp v}$



u, v dados por: $\boxed{p = Kv}$

$u - p = u - K.v$, perpendicular a v, ou seja, $(u - Kv)v = 0$

$\Leftrightarrow v.u - K\frac{v.v}{\|\vec{v}\|^2} \Leftrightarrow \boxed{K = \frac{u.v}{\|\vec{v}\|^2}}$, se $v \neq 0$

Portanto, $p = \boxed{\text{proj}_v u = \frac{(u.v)}{\|\vec{v}\|^2}.v}$, $v \neq 0$

<u>Def.</u>: Um conjunto de vetores $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ diz-se <u>ortogonal</u> se $u_i . u_j = 0$, $\forall i \neq j$ e diz-se <u>ortonormado</u> se for ortogonal, além disso, $\forall i \ \|\vec{u}_i\| = 1$

Se o conjunto for uma base, diz-se respetivamente que é uma base ortogonal e no segundo caso uma base ortonormada.

Em geral, $v \neq 0$ $\frac{v}{\|\vec{v}\|}$ tem norma 1

Dem.: $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$

→ Propriedades:

→ Prop. 1:

Qualquer conjunto ortogonal (que não contenha o vetor é l.i.

$\{u_1, \dots, u_k\}$ é l.i.

$\alpha_1 . u_1 + \dots + \alpha_k . u_k = 0$

Seja o vetor u_i:

$(\alpha_1 . u_1 + \dots + \alpha_k . u_k) . u_i = 0$

Por outro lado,

$(\alpha_1 . u_1 + \dots + \alpha_k u_k) u_i = \alpha_1 (u_1 u_i) + \dots + \alpha_k (u_k u_i)$

$= \alpha_i (u_i . u_i) = \alpha_i \|u_i\|^2$.

Portanto,

$\alpha_i . \|u_i\|^2 = 0$, logo $\alpha_i = 0$ e $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

→ Prop. 2:

Seja $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^n$.

Então $x \in \mathbb{R}^n$.

$x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

$x . u_i = \alpha_1 (u_1 . u_i) + \dots + \alpha_n (u_n . u_i)$

$= \alpha_i (u_i . u_i)$

$= \alpha_i . \|u_i\|^2$

Portanto, $p = proj_v u = \frac{(u . v)}{\|v\|} . v$, $v \neq 0$

Logo que se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x = \frac{(x . u_1)}{\|u_1\|^2} . u_1 + \dots + \frac{(x . u_n)}{\|u_n\|^2} . u_n$$

$$\boxed{x = proj_{u_1} x + \dots + proj_{u_n} x}$$

Def.: $S \subset \mathbb{R}^n$ subespaço vetorial, $x \in \mathbb{R}^n$

$proj_S x = proj_{v_1} x + \dots + proj_{v_n} x$

Sendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal de S.

$x \in \mathbb{R}^n$,

$$proj_S x = proj_{v_1} x + \dots + proj_{v_e} x$$
$$= \frac{(x_1 . v_1)}{\|v_1\|^2} . v_1 + \dots + \frac{(x_e . v_e)}{\|v_e\|^2} . v_e$$

→ Propriedade:

$proj_S x \in S$ e $x - proj_S x \in S^{\perp}$ → Seja v_i:

$$i (x . v_i) v_i =$$
$$= (x_i . v_i) - \left[\frac{(x_i . v_i)}{\|v_i\|^2} . v_i + \dots + \frac{(x_e v_e)}{\|v_e\|^2} . v_e \right] . v_i$$
$$= (x_i . v_i) - \frac{(x_i . v_i)}{\cancel{\|v_i\|^2}} \cancel{v_i . v_i}$$
$$= (x . v_i) - (x - v_i)$$

Portanto, por combinação linear $x - x_S$ é ortogonal a todos os vetores de S.

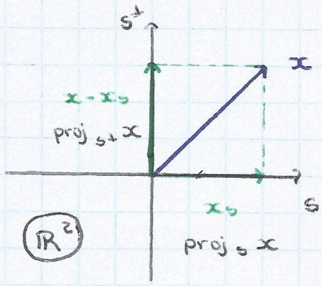
$x \in \mathbb{R}^n$

$x = x_s + (x - x_s)$

$x - x_s \rightarrow \text{proj}_{S^\perp} x$

distância de x a um sub. esp. vet. de S

$\boxed{d(x, S) = \| x - \text{proj}_S x \|}$



$\mathbb{R}^2$

→ Método de Gram-Schmidt

Problema : $\{u_1, \dots, u_k\}$ base de um subespaço vetorial. $S \subset \mathbb{R}^n$ não é ortogonal).
Queremos uma base ortogonal.
$\{v_1, \dots, v_k\}$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - \text{proj}_{v_1} . u_2 \\ v_3 &= u_3 - \text{proj}_{v_1} \cdot u_3 - \text{proj}_{v_2} u_3 \\ &\dots \\ v_k &= u_k - \text{proj}_{v_1} u_k - \text{proj}_{v_2} u_k - \dots - \text{proj}_{k-1} u_k \end{aligned}}$$

Exemplo :

$$\begin{aligned} v_1 . v_2 &= u_1 (u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2) \\ &= u_1 . u_2 - u_1 . \frac{(u_2 . v_1)}{\| v_1 \|^2} . v_1 \\ &= v_1 . u_2 - \frac{u_2 . v_1}{\| v_1 \|^2} . (v_1 . v_1) \\ &= (v_1 . u_2) - (u_2 . v_1) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{v_1 \perp v_2}$

$\forall_i$, $\boxed{u_i - \underbrace{\text{proj}_{L\{v_1, \dots, v_{i-1}\}} u_i}_{\text{é ortogonal}} = v_i}$ é ortogonal a $v_1, \dots, v_{i-1}$

→ Complemento Ortogonal - $U^\perp$

- $\text{Nul } A = (\text{Col } A^T)^\perp$
- $\text{Nul } A^\perp = (\text{Col } A)^\perp$
- Matriz Ortogonal $(A^T = A^{-1})$

Def. : U - subespaço de $\mathbb{R}^n$
$U^\perp = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \cdot x = 0 , x \in U \}$ Nota : $\vec{u} = \underline{u}$

→ Propriedades
U : subespaço de $\mathbb{R}^n$
$U^\perp$: complemento ortogonal de U
Então :
- $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$
- $U \cap U^\perp = \{\underline{0}\}$
- $\dim U + \dim U^\perp = n$

Def. : A é ortogonal quando $A^{-1} = A$

→ Propriedade (importante):
A é $n \times n$ e as colunas de A formam uma base ortonormada.

→ Teorema das matrizes ortogonais
Seja A (matriz ortogonal), então :
- $(A \underline{x}) \cdot (A y) = x \cdot y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ → A não altera produto interno
- $\| A x \| = \| x \|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ → A não modifica o comprimento vetor

→ Matriz (quadrada) ortogonal - se $A^{-1} = A^T$

Def.: Uma matriz A (quadrada) diz-se 'OD' (ortogonalmente diagonalizável) se for semelhante a uma matriz semelhante a uma matriz diagonal D, ou seja, $\boxed{A = PDP^{-1}}$, com P ortogonal.

→ Teorema
- O espectro é real.
- Os espaços são ortogonais entre si.
- A é OD.

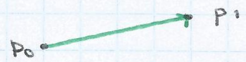
→ Geometria dos K-planos

Def.: $p_0, p_1, \dots, p_K$ com $K+1$ pontos

Chama-se K-plano que passa por estes pontos ao conjunto:

$$\boxed{\{p_0\} + Sp\{\underbrace{p_1 - p_0, \dots, p_K - p_0}_{\text{direcções K plano}}\}}$$

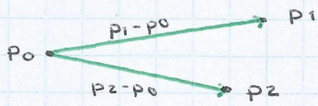
se $K = 1$ (2 pontos)
→ reta



→ K-plano que passa por p_0 e tem direcções $v_1, \dots, v_K$.

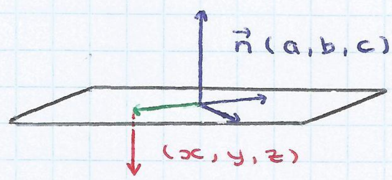
→ Os K-planos não têm que passar na origem.
Se não passarem, só não são espaços vetoriais.

se $K = 2$ (3 pontos)
→ plano



→ Equações cartesianas do K-plano

No caso de um 2-plano, a eq. cartesiana é dada por:
$$((x, y, z) - p_0) \perp n$$



Eq. cartesiana K-plano que passa por $p_0, \dots, p_K$ ou que passa por p_0 e tem direcção $u_1, \dots, u_K$

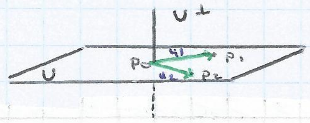
$\boxed{P_K = \{p_0\} + U}$

$U = \text{Span}\{p_1 - p_0, \dots, p_K - p_0\}$
$U = \text{Span}\{u_1, \dots, u_K\}$

Calcula-se $U^\perp = \text{Span}\{w_1, \dots, w_{n-K}\}$

Eq.s cartesianas do K-plano:
$$\boxed{[(x_1, \dots, x_n) - p_0] \cdot w_j = 0}, \ \forall j = 1, \dots, n-K$$

→ Distância entre K-planos



Eq. paramétricas de um K-plano:
$$\boxed{p = \{p_0\} + U = \{p_0\} + \text{Span}\{u_1, \dots, u_K\}}$$

Um K-plano passa por $p_0, p_1, \dots, p_K$, as direcções são: $u_1 = p_1 - p_0, \dots, u_K = p_K - p_0$

Eq. cartesianas de um K-plano:

Base de $U^\perp = \{w_1, \dots, w_{n-K}\}$

$p = (x_1, \dots, x_n)$

$$\boxed{\begin{array}{l} (p - p_0) \cdot w_1 = 0 \\ \dots \\ (p - p_0) \cdot w_{n-K} = 0 \end{array}}$$

Distância entre p e o K-plano P_K

$$\boxed{d(p, P_K) = \|\text{proj}_{U^\perp}(p - p_0)\|}$$

Distância entre dois K-planos

$P_K = \{p_0\} + U \qquad Q_C = \{q_0\} + V$

$$\boxed{d(P_K, Q_C) = \|\text{proj}_{(U+V)^\perp}(p_0 - q_0)\|}$$