$|\lambda| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

...onamento

$A-(2-3i)I = \begin{bmatrix} -1+3i & 5 \\ -2 & 1+3i \end{bmatrix} \Rightarrow$ SEL

$2x_1 = (1+3i)x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}(1+3i)x_2$

Para $x_2 = 2$, temos: $x_1 = 1+3i$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1+3i \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}\, i$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = P^{-1}AP$$

$$\underbrace{-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \sqrt{13}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2 \pm 3i$ $\qquad \varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$

→ A origem vai ser um repulsor (vap $|\ | > 1$)
trajetórias → espirais para fora

∘ Matrizes com Rotações Escondidas

- Seja A uma matriz real 2x2 com um vap complexo $\lambda = a - bi$ e um vep associado a $\underline{v} \in \mathbb{C}^2$. Então:

$$A = PQP^{-1} \qquad P = [\operatorname{Re}\underline{v}\ \ \operatorname{Im}\underline{v}],\ Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

∘ Matrizes Simétricas

- $A = A^T$
- Procurar os eixos principais = Encontrar os vep da matriz.
- Se a matriz representa uma superfície quadrática, então a superfície está alinhada com os seus eixos.
- $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad A = 5\underline{u}_1\underline{u}_1^T + 2\underline{u}_2\underline{u}_2^T + 2\underline{u}_3\underline{u}_3^T$

∘ Matrizes Diagonais

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

∘ Teorema Diagonalização

- Uma matriz A, $n \times n$, é diagonalizável se e só se tiver n vep $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ linearmente independentes. Escreveremos uma matriz P com estes vep em coluna, então

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

com a matriz D dos vap.

→ Uma matriz $n \times n$ com n vaps distintos é diagonalizável.

- Ordem da Multiplicação:

$AP = PD$ ou $P^{-1}AP = D$ ou $A = PDP^{-1}$

∘ Os vap de A e D são os mesmos, mas os vep não.

- Nos sistemas dinâmicos:

∘ $A^k = (PDP^{-1})^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\ldots DP^{-1} =$
$= PD^kP^{-1}$

- A^k tem os mesmos vep de A. Vap de A^k = vap^k de A.

- Exemplo:

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ A vap: 5, 1 vep: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} 5 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema - Caso vap Distintos

- Vep associados a vap distintos são linearmente independentes.
- Demonstração:

Seja $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $A\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$, $A\underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2$

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 = 0 \xrightarrow{A} c_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + c_2 \lambda_2 \underline{v}_2 = 0$$

$$\xrightarrow{\lambda_2} c_1 \lambda_2 \underline{v}_1 + c_2 \lambda_2 \underline{v}_2 = 0$$

$$A - \lambda_2 = c_1(\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v}_1 = \underline{0} \Leftrightarrow \underbrace{c_1 = 0}_{c_1 = 0} \vee \underbrace{(\cancel{\lambda_1 - \lambda_2}) = 0}_{\text{são distintos } \neq 0} \vee \underbrace{\cancel{\underline{v}_1 = 0}}_{\text{vep logo } \neq 0}$$

Pelo mesmo raciocínio, conclui-se que acontece o mesmo para λ_1, $c_2 = 0$
Então, a combinação linear de $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ é o vetor zero se $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$.

Observações

- Todas as matrizes sem vap repetidos são diagonalizáveis.
- Os vep em P vêm pela mesma ordem que os vap em D
- Existem matrizes não diagonalizáveis

Diagonalizar Matrizes

1. Encontrar vap:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 = -(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2$$

Vap: 5, 1, 1 → multiplicidade algébrica 2
espaço próprio com dimensão 2

2. Encontrar vep LI:

Vep: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$E(1) = \text{Nul} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}^{A - I} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

* A é diagonalizável

3. Construir a matriz dos vep:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Construir a matriz dos vap:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

5. Verificação: $AP = PD$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

...a Diagonalização Ortogonal

Uma matriz simétrica A é sempre ortogonalmente diagonalizável, isto é, existe uma ... ortonormal de vep $v_1, v_2, \dots, v_n$ que constituem as colunas da matriz P e

$A = PDP^T$ com a matriz D dos vap.

- Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vap	Vep
5	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$E(2) = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vep: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (*)

Processo Gram-Schmidt

- Dada uma base $\{x_1, \dots, x_p\}$ para um subespaço não nulo W de $\mathbb{R}^n$ se:

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \times v_1}{v_1 \times v_1} \times v_1$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \times v_1}{v_1 \times v_1} v_1 - \frac{x_3 v_2}{v_2 v_2} v_2$$

$$\vdots$$

$$v_p = x_p - \frac{x_p v_1}{v_1 v_1} v_1 - \frac{x_p v_2}{v_2 v_2} v_2 - \dots - \frac{x_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} v_{p-1}} v_{p-1}$$

então $\{v_1, \dots, v_p\}$ é uma base ortogonal para W, e:

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{x_1, \dots, x_k\} \text{ para } 1 \leq k \leq p$$

(*) Encontrar 3 vep ortonormais

Vap	Vep
5	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Construir a matriz ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

Matriz dos vap

$$D = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema Espectral

- Uma matriz simétrica $A_{n \times n}$ tem:
  - n vap reais, eventualmente repetidos;
  - A multiplicidade algébrica de cada vap é igual à sua multiplicidade geométrica;
  - Espaços próprios associados a vap distintos são ortogonais.
  - Possui uma diagonalização ortogonal.
- Decomposição espectral:
  - $A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T$

Formas Quadráticas

- Se $A = A^T$, então $\underline{x}^T A \underline{x} = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$
- Geometria das Formas Quadráticas:

$\underline{x}^T A \underline{x} =$

$2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 = 1$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Teorema Eixos Principais

- Seja a matriz simétrica A, então existe uma matriz P ortogonal, tal que, $x = Py$ e a forma quadrática $x^T A x$ é equivalente a:

$$y^T D y \quad \text{, com a matriz D dos vap de A.}$$

- Encontrar os Eixos Principais de $\underline{x}^T A \underline{x}$ com

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad p(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1^2 = (1-\lambda)(3-\lambda)$

vap: 3 e 1

vep: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dividir pela norma $\rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 1 \end{bmatrix}$

$y^T D y = 3y_1^2 + y_2^2 = 1$

Matrizes A Simétricas em Equações $x^T A x = c$

- 2×2: elipses, hipérboles e curvas degeneradas
- 3×3: elipsóides, parabolóides hiperbólicos, hiperbolóides, entre outros.

Matrizes A simétricas e Gráficos de Funções

- Se tivermos $\underline{x}^T A \underline{x} = x_3$, com x em $\mathbb{R}^2$, obtemos gráficos de funções de 2 variáveis que serão parabolóides, cones, paraboloides hiperbólicos, entre outros.

Classificação de Formas Quadráticas

- Matriz simétrica A em $\underline{x}^T A \underline{x} = Q(x_1, x_2)$ e (x_1, x_2) e $(x_1, x_2) \neq (0,0)$:
  - $Q(x_1, x_2) > 0$ diz-se definida positiva
  - $Q(x_1, x_2) < 0$ diz-se definida negativa
  - $Q(x_1, x_2)$ toma valores positivos e negativos, diz-se indefinida.

Teorema Formas Quadráticas e vap

- Seja a matriz simétrica A em $\underline{x}^T A \underline{x}$, então a forma quadrática é:
  - Definida positiva se e só se todos os vap de A são positivos;
  - Definida negativa se e só se todos os vap de A são negativos;
  - Indefinida se A tem pelo menos um vap positivo e outro negativo.
  - Formas semi definidas correspondem ao 0 ser vap.

... para verificar o sinal dos vap ...

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \det A = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\left(\begin{matrix} a>0 \\ ac-b^2>0 \\ \text{det} \end{matrix} \right) \qquad \left(\begin{matrix} \text{Pivots} \\ a>0 \\ \frac{ac-b^2}{a}>0 \end{matrix} \right) \Rightarrow$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2>0 \\ 4-1=3>0 \end{matrix} \ \text{det}$$

$$2>0$$

$$\frac{4-1}{2}>0 \ \text{pivot}$$

Propriedades de uma matriz Simétrica Simultaneamente

- Todos os pivots são positivos;
- Todos os determinantes do canto superior esquerdo são positivos;
- Todos os vap são positivos;
- $\underline{x}^T A \underline{x}$ para $\underline{x} \neq \underline{0}$ é positivo;
- $A = R^T R$ com R a matriz das colunas LI.

Sistemas Coordenados

- Seja $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V. Então para cada $\underline{x}$ em V, existe um único conjunto de escalares $c_1, \dots, c_n$ tal que:

$$\underline{x} = c_1 \underline{b}_1 + \dots + c_n \underline{b}_n$$

Definição

- Suponha-se que $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ é uma base para V e que $\underline{x} \in a\ V$. As coordenadas de $\underline{x}$ relativas à base B são os pesos $c_1, \dots, c_n$ tal que $\underline{x} = c_1 \underline{b}_1 + \dots + c_n \underline{b}_n$

$$P_B^{-1} \underline{x} = [\underline{x}]_B \qquad \underline{x} = P_B [\underline{x}]_B$$

Teorema

- Seja $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V, então $\underline{x} \to [\underline{x}]_B$ é uma transformação linear injetiva de V para $\mathbb{R}^n$

- Exemplos:

1. Sejam $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\underline{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) Mostra que $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

b) Encontra a matriz mudança de coordenada de B para uma base standard.

c) Escreve a equação que relaciona $\underline{x}$ em $\mathbb{R}^3$ a $[\underline{x}]_B$.

d) Encontra $[\underline{x}]_B$, para o $\underline{x}$ acima.

a) $P_B = [\underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \underline{b}_3]$ é equivalente à matriz identidade. Pelo teorema das matrizes invertíveis, P_B é invertível e as suas colunas formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

b) $P_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\underline{x} = P_B [\underline{x}]_B$

d) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_{P_B \quad \underline{x}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to [\underline{x}_B] = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $B = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$ é base para $\mathbb{P}_2$. Encontra o vetor coordenada de $p(t) = 6+3t-t^2$ relativamente a B

As coordenadas de $p(t) = 6 + 3t - t^2$:

$$c_1(t+1) + c_2(1+t^2) + c_3(t+t^2) = 6+3t-t^2$$

→ Pela potência det:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 6 \\ c_1 + c_3 = 3 \\ c_2 + c_3 = -1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow [\underline{p}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

○ Mudanças de Base - Teorema

- Seja $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$ bases de um espaço vetorial V, então existe uma única matriz $n \times n$ $\underset{C \leftarrow B}{P}$ tal que

$$[\underline{x}]_C = \underset{C \leftarrow B}{P}[\underline{x}]_B$$

As colunas de $\underset{C \leftarrow B}{P}$ são os vetores coordenada de $\mathcal{C}$ na base $\mathcal{B}$, ou seja,

$$\boxed{\underset{C \leftarrow B}{P} = [[\underline{b}_1]_C \; [\underline{b}_2]_C \cdots [\underline{b}_n]_C]}$$

$$\boxed{\left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \underset{B \leftarrow C}{P}}$$

- Exemplos:

1. Sejam $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ e $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\}$ bases de um espaço vetorial V, e P a matriz cujas as colunas são $[\underline{f}_1]_G$ e $[\underline{f}_2]_G$. Quais das seguintes equações é satisfeita por P para todos os $\underline{v}$ em V?

(i) $[\underline{v}]_F = P[\underline{v}]_G$

(ii) $[\underline{v}]_G = P[\underline{v}]_F$

→ Como as colunas de P são vetores coordenada de G, um vetor da forma $P\underline{x}$ tem de ser um vetor coordenada G, logo a equação correta é a (ii).

2. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ e $\mathcal{C} = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$, encontra a matriz mudança de coordenadas de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$.

$[x_B] = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \underline{b}_1 = 4\underline{c}_1 + \underline{c}_2 \qquad \underline{b}_2 = -6\underline{c}_1 + \underline{c}_2$

$$[\underline{x}]_C = [[\underline{b}_1]_C \; [\underline{b}_2]_C]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{b}_1]_C = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [\underline{b}_2]_C = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C \leftarrow B}{P} = [[\underline{b}_1]_C [\underline{b}_2]_C] = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [\underline{x}]_C = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{B \leftarrow C}{P} = \left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,6 \\ -0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

○ Aplicações a Cadeias de Markov - Teorema

- Se P é uma matriz $n \times n$ regular estocástica, então P tem um único vetor estacionário $\underline{q}$. Se $\underline{x}_0$ (estado inicial) e $\underline{x}_{k+1} = P\underline{x}_k$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, então a cadeia de Markov $\{\underline{x}_k\}$ converge para $\underline{q}$ com $k \to \infty$.

- Exemplos:

1. Suponha que os residentes de uma área metropolitana se movem de acordo com a matriz M e escolhe-se, aleatoriamente um residente. Um vetor estacionário para um certo ano pode ser interpretado.

a) Suponha-se que a pessoa escolhida vive na cidade, $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Qual a probabilidade da pessoa viver nos subúrbios no próximo ano?

b) Qual é a probabilidade de esta pessoa viver nos subúrbios em 2 anos?

a) $M = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{bmatrix}$ 5% de hipótese

b) $\begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,904 \\ 0,096 \end{bmatrix}$ 9,6% de probabilidade

2. Seja $\underline{P} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}$ e $\underline{q} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix}$. q é vetor estacionário de P?

$P\underline{x} = \underline{x}$

$$P\underline{q} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,32 \\ 0,68 \end{bmatrix} \neq \underline{q}$$

…rcentagem de população vai viver nos subúrbios após muitos anos? (p. 1)

$M = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix} \xrightarrow{}$ vetor estacionário $q = \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{bmatrix}$ 62,5%.

- Exemplos: (vap e vep)

1. $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \to$ 5 é valor próprio?

Se 5 é valor próprio se $(A - 5I)\underline{x} = \underline{0}$ tiver solução não trivial

$A - 5I = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right] \to$ não tem variáveis livres, logo não é vap de A

2. Se $\underline{x}$ é vetor próprio de A correspondente a λ, o que é $A^3\underline{x}$?

$A\underline{x} = \lambda\underline{x} \Leftrightarrow \lambda^2 x = A(\lambda x) = \lambda A\underline{x} = \lambda^2\underline{x}$

$A^3\underline{x} = \lambda^3\underline{x}$

3. Suponha-se que $\underline{b}_1$ e $\underline{b}_2$ são vetores próprios de vaps λ_1 e λ_2 e $\underline{b}_3$ e $\underline{b}_4$ são vetores próprios linearmente independentes de λ_3. É $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ um conjunto linearmente independente? (considere $c_1\underline{b}_1 + c_2\underline{b}_2 + (c_3\underline{b}_3 + c_4\underline{b}_4) = 0$).

Sim! Se $c_1\underline{b}_1 + c_2\underline{b}_2 + c_3\underline{b}_3 + c_4\underline{b}_4 = \underline{0}$, como qualquer combin de vetores do mesmo vap é um vetor próprio desse vap, $c_3\underline{b}_3 + c_4\underline{b}_4$ é um vep de λ_3. Vetores $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ e $\underline{b}_3$ e $\underline{b}_4$ são linearmente independentes (vaps de uma matriz)

$c_1, c_2, c_3, c_4 = 0 \to \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ e $\underline{b}_4$ são linearmente independentes.

- Teorema das Matrizes Invertíveis
  - Seja A uma matriz $n \times n$. Então A é invertível se e só se:
    - s. O número 0 não é vap de A.
    - t. O determinante de A não é zero.

- Ver se é vap
  - Um escalar λ é vap de $A_{n \times n}$ se e só se λ satisfaz a equação característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- Similarity
  - A é similar a B se $P^{-1}AP = B$, se existe P;
  - Se $A_{n\times n}$ e $B_{n \times n}$ são similares, então têm o mesmo polinómio característico e os mesmos vap, com a mesma multiplicidade.

- Teorema
  - Seja A uma matriz $n \times n$ cujos vap distintos são $\lambda_1, \dots, \lambda_p$:
    - Para $1 \leq k \leq p$, a dimensão do espaço próprio para λ_k é menor ou igual à multiplicidade de λ_k.
    - A matriz A é diagonalizável se e só se a soma das dimensões dos espaços próprios for igual a n, se e só se a dimensão do espaço próprio para cada λ é igual à sua multiplicidade e o polinómio característico fatoriza em factores lineares.
    - Se A é diagonalizável e $\mathcal{B}_k$ é base do espaço próprio de λ_k para cada k, então os vetores em $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_p$ formam uma base de vetores próprios para $\mathbb{R}^n$.

- Exemplos:

1. Calcule A^8, $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ são vetores próprios de A. Diagonaliza A.

3. Seja A uma matriz 4x4 com vaps 5, 3 e -2, o esp. próp. de $\lambda = 3$, tem dimensão 2. A é diagonalizável?

1. $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$

vap = 2, 1

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$A = PDP^{-1}$

$A^8 = PD^8P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 766 & -765 \\ 510 & -509 \end{bmatrix}$

2. $A = PDP^{-1}$ $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. A é diagonalizável. Há uma base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ para o espaço próprio correspondente a $\lambda = 3$. Existe pelo menos um vep para $\lambda = 5$ e um para $\lambda = -2$ → $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$. Então $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ é linearmente independente. Não existem mais vep que sejam lin. independentes de $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$, porque os vetores estão todos em $\mathbb{R}^4$ → os esp. p para $\lambda = 5$ e $\lambda = -2$ só tem dim = 1.

Representação da Matriz Diagonal

- $A = PDP^{-1}$, D é uma matriz diagonal $n \times n$. Se $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^n$ formada pelas colunas de P, então D é a matriz-$\mathcal{B}$ para a transformação linear $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$.
- Exercícios:

1. Encontre $T(a_0, a_1 t + a_2 t^2)$, se T é a transf. lin. de $\mathbb{P}_2$ para $\mathbb{P}_2$ cuja matriz é relativa a $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ é

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

2. A, B, C, $n \times n$. Se A é similar a B, B é similar a A. Verificar se:
   a. A é similar a A
   b. Se A é similar a B e B é similar a C, A é similar a C.

1. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$$[T(p)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_0 + 4a_1 \\ 5a_1 - a_2 \\ a_0 - 2a_1 + 7a_2 \end{bmatrix}$$

$$T(p) = (3a_0 + 4a_1) + (5a_1 - a_2)t + (a_0 - 2a_1 + 7a_2)t^2$$

2. a. $A = (I)^{-1} A I$, A é similar a A

   b. $B = P^{-1}AP$ $C = Q^{-1}BQ$ $C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ)$

   Então A é similar a C.

Vaps Complexos

- Seja A uma matriz real 2x2 com um vap complexo $\lambda = a - bi$ ($b \neq 0$) e um vetor próprio associado $\underline{v}$ em $\mathbb{C}^2$. Então:

$$A = PCP^{-1}, \text{ em que } P = [\operatorname{Re}\underline{v} \;\; \operatorname{Im}\underline{v}] \text{ e } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

- Exemplo:

Mostra que se a e b são reais, então os vap de $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ são $a \pm bi$, com vep $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + bi \\ b - ai \end{bmatrix} = (a + bi)\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \to \lambda = a + bi$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \to \lambda = a - bi$$

Sistemas Dinâmicos Discretos

- Exemplos:

1. A matriz A tem vaps $\overset{v_1}{1}, \overset{v_2}{\tfrac{2}{3}}$ e $\overset{v_3}{\tfrac{1}{3}}$: $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

   Encontre a forma geral de $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ se $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. O que acontece à sequência $\{\underline{x}_k\}$ se $k \to \infty$?

$: 2\underline{v}_1 + 1\underline{v}_2 + 3\underline{v}_3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & -3/2 & -3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9/2 & -27/2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array}$$

$$x_k = 2 \times 1^k \underline{v}_1 + 1\left(\tfrac{2}{3}\right)^k \underline{v}_2 + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^k \underline{v}_3 = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2. $k \to \infty$

$$x_k = 2\underline{v}_1 + \underbrace{\left(\tfrac{2}{3}\right)^k}_{\to 0} v_2 + 3\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}\right)^k}_{\to 0} v_3 \xrightarrow{\text{tende p/}} 2v_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **Vetores Ortogonais**
  - Dois vetores $\underline{u}$ e $\underline{v}$ são ortogonais (entre si) se $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$
  - $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$ $\qquad \|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

- **Teorema**
  - Um vetor $\underline{x}$ está em $W^\perp$ se e só se $\underline{x}$ é ortogonal a todos os vetores num conjunto que spans W.
  - $W^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

- **Teorema**
  - $A_{m \times n}$: $(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A$ e $(\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A^T$

- **Conjuntos Ortogonais**
  - Se $S = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p\}$ é um conjunto ortogonal de vetores $\neq \underline{0}$ em $\mathbb{R}^n$, então S é linearmente independente, logo é base do subespaço gerado por S.

- **Definição**
  - Uma base ortogonal para o subespaço W de $\mathbb{R}^n$ é a base para W que também é um conjunto ortogonal.

- **Teorema**
  - Sejam $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p\}$ uma base ortogonal para um subespaço W de $\mathbb{R}^n$. Para cada y em W, os pesos na comb. lin:

$$y = c_1\underline{u}_1 + \dots + c_p\underline{u}_p$$

São dados por:

$$\boxed{c_j = \frac{y \cdot \underline{u}_j}{\underline{u}_j \cdot \underline{u}_j} \quad (j = 1, \dots, p)}$$

- **Teorema**
  - Uma matriz $U_{m \times n}$ tem colunas ortonormais se $U^T U = I$.

- **Teorema**
  - Seja U uma matriz $m \times n$ com colunas ortonormais, e $\underline{x}$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, então:
    a. $\|U\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$
    b. $(U\underline{x}) \cdot (U\underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y}$
    c. $(U\underline{x}) \cdot (U\underline{y}) = 0$ se e só se $x \cdot y = 0$

  - Exemplos:

1. $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$. Mostra que $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.

2. $y = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Projeção ortogonal $\hat{y}$

3. $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ $\underline{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$ $\underline{y} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} \\ 6 \end{bmatrix}$ Verifica se $U\underline{x} \cdot U\underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{y}$

1. $u_1 \cdot u_2 = -2/5 + 2/5 = 0 \rightarrow$ ortogonais

$$\left.\begin{array}{l} \|u_1\|^2 = (-1/\sqrt{5})^2 + (2/\sqrt{5})^2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1 \\ \|u_2\|^2 = (2/\sqrt{5})^2 + (1/\sqrt{5})^2 = 1 \end{array}\right\} \text{vet. unitários}$$

O conjunto $\{u_1, u_2\}$ é linearmente indep., logo é base de $\mathbb{R}^2$.

2. $$\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{20}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 7 \times 2 \\ 6 \times 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \times 2 \\ 1 \times 1 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 14 \\ + \\ 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ + \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{20}{5}$$

3. $$Uy = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Ux = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ux \cdot Uy = 3 + 7 + 2 = 12$$

$$x \cdot y = -6 + 18 = 12$$

- Teorema da Decomposição Ortogonal
  - Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$, cada $y \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito na forma:

$$y = \hat{y} + z$$

em que $\hat{y}$ está em W e z em $W^\perp$. Se $\{u_1, \dots, u_p\}$ é uma base ortogonal de W, então:

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p \quad \text{e} \quad z = y - \hat{y}$$

- Projeções Ortogonais
  - Se $y \in W = \text{Span}\{u_1, \dots, u_p\}$, então projeção$_W$ $y = y$
- Teorema
  - Se $\{u_1, \dots, u_p\}$ é uma base ortonormal para um subespaço W de $\mathbb{R}^n$, então

$$\text{proj}_W y = (y \cdot u_1)u_1 + (y \cdot u_2)u_2 + \dots + (y \cdot u_p)u_p$$

Se $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]$, então

$$\text{proj}_W y = UU^T y \quad y \in \mathbb{R}^n$$

- Exemplo:
  - $u_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ $W = \text{span}\{u_1, u_2\} \rightarrow \text{proj}_W y$?

$$\frac{(63 + 1 + 24)}{(49 + 1 + 16)} \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{(9 + 1 - 12)}{(1 + 1 + 4)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{88}{66} \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{-2}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -28/3 \\ 4/3 \\ 16/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

...ção QR

...m×n com colunas linearmente independentes, então A pode ser fatorizada como ...QR, em que Q é uma matriz m×n cujo as colunas formam uma base ortonormal ...a Col A e R é uma matriz triangular superior invertível com entradas positivas na ...agonal.

- Exemplo (Gram-Schmidt):

$$W = \text{Span}\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\},\ \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{construir uma base ortogonal}$$

$$\underline{v}_1 = \underline{x}_1 \qquad \underline{v}_2 = \underline{x}_2 - \frac{\underline{x}_2 \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1} \underline{v}_1 = \underline{x}_2 - 0\underline{v}_1 = \underline{x}_2 \rightarrow \{\underline{x}_1, \underline{x}_2\} \text{ é ortogonal}$$

→ Normalizar os vetores:

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{\|\underline{v}_1\|} \underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$v'_2 = 3v_2$$

$$\underline{u}_2 = \frac{1}{\|v'_2\|} v'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Diagonalização de Matrizes Simétricas

- Se A é simétrica, então quaisquer 2 vep de espaços próprios diferentes são ortogonais.
- Uma matriz n×n é ortogonalmente diagonalizável se e só se A é uma matriz simétrica.
- Exemplo:
  1. Mostra que se A é simétrica, então A^2 é simétrica;
  2. Mostra que se A é ortogonalmente diagonizável, então A^2 também é.

1. $(A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T$. Seja $\underbrace{A^T = A}_{\text{simétrica}}$, $(A^2)^T = AA = A^2$ Logo A^2 é simétrica.

2. Se A é ortogonalmente diagonalizável, então A é simétrica

Decomposição Valor Singular

- Fatorização do tipo $A = QDP^{-1}$, para matrizes m×n;
- Se $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ e $\|\underline{x}\| = 1$, então:

$$\|A\underline{x}\| = \|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|x\| = |\lambda|$$

Valores Singulares de uma Matriz m×n

- Seja A uma matriz m×n. A^TA é simétrica e pode ser ortogonalmente diagonalizável; seja $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vap de A^TA, Então para $1 \leq i \leq n$,

$$\|A\underline{v}_i\|^2 = (A\underline{v}_i)^T A\underline{v}_i = v_i^T A^T A v_i = \underline{v}_i^T(\lambda_i \underline{v}_i) = \lambda_i$$

- Os valores singulares de A são raízes quadradas dos vap de A^TA $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, e são organizados por ordem decrescente. $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$; Os valores singulares de A são tamanhos dos vetores $A\underline{v}_1$ a $A\underline{v}_n$.

Teorema

- Seja $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ que consiste nos vetores próprios de A^TA, arranjados de modo a que os vap de A^TA $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, e suponha-se que A tem R vetores singulares diferentes de zero. Então $\{A\underline{v}_1, \dots, A\underline{v}_R\}$ é uma base ortogonal para Col A, e o Rank A = R.

Decomposição de Valor Singular

- Seja A uma matriz m×n com rank R. Então existe uma matriz m×n Σ para a qual as entradas m D são os R primeiros valores singulares de A, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_R$. E existe uma matriz ortogonal U m×m e uma matriz V tal que:

$$A = U\Sigma V^T$$

› Teorema das Matrizes Invertíveis

- se A uma matriz $n \times n$. Então:

  u. $(\mathrm{Col}\, A)^{\perp} = \{0\}$

  v. $(\mathrm{Nul}\, A)^{\perp} = \mathbb{R}^n$

  w. $\mathrm{Row}\, A = \mathbb{R}^n$

  x. A tem n valores singulares $\neq 0$

Maria Ribeiro
14/01/2019