Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 7 – Condensadores

Campo eléctrico no vácuo e conceitos fundamentais da electrostática

Condensadores

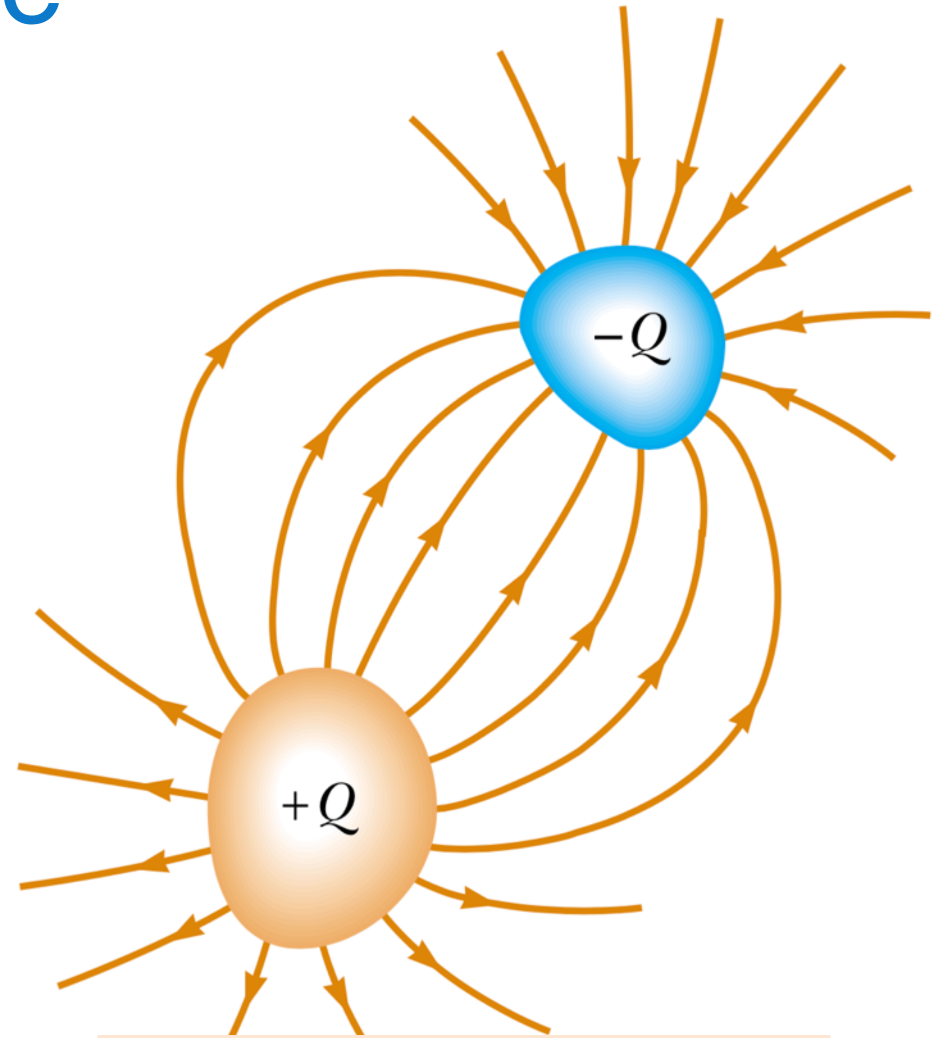
- Conceito de capacidade de condutores
- Condensadores e aplicações
- Condensador de placas paralelas, esférico e cilíndrico
- Condensador com dieléctrico
- Associação de condensadores

Popovic & Popovic Cap. 8

O que é um condensador e para que serve?

Consiste em **dois condutores** separados por um **meio dieléctrico**.

- Serve para **armazenar carga eléctrica**
- É um elemento fundamental em muitos circuitos eléctricos
- Quando está carregado, ambos os condutores possuem a **mesma carga eléctrica**, mas de sinal oposto.
- É caracterizado por uma quantidade: a **capacidade** do condensador



Os condutores são designados *eléctrodos* do condensador

Capacidade de um corpo isolado

Um condutor com uma carga Q gera um campo eléctrico $|\vec{E}| \propto Q$ à sua volta, ficando com um certo potencial $V \propto Q$ em relação ao infinito.
Ou seja, o potencial V de um condutor é proporcional à sua carga Q:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \quad [\mathrm{C/V} = \mathrm{F}]$$

Capacidade de um condutor isolado

A constante C não depende de Q ou V, mas apenas das propriedades do condutor. Para a determinar, precisamos de saber a forma e o tamanho do meio condutor.

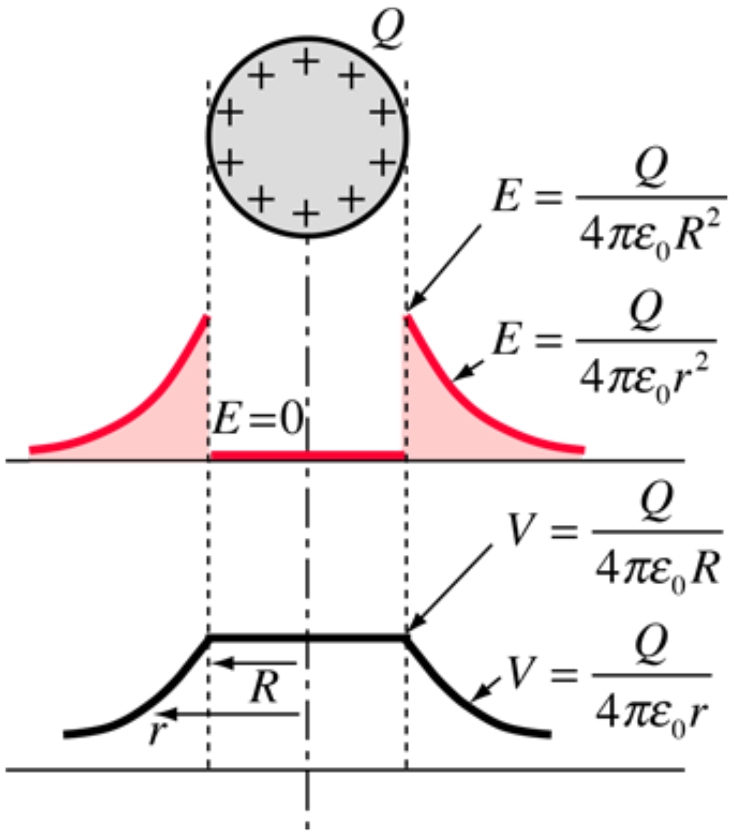
Exemplo: capacidade de uma esfera metálica carregada

Esfera condutora de raio R e carga Q, colocada no vácuo.
A carga distribui-se na forma de densidade superficial $\boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}}$

O campo eléctrico e o potencial são radiais:

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2} \quad (r \geq R) \qquad \vec{E} = 0 \quad (r < R)$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} \quad (r \geq R) \qquad \boxed{V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}} \quad (r < R)$$



A capacidade é:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi R^2\sigma}{\sigma R/\epsilon_0} = \boxed{4\pi\epsilon_0 R}$$

Exemplo: capacidade da Terra

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Com $R \approx 6380\ \mathrm{km}$ e $4\pi\epsilon_0 \approx \frac{1}{9\times10^9\mathrm{F^{-1}m}}$:

$$C \approx 0{,}708\ \mathrm{mF}$$

Um farad (F) é uma unidade muito grande!

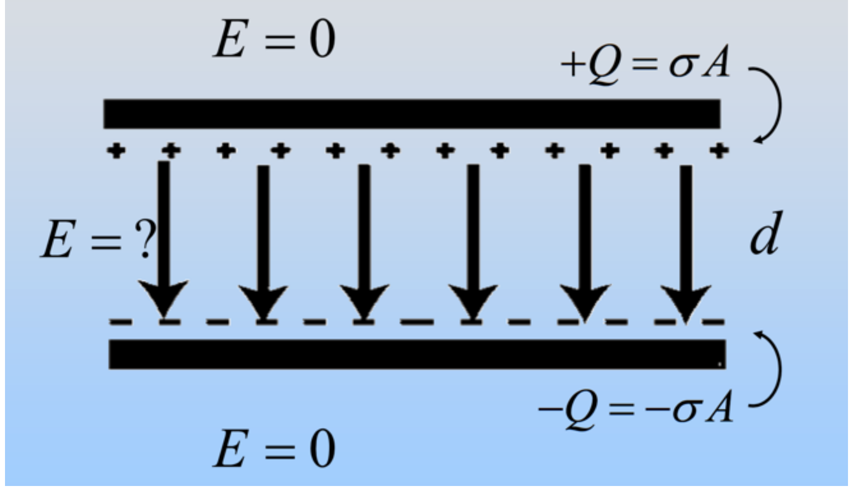
A capacidade típica dos componentes electrónicos varia entre os picofarad (pF, 10^{-12} F) e os microfarad (μF, 10^{-6} F)

Capacidade de um condensador

A capacidade de um condensador cujos condutores armazenem uma carga $+Q$ e $-Q$ e estejam a uma d.d.p $V = V_+ - V_-$ é

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Capacidade de um condensador



Para um condensador de placas paralelas:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{|E|D} = \frac{A}{\epsilon_0 D} \approx 10^{-11}\frac{A}{D}$$

A capacidade C do condensador só depende

- da **geometria das placas**
- do **meio dieléctrico que as separa**

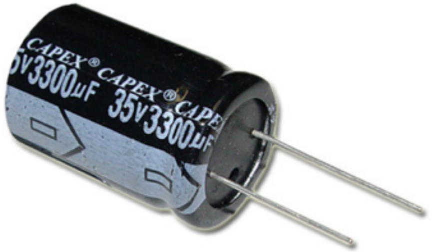
Tipos de condensadores

Cerâmica

Filme

Papel

Electrolíticos

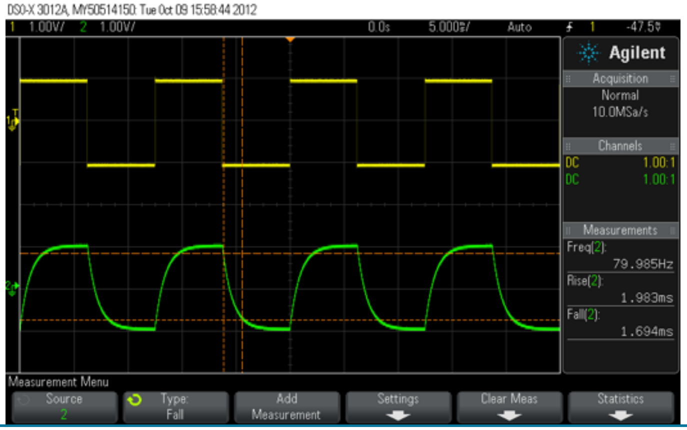


Mica

Supercondensadores

Aplicações de condensadores

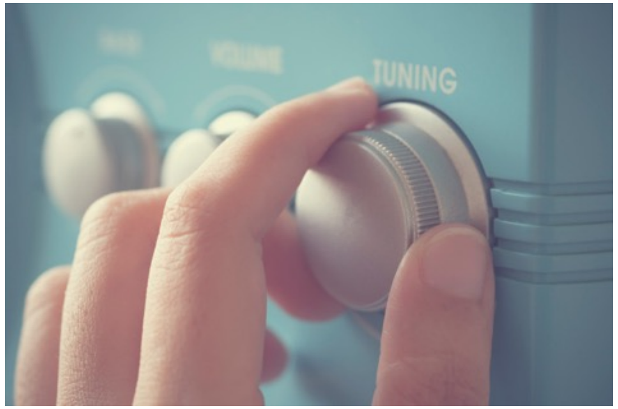
Medição de tempo



Estabilização

Filtro de corrente

Sintonização



Descargas de energia

Sensores

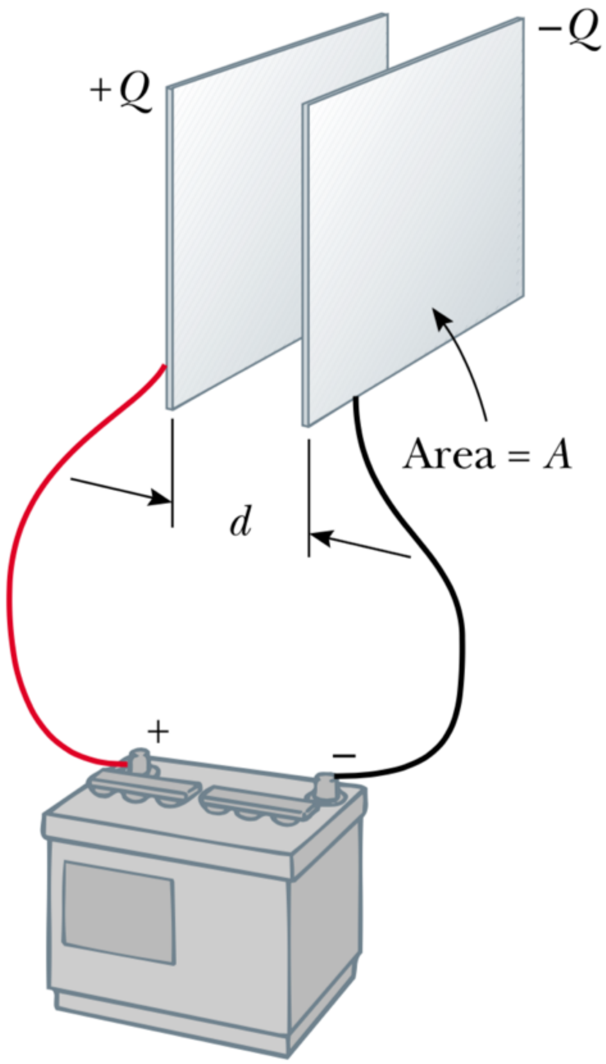
Condensador de placas paralelas

1. Placas inicialmente sem carga, bateria com d.d.p. V

2. O campo eléctrico no fio ligado ao terminal negativo empurra os electrões em direcção à placa, que fica ao mesmo potencial e com carga $-Q$

3. No fio do terminal positivo sucede um processo idêntico, e a placa fica com carga $+Q$

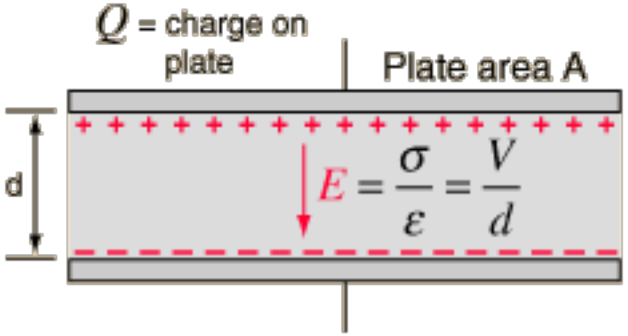
4. Na situação final, a d.d.p. entre as placas é V



Exemplo: Capacidade do condensador de placas paralelas

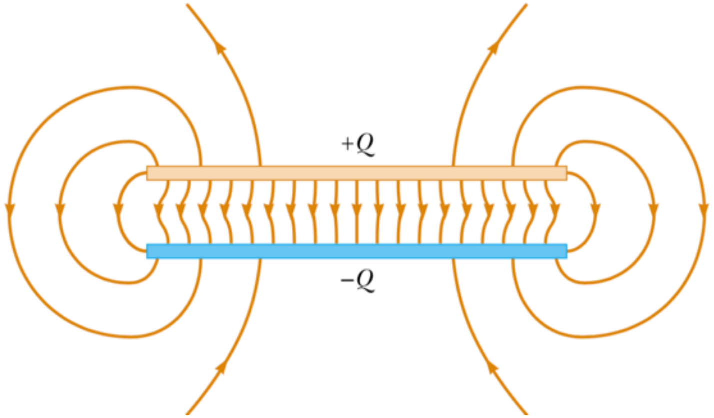
Campo de **uma placa** infinita com carga Q no vácuo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$$



Usando o princípio de sobreposição, **duas placas paralelas** terão um campo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n} + \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0}(-\vec{n}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}$$

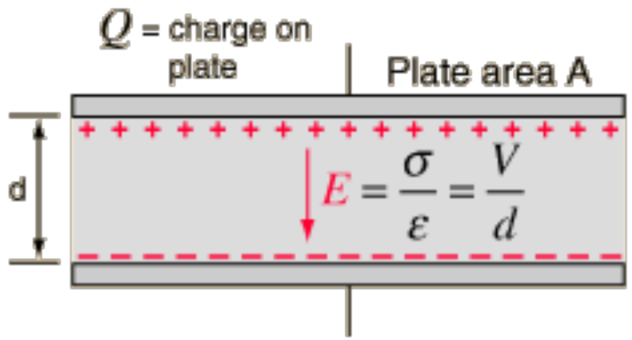


Num condensador com placas finitas o campo é aproximadamente uniforme na zona central

Exemplo: Capacidade do condensador de placas paralelas

A d.d.p entre as placas é

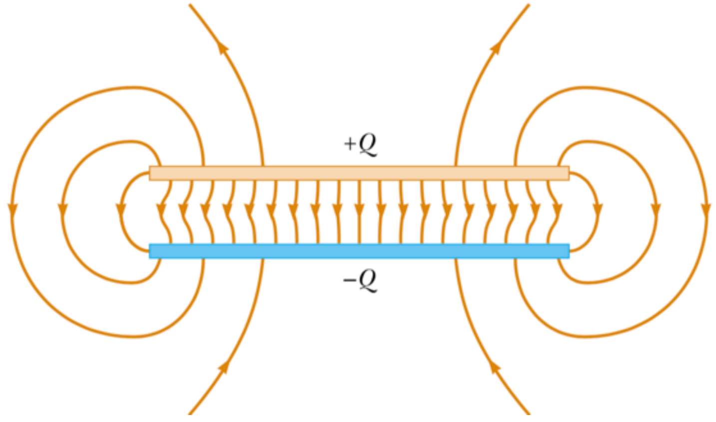
$$V = |\vec{E}|d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \boxed{\frac{Qd}{A\epsilon_0}}$$



A capacidade do condensador é então:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

Capacidade de um condensador de placas paralelas

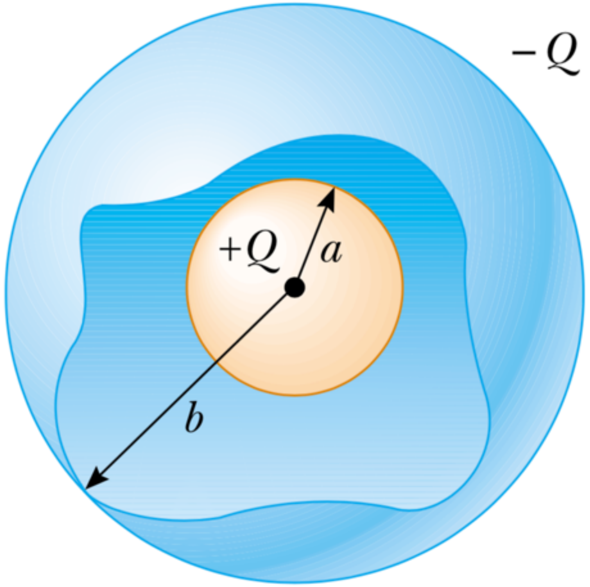


A capacidade é maior

- Para uma **maior área** das placas
- Para uma **menor distância** entre elas

Exemplo: Capacidade do condensador esférico

Esfera de raio a, carga $+Q$ e sup. esférica de raio b, carga $-Q$
O campo no exterior da esfera interna ($a < r < b$) é



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r \qquad V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$V_b - V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \rightarrow \quad |V| = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}}$$

A capacidade do condensador esférico é então:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a}}$$

Capacidade de um condensador esférico

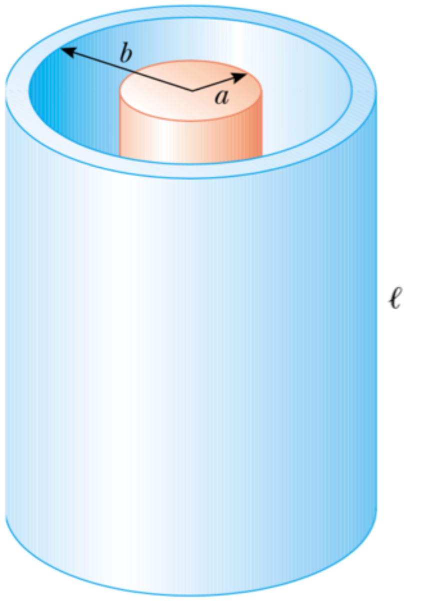
A capacidade é maior
- Para **maiores raios** a e b
- Para uma **menor diferença** entre raios

Exemplo: Capacidade do condensador cilíndrico

Cilindro de raio a, carga $+Q$ e sup. cilíndrica de raio b, carga $-Q$
O campo no exterior do cilindro interno ($a < r < b$ e $l \gg a, b$) é

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\vec{u}_r \qquad V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad \lambda = Q/l$$

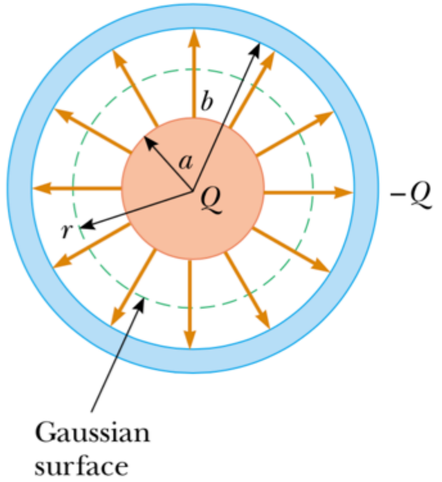
$$V_b - V_a = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow |V| = \boxed{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



A capacidade do condensador cilíndrico é então:

$$C = \frac{Q}{V} = \boxed{2\pi\epsilon_0 l\frac{1}{\ln(b/a)}}$$

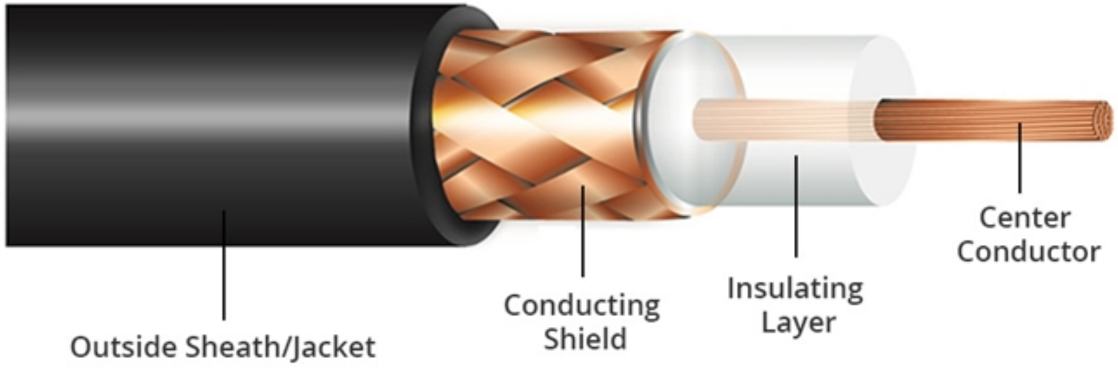
Capacidade de um condensador cilíndrico



- Maior para um **maior comprimento** l
- Maior para uma **menor diferença** entre raios

Exemplo: Cabo coaxial

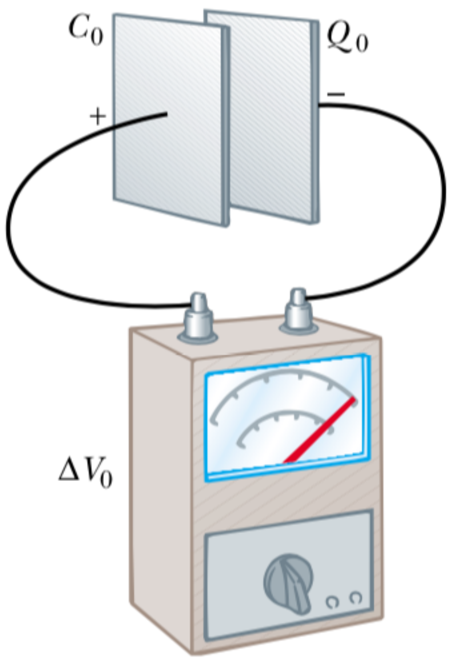
- Cabo com dois condutores separados por um dieléctrico
- Usado para transmitir sinais eléctricos de alta frequência (e.g. TV, rádio, dados) com fidelidade e baixas perdas
- Só existe campo eléctrico na região entre os condutores, pelo que o sinal é blindado contra interferências



Condensador com dieléctrico

Espaço entre as armaduras de um condensador preenchido por material dieléctrico de permitividade ϵ: a capacidade aumenta de um factor $\kappa = \epsilon/\epsilon_0$

Ar



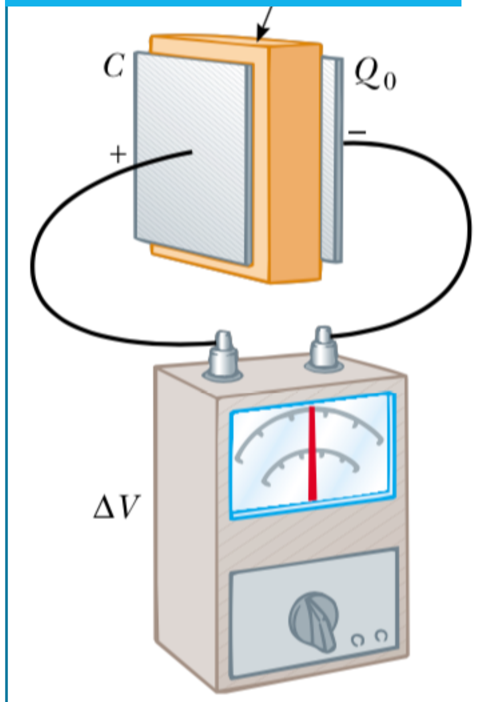
$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = Q/\epsilon_0$$

$$\rightarrow \vec{E} = (Q_0/A\epsilon_0)\vec{n}$$

$$\Delta V_0 = |E|d = \frac{Q_0 d}{A\epsilon_0}$$

$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V_0} = \boxed{\frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

Dieléctrico



$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS = Q_{livre}$$

$$\rightarrow \vec{E} = (Q_0/A\epsilon)\vec{n}$$

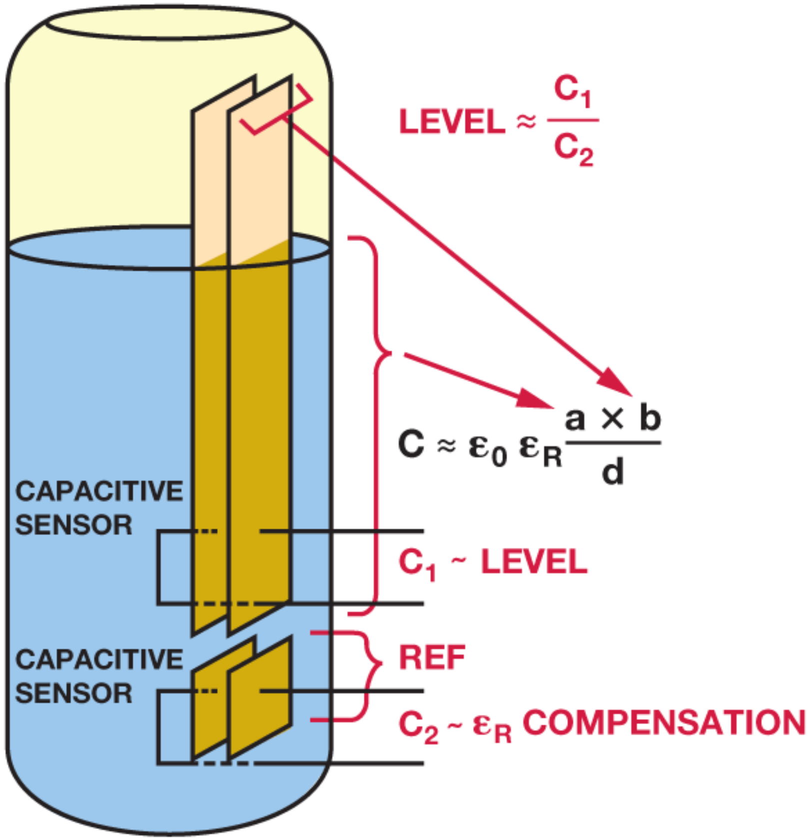
$$\Delta V = |E|d = \frac{Q_0 d}{A\epsilon}$$

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \boxed{\frac{\epsilon A}{d}}$$

Constante dieléctrica κ

Valores de κ em diversos materiais

Material	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength (10^6 V/m)
Air (dry)	1.000 59	3
Bakelite	4.9	24
Fused quartz	3.78	8
Mylar	3.2	7
Neoprene rubber	6.7	12
Nylon	3.4	14
Paper	3.7	16
Paraffin-impregnated paper	3.5	11
Polystyrene	2.56	24
Polyvinyl chloride	3.4	40
Porcelain	6	12
Pyrex glass	5.6	14
Silicone oil	2.5	15
Strontium titanate	233	8
Teflon	2.1	60
Vacuum	1.000 00	—
Water	80	—

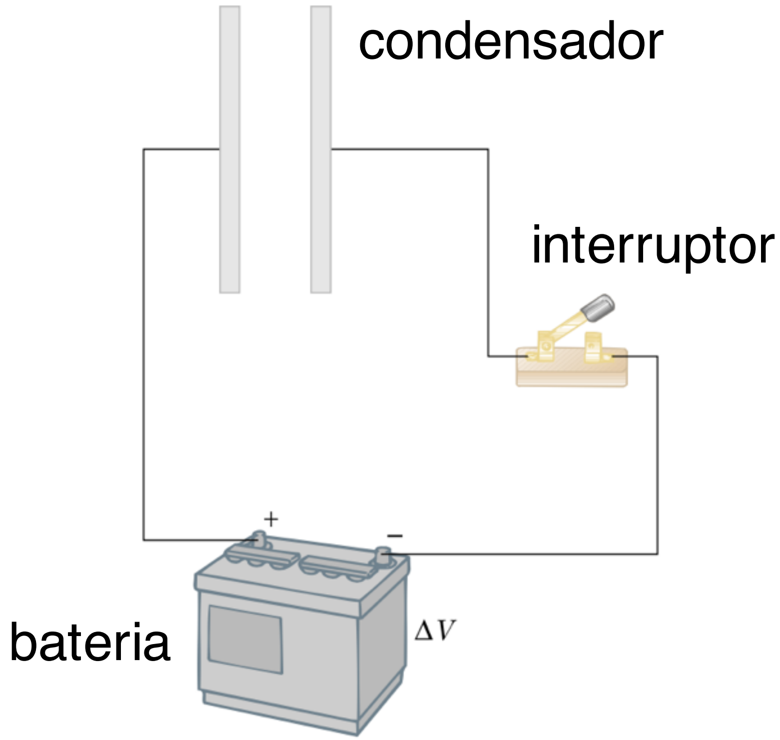


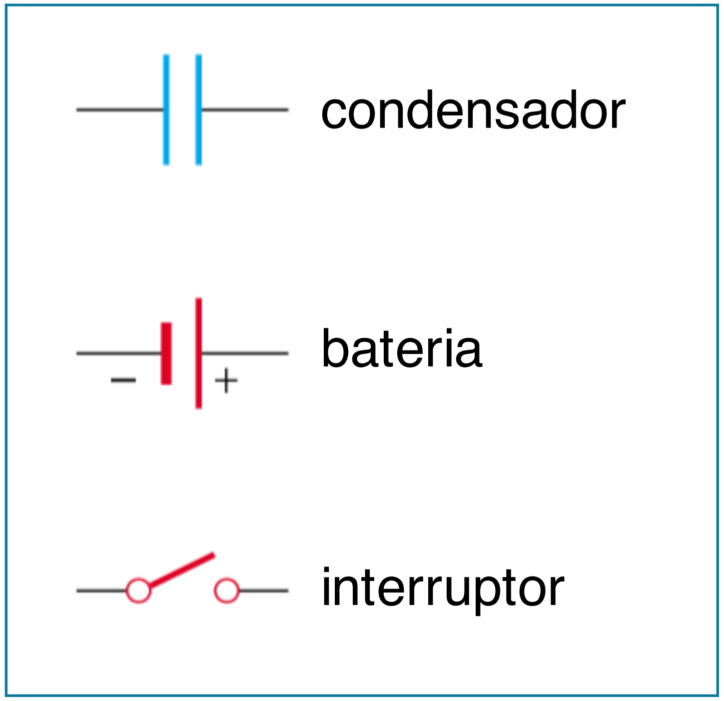
A variação de C com o material dieléctrico pode ser usada como sensor de líquidos

Combinações de condensadores

Os condensadores podem ser combinados num **circuito eléctrico** de duas formas principais:

- **Em paralelo**
- **Em série**





Combinação de condensadores em paralelo

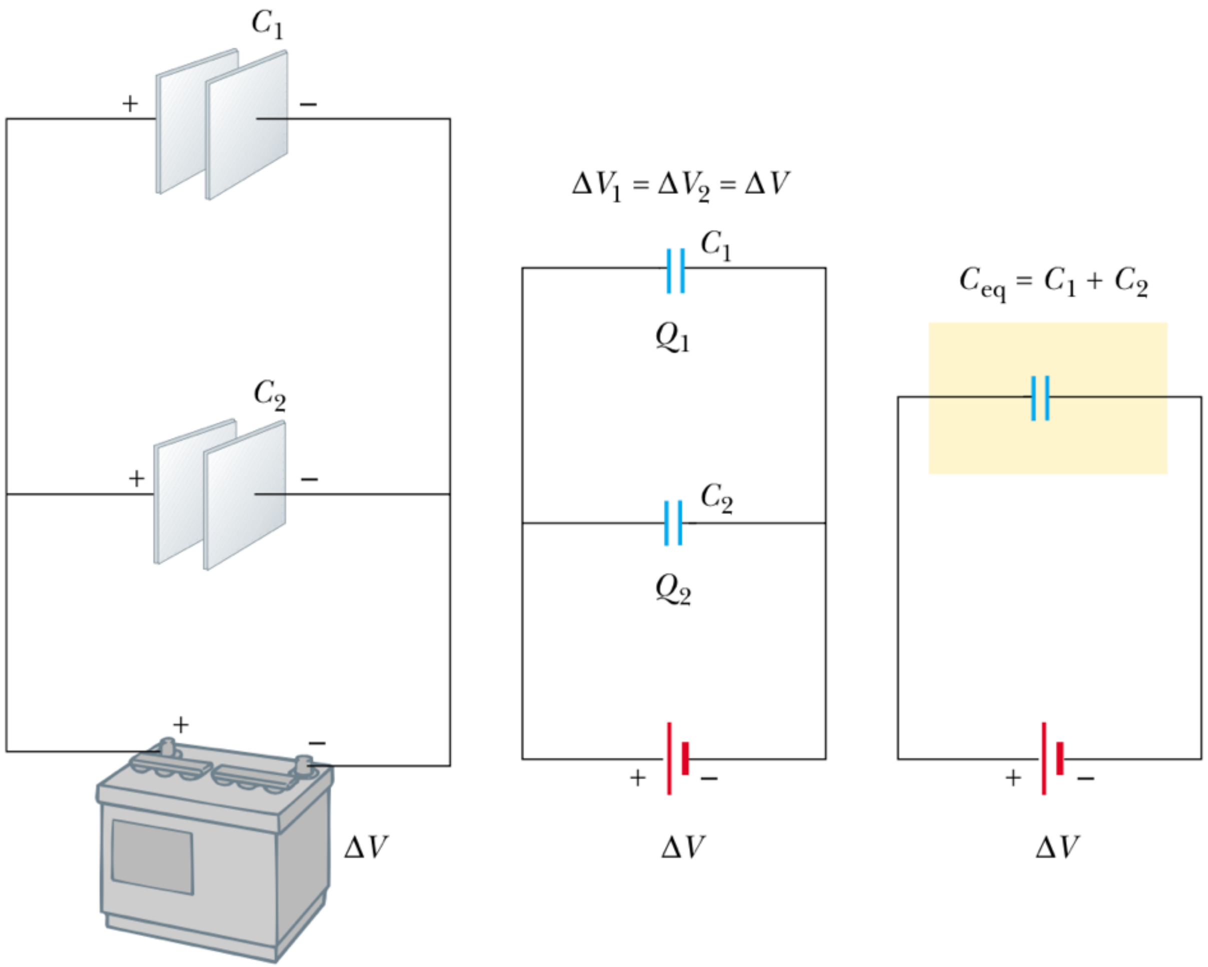
Ambos os condensadores C_1 e C_2 têm a mesma d.d.p. ΔV

A carga total armazenada é

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1\Delta V + C_2\Delta V$$
$$= (C_1 + C_2)\Delta V$$

Isto é equivalente a um único condensador de capacidade

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$



Combinação de condensadores em paralelo

A expressão aplica-se para uma combinação de N condensadores

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots}$$

A combinação de condensadores em **paralelo** é

- Equivalente a um único condensador de capacidade igual à **soma** das capacidades individuais $C_1, C_2, \ldots$
- **Maior** do que qualquer uma dessas capacidades

Armazenamento em paralelo: a capacidade total é a soma das capacidades individuais

Combinação de condensadores em série

A soma das d.d.p. de C_1 e C_2 é igual à d.d.p. total

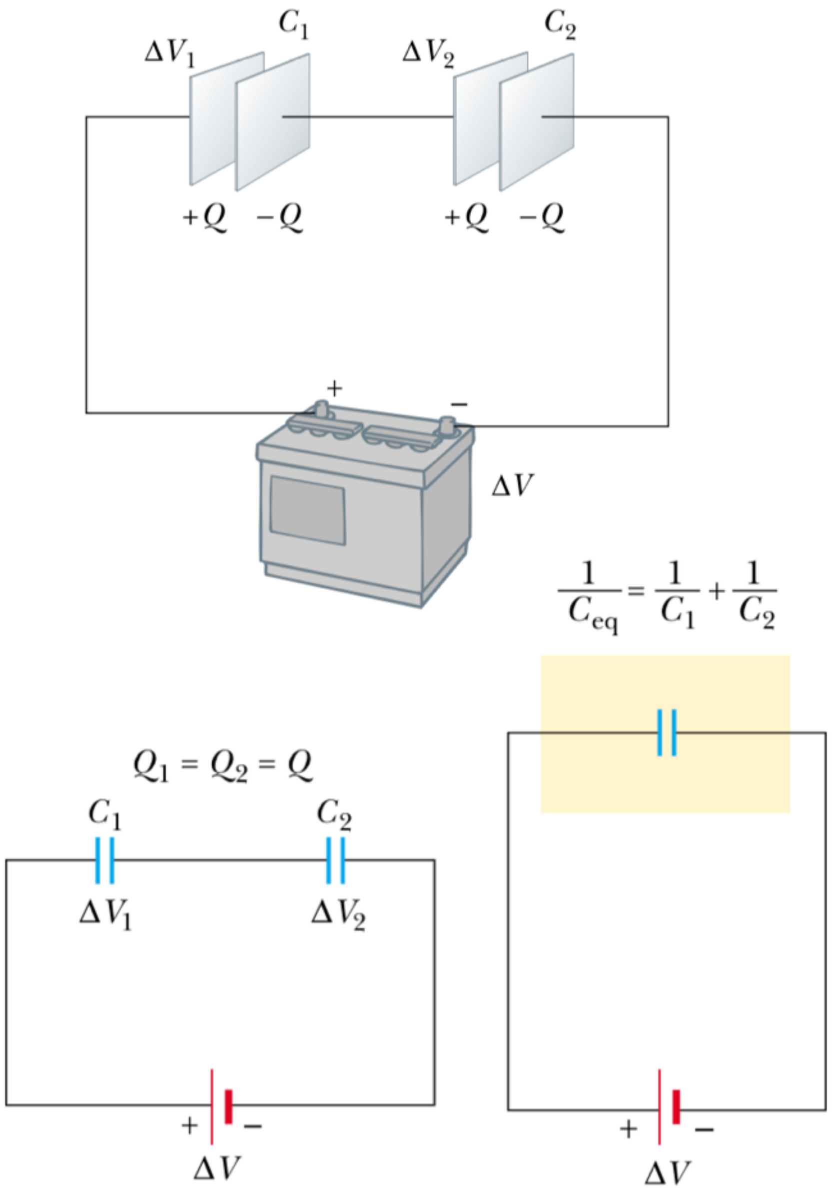
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

A carga em cada condensador é igual: $Q_1 = Q_2 = Q$

$$C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2 \rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Equivalente a um único condensador de capacidade

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$



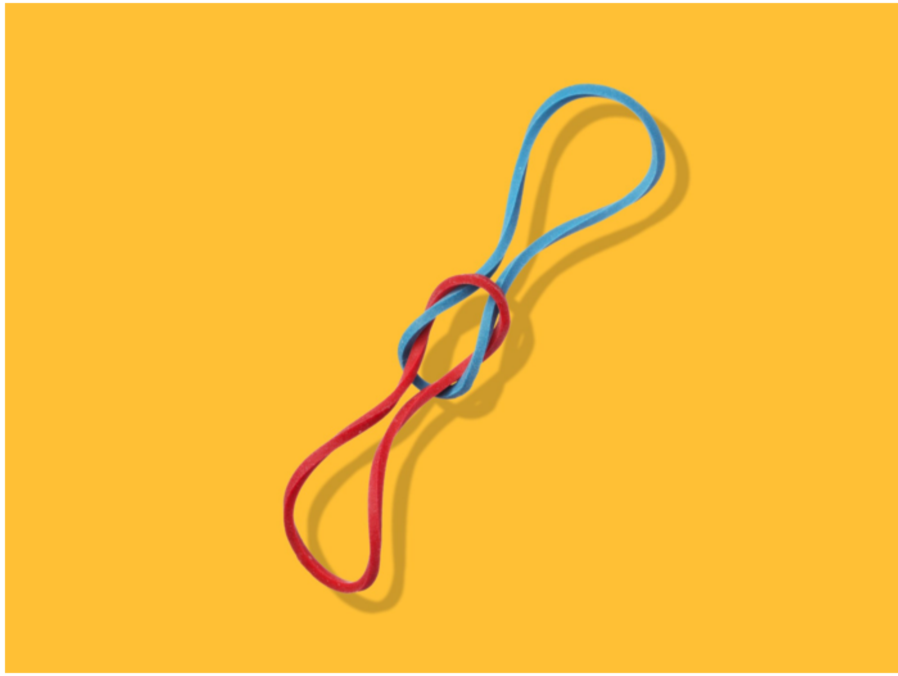
Combinação de condensadores em série

A expressão aplica-se para uma combinação de N condensadores

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$

A combinação de condensadores em **série** é

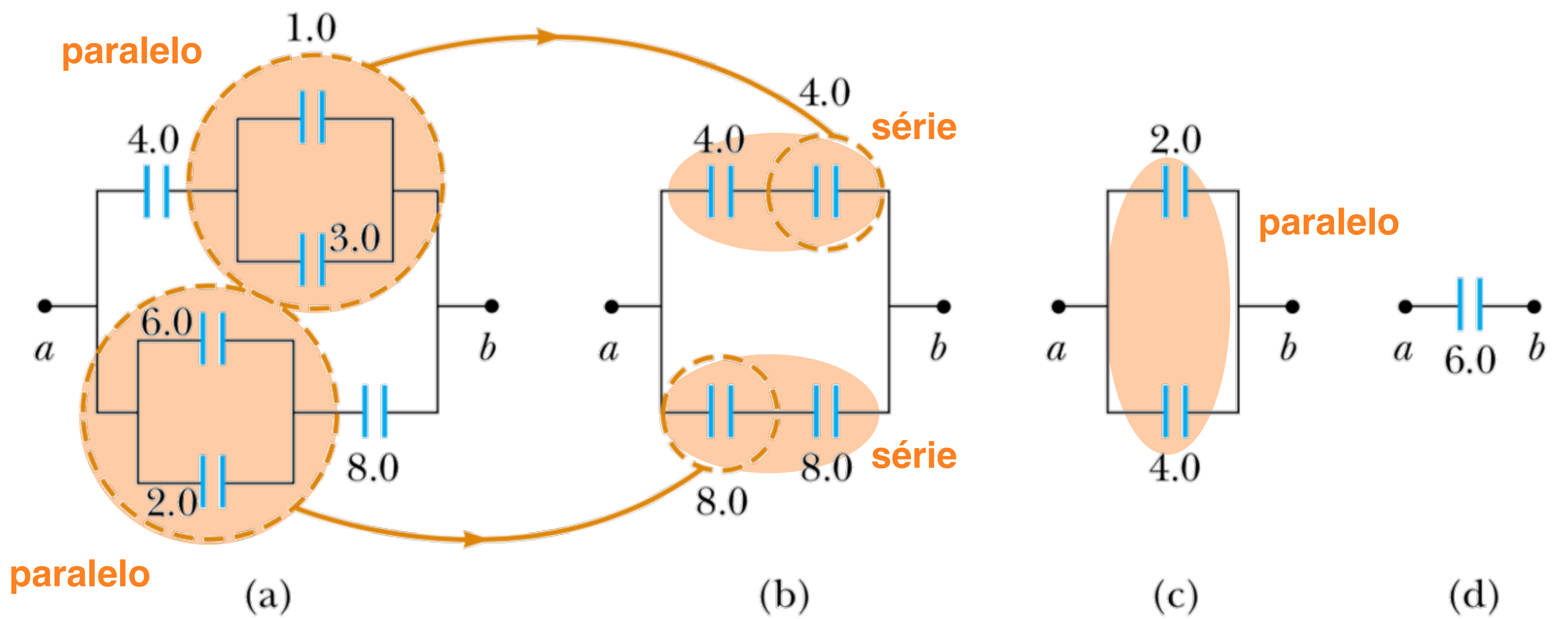
- Equivalente a um único condensador de capacidade igual ao **inverso da soma dos inversos** das capacidades individuais $C_1, C_2, \ldots$
- **Menor** do que qualquer uma dessas capacidades



Armazenamento em série: a capacidade total é inferior às capacidades individuais

Combinações de condensadores: caso geral

No geral podemos ter combinações em série e em paralelo. Para resolver, calcula-se a capacidade equivalente, caso a caso.

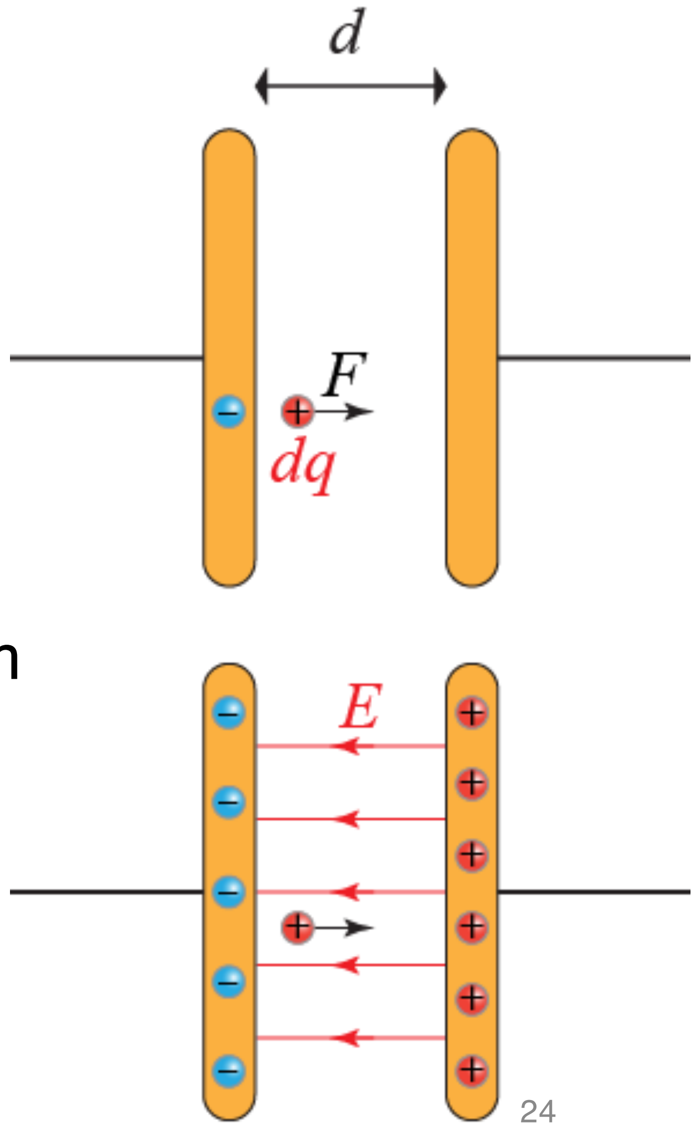


Energia armazenada num condensador

A energia (potencial electrostática) de um condensador corresponde ao trabalho necessário para o carregar.

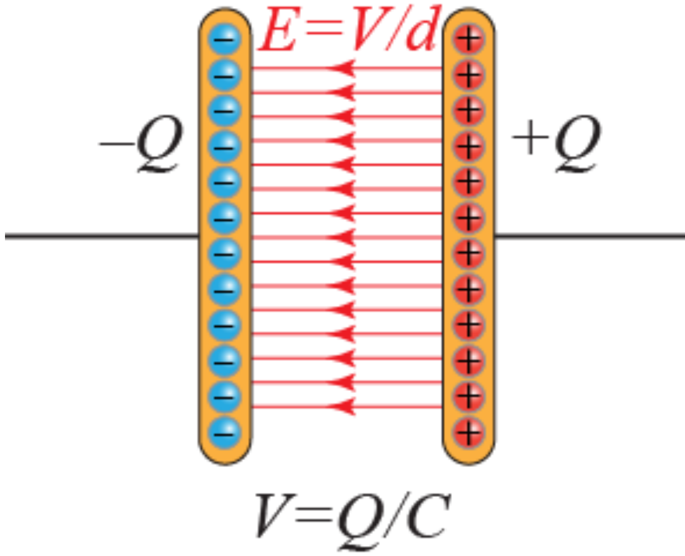
1. No estado inicial ($V = 0, E = 0$) uma carga dq é transportada de um eléctrodo ao outro, com trabalho nulo
2. À medida que a carga transportada Q cresce, também aumentam V e $E = V/d$. O trabalho para transportar uma carga dQ é agora

$$dW = V.dq$$



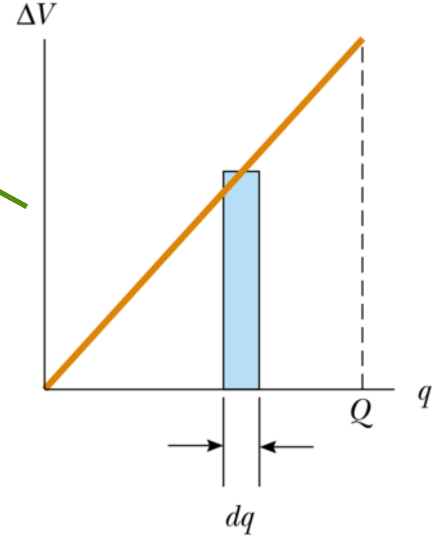
Energia armazenada num condensador

3. A energia (potencial electrostática) do condensador corresponde ao trabalho total necessário para o carregar:



$$U_E = \int_0^Q dW = \int_0^Q V dq$$

4. A d.d.p. V e a carga Q relacionam-se por $V(q) = Q/C$:



$$U_E = \frac{1}{C}\int_0^Q Q dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2}CV^2}$$

Esta expressão é válida para qualquer condensador.

Densidade de energia

Podemos admitir que a energia do condensador está armazenada no campo eléctrico entre as placas. Para um condensador plano:

$$V = |\vec{E}|d \qquad C = \epsilon_0 A/d$$

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}(\epsilon_0 Ad)E^2$$

Como $Ad =$ volume do espaço entre as placas, definimos a **densidade de energia** [J/m³]:

$$\boxed{u_E = \frac{U_E}{Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$$

Um condensador armazena energia!

Sumário

1. Num condensador, a carga armazenada e a d.d.p. dos eléctrodos estão relacionadas pela **capacidade** C [F]
2. A capacidade só depende da forma, tamanho e geometria dos eléctrodos
3. A definição de capacidade de um condensador é limitada aos casos em que (i) as cargas são simétricas e (ii) o campo eléctrico só existe no espaço entre os eléctrodos
4. A associação de condensadores em paralelo ou em série equivale a um único condensador, cuja capacidade depende das associações
5. Um condensador armazena energia potencial, com valor $U_E = \frac{1}{2} C V^2$