Versuch 2: Zuverlässigkeitswirkungsplan

Verlässliche Systeme

Benjamin Vogler

Hochschule RheinMain

WS 2012/13

Themen

- Modellierung
  - Zustandsdiagramm
  - Blockschaltplan
  - Wirkungsplan
- Berechnung der (Un-)verfügbarkeit
  - Markov-Differentialgleichungssystem
  - Analytische Verfahren zum Lösen von DGL
  - Bestätigung analytischer Ergebnisse mittels numerischer Verfahren

Zuverlässigkeitskenngrößen

Mean Time Between Failure

$$\mathsf{MTBF} = \mathsf{MTTF} + \mathsf{MTTR}$$

Reparaturrate

$$\mu = \frac{1}{\mathsf{MTTR}}$$

Ausfallrate

$$\lambda = \frac{1}{\mathsf{MTTF}}$$

Zuverlässigkeitskenngrößen

Stationäre Verfügbarkeit

$$V = \frac{\mathrm{MTTF}}{\mathrm{MTBF}}$$

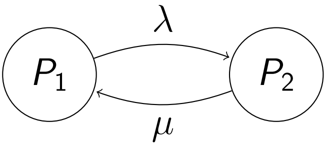
Stationäre Unverfügbarkeit

$$U = \frac{\mathrm{MTTR}}{\mathrm{MTBF}}$$

Zusammenhang zwischen Verfügbarkeit und Unverfügbarkeit

$$V = 1 - U$$

Vorbereitende Aufgaben



$$\mu \neq 0, \lambda \neq 0$$

$$P_1(t=0) = V_0$$

Markov-Differentialgleichungssystem

$$\dot{P}_1 = -\lambda P_1 + \mu P_2$$

$$\dot{P}_2 = -\mu P_2 + \lambda P_1$$

Bilanzgleichung

$$1 = P_1 + P_2$$

Vorbereitende Aufgaben

Einsetzen der Bilanzgleichung in $\dot{P}_1$ Gleichung

$$\dot{P}_1 = -\lambda P_1 + \mu(1 - P_1) = -(\lambda + \mu)P_1 + \mu$$

Inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{P}_1 + (\lambda + \mu)P_1 = \mu$$

Berechnung homogener Teil über Charakteristische Gleichung (α)

$$\alpha + (\lambda + \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -(\lambda + \mu)$$

Lösung homogener Teil

$$P_{1h} = c * e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Vorbereitende Aufgaben

Berechnung inhomogener Teil über Lösungsansatz

$$P_{1ih} = A \ , \ \dot{P}_{1ih} = 0$$

$$\Rightarrow 0 + (\lambda + \mu)A = \mu$$

$$\Rightarrow A = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)}$$

Lösung inhomogener Teil

$$\Rightarrow P_{1ih} = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)}$$

Zusammenfassung homogener und inhomogener Teil

$$P_1 = P_{1h} + P_{1ih} = c * e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)}$$

Vorbereitende Aufgaben

Mit Anfangswert $\mathrm{P}_1(t=0) = V_0$

$$P_1(t=0) = V_0 = c * e^0 + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)}$$

$$\Rightarrow c = V_0 - \frac{\mu}{(\lambda+\mu)}$$

Lösung der DGL

$$P_1 = (V_0 - \frac{\mu}{(\lambda+\mu)})e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)}$$

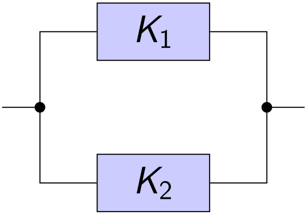
Stationäre (Un-)Verfügbarkeit

$$V = P_1(t \to \infty) = 0 + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)} = \frac{\mu}{(\lambda+\mu)}$$

$$U = 1 - V = 1 - \frac{\mu}{(\lambda+\mu)} = \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)}$$

1-von-2 System

Spezielle Ausprägung eines 1-von-2 Systems



Ausfallrate erste Komponente: λ_1

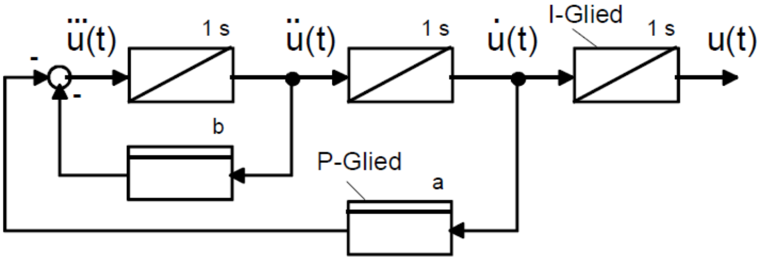
Ausfallrate zweite Komponente: λ_2

Reparaturrate erste Komponente: μ_1

Reparaturrate Gesamtsystem: μ_g

$\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_g = 1\ \mathrm{s}^{-1}$

Zuverlässigkeitswirkungsplan



$$a = (\lambda_1 + \mu_1)\mu_g + (\lambda_1 + \mu_g)\lambda_2 = 4\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$b = \lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_g = 4\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$u(t=0) = 0, \dot{u}(t=0) = 0, \ddot{u}(t=0) = 1$$

Aufgabe 2.4.1 und 2.4.2

Differentialgleichung aus Wirkungsplan

$$\dddot{u} = -b * \ddot{u} - a * \dot{u}$$

$$\dddot{u} + b * \ddot{u} + a * \dot{u} = 0$$

Lösung der DGL mittels Laplace Transformation

$$\mathcal{L}\left\{\dddot{u}\right\} = s^3 U(s) - s^2 u(0^+) - s\dot{u}(0^+) - \ddot{u}(0^+) = s^3 U(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\left\{b * \ddot{u}\right\} = b * (s^2 U(s) - su(0^+) - \dot{u}(0^+)) = b * s^2 U(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{a * \dot{u}\right\} = a * (sU(s) - u(0^+)) = a * sU(s)$$

$$\Rightarrow s^3 U(s) - 1 + b * s^2 U(s) + a * sU(s) = 0$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^3 + b * s^2 + a * s}$$

Aufgabe 2.4.2

a und b eingesetzt

$$\Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 4s}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 4)} = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

Rücktransformation über Korrespondenz f(t) $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ F(s)

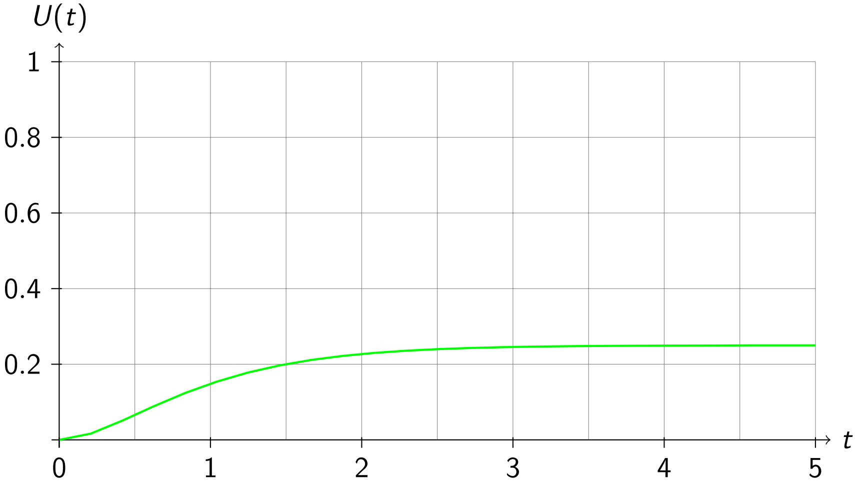
$$\frac{1}{a^2}(1 + (at - 1)e^{at}) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s(s-a)^2}$$

Lösung der DGL nach Rücktransformation

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = u(t) = \frac{1}{4}(1 - (2t + 1)e^{-2t})$$

Aufgabe 2.4.3

Verlauf der Unverfügbarkeit im Intervall [0,5]



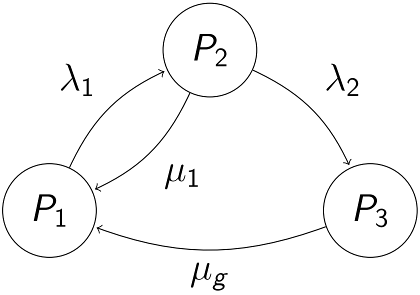
Aufgabe 2.4.4

Stationäre Unverfügbarkeit

$$U(t \to \infty) = \frac{1}{4}(1 - (2t + 1)e^{-2t}) = \frac{1}{4}(1 - 0) = 0.25$$

Aufgabe 2.4.5

Zustandsdiagramm



$P_1 \hat{=} K_1/K_2$ intakt

$P_2 \hat{=} K_{1/2}$ intakt, $K_{2/1}$ defekt

$P_3 \hat{=} K_1/K_2$ defekt

$\Rightarrow V = P_1 + P_2$

$\Rightarrow U = P_3$

Aufgabe 2.4.5

Markov-Differentialgleichungssystem

$$\dot{P}_1 = -\lambda_1 P_1 + \mu_1 P_2 + \mu_g P_3$$

$$\dot{P}_2 = -(\mu_1 + \lambda_2) P_2 + \lambda_1 P_1$$

$$\dot{P}_3 = -\mu_g P_3 + \lambda_2 P_2$$

Bilanzgleichung

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

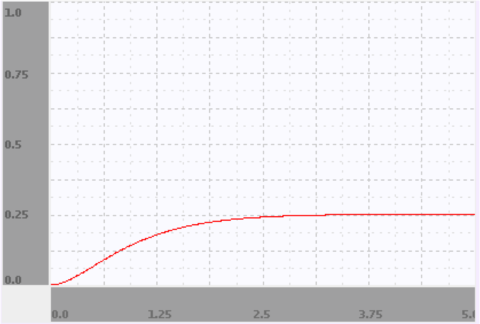
Umformung und Einsetzen ergibt wieder diesselbe DGL und damit dasselbe Ergebnis für die Unverfügbarkeit!

$$\Rightarrow P_3(t) = U(t) = \frac{1}{4}(1 - (2t + 1)e^{-2t})$$

Zusatzaufgabe 2.5.1

Numerische Berechnung mit sAnalyzeCollection

```
! Praktikum 2: 1 von 2 System
! Knot-Definition !
K 3
! Failure and Repair Rates !
F 0 1 1.0
F 1 2 1.0
R 1 0 1.0
R 2 0 1.0
! Availability V = P0 + P1 !
V 1 1 0
! Start Time !
TS 0.0
! End Time !
TE 5.0
! Integration Step !
H 0.01
HI 0.001
HX 0.1
EA 0.0001
ER 0.0001
! Start Values P0 + P1 + P2 must be 1 !
P0 1.0
P1 0.0
P2 0.0
! Output !
All
! End of File !
```



Graph: Unverfügbarkeit nach Implizit Euler

t	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0
Analytisch	0.0154	0.0661	0.1485	0.2271	0.2499
Expl Euler	0.0149	0.0661	0.1492	0.2277	0.2499
Impl. Euler	0.0157	0.0661	0.1478	0.2265	0.2499
Trapez	0.0154	0.0661	0.1485	0.2271	0.2499

Tabelle: Unverfügbarkeit analytisch und numerisch

Quellen und Links

Quellen

Zuverlässigkeit von Meß- und Automatisierungseinrichtungen
E. Schrüfer, Hanser Verlag 1984

Zuverlässigkeit, Mathematische Modelle
Karl-Walter Goede, Hanser Verlag 1977

Links

Wolfram Alpha für DGL von Aufgabe 2

Laplace Korrespondenz Tabelle (Nr. 37)

Input.prj des 1-von-2 Systems für sAnalyzeCollection