

探討 16-QAM、16-PSK、16-APSK 之星座圖位置與 mapping 影響

曾義竣(411086040)

國立臺北大學 通訊工程學系

內容摘要

在本次通訊數學期末報告中，主要探討星座圖上 16-QAM、16-PSK 和 16-APSK mapping 方式點之間的距離對於通道產生的 symbol error rate (SER) 和 bit error rate (BER) 的影響，並對於 APSK 中外圈 mapping 旋轉偏移角度做進一步分析。

關鍵字：通訊數學、期末報告、16-QAM、16-PSK、16-APSK、距離、SER、BER

1. 背景介紹

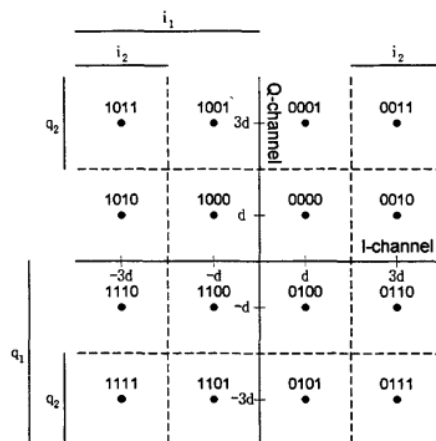
在學習 Chapter 7. Digital Transmission via Carrier Modulation[1] 模擬 16-QAM 的過程中，有發現到星座圖 mapping 兩點之間的距離會影響最終 SER 的值，距離越遠則 SER 就會越低，在這情形下，可更深入的去模擬出哪種 mapping 的結果會使得相同星座圖 BER 會更低，已知 Gray code 的方式去 mapping 的情形符合上述結果。最後結合距離和 Gray code 的理論產生 16PSK 和 APSK，並將上述 PSK 和 APSK 和相同 mapping 點數量的 QAM 進行比較並分析，此外將額外討論 16APSK 星座圖中外圈點的部分起始角度對於整體 BER 是否有其相關性。

整個通道過程包含理論值皆為 AWGN，而不是 Rayleigh fading channel，詳細會在結論與心得中會進行說明。

2. 方法與理論說明

2.1. QAM

在 QAM 中根據圖一之 Gray code 星座圖的方式和單純用序列(order)的方式分別進行 mapping，以二進制的方式表之，在已知 Gray code 是以相鄰的點只相差一個 bit 值的方式，將 bit error rate 降至最低，意即使最終 correlation 後接收錯誤為相鄰的 symbol 值，因使用 Gray code 的 mapping 方式使得最終只會產生一個 bit error。



圖一: Square 16-QAM signal constellation[2]。

此外，16-QAM 的 BER 理論值為 SER 的 $\frac{1}{4}$ ，因此可得：

$$BER_{qam} = Q\left(\sqrt{\frac{3k \times SNR}{M-1}}\right)$$

其中 M 為星座圖 mapping 數， $k = \log_2 M$

而圖一使用 Gray code 中的 BER 可由下方公式[2]獲得:

$$P_b(1) = \frac{1}{4} \left(\operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2 \times \text{SNR}}{5}} \right) + \operatorname{erfc} \left(3 \sqrt{\frac{2 \times \text{SNR}}{5}} \right) \right)$$

$$P_b(2) = \frac{1}{4} \left(2 \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2 \times \text{SNR}}{5}} \right) + \operatorname{erfc} \left(3 \sqrt{\frac{2 \times \text{SNR}}{5}} \right) - \operatorname{erfc} \left(5 \sqrt{\frac{2 \times \text{SNR}}{5}} \right) \right)$$

$$\text{BER}_{\text{qam_Gray}} = \frac{1}{2} (P_b(1) + P_b(2))$$

由此可知，使用 Gray code 的理論值會相較直接使用 BER 和 SER 的對應關係來的準確(對於模擬 Gray code 結果)。

在模擬圖一過程中，先用 mapping (16x2) 矩陣來表示 16-QAM 中各點的絕對位置，接著宣告：

```
code_mapping =
    [1 0 1 1; 1 0 0 1; 0 0 0 1; 0 0 1 1;
     1 0 1 0; 1 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 1 0;
     1 1 1 0; 1 1 0 0; 0 1 0 0; 0 1 1 0;
     1 1 1 1; 1 1 0 1; 0 1 0 1; 0 1 1 1];
```

將每個點賦予一個 4bits 的值，兩點之間只相差一個 bit，最終在每筆資料發現有 SER 時執行

```
original_bits = code_mapping(dsource(i), :);
decided_bits = code_mapping(decis, :);
bit_errors = sum(original_bits ~= decided_bits);
num_of_bit_errors = num_of_bit_errors + bit_errors
```

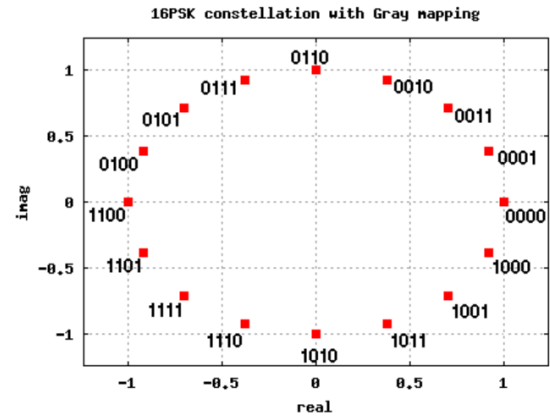
即可產生最終在該 N 筆資料中 bit error 的次數來得到 BER。

2.2. PSK

相比於 16QAM，PSK 是將 16 個點平均分散在一個半徑為 r 的圓上(圖二)，因此只會受到相位的影響，也因為 PSK 的這個特性，使得兩點之間距離較相同 bits 數的 QAM 還要來的小，導致用歐幾里得距離範圍來判斷時，判斷該點範圍較小，因此可預期相同 bits 數 PSK 的

BER 在相同 SNR 下會比 QAM 還要來的高。

如果將 PSK 的 BER 達到和相同 bits 數的 QAM 效果的話，需增加將半徑 r 的長度，使得最終兩點之間整體平均距離和 QAM 相同。



圖二: 16PSK constellation plot with Gray coded bit-mapping。

而 16-PSK 的 BER 理論值為:

$$\text{BER}_{\text{PSK}} = \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{k \times \text{SNR}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right)$$

其中 M 為星座圖 mapping 數, $k = \log_2 M$

在模擬圖二的過程中，可宣告 mapping 成(16x2)的矩陣，並宣告 theta 代表角度放入 cos 和 sin 當中：

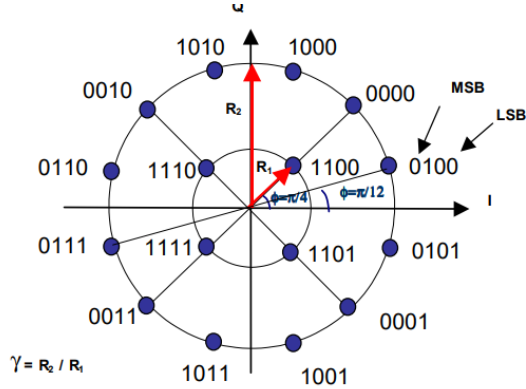
```
mapping = zeros(M, 2);
for i = 0:M-1
    theta = 2 * pi * i / M;
    mapping(i+1,:) = [cos(theta), ...
                     sin(theta)] * r*d;
end
```

其中 r 為 PSK 星座圖的半徑，主要探討 r 對 PSK 的影響。

2.3. APSK

APSK 為在 PSK 相位的概念下增加了振幅的因素，但和 QAM 不同的是，APSK 還是以圓形進行 mapping，只是將原本 16-PSK 的點拆分成內圈 4 個、外圈 12

個點的形式(圖三)。如此一來, 16-APSK 相比於傳統的 16-PSK 歐幾里得距離範圍間距來的大, 卻比 16-QAM 來的小, 因此可預期 16-APSK 的 BER 曲線在兩者之間。



圖三: 16-APSK signal constellation[3]。

而由圖三可知, 在內圈與外圈部分起始點角度分別為 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{12}$, 推測設定這樣的星座圖目的為分別在 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{3\pi}{4}$ 、 $\frac{5\pi}{4}$ 和 $\frac{7\pi}{4}$ 時, 有最大的歐幾里得距離範圍間距, 因此在模擬過程設定一個圖三的 16-APSK mapping, 另一個外圈不增加 $\frac{\pi}{12}$ 的偏移並比較兩者 BER。

```
mapping = zeros(M, 2);
for i = 0:3
    theta = (2 * i + 1) * pi / 4;
    mapping(i+1,:) = [cos(theta), ...
                     sin(theta)] * 1*d;
end
for j = 4:M-1;
    theta = 2 * pi * (j-4) / (M-4) + ...
           pi / (M-4); %APSK outer offset
    mapping(j+1,:) = [cos(theta), ...
                     sin(theta)] * r*d;
end
```

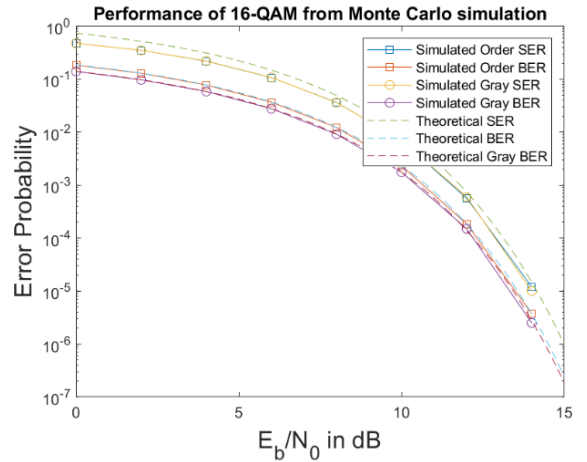
最後使用 function :

```
function [ser, ber] =
mapping(snr_in_dB, modulate, mapping_name,
N, ds_source)
```

來根據不同的 modulate(QAM、PSK、APSK) 和 mapping(order、gray) 的方式得到相對應的 SER 和 BER。

3. 實驗結果與與討論

3.1. QAM



圖四: Performance of 16-QAM from Monte Carlo simulation。

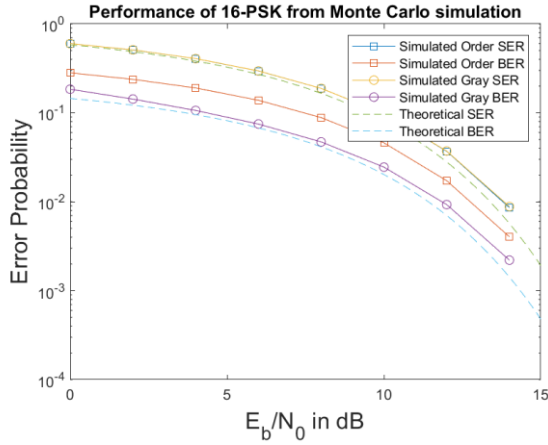
說明:

在圖四中可知, 雖主要探討 bit 編號為序列還是 Gray code 的方式, 但這兩者的 SER 皆相同(黃線和藍線重疊), 驗證相同資料在 mapping 方式的不同的情形下與原先 SER 無關。

此外, Gray code 的 mapping 方式(圓圈紫線)的 BER 值相比於序列方式(方形紅線)整體曲線還要來的小, 也符合 2.1 之結果, 而也可從藍虛線和紅虛線可知, 使用 Gray code 模擬出的結果會相比於一般 general 使用的 BER 理論值曲線更符合”Bit error probability of M-ary quadrature amplitude modulation”[2] 中的 Gray code 理論值, 也間接驗證了在計算理論值時, 使用對應 Gray code 的 mapping 產生出的理論值會比直接使用 BER 和 SER 的對應關係來的準確。

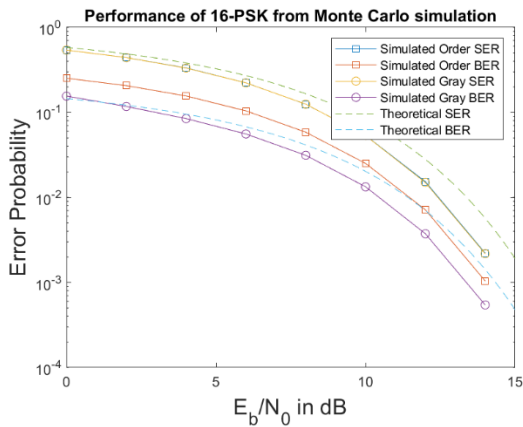
3.2. PSK

可觀察圖五得知, 16-PSK 整體 Gray code 和序列 mapping 曲線關係和 16-QAM 相同, SER 和 BER 皆為 Gray code 較低。

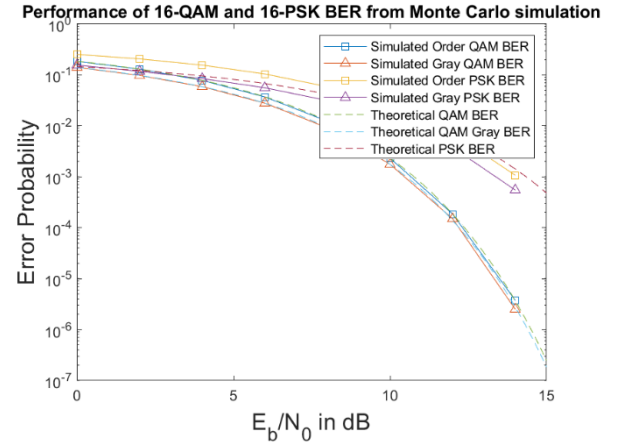


圖五: Performance of 16-PSK ($r=3$) from Monte Carlo simulation。

此外，發現到當設 PSK 半徑 r 為 16-QAM 的外圍長度 $3d$ 時，推測是因歐幾里得距離範圍間距太小的緣故，使得即使使用 Gray code 的 mapping 方式 BER 還是會超出理論曲線很多，但將 $r = 3.5$ 時(圖六)，大致符合預期曲線。同時證明出 2.2 中相同距離相同 bits 數的 PSK 的 BER 在相同 SNR 下會比 QAM 還要來的高的結論(圖七)。

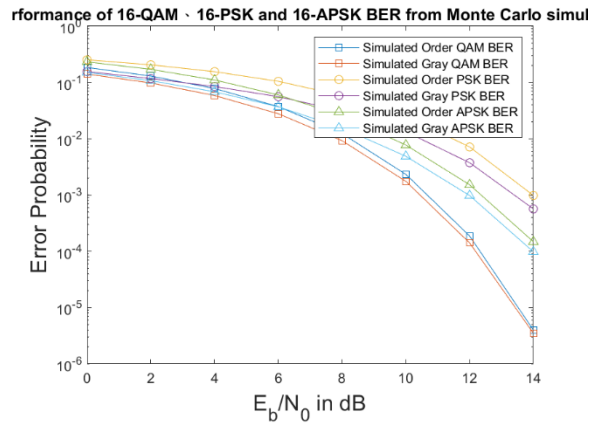


圖六: Performance of 16-PSK($r=3.5$) from Monte Carlo simulation。



圖七: Performance of 16-QAM and 16-PSK BER from Monte Carlo simulation。

3.3. APSK



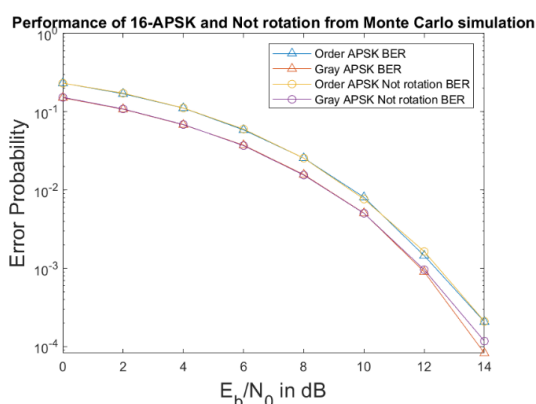
圖八: Performance of 16-QAM、16-PSK and 16-APSK BER from Monte Carlo simulation。

說明:

在圖八中可觀察得知，16-APSK mapping 的結果(內圈 $r=d$ ，外圈 $r=3.5d$)，BER 不管是次序(order)的方式(綠線)或 Gray code 的曲線結果(淺藍)，都位在 16-PSK 和 16-QAM 之間，也與當初在 2.3 中推論結果相同，再次驗證 BER 和 mapping 兩點間距距離有關。

接著將圖三 16-APSK 中外圈部分整體偏移-15 度，使圖三 0100 的位置為 $(3.5\cos(0), \sin(0))$ ，並將此結果與未偏移前進行比較(圖九)，發現在 14dB 時，未偏移的 order 和 gray code 曲線(藍線、紅線)BER 值較偏移後(橘線、紫線)來的

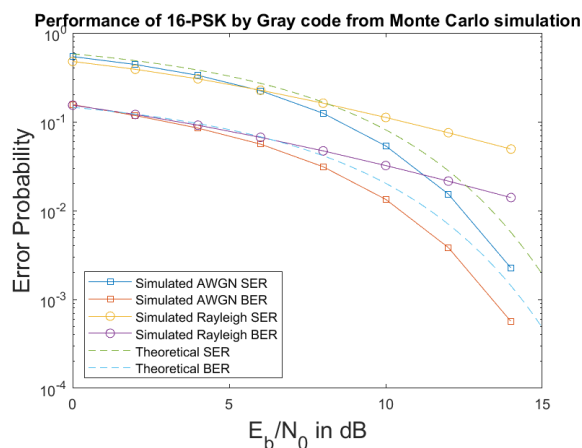
小，因此可知在 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{3\pi}{4}$ 、 $\frac{5\pi}{4}$ 和 $\frac{7\pi}{4}$ 時 16-APSK 內圈和外圈部分皆有 mapping 點是可以讓點之間距離有效範圍最大，受到雜音的干擾最小，但與偏移後曲線差異不明顯原因推測為因設置外圈半徑為 3.5d，即使有角度偏移，外圈點之間或與內圈的距離仍然相對較大，使得整體最終的最小距離仍然能夠保持在較大的範圍內。但認為最有可能原因為星座點的分佈為均勻分布，即使有偏移，也不會導致 BER 顯著增加，使得最終修正偏移影響不大。



圖九: Performance of 16-APSK and Not rotation from Monte Carlo simulation。

4. 結論與心得

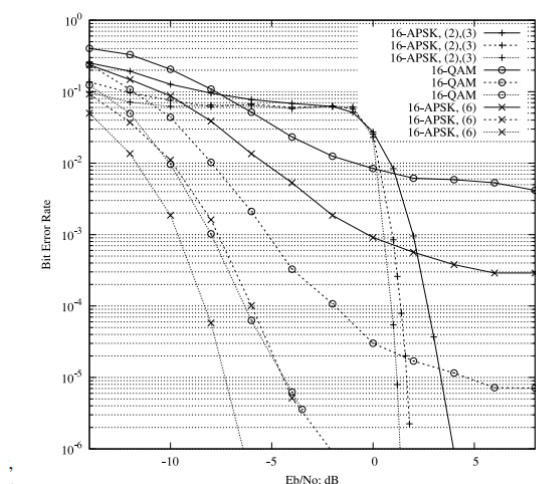
當初選擇這題目原因為當時去詢問教授關於 QAM 點之間距離(3d 和 4d)差別和 Rayleigh 和 Gaussian distribution 等通道相關問題，想藉由本次期末報告對確認當時對於星座圖之間得距離和 Rayleigh fading 對於多路徑的問題是否真的理解並做進一步的整合和延伸。起初有試著加入 Rayleigh fading channel，但發現在理論值為 AWGN 的情形下，經 Rayleigh fading 接收到的 SER 和 BER 曲線和 AWGN 理論值相差太多無法進行驗證(圖十，以 16-PSK 舉例)，且增加 Rayleigh fading 之後會產生太多可變的因素，導致無法針對距離部分比較，因此整個過程只選擇在 AWGN 情形下進行模擬。



圖十: Performance of 16-PSK by Gray code from Monte Carlo simulation

所以此次期末作業，主要探討的是各種星座圖做 mapping 的過程，並針對各點之間距離與 SER 和 BER 的關係做討論。起初對於如何將 QAM 星座圖上產生 Gray code 而困惑，但在了解其程式背後原理後就能知道曲線分布是否正確，甚至能嘗試將 PSK 和 APSK 模擬 mapping 出來，有種知道怎麼融會貫通掌握知識的成就感。

此外在參考文獻時發現”Differential 16-QAM and 16-APSK for Uplink Massive MIMO Systems”[4]這篇文獻有使用更貼近真實情形的 MIMO 通道去做模擬(圖十一)，感覺之後對這份報告去做更進一步研究的話是可以朝這方向去更貼近真實情境，抑或是增加 Rayleigh、Rician 甚至是 Nakagami 等 fading channel 加入到通道之中，再加入上課所學的 OFDM 系統實現完整的傳輸端經通道到接收端的過程。如此一來，就不單單僅是習得通道相關內容，更透過 Matlab 模擬的方式將所學知識運用並呈現出來，同時也可驗證所學理論是否正確。



圖十一：Simulation detector results of 16-APSK and the 16-QAM scheme in “Differential 16-QAM and 16-APSK for Uplink Massive MIMO Systems”[4]。

5. 參考資料

- [1] P.-H. Wang, “Chapter 7. Digital Transmission via Carrier Modulation,” 2024.
- [2] D. Yoon, K. Cho 且 J. Lee, “Bit error probability of M-ary quadrature amplitude modulation,” 於 *Vehicular Technology Conference Fall 2000. IEEE VTS Fall VTC2000. 52nd Vehicular Technology Conference (Cat. No. 00CH37152)*, 2000.
- [3] E. T. S. I. ETSI, “Digital video broadcasting (dvb); second generation framing structure, channel coding and modulation systems for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications,” *Part II: S2-Extensions (DVB-S2X)*, p. 22–27, 2005.
- [4] R.-Y. Wei 且 X.-J. Wang, “Differential 16-QAM and 16-APSK for uplink massive MIMO systems,” *IEEE Wireless Communications Letters*, 第 冊 7, p. 170–173, 2017.

附錄(如程式碼)

因程式直接複製上會造成版面排版問題，故給予檔案連結：

Matlab 檔(.m):

<https://drive.google.com/file/d/1JQxHhu9RJ063XIK0pesWm099YeySKi8y/view?usp=sharing>

程式文字檔(.txt):

<https://drive.google.com/file/d/1tc9Wr3abERjT7m33eHrBTaGAwlhZamJQ/view?usp=sharing>