

國立臺北大學通訊工程學系
112 學年度專題成果書

5G 標準應用–Rayleigh 通道中
OFDM 系統分析

指導教授：

沈瑞欽 (Juei-Chin Shen) 教授

組員：

411086040 曾義竣

411086030 劉家瑋

411086017 李柏廷

June 2024

Contents

1	Abstract	1
2	Delay Spread 、 ISI and Channel fading	1
2.1	Rayleigh and Rician	3
2.2	Doppler	3
2.3	TDL(Tapped Delay Line)	5
3	OFDM	7
3.1	FDM and OFDM subcarrier	7
3.2	QAM	9
3.3	IFFT	12
3.4	Cyclic Prefix	13

1 Abstract

在當今的 4G 和 5G 通訊系統中，正交多頻分工系統 [1]（Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM）扮演至關重要的角色。OFDM 通常用於處理擴散延遲 (Delay Spread) 所造成的符號間干擾（ISI，Inter Symbol Interference）[1],[2],[3] 和多路徑通道衰落的問題。

2 Delay Spread、ISI and Channel fading

Delay spread(擴散延遲)[1]: 當訊號經多路徑通道後會產生各種不同的延遲 τ (圖一)，而 delay spread 可簡單定義為最大延遲扣除最小延遲:

$$T_m = \tau_{max} - \tau_{min}$$

但在大多數文獻應用中，會使用方均根 delay spread 來描述:

$$T_{m(r.m.s)} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty (\tau - \bar{\tau})^2 A_c(\tau) d\tau}{\int_0^\infty A_c(\tau) d\tau}}$$

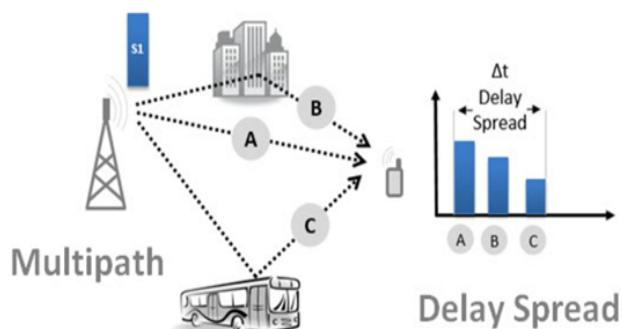
其中:

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^\infty \tau A_c(\tau) d\tau}{\int_0^\infty A_c(\tau) d\tau}$$

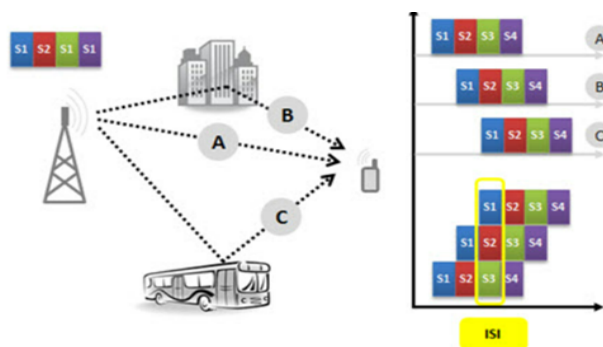
而 $A_c(\tau)$ 為功率延遲曲線。

Coherence bandwidth[1]: 被定義為 delay spread 的倒數，代表該頻寬較為穩定。當 delay spread 越大時，代表該通道的 coherence bandwidth 就會比較小，反之該通道的 coherence bandwidth 就會較大。

當子載波間距小於 coherence bandwidth 時，代表符號持續時間與 delay spread 相比足夠長，同時間不會接收不同 symbol，但當子載波間距大於 coherence band width 時，會因為符號持續時間小於 delay spread 使得同時間接收到其他 symbol 資訊造成符號間干擾 (ISI)(圖二)。

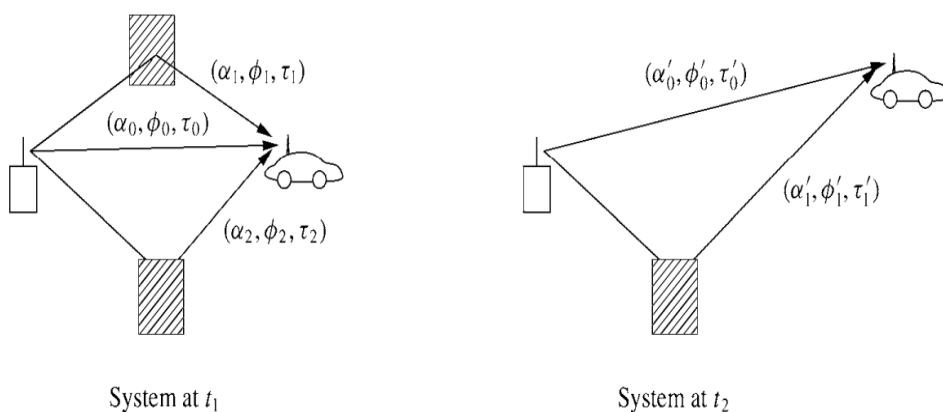


圖一: 訊號因多路徑的特性產生 Delay Spread[4]



圖二: 在同一時刻接收到 S1、S2 和 S3 的資訊造成 ISI[4]

在無線通道中，因訊號傳輸受到多路徑 (multipath) 和多種散射體 (scatterers) 的干擾下，使得在接收端所接收到的是發送端經由各種路徑和散射體所造成的折射、反射和散射後的多種獨立訊號 [1]。而每種獨立訊號具有不同的振幅、相位和時間延遲 (如圖三)，可由 Rayleigh、Rician、Doppler 和 TDL 來描述。



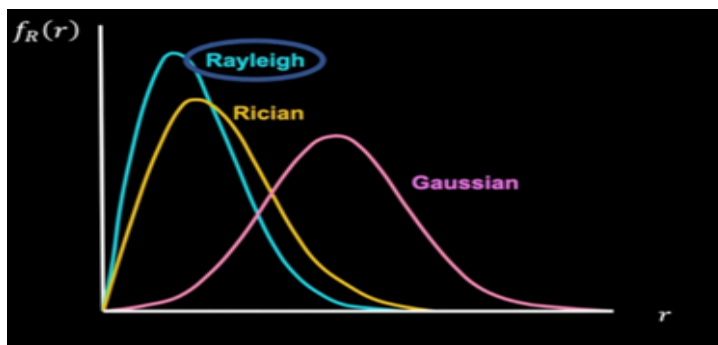
圖三: 訊號傳輸受到多路徑和散射體而有不同時間延遲、振幅和相位 [1]

2.1 Rayleigh and Rician

表一: Rayleigh and Rician channel fading[2]

	Rayleigh	Rician
LOS (line of sight)	No	Yes
PDF	$f_{R\Phi}(r, \phi) = \frac{r}{\sigma^2} \exp \left[-\frac{(r^2)}{2\sigma^2} \right]$	$f_{R\Phi}(r, \phi) = \frac{r}{\sigma^2} \exp \left[-\frac{(r^2 + A^2)}{2\sigma^2} \right] I_0 \left(\frac{Ar}{\sigma^2} \right)$

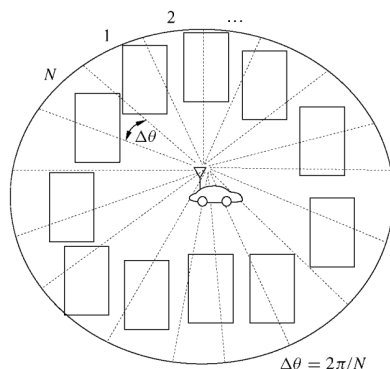
相較於 Rician PDF 所形成的 Rician fading channel，Rayleigh fading channel 因無直射路徑 (NLOS) 的關係，無較大的直射成分能量 [1],[2]，使得訊號受衰減影響較大，因此被視為最差情況。雖然 Rayleigh 衰減是一種最差情形，但只要確保 Rayleigh channel 無受到符號間干擾 (ISI) [1],[2],[3]，同時也代表著其他 fading channel 沒有 ISI 的效應產生。



圖四: Rayleigh、Rician 和 Gaussian distribution[5]

2.2 Doppler

在 Rayleigh fading channel 中所使用的 Rayleigh fading 模型是假設這些多路徑和多種散射體影響下的幅度和相位都是隨機的情形下，接收端物體開始移動時所接收到的訊號在相位會受到 Doppler 的影響而隨時間改變 (圖五)



圖五: Dense scattering environment [1]

接收端公式如下:

$$r(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i(t) u(t - \tau_i(t)) e^{j[\omega_c(t - \tau_i(t)) + \phi_{D_i}(t)]} \right\}$$

經由簡化得到:

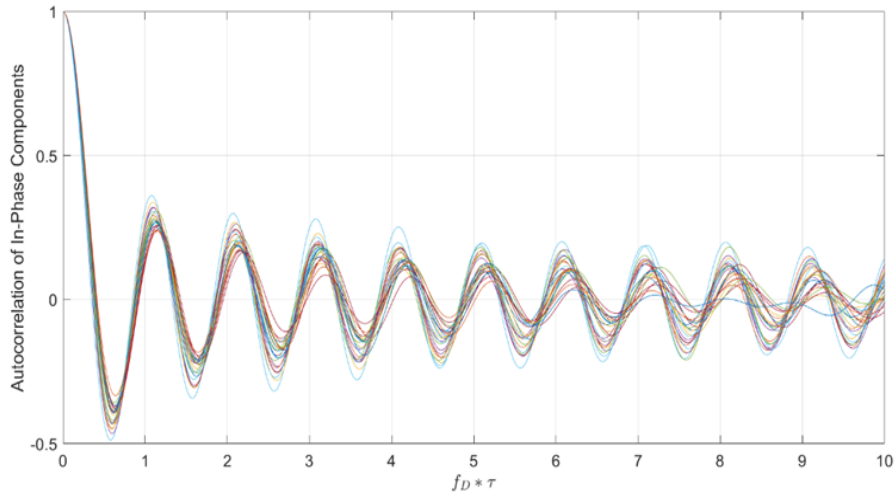
$$r(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \alpha(t) e^{-j\phi_i(t)} e^{j\omega_c t} \right\} = r_I(t) \cos(\omega_c t) - r_Q(t) \sin(\omega_c t)$$

其中 α 為 Rayleigh 分布, $\phi_i(t) = \omega_c \tau_i(t) - \phi_{D_n} - \phi_0$ 為 uniform 分布 $[-\pi, \pi]$ 。在 uniform scatter 的環境造成的 rayleigh fading 中已知正交訊號 $r_I(t)$ 、 $r_Q(t)$ 互相獨立的情形下, 接收端訊號 $r(t)$ 的 autocorrelation 呈現零階 Bessel function 的曲線模型 [1],[6]:

$$\begin{aligned} A_r(\tau) &= A_{r_I}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + A_{r_I, r_Q}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) \\ &= A_{r_I}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \\ &= \mathcal{P}_{r, J_0}(2\pi f_d \tau) \end{aligned}$$

其中 P_r 為接收端接收到的總功率, f_d 為最大 Doppler 頻移, $J_0(x)$ 為零階 Bessel function。

當 autocorrelation 為 0 時, 能產生最大 Doppler 頻移 f_d , 當 autocorrelation 第一次為 0 時, $2\pi f_d \tau = 2.4048$, 所以 $f_d \tau = \frac{2.4048}{2\pi} \approx 0.3827$ 。而 f_d 可由 $f_d = \frac{v \times f_c}{c}$ 得出。(v 是相對速度, f_c 為載波頻率, c 是光速)



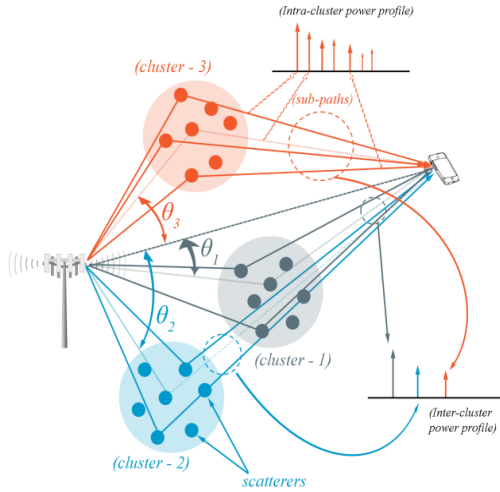
圖六: 接收端訊號在 rayleigh fading in-phase 的每個 tap 的 autocorrelation 皆符合零階 Bessel function 的曲線模型 [1],[6], 且在 $f_d \tau = \frac{2.4048}{2\pi} \approx 0.3827$ 時第一次達到零值。

2.3 TDL(Tapped Delay Line)

因 TDL 為 CDL 的簡化模型，我們可用 CDL 來描述 TDL。

CDL(Clustered Delay Line)[7]：用於多路徑傳輸並且考慮傳輸角度 (入射角及反射角)，一般在每個 cluster 會有 20 個 ray，在物理意義上就是 20 個路程相近的 ray。

雖因 TDL[7],[8] 在實際上每個 tap 中是有 20 個路徑，但 20 個路徑之間的時間差 (與訊號頻寬倒數有關) 太小無法解析到 20 個 ray，所以 TDL 用一根 tap 代表 CDL 的 20 個 ray。其中每個 ray 的相位是隨機分布，因此這 20 個隨機的相位加起來就會呈現 Rayleigh 分布。



圖七: CDL with three clusters，右下標示為 TDL 在該多路徑通道 impulse response [7]。

由下面接收端數學式說明:

$$r(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) e^{-j\phi_n(t)} e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

$\alpha_n(t)$ 和 $\phi_n(t)$ 分別為第 n 條射線的隨機振幅和相位。

當 N 足夠大時，根據中央極限定理，實部和虛部的和會趨於零均值、高斯分佈，這導致加總訊號的幅度 $r(t)$ 呈現 Rayleigh 分布。因此將每個 tap 的值設為 Rayleigh fading 符合實際通信環境的多路徑衰減特性。

而多路徑延遲中會因為不同環境場景的通道造成不同 delay spread 而有

不同的衰弱情形，可根據 3GPP 中的 TDL 來表之。3GPP[9] 將常見通道定義成 'TDL_A', 'TDL_B', 'TDL_C', 'TDL_D', 'TDL_E' 5 種:

TDL_A: 假設每個 tap 的值是相互獨立且服從 Rayleigh 分佈，且 tap 之間的干擾是無關聯的。這個模型通常用於描述簡單的多路徑衰減情況，適用於一般的通信系統分析。

TDL_B: 假設每個 tap 的值是相互獨立的，但服從 Rician 分佈而非 Rayleigh 分佈，這意味著在信號中存在主要路徑和多重散射路徑之間的干擾。這個模型通常用於描述有強烈主要路徑和散射路徑的通信環境，如衛星通信或城市環境。

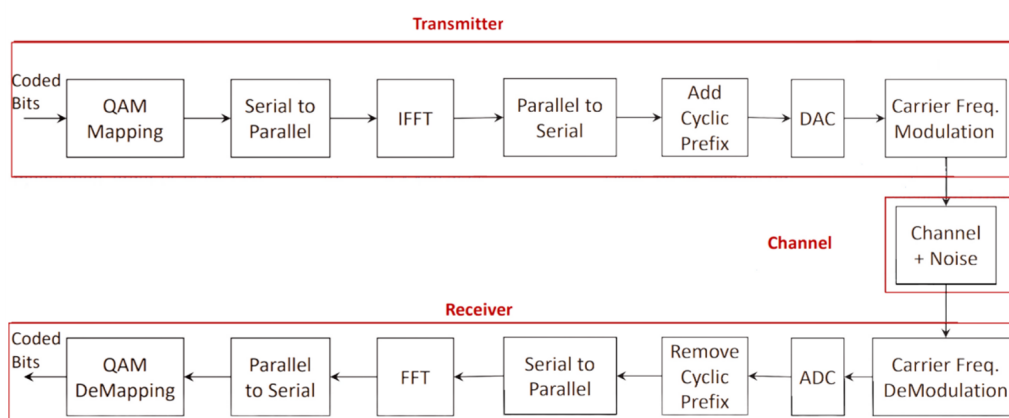
TDL_C: 則是一個混合型的模型，結合了 TDL_A 和 TDL_B 的特性，既考慮了 Rayleigh 分佈的多重散射，也考慮了 Rician 分佈的主要路徑。這個模型通常用於更複雜的通信環境，以更準確地模擬真實世界的通道特性。

TDL_D: 主要用於描述多路徑衰減時，考慮到在通信系統中可能存在的時變性。這種模型會將信道的衰減特性視為隨時間而變化，例如由於使用者的移動導致的信道時變性。TDL_D 模型通常用於建模時變信道，並且能夠更準確地反映出實際通信環境中的時變性。

TDL_E: 則是一種更複雜的模型，通常用於描述非均勻的多路徑衰減。這種模型考慮到不同的路徑對信號的貢獻不同，例如在特定方向上存在強烈的信號路徑，而在其他方向上則相對較弱。TDL_E 模型能夠更好地模擬出非均勻多路徑衰減的情況，並且用於對特定通信環境進行更精細的分析和設計。

而 OFDM 擁有多個抗雜訊方法來對抗多路徑通道所產生的 ISI 和 TDL channel fading 等問題，本次主要模擬 OFDM 在 TDL-A 模型中對於多路徑通道進行傳輸。

3 OFDM



圖八: Block Diagram of OFDM Systems[10]

3.1 FDM and OFDM subcarrier

FDM [1],[11]: 通常是一個訊號會搭配一個載波，但此情況通道內部份訊息遇到干擾時，因和載波 convolution 後訊號的頻寬無互相獨立，導致整個訊息無法正確解碼，容易造成浪費。FDM 想法是將載波頻率切割成 N 等份獨立頻率的子載波，每個子載波負責傳輸一部分訊號，使得各個子載波傳送後的頻寬間無交疊不互相影響獨立，即使某個頻率帶寬受到干擾，其他頻率帶寬上的訊號仍然能夠正確接收和解碼，大大地減少頻寬浪費。

OFDM [1],[11]: 但 FDM 這樣做僅是在相同時間內傳送更多訊號，但總使用頻寬不變，因此試著在頻寬上的子載波間距更小，使得雖然每個 sub-carrier 間有部分重疊，但在該頻率點位置與其他子載波為正交 (Orthogonal) 不會受到影響 (可由下方證明得知)，同時所使用頻寬大大減少，而每個子載波因正交而能夠在同一時間分別平行傳送 symbol，這就是 OFDM 的想法。

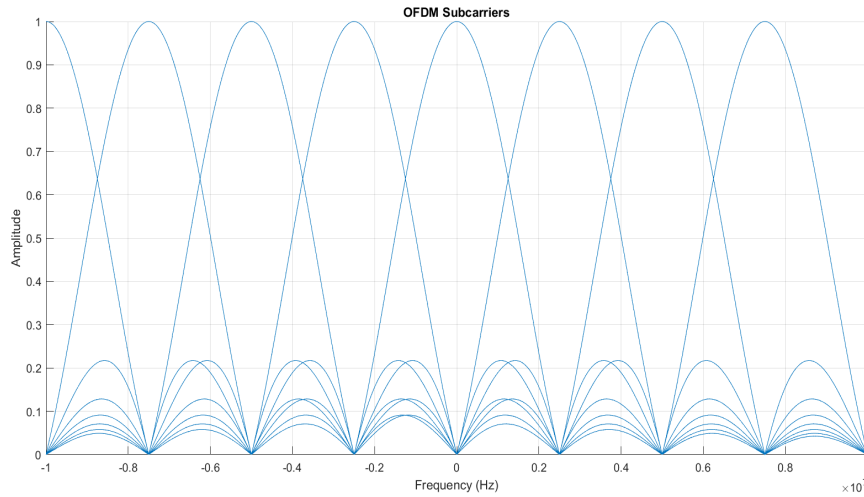
證明 [1]:

如果忽略通道 $h(t)$ 和噪聲 $n(t)$ 的影響，那麼對於接收信號 $s(t)$ 中每個符號解調器在一個 symbol 持續時間 T_N (T_N 大約為 $\frac{1}{15 \text{ kHz}}$ ，假設每個子載波頻率為 $f_0 + \frac{i}{T_N}$ ，其中 $i = 0 \sim N-1$):

$$\begin{aligned}
\hat{s}_i &= \int_0^{T_N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} s_j g(t) \cos(2\pi f_j t + \phi_j) \right) g(t) \cos(2\pi f_i t + \phi_i) dt \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} s_j \int_0^{T_N} g^2(t) \cos \left(2\pi \left(f_0 + \frac{j}{T_N} \right) t + \phi_j \right) \cos \left(2\pi \left(f_0 + \frac{i}{T_N} \right) t + \phi_i \right) dt \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} s_j \delta(j - i) \\
&= s_i
\end{aligned}$$

其中 \hat{s}_i 為 $s(t)$ 訊號與第 i 個子通道 correlation 後的 symbol， s_j 是第 j 個子通道的 symbol， $g(t)$ 是接收濾波器的脈衝響應， f_j 和 f_i 分別是第 j 個和第 i 個子載波頻率， ϕ_j 和 ϕ_i 分別是第 j 個和第 i 個子通道經多普勒影響 [1] 所產生的相位。

由此可知，在接收端將每個子通道的 symbol 經子載波調變後的高頻訊號，以及對於第 i 個子通道的 symbol 和子載波調變後的高頻訊號進行 correlation 後得到 \hat{s}_i ，與原先第 i 個子通道的 symbol s_i 相同。證明了在頻率點位置 f_i 和其他子載波的位置之間是正交的相互獨立的，因此即使子載波傳遞後訊號頻寬有重疊部分，也可以有效地區分和接收每個子通道的訊號 (圖九)。



圖九: OFDM 經每個子載波傳遞後的訊號頻寬雖有重疊部分依然有正交性 [12]。

3.2 QAM

BPSK [13]: 在相同時間 (symbol), 可容納一個 bit ($0(0^\circ)$ 或 $1(180^\circ)$) 的資訊量。

QPSK [13]: 在相同時間 (symbol), 可容納兩個 bits ($00(0^\circ)$ 、 $01(90^\circ)$ 、 $10(180^\circ)$ 、 $11(270^\circ)$) 的資訊量。

(BPSK 和 QPSK 都是屬於 PSK 的一種, 都是只受到相位影響)

QPSK 相對於 BPSK 可容納較多資訊量, 代表在無雜訊情形下相同頻寬大小 QPSK 有更多資訊, 傳輸速度更快。

假設有一數位訊號 001010101011101:

BPSK: 一個 symbol 只能傳輸 1bits, 因此一次只能傳輸 0。

QPSK: 一個 symbol 能傳輸 2bits, 因此能一次傳輸 00。

和 PSK 不同的是 QAM[13],[14],[15] 包含了幅度和相位, 以 16QAM 為例, 16QAM 擁有 4bits 的大小。

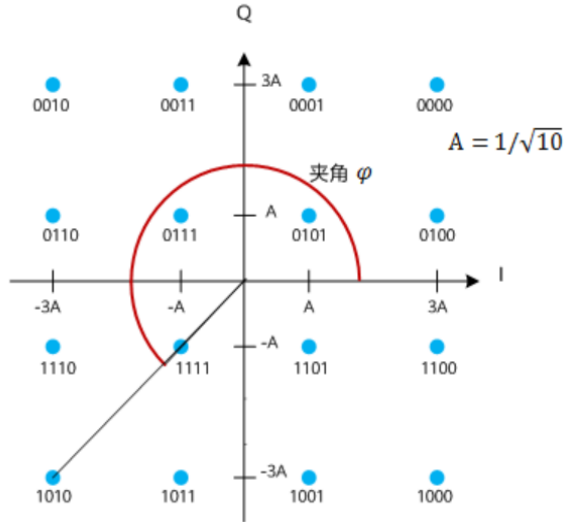
假設有一數位訊號 0110 經過 16QAM, 是先用星座圖得知 0110 在星座圖上的位置, 在根據位置得出該點複數值, 通常會將正弦大小用虛數表之, 該複數實數為數位訊號投影至餘弦載波的投影, 該複數虛數為數位訊號投影至正弦載波的投影, 最後調變相加即可完成 QAM 調變。

因 16QAM 以上相較於能傳輸相同 bits 資訊的 PSK, 以星座圖來說點與點之間擁有較多距離, 因此 QAM 較常於被使用。

在單一載波頻率 f_c 且忽略雜訊情形下, 將數位訊號 0110 透過對應圖十星座盤可得一複數值 $-3A + jA$ 來代表數位訊號 0110 透過載波進行調變後可表示成:

$$x(t) = (-3A + jA)e^{j2\pi f_c t}$$

其中“-3A”和“A”分別代表正交投影之 I、Q 分量 (I 代表映射在餘弦載波的投影, Q 代表映射在正弦載波投影)



圖十: 在載波頻率 f_c 情形下之 16QAM 星座圖，其中 I 代表映射在餘弦載波的投影，Q 代表映射在正弦載波投影，每個點都有相對應的波形 [16]。

在 OFDM 中將訊號用 QAM Mapping 時，透過將載波頻率切割成 N 等份獨立頻率的子載波的特性，在忽略雜訊情形下，將數位訊號 011000000110... 透過對應星座盤得一複數值 $a_i + jb_i$ 來代表第 i 個子通道對應星座圖的 symbol。(假設在 16QAM、子載波頻率分別為 f_0 、 f_1 、 \dots 、 f_{N-1} 情形下)

$$\begin{aligned} x_0[n] &= (a_0 + jb_0)e^{j2\pi f_0 n} \\ x_1[n] &= (a_1 + jb_1)e^{j2\pi f_1 n} \\ &\vdots \\ x_{N-1}[n] &= (a_{N-1} + jb_{N-1})e^{j2\pi f_{N-1} n} \end{aligned}$$

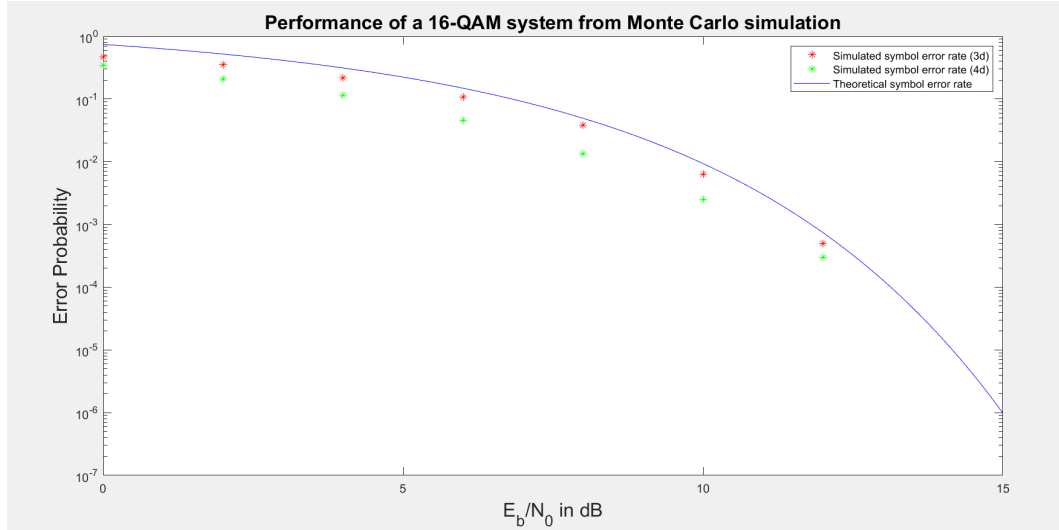
在 OFDM 描述中有提到，如果忽略通道 $h(t)$ 和噪聲 $n(t)$ 的影響，那麼對於接收信號 $s(t)$ 中每個符號解調器在一個 symbol 持續時間 T_N 中所接收到的 symbol 為：

$$\hat{s}_i = \int_0^{T_N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} s_j g(t) \cos(2\pi f_j t + \phi_j) \right) g(t) \cos(2\pi f_i t + \phi_i) dt = s_i$$

將噪聲 $n(t)$ 考慮進去後，會發現到接收端接收到第 i 個子通道的 symbol 值會受到第 i 個子通道中所受到雜訊 n_i 所影響：

$$\hat{s}_i = s_i + n_i$$

由此可知，在 n_i 為 AWGN 的情形下，訊號雜訊比 (SNR, Signal-to-noise ratio)[2] 的大小取決於 s_i 星座圖上符號點之間的間距所對應的 symbol 值。



圖十一: 紅點為圖十 16QAM 星座圖上的 error probability，將 3A 距離更改為 4A 後之 error probability 以綠點顯示，藍線為理論符號錯誤率。

訊號雜訊比 (SNR, Signal-to-noise ratio) :

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} = \frac{A_{\text{signal}}^2}{A_{\text{noise}}^2}$$

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log \left(\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} \right) = 20 \log \left(\frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right)$$

P、A 分別表示功率和振幅，其中 A 用星座圖上該點到原點之距離來描述，將每點振幅相加後取平均即可獲得星座圖的平均功率 (x、y 分別為一點到 y 軸、x 軸距離) :

$$P_{\text{signal}} = \frac{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2}{n} = \frac{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2}{n}$$

由此可知，當星座圖的 3A 更改為 4A 時，因距離更遠使得 4A 的平均功率較 3A 來的大，在 AWGN 下就會有更好的 SNR，相對來說在相同 SNR 情形下就會降低 error probability。

3.3 IFFT

OFDM 經過 QAM mapping 和 parallel 後，每個 symbol 轉成複數值並與子載波相乘調變 [1],[3](當高頻載波切割成 N 等份子載波時)：(令 $x_k[n]$ 為第 k 個 symbol 和第 k 個子載波相乘調變結果， $X[k]$ 為第 k 個 symbol(用複數訊號表示， $X[k] = a_k + jb_k$)

$$\begin{aligned}x_0[n] &= X[0]e^{j2\pi\frac{0}{N}n} \\x_1[n] &= X[1]e^{j2\pi\frac{1}{N}n} \\&\vdots \\x_{N-1}[n] &= X[N-1]e^{j2\pi\frac{N-1}{N}n}\end{aligned}$$

其中 n 可看作在時域上的第 n 個取樣點
將每個子載波上相同時刻的取樣點 n 相加：

$$\begin{aligned}x[n] &= x_0[n] + x_1[n] + \cdots + x_{N-1}[n] \\&= X[0]e^{j2\pi\frac{0}{N}n} + X[1]e^{j2\pi\frac{1}{N}n} + \cdots + X[N-1]e^{j2\pi\frac{N-1}{N}n} \\&= \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi\frac{k}{N}n}\end{aligned}$$

此結果與 IDFT、IFFT 相同，僅是係數不同。
將調變結果 Normalize 後可得 IFFT：

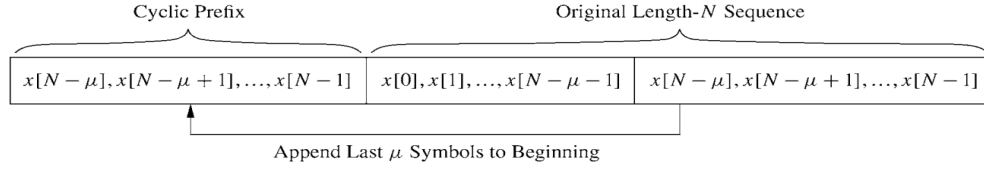
$$\text{IFFT}[X[k]] = x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$$

在 OFDM 系統中，對 QAM 調製後的訊號和子載波進行相加的操作，本質上相當於將輸入訊號進行取樣後的結果。這個結果可以視為輸入訊號通過逆離散傅立葉變換 (IFFT) 轉換到時域的過程 [1],[3]。這意味著在 OFDM 系統中，訊號的調製和合併的操作與時域中的訊號形成是一致的，這使得 OFDM 系統在頻域和時域之間可以方便地進行轉換和處理。

3.4 Cyclic Prefix

訊號在通道中產生 Delay Spread，可看作在通道做脈衝響應 (impulse response)，此時可藉由訊號在時域做 convolution[1],[17] 等效於在頻域相乘的特性。在頻域可用接收端訊號 $Y = \hat{G}X$ 來表示，其中 \hat{G} 為系統頻譜響應矩陣， X 為輸送端訊號矩陣。

在 OFDM 中為了在接收端乘上系統頻譜響應的反矩陣 \hat{G}^{-1} 來還原出原始 X 的訊號矩陣，此時的 \hat{G} 在時域必須滿足 cyclic convolution 同時避免 ISI 的問題發生。將符號的尾端複製到整個 symbol 的最前端可滿足 cyclic convolution 的形式，而從尾端被複製到整個 symbol 開頭的部分稱為 cyclic prefix(圖十二)。



圖十二:cyclic prefix of length μ [1]

在無雜訊干擾下可用以下式子描述 [17]：

(Suppose symbol length $N=6$ ，cyclic prefix(CP) $\mu=2$ ，OFDM symbol length $N+\mu=8$ ，time-domain impulse response $g = [g[0], g[1], g[2]]$)

$$y = [g[0], g[1], g[2]] * [x[4], x[5], x[0], x[1], x[2], x[3], x[4], x[5]]$$

該通道在 LTI 下的連續脈衝響應為：

$$\begin{aligned} y[0] &= g[0]x[4] \\ y[1] &= g[0]x[5] + g[1]x[4] \\ y[2] &= g[0]x[0] + g[1]x[5] + g[2]x[4] \\ y[3] &= g[0]x[1] + g[1]x[0] + g[2]x[5] \\ y[4] &= g[0]x[2] + g[1]x[1] + g[2]x[0] \\ y[5] &= g[0]x[3] + g[1]x[2] + g[2]x[1] \\ y[6] &= g[0]x[4] + g[1]x[3] + g[2]x[2] \\ y[7] &= g[0]x[5] + g[1]x[4] + g[2]x[3] \\ y[8] &= g[1]x[5] + g[2]x[4] \\ y[9] &= g[2]x[5] \end{aligned}$$

將上述用矩陣表示 (以下 $y[n]$ 用 y_n 表示) :

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

由此可知，在 y_0 、 y_1 、 y_8 和 y_9 部分為因 cyclic prefix 所形成的 ISI，剩餘部分為訊號經通道後 cyclic convolution 的結果，將 cyclic prefix 部分捨棄只保留 cyclic convolution 的矩陣為 G ，其結果關係為：

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

此時因輸送端的中的 x_4 和 x_5 在矩陣 X 中有重複，因此將矩陣 G 整併後並加上雜訊干擾後可簡化為：

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 \\ g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \\ g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

最終可將接收端和輸送端在 OFDM 過程的時域上通道的影響表示為：

$$\mathbf{y} = \hat{G}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

其中 \hat{G} 為 $N \times N$ (在上述例子為 6×6) 的方陣， \mathbf{v} 矩陣為雜訊在時域通道上 symbol 的影響 [1]。

在 FFT 中訊號透過子載波傳送時其傳遞結果可以視為輸入訊號通過逆離散傅立葉變換 (IFFT) 轉換到時域的過程。因此可令時域上 x 和頻域上 X 矩陣有 FFT 的關係存在，其 FFT 和矩陣 Q [1],[17] 可表示為:

$$\text{FFT}[x[n]] = X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi k}{N} n}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi \cdot 1}{N} \cdot 1} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi \cdot k}{N} \cdot 1} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi (N-1)}{N} \cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi \cdot 1}{N} \cdot n} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi \cdot k}{N} \cdot n} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi (N-1)}{N} \cdot n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi \cdot 1}{N} \cdot (N-1)} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi \cdot k}{N} \cdot (N-1)} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi (N-1)}{N} \cdot (N-1)} \end{bmatrix}$$

其中 $X = Qx$ 且 $x = Q^{-1}X = Q^H X$ ， Q^H 為 Q 的共軛轉置 [1]。

最後可得:

$$\begin{aligned} Y &= Qy && \text{(FFT)} \\ &= Q[G^H(x + v)] && \text{(since } y = G^H x + v) \\ &= Q[G^H Q^H (X + v)] && \text{(IFFT)} \\ &= Q[M \Lambda M^H Q^H (X + v)] && (G^H \text{ is diagonalizable matrix)} \\ &= Q M \Lambda M^H Q^H (X + Qv) && \text{(distributivity[18])} \\ &= M^H M M \Lambda M^H (MX + Qv) && (Q^H \text{ are eigenvectors of } \hat{G}) \\ &= \Lambda X + v_Q && (M^H M = M M^H = I) \end{aligned}$$

在忽略噪音 v_Q 的干擾下，可看作接收端的 Y 為輸送端的 X 經對角矩陣 Λ :

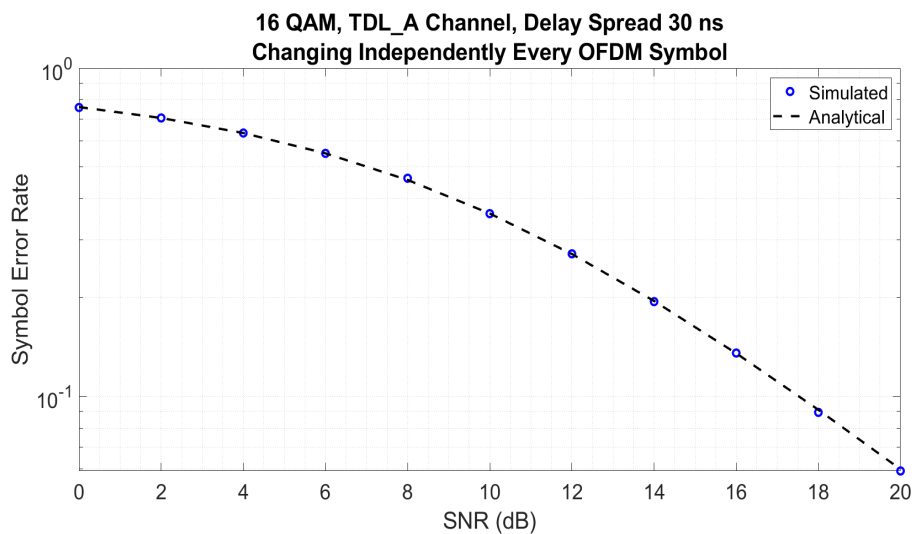
$$Y = \Lambda X$$

其矩陣可表示為:

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \\ \vdots \\ Y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0,0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & H_{1,1} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{n,n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & H_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

由上述可驗證，OFDM 系統通道的頻域中，在忽略雜訊干擾情形下，只需在接收端 Y_n 乘上脈衝響應經 cyclic prefix 後相對應衰弱係數 $H_{n,n}$ 的倒數 $\frac{1}{H_{n,n}}$ ，即可回復為原輸送端的訊號 X_n 。

最終 16QAM 經模擬結果當訊號經過 TDL_A Rayleigh fading channel 時，所呈現出 SNR 對應的 SER 和理論曲線相同 (圖十三)。



圖十三:16QAM,TDL_A Channel, Delay Spread 30 ns Changing Independently Every OFDM Symbol

References

- [1] A. Goldsmith, *Wireless communications*. Cambridge university press, 2005.
- [2] R. Ziemer and W. H. Tranter, *Principles of communications: system modulation and noise*. John Wiley & Sons, 2006.
- [3] DareError, “Ofdm, 正交分頻多工系統 (1): Modulation, 調變,” 2021. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=FJq54Y8gy9Q&t=764s>.
- [4] L. Z. Pedrini, “What is isi (inter symbol interference) in lte?,” 2014. [Online]. Available: <https://www.telecomhall.net/t/what-is-isi-inter-symbol-interference-in-lte/6370>.
- [5] AKH, “Rayleigh fading and rician fading explained with cricket analogy,” 2021. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=XWFpou6_xbU.
- [6] Y. R. Zheng and C. Xiao, “Improved models for the generation of multiple uncorrelated rayleigh fading waveforms,” *IEEE Communications letters*, vol. 6, no. 6, pp. 256–258, 2002.
- [7] S. Jana, A. K. Mishra, and M. Z. A. Khan, “Sensing the environment with 5g scattered signals (5g-commsense): A feasibility analysis,” in *2023 IEEE Applied Sensing Conference (APSCON)*, IEEE, 2023, pp. 1–3.
- [8] T. S. Rappaport, *Wireless communications: principles and practice*. Cambridge University Press, 2024.
- [9] Q. Zhu, C.-X. Wang, B. Hua, K. Mao, S. Jiang, and M. Yao, “3gpp tr 38.901 channel model,” in *the wiley 5G Ref: the essential 5G reference online*, Wiley Press Hoboken, NJ, USA, 2021, pp. 1–35.
- [10] J.-C. Shen, “Readme_matlab_platform,” 2023.
- [11] M. DaYang, “圖文並茂—fdm、ofdm 的差別及優缺點、調制解調過程,” 2020. [Online]. Available: https://blog.csdn.net/m0_46204224/article/details/106100857.
- [12] NicDino, “Ofdm 技術 fdm 技術區別,” 2019. [Online]. Available: <https://www.zhihu.com/question/20606092/answer/15809411>.
- [13] D. J. Class, “Hd10_ 正交振幅調變 00583,” 2017. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=54-6ivM8E9c0&t=49s>.
- [14] R. elements s.r.o., “Inside wireless: Qam modulation (quadrature amplitude modulation),” 2020. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=IbUflaeJcU8&t=1s>.

- [15] R. elements s.r.o., *Inside Wireless: QAM modulation II - The Modulator*, 2021. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=YnWCRUoTEAI&t=134s>.
- [16] Huawei, “What is qam? how does qam work?,” 2021. [Online]. Available: <https://forum.huawei.com/enterprise/en/What-Is-QAM-How-Does-QAM-Work/thread/667247322570047488-667213855346012160>.
- [17] DareError, “Ofdm, 正交分頻多工系統 (2): One-tap equalizer, 一階等化器,” 2021. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=o4eB4BwVIJl>.
- [18] ccjou, “可對角化矩陣的譜分解,” 2010. [Online]. Available: <https://ccjou.wordpress.com/2010/08/23/%E5%8F%AF%E5%B0%8D%E8%A7%92%E5%8C%96%E7%9F%A9%E9%99%A3%E7%9A%84%E8%AD%9C%E5%88%86%E8%A7%A3/>.