

Métodos Numéricos II

Segunda Lista de Exercícios

Para tornar mais claro os objetivos desta lista de exercícios, criei uma introdução sobre o problema de difusão. Espero que a apresentação dê maior clareza às questões envolvendo o problema em si.

Quanto à geração dos gráficos, optei por conectar os pontos de discretização por meio de linhas (opção **w l** do gnuplot). Lembrem-se disto ao analisar os gráficos. Mais uma vez: não compliquem seus programas! Tomem como referência os meus programas. Pelo menos vocês poderão dizer que o mal programador fui eu.

Os resultados apresentados foram conseguidos usando o programa parabolicae.c, em linguagem C, uma implementação do método explícito apresentado em sala de aula. As condições iniciais e de contorno são:

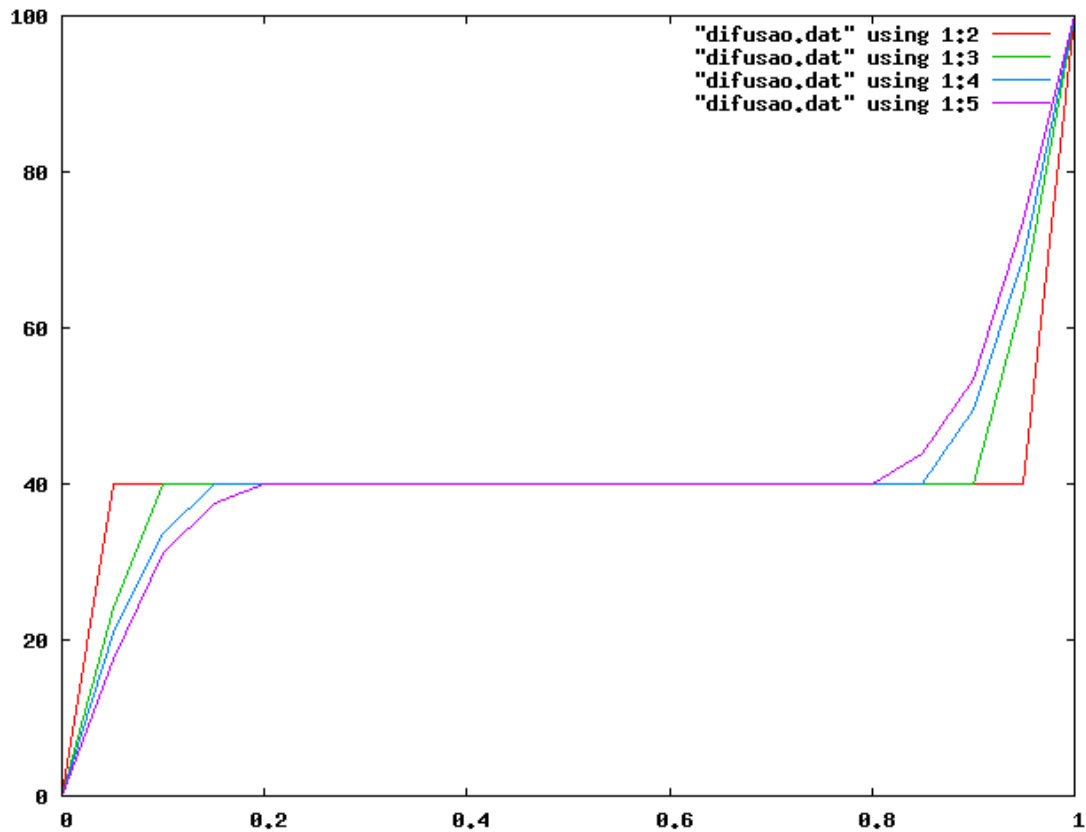
$$\begin{aligned}\varphi(0, x) &= 40 \\ \varphi(t, 0) &= 0 \\ \varphi(t, 1) &= 100\end{aligned}$$

A discretização espacial é de 0,05 para todos os casos e vario a discretização temporal. Caso vocês quiserem usar o programa, mesmo sem conhecer linguagem C, apenas substituam os valores das condições de contorno e inicial, assim como os valores de tempo de simulação e o tamanho do domínio espacial. Observem a forma com que foram gerados os dados. Primeiro foram colocados numa matriz e depois o arquivo de saída foi criado com a transposta da matriz.

Qualquer problema, não deixem para perguntar nas vésperas da prova.

Caso $dt = 0,001$

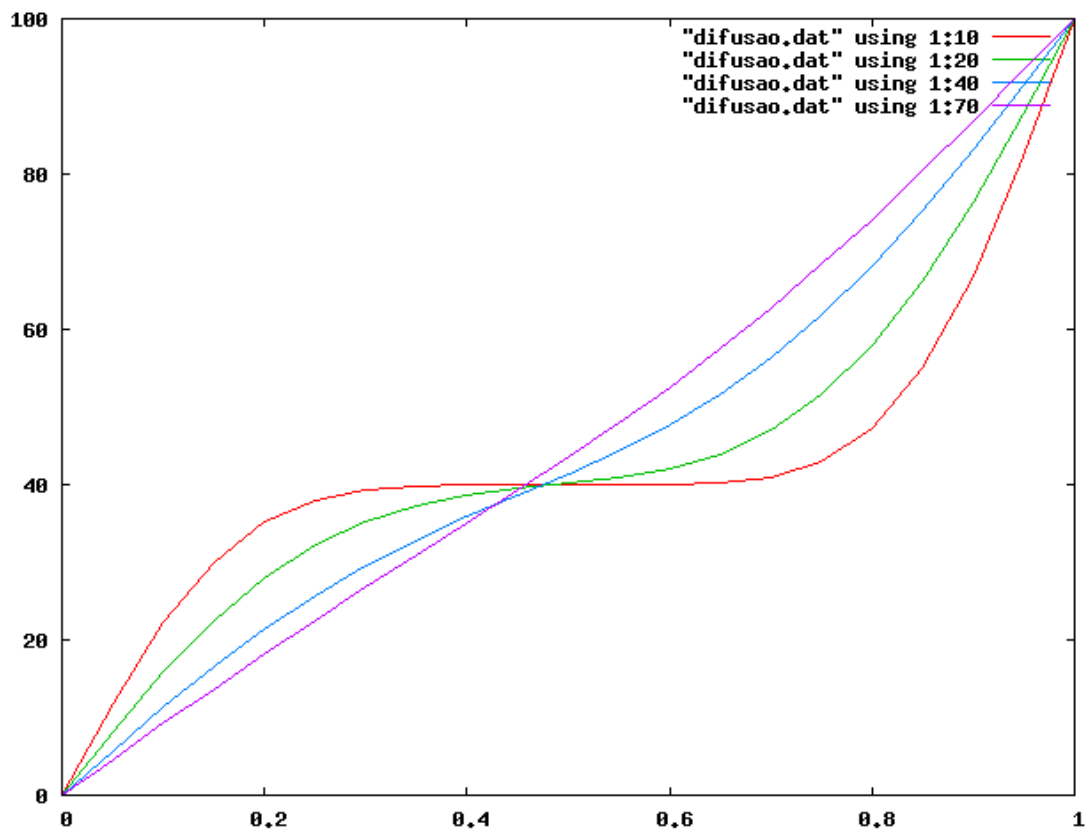
Na primeira massa de dados foi usado 0,001 para a discretização temporal e abaixo apresento dois gráficos gerados com o Gnuplot usando linha de comando. Tais comandos funcionam em qualquer plataforma que você estiver usando. Abaixo de cada figura está a sequência de comandos para a sua geração. Caso não esteja, o texto esclarecerá as dúvidas relativas. Observe a figura abaixo:



Comando para a gerar a figura:

```
plot "difusao.dat" using 1:2 w l, "difusao.dat" using 1:3 w l, "difusao.dat" using 1:4  
w l, "difusao.dat" using 1:5 w l
```

Na figura acima temos os primeiros passos da simulação da solução da equação de difusão. Lembrem-se que a primeira coluna do arquivo de nome difusao.dat contém os valores da variável x , a segunda coluna tem o valor da solução no tempo t_0 (valor inicial), a terceira o valor da solução no tempo t_1 e assim por diante (no canto superior direito da figura está colocada uma legenda mostrando de quais colunas do arquivo foram extraídos os valores). Observem que ocorre aquele fenômeno da informação do contorno ir a cada passo de tempo se introduzindo no domínio de solução. Tal comportamento, como vimos, tem algo de não físico mas isto não invalida o método a priori. Abaixo temos outros instantes de tempo da solução sobrepostos. Aqui os tempos foram escolhidos para evidenciar o processo evolutivo.



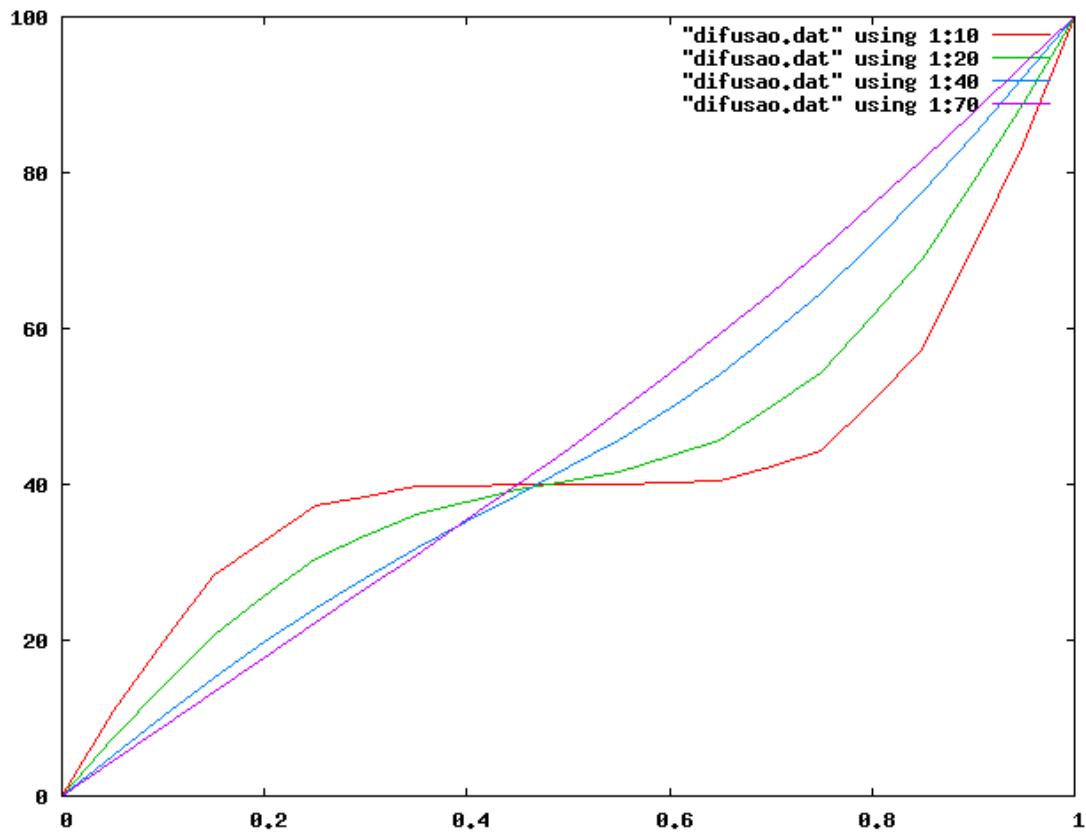
Comando para a gerar a figura:

plot "difusao.dat" using 1:10 w l, "difusao.dat" using 1:20 w l, "difusao.dat" using 1:40 w l, "difusao.dat" using 1:70 w l

Novamente observe que no canto superior direito temos a legenda de quais colunas de difusao.dat são usadas no gráfico. Nesta situação, com fronteiras constantes, observe que a solução vai para a situação estacionária, linear, como era de se esperar.

Caso $\Delta t = 0,00125$

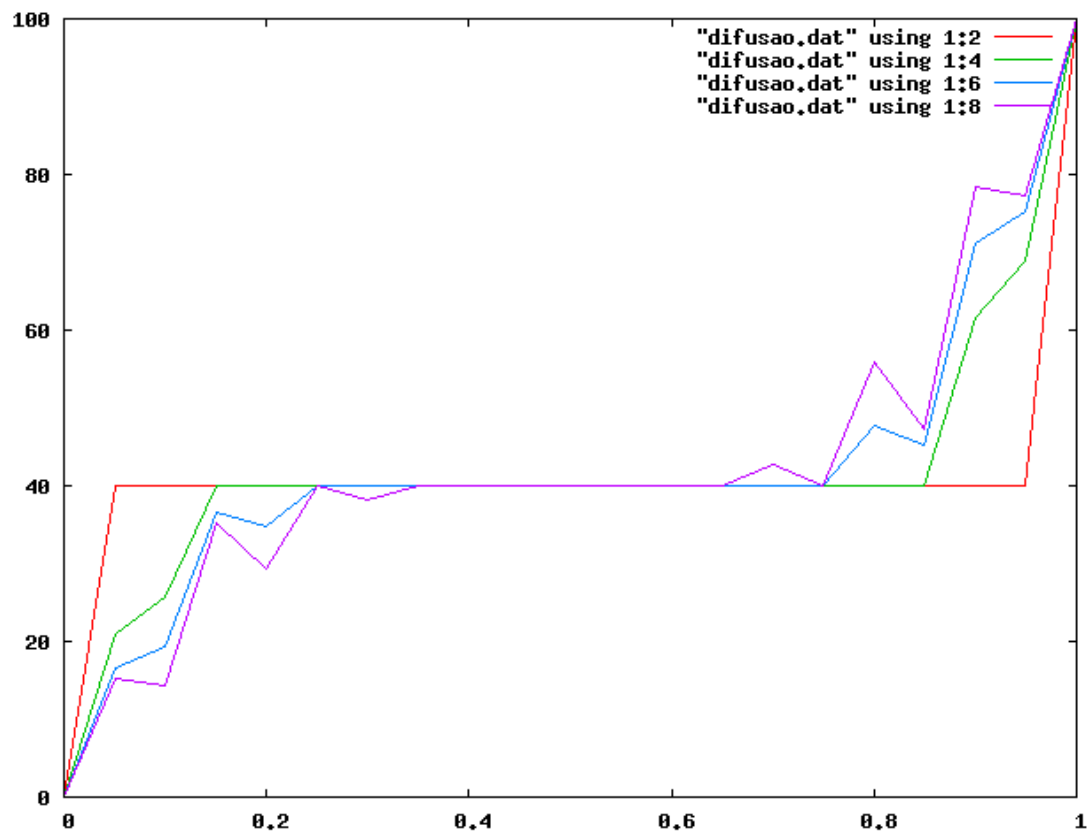
Agora trabalharemos expondo os problemas de estabilidade deste método. Inicialmente será usado 0,00125 como discretização temporal. Tal valor corresponde a termos o valor de $k = 1/2$, ou seja, o valor crítico além do qual o método se instabiliza. Abaixo você verá figuras para o mesmos intervalos passos discretizando de tempo, lembrando que os instantes de tempo são outros, já que variamos o tamanho do intervalo de tempo.



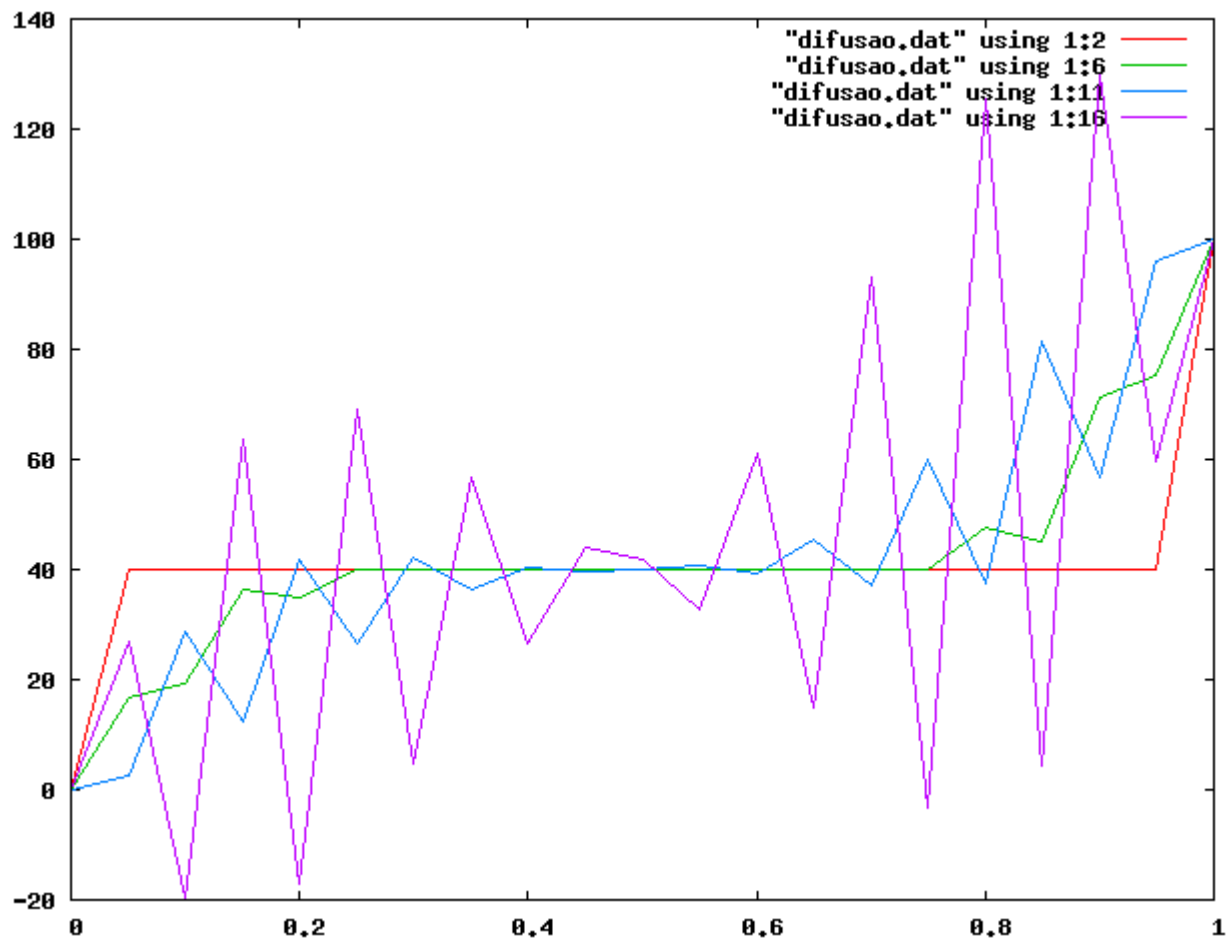
Observe que embora hajam diferenças em relação ao caso anterior, não parece que estão acontecendo algum tipo de problema. Para evidenciar as questões relativas à instabilidade, farei mais uma modificação na discretização temporal.

Caso $\Delta t = 0,0015$

Agora o intervalo de tempo valerá 0,0015 o que implica que o valor de k será maior que $1/2$. Observe a figura abaixo.



Aqui os momentos nos quais foi traçada a função são em tempo diferentes dos apresentados anteriormente, como você pode notar pela legenda no canto superior direito da figura. Observe que começa a surgir um comportamento errático na solução, mesmo nos primeiros instantes da simulação: oscilações que se ampliam a medida que o sistema evolui. Na figura abaixo a situação ainda fica mais evidente para valores um pouco maiores de tempo.



Claramente os resultados são não físicos não só devido às oscilações como também pelo surgimento de valores de temperatura incompatíveis com as condições, sejam elas de contorno ou iniciais (**Atenção com as escalas! Aqui o eixo das temperaturas vai de -20 a 140**).

Os valores de tempo nos quais foram gerados os gráficos foram obtidos por tentativa e erro de forma a evidenciar as características do problema. Da mesma maneira, quanto aos trabalhos da lista, você deverá escolher os valores de tempo de cada curva de forma à apoiar as suas conclusões. Caso surja alguma dificuldade entrem em contato comigo.

Exercícios da Lista

Em todos os problemas abaixo as condições de contorno serão as mesmas, assim como as discretizações, e iguais à

Condição de contorno

$$\begin{aligned}\varphi(t, 0) &= 0 \\ \varphi(t, 5) &= 0\end{aligned},$$

Discretização espacial 0,01

Discretização temporal 0,002

com tempo final igual a 5.

I) Crie um código para resolver a Equação de difusão, ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

com discretização de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço. Trabalhe um método explícito.

Solucione o problema para a condição inicial abaixo.

$$\varphi(0, x) = e^{-[(x-2.5)^2/0.04]}$$

Use 1 para o valor da difusibilidade.

II) Crie um código para resolver a Equação de Onda, ou seja,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

com discretização de segunda ordem no tempo e segunda ordem no espaço. Trabalhe um método explícito.

Solucione o problema para a condição inicial abaixo.

$$\begin{aligned}\varphi(0, x) &= e^{-[(x-2.5)^2/0.04]} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0\end{aligned}$$

Use 1 para o valor da velocidade.

III) Crie um código para resolver a Equação de Convecção Pura, ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

com discretização de primeira ordem no tempo e primeira ordem retrógrada no espaço. Trabalhe um método explícito.

Solucione o problema para a condição inicial abaixo.

$$\varphi(0, x) = e^{-(x-2.5)^2/0.04}$$

Use 1 para o valor da velocidade.

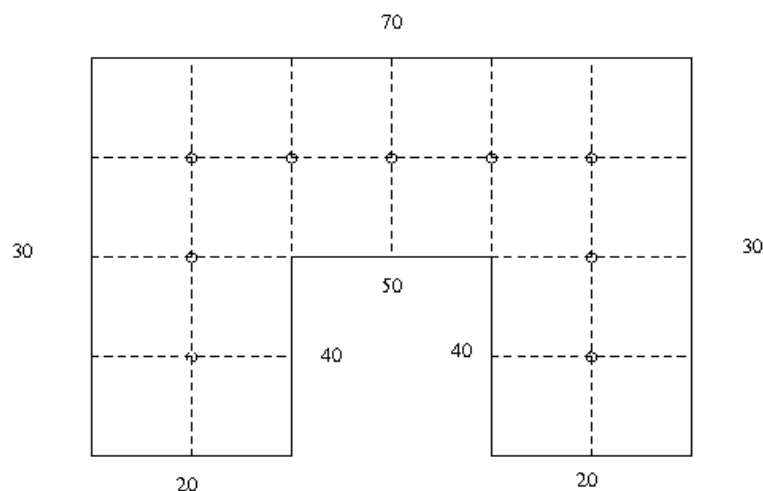
Componha um gráfico comparativo entre os resultados dos três programas em instantes de tempo que você julgar significativos (pelo menos cinco tempos).

Obs.: Repare que as estruturas dos programas são semelhantes e você tem referências no material disponibilizado em minha página.

IV) Elabore uma fórmula de diferenças finitas para a derivada cruzada de segunda ordem para as variáveis x e y. Daí, resolva usando uma calculadora o problema de elíptico apresentado abaixo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 10 \varphi$$

por meio de discretização das derivadas por diferenças de segunda ordem. Use discretização uniforme e as condições de contorno apresentadas na figura. Obs: Os pontos à serem calculados estão indicados por círculos. Use $dx=dy=1/6$.



III) **Bônus:** Resolva a Equação do Telegrafista indicada pela equação abaixo usando uma formulação explícita de ordem 2 no tempo e ordem 2 no espaço.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; c = D \sqrt{\frac{2}{\tau}}$$

Use como condição inicial

$$\varphi(0, x) = e^{-[(x-2.5)^2/0.04]}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

e condição de contorno usada nas três primeiras questões desta lista.

Varie os parâmetros c (velocidade de propagação) e τ (tempo de relaxação) de forma que você verifique uma transição entre o comportamento típico de onda para um comportamento que se assemelha à difusão. Sugestão: comece com $D = 1$ e faça alguns testes com os valores do tempo de relaxação.

Tabela de diferenças

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x_i, y_j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2 \Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$$