特征值、相似、正定重要结论总结

相似 若$A\sim B$，则$A^T\sim B^T$，$A^{-1}\sim B^{-1}$，$A^*\sim B^*$，$f(A)\sim f(B)$.

可对角化 若A可对角化，则A^T、A^{-1}、A^*、$f(A)$、$P^{-1}AP$均可对角化.

对称阵 若A为对称阵，则A^T、A^{-1}、A^*、$f(A)$均为对称阵.

若A和B均为对称阵，则 $\begin{cases}A+B\text{为对称阵}\\ \text{当且仅当}AB=BA\text{时，}AB\text{为对称阵.}\end{cases}$

A^TA、AA^T、$A+A^T$均为对称阵.

正定阵 若A为正定阵，则A^T、A^{-1}、A^*、$f(A)$均为正定阵.（其中$f(A)$为正系数的多项式）

若A和B均为正定阵，则 $\begin{cases}A+B\text{为正定阵.}\\ \text{当且仅当}AB=BA\text{时，}AB\text{为正定阵.}\end{cases}$

若A为正定阵，且$r(B_{m\times n})=n$，则B^TAB为正定阵. 若$r(A_{m\times n})=n$，则A^TA为正定阵.

正交阵 若A为正交阵，则A^T、A^{-1}、A^*、A^k、$-A$均为正交阵.

若A和B均为正交阵，则AB为正交阵.

可交换（可交换的前提是二者为同阶方阵）

kE与同阶方阵可交换.（k为任意实数）.

同阶对角矩阵可交换.

A、A^{-1}、A^*两两均可交换. 一般情况，A和A^T不可交换.

$f(A)$和$g(A)$可交换.

若A和B可交换，则A^T和B^T、A^{-1}和B^{-1}、A^*和B^*、$f(A)$和$g(B)$均可交换

常用结论：①

A	A^T	A^{-1}	A^*	$f(A)$	$P^{-1}AP$	PAP^{-1}
λ	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	$f(\lambda)$	λ	λ
α		α	α	α	$P^{-1}\alpha$	$P\alpha$

② 若$f(A)=0$，则$f(\lambda)=0$.

③ 若A的每行元素之和为k，则k是A的特征值，$(1,1,\cdots,1)^T$是k对应的特征向量.

④ 若$AB=kB$，则k是A的特征值，B的非零列向量是k对应的特征向量.

⑤ 若α_1，α_2是相同特征值对应的特征向量，则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$仍是该特征值对应的特征向量（k_1,k_2不全为0）

若α_1，α_2是不同特征值对应的特征向量，则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$一定不是特征向量（$k_1\neq0,k_2\neq0$）

⑥ $1\leq$矩阵的线性无关特征向量个数$\leq n$

$1\leq\lambda_i$所对应的线性无关特征向量个数$\leq\lambda_i$的重数

若A可对角化，则$r(A)=$非零特征值个数.

⑦ 若$(A-k_1E)(A-k_2E)=0$，则A的特征值只能取k_1或k_2，且A必可对角化.（$k_1\neq k_2$）

⑧ 若$r(A)=1$，则A的特征值为$tr(A)$和0（$n-1$重），当且仅当$tr(A)\neq0$时，A可对角化.

⑨ 若A的特征值全为k，则当且仅当$A=kE$时，A可对角化.

特殊地，若$A^k=0$，则A的特征值全为0，当且仅当$A=0$时，A可对角化.

⑩ 实对称矩阵A正定$\Leftrightarrow$对$\forall x\neq0$，有$x^TAx>0\Leftrightarrow A$与E合同

$\Leftrightarrow$正惯性指数$p=n$. $\Leftrightarrow$存在可逆矩阵B，使$A=B^TB$.

$\Leftrightarrow$所有特征值均大于0 $\Leftrightarrow$存在列满秩矩阵$B_{m\times n}$，使$A=B^TB$.

$\Leftrightarrow$各阶主子式均大于0 $\Leftrightarrow$存在正定矩阵B，使$A=B^k$.（$k\in N^*$）

特征值、特征向量、相似、合同

若$A\alpha=\lambda\alpha$，且$\alpha\neq0$，则称λ为A的特征值，α为A的对应于特征值λ的特征向量

$\exists\alpha\neq0$，使$A\alpha=\lambda\alpha\Longleftrightarrow(\lambda E-A)x=0$有非零解$\Longleftrightarrow|\lambda E-A|=0$.

$|\lambda E-A|=\lambda^3-\sum_{i=1}^{3}a_{ii}\lambda^2+\sum_{i=1}^{3}A_{ii}\lambda-|A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$. 则$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$

例25. 设A为3阶矩阵，$b=(2,-2,4)^T$，

若$Ax=b$的通解为$k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(-1,1,-2)^T$，求$(A-2E)^*$的特征值和特征向量

若$Ax=b$的通解为$k_1(1,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,1,1)^T$，求$(A-2E)^*$的特征值和特征向量

例26. 设A为3阶矩阵其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$，对应的线性无关的特征向量为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令$P=(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2)$，$Q=(\alpha_1-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3)$，求$P^{-1}AP$和$Q^{-1}AQ$.

若存在可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$，则称A与B相似，若B为对角矩阵，则称A可相似对角化.

可对角化$\Longleftrightarrow$有n个线性无关的特征向量$\Longleftrightarrow n-r(\lambda_iE-A)=\lambda_i$的重数.

A,B是否相似的判定
- 若A,B均可对角化，则A与B相似$\Longleftrightarrow\lambda_A=\lambda_B$
- 若A可对角化，B不可对角化，则A与B不相似
- 若A,B均不可对角化，则用必要条件排除：$\lambda_A=\lambda_B$；$r(\lambda_iE-A)=r(\lambda_iE-B)$

A与B相似的必要条件：$\lambda_A=\lambda_B$，$tr(A)=tr(B)$，$|A|=|B|$，$r(A)=r(B)$.

实对称矩阵
- 不同特征值对应的特征向量正交
- 同一特征值的无关特征向量个数=特征值的重数

$\Longrightarrow$必可正交对角化

非对称矩阵
- 不同特征值对应的特征向量无关但不正交
- 同一特征值的无关特征向量个数$\leq$特征值的重数

$\Longrightarrow$须多看通对角化，不可正交对角化

若存在可逆矩阵P，使$P^TAP=B$，则称A与B合同.若B为对角矩阵，则称A可合同对角化.

若存在正交矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$，(即$P^TAP=\Lambda$)，则可同时将A相似对角化和合同对角化.

二次型

多项式形式. $f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3 \xlongequal{\begin{cases}x_1=p_{11}y_1+p_{12}y_2+p_{13}y_3\\x_2=p_{21}y_1+p_{22}y_2+p_{23}y_3\\x_3=p_{31}y_1+p_{32}y_2+p_{33}y_3\end{cases}} k_1y_1^2+k_2y_2^2+k_3y_3^2$

具体矩阵形式. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \xlongequal{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}} (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

抽象矩阵形式. $f(X) = X^TAX \xlongequal{X=PY} Y^T\Lambda Y$

记 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}$

可以用非对称的矩阵表示二次型,但"二次型的矩阵"指的是所对应的唯一的对称矩阵

二次型 $\xrightarrow[\text{初等变换法}]{\text{正交变换法}\ \text{配方法}}$ 标准形 $\xrightarrow{\text{系数单位化}}$ 规范形. 不同方法化得的标准形可能不唯一. 但规范形唯一.(不考虑顺序).

二次型化标准形⟺矩阵合同对角化

可逆线性变换⟺合同变换⟺坐标变换⟺对矩阵的行和列进行相同的初等变换

惯性定理:可逆线性变换不改变正、负惯性指数.

正交变换是特殊的可逆线性变换,不会改变向量的长度、图形的形状和大小,只是旋转变换

正交变换化得的标准形系数一定是特征值,非正交变换化得的标准形系数不一定是特征值

正/负惯性指数、正定

正/负惯性指数＝标准形系数的正/负个数＝规范形系数1或-1的个数＝特征值的正/负个数

秩＝正、负惯性指数之和. 即 $r(A)=p+q$.

A与B合同 ⟺
- A和B的正、负惯性指数相同.
- A和B的标准形系数正、负个数相同.
- A和B的规范形相同.
- A和B的特征值正、负个数相同.

考研不研究非对称矩阵的合同, 对于对称矩阵, 相似 ⟹ 合同 ⟹ 等价.

x^TAx 正定 ⟺
- 对 $\forall x\neq 0$, 有 $x^TAx>0$
- 各阶(顺序)主子式均大于0.
- 正惯性指数 $p=n$.
- 特征值均大于0
- 标准形系数均大于0
- 规范形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$
- A与E合同
- ∃可逆矩阵B, 使 $A=B^TB$
- ∃列满秩矩阵 $B_{m\times n}$, 使 $A=B^TB$
- ∃正定矩阵B, 使 $A=B^k$. $(k\in N^*)$

A正定的必要条件: $A^T=A$, $a_{ii}>0$, $|A|>0$.

证明正定, 必须先证明对称.