矩阵公式总结

行列式	$\lvert A\rvert=\lambda_1\cdots\lambda_n$	$\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$	$\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$	$\lvert A^n\rvert=\lvert A\rvert^n$
转置	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$	$(kA)^T=kA^T$	$(A^T)^T=A$	$(A^n)^T=(A^T)^n$
逆	$\lvert A^{-1}\rvert=\frac{1}{\lvert A\rvert}$	$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$
伴随	$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$	$(kA)^*=k^{n-1}A^*$	$(A^*)^*=\lvert A\rvert^{n-2}A$	$AA^*=A^*A=\lvert A\rvert E$
三大运算次序可变	$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$	$(A^T)^*=(A^*)^T$	$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{A}{\lvert A\rvert}$	
穿脱原则	$(ABC)^T=C^TB^TA^T$	$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$	$(ABC)^*=C^*B^*A^*$	

对角矩阵

$$\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&&\\&\ddots&\\&&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&&\\&\ddots&\\&&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&&\\&\ddots&\\&&a_nb_n\end{pmatrix}$$

若 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$. 则 $\lvert\Lambda\rvert=\lambda_1\cdots\lambda_n$. $\varphi(\Lambda)=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&\varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}$. $\Lambda^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^n\end{pmatrix}$. $\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$

若 $\Lambda=\begin{pmatrix}&&\lambda_1\\&⋰&\\\lambda_n&&\end{pmatrix}$, 则 $\lvert\Lambda\rvert=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\cdots\lambda_n$. $\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}&&\frac{1}{\lambda_n}\\&⋰&\\\frac{1}{\lambda_1}&&\end{pmatrix}$

分块矩阵

$$\begin{vmatrix}A&*\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\*&B\end{vmatrix}=\lvert A\rvert\lvert B\rvert \qquad \begin{vmatrix}O&A\\B&*\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}*&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\lvert A\rvert\lvert B\rvert$$

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A^T&C^T\\B^T&D^T\end{pmatrix} \qquad (A,B)^T=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}.\quad \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}^T=(A^T,B^T)$$

$$\begin{pmatrix}A&&\\&B&\\&&C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&&\\&B^{-1}&\\&&C^{-1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}&&A\\&B&\\C&&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&&C^{-1}\\&B^{-1}&\\A^{-1}&&\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\O&B^{-1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}C&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}O&A\\B&C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\lvert B\rvert A^*&\\&\lvert A\rvert B^*\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^*=(-1)^{mn}\begin{pmatrix}O&\lvert A\rvert B^*\\\lvert B\rvert A^*&O\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A^n&\\&B^n\end{pmatrix}$$

秩

$0\leq r(A_{m\times n})\leq\min\{m,n\}$

$\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)$

$\max\{r(A),r(B)\}\leq r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leq r(A)+r(B)$.

$r(A\pm B)\leq r(A\pm B,B)=r(A,B)\leq r(A)+r(B)$.

$r(A,B)=r\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}\neq r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(A^T,B^T)$.

$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\1, & r(A)=n-1\\0, & r(A)<n-1.\end{cases}\quad(n\geq2)$

初等变换不改变秩

乘可逆矩阵,秩不变

矩阵等价⇔秩相等

$r(A)+r(B)-n\leq r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$

若 $A_{m\times n}B_{n\times s}=O$, 则 $r(A)+r(B)\leq n$.

若 $A_{m\times n}B_{n\times s}=C$, 且 $r(A)=n$, 则 $r(B)=r(C)$. ⇔ 左乘列满秩矩阵,秩不变

若 $A_{m\times n}B_{n\times s}=C$, 且 $r(B)=n$, 则 $r(A)=r(C)$. ⇔ 右乘行满秩矩阵,秩不变

$r(A^TA)=r(AA^T)=r(A^T)=r(A)=r(kA)$. $(k\neq0)$.

若 A 是 n 阶矩阵,则 $r(A^n)=r(A^{n+k})$. $(k\in N^*)$

若 A 是 n 阶矩阵且可对角化则 $r(A)=r(A^k)$. $(k\in N^*)$

线性表示、线性相关、线性无关

取一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，称$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的一个线性组合.
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的全部线性组合，称为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$张成的空间.
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$所张成空间的维数，称为秩
若$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，则称$\beta$可被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示.
若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中存在某一向量可被其余向量表示，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.
若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中任一向量均不可被其余向量表示，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.
线性无关且能表示出整体组任一向量的部分组，称为极大无关组.

秩=无关向量个数≤向量个数.
秩<向量个数 ⇔ 相关
秩=向量个数 ⇔ 无关

秩=张成空间维数≤向量维数.
向量维数<向量个数 ⇒ 相关
增加向量个数 ⇒ 提高相关性
增加向量维数 ⇒ 提高无关性

n个无关的n维向量，可表示任一n维向量

例. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta$均是$n$维向量，若$\beta$不能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关

例. 设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关，$\beta_1,\beta_2$ $\begin{cases}\text{均不能被}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}\text{线性表示}\\ \text{均与}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}\text{正交}\end{cases}$，则$\beta_1,\beta_2$线性相关

例. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，则(　).
A. α_1可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示.
B. α_1不可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示.
C. α_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表示.
D. α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

例. 设β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，但不可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示.
则α_m可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$线性表示，但不可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示.

例. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$均线性无关，且任一$\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$均不可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$表示，任一$\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$均不可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$表示。

则$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\geq m+1$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性相关性不确定

向量组等价、矩阵等价

设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$。记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$。

若向量组B中每个向量均可被向量组A线性表示，则称向量组B可被向量组A线性表示。

若向量组A和向量组B能相互线性表示，则称向量组A和向量组B等价。

B可被A表示 $\Leftrightarrow AX=B$有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\ \ B)\Rightarrow r(A)\geq r(B)$。

向量组A、B等价 $\Leftrightarrow$ A、B可互相表示

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，且A可由B表示

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A\ \ B)$

矩阵A、B等价 $\Leftrightarrow$ A、B可通过初等变换转化

$\Leftrightarrow$ ∃可逆P、Q，使$PAQ=B$

$\Leftrightarrow$ A、B同型，且$r(A)=r(B)$

若A、B同型，则向量组等价 $\Rightarrow$ 矩阵等价。

矩阵等价 $\not\Rightarrow$ 矩阵列等价 $\Leftrightarrow$ 列向量组等价。

例. 设n维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m<n)$线性无关，则n维列向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关的充分必要条件为（　）。

A. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示。

B. 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示。

C. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价。

D. 矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$等价。

$\boxed{AB=O,\ AB=C,\ AB=E}$

$AB=O$
- B的列向量是$AX=0$的解.
- $r(A)+r(B)\leq n$.
- 若$B\neq O$,则A列不满秩.
- 若$A\neq O$,则B行不满秩.

$AB=E$
- A行满秩,B列满秩.
- 若A为方阵,则A,B可逆

$AB=C$
- B是$AX=C$的解
- $r(A)=r(A\ \ C)=r(A\ \ AB)$
- C的列向量组可由A的列向量组表示.
- C的行向量组可由B的行向量组表示.
- $r(C)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

若A列满秩,则B和AB的行向量组等价.
若B行满秩,则A和AB的列向量组等价.
A和AA^T的列向量组等价.
A和A^TA的行向量组等价.

例.设A,B为满足$AB=O$的任意两个非零矩阵,则必有( ).

A. A的列向量组线性相关,B的行向量组线性相关.
B. A的列向量组线性相关,B的列向量组线性相关.
C. A的行向量组线性相关,B的行向量组线性相关.
D. A的行向量组线性相关,B的列向量组线性相关.

例.设A.B.C均为n阶矩阵.若$AB=C$,且B可逆,则( ).

A. C的行向量与A的行向量等价.　　B. C的行向量与B的行向量等价.
C. C的行向量与B的行向量等价.　　D. C的列向量与B的列向量等价.

例.设A,B为n阶矩阵,记$r(X)$为矩阵X的秩,$(X\ \ Y)$表示分块矩阵,则( ).

A. $r(A\ \ AB)=r(A)$　B. $r(A\ \ BA)=r(A)$　C. $r(A\ \ B)=\max\{r(A),r(B)\}$　D. $r(A\ \ B)=r(A^T\ \ B^T)$.

例.设A,B为n阶实矩阵,下列不成立的是( ).

A. $r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^TA\end{pmatrix}=2r(A)$.　B. $r\begin{pmatrix}A & AB\\ O & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$.　C. $r\begin{pmatrix}A & BA\\ O & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$　D. $r\begin{pmatrix}A & O\\ BA & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

已知一向量组无关,判断另一向量组相关性

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,且$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)C$,

则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性无关$\Leftrightarrow C$列满秩.(因为$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$列满秩,左乘$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,不改变$C$的秩)

例.已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,则下列向量组中线性相关的是( ).

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3$

B. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+3\alpha_1$

C. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

D. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2$

例.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为三维向量,则对任意常数$k,l$,向量组$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的( ).

A. 必要非充分条件.

B. 充分非必要条件.

C. 充分必要条件.

D. 既非充分也非必要条件.

例.设齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$,且$A\beta\neq0$.

证明:向量组$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$线性无关.

例.设齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,则此方程组的基础解系还可以是( ).

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的等秩向量组

B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的等价向量组

C. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

D. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$