



2022考研

数学

必备公式手册

研
神
关注公众号

研
神
关注公众号

考研大咖全程班







目 录

第一部分 初等数学（初、高中数学） 1

**研
注
神
第一部分 高等数学 12**

**研
注
神
第一章 极限 连续 14**

**研
注
神
第二章 一元微分学 19**

第三章 不定积分 27

第四章 定积分及其应用 32

第五章 微分方程 38

第六章 向量代数与空间解析几何（数学一） 43

第七章 多元函数微分学 54

第八章 二重积分 63

第九章 三重积分（数学一） 66

第十章 曲线积分与曲面积分（数学一） 70

第十一章 无穷级数（数学一、三） 79



第三部分 线性代数 86

第一章 行列式 88

第二章 矩阵 93

第三章 向量 105

第四章 线性方程组 110



第五章 特征值与特征向量	114
第六章 二次型	118

第四部分 概率论与数理统计（数学一、三）	123
第一章 随机事件和概率	125
第二章 一维随机变量及其分布	130
第三章 二维随机变量及其分布	135
第四章 随机变量的数字特征	141
第五章 大数定律及中心极限定理	146
第六章 数理统计的基本概念	148
第七章 参数估计	151
第八章 假设检验（数一）	154

关注
公众号

研
神
Y

关注
公众号

研
神
Y



第一部分 初等数学（初、高中数学）





考点内容

一、一元二次函数

1. 定义

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

叫做一元二次函数。

2. 性质

关注公众号

研
神
Y

(1) 函数的图象是一条抛物线，抛物线顶点的坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ，抛物线的对

称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 。

(2) 当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上，函数在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ；

当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下，函数在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 。

(3) 当 $a > 0$ 时，一元二次函数在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上是减函数，在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是增函数；

当 $a < 0$ 时，一元二次函数在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上是增函数，在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是减函数。

3. 一元二次方程 ($ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$)(1) 判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：若 $\Delta > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根；若 $\Delta = 0$ ，则方程有两个相等的实数根；若 $\Delta < 0$ ，则方程无实数根。

(2) 一元二次方程的根

① 因式分解：

$$\text{② 求根公式 } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

二、乘法公式

$$1. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

关注公众号

研
神
Y

2. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3. $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$

4. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

5. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

6. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

三、指数运算

关注
公众
号

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^m = a^m b^m$

(4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(5) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, a > 0$

(6) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0$

四、对数运算

(1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a(\frac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a M^b = b \log_a M$

(4) $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(5) $N = \log_a a^N = a^{\log_a N}$, 特别的当 $a = e$ 时, $N = \ln e^N = e^{\ln N}$



五、函数

1. 函数定义

设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于给定的 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则

总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 数集 D 叫做这个函数的定



义域， x 叫做自变量， y 叫做因变量。 y 的取值范围叫函数的值域。

2. 反函数定义：设 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f ，值域为 V_f 。对 $\forall y \in V_f$ ，在 D_f 上可以确定一个 x ，满足 $y=f(x)$ ，如果把 y 看作自变量， x 看作因变量，可得新的函数： $x=f^{-1}(y)$ ，称 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数。

注： $x=f^{-1}[f(x)]$, $x=f[f^{-1}(x)]$.

3. 基本初等函数：



(1) 幂函数 $y=x^a$ (a 为常数) 特别的， $a=-3, a=-2, a=-1, a=-\frac{1}{2}, a=-\frac{1}{3}, a=0,$

$$a=\frac{1}{3}, a=\frac{1}{2}, a=1, a=2, a=3.$$

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)，特别的，当 $a=e$ 时， $y=e^x$ 。

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)，特别的，当 $a=e$ 时， $y=\ln x$ 。

(4) 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x};$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, 1 + \cot^2 x = \csc^2 x;$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1;$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}.$$



(5) 反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arc cot} x$.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \arctan x + \operatorname{arc cot} x = \frac{\pi}{2}.$$

4. 复合函数

若 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 当 $\varphi(x)$ 的值域落在 $f(u)$ 的定义域内时，称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由中间变量 u 复合成的复合函数。

5. 分段函数: $y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1 \\ f_2(x), & x \in I_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in I_n \end{cases}$

6. 函数的基本特性

(1) 有界性

若 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in I$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数; 若不存

关注
公众号
研神

在这样的正数, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

(2) 单调性

对于区间 $I \subset D$ 内任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 称函数在区间 I 上是单调增加的, 反之称为在区间上单调减少.

(3) 奇偶性

若函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上满足 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$) 则称 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数).

(4) 周期性

对于函数 $y = f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 对定义域内的任意 x 均有

$f(x+T) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数.

六、不等式

1. $a+b \geq 2\sqrt{ab}, a>0, b>0$, 当 $a=b$ 时等号成立

2. $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 当 $a=b$ 时等号成立

3. $-|a| \leq a \leq |a|$

4. $\|a|-|b\| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

5. $a-1 < [a] \leq a$, $[a]$ 对 a 取整, 即不超过 a 的最大的整数

6. $x > \sin x, x > 0$, $x < \sin x, x < 0$

7. $\sin x < x < \tan x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

关注
公众号
研神

8. $x > \ln(1+x), x > 0$

9. $e^x - 1 \geq x, x \in R$

七、数列

普通数列

1. 数列定义：按照一定次序排列起来的一列数叫做数列.

2. 数列的通项

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots,$$

关注
研
神
Y

其中 a_n 是数列的第 n 项，叫做数列的通项. 我们常把一般形式的数列简记作 $\{a_n\}$.

3. 数列的增减

从第二项起，每一项大于它的前一项的数列叫做递增数列，即
 $a_n > a_{n-1}, n = 2, 3, 4, \dots$

从第二项起，每一项小于它的前一项的数列叫做递减数列，即
 $a_n < a_{n-1}, n = 2, 3, 4, \dots$

4. 数列的递推公式

如果已知数列的第 1 项（或前几项），且从第二项（或某一项）开始的任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} （或前几项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.

5. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项 S_n 和与通项 a_n 的关系

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

关注
研
神
Y

等差数列

1. 等差数列的定义

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列. 这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示.

2. 等差数列的通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

其推广形式为

$$a_n = a_m + (n-m)d$$

3. 等差数列的增减

当 $d > 0$ 时，等差数列为递增数列；当 $d < 0$ 时，等差数列为递减数列；当 $d = 0$ 时，等差数列为常数列。

4. 等差数列的前 n 项 S_n

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = n a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$



等比数列

1. 等比数列的定义

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列。这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 $q (q \neq 0)$ 表示。

2. 等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

其推广形式为

$$a_n = a_m q^{n-m}$$

3. 等比数列的前 n 项 S_n

$$S_n = \begin{cases} n a_1, & q = 1 \\ \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} & q \neq 1 \end{cases}$$

八、计数原理（数学一、三）

1. 加法原理

做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法。

2. 乘法原理

做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 m_2 \cdots m_n$ 种不同的方法。

3. 排列与排列数



(1) 定义

从 n 个不同的元素中，任取 m 个元素 ($m \leq n$)，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列。所有这些排列的个数，称为排列数，记为 A_n^m 。

当 $m = n$ 时，即 n 个不同元素全部取出的排列数，称为全排列，记为 A_n^n 。

(2) 排列数公式

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$$

$$0! = 1! = 1$$

$$A_n^0 = 1$$

$$A_n^n = A_n^{n-1} = n!$$

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

4. 组合与组合数

(1) 定义

从 n 个不同元素中，任取 m 个元素 ($m \leq n$)，不论顺序组成一组，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。所有这些组合的个数，称为组合数，记为 C_n^m 。

(2) 组合数公式

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

5. 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$$

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 b^{n-1} a + C_n^2 b^{n-2} a^2 + \cdots + C_n^r b^{n-r} a^r + \cdots + C_n^n a^n$$

这个公式所表示的定理叫二项式定理，右边的多项式叫 $(a+b)^n$ 的二项展开式，它有 $n+1$ 项，各项的系数 C_n^r 叫二项式系数。 $C_n^r a^{n-r} b^r$ 叫二项展开式的通项，用 T_r 表示，即通项

$$T_r = C_n^r a^{n-r} b^r.$$

九、平面几何

平面图形

1. 三角形



设三角形的底为 a , 高为 h , 则 $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac \sin \angle B = \frac{1}{2}ab \sin \angle C = \frac{1}{2}bc \sin \angle A$.

2. 平行四边形

若平行四边形两边长分别为 a, b , 以 b 为底的高为 h , 则面积 $S = bh$, 周长 $C = 2(a+b)$.

3. 矩形

设矩形两边长为 a, b , 则面积 $S = ab$, 周长 $C = 2(a+b)$, 对角线长 $l = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. 梯形



设梯形的上底为 a , 下底为 b , 高为 h , 面积 $S = \frac{1}{2}(a+b)h$.

5. 圆

若圆的半径是 r , 则面积 $S = \pi r^2$, 周长 $C = 2\pi r$.

6. 扇形

设 θ 为扇形角的弧度数, r 为扇形半径, 则弧长 $l = \theta r$, 扇形面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\theta r^2$.

空间几何体

1. 长方体

设长方体的三条棱长分别是 a, b, c ,

1. 长方体的表面积 $S = 2(ab + ac + bc)$.

2. 长方体的体积 $V = abc = S_1h$, 其中 S_1 为长方体的底面积.

2. 圆柱

设圆柱的高为 h , 底面半径为 r , 则:

1. 圆柱体的侧面积 $S = 2\pi rh$.

2. 圆柱体的体积 $V = \pi r^2 h$.

3. 球体

设球的半径为 r , 则:

1. 球的表面积 $S = 4\pi r^2$.

2. 球的体积 $S = \frac{4}{3}\pi r^3$.

十、平面解析几何

关于点的公式

1. 两点距离公式: 两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 之间的距离 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.





2. 中点坐标公式：两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

3. 两点斜率公式：过 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两个点直线的斜率 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$).

4. 点到直线距离公式：点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

直线方程

- 一般式： $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零), $B \neq 0$ 时, $k = -\frac{A}{B}$; $B = 0$ 时, 斜率 k 不存在.
- 点斜式：过点 $P(x_0, y_0)$, 斜率为 k 的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

两条直线的位置关系

设不重合的两条直线为

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

1. 两条直线相交

若 $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, 则 l_1 与 l_2 相交, 方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 有唯一实数解 (x_0, y_0)

就是 l_1 与 l_2 的交点.

2. 两条直线平行

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$$

若 l_1 与 l_2 的斜率均存在, 分别为 k_1 与 k_2 , 则

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

3. 两条直线垂直

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

若 l_1 与 l_2 的斜率均存在, 分别为 k_1 与 k_2 , 则

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$$

圆的方程

1. 圆的标准方程：当圆心为 $C(x_0, y_0)$, 半径为 r 时, 圆的标准方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

特别地, 当圆心在原点 $(0, 0)$ 时, 圆的标准方程为 $x^2 + y^2 = r^2$.

2. 圆的一般方程: 圆的一般方程为

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (D^2 + E^2 - 4F > 0),$$

配方可得圆心坐标为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径为 $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

直线与圆的位置关系

直线 $l: y = kx + b$, 圆 $O: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, d 为圆心 (x_0, y_0) 到直线 l 的距离,

设方程组,

$$\begin{cases} y = kx + b \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases} \quad (1)$$

- 直线与圆相交 $\Leftrightarrow d < r \Leftrightarrow$ 方程组 (1) 有两不等的实根;
- 直线与圆相切 $\Leftrightarrow d = r \Leftrightarrow$ 方程组 (1) 有两相等的实根;
- 直线与圆相离 $\Leftrightarrow d > r \Leftrightarrow$ 方程组 (1) 无实根.

椭圆的标准方程: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

双曲线的标准方程: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

抛物线的标准方程: $y^2 = \pm 2px$, $x^2 = \pm 2py$.

研
神
注
公
众
号

研
神

关注公众号

第二部分 高等数学

研
神

关注公众号

第二部分 高等数学

高等数学重点及数学一、二、三区别

	重点	数学一、二、三区别
一、函数、极限、连续	单调有界准则, 夹逼准则, 零比零、无穷比无穷型极限, 等价无穷小, 洛必达法则, 泰勒公式.	
二、 二元函数微分学 <small>关注公众 研 神</small>	导数定义, 不等式证明, 根的问题讨论, 中值定理, 函数极值.	(数学一, 二): 弧微分、曲率的概念、曲率圆与曲率半径. (数学三): 微分求解简单的经济应用问题.
三、 一元函数积分学 <small>关注公众 研 神</small>	积分换元法, 分部积分, 变限积分, 面积, 旋转体体积.	(数学一, 二): 平面曲线的弧长、旋转体的侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等. (数学三): 定积分求解简单的经济应用问题.
四、向量代数和空间解析几何(数学一)		
五、多元函数微分学	多元复合函数偏导数, 多元隐函数偏导数, 多元函数极值, 多元函数的条件极值.	(数学一): 方向导数和梯度、空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线.
六、多元函数积分学	直角坐标, 极坐标下二重积分计算, 二重积分次序交换, 二重积分对称性, 分块计算二重积分.	(数学一): 三重积分、曲线积分、曲面积分. (数学一): 平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心 <small>研 神</small> <small>关注公众 研 神</small>
七、无穷级数(数学一, 三)	常数项级数的比较审敛法, 比值审敛法, 幂级数的和函数及幂级数的展开.	(数学一): 傅里叶级数. <small>关注公众 研 神</small>
八、常微分方程	一阶线性微分方程, 二阶线性微分方程.	(数学一): 伯努利(Bernoulli)方程、全微分方程、欧拉(Euler)方程 (数学一, 二): 可降阶的高阶微分方程、高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程、微分方程的简单应用 (数学三): 差分方程及用微分方程求解简单的经济应用问题.

第一章 极限 连续

考点内容

一、数列极限

1. 数列极限定义

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{整数 } N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$

2. 收敛数列性质

性质 1 极限的唯一性.

性质 2 收敛数列的有界性

$\{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \{x_n\}$ 有界, 但 $\{x_n\}$ 有界 $\nRightarrow \{x_n\}$ 收敛.

性质 3 收敛数列的保号性

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0 \Rightarrow \exists \text{整数 } N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } x_n > 0.$

性质 4 收敛数列与其子数列间的关系

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\}$ 的任意一子列收敛, 且收敛于 a .

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a.$

3. 数列极限存在的夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足:

(1) $y_n \leq x_n \leq z_n, n > N;$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A;$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$

4. 数列极限存在的单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

二、函数极限

1. 函数极限定义

(1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时的函数极限

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$

(2) 当 $x \rightarrow x_0$ 时的函数极限

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$

2. 函数极限的性质

性质 1 唯一性

性质 2 局部有界性

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists \delta > 0, M > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.



如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则 $\exists X > 0, M > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

性质 3 局部保号性

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$.

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A > 0$, 则 $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $f(x) > 0$.

性质 4 函数极限与数列极限的关系

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任意数列, 且满足 $x_n \neq x_0 (n \in N^+)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

3. 极限的四则运算

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A \times B;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$$



其中, \square 可以为 $x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$ 中任意一种趋势.

4. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小定义 当 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 时, 称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow \square$ 时的无穷小.

(2) 无穷大定义 当 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 时, 称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow \square$ 时的无穷大.

5. 无穷小与无穷大性质

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.



(2) $f(x)$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大 $\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

(3) $f(x)$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大.

(4) 有限个无穷小的和, 积均为无穷小, 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(5) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

6. 无穷小的比较



设 α, β 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = l$

(1) $l = 0$ 时, 称 α 是比 β 高阶的无穷小, 记作 $\alpha = o(\beta)$,

(2) $l = \infty$ 时, 称 α 是比 β 低阶的无穷小,

(3) $l \neq 0, l \neq \infty$ 时, 称 α 与 β 是同阶无穷小, 当 $l = 1$, 称 α 与 β 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$,

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta^k} = l$, $l \neq 0, l \neq \infty$ 时, 称 α 是关于 β 的 k 阶无穷小.

7. 高阶无穷小运算性质

当 $x \rightarrow 0$ 时

(1) $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l)$, $l = \min\{m, n\}$

(2) $o(kx^m) = ko(x^m) = o(x^m)$, $k \neq 0$

(3) $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$, $o(x^m) \cdot x^n = x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

8. 等价无穷小替换定理

若当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha'}{\beta'} = l$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha'}{\beta'} = l$.

9. 八种常见等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.



10. 洛必达法则

定理 1 设

(1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零或无穷大;(2) 在点 a 的某去心邻域内, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大);

那么

关注公众号

研
神

定理 2 设

(1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零或无穷大;(2) 当 $|x| > N$ 时 $f'(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在, 且 $F'(x) \neq 0$;(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大);

那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

11. 泰勒公式

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$



三、函数的连续性

1. 函数连续的定义



定义 1: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

定义 2: 当 x 在 x_0 处有增量 Δx , 得到函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

定义 3: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续.

2. 函数间断点及其类型

(1) 第一类间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 均存在.

1) 可去间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 也即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.

2) 跳跃间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

(2) 第二类间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 中至少有一个不存在.

1) 无穷间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$.

2) 振荡间断点: 例如: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处为振荡间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) 最值定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值.

(3) 介值定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取到介于它在 $[a, b]$ 小值与最大值之间的一切值.

(4) 零点定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

第二章 一元微分学

一、导数与微分

1. 导数定义

如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

关注公众号
研神

存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，导数值记为 $f'(x_0)$ 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ ，即

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

导数的其它形式

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

2. 左右导数定义

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在，则称此极限为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数，记作 $f'_-(x_0)$.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在，则称此极限为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数，记作 $f'_+(x_0)$.

$f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导 \Leftrightarrow (1) $f(x)$ 在 a 处存在右导数 $f'_+(a)$ ，且在 b 处存在左导数 $f'_-(b)$ ；
 (2) $\forall x_0 \in (a, b)$, $f(x)$ 在 x_0 处可导.

关注公众号
研神

3. 可导与连续关系

$f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在该 x_0 连续； $f(x)$ 在该 x_0 连续 $\nRightarrow f(x)$ 在点 x_0 处可导.

4. 导数的几何意义

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处可导， $f'(x_0)$ 是 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率.

$y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为：



$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

法线方程为：

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

5. 微分的定义

函数 $y = f(x)$, 如果 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 是可微的, $A\Delta x$ 叫做 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于 Δx 的微分, 记作 dy , 即 $dy = A\Delta x$.

因 $\Delta x = dx$, 于是函数 $y = f(x)$ 在 x 的微分又可记作 $dy = f'(x)dx$.

6. 可微的极限形式

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = 0.$$

7. 可微的充要条件

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导, 且微分一定是 $dy = f'(x_0)\Delta x$.

二、导数的计算与高阶导数

1. 函数的和、差、积、商的求导法则

如果函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 在点 x 具有导数, 那么

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \quad (v(x) \neq 0).$$

2. 反函数的求导法则

如果函数 $x = f(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 那么它的反函数

$y = f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_x = \{x | x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导, 并且 $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

3. 复合函数的求导法则

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导，函数 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导，则复合函数

$$y = f[g(x)] \text{ 在点 } x \text{ 可导，且其导数为 } \frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

4. 参数方程求导法则（数学一、二）

关注公众号 研神 设 y 与 x 的函数关系是由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定的，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数。

$$\text{参数方程所确定函数的导数公式: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

5. 隐函数求导

隐函数求导方法

(1) 对方程两端同时关于 x 求导，把 y 作为 x 的函数来看待。

(2) 从求导后的方程中解出 y' 。

(3) 隐函数求导允许其结果中含有 y 。但求某一具体点的导数值时，不仅要把 x 值代入，

还要根据 $F(x, y) = 0$ 计算出 y ，一并代入求导后的结果。

6. 幂指函数求导

幂指函数 $y = f(x)^{g(x)}$, $f(x)$, $g(x)$ 可导，且 $f(x) > 0$ ，其导数

$$\begin{aligned} y' &= [f(x)^{g(x)}]' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x) \right] \\ &= f(x)^{g(x)} \cdot \left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x) \right] \end{aligned}$$



7. 高阶导数

(1) 反函数的高阶导数

设 $x = f(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数，则有

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right) \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}$$

(2) 参数方程高阶导数（数学一、二）



设 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定, 则有

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \frac{1}{dx}.$$

(3) 隐函数高阶导数

设 $y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的二阶导数时



- 1) 方程两端同时关于 x 求一阶导, 二阶导, 把 y , y' 作为 x 的函数来看待.
- 2) 从一阶导的方程中解出 y' .
- 3) 从二阶导的方程中解出 y'' , 并将 y' 的结果代入.

但求某一具体点的二阶导数值时, 可以将 x 值代入 $F(x, y) = 0$ 计算出 y , 代入一阶导的

方程中解出 y' , 将 x 与之前计算出的 y , y' 代入二阶导的方程中解出 y'' .

(5) 高阶导数的计算公式

$$1) \text{莱布尼茨公式: } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

2) 常用公式:

$$[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b + \frac{n\pi}{2}).$$

$$[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos(ax+b + \frac{n\pi}{2}).$$

$$(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! a^n}{(ax+b)^n}.$$

$$[(ax+b)^\alpha]^{(n)} = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n} a^n, & n < \alpha \\ n! & n = \alpha \\ 0 & n > \alpha \end{cases}$$

三. 微分中值定理

1. 罗尔定理

如果函数 $f(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, (2) 在开区间 (a, b) 内可导, (3)

$f(a) = f(b)$, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\zeta (a < \zeta < b)$, 使得 $f'(\zeta) = 0$.



2. 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ 成立.

当 $f(a) = f(b)$ 时, 罗尔定理变为拉格朗日中值定理, 拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广.

3. 柯西中值定理

如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内一点处均不为零, 那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 成立.

4. 泰勒中值定理

定理 1 (拉格朗日余项) 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数, 则对任一 $x \in (a,b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ξ 在 x_0 与 x 之间.

定理 2 (皮亚诺余项) 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数, 则对任一 $x \in (a,b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$, $(x \rightarrow x_0)$.

如果取 $x_0 = 0$, 从而泰勒公式变成较简单的形式, 称为麦克劳林公式.

常见的麦克劳林公式:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1,1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad x \in (-\infty, +\infty)$$



$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad x \in (-1, 1)$$

四. 导数应用

1. 函数单调性的判定法

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导,

(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;

(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

2. 函数的极值, 最值

(1) 定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对于去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内的 $\forall x$, 有 $f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$), 则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个极大值点 (或极小值点), $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值 (或极小值).

(2) 极值的必要条件

$f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 且在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$

(3) 极值的充分条件

1) 第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 在 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内可导.

1. 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

2. 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

3. 如果 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 不改变符号, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

关注公众号
研神

2) 第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 则

1. 当 $f''(x_0)<0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

2. 当 $f''(x_0)>0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

3. 曲线的凹凸性与拐点

(1) 凹凸性定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 , 恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的; 如果恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那么称 $f(x)$ 在

I 上的图形是凸的.

(2) 曲线凹凸性的判定

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数, 则

1) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;

2) 若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

(3) 拐点定义

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续, $x_0 \in I$, 如果 $y=f(x)$ 在经过 $(x_0, f(x_0))$ 时, 凸凹性发

生改变, 则称 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点.

(4) 拐点的必要条件

$(x_0, f(x_0))$ 是 $f(x)$ 的拐点, 且在 x_0 处二阶可导, 则 $f''(x_0)=0$

(5) 拐点的充分条件

1) 第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 在 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内二阶可导 ($f'(x_0), f''(x_0)$ 可以不存在), 如果 $f''(x)$ 在 x_0 左右正负号相反, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为 $f(x)$ 的拐点.

2) 第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有三阶导数且 $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为

$f(x)$ 的拐点.

4. 渐近线

渐近线分三类:





(1) 垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或者 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则称 $x = x_0$ 为垂直渐近线.

(2) 水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ 或者 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$, 则称 $y = a$ 为水平渐近线.

(3) 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$, 则称 $y = kx + b$ 为斜渐近线.

5. 曲率、曲率半径 (数一、数二)

(1) 弧微分

设 $y = y(x)$ 在区间 (a, b) 内具有连续导数, 则有弧微分 $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$,

设 $x = x(y)$ 在区间 (c, d) 内具有连续导数, 则有弧微分 $ds = \sqrt{1 + (x')^2} dy$,

对于参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, 弧微分 $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$,

对于极坐标方程 $r = r(\theta)$, 弧微分 $ds = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$.

(2) 曲率定义

设弧 \widehat{MN} 长 Δs , M 沿曲线移动到 N , 点 M 的切线转过的角为 $\Delta\alpha$, 称

$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$ 为曲线在点 N 处的曲率.

(3) 曲率公式

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad (\text{其中 } y = y(x))$$

$$K = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad (\text{其中 } x = x(t), y = y(t))$$

(4) 曲率半径, 曲率圆

$f(x)$ 在点 M 处曲率为 K , M 点法线上, 凹向取一点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$, 则称 D

为曲率中心, ρ 为曲率半径, 以 D 为中心, ρ 为半径的圆叫做曲率圆

关注
公众
号
研
神

关注
公众
号
研
神

第三章 不定积分

一、不定积分的概念及性质

1. 原函数定义

如果对 $\forall x \in I$, 都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

2. 原函数存在定理

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上一定有原函数.



(1) 如果 $f(x)$ 有一个原函数, 则 $f(x)$ 就有无穷多个原函数.

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $[F(x)+C]'=f(x)$, 即 $F(x)+C$ 也为 $f(x)$ 的原函数,

其中 C 为任意常数.

(2) 如果 $F(x)$ 与 $G(x)$ 都为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 之差为常数,

即 $F(x)-G(x)=C$ (C 为常数).

3. 不定积分定义

在区间 I 上, $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数, 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 记

为 $\int f(x)dx$, 其中 x 称为积分变量, $f(x)$ 称为被积函数.

4. 不定积分基本性质

$$(1) \int [af(x) \pm bf(x)]dx = a \int f(x)dx \pm b \int g(x)dx.$$

$$(2) \frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = f(x) \text{ 或 } d \left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

$$(3) \int f'(x)dx = f(x) + C \text{ 或 } df(x) = f(x) + C.$$

二、不定积分的计算

1. 基本初等函数的积分表

$$(1) \int kdx = kx + C \quad (k \text{ 为常数}).$$

$$(2) \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$



(4) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

(8) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C.$

(9) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C.$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C.$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C.$

(14) $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$

(15) $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$

(12) $\int e^x dx = e^x + C.$

(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

2. 第一类换元法（凑微分法）

定理 设 $f(u)$ 具有原函数， $u = \varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$$

也就是说，若 $\int f(u)du = F(u) + C$ ，则 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$.

常用的几种凑微分形式：

(1) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b).$

(2) $\int f(x^n)x^{n-1}dx = \frac{1}{n} \int f(x^n)dx^n.$

(3) $\int f(x^n)\frac{1}{x}dx = \frac{1}{n} \int f(x^n)\frac{1}{x^n}dx^n.$

(4) $\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(\sin x)d(\sin x).$



(5) $\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(\cos x)d\cos x.$

(6) $\int f(\tan x)\sec^2 x dx = \int f(\tan x)d\tan x.$

(7) $\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)de^x.$

(8) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx = \int f(\ln x)d(\ln x).$

(9) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$

关注公众号

研
神**3. 第二类换元法**

定理 设 $x = \varphi(t)$ 是单调的, 可导的函数, 并且 $\varphi'(t) \neq 0$, 又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函
数 $F(t)$, 则有换元公式

$$\int f(x)dx = \left\{ \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right\}_{t=\varphi^{-1}(x)} = F(t) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

其中, $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数.

常用的几种换元形式:

1. 三角换元

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}, x = a \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}, x = a \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(3) $\sqrt{x^2 - a^2}, x = a \sec t, t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

2. 倒数换元 $x = \frac{1}{t}$ **3. 根式代换** $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ **4. 分部积分法**

$$\int uv' dx = \int udv = uv - \int vdu = uv - \int vu' dx,$$

主要用于两类不同函数相乘, 常见的分部积分形式:

$$\int p_n(x)e^{ax} dx, \int p_n(x)\sin \alpha x dx, \int p_n(x)\cos \alpha x dx;$$

$$\int p_n(x)\ln x dx, \int p_n(x)\arctan x dx, \int p_n(x)\arcsin x dx$$

关注公众号
研
神



$$\int e^{ax} \sin \beta x dx, \int e^{ax} \cos \beta x dx;$$

5. 有理函数积分（数学一、二）

形如

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

称为有理函数，其中 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ 及 $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ 为常数，且 $a_n \neq 0, b_n \neq 0$.



根据多项式理论，任一多项式 $Q(x)$ 在实数范围内能分解为一次因式和二次质因式的乘积，即

$$Q(x) = b_m (x - a)^{\alpha} \cdots (x - b)^{\beta} (x^2 + px + q)^{\lambda} \cdots (x^2 + rx + s)^{\mu}$$

其中 $p^2 - 4q < 0, \dots, r^2 - 4s < 0$.

则有如下分解

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_a}{(x-a)}$$

+ ⋯ +

$$\frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)}$$

+ ⋯ +

$$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2 + px + q)}$$

+ ⋯ +

$$\frac{R_1 x + S_1}{(x^2 + rx + s)^\mu} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2 + rx + s)^{\mu-1}} + \dots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)}.$$



这样，有理函数积分最终归为以下四种部分分式的积分：

$$(1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

$$(2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} (x-a)^{1-n} + C, n \neq 1.$$

$$(3) \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{M(x + \frac{p}{2}) - \frac{MP}{2} + N}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} d(x + \frac{p}{2})^2 + (N - \frac{MP}{2}) \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} d(x + \frac{p}{2}).$$

$$(4) \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx (p^2 - 4q < 0, n \neq 1).$$

6. 三角有理式积分 $\int R(\sin x, \cos x) dx$, 其中 $R(x, y)$ 为有理函数. (数学一, 二)

一般方法: 令 $\tan \frac{x}{2} = u$, 则 $x = 2 \arctan u$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$, 此时

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2} du.$$





第四章 定积分及其应用

一、定积分的概念

1. 定积分定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 定积分定义有以下两部:

(1) 分割: 在 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$, 各个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n, \text{ 记 } \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\},$$

(2) 近似: 在每个小区间上任取一点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 每一个小长方形的面积为

$f(\xi_i)\Delta x_i$, 对所有的小长方形面积求和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, 消除误差求极限, 令 $\lambda \rightarrow 0$, 得

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, 如果极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 这个

极限值称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

x 称为积分变量, $f(x)$ 称为被积函数, a 称为积分下限, b 称为积分上限, $[a, b]$ 称为积分区间.

2. 定积分的几何意义

$\int_a^b f(x)dx$ 几何意义: 与 x 轴形成的曲边梯形面积的代数和.

3. 函数可积的两个充分条件

定理 1: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定理 2: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

二、定积分的性质

两个规定:

(1) 当 $a = b$ 时, $\int_a^b f(x)dx = 0$.

$$(2) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

性质 1

$$\int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x)dx \pm k_2 \int_a^b g(x)dx.$$

性质 2 对任意 a, b, c 有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

性质 3 如果在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, ($a < b$).

推广 1: 如果在 $[a, b]$ 上, $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, ($a < b$).

推广 2: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) \geq 0$, 且 $f(x)$ 不恒为零, 则 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

推广 3: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) \geq 0$, 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则在 $[a, b]$ 上,

$$f(x) \equiv 0.$$

推广 4: $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, ($a < b$).

性质 4 设 M 与 m 分别是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a), \quad (a < b).$$

性质 5 (积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在积分区间 $[a, b]$ 上

至少存在一点 ξ , 使下式成立:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

函数平均值: $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

性质 6 如果 $f(x)$ 为奇函数时, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;

如果 $f(x)$ 为偶函数时, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

性质 7 如果 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 则有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx.$$



三、积分上限函数

(1) 积分上限函数定义

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 称 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \leq x \leq b$ 为积分上限函数.

(2) 积分上限函数性质

1) 连续性: 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则积分上限函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上连续.

2) 可导性: 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则积分上限函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 并且它的导数是 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

推广公式:

$$\left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(t)dt \right]' = f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x) - f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x).$$

3) 奇偶性:

若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数.

若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数. $\int_a^x f(t)dt$ 为非奇非偶函数. ($a \neq 0$)

四、定积分计算

(1) 牛顿-莱布尼茨公式

函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(2) 定积分的换元积分法

假设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

$$1) \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b;$$

2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数, 且其值域 $R_\varphi \subset [a, b]$,

则有 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

(3) 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u v' dx = (uv)|_a^b - \int_a^b v u' dx$$



五、反常积分

(1) 无穷限的反常积分

1) 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a, +\infty)$ 上连续, 取 $t > a$, 如果 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$ 存在, 则称此极限

为函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx;$$

此时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 否则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.



2) 类似地, 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, b]$ 上连续, 取 $t < b$, 如果 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上的反常积分, 即

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx;$$

此时也称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛, 否则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散.

3) 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 如果反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 都收敛,

则称 $\int_0^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx;$$

此时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

上述反常积分统称为无穷限的广义积分.

(2) 无界函数的反常积分

1) 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, 取 $t > a$, 如果 $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$ 存在, 则

称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx;$$

此时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 否则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$, 取 $t < b$, 如果 $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$ 存在, 则

称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上的反常积分, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx;$$





此时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，否则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

3) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, c)$, $(c, b]$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, 如果反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛, 则称 $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的反常积分, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

此时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 否则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。



六、定积分的应用

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标下平面图形的面积

1) 由曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), 及直线 $x = a$ 与 $x = b$ ($a < b$) 与 x 轴所围成图形的面积为 $S = \int_a^b f(x)dx$.

2) 由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 及直线 $x = a$ 与 $x = b$ ($a < b$) 所围成图形的面积为 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

3) 由曲线 $x = f(y)$, $x = g(y)$ 及直线 $y = a$ 与 $y = b$ ($a < b$) 所围成图形的面积为 $S = \int_a^b |f(y) - g(y)|dy$.

(2) 极坐标下平面图形的面积

由极坐标下曲线 $r = r(\theta)$ ($r(\theta) \geq 0$) 及直线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 围成图形的面积为 $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta$.

(3) 参数方程下平面图形的面积 (数学一, 二)

由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出的曲线, t_1 对应起点, t_2 对应终点, $x = x(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ (或

$[t_2, t_1]$) 上连续可微, $y = y(t)$ 在此区间上连续, 则曲边梯形面积 $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$.

2. 立体体积

(1) 由平面连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形, 绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的体积, 则 $V = \pi \int_a^b y^2(x)dx$.



推广：

(2) 由平面连续曲线 $x = f(y)$, 直线 $y = a$, $y = b$ 及 y 轴所围成的曲边梯形, 绕 y 轴旋转一周形成的旋转体的体积, 则 $V = \pi \int_a^b x^2(y) dy$.

推广：

(3) (数学一, 二) 立体是由曲面与平面 $x = a$, $x = b$ 围成的, 垂直于 x 轴的截面面积为 $S(x)$ 为已知, 则 $V = \int_a^b S(x) dx$.

3. 旋转体的侧面积 (数学一, 二)

关注公众号



(1) 曲线方程 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), $a \leq x \leq b$, 则 $S_{\text{侧}} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$

(2) 曲线方程为参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 则 $S_{\text{侧}} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$.

(3) 曲线方程为极坐标方程 $r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, 则

$$S_{\text{侧}} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r(\theta) \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

4. 平面曲线的弧长 (数学一, 二)

(1) 曲线方程 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 则 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

(2) 曲线方程 $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, 则 $s = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2} dx$.

(3) 曲线方程为参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ 时, 则 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$.

(4) 曲线方程为极坐标方程 $r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 时, 则 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$.

关注公众号





第五章 微分方程

1. 微分方程的基本概念

微分方程：一般地，表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程即叫做微分方程，即 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

微分方程的解：设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数，如果在区间 I 上，

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0$$

那么函数 $y = \varphi(x)$ 就叫做微分方程在区间 I 上的解.

微分方程的通解：如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.

微分方程的特解：确定了通解中的任意常数以后，就得到了微分方程的特解.

一阶微分方程的初值问题：求微分方程 $y' = f(x, y)$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解的问题，即

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$$

二阶微分方程的初值问题：求微分方程 $y' = f(x, y)$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0$ 的特解的问题，即

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0. \end{cases}$$

2. 可分离变量的微分方程

形式： $g(y)dy = f(x)dx$

解法： $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

3. 齐次方程

形式： $y' = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

解法：令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，代入原方程得 $u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$ ，得齐次方程的通解.

4. 一阶线性微分方程

形式 1： $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ，若 $Q(x) = 0$ ，方程称为齐次的；若 $Q(x) \neq 0$ ，方程称为非齐次的.

解法: $y = e^{-\int P(x)dx} (\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C)$.

形式 2: $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$.

解法: $x = e^{-\int P(y)dy} (\int Q(y)e^{\int P(y)dy} dy + C)$.

5. 伯努利方程 (数学一)

形式: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$,



当 $n=0, 1$ 时, $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$ 为一阶线性微分方程.

解法: 令 $z = y^{1-n} \quad (n \geq 2)$, 代入原方程得一阶线性微分方程, 求出方程的通解后, 再用 y^{1-n} 代替 z , 便得到伯努利方程的通解.

6. 全微分方程 (数学一)

形式: 若方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 的左侧是某一函数的全微分, 即存在某个 $u(x, y)$, 使得 $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, 则称此方程为全微分方程.

解法: 当 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数时, 方程

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 是全微分方程的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 其通解为

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt = C.$$

7. 可降阶的高阶微分方程 (数学一, 二)

(1) $y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程.

解法: n 次不定积分.

(2) $y'' = f(x, y')$ 型微分方程

解法: 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 代入原方程得 $p' = f(x, p)$, 转化为一阶微分方程.

(3) $y''' = f(y, y')$ 型方程

解法: 为令变量代换 $y' = p(y)$, 则 $y''' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 代入原方程得

$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$, 转化为一阶微分方程.

8. 高阶线性微分方程

(1) 高阶线性微分方程定义

二阶线性微分方程



$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x).$$

n 阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

当 $f(x) = 0$ 时称为齐次的，当 $f(x) \neq 0$ 时称为非齐次的。

(2) 线性微分方程解的结构

1) 线性相关，线性无关



设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，如果存在 n 个不全为零的常数 k_1, k_2, \dots, k_n ，使得当 $x \in I$ 时， $k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) = 0$ 恒成立，则称 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 线性相关。

设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 内的函数，若使得 $k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) = 0$ 成立，当且仅当 $k_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$ ，那么称 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 线性无关。

2) 如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ 两个的解，则

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ 的解，其中 C_1, C_2 为任意常数。

3) 如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ 的两个线性无关的特解，
 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ 的通解。

推广：若 y_1, y_2, \dots, y_n 是 n 阶齐次方程 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ 的 n 线性无关解，则方程的通解为 $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ (C_1, C_2, \dots, C_n 为任意常数)。

4) 设 y^* 是非齐次线性微分方程的特解， Y 是非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分方程的通解，则 $y = Y + y^*$ 是该非齐次线性微分方程的通解。

5) 设非齐次线性方程式中 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ，若 y_1^*, y_2^* 分别是



$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f_1(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 为原方程的特解.

(3) 二阶常系数齐次线性微分方程

若 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ 中 $P(x)$, $Q(x)$ 为常数，称之为二阶常系数齐次微分方程.

求二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解的步骤如下：

1) 写出微分方程的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$;

2) 求出特征方程的两个根 r_1 , r_2 :

3) 根据特征方程的两个根的不同情形，按照下列表格写出二阶常系数齐次微分方程的通解：

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1 , r_2	微分方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1 , r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
两个相等的实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$.
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

(4) 二阶常系数非齐次线性微分方程

考纲上要求掌握当非齐次项为特殊类型的微分方程求解方法.

1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型.

由非齐次线性微分方程通解的结构知，非齐次线性微分方程的通解等于齐次线性微分方程的通解加上非齐次线性微分方程的特解.因此，我们只须求出非齐次线性微分方程的特解即可.

设特解形式为 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$ ，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的特定多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根，是特征方程的单根或者是特征方程的重根依次取 0, 1 或 2.

这样，将特解形式代入非其次线性微分方程，即可求得具体特解.

2) $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型.

关注公众号
研神



特解形式为 $y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x]$, 其中 $R_m^{(1)}(x)$, $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$, 而 k 按 $\lambda + i\omega$ (或 $\lambda - i\omega$) 不是特征方程的根, 是特征方程的单根依次取 0 或 1.

9. 欧拉方程 (数学一)

形式: $x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$

解法: 作变换 $x = e^t$ 或者 $t = \ln x$, 于是有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$$

依次类推, 把它代入欧拉方程, 便得到一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程, 在求出这个方程的解后, 把 t 换成 $\ln x$, 即得到原方程的解.

10. 差分方程 (数学三)

(1) 一阶常系数线性齐次差分方程

1) 形式: $y(t+1) + ay(t) = 0$.

2) 通解: $y_c(t) = C(-a)^t$.

(2) 一阶常系数线性非齐次差分方程

1) 形式: $y(t+1) + ay(t) = f(t)$.

2) 通解: $y(t) = y_c(t) + y^*(t)$.

其中 $y^*(t)$ 是非齐次差分方程的特解.

(3) 求非齐次差分方程的特解

若 $f(t) = d^d P_m(t)$ ($d \neq 0$), 则有

1) 若 $d \neq -a$, 令 $y^*(t) = d^d Q_m(t)$;

2) 若 $d = -a$, 令 $y^*(t) = t d^d Q_m(t)$.



第六章 向量代数与空间解析几何（数学一）

一、向量的概念

1. 向量：既有大小，又有方向的量。有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，其方向表示向量的方向。在数学上只研究与起点无关的自由向量。

2. 向量的表示方法有： \vec{a} , \vec{i} , \vec{F} , \overrightarrow{OM} , ...

3. 向量相等：如果两个向量大小相等，方向相同，则说两向量相等（即经过平移后能完全重合的向量）。

关注公众号
研神

向量的模：向量的大小，记为 $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{OM}|$ 。

模为1的向量叫单位向量，模为零的向量叫零向量。零向量的方向是任意的。

5. 向量平行：两个非零向量如果它们的方向相同或相反，零向量与任何向量都平行。

6. 负向量：大小相等但方向相反的向量，记为 $-\vec{a}$ 。

二、向量的线性运算

1. 加（减）法：平行四边形法则，其满足的运算规律有交换律和结合律。

交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

结合律： $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

2. 向量与数的乘法 $\lambda\vec{a}$ ：设 λ 是一个数，向量 \vec{a} 与 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 规定为

(1) $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 同向， $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$

(2) $\lambda = 0$ 时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 反向， $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$

其满足的运算规律有：结合律、分配律。

结合律： $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

分配律： $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

单位向量 设 \vec{a}^0 表示与非零向量 \vec{a} 同方向的单位向量，那么 $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 。

定理 设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，则向量 \vec{b} 平行于 \vec{a} 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ 。

三、空间直角坐标系

关注公众号
研神

- 建立空间直角坐标系（三维），其符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向。
- 空间点 $M(x, y, z)$ 的坐标表示方法。通过坐标把空间的点与一个有序数组一一对应起来。
- 空间两点间的距离

若 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间任意两点，则 M_1M_2 的距离为：

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特殊地：若两点分别为 $M(x, y, z)$ 、 $O(0, 0, 0)$ ，则 $d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

四、利用坐标作向量的线性运算

1. 向量在坐标系上的分向量与向量的坐标

通过坐标法，使平面上或空间的点与有序数组之间建立了一一对应关系，同样地，为了沟通数与向量的研究，需要建立向量与有序数之间的对应关系。

设 $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量， $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示沿 x, y, z 轴正向的单位向量，应用向量的加法规则知：

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

或 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ，该式称为向量 \vec{a} 按基本单位向量的分解式。其中有序数组 a_x, a_y, a_z 与向量 \vec{a} 一一对应， a_x, a_y, a_z 就叫做向量 \vec{a} 的坐标，并记为 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ，该式叫做向量 \vec{a} 的坐标表示式。

于是，起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量可以表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 对于原点 O 的向径 $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$

2. 向量运算的坐标表示

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ， $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ 即 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ， $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ 则

$$(1) \text{ 加法: } \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

$$(2) \text{ 减法: } \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$$

$$(3) \text{ 数乘: } \lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}$$

或

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}$$

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

(4) 平行: 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, 向量 $\vec{b}/|\vec{a}|$ 相当于 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 即

$$\{b_x, b_y, b_z\} = \lambda \{a_x, a_y, a_z\}$$

也相当于向量的对应坐标成比例, 即

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$



五、向量的模、方向角

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 可以用它与三个坐标轴的夹角 α, β, γ (均大于等于 0, 小于等于 π) 来表示它的方向, 称 α, β, γ 为非零向量 \vec{a} 的方向角, 其余弦表示形式 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为方向余弦.

1. 模

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

2. 方向余弦

$$\begin{cases} a_x = |\overrightarrow{M_1 M_2}| \cos \alpha = |\vec{a}| \cos \alpha \\ a_y = |\overrightarrow{M_1 M_2}| \cos \beta = |\vec{a}| \cos \beta, \text{ 当 } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \neq 0 \text{ 时, 有} \\ a_z = |\overrightarrow{M_1 M_2}| \cos \gamma = |\vec{a}| \cos \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{cases}$$



六、向量的投影

1. 几个概念

(1) 轴上有向线段的值: 设有一轴 \vec{u} , \overrightarrow{AB} 是轴 \vec{u} 上的有向线段, 如果数 λ 满足 $|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$, 且当 \overrightarrow{AB} 与轴 \vec{u} 同向时 λ 是正的, 当 \overrightarrow{AB} 与轴 \vec{u} 反向时 λ 是负的, 那么数 λ 叫做

轴 \vec{u} 上有向线段 \overrightarrow{AB} 的值，记做 AB ，即 $\lambda = AB$. 设 \vec{e} 是与 \vec{u} 轴同方向的单位向量，则

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{e}$$

(2) 设 A, B, C 是 \vec{u} 轴上任意三点，不论三点的相互位置如何，总有 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

(3) 两向量夹角的概念：设有两个非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} ，任取空间一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ，

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角，记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

(4) 空间一点 A 在轴 \vec{u} 上的投影：通过点 A 做轴 \vec{u} 的垂直平面，该平面与轴 \vec{u} 的交点 A' 叫作点 A 在轴 \vec{u} 上的投影。

(5) 向量 \overrightarrow{AB} 在轴 \vec{u} 上的投影：设已知向量 \overrightarrow{AB} 的起点 A 和终点 B 在轴 \vec{u} 上的投影分

别为点 A' 和 B' ，那么轴 \vec{u} 上的有向线段的值 $A'B'$ 叫做向量 \overrightarrow{AB} 在轴 \vec{u} 上的投影，记做

$$Prj_{\vec{u}} \overrightarrow{AB}.$$

2. 投影定理

性质 1：向量在轴 \vec{u} 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦：

$$Prj_{\vec{u}} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$$

性质 2：两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影的和，即
 $Prj_{\vec{u}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = Prj_{\vec{u}} \vec{a}_1 + Prj_{\vec{u}} \vec{a}_2$

性质 3：向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积。即

$$Prj_{\vec{u}}(\lambda \vec{a}) = \lambda Prj_{\vec{u}} \vec{a}$$

七、两向量的数量积

1. 定义： $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ，式中 θ 为向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角。

2. 物理上：物体在常力 \vec{F} 作用下沿直线位移 \vec{s} ，力 \vec{F} 所作的功为

$$W = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \theta$$

其中 θ 为 \vec{F} 与 \vec{s} 的夹角。

3. 性质：

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

2) 两个非零向量 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 的充分必要条件为： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

5) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{c} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad \lambda \text{为常数}$

4. 几个等价公式:

1) 坐标表示式: 设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

2) 投影表示式: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \operatorname{Prj}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 3) 两向量夹角可以由 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 式求解.

八、两向量的向量积

1. 概念: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ \vec{c} 的模 $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, 式中 θ 为向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角. \vec{c} 的方向垂直于 \vec{a} 与 \vec{b} 的平面, 指向按右手规则从 \vec{a} 转向 \vec{b} .

2. 性质:

1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

2) 两个非零向量 \vec{a} 与 \vec{b} 平行 \vec{a} / \vec{b} 的充分必要条件为: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

3) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

5) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{c}) \quad \lambda \text{为数}$

3. 几个等价公式:

1) 坐标表示式: 设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

2) 行列式表示式: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$



九、两向量的混合积

1、定义：先作两向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的向量积，把所得到的向量与第三个向量 \vec{c} 再作数量积，这样得到的数量叫做三向量的混合积，记作 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$.

2、性质：

1) 向量的混合积是这样一个数，它的绝对值表示以三个向量为棱的平行六面体的体积，如果这三个向量组成右手系，则混合积的符号是正的；如果组成左手系，那么混合积的符号是负的。

2) 轮换对称性

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = [\vec{b}\vec{c}\vec{a}] = [\vec{c}\vec{a}\vec{b}]$$

3) 三向量共面的充要条件为混合积为零。

4) 坐标表示

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

十、曲面方程

1. 曲面方程的定义：如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

有下述关系：

- (1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 (1)
- (2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 (1)

那么，方程 (1) 就叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫做方程 (1) 的图形。

2. 几种常见的曲面

(1) 球面

以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心、半径为 R 的球面的方程。

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

特别地：如果球心在原点，那么球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(2) 线段的垂直平分面（平面方程）

设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ ，则线段 AB 的垂直平分面的法向量为 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ，且该平面过 A 与 B 中点 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$ ，则线段 AB 的垂直平分面方程为

$$(x_2 - x_1)(x - \frac{x_1+x_2}{2}) + (y_2 - y_1)(y - \frac{y_1+y_2}{2}) + (z_2 - z_1)(z - \frac{z_1+z_2}{2}) = 0$$

十一、旋转曲面

定义：以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线和定直线依次叫旋转曲面的母线和轴。



设在 yoz 坐标面上有一已知曲线 C , 它的方程为 $f(y, z) = 0$, 把这曲线绕 z 轴旋转一周, 就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面.

设 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为曲线 C 上的任一点, 那么有

$$f(y_1, z_1) = 0 \quad (2)$$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时, 点 M_1 也绕 z 轴旋转到另一点 $M(x, y, z)$, 这时 $z = z_1$ 保持不变, 且点 M 到 z 轴的距离

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$$

将 $z_1 = z$, $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入 (2) 式, 就有旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

十二、柱面

定义: 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面.

一般, 在三维空间中, 方程中缺哪个变量, 则方程代表母线平行于那个轴的柱面.

方程 $F(x, y) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 z 轴, 准线为 xoy 面上的曲线;

方程 $G(y, z) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 x 轴, 准线为 yoz 面上的曲线;

方程 $H(z, x) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 y 轴, 准线为 zox 面上的曲线.

十三、二次曲面

三元二次方程表示的曲面叫做二次曲面.

几种特殊的二次曲面

1. 椭球面

方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. 抛物面

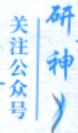
椭圆抛物面方程为

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p \text{ 与 } q \text{ 同号})$$

其形状如右图所示.

旋转抛物面方程为

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z \quad (p > 0)$$





双曲抛物面（鞍形曲面）方程为

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p \text{ 与 } q \text{ 同号})$$

当 $p > 0, q > 0$ 时，其形状如图所示。

3. 双曲面

$$\text{单叶双曲面方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{双叶双曲面方程为 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

十四、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线，故可以将两个曲面联立方程组形式来表示曲线。

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

十五、空间曲线的参数方程

将曲线 C 上的动点的坐标表示为参数 t 的函数：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一点 (x_1, y_1, z_1) ，随着参数的变化可得到曲线上的全部点。

十六、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程式消去其中一个变量（例如 z ）得到方程

$$H(x, y) = 0$$

曲线的所有点都在方程（3）所表示的曲面（柱面）上。

此柱面（垂直于 xoy 平面）称为投影柱面，投影柱面与 xoy 平面的交线叫做空间曲线 C 在 xoy 平面上的投影曲线，简称投影，用方程表示为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

同理可以求出空间曲线 C 在其它坐标面上的投影曲线。

在重积分和曲面积分中，还需要确定立体或曲面在坐标面上的投影，这时要利用投影柱面和投影曲线。

十七、平面的点法式方程

1. 平面的法线向量定义：垂直于一平面的非零向量叫做平面的法线向量。平面内的任一向量均与该平面的法线向量垂直。



2. 平面的点法式方程

已知平面上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个法线向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$ ，对平面上的任一点 $M(x, y, z)$ ，有向量 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ ，即 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ ，代入坐标式，有：

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

此即平面的点法式方程。

十八、平面的一般方程

任一平面都可以用三元一次方程来表示。反之：任何的三元一次方程，例如：

研神 $5x + 6y - 7z + 11 = 0$ 都表示一个平面，该平面的法向量为 $\vec{n} = \{5, 6, -7\}$ 。

平面的一般方程为： $Ax + By + Cz + D = 0$

十九、两平面的夹角

定义：两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角。

设平面 Π_1 ： $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ， Π_2 ： $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ，其法向量分

别为： $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ ， $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ ，按照两向量夹角余弦公式有：

$$\cos \theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

二十、几个常用的结论

设平面 1 和平面 2 的法向量依次为 $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ 和 $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$

1) 两平面垂直： $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ （法向量垂直）

2) 两平面平行： $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ （法向量平行）

3) 平面外一点到平面的距离公式：设平面外的一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，平面的方程为

$Ax + By + Cz + D = 0$ ，则点到平面的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

二十一、空间直线的一般方程

空间直线可以看成是两个平面的交线。故其一般方程为：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

二十二、空间直线的对称式方程与参数方程



平行于一条已知直线的非零向量叫做这条直线的方向向量.

已知直线上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一方向向量 $\vec{s} = \{m, n, p\}$, 设直线上任一点为 $M(x, y, z)$, 那么 $\overrightarrow{M_0 M}$ 与 \vec{s} 平行, 由平行的坐标表示式有:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

此即空间直线的对称式方程(或称为点向式方程).

如设 $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$ 就可将对称式方程变成参数方程(t 为参数)

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

二十三、两直线的夹角:

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设两直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ 和 $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$, 两直线的夹角可以按两向量夹角公式来计算

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

两直线 L_1 和 L_2 垂直: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ (充分必要条件)

两直线 L_1 和 L_2 平行: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ (充分必要条件)

二十四、直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线与它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ 称为直线

与平面的夹角, 当直线与平面垂直时, 规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = \{m, n, p\}$, 平面的法线向量为 $\vec{n} = \{A, B, C\}$, 直线与平面的夹角为 φ , 那么

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面垂直: $\vec{s} // \vec{n}$, 相当于 $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ (充分必要条件)

直线与平面平行: $\vec{s} \perp \vec{n}$, 相当于 $Am + Bn + Cp = 0$ (充分必要条件)



二十五、平面束方程

有时用平面束方程解题比较方便，介绍如下。

设直线 L 由方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

所确定，其中系数 A_1, B_1, C_1 和 A_2, B_2, C_2 不成比例，建立三元一次方程：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ 为任意常数。由于系数 A_1, B_1, C_1 和 A_2, B_2, C_2 不成比例，所以对于任何一个 λ 值，该方程的系数 $A_1 + \lambda A_2, B_1 + \lambda B_2, C_1 + \lambda C_2$ 不全为零，从而方程表示一个平面，若一点在直线 L 上，点的坐标必满足方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

同时也满足方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

故该方程表示通过直线 L 的平面，且对应于不同的 λ 值，该方程表示通过直线 L 的不同的平面，反之，通过直线 L 的任何平面（除 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 外）都包含在该方程所表示的一族平面内。通过定直线的所有平面的全体称为平面束，方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

就作为通过直线 L 的平面束方程。





第七章 多元函数微分学

一、多元函数极限与连续

1. 多元函数定义

设 D 是 R^2 的一个非空子集. 称映射 $f: D \rightarrow R$ 为定义在 D 上的二元函数, 通常记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

或

$$z = f(P), \quad P \in D,$$

其中点集 D 称为该函数的定义域, x, y 称为自变量, z 称为因变量. 数集

$\{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为该函数的值域.

2. 二元函数几何意义

$z = f(x, y)$ 的图形是一张曲面.

3. 多元函数的极限

设二元函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得当点 $P(x, y) \in D \cap \overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ 时, 都有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

为了区别于一元函数的极限, 我们把二元函数的极限叫做二重极限.

4. 多元函数的连续

定义 设二元函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 且 $P_0 \in D$. 如果 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x, y)$ 在 D 的每一点都连续, 则称函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 或者称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数.

5. 闭区域上多元连续函数性质

性质 1 (有界性与最大值和最小值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 必定在 D 上有界, 且能取得它的最大值和最小值. 即在 D 上至少存在 P_1 及 P_2 , 使得 $f(P_1)$ 为最大值, $f(P_2)$ 为最小值, 且对于任意 $P \in D$, 有 $f(P_2) \leq f(P) \leq f(P_1)$.

性质 2 (介值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 必取得介于最大值和最小值



之间的任何值.

二、多元函数的偏导数与全微分

1. 偏导数定义

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 当 y 固定在 y_0 , x 在 x_0 处

有增量 Δx 时, 相应地函数有增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$,

如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$



存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或 } f_x(x_0, y_0)$$

类似地, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或 } f_y(x_0, y_0)$$

2. 偏导数几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点, 过 M_0 作平面

$y = y_0$, 截此曲面得曲线, 此曲线在平面 $y = y_0$ 上的方程为 $z = f(x, y_0)$, 则导数

$\left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0}$, 即偏导数 $f_x(x_0, y_0)$, 就是这曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.



同样, 偏导数 $f_y(x_0, y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

3. 高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y),$$

那么在 D 内 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 都是 x, y 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在, 则称

它们是函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数:



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y).$$

其中第二、三个偏导数称为混合偏导数。同样可得三阶、四阶、以及 n 阶偏导数。二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数。

4. 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该

区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

5. 全微分

定义 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ ，其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x, y 有关，

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ，则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微分，而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数

$z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的全微分，记作 dz ，即 $dz = A\Delta x + B\Delta y$ 。

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微分，则函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处连续。

定理（必要条件）如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微分，则该函数在点 $P(x, y)$ 的

偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

定理（充分条件）如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x, y)$ 连续，则函数

在该点可微分。

6. 多元复合函数的求导法则

(1) 设 $u = u(x), v = v(x)$ 在点 x 处可导，函数 $z = f(u, v)$ 在相应点 (u, v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z = f[u(x), v(x)]$ 在点 x 处可导，且

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

(2) 设 $u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y)$ 在点 (x, y) 处具有对 x 及 y 的偏导



数, 函数 $z = f(u, v, w)$ 在对应点 (u, v, w) 具有连续偏导数, 则复合函数

$z = f[u(x, y), v(x, y), w(x, y)]$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

(3) 设 $u = u(x)$ 在点 x 处可导, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ 在点 (x, y) 具有对 x 及 y

关注公众号
研神

的偏导数, 函数 $z = f(u, v, w)$ 在相应点 (u, v, w) 处有连续偏导数, 则

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

【注】二阶函数求导时, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ 仍然是 u, v, w 为中间变量的多元复合函数.

7. 全微分形式不变性

设函数 $z = f(u, v)$ 具有连续偏导数, 则有全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

如果 u, v 又是 x, y 的函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 且这两个函数也具有连续偏导数, 则复

合函数 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 由复合函数求导法则得到, 将 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{aligned}$$

由此可见, 无论 z 是自变量 u, v 的函数或者中间变量 u, v 的函数, 它的全微分形式是一样的, 这个性质叫做全微分形式不变性.

关注公众号
研神

8. 多元隐函数求导公式

(1) 由一个方程确定的隐函数的导数

1) 设函数 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一领域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 某一领域内, 恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 它满足 $y_0 = f(x_0)$, 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, (F'_y(x, y) \neq 0).$$

2) 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一领域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 某一领域内, 恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 它满足 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

(2) 由方程组确定的隐函数的导数

设 $F(x, y, u, v)$, $G(x, y, u, v)$ 在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的某一领域内具有对各个变量的连续

偏导数, $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, 且 $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$ 在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 不等于零, 则

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 某一领域内, 恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 它们满足 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 并由以下方法可以得

到 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$:

对

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

两边关于 x 求导得

$$\begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

由于 $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$ 在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 不等于零，所以解上线性方程组，可得 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ，

同理，对



两边关于 y 求导得

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_y + F_u \frac{\partial u}{\partial y} + F_v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ G_y + G_u \frac{\partial u}{\partial y} + G_v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

由于 $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$ 在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 不等于零，所以解上线性方程组，可得 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 。

三、多元函数极值

1. 极值定义

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 任意

的点 (x, y) ，都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)$$



则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$ ，点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极大值

点；若对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 任意的点 (x, y) ，都有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0)$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$ ，点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极小值

点。

2. 极值的必要条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则它在该点的



偏导数必然为零，即： $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$.

3. 极值的充分条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0, \text{ 令}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下：



(1). $AC - B^2 > 0$ 时具有极值，且当 $A < 0$ 时有极大值，当 $A > 0$ 时有极小值；

(2). $AC - B^2 < 0$ 时没有极值；

(3). $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论。

4. 条件极值 拉格朗日乘数法

拉格朗日乘数法 要找函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点，可以先构造辅助函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

其中 λ 为参数，求其对 x 与 y 的一阶偏导数，并使之为零，然后与方程 $\varphi(x, y) = 0$ 联立

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

由这方程组解出 x, y 及 λ ，则其中 x, y 就是函数 $f(x, y)$ 在附加条件下 $\varphi(x, y) = 0$ 时的可能极值点。



四、多元函数微分的几何应用、方向导数与梯度

1. 空间曲线在某点处的切线和法平面方程

(1) 设空间曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in T, t = t_0 \text{ 对应曲线 } \Gamma \text{ 上一点 } P(x_0, y_0, z_0), \\ z = z(t) \end{cases}$

则曲线在该点的切线与法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) 设空间曲线 Γ 的一般式方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 则曲线在 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处切线和法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}|_P} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}|_P} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}|_P},$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}|_P (x - x_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}|_P (y - y_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}|_P (z - z_0) = 0,$$



其中 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$ 为雅可比行列式.

2. 空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程

(1) 设曲面 S 为隐式方程 $F(x, y, z) = 0$, 则 S 过上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面和法线方程

分别为

$$F'_x|_M (x - x_0) + F'_y|_M (y - y_0) + F'_z|_M (z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_M} = \frac{y - y_0}{F'_y|_M} = \frac{z - z_0}{F'_z|_M}.$$

(2) 设曲面 S 为显式方程 $z = f(x, y)$, 则过 S 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_P (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}|_P (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}|_P} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}|_P} = \frac{z - z_0}{-1},$$

其中 $P(x_0, y_0)$ 为 $M(x_0, y_0, z_0)$ 对应的 xoy 平面上的一点.

3. 方向导数

设 l 是 xoy 平面上以 $P_0(x_0, y_0)$ 为始点的一条射线, $\vec{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 是与 l 同方向的单位向量, 射线 l 的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cos \alpha \\ y &= y_0 + t \cos \beta \end{aligned}$$

方向导数定义 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义, l 为从点





P_0 出发的射线， $P(x, y)$ 为 l 上且含于 $\cup(P_0)$ 内的任一点，以 t 表示 P 与 P_0 两点间的距离，

若极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P) - f(P_0)}{t} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数 f 在点 P_0 沿方向 l 的方向导数，记作 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0}$ 或 $f_l(P_0)$ 。

若 $f(x, y)$ 在点 P_0 存在偏导数，有以下特殊情况：



当 l 的方向为 $\vec{e}_l = (1, 0)$ ，则

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = f'_x(x_0, y_0)$$

当 l 的方向为 $\vec{e}_l = (0, 1)$ ，则

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = f'_y(x_0, y_0)$$

定理 若函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微，则 f 在点 P_0 处沿任一方向 l 的方向导数都存在，且

$$f(P_0) = f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + f_z(P_0) \cos \gamma$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向 l 的方向余弦。

对于二元函数 $f(x, y)$ ，相应于的结果为

$$f_l(P_0) = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 为方向 l 的方向余弦。

4. 梯度的定义

设函数 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P_0(x_0, y_0) \in D$ ，可定出一个向量

$$f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j$$

这向量称为函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的梯度，记作 **grad** $f(x_0, y_0)$ ，即

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j$$



第八章 二重积分

1. 二重积分定义

设 $f(x, y)$ 是有界闭合区域 D 上的有界函数,

(1) 分割: 将区域 D 任意分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$$



其中 $\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 个小区域, 也表示它的面积, 各小闭区域直径的最大值为 λ ,

(2) 近似: 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, ($i=1, 2, \dots, n$), 并

作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 这和的极限总

存在, 则称此极限值为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y)d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 $f(x, y)$ 称之为被积函数, $f(x, y)d\sigma$ 称之为被积表达式, $d\sigma$ 称之为面积元素, x 与

y 称之为积分变量, D 称之为积分区域, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 称之为积分和.

2. 二重积分的存在定理

若 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分存在.



3. 二重积分的几何意义

二重积分 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 表示以 $z = f(x, y)$ 为曲顶, 以在 xoy 面的投影 D 为底的柱体体积的代数和.

4. 二重积分的性质

性质 1 设 a, b 是常数, 则

$$\iint_D [af(x, y) + bg(x, y)]d\sigma = a\iint_D f(x, y)d\sigma + b\iint_D g(x, y)d\sigma.$$

性质 2 若区域 D 分为两个部分区域 D_1, D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质 3 若在 D 上, $f(x, y) \equiv 1$, σ 为区域 D 的面积, 则 $\sigma = \iint_D 1 d\sigma = \iint_D d\sigma$.

几何意义: 高为 1 的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积.

性质 4 若在 D 上, $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$, 则有不等式 $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D \varphi(x, y) d\sigma$.

特别地, 由于 $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$, 有 $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$.

性质 5 设 M 与 m 分别是 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上最大值和最小值, σ 是 D 的面积, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$$

性质 6 二重积分的中值定理

设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma$$

5. 利用直角坐标计算二重积分

(1) X 型区域: 设积分区域 D 可用不等式 $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ 表示,

其中 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

从而有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

(2) Y 型区域: 如果积分区域 D 可以用不等式 $c \leq y \leq d$, $\varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)$ 表示, 且函数 $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$$

6. 利用极坐标计算二重积分

极坐标系下计算二重积分，有以下计算公式：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

(1) 若积分区域 D 可表示成 $\alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta)$ ，其中函数 $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$

在 $[\alpha, \beta]$ 上连续。


$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

(2) 积分区域 D 可表示成 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \varphi(\theta)$

则
$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

7. 二重积分中的奇偶性与对称性。

(1) 若积分域 D 关于轴对 y 称，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{x>0}} f(x, y) d\sigma & , f(-x, y) = f(x, y) \\ 0 & , f(-x, y) = -f(x, y) \end{cases}$$

(2) 若积分域 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{y>0}} f(x, y) d\sigma & , f(x, -y) = f(x, y) \\ 0 & , f(x, -y) = -f(x, y) \end{cases}$$

(3) 轮换对称性，若积分区域关于直线 $y=x$ 对称，即 x, y 互换后，积分区域不变，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma.$$

特别的： $\iint_D f(x) d\sigma = \iint_D f(y) d\sigma.$



第九章 三重积分（数学一）

1、三重积分的定义 Ω 上的有界函数，将 Ω 任意地分划成 n 个小区域 $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ ，其中 Δv_i 表示第 i 个小区域，也表示它的体积。在每个小区域 Δv_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) ，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ ，作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ ，以 λ 记这 n 个小区域直径的最大者。

若极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ ，即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

其中 dv 叫体积元素。自然地，体积元素在直角坐标系下也可记作成 $dxdydz$ 。

2、利用直角坐标计算三重积分

Ω 在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy} ，过 D_{xy} 上任意一点，作平行于 z 轴的直线穿过 Ω 内部，与 Ω 边界曲面相交不多于两点。亦即， Ω 的边界曲面可分为上、下两片部分曲面。

$$S_1 : z = z_1(x, y), S_2 : z = z_2(x, y)$$

其中 $z_1(x, y), z_2(x, y)$ 在 D_{xy} 上连续，并且 $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ 。

则积分区域 Ω 可表示成（先一后二）

$$a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

那么

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

3、利用柱面坐标计算三重积分

设 $M(x, y, z)$ 为空间的一点，该点在 xoy 面上的投影为 p ， p 点的极坐标为 r, θ ，则 r, θ, z 三个数称作点 M 的柱面坐标。



规定 r, θ, z 的取值范围是：

$$0 \leq r < +\infty,$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$-\infty < z < +\infty,$$

点 M 的直角坐标与柱面坐标之间有关系式

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 在柱面坐标系中的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

上式右端的三重积分计算，也可化为关于积分变量 r, θ, z 的三次积分，其积分限要由 r, θ, z 在 Ω 中的变化情况来确定。

4、利用球坐标计算三重积分

如图所示，空间任意一点 $M(x, y, z)$ 也可用三个数 r, ϕ, θ 唯一表示。

其中：

r 为原点 O 到点 M 的距离；

ϕ 为有向线段 \overrightarrow{OM} 与 z 轴正向所成夹角；

θ 为从正 z 轴来看自 x 轴依逆时针方向转到有向线段 \overrightarrow{OP} 的角度，而点 P 是点 M 在 xoy 面上的投影点。

规定 r, ϕ, θ 的取值范围为

$$0 \leq r < +\infty,$$

$$0 \leq \phi \leq \pi,$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

三重积分在球面坐标系下的计算公式

不难看出，点 M 的直角坐标与球面坐标间的关系为



$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

并且，球面坐标系下的体积元素 $dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$.

这样，有球面坐标系下三重积分计算式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

5、三重积分对称性.



(1) 若积分域 Ω 关于 xoy 面对称，则：

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 0 & f(x, y, -z) = -f(x, y, z). \\ 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv & f(x, y, -z) = f(x, y, z). \end{cases}$$

其中 Ω_1 为 Ω 中 $z \geq 0$ 的部分.

(2) 轮换对称性

轮换对称性定义：设 Ω 是一有界可度量的几何体（ Ω 可为空间区域，空间曲线，曲面块），其边界光滑，若 $\forall (x, y, z) \in \Omega, \exists (z, x, y) \in \Omega, \exists (y, z, x) \in \Omega$ ，则称 Ω 关于 x, y, z 具有轮换对称性.

三重积分轮换对称性：设 Ω 是一有界可度量的几何体（ Ω 可为空间区域，空间曲线，曲面块），其边界光滑，若 Ω 关于 x, y, z 具有轮换对称性， $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的连续函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(z, x, y) dV = \iiint_{\Omega} f(y, z, x) dV$$

6. 利用二重积分求曲面面积



设曲面 S 由方程 $z = f(x, y)$ 给出， D_{xy} 为曲面 S 在 xoy 面上的投影区域.

$f(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ ，则曲面的面积 A 为：

$$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

7. 重积分在物理上的应用

设平面薄片的密度为 $\mu = \rho(x, y)$ ，薄片在 xoy 坐标面上的投影为 D ，则

(1) 薄片质量

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

(2) 薄片重心 (\bar{x}, \bar{y})

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}.$$

当密度 $\rho(x, y) = 1$ 时, 重心坐标就是形心坐标.

(3) 薄片关于 x, y 轴及原点的转动惯量分别为

$$J_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad J_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy, \quad J_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy.$$



设空间形体 Ω 的密度为 $\mu = \rho(x, y, z)$, 则

(4) 空间形体 Ω 的质量

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

(5) 空间形体 Ω 的重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}.$$

(6) 空间形体 Ω 关于 x, y, z 轴及原点的转动惯量分别为

$$J_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad J_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad J_o = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$



第十章 曲线积分与曲面积分（数学一）

一、曲线积分

1. 对弧长的曲线积分定义 设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧，函数 $f(x, y)$ 在 L 上有界。在 L 上任意插入一点列 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} 将 L 任意分成 n 个弧段： $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ ，并用 Δs_i 表示第 i 段的弧长，在每一弧段 Δs_i 上任取一点 (ξ_i, η_i) ，作乘积



$f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ ，如果当各小弧段的长度的最大值

$\lambda = \max \{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\} \rightarrow 0$ 时，这和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$

在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作 $\int_L f(x, y)ds$ ，即

$$\int_L f(x, y)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

其中 $f(x, y)$ 叫做被积函数， L 叫做积分弧段。

2. 对弧长的曲线积分的性质

性质 1 设 $L = L_1 + L_2$ ，则 $\int_L f(x, y)ds = \int_{L_1} f(x, y)ds + \int_{L_2} f(x, y)ds$

性质 2 $\int_L [f(x, y) \pm g(x, y)]ds = \int_L f(x, y)ds \pm \int_L g(x, y)ds$

性质 3 设 $k \in R$ ，则 $\int_L kf(x, y)ds = k \int_L f(x, y)ds$

由性质 2 和性质 3 有

$$\int_L [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)]ds = c_1 \int_L f(x, y)ds + c_2 \int_L g(x, y)ds，\text{ 其中 } c_1, c_2 \text{ 为常数}$$

性质 4 设在 L 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$ ，则

$$\int_L f(x, y)ds \leq \int_L g(x, y)ds.$$

特别地，有

$$|\int_L f(x, y)ds| \leq \int_L |f(x, y)|ds$$

性质 5 对称性与函数奇偶性

(1) 若积分域 L 关于 y 轴对称，则：



$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & f(-x, y) = -f(x, y) \\ 2 \int_{L(x \geq 0)} f(x, y) ds, & f(-x, y) = f(x, y) \end{cases}$$

(2) 若积分域 L 关于 x 轴对称, 则:

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & f(x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \int_{L(y \geq 0)} f(x, y) ds, & f(x, -y) = f(x, y) \end{cases}$$

(3) 若 L 关于 $y = x$ 对称, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds$$

特别的:

$$\int_L f(x) ds = \int_L f(y) ds$$

3、对弧长的曲线积分的计算法

定理 设 $f(x, y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$$

其中 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, 则曲线积分

$\int_L f(x, y) ds$ 存在, 并且有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt (\alpha < \beta).$$

4. 对坐标的曲线积分定义 设函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在有向光滑曲线 L 上有界. 把 L 分成

L 个有向小弧段, L_1, L_2, \dots, L_n 小弧段 L_i 的起点为 (x_{i-1}, y_{i-1}) , 终点为 (x_i, y_i) ,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, (ξ_i, η_i) 为 L_i 上任意一点, λ 为各小弧段长度的最大值. 如

果极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$ 总存在, 则称此极限为函数 $P(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 x 的

曲线积分, 记作 $\int_L P(x, y) dx$, 即

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i,$$

如果极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$ 总存在, 则称此极限为函数 $Q(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 y

的曲线积分, 记作 $\int_L Q(x, y) dy$, 即



$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

其中 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 称为被积函数, L 称为积分弧段, 对坐标的曲线积分也叫第二类

曲线积分. 常记

$$\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

5. 对坐标的曲线积分的性质

(1) L 为有向曲线弧, L^- 为与 L 方向相反的曲线, 则

$$\int_L P(x, y) dx = - \int_{L^-} P(x, y) dx, \quad \int_L Q(x, y) dy = - \int_{L^-} Q(x, y) dy.$$

(2) 设 $L = L_1 + L_2$, 则 $\int_L P dx + Q dy = \int_{L_1} P dx + Q dy + \int_{L_2} P dx + Q dy$.

6. 对坐标的曲线积分计算法

设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, 当 t 单调地从

α 变到 β 时, 点 $M(x, y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 变到终点 B , 且 $x(t), y(t)$ 在以 α , β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且 $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, 则 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 存在, 且

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_\alpha^\beta \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt$$

7. 两类曲线积分的关系

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L P \cos \alpha ds + Q \cos \beta ds$$

类似地有

$$\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \int_\Gamma [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] ds$$

或

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot \tau ds = \int_\Gamma \mathbf{A}_\tau ds$$

其中 $\mathbf{A} = \{P, Q, R\}$, $\tau = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 为有向曲线弧 Γ 上点 (x, y, z) 处单位切

向量, $d\mathbf{r} = \tau ds = \{dx, dy, dz\}$, \mathbf{A}_τ 为向量 \mathbf{A} 在向量 τ 上的投影.

8. 单连通区域与复连通区域

设 D 为平面区域, 如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D , 则称 D 为平面单连通区域, 否则称为复连通区域.

区域 D 的边界曲线 L 的正方向规定如下: 当观察者沿 L 的这个方向行走时, D 在他近处的那一部分总在他的左边.



9. (格林公式) 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上具有
一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

其中 L 为 D 的取正向的边界曲线.

10. 平面上曲线积分与路径无关的条件

设开区域 G 是一个单连通域, 函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则下

边四个条件等价:



(1) 沿 G 中任意光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P dx + Q dy = 0$.

(2) 对 G 中任一分段光滑曲线 L , 曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关, 只与起止点有关.

(3) $P dx + Q dy$ 在 G 内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即

$$du(x, y) = P dx + Q dy$$

(4) 在 G 内每一点都有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

二、曲面积分

1. 对面积的曲面积分的定义 设曲面 Σ 是光滑的, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 小块: $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (ΔS_i 也代表曲面的面积), 在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 如果当

各小块曲面的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分, 记作 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 即

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$



其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

2. 对面积的曲面积分的性质:

(1) 设 c_1, c_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma} [c_1 f(x, y, z) + c_2 g(x, y, z)] dS = c_1 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS + c_2 \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS;$$

(2) 若曲面 Σ 可分成两片光滑曲面 Σ_1 及 Σ_2 , 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS ;$$

(3) 设在曲面 Σ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS ;$$

(4) $\iint_{\Sigma} dS = A$, 其中 A 为曲面 Σ 的面积.



(5) 对称性与函数奇偶性

1) 若积分域 Σ 关于 xoy 面对称, 则:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0 & f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS & f(x, y, -z) = f(x, y, z). \end{cases}$$

Σ_1 为 Σ 中 $z \geq 0$ 的部分.

上述性质可类似地应用到关于其他坐标面的对称性和函数的奇偶性.

2) 若 Σ 关于 x, y, z 具有轮换对称性, 则:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(z, x, y) dS = \iint_{\Sigma} f(y, z, x) dS$$

3. 对面积的曲面积分的计算

设曲面 Σ 的方程 $z = z(x, y)$, (设 $z = z(x, y)$ 为单值函数), Σ 在 xoy 面的投影域为 D_{xy} ,

若 $f(x, y, z)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数, 在 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

即曲面积分可以化为二重积分计算.

4. 有向曲面 规定了侧的曲面, 即有向曲面.

设 Σ 是有向曲面, 在 Σ 上取一小块曲面 ΔS , 把 ΔS 投影到 xOy 面上得一投影区域, 这投影

区域的面积记为 $(\Delta\sigma)_{xy}$, 假定 ΔS 上各点处的法向量与 z 轴的夹角 γ 的余弦 $\cos\gamma$ 有相同的

符号 (即 $\cos\gamma$ 都是正的或都是负的). 我们规定 ΔS 在 xOy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy} & \cos\gamma > 0 \\ -(\Delta\sigma)_{xy} & \cos\gamma < 0, \\ 0 & \cos\gamma = 0 \end{cases}$$



其中 $\cos \gamma \equiv 0$ 也就是 $(\Delta\sigma)_{xy} = 0$ 的情形.

类似地可以定义 ΔS 在 yoz 平面, zox 平面上的投影 $(\Delta S)_{yz}$, $(\Delta S)_{zx}$

5. 对坐标的曲面积分的定义 设 Σ 为光滑的有向曲面, 函数 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i (ΔS_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积), 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$, (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点. 如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$



总存在, 则称此极限为函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x, y 的曲面积分, 记作

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy,$$

即

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}.$$

其中 $R(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面. 类似地可以定义

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz}.$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx}.$$

以上三个曲面积分也称为第二类曲面积分. 在应用上出现较多的是

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx + \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

6. 对坐标的曲面积分的性质

(1) 如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy + \iint_{\Sigma_2} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \end{aligned}$$

(2) 设 Σ 是有向曲面, $-\Sigma$ 表示与 Σ 取相反侧的有向曲面, 则



$$\iint_{-\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = - \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy .$$

7. 对坐标的曲面积分的计算法

设积分曲面 Σ 由方程 $z = z(x, y)$ 给出的, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} , 函数

$z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy ,$$

其中当 Σ 取上侧时, 积分前取 “+”; 当 Σ 取下侧时, 积分前取 “-”.

类似地, 如果 Σ 由 $x = x(y, z)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz .$$

如果 Σ 由 $y = y(z, x)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx .$$

8. 两类曲面积分间的关系

设有向曲面 Σ 由方程 $z = z(x, y)$ 给出, 则 Σ 的法向量的方向余弦为:

$$\cos \alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

有

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS ,$$

其中 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦.

两类曲面积分之间的联系也可写成如下向量的形式:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS , \text{ 或 } \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} A_n dS ,$$

其中 $\mathbf{A} = \{P, Q, R\}$, $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 是有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量,

$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \{dy dz, dz dx, dx dy\}$, 称为有向曲面元, \mathbf{A}_n 为向量 \mathbf{A} 在向量 \mathbf{n} 上的投影.



9. (高斯公式) 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x, y, z)$ 、
 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

或

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方
 向余弦.

10. 通量与散度

一般地, 设某向量场由

$$\mathbf{A} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

给出, 其中 P, Q, R 具有一阶连续偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面, \mathbf{n} 是 Σ 上点 (x, y, z)

处的单位法向量, 则 $\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ 叫做向量场 \mathbf{A} 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量 (或流量),

而 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 叫做向量场 \mathbf{A} 的散度, 记作 $\operatorname{div} \mathbf{A}$, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

11. 斯托克斯公式 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向
 曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在曲面 Σ (连
 同边界) 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

12. 旋度: 由向量场 $\mathbf{A} = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$ 所确定的向量场

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

称为向量场 \mathbf{A} 的旋度, 记为 $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, 即

$$\text{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

为便于记忆，旋度可写为：

$$\text{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

斯托克斯公式的另一形式：

$$\iint_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds, \quad \text{或} \quad \iint_{\Sigma} (\text{rot} \mathbf{A})_n dS = \oint_{\Gamma} A_r ds$$

其中 \mathbf{n} 是曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量， τ 是 Σ 的正向边界曲线 Γ 上点 (x, y, z) 处的单位切向量。

13. 环流量

沿有向闭曲线 Γ 的曲线积分 $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} A_r ds$ ，叫做向量场 \mathbf{A} 沿有向闭曲线 Γ

的环流量。

斯托克斯公式可以叙述为：向量场 \mathbf{A} 沿有向闭曲线 Γ 的环流量等于向量场 \mathbf{A} 的旋度场通过 Γ 所张的曲面 Σ 的通量。



第十一章 无穷级数（数学一、三）

一、常数项级数

1、常数项级数的基本概念

定义 设已给数列 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, 则由这个数列构成的表达式 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ 称为(常数项)级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

常数项级数的前 n 项和 $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ 称为级数的部分和.

关注公众号

研神 级数的收敛与发散 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛且有极限 S , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 此时极限 S 叫做级数的和, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$; 如果数列 $\{S_n\}$ 发散, 则

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2、收敛级数的基本性质

性质 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛, 且其和为 ks .

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s , σ , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其

和为 $s \pm \sigma$.

性质 3 在级数中去掉, 加上或改变有限项, 不会改变级数的收敛性.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对这级数的项任意加括号后所形成的级数

$$(u_1 + \dots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2}) + \dots + (u_{n_{k-1}+1} + \dots + u_{n_k}) + \dots$$

仍收敛, 且其和保持不变.

性质 5 (级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则它的一般项 u_n 趋于零, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

3、正项级数及其审敛法

正项级数: 每项均为非负的级数称为正项级数.

正项级数收敛的充要条件

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛充要条件是: 它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

推论: 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则它的部分和数列 $S_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$)

正项级数的审敛法

(1) 比较审敛法

定理 2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $v_n \leq u_n$ ($n = 1, 2, \dots$). 若级

关注公众号

数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛；反之，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ ($0 < l < +\infty$)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛，或同时发散。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ ，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ ，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(2) 比值审敛法

定理 4 (比值审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ ，则当 $\rho < 1$ 时，级数收敛； $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$) 时级数发散； $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散。

(3) 根值审敛法 (数学一)

定理 5 (根值审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ ，则当 $\rho < 1$ 时，级数收敛， $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$) 时级数发散， $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散。

4、交错级数及其审敛法

交错级数：一个级数的各项如果是正负交错的就叫做交错级数。

定理 6 (莱布尼茨定理) 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件：

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)；

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，

则级数收敛，且其和 $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \leq u_1$ ，其余项满足 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。

5、绝对收敛与条件收敛

定义 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是绝对收敛的；如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛的。

绝对收敛与条件收敛的基本结论

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛。

(2) 条件收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散，即： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛

关注公众
研神

则 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2}$ 均发散.

二、幂级数

1、函数项级数定义 如果级数 $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ 的各项都是定义在区间 I 上的函数, 就叫做函数项级数.

当 $x = x_0 \in I$ 时, 级数变成一个数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. 如果这个数项级数收敛, 称为 x_0

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点, 如发散, 称 x_0 为发散点, 一个函数项级数的收敛点的全体

构成它的收敛域.

**研
究
注
公
众
号** 函数项级数对收敛域内的任意一个数 x , 函数项级数成为一个常数项级数, 故有一个和 s . 于是, 函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$, 通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数. 其定义域是级数的收敛域. 写为 $s(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$.

2、幂级数及其收敛性定义 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$, 的级数称为

幂级数, 其中常数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 叫做幂级数的系数.

定理 1: 幂级数的收敛定理 (阿贝尔定理) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) 时收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 反之, 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

推论: 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x = 0$ 一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一个确定的数 R 存在, 使得

当 $|x| < R$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

当 $|x| > R$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散;

当 $x = R$ 与 $x = -R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

正数 R 通常叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 开区间 $(-R, R)$ 叫做幂级数的收敛区间.

3、收敛区间和收敛半径的求法

定理 2 : 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho (0 \leq \rho \leq +\infty),$$

其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径



$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

4、幂级数的性质

(1) 四则运算性质
设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

分别在区间 $(-R, R)$ 及 $(-R', R')$ 内收敛, 对于这两个幂级数, 有下列四则运算:

$$\text{加减法: } (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) \pm (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots)$$

$$= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n + \cdots$$

$$\text{乘法: } (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots)$$

$$= (a_0 \cdot b_0) + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)x + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0)x^2 + \cdots +$$

$$(a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + a_2 \cdot b_{n-2} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots$$

(2) 和函数的性质

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, (x \in I)$$

且有逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 且有逐项求导公式

式

$$s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, |x| < R$$

且有逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

5、函数的幂级数展开

$$(1) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots; (-1 < x < 1)$$

$$(2) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$$



$$(3) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(4) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(6) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$



傅里叶级数

1. 三角级数与三角函数系的正交性（数学一）

称正弦函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 所表达的周期运动为简谐振动，其中 A 为振幅， φ 为初相角， ω 为角频率，简谐振动的周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

较复杂的周期运动是几个简谐振动 $y_k = A_k \sin(k\omega x + \varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ 的叠加

$$y = \sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n A_k \sin(k\omega x + \varphi_k) \quad (1)$$

由于 y_k 的周期为 $\frac{T}{k}$ ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), $k = 1, 2, \dots, n$ ，所以 (1) 的周期为 T .

对无穷多个简谐振动叠加得到函数项级数 $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$ 利用三角公式变形，

改写为

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \varphi_n \cos nx + A_n \cos \varphi_n \sin nx)$$

记 $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $a_n = A_n \sin \varphi_n$, $b_n = A_n \cos \varphi_n$ ，则级数可写成

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

形如 (2) 的级数称为三角级数，其中 $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 都是常数.

2、三角函数系的正交性

函数列 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ ，称为三角函数系.



2π 是三角函数系中每个函数的周期。三角级数由三角函数系所产生。

三角函数系具有下列性质： m 与 n 是任意非负整数，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \neq 0, \end{cases}$$

即三角函数系中任意两个不同函数之积在 $[-\pi, \pi]$ 的定积分是 0，而每个函数的平方在

$[-\pi, \pi]$ 的定积分不是 0。三角函数系的这个性质称为正交性。

3、函数展开成傅里叶级数

傅里叶级数定义 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的函数，且 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积，称形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的函数项级数为 $f(x)$ 的傅里叶级数，其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

称为傅里叶系数。

注：上述区间换为一般的 $[-l, l]$ ，则 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad n = 1, 2, \dots$$

4、傅里叶级数的收敛定理

设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，如果它在 $[-l, l]$ 满足：

- (1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，
- (2) 在一个周期内至多只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$ ；

当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ ；

当 $x = \pm l$ 时，级数收敛于 $\frac{f(l+0)+f(l-0)}{2}$ 。

研
神

3. 正弦级数和余弦级数

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 是奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$ ，其傅里叶级数为正弦级数，即

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2 \dots$$

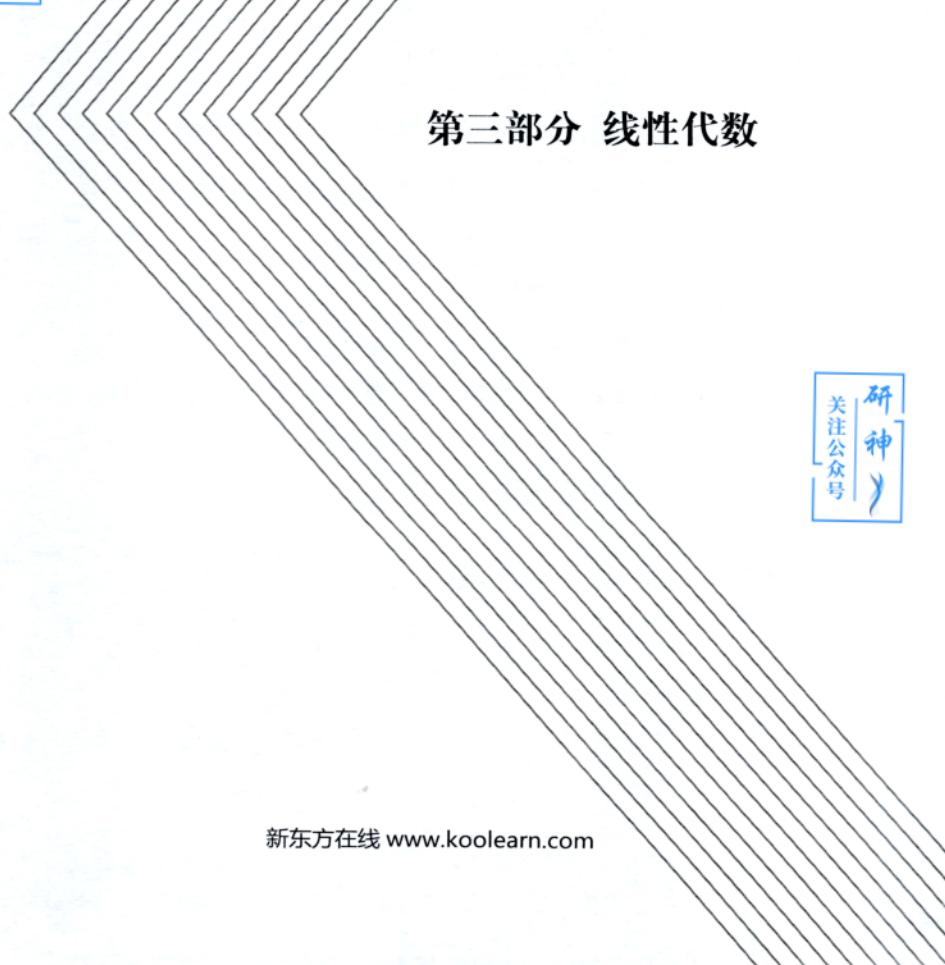
(2) 若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 是偶函数，即 $f(-x) = f(x)$ ，其傅里叶级数为余弦级数，即

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2 \dots$$

(3) 如果 $f(x)$ 是定义在 $[0, l]$ 上的函数，将其作奇延拓，就可利用(1) 将其展开成正弦级数；将其作偶延拓，就可利用(2) 将其展开成余弦级数。

研
神



第三部分 线性代数



线性代数重点及数学一、二、三区别

	重点	数学一、二、三区别
一、行列式	行列式性质, 行列式按行(列展开), 克拉默(Cramer)法则	
二、矩阵	矩阵逆阵, 伴随矩阵, 矩阵的初等变换, 矩阵的秩	
三、向量组的线性相关性、向量组的秩、线性表示、向量组的等价。 	向量组的线性相关性, 向量组的秩, 线性表示, 向量组的等价.	(数学一) 向量空间及其相关概念 n 维向量空间的基变换和坐标变换 过渡矩阵 规范正交基
四、线性方程组	齐次及非齐次线性方程组解的判定, 性质及解的结构, 公共解与同解	
五、特征值与特征向量	特征值与特征向量的计算及性质, 相似对角化的判定与方法, 实对称矩阵的正交相似对角化	
六、二次型	二次型的标准型及规范型, 二次型的正定.	





第一章 行列式

考点内容

一、 n 阶行列式

1. n 阶行列式定义

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列，每一项都按下列规则带有符号：当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时，带有正号，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时，带有负号，这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和。

2. 常用特殊行列式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

(2) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}_n \\ \mathbf{B}_m & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_n \\ \mathbf{B}_m & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}_n||\mathbf{B}_m|$$



(3) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

二、行列式的性质

1. 行列式的性质

性质 1 互换行列式的两行 (列), 行列式变号.

推论 如果行列式有两行 (列) 完全相同, 则此行列式等于零.

性质 2 行列式的某一行 (列) 中所有的元素都乘以同一数 k , 等于用数 k 乘此行列式.

推论 1 行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

推论 2 行列式中如果有两行 (列) 元素成比例, 则此行列式等于零.

性质 3 若行列式的某一列 (行) 的元素都是两数之和, 例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + b_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + b_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + b_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和:



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变。

三 行列式按行（列）展开



1. 定义

在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行，第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



称其为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij} ，而称 $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij} ，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2. 行列式按行（列）展开法则

n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行（列）的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \quad (k=1,2,\dots,n).$$

或

$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} \quad (k=1,2,\dots,n).$$

上式称为行列式按第 k 行（列）的展开公式。

3. 代数余子式的性质



(1) 只改变 a_{ij} 所在行或列中元素的值并不影响其代数余子式 A_{ij} ，特别地， A_{ij} 与 a_{ij} 的取值没有关系。

(2) 行列式一行（列）元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和必为零。

即

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad i \neq k \quad (i,k=1,2,\dots,n)$$

$$a_{1j}A_{ik} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad j \neq k \quad (j,k=1,2,\dots,n)$$

四 克拉默（Cramer）法则

1. 克拉默法则 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组 (1) 有解，并且解是惟一的，解可以由下式给出

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是将系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行



列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij}$$

2. 与之相关的结论

(1) 如果方程组 (1) 无解或有两个不同的解，则它的系数行列式 $D = 0$

(2) 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式不为 0，则方程组只有零解。

(3) 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解，则系数行一我式 $|A| = 0$.



第二章 矩阵

一、矩阵的基本概念

1. 矩阵的定义

$m \times n$ 个数排成如下 m 行 n 列的一个表格

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



称为是一个 $m \times n$ 矩阵，当 $m = n$ 时，矩阵 \mathbf{A} 称为 n 阶矩阵或叫 n 阶方阵。

2. 几种特殊形式的矩阵

(1) 行矩阵与列矩阵

1) 行矩阵

当 $m = 1$ 时，即只有一行的矩阵 $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为行矩阵或行向量。

2) 列矩阵

当 $n = 1$ 时，即只有一列的矩阵 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 称为列矩阵或列向量。

(2) 同型矩阵与矩阵的相等

两个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times t}$, 如果 $m = s$, $n = t$, 则称 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 是同型矩阵。



两个同型矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times t}$, 如果对应的元素都相等，即

$a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$), 则称矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相等，记作 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

(3) 零矩阵

元素都是零的矩阵称为零矩阵。记作 $\mathbf{0}_{m \times n}$ 或 $\mathbf{0}$

(4) 方阵

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

n 阶方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 的元素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 称为主对角线元素

(5) 上(下)三角矩阵

研
神

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(6) n 阶数量矩阵

主对角元素都是同一个常数 k 的 n 阶对角阵，称为 n 阶数量矩阵，记为

$$k\mathbf{E} = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

(7) 单位矩阵

研
神

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(8) 对角矩阵 主对角线以外的所有元素为 n 的阶方阵称为对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法

(1) 定义

两个 $m \times n$ 的同型矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 和 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 的对应元素相加, 所得 $m \times n$ 的矩阵

称为矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的和, 即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})$$

(2) 运算规律

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

(3) 负矩阵

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), -\mathbf{A} = (-a_{ij}), \text{ 则有 } \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

(4) 矩阵的减法

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

2. 数与矩阵的乘法

(1) 定义

用数 λ 乘以 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 的所有元素, 所得的 $m \times n$ 矩阵称为数 λ 与矩阵 \mathbf{A} 的数乘

矩阵, 简称数乘, 记为 $\lambda\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}\lambda$, 即

$$\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

注: $\lambda\mathbf{A}$ 与 \mathbf{A} 为同型矩阵. $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$

(2) 运算规律

1) 结合律 $\lambda(\mu)\mathbf{A} = (\lambda\mu)\mathbf{A}$

2) 分配律 $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}, \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$

3. 矩阵与矩阵的乘法

(1) 定义





设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times s}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times n}$ 则矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} 的乘积为 $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$, 其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$ ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$)

(2) 运算规律 (假定运算都是可行的)

1. 结合律 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

2. 分配律 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$

3. 数与乘积的结合律 $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB})$

4. 矩阵的幂

$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}, \dots, \mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{AA} \cdots \mathbf{AA}}_{k \text{ 个}}, k \text{ 为正整数}$

矩阵的幂满足下列运算规律

$\mathbf{A}^k \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}$, $(\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}$

5. 矩阵的转置

(1) 定义 6

设

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

称

$$\mathbf{A}^T = (a_{ji})_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

为矩阵 \mathbf{A} 的转置矩阵.

(2) 运算规律 (假定运算都是可行的)

1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

3) $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$

4) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

6. 对称矩阵和反对称矩阵

定义

设矩阵 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, 如果满足 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ 即 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 那么 \mathbf{A}

称为对称矩阵.

如果满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ 即 $a_{ij} = -a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 那么 \mathbf{A} 称为反对称矩阵.

7. 方阵的行列式

(1) 定义

n 阶方阵 \mathbf{A} 的元素所构成的行列式 (每个元素的位置不变), 称为方阵 \mathbf{A} 的行列式,

记作 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$

(2) 方阵的行列式满足的运算规律

$$1) |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

$$2) |\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$$

$$3) |\lambda \mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}|$$

$$4) |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|,$$

$$5) |\mathbf{A}^n| = |\mathbf{A}|^n$$

三、逆矩阵

1 逆矩阵的定义

设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 \mathbf{B} , 使 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$, 则称方阵 \mathbf{A} 可逆, \mathbf{B}

称为 \mathbf{A} 的逆矩阵.

2 方阵 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件及 \mathbf{A}^{-1} 的求法

定理 1 若矩阵 \mathbf{A} 可逆, 则 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 即 \mathbf{A} 为非奇异矩阵.

定理 2 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则矩阵 \mathbf{A} 可逆, , 则矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$ 其中, \mathbf{A}^* 为矩阵 \mathbf{A} 的

伴随矩阵.

由以上两定理可知: 矩阵 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 即可逆矩阵就是非奇异



矩阵.

3. 可逆矩阵的性质

(1) 若 \mathbf{A} 可逆, 则 \mathbf{A}^{-1} 也可逆, 且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$, $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$

(2) 若 \mathbf{A} 可逆, 则 \mathbf{A}^T 也可逆, 且 $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

(3) 若 \mathbf{A} 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 $\lambda \mathbf{A}$ 也可逆, 且 $(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1}$

(4) 若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为同阶可逆矩阵, 则 \mathbf{AB} 可逆, 且 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$

(5) 若 \mathbf{A} 可逆, 则 \mathbf{A}^n 也可逆, 且 $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$



四、方阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵

1 定义

由 n 阶方阵 \mathbf{A} 的行列式 $|\mathbf{A}|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的 n 阶方阵 \mathbf{A}^*

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为 \mathbf{A} 的伴随矩阵, 简称伴随阵.

2 方阵的伴随矩阵满足的性质

$$1. \mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = |\mathbf{A}| E$$

$$2. (k\mathbf{A})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*$$

$$3. (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$$

$$4. (\mathbf{A}^*)^n = (\mathbf{A}^n)^*$$

$$5. (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$$

$$6. |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$$



五、矩阵分块法

1 定义

将矩阵 \mathbf{A} 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 \mathbf{A} 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

2 分块矩阵的运算

(1) 分块矩阵的加法与减法

设矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为同型矩阵，采用相同的分块法，

设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr} \end{bmatrix},$$

则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \pm \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \pm \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} \pm \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \pm \mathbf{B}_{sr} \end{bmatrix}.$$

(2) 数与分块矩阵的乘法

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{bmatrix}, \text{ 则 } \lambda \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{A}_{11} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{sr} \end{bmatrix}$$

(3) 分块矩阵的乘法

$$\text{设 } \mathbf{A}_{m \times l}, \mathbf{B}_{l \times n}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{st} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{t1} & \cdots & \mathbf{B}_{tr} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \dots, \mathbf{A}_{it}$ 的列数分别等于 $\mathbf{B}_{1j}, \mathbf{B}_{2j}, \dots, \mathbf{B}_{tj}$ 的行数，则

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{s1} & \cdots & \mathbf{C}_{sr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^t \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj} \quad (i=1, 2, \dots, s; j=1, 2, \dots, r)$$

(4) 分块矩阵的转置



$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \cdots & \mathbf{A}_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1r}^T & \cdots & \mathbf{A}_{sr}^T \end{bmatrix}$$

(5) 分块对角矩阵

1) 定义

形如 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_s \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_i (i=1,2,\dots,s)$ 都是方阵, 称为分块对角矩阵

2) 有关分块对角矩阵的公式

a. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2| \cdots |\mathbf{A}_s|$

b. 若 $\mathbf{A}_i (i=1,2,\dots,s)$ 都可逆, 则 \mathbf{A} 可逆, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_s^{-1} \end{bmatrix}$$

c. $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{bmatrix}$

六、矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 矩阵的初等变换

(1) 定义

初等行(列)变换

下列三种变换称为矩阵的初等行变换:

1) 对换变换: 对换矩阵的某两行;

2) 数乘变换: 非零数 k 乘矩阵某行的所有元素;

3) 倍加变换: 将矩阵的某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应元素上.

若将上述定义中的“行”换成“列”, 即对矩阵的列施行上面三种变换, 就称为矩阵的

初等列变换.

(2) 初等变换 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

(3) 等价关系 如果矩阵 \mathbf{A} 经过有限次初等变换化为矩阵 \mathbf{B} , 则称 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 等价, 记为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

矩阵的等价具有以下性质:

1) 自反性: $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$;

2) 对称性: 若 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ 则 $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$;

3) 传递性: 若 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, 则 $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.

2. 初等矩阵

(1) 定义 单位矩阵经一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵(方)阵.

三种初等行变换对应的三种初等矩阵分别为:

1) $\mathbf{E}(i, j)$ 或 \mathbf{E}_{ij} : 交换 \mathbf{E} 的 i, j 两行(列)所得的矩阵

2) $\mathbf{E}(i(k))$ 或 $\mathbf{E}_i(k)$: \mathbf{E} 的第 i 行(列)乘非零数 k 所得的矩阵, 即

3) $\mathbf{E}(i, j(k))$ 或 $\mathbf{E}_{ij}(k)$: \mathbf{E} 的第 j 行乘 k 加到第 i 行(第 i 列乘 k 加到第 j 列)

所得的矩阵, 即

初等矩阵都是可逆的, 其逆矩阵仍是同种初等矩阵, 即

$$\mathbf{E}(i, j)^{-1} = \mathbf{E}(i, j); \mathbf{E}(i(k))^{-1} = \mathbf{E}(i(\frac{1}{k})); \mathbf{E}(i, j(k))^{-1} = \mathbf{E}(i, j(-k)).$$

其行列式分别为

$$|\mathbf{E}(i, j)| = -1; |\mathbf{E}(i(k))| = k; |\mathbf{E}(i, j(k))| = 1.$$

(2) 相关的结论

1) 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 对 \mathbf{A} 施行一次初等行变换, 相当于在 \mathbf{A} 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 \mathbf{A} 施行一次初等列变换, 相当于在的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

2) 方阵 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_l$, 使 $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_l$.



- 3) 方阵 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件是 \mathbf{A} 等价于单位矩阵 \mathbf{E} .
- 4) $m \times n$ 阶同型矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 等价的充要条件是存在 m 阶可逆阵 \mathbf{P} 和 n 阶可逆阵 \mathbf{Q} ,
使 $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$.



七、矩阵的秩

1. 矩阵的秩的概念

(1) k 阶子式

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵，在 \mathbf{A} 中任取 k 行和 k 列 ($1 \leq k \leq \min\{m, n\}$)，位于这 k 行 k 列交叉位置上的 k^2 个元素，不改变它们在 \mathbf{A} 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 \mathbf{A} 的 k 阶子式，记作 D_k .



(2) 矩阵的秩：设 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 中，有一个 r 阶子式 D 不等于零，而所有 $r+1$ 阶子式（如果存在）全等于零，则称 D 为矩阵 \mathbf{A} 的最高阶非零子式，称数 r 为矩阵 \mathbf{A} 的秩，记为 $R(\mathbf{A})$ ，并规定零矩阵的秩为零.

2. 矩阵秩的性质

$$(1) 0 \leq R(\mathbf{A}_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$$

$$(2) R(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \text{ 的列秩} = \mathbf{A} \text{ 的行秩.}$$

$$(3) k \neq 0 \text{ 时, } R(k\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$$

$$(4) R(\mathbf{A}^T) = R(\mathbf{A})$$

$$(5) \mathbf{A} \text{ 中的一个 } D_r \neq 0 \Rightarrow R(\mathbf{A}) \geq r$$

$$(6) \mathbf{A} \text{ 中所有的 } D_{r+1} = 0 \Rightarrow R(\mathbf{A}) \leq r$$

有关矩阵秩的重要结论：

$$1. \max(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$$

$$2. R(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$$

$$3. R(\mathbf{AB}) \leq \min(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B}))$$

$$4. \text{若 } \mathbf{P}, \mathbf{Q} \text{ 可逆, 则 } R(\mathbf{PAQ}) = R(\mathbf{PA}) = R(\mathbf{AQ}) = R(\mathbf{A})$$

$$5. \mathbf{A} \text{ 若是 } m \times n \text{ 矩阵, } \mathbf{B} \text{ 是 } n \times s \text{ 矩阵, } \mathbf{AB} = \mathbf{0}, \text{ 则 } R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) \leq n$$

$$6. \text{设 } \mathbf{A} \text{ 是 } n \text{ 阶矩阵, } \mathbf{A}^* \text{ 是 } \mathbf{A} \text{ 的伴随矩阵, 则}$$



$$R(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & R(\mathbf{A}) = n, \\ 1, & R(\mathbf{A}) = n-1, \\ 0, & R(\mathbf{A}) < n-1. \end{cases}$$

3. 用初等变换求矩阵的秩

(1) 行阶梯形矩阵

经过初等行变换，可把矩阵化为行阶梯形矩阵，其特点是：可画出一条阶梯线，线的下方全为0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯形的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元。

(2) 行最简形矩阵

经过初等行变换，行阶梯形矩阵还可以进一步化为行最简形矩阵，其特点是：非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在列的其它元素都为0。

(3) 矩阵的标准形

对行最简形矩阵再进行初等列变换，可得到矩阵的标准形，其特点是：左上角是一个单位矩阵，其余元素都为0。

任何一个 $m \times n$ 矩阵，总可以经过初等变换（行变换和列变换），化为标准形。

(4) 定理 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩

可以利用这个定理，对要求秩的矩阵施行矩阵的初等变换，变成阶梯形，这时，矩阵的非零行的行数就是矩阵的秩。

关注
公众
号
研
神
考



第三章 向量

一、向量

1. n 维向量的概念

n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的有序数组称为 n 维向量，这 n 个数称为该向量的分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量（或称第 i 个坐标）。

2. n 维向量的运算

$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 都是 n 维向量，则

加法 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$;

数乘 $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$;

内积 $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

模 $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

3. Schmidt 正交化

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，令

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2,$$

...

$$\beta_m = \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_m, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_m, \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1}, \beta_{m-1})} \beta_{m-1}.$$

则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 两两正交，称为正交向量组。

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 到 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 这一过程称为向量组的 Schmidt 正交化。

若再将 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 单位化

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \dots, \gamma_m = \frac{\beta_m}{\|\beta_m\|},$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 到 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 这一过程称为向量组的 Schmidt 规范正交化。

二、向量的线性组合、线性表出及线性相关性





1. 线性组合与线性表出

(1) 线性组合: 给定向量组 $\mathbf{A} : \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, 对于任何一组实数 k_1, \dots, k_m , 表达式

$$k_1\mathbf{a}_1 + \dots + k_m\mathbf{a}_m$$

称为向量组 \mathbf{A} 的一个线性组合, k_1, \dots, k_m 称为这个线性组合的系数.

(2) 线性表出: 给定向量组 $\mathbf{A} : \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 和向量 \mathbf{b} , 若有数组 k_1, \dots, k_m 使得 $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + \dots + k_m\mathbf{a}_m$, 称 \mathbf{b} 为 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 的线性组合, 或 \mathbf{b} 可由 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.

2. 线性相关与线性无关

(1) 线性相关

1) 线性相关定义

对 n 维向量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, 若存在不全为零的数 k_1, \dots, k_m , 使得

$$k_1\mathbf{a}_1 + \dots + k_m\mathbf{a}_m = 0$$

则称向量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关.

线性相关也即: 必存在某向量 $\mathbf{a}_i (i=1, 2, \dots, s)$ 可由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

2) n 维向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性相关的性质

(i) 两个向量线性相关的充要条件为两向量的坐标成比例.

(ii) 向量组中有一个部分组线性相关则此向量组线性相关.

(iii) 向量组的延伸组线性相关则此向量组线性相关.

(2) 线性无关

1) 线性无关定义

对 n 维向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, 如果

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_m\mathbf{a}_m = 0$$

必有 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$, 则称 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性无关.

2) 线性无关定义的逆否命题

对任意不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 必有 $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_m\mathbf{a}_m \neq 0$, 则称 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性无关.

线性无关也即: 任意向量 $\mathbf{a}_i (i=1, 2, \dots, s)$ 均不可由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

3) 向量组线性无关的性质

(i) 两个向量线性无关的充要条件为两向量的坐标不成比例.

(ii) 如果 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性无关, 那么它的任一部分组都线性无关.



(iii) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则其延伸组亦线性无关

三、向量组的秩与极大无关组

1. 向量组的秩与极大无关组的定义

设向量组为 T , 若

(1) 在 T 中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) 在 T 中所有 $r+1$ 个向量线性相关 (如果有 $r+1$ 个向量的话).

称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量组为 T 的一个极大线性无关组, 称 r 为向量组 T 的秩, 记作

$$R(T) = r.$$

2. 向量组的秩与线性相关, 线性无关的关系

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充要条件为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$.

3. 向量组的秩与矩阵秩的关系

(1) $R(A) = A$ 的行秩 (矩阵 A 的行向量组的秩) = A 的列秩 (矩阵 A 的列向量组的秩).

(2) 设 A 为 n 阶方阵, 则有

$$R(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ 可逆} \Leftrightarrow \text{矩阵 } A \text{ 的行向量组, 列向量组均线性无关.}$$

$$R(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A \text{ 不可逆} \Leftrightarrow \text{矩阵 } A \text{ 的行向量组, 列向量组均线性相关.}$$

4. 向量组的秩与极大线性无关组求法

经初等变换, 矩阵和向量组的秩均不变.

四、秩与线性表示的关系

1. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的充要条件为

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta).$$

特例 1.1: $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = s$, 则 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一.

特例 1.2: 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一.

研
神
注
公
众
号

特例 1.3: 设 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{\beta} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_s\mathbf{a}_s$, 即 $\mathbf{Ax} = \mathbf{\beta}$.

则有以下结论:

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{\beta}) = s, \text{ 则 } \mathbf{Ax} = \mathbf{\beta} \text{ 有唯一解.}$$

特例 1.4: 一个向量组的极大线性无关组之外的向量, 均可由其极大线性无关组线性表示, 且表示法唯一.

特例 2.1: $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s) = R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{\beta}) < s$, 则 $\mathbf{\beta}$ 可由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性表出, 且表示法不唯一.

特例 2.2: 设 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{\beta} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_s\mathbf{a}_s$, 即 $\mathbf{Ax} = \mathbf{\beta}$.

则有以下结论:

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{\beta}) < s, \text{ 则 } \mathbf{Ax} = \mathbf{\beta} \text{ 有无穷多解.}$$

特例 3.1: 向量 $\mathbf{\beta}$ 不能由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性表出的充要条件为

$$R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s) \neq R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{\beta}).$$

2. 向量组 $\mathbf{T}_2 : \mathbf{\beta}_1, \mathbf{\beta}_2, \dots, \mathbf{\beta}_t$ 可由向量组 $\mathbf{T}_1 : \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性表出的充要条件为

$$R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s) = R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{\beta}_1, \mathbf{\beta}_2, \dots, \mathbf{\beta}_t).$$

特例 2.1: 向量组 $\mathbf{T}_2 : \mathbf{\beta}_1, \mathbf{\beta}_2, \dots, \mathbf{\beta}_t$ 可由向量组 $\mathbf{T}_1 : \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性表出, 则有

$$R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s) = R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{\beta}_1, \mathbf{\beta}_2, \dots, \mathbf{\beta}_t) \geq R(\mathbf{\beta}_1, \mathbf{\beta}_2, \dots, \mathbf{\beta}_t),$$

即

$$R(\mathbf{\beta}_1, \mathbf{\beta}_2, \dots, \mathbf{\beta}_t) \leq R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s).$$

于是可得以下结论

特例 3.1: 如果向量组 $\mathbf{\beta}_1, \mathbf{\beta}_2, \dots, \mathbf{\beta}_t$ 可由向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性表出, 而且 $t > s$, 那么 $\mathbf{\beta}_1, \mathbf{\beta}_2, \dots, \mathbf{\beta}_t$ 线性相关. 即如果多数向量能用少数向量线性表出, 那么多数向量一定线性相关.

也可得到

特例 3.2: 设 n 维向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$, 满足 $s > n$, 则 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性相关, 特别

地, $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

特例 3.3: 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 而且向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关, 则 $t \leq s$.

3. 等价向量组:

(1) 等价向量组的定义

设向量组 $\mathbf{T}_1 : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, $\mathbf{T}_2 : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 若任意 α_i ($i=1, 2, \dots, r$) 均可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 称 \mathbf{T}_1 可由 \mathbf{T}_2 线性表示; 若 \mathbf{T}_1 与 \mathbf{T}_2 可以互相线性表示, 称 \mathbf{T}_1 与 \mathbf{T}_2

等价.

(2) 等价向量组的性质

自反性: \mathbf{T}_1 与 \mathbf{T}_1 等价

对称性: \mathbf{T}_1 与 \mathbf{T}_2 等价, 则 \mathbf{T}_2 与 \mathbf{T}_1 等价

传递性: \mathbf{T}_1 与 \mathbf{T}_2 等价, \mathbf{T}_2 与 \mathbf{T}_3 等价, 则 \mathbf{T}_1 与 \mathbf{T}_3 等价

(3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价的充要条件为

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$

(4) 特别地, 等价的向量组有相同的秩, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价,

则

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t),$$

但 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$, 得不到向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价.

(5) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 且 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价.

4. 极大线性无关组与向量组的等价的关系

(1) 向量组与之对应的极大线性无关组等价.

(2) 向量组的任意两个极大线性无关组等价.

(3) 向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相同.

研
神
注
公
众
号

第四章 线性方程组

一、齐次线性方程组

1 齐次线性方程组的表达形式

(1) 一般形式
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

(2) 矩阵形式 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

(3) 向量形式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

2 齐次线性方程组解的判定

齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{m \times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 一定有解 (至少有零解)

(1) $R(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow \mathbf{A}_{m \times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有无穷多解 (非零解);

(2) $R(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{A}_{m \times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

特别地, 当方程个数与未知个数相等, 即 $m = n$ 时, 也可利用克莱默法则判定:

(1) $|\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有无穷多解 (非零解);

(2) $|\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

3 齐次线性方程组解的性质

若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 则对任意常数 k_1, k_2, \dots, k_m , 有 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_m\xi_m$ 也是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

4 齐次线性方程组解的结构

(1) 齐次线性方程组的基础解系



设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 为齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一组线性无关解, 如果方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 任意一个解均可表为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 的线性组合, 则称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 为方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

(2) 齐次线性方程组的通解

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 若秩 $R(\mathbf{A}) = r < n$, 则齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 存在基础解系, 且基础解系包含 $n - r$ 个线性无关的解向量, 这时方程组的通解可表为

$$\mathbf{x} = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}.$$



其中 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 为任意常数, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 为齐次方程组的一个基础解系.

(3) 齐次线性方程组基础解系的求法

利用初等行变换将系数矩阵化为行最简型矩阵, 确定自由变量, 得出基础解系.

二、非齐次线性方程组

1 非齐次线性方程组的表达形式

$$(1) \text{ 一般形式} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

(2) 矩阵形式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

(3) 向量形式 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{b}$

其中

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j=1, 2, \dots, n), \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

2 非齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{m \times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的判定

$$(1) R(\mathbf{A}) \neq R(\bar{\mathbf{A}}) = R(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathbf{A}_{m \times n}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 无解};$$



(2) $R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = R(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 且

$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = r = n \Leftrightarrow \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解;

$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = r < n \Leftrightarrow \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有无穷多解;

特别地, 当方程个数与未知个数相等, 即 $m = n$ 时, 也可利用克莱默法则判定:

(1) $|\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解;

(2) $|\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解或无解.

3 非齐次线性方程组 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的性质

(1) 若 η_1, η_2 是方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解.

(2) 若 η 是方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解, ξ 是对应的齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 则 $\xi + \eta$ 仍是方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解.

4 非齐次线性方程组解的结构

(1) 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的任意一个解均可表示为方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个特解与其导出组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的某个解之和.

(2) 当非齐次线性方程组有无穷多解时, 它的通解可表为

$$\mathbf{x} = \eta_0 + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \cdots + k_{n-r} \eta_{n-r}.$$

其中 η_0 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个特解, k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 为任意常数, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 为其导出

组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

5 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 与齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 解的判定关系

(1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解;
 \Leftarrow

(2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解 $\Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有无穷多解(非零解).
 \Leftarrow

三、线性方程组的公共解、同解

1. 两个方程组的公共解

对于方程组(I)和(II), 如果 a 既是方程组(I)的解, 又是方程组(II)的解,

则称 α 是方程组 (I) 和 (II) 的公共解.

2. 两个方程组的同解

如果方程组 (I) 的每个解都是方程组 (II) 的解, 而且方程组 (II) 的每个解也都是方程组 (I) 的解, 则方程组 (I) 与 (II) 同解.

关于方程组公共解的结论

$$\text{方程组 } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ 与 } \mathbf{Bx} = \mathbf{0} \text{ 有公共解} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 有解.}$$

关于方程组同解的结论

必要条件: 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解 $\Rightarrow R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$.

充要条件: 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解 $\Leftrightarrow R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = R\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$.



第五章 特征值与特征向量

一、矩阵的特征值和特征向量

1. 矩阵的特征值与特征向量的概念

对于 n 阶方阵 \mathbf{A} ，若有数 λ 和向量 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ，满足 $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ ，称 λ 为 \mathbf{A} 的特征值，称 \mathbf{x} 为 \mathbf{A} 的属于特征值 λ 的特征向量。

2. 矩阵的特征多项式与特征方程的概念

行列式 $f(\mathbf{A}) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ 或 $f(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ 称为矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式；

$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ 或 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ 称为矩阵 \mathbf{A} 的特征方程。

3. 矩阵的特征值与特征向量的求法

设 λ 是 \mathbf{A} 的一个特征值， \mathbf{x} 是 \mathbf{A} 的属于 λ 的特征向量的充要条件是： λ 为特征方程 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ 的根， \mathbf{x} 是齐次方程组 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的非零解。

具体计算步骤如下：

(1) 计算 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ ；

(2) 求 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ 的全部根，即为 \mathbf{A} 的全部特征值；

(3) 对于每一个特征值 λ_0 ，求出 $(\lambda_0\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ ，其中 r 为矩阵 $\lambda_0\mathbf{E} - \mathbf{A}$ 的秩，则 \mathbf{A} 的属于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r}\eta_{n-r}$ ，其中 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 是不全为零的任意常数。

4. 特征值和特征向量的性质

(1) 特征值的性质

1) 设 λ 是方阵 \mathbf{A} 的特征值， \mathbf{x} 是 \mathbf{A} 对应 λ 的特征向量，则矩阵 $k\mathbf{A}, \mathbf{A}^m, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^*$ 分别有特征值为： $k\lambda, \lambda^m, \frac{1}{\lambda}, \frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$ ，则 \mathbf{x} 也是 $k\mathbf{A}, \mathbf{A}^m, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^*$ 对应特征值 $k\lambda, \lambda^m, \frac{1}{\lambda}, \frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$ 的特征向量。

2) 设 λ 是方阵 \mathbf{A} 的一个特征值， \mathbf{x} 为对应的特征向量，若 $\varphi(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{E} + a_1\mathbf{A} + \dots + a_n\mathbf{A}^n$ ，则 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ 是 $\varphi(\mathbf{A})$ 的一个特征值， \mathbf{x} 为对应特征向量。

3) 若 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (k 重特征值算作 k 个特征值) 则：

$$\textcircled{1} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} ;$$

$$\textcircled{2} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\mathbf{A}|.$$

4) 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 的秩 $R(\mathbf{A}) = 1$, 则 \mathbf{A} 的 n 个特征值为 $\lambda_1 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$,

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

(2) 特征向量的性质

1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是方阵 \mathbf{A} 的互不相同的特征值, \mathbf{x}_i 是对应于 λ_i ($i=1, 2, \dots, m$) 的特征向量, 则向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 线性无关, 即对应于互不相同特征值的特征向量线性无关; 但相同特征值对应的特征向量可能线性相关, 也可能线性无关.



2) 设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 为 \mathbf{A} 的属于 λ 的两个不同的特征向量, 若 $k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 \neq 0$, 则 $k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2$ 也是 \mathbf{A} 的属于 λ 的特征向量.

3) 设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 为 \mathbf{A} 的不同特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 则 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 \mathbf{A} 的特征向量.

4) k 重特征值最多对应 k 个线性无关的特征向量.

二、相似矩阵、矩阵的对角化

1. 相似矩阵的概念与性质

(1) 相似矩阵的概念

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为两个 n 阶方阵, 如果存在一个可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ 成立, 则称矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似, 记为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

(2) 相似矩阵的性质

如果 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 则有:

1) $\mathbf{A}^T \sim \mathbf{B}^T$.

2) $\mathbf{A}^{-1} \sim \mathbf{B}^{-1}$ (若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均可逆).

3) $\mathbf{A} + k\mathbf{E} \sim \mathbf{B} + k\mathbf{E}$.

4) $\mathbf{A}^k \sim \mathbf{B}^k$ (k 为正整数).

5) $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}|$, 从而 \mathbf{A}, \mathbf{B} 有相同的特征值.

6) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$, 从而 \mathbf{A}, \mathbf{B} 同时可逆或同时不可逆.

7) $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii}$ (\mathbf{A}, \mathbf{B} 有相同的迹)

8) $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$.

2. 矩阵可相似对角化

(1) 相似对角化的概念

若 n 阶矩阵 \mathbf{A} 与对角矩阵 Λ 相似, 则称 \mathbf{A} 可以相似对角化, 记为 $\mathbf{A} \sim \Lambda$, 并称 Λ 是 \mathbf{A} 的相似标准形.



(2) **A** 与对角矩阵相似的充要条件

A 与对角矩阵相似的充要条件为 n 阶矩阵 **A** 有 n 个线性无关的特征向量.

1) **A** 与对角矩阵相似的充分条件: 若 **A** 有 n 个互不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 **A** 必与对角矩阵相似.

2) **A** 与对角矩阵相似的充要条件: 对 **A** 的特征值的重根数等于其对应的线性无关的特征向量个数, 即 $R(\lambda E - A) = n - k$.

(4) 相似对角化 **A** 为对角矩阵 **A** 的解题步骤

1) 求出 **A** 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;

2) 求所对应的线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$;

3) 构造可逆矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $P^{-1}AP = \Lambda$.

三、实对称矩阵

1. 实对称矩阵定义

设 **A** 为 n 阶方阵, 如果满足 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 即 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 那么 **A** 称为对称矩阵, 简称对称阵.

2. 实对称矩阵性质

设 **A** 为实对称矩阵, 则

(1) **A** 的特征值为实数, 且 **A** 的特征向量为实向量.

(2) **A** 的不同特征值对应的特征向量必定正交.

(3) **A** 一定有 n 个线性无关的特征向量, 从而 **A** 必相似于对角矩阵, 且存在正交矩阵 **P**, 使 $P^{-1}AP = P^TAP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 **A** 的特征值

(4) 实对称矩阵必可对角化.

(5) **A**, **B** 均为实对称矩阵, 则 **A**, **B** 相似的充要条件是 **A**, **B** 的特征值相同.

(6) k 重特征值必有 k 个线性无关的特征向量, 即 $R(\lambda E - A) = n - k$.

(7) **A** 的秩等于 **A** 的非零特征值的个数.

3. 用正交矩阵把实对称矩阵 **A** 化为对角矩阵的步骤:

(1) 求矩阵 **A** 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;

(2) 求矩阵 **A** 的特征值所对应的所有线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$;

(3) 利用 Schmidt 正交化对向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 进行正交化单位化, 得

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$:



(4) 构造正交矩阵 $\mathbf{P} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, 得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ (\mathbf{P} 与 $\mathbf{\Lambda}$ 次序要协调一致).



第六章 二次型

一、二次型与对称矩阵

1. 二次型的概念

含有 n 个变量的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ & + \dots + \\ & + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

称为 n 元二次型，简称二次型。当 a_{ij} 为实数时， f 称为实二次型。

只含有平方项的二次型 $f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \dots + k_ny_n^2$ 称为二次型的标准形。

2. 二次型的矩阵

取 $a_{ji} = a_{ij}$ ，则

$$2a_{ij}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i$$

实二次型可以写成：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ = & [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

称 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 为二次型的矩阵形式，其中实对称矩阵 \mathbf{A} 称为该二次型的矩阵。二次型 f 称为实对称矩阵 \mathbf{A} 的二次型，实对称矩阵 \mathbf{A} 的秩称为二次型的秩。

3. 线性变换

(1) 线性变换定义

关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

或成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

或 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$

则由变量 x_1, x_2, \dots, x_n 到 y_1, y_2, \dots, y_n 的替换称为一个线性变换。矩阵

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$ 称为线性变换矩阵。当 \mathbf{C} 可逆矩阵时，即 $|\mathbf{C}| \neq 0$ 时，称

该线性变换为可逆线性变换；若 \mathbf{C} 为正交变换矩阵时，称该线性变换为正交线性变换。

(2) 对二次型做线性变换的结论

1) 对二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 做可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ ，则可化为新的二次型 $g = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ ，

其中 $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ 为二次型 $g = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ 的矩阵。

2) 说明经过可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 后，二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 化为新的二次型

$g = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ ，原来二次型 f 的矩阵 \mathbf{A} 就变为了矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ ，且二次型的秩不变。

4. 矩阵的合同

(1) 矩阵合同定义

设有两个 n 阶矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} ，如果存在一个可逆矩阵 \mathbf{C} ，使得 $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ ，则称矩阵



A 与 **B** 合同.

(2) 矩阵合同性质

1) 反身性 **A** 与 **A** 自身合同.

2) 对称性 若 **A** 与 **B** 合同, 则 **B** 与 **A** 合同.

3) 传递性 若 **A** 与 **B** 合同, **B** 与 **C** 合同, 则 **A** 与 **C** 合同.

二、化二次型为标准形

1. 二次型的标准形

(1) 二次型的标准形定义

二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$ 下, 可化为

$f = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \dots + k_n y_n^2$, 则称之为二次型的标准形.

(2) 化二次型为标准形的方法

1) 配方法

配方法的一般步骤:

1. 若二次型含有 x_i 的平方项, 则先把含有 x_i 的乘积项合在一起, 然后配方; 接着再对其余的变量进行同样过程, 直到所有变量都配成平方项为止, 经过可逆线性变换, 就得到标准型.

2. 若二次型中不含有平方项, 但是 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$, 则先作可逆变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j (k = 1, 2, \dots, n, k \neq i, j) \\ x_k = y_k \end{cases}$$

化二次型为含有平方项的二次形, 然后再按步骤 1 配方.

2) 正交变换法

任给一个二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 总存在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, 使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是矩阵的特征值, 正交矩阵 \mathbf{P} 的 n 个列向量 p_1, p_2, \dots, p_n 是对应于



$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的特征向量.

3) 用正交变换法化二次型为标准形的步骤如下:

1. 写出二次型的对称矩阵 A .

2. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

3. 求出对应于特征值的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

4. 将特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 正交化、单位化, 得 p_1, p_2, \dots, p_n , 记 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

5. 做正交变换 $x = Py$, 则得 f 的标准形 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$.

三、惯性定理

1. 二次形的规范形

(1) 正惯性指数和负惯性指数定义

在二次型的标准形中, 含正号的项数称为正惯性指数, 含负号的项数称为负惯性指数.

(2) 规范形定义

实二次型的标准形中, 平方项的系数 k_1, k_2, \dots, k_n 只在 $1, -1, 0$ 三个数中取值, 即

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2 + 0y_{p+q+1}^2 + \dots + 0y_n^2$$

则称上式为二次型的规范形. 其中 p 是正惯性指数, q 是负惯性指数, $p + q = r$, 其中 r

为非零特征值的个数, 等于二次型的秩.

2. 惯性定理

任何二次型都可通过可逆线性变换化为规范形, 且规范形是由二次型本身决定的唯一形式, 与所作的可逆线性变换无关.

3. 实对称矩阵合同的充要条件

两个实对称矩阵合同的充分必要条件是它们所对应的实二次型具有相同的正惯性指数和秩, 即有相同的正惯性指数和负惯性指数.

四、正定二次型与正定矩阵

1. 二次型的正定性定义

设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T Ax$, 如果对任何非零向量 x 都有 $f(x) > 0$,

则称 f 为正定二次型, 并称对称矩阵 A 是正定的; 如果对任何 x 都有 $f(x) < 0$, 则称 f

为负定二次型, 并称对称矩阵 A 是负定的.

2. 二次型正定的判别法



实 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 正定的充要条件是以下条件之一成立：

- (1) 其标准形的 n 个系数都大于零；
- (2) 其正惯性指数 $p = n$ ；
- (3) 实对称矩阵 \mathbf{A} 的特征值全大于零；
- (4) 实对称矩阵 \mathbf{A} 的所以顺序主子式大于零；
- (5) 存在可逆矩阵 \mathbf{C} ，使得 $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ ，即 \mathbf{A} 与 \mathbf{E} 合同。





第四部分 概率论与数理统计 (数学一、三)



概率论与数理统计重点及数学一、三区别

	重点	数学一、三区别
一、随机事件和概率	乘法公式，全概率公式，贝叶斯公式，事件的独立性	
二、一维随机变量及其分布	分布函数，连续型随机变量，正态分布，随机变量函数的分布	
三、二维随机变量及其分布	联合分布函数，二维离散型随机变量，二维连续型随机变量，二维正态分布，随机变量的独立性，随机变量函数的分布	
四、随机变量的数字特征	随机变量的期望，方差，协方差，相关系数	
五、大数定律及中心极限定理	辛钦大数定律，中心极限定理	
六、数理统计	样本均值，样本方差，卡方分布，T 分布，F 分布，正态总体的常用抽样分布	
七、参数估计	矩估计，最大似然估计	(数学一) 估计量的评选标准，无偏性、有效性和一致性 (数学一) 区间估计
八、假设检验(数学一)		

关注公众号



第一章 随机事件和概率

考点内容

一、随机试验和随机事件

1. 随机试验

概率论中将满足下面三个条件的试验称为随机试验，简称试验：

- (1) 可在相同的条件下重复进行；
- (2) 所有的结果是明确可知的；
- (3) 试验之前不能确定哪一个结果会发生。

2. 样本空间

随机试验的所有可能结果所组成的集合称为样本空间，常记为 Ω ， Ω 中的元素称为样本点。

3. 随机事件

样本空间的子集，即试验的结果称为随机事件，简称事件，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件。

另外，两个特殊的事件为：必然事件 Ω —每次试验中一定发生的事件；不可能事件 \emptyset —每次试验中一定不发生的事件。

二、事件的关系、运算及其运算律

1. 事件 A 与 B 之和（并）： $A \cup B$ （或 $A+B$ ）表示事件 A 与 B 至少有一个发生。

推广： $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ 表示 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 至少一个发生。

2. 事件 A 与 B 的积： $A \cap B$ （或 AB ）表示事件 A 与 B 同时发生。

推广： $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$ 表示 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 同时发生。

3. 事件 A 与 B 的差： $A - B$ 表示事件 A 发生而 B 不发生。

性质： $A - B = A\bar{B}$ 或 $A \cap \bar{B}$ 。

4. 事件的包含：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含 A （或 A 包含于 B ），记为 $B \supset A$ 。

5. 事件相等：若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$ ，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$ 。

6. 互斥事件：在试验中，若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \emptyset$ ，称 A 、 B 为互



斥事件。

7. 对立事件：每次试验中，“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件或逆事件。 A 的对立事件记为 \bar{A} 。

性质：

$$(1) A + \bar{A} = \Omega \text{ (必然事件).}$$

$$(2) A\bar{A} = \emptyset \text{ (不可能事件).}$$

8. 事件的运算律：

$$(1) \text{吸收律 } \text{若 } A \subset B, \text{ 则 } A \cup B = B, AB = A, A\bar{B} = \emptyset.$$

$$(2) \text{交换律 } A \cup B = B \cup A, AB = BA.$$

$$(3) \text{结合律 } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$(4) \text{分配律 } (A \cup B)C = (AC) \cup (BC), A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C).$$

$$(5) \text{摩根律 } \overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}, \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

三、概率及其性质

1. 概率的定义：设随机试验 E 的样本空间为 Ω ，则称满足下列条件的事件集上的函数 $P(\cdot)$ 为概率：

$$(1) \text{对于任意事件 } A, P(A) \geq 0;$$

$$(2) \text{对于必然事件 } \Omega, P(\Omega) = 1;$$

$$(3) \text{设 } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ 为两两互不相容的事件，即 } A_i A_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots).$$

则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

2. 概率的性质

$$(1) P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

$$(2) P(A - B) = P(A) - P(AB), \text{ 特别，当 } B \subset A \text{ 时，} P(A - B) = P(A) - P(B), \text{ 且}$$

$$P(B) \leq P(A);$$

$$(3) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC);$$

特别的，若 A, B 互斥，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ， $P(A - B) = P(A)$

四、三大概率型

1. 古典概型：如果随机试验 E 满足下面条件：

(1) 试验的样本空间 Ω 的元素只有有限个，

(2) 样本空间中每个元素，即基本事件发生的可能性相同，则称此试验为古典概型。对于

古典概型，事件 A 的概率有下列计算公式：

$$P(A) = \frac{A \text{ 中基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

2. 几何概型：如果随机试验 E 的样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域，且每个样本点的出现具有等可能性，则称此试验为几何概型，对于几何概型，事件 A 的概率有下列计算公式：

$$P(A) = \frac{A \text{ 的度量(长度, 面积, 体积)}}{\Omega \text{ 的度量(长度, 面积, 体积)}}.$$

3. 伯努利 (Bernoulli) 概型：如果试验 E 的结果只有两个： A 与 \bar{A} ，则称此试验为伯努利概型（试验），若将伯努利试验独立重复 n 次，则称为 n 重伯努利概型，简称伯努利概型。

在伯努利概型中，若 $P(A) = p$ ，则 n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

五、三大概率公式

1. 条件概率与乘法公式：设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$ ，称

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率。

乘法公式：设 $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0$ ，则

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = P(A_2)P(A_1 | A_2).$$

一般地，设 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ ，则





$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1}).$$

2. 全概率公式：设 B_1, B_2, \dots, B_n 为一完备事件组，即 $B_i B_j = \emptyset, i \neq j$ ，

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega, P(B_i > 0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ 则对事件 } A \text{ 有}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i).$$

3. 贝叶斯 (Bayes) 公式：设 B_1, B_2, \dots, B_n 为一完备事件组， $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ ，

$P(A) > 0$ ，则有

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

六、事件的独立性

1. 两个事件的独立性：设 A, B 是两个事件，若有等式

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立。

2. 两事件相互独立的充要条件：

① $P(AB) = P(A)P(B)$

② $P(B | A) = P(B) \quad (P(A) > 0)$; 或 $P(A | B) = P(A) \quad (P(B) > 0)$

③ 四对事件 A 与 B , A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B , \bar{A} 与 \bar{B} 中有一对相互独立，则另外三对也相互独立。

3. n 个事件的两两独立与相互独立 ($n \geq 3$)

(1) n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两独立：其中任何两个事件相互独立，即有下列

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ 个等式成立: } P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

(2) n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立：其中任意 k 个不同事件都相互独立，即有下列

$$2^n - n - 1 \text{ 个等式成立: } P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}), \quad \text{其中} \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

(3) n 个事件两两独立与相互独立的关系：



A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立 $\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立. ;

A_1, A_2, \dots, A_n 两两独立 $\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立.

(4) n 个事件相互独立的结论：若 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立，则由其中任意部分事件所产生的事件与另一部分事件所产生的事件相互独立.



第二章 一维随机变量及其分布

一、分布函数

(1) 定义 设 X 为随机变量, x 是任意实数, 则函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

称为随机变量 X 的分布函数.

(2) 性质:

- ① $0 \leq F(x) \leq 1$, $-\infty < x < +\infty$;

② $F(x)$ 是单调不减的函数, 即 $x_1 < x_2$ 时, 有 $F(x_1) \leq F(x_2)$;

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;

④ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$, 即 $F(x)$ 是右连续的;

二、离散型随机变量

1. 分布律：设 X 的所有可能取值为 $x_k (k=1, 2, \dots)$ ，则称事件 $\{X=x_k\}$ 的概率即

$P\{X = x_k\} = p_k$, 或下列表格.

X	x_1	x_2	, ...,	x_n	...
P	p_1	p_2	, ...,	p_n	...

为 X 的分布律.

2. 分布律的性质:

$$(1) \quad p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

3. 分布函数 $F(x)$: 设 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \dots$, 则 X 的分布函数为 $F(x) = P\{X \leq x\} = \sum P\{X = x_k\}$.

若已知 X 的分布函数 $F(x)$, 则可求得 X 的分布律:

$$P\{X = x_k\} = F(x_k) - \lim_{x \rightarrow x_k^-} F(x), k = 1, 2, \dots$$

三、连续型随机变量

1. 定义 若随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 可以表示成非可积负函数 $f(x)$ 的积分形式:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad -\infty < x < +\infty$$

则称 X 为连续型随机变量. $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度.

2. 概率密度函数的性质

$$(1) f(x) \geq 0$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

3. 连续型随机变量分布函数的性质

$$(1) F(x) \text{ 是关于 } x \text{ 的连续函数}$$

对于任何实数 c , 有 $P\{X = c\} = 0$

$$(2) \text{ 若 } f(x) \text{ 在 } x \text{ 处连续, 则有 } F'(x) = f(x)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

$$= F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

四、八大常见分布

1、0—1 分布

设一次伯努利试验中事件 A 发生 X 次, 则 X 服从 0—1 分布, 其分布律为

X	1	0
	p	$1-p$

其中 p 为事件 A 出现的概率, $0 < p < 1$.

2、二项分布

设 n 重伯努利试验中事件 A 发生 X 次, 则 X 服从二项分布, 记作 $X \sim B(n, p)$, 其分

布律为

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

3、泊松分布

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$.





4、几何分布

进行独立重复试验，设每次试验成功的概率为 p ，失败的概率为 $q = 1 - p (0 < p < 1)$ ，

将试验进行到出现一次成功为止，以 X 表示所需的试验次数，则 X 服从参数为 p 的几何分布，记为 $X \sim G(p)$ ，其分布律为

$$P(X = k) = q^{k-1} p, k = 1, 2, 3, \dots, \text{其中 } p \geq 0, q = 1 - p$$

5、超几何分布



N 件产品，其中 M 件次品，从中任取 n 件，有 X 个次品，则随机变量 X 服从参数为 n, N, M 的超几何分布，通常记为 $X \sim H(n, N, M)$ ，其分布律为

$$P(X = i) = \frac{\binom{C_M^i}{C_N^n}}{\binom{C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}}, 0 \leq i \leq n \leq N, i \leq M$$

6、均匀分布

设随机变量 X 的值等可能地落在 $[a, b]$ 内，则称 X 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布，记为 $X \sim U(a, b)$ ，其密度分布为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$



7、指数分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ ，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X \sim E(\lambda)$ ，其分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

8、正态分布

(1) 一般正态分布

①定义 若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

其中 $\sigma > 0$, μ 与 σ 均为常数, 则称 X 服从参数为 μ 和 σ 的正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

其分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

② $f(x)$ 和 $F(x)$ 的性质如下:

1) $f(x)$ 的图形是关于 $x = \mu$ 对称, 即 $f(\mu + x) = f(\mu - x)$;

2) $F(\mu + x) + F(\mu - x) = 1$;

3) $F(\mu) = \frac{1}{2}$;

4) 当 $x = \mu$ 时, $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 为最大值;

5) $f(x)$ 以 x 轴为渐近线.

(2) 标准正态分布

①定义 当 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$, 即 X 的密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

则称 X 服从标准正态分布, 记为 $X \sim N(0,1)$, 其分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

② $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 的性质如下:

1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$

2) $\Phi(-a) + \Phi(a) = 1$

3) $\Phi(0) = \frac{1}{2}$





(3) 一般正态分布与标准正态分布之间的关系: 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$N(0,1), \quad P(x_1 < X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

5. 随机变量函数的分布

随机变量 Y 是随机变量 X 的函数 $Y = g(X)$, 其中 $g(x)$ 为连续函数或分段函数, 现要

求 $Y = g(X)$ 的概率分布，分两种情形讨论：



1、 X 是离散型随机变量

已知 X 的分布列为

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	\cdots
P	p_1	p_2	\cdots	p_n	\cdots

显然, $Y = g(X)$ 的取值只可能是 $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_s), \dots$, 若 $g(x_i)$ 互不相等, 则 Y 的分布列如下:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$, ...,	$g(x_n)$...
P	p_1	p_2	, ...,	p_n	...

若有某些 $g(x_i)$ 相等，则应将对应的 p_i 相加作为 $g(x_i)$ 的概率



2、 X 是连续型随机变量

分布函数法: 先按分布函数的定义求得 Y 的分布函数 $F_Y(y)$, 再通过求导得到 Y 的概率密度 $f_Y(y)$, 即

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx, \quad f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy},$$

第三章 二维随机变量及其分布

一、二维随机变量联合分布函数及其性质

(1) 定义

设 (X, Y) 是二维随机变量，对任意实数 x 和 y ，称

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

关注
公众
号

为 (X, Y) 的分布函数，又称联合分布函数。

(2) 性质

① $0 \leq F(x, y) \leq 1$ ；

② $F(x, y)$ 对 x 和 y 都是单调非减的，即对任意的 x_1, x_2 ，若 $x_1 > x_2$ ，则有

$$F(x_1, y) \geq F(x_2, y) ;$$

③ $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty}} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$ ；

④ $F(x, y)$ 对 x 和 y 都是右连续。

(3) 联合分布函数的几何意义

$F(x, y)$ 在 (x, y) 的函数值就是随机点 (X, Y) 在 $X = x$ 左侧和 $Y = y$ 下方的无穷矩形

内的概率，对有限矩形域有：

$$P\{x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

(4) 边缘分布函数

在试验涉及二维随机变量 (X, Y) 的前提下，单个随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_x(x)$ 和

$F_y(y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数，即

$$F_x(x) = P\{X \leq x\} = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

$$F_y(y) = P\{Y \leq y\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

二、二维离散型随机变量的联合概率分布、边缘概率分布及条件概率分布

1. 联合分布律

(1) 定义

关注
公众
号



设离散型随机变量 (X, Y) 的所有可能取值为 $(x_i, y_j) (i, j = 1, 2, \dots)$, 且事件

$\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$ 的概率为 p_{ij} , 称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} (i, j = 1, 2, \dots)$$

为 (X, Y) 的联合分布律, 联合分布律有时也用下面的概率分布表来表示:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\cdots	y_j	\cdots	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	\cdots	p_{1j}	\cdots	$P\{X = x_1\}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\cdots	p_{2j}	\cdots	$P\{X = x_2\}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\cdots	p_{ij}	\cdots	$P\{X = x_i\}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
$P\{Y = y_j\}$	$P\{Y = y_1\}$	$P\{Y = y_2\}$	\cdots	$P\{Y = y_j\}$	\cdots	1

(2) 性质

$$1) \quad p_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2, \dots);$$

$$2) \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

2. 边缘分布律

设随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = p_{ij} (i, j = 1, 2, \dots),$$

则 X 的边缘分布为

$$P(X = x_i) = \sum_j p_{ij} (i, j = 1, 2, \dots);$$

Y 的边缘分布为

$$P(Y = y_i) = \sum_i p_{ij} (i, j = 1, 2, \dots).$$

3. 条件分布律

二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = p_{ij} (i, j = 1, 2, \dots),$$

在已知 $X = x_i$ 的条件下， Y 取值的条件分布律为

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P(X = x_i)},$$

在已知 $Y = y_j$ 的条件下， X 取值的条件分布律为

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P(Y = y_j)},$$

关注公众号
研神

其中 $P(X = x_i)$, $P(Y = y_j)$ 分别为 X , Y 的边缘分布律.

二、二维连续型随机变量的联合概率密度、边缘概率密度及条件概率密度

1. 连续型随机变量

设 $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 如果存在非负函数 $f(x, y)$ 使得对任意

实数 x, y 有, $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dudv$, 则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量, $f(x, y)$

为 (X, Y) 的联合概率密度.

2. 联合概率密度 $f(x, y)$ 的性质:

$$(1) f(x, y) \geq 0;$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

3. 边缘概率密度

当 (X, Y) 为连续型随机变量, 并且其联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 X 和 Y 的边缘概率

密度为

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

关注公众号
研神

4. 条件概率密度

二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则在已知 $Y = y$ 的条件下, X

的条件概率密度为

$$f_{XY}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}$$

在已知 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

其中 $f_X(x) > 0, f_Y(y) > 0$ 分别为 X, Y 的边缘概率密度.

四、常见的二维分布

1. 二维均匀分布

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/S_D, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

其中 S_D 为区域 D 的面积, 则称 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布, 记为 $(X, Y) \sim U(D)$.

2. 二维正态分布

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| \leq 1$, 则称 (X, Y) 服从二维正态分布, 记为 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

五、随机变量的独立性

1. 一般型随机变量

相互独立: 设 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 边缘分布函数为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 如果对一切 x, y 有 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ 则称 X 与 Y 相互独立.

2. 离散型随机变量

X 与 Y 相互独立的充要条件是: $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

3. 连续型随机变量

X 与 Y 是相互独立的充要条件是 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

4. 随机变量函数的独立性

若 X 与 Y 独立, h, g 为 X 与 Y 连续函数, 则: $h(X)$ 和 $g(Y)$ 独立.



5. 二维正态分布关于独立的相关结论

1 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$; 但是若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 (X, Y) 未必是二维正态分布.

2 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则随机变量 X, Y 的非零线性组合 $Z = aX + bY \neq 0$ 服从一维正态分布.

3. 若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X 和 Y 相互独立, 则 (X, Y) 服从二维正态分



4. 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 X 和 Y 相互独立的充要条件是 $\rho = 0$

5. 若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且服从正态分布, 则 X_1, X_2, \dots, X_n 的线性组合服从正态分布

六、两个随机变量函数的分布

1. 两个随机变量函数的定义: 设 X, Y 为两个随机变量, $z = g(x, y)$ 为二元连续函数, 则称 $Z = g(X, Y)$ 为随机变量 X, Y 的函数, 显然两随机变量函数是一维随机变量.

2. 二维离散型随机变量函数的分布律

$Z = g(X, Y)$ 也是离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{Z = g(x_i, y_j)\} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P_{ij},$$

如果有若干个 $g(x_i, y_j)$ 相同, 则合并诸项为一项, 并将相应的概率相加作为 Z 取值为 $g(x_i, y_j)$ 的概率.

Z 的分布函数为: $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = \sum_{g(x_i, y_j) \leq z} P\{X = x_i, Y = y_j\}.$

3. 二维连续型随机变量函数的分布

设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = g(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

4. 混合型

(X 和 Y 中有一个是离散型随机变量, 另一个为连续型随机变量) 利用分布函数法求之.



七、极值分布

设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ ，则 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为：

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z);$$

$Z = \min(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

特别地当 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立时， $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数为：

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数分别为：

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]\cdots[1 - F_{X_n}(z)]$$



第四章 随机变量的数字特征

一、随机变量的数学期望

1. 一维随机变量的数学期望

(1) 离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i$ ($i=1,2,\dots$)。若无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 的和为随机变量 X 的数学期望，记作 $E(X)$ ，即

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

(2) 连续型随机变量的数学期望

设 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$ ，若反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则

称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$ ，即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

2. 随机变量函数的数字期望

(1) 一维随机变量函数的数学期望

设 Y 是随机变量 X 的函数： $Y=g(X)$ (g 是连续函数或分段连续函数)。

设离散型随机变量 X 具有分布律 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\dots$ ，且无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛；则有：

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f(x)$ ，且反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，

则有：

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

(2) 二维随机变量函数的数学期望

设 Z 是随机变量 X, Y 的函数： $Z=g(X, Y)$ (g 是连续函数)，那么， Z 是一个一维随机变量。

设二维离散型随机变量 (X, Y) 具有分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$ ($i, j=1, 2, \dots$)；则



有

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

或者，设 Z 具有分布律 $P\{Z = z_i\} = p_i (i = 1, 2, \dots)$ ，则有：

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i p_i$$

这里的无穷级数绝对收敛。

设二维连续型随机变量 (X, Y) 具有联合概率密度 $f(x, y)$ ，则有

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

设 Z 具有概率密度 $f_Z(z)$ ，则有：

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz$$

这里的反常积分绝对收敛。

3. 数学期望的性质

$$\textcircled{1} E(C) = C, (C \text{ 为常数});$$

$$\textcircled{2} E(CX) = CE(X);$$

$$\textcircled{3} E(X + C) = E(X) + C;$$

$$\textcircled{4} E(X + Y) = E(X) + E(Y);$$

综合①②④有 $E(\sum_{i=1}^n C_i X_i) = \sum_{i=1}^n C_i E(X_i)$;

二、随机变量的方差

1. 方差及标准差的概念

设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 为 X 的方差，

记为 $D(X)$ ，即 $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$

方差的算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 称为 X 的均方差或标准差。

(1) 离散型随机变量的方差

$$D(X) = \sum_k [x_k - E(X)]^2 p_k$$

(2) 连续型随机变量的方差

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

2. 方差的计算公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

3. 方差的性质

$$(1) D(C) = 0, (C \text{ 为常数});$$

$$(2) D(CX) = C^2 D(X);$$

$$(3) D(X + C) = D(X);$$

(4) 若 X_1, X_2, \dots, X_m 两两独立或两两不相关，则

$$D(C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_m X_m) = C_1^2 D(X_1) + C_2^2 D(X_2) + \dots + C_m^2 D(X_m).$$



分布	记号	期望	方差
0-1 分布	$B(1, p)$	p	$p(1-p)$
二项分布	$B(n, p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$P(\lambda)$	λ	λ
几何分布	$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布	$H(n, M, N)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
均匀分布	$U(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2

三. 协方差

1. 概念

设 (X, Y) 是二维随机变量，如果 $E[(X - EX)(Y - EY)]$ 存在，则称它为随机变量 X 与



Y 的协方差, 记作 $\text{Cov}(X, Y)$, 即 $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$.

2. 计算公式

对任意两个随机变量 X, Y , 有

$$(1) \quad \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y);$$

$$(2) \quad D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y).$$

3. 性质

$$(1) \quad \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X);$$

$$(2) \quad \text{Cov}(X, X) = D(X);$$

$$(3) \quad \text{Cov}(X, c) = 0 \quad (c \text{ 为任意常数});$$

$$(4) \quad \text{Cov}(aX, bY) = ab \text{Cov}(X, Y) \quad (a, b \text{ 是常数});$$

$$(5) \quad \text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y);$$

四、相关系数

1. 定义

对于随机变量 X 与 Y , 如果 X, Y 的方差都不等于零, 则称 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为

随机变量 X 与 Y 的相关系数. 记作 ρ_{XY} (简记为 ρ) .

2. 性质

$$(1) \quad |\rho_{XY}| \leq 1;$$

(2) 当 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 与 Y 不相关.

若 X, Y 相互独立, 则 $\rho_{XY} = 0$, 反之不成立;

(3) $|\rho| = 1 \Leftrightarrow X$ 与 Y 以概率 1 线性相关.

若 \exists 常数 $a > 0, b$, 使 $P\{X = aY + b\} = 1$, 则 $\rho_{XY} = 1$, 此时称 X, Y 正相关;

若 \exists 常数 $a < 0, b$, 使 $P\{X = aY + b\} = 1$, 则 $\rho_{XY} = -1$, 此时称 X, Y 负相关.

3. 对于随机变量 X 与 Y , 下面五个结论是等价的

(1) X 与 Y 不相关



(2) $\rho_{xx} = 0$;

(3) $Cov(X, Y) = 0$;

(4) $E(XY) = E(X)E(Y)$;

(5) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$;



第五章 大数定律及中心极限定理

一、切比雪夫不等式

设随机变量 X 具有 $E(X)$ 和 $D(X)$ ，则任给 $\varepsilon > 0$ ，有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \text{ 或 } P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

二、大数定律

1、依概率收敛

设 a 是一个常数， X_n 为一随机变量序列， $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$ 或

$P\{|X_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$ ，则称 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 a ，记为 $X_n \xrightarrow{P} a$.

2、伯努利大数定律（即频率依概率收敛于概率）

设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数， $P(A) = p$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

3、辛钦大数定律

设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，服从同一分布（任意分布），且具有相同的数学期望

设 $E(X_k) = \mu$ ， $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

4、切比雪夫大数定律

设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，数学期望 $E(X_k)$ ，方差 $D(X_k)$ 均存在，且方差

有公共的上界即 $\forall k, D(X_k) \leq C$ ， $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

其中 $\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)$.



三、中心极限定理

1、独立同分布中心极限定理：设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是独立同分布的随机变量序列，

$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2, i = 1, 2, \dots$, 则随机变量 $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的分布函数 $F_n(x), \forall x \in R$ ，

有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

即，当 n 充分大时， $\sum_{i=1}^n X_i$ 近似地服从以它的均值为均值，它的方差为方差的正态分布，即正态分布 $N(n\mu, n\sigma^2)$.

2、拉普拉斯中心极限定理：设 n_A 表示 n 重 Bernoulli 试验中事件 A 出现次数， $P(A) = p$ ，

则随机变量 $Y_n = \frac{n_A - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 的分布函数 $F_n(x), \forall x \in R$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

即，当 n 充分大时， n_A 近似地服从以它的均值为均值，它的方差为方差的正态分布，即正态分布 $N(np, np(1-p))$.



第六章 数理统计的基本概念

一、常用统计量

设 X 是总体，其均值 $E(X) = \mu$ ，方差 $D(X) = \sigma^2$ ，

(1) 样本均值： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，样本均值的期望与方差分别为 $E(\bar{X}) = \mu$ ， $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ 。

(2) 样本方差： $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right]$ ，样本方差的期望与方差分别为 $E(S^2) = \sigma^2$ ， $D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

样本标准差： $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

二、抽样分布

1. 三大分布

(1) 卡方分布： $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

① 定义：设 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立同服从 $N(0,1)$ 分布，则称 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 的分布为服从自由度为 n 的卡方分布，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 。

② α 上分位点：如果 $P(\chi^2 > \chi_{\alpha}^2) = \alpha$ ($0 < \alpha < 1$)，则称点 $\chi_{\alpha}^2(n)$ 为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 上的 α 上分位点。在 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 上， $\chi_{\alpha}^2(n)$ 与 $\chi_{1-\alpha}^2(n)$ 之间没有关系。

③ 性质

(a) 设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$ ， $\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$ ，且 χ_1^2, χ_2^2 相互独立，则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$ 。

该性质可推广到任意有限个的情况。

(b) 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ ，则 $E(\chi^2) = n$ ， $D(\chi^2) = 2n$ 。

(2) t 分布： $T \sim t(n)$

① 定义：设 $X \sim N(0,1)$ ， $Y \sim \chi^2(n)$ ，且 X, Y 相互独立，则称 $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ 的分布

为服从参数为 n 的 t 分布, 记为 $T \sim t(n)$.

② t 分布的概率密度函数为偶函数.

③ α 上分位点: 如果 $P(T > t_\alpha(n)) = \alpha(0 < \alpha < 1)$, 则称点 $t_\alpha(n)$ 为 $T \sim t(n)$ 上的 α 上分位点..

④ 关系: $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

(3) F 分布: $F \sim F(n_1, n_2)$



① 定义: 设 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立, 则称 $F = \frac{X}{\frac{Y}{n_2}}$ 的

分布为服从参数为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$

② α 分位点: 如果 $P(F > F_\alpha(n_1, n_2)) = \alpha(0 < \alpha < 1)$, 称点 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 $F \sim F(n_1, n_2)$ 上的 α 分位点.

③ 性质: 设 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则称 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

④ 关系: $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

三、关于样本的分布

1. 设单正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其样本为 X_1, X_2, \dots, X_n , 样本均值为 \bar{X} , 样本方差为 S^2 .



$$\textcircled{1} \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1) \quad (\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}))$$

$$\textcircled{2} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

$$\textcircled{3} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \right), \text{ 且 } \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 相互独立}$$

$$\textcircled{4} \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

2. 设双正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 其样本为 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} , 样本均值为 \bar{X} , 样本方差为 S_1^2 , $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 其样本为 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} , 样本均值为 \bar{Y} , 样本方差为 S_2^2 , 且样本 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} , Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 相互独立.

$$\textcircled{1} \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$\textcircled{2} \frac{n_2 \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2)$$

$$\textcircled{3} \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$\textcircled{4} \text{当 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 未知时}, \quad \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\omega} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad \text{其中}$$

$$S_{\omega} = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

研
神
之关注公众号
研
神
之

第七章 参数估计

一、点估计

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本, 若将样本的某个函数 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 作为总体分布中未知参数 θ 的估计, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的点估计量. 在抽样后, $\hat{\theta}$ 的值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 θ 的估计值.

点估计分为矩估计法与最大似然估计法.



1. 矩估计法

设总体 X 的分布中含有 m 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, 令

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, \dots, m$$

则由上述方程所求得的解: $\hat{\theta}_k(X_1, X_2, \dots, X_n), k = 1, 2, \dots, m$ 称为未知参数 θ_k 的矩估计量, 简称矩估计. 只要掌握 $m = 1, 2$ 的情形.

2. 最大似然估计法

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta_1, \dots, \theta_m)$ (若 X 为离型型, 则用分布律代替), $\theta_1, \dots, \theta_m$ 为未知参数. 记 x_1, \dots, x_n 为样本 X_1, \dots, X_n 的观测值, 则称

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \dots, \theta_m)$$

为似然函数. 若有 $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) (i = 1, \dots, m)$ 使得

$$L(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m) = \max_{(\theta_1, \dots, \theta_m)} L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m)$$

则称 $\hat{\theta}_i(x_1, \dots, x_n)$ 为 θ_i 的最大似然估计值, 而将 $\hat{\theta}_i(X_1, \dots, X_n)$ 称为 θ_i 最大似然估计量 ($i = 1, 2, \dots, m$). 只要掌握 $m = 1, 2$ 的情形.



对于最大似然估计, 其求解步骤为:

(1) 写出似然函数 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \dots, \theta_m);$

(2) 取对数 $\ln L;$

(3) 求偏导数 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}, i=1, 2, \dots, m;$

(4) 判断方程(组) $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0$ 是否有解.若有解,则其解即为所求最大似然估计;若

无解,则最大似然估计常在 θ 的边界点上达到.

二、估计量的评选标准(数一)

1. 无偏性: 设 $\hat{\theta}_i(X_1, \dots, X_n)$ 为 θ 的估计量, 若 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计.

2. 有效性: 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计, 若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

3. 一致性: 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$$

即 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量(或相合估计量).

三、区间估计(数一)

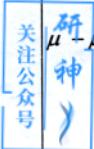
设 θ 为总 X 总的分布中的未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为取自 X 的样本, 若存在两个统计量 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 使得对给定的 $a(0 < a < 1)$, 有

$$P\{\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2\} = 1 - a$$

则称 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为 θ 的置信度为 $1 - a$ 的置信区间, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 分别称为置信下限和置信上限.

正态总体未知参数的置信区间如下页表.

待估参数		抽样分布	双侧置信区间
μ	σ^2 已知	$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$	$(\bar{X} - \mu_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \mu_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ $P\{ U \geq \mu_{\frac{a}{2}}\} = a$
	σ^2 未知	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} - t_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$ $P\{ T \geq t_a\} = a$
σ^2	μ 已知	$W' = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - u)^2 \sim \chi^2(n)$	$P\{W' \geq \chi_{\frac{a}{2}}^2(n)\} = P\{W' \leq \chi_{1-\frac{a}{2}}^2(n)\} = \frac{a}{2}$

	μ 未知	$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{a}{2}}^2}(n-1), \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{a}{2}}^2}(n-1) \right)$
	σ_1^2, σ_2^2 已知	$U = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_a, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \mu_a, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$	$P\{ U \geq u_{\frac{a}{2}}\} = a$
	已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 但 σ^2 求知	$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{a}{2}} * (n_1 + n_2 - 2)) * S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},$ $((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{a}{2}} * (n_1 + n_2 - 2)) * S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},$ $P\{ T \geq t_{\frac{a}{2}}\} = a$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$F = \frac{S_1^2}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$(\frac{1}{F_{\frac{a}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)} * \frac{S_1^2}{\sigma_2^2},$ $F_{\frac{a}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) * \frac{S_2^2}{S_1^2})$ $P\{F \geq F_{\frac{a}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)\} = \frac{a}{2},$ $P\{\frac{1}{F} \geq F_{\frac{a}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)\} = \frac{a}{2},$	

第八章 假设检验（数一）

1. 显著性检验的基本思想

为了对总体的分布类型或分布中的未知参数作出推断，首先对它们提出一个假设 H_0 ，然后在 H_0 为真的条件下，通过选取恰当的统计量来构造一个小概率事件，若在一次试验中，小概率事件居然发生了，就完全有理由拒绝 H_0 的正确性，否则没有充分理由拒绝 H_0 的正确性，从而接受 H_0 ，这就是显著性检验的基本思想。



2. 假设检验的基本步骤

- (1) 由实际问题提出原假设 H_0 (与备选假设 H_1)；
- (2) 选取适当的统计量，并在 H_0 为真的条件下确定该统计量的分布；
- (3) 根据问题要求确定显著性水平 α (一般题目中会给出)，从而得到拒绝域；
- (4) 由样本观测值计算统计量的观测值，看是否属于拒绝域，从而对 H_0 作出判断。

3. 两类错误

当 H_0 本来是正确的，但检验后作出了拒绝 H_0 的判断，这种错误称为第一类错误，也称拒真错误；当 H_0 本来是不正确的，但检验后作出了接受 H_0 的判断，这种错误称为第二类错误，也称受伪错误。

4. 正态总体未知参数的假设检验 (检验水平 α)

	原假设 H_0	H_0 下的检验统计量及分布	备择假设 H_1	H_0 的拒绝域
一个正态总体 σ^2 已知	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$	当 $\mu = \mu_0$ 时， $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$ U > u_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $\begin{cases} \bar{X} > u_0 + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{X} < u_0 - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$ $U > u_\alpha$ 即 $\bar{X} > u_0 + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $U < -u_\alpha$ 即 $\bar{X} < u_0 - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

未知	σ^2	$\mu = \mu_0$	当 $\mu = \mu_0$ 时,	$\mu \neq \mu_0$	$ T > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\bar{X} > u_0 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\bar{X} < u_0 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
	$\mu \leq \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\mu > \mu_0$	$T > t_{\alpha}(n-1)$ 即 $\bar{X} > u_0 + t_{\alpha}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	
	$\mu \geq \mu_0$		$\mu < \mu_0$	$T < -t_{\alpha}(n-1)$ 即 $\bar{X} > u_0 - t_{\alpha}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	
已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	当 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时,	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$W' > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $W' < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$	$W > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $W < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ $W > \chi_a^2(n-1)$ $W < \chi_{1-a}^2(n-1)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$W' = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 \sim \chi^2(n)$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$W' > \chi_a^2(n)$	
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$W' < \chi_{1-a}^2(n)$	
未知	μ	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	当 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时,	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$W > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $W < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ $W > \chi_a^2(n-1)$ $W < \chi_{1-a}^2(n-1)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$W > \chi_a^2(n-1)$	
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$W < \chi_{1-a}^2(n-1)$	
已知	σ_1^2	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	当 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 时,	$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$ U > u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U > u_{\alpha}$ $U < -u_{\alpha}$
	σ_2^2	$\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$	$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{S \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	
	$\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$		$\mu_1 - \mu_2 < \delta$		
两个正态总体未知但	σ_1^2				
	σ_2^2	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	当 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 时,	$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$ T > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$ $T > t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$ $T < -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
	σ_1^2	$\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$	$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	
	σ_2^2	$\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$	$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	
	σ_1^2				
	σ_2^2				



μ_1	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时, $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
μ_2	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$		$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	或 $F < F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}, n_2 - 1, n_1 - 1\right)$
未知	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$		$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F > t_a(n_1 - 1, n_2 - 1)$ $F < t_a^{-1}(n_2 - 1, n_1 - 1)$

研
神
Y

研
神
Y





最幸福的事就是，陪你考上



官方订阅号



官方微博