初等变换

初等变换	互换	倍乘	倍加
初等矩阵	$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ k & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

会求初等矩阵的n次方、逆、行列式、伴随

$\underbrace{\text{n次方}}_{\text{重复操作}}$、$\underbrace{\text{逆}}_{\text{反向操作}}$

作一次初等行变换 $\Leftrightarrow$ 左乘一个初等矩阵. 作一次初等列变换 $\Leftrightarrow$ 右乘一个初等矩阵.

作初等行变换 $\Leftrightarrow$ 左乘可逆矩阵. 作初等列变换 $\Leftrightarrow$ 右乘可逆矩阵.

任一矩阵A可通过初等行变换化为 $\begin{pmatrix} & \\ O & O \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P, 使 $PA=\begin{pmatrix} & \\ O & O \end{pmatrix}$

任一矩阵A可通过初等列变换化为 $\begin{pmatrix} & O \\ & O \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵Q, 使 $AQ=\begin{pmatrix} & O \\ & O \end{pmatrix}$

列满秩矩阵A可通过初等行变换化为 $\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P. 使 $PA=\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$

行满秩矩阵A可通过初等列变换化为 $(E_r \quad O)$ $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵Q. 使 $AQ=(E_r \quad O)$

可逆矩阵A可通过初等行/列变换化为 E_r $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q, 使 $PA=E_r$. $AQ=E_r$

A可逆 $\Leftrightarrow$ A可通过初等变换化为E $\Leftrightarrow$ A是初等矩阵的乘积.

初等变换的深刻意义: 初等变换不改变秩 $\Leftrightarrow$ 乘以可逆矩阵不改变秩

推广: 左乘列满秩矩阵不改变秩.

右乘行满秩矩阵不改变秩.

矩阵A, B等价 $\Leftrightarrow$ A, B可通过初等变换转化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P. Q. 使 $PAQ=B$

矩阵A, B行等价 $\Leftrightarrow$ A, B可通过初等行变换转化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P. 使 $PA=B$

矩阵A, B列等价 $\Leftrightarrow$ A, B可通过初等列变换转化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵Q. 使 $AQ=B$.

三秩相等: 非零子式的最高阶数 = 行向量组无关向量的个数 = 列向量组无关向量的个数.

解的判定

	齐次方程	非齐次方程
方程组形式	$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$
向量组形式	$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$	$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$
矩阵形式	$AX=0$	$AX=b$
解的判定	若$r(A)=n$，唯一零解 若$r(A)<n$，无穷多解	若$r(A)\neq r(A\ \ b)$，无解 若$r(A)=r(A\ \ b)=n$，唯一解 若$r(A)=r(A\ \ b)<n$，无穷多解 若$r(A)=m$，必有解
通解	基础解系中向量的线性组合	齐次通解+非齐次特解

列数 n = 未知数个数

秩 $r(A)$ = 有效方程个数（约束条件个数）

自由变量个数 $n-r(A)$ = 未知数个数 − 约束条件个数

方程组加减消元 $\Leftrightarrow$ 矩阵初等行变换

若A经过初等行变换化为B，则$Ax=0$和$Bx=0$同解

A和B的行向量组等价

A和B的列向量组线性关系相同

例14.下列命题中正确的是( ).

A.方程组 $Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$.

B.若 $Ax=0$ 只有零解,那么 $Ax=b$ 有唯一解.

C.若 $Ax=0$ 有非零解,那么 $Ax=b$ 有无穷多解.

D.若 $Ax=b$ 有两个不同的解,那么 $Ax=b$ 有无穷多解.

例15.若 $A_{4\times5}$ 的行向量组线性无关,则错误命题是( ).

A. $Ax=b$ 有无穷多解.

B. $A^Tx=b$ 有唯一解.

C. $A^TAx=0$ 有非零解

D. $AA^Tx=0$ 只有零解

例16.设 A 是 n 阶矩阵,α 是 n 维列向量,若 $r\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}=r(A)$. 则( ).

A. $AX=\alpha$ 有无穷多解.

B. $Ax=\alpha$ 有唯一解.

C. $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 只有零解.

D. $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 有非零解.

若 $A_{m\times n}$ 有 $m<n$,则 $Ax=0$ 必有非零解.

非齐次方程 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ A 和 (A,b) 的列向量组等价. .

非齐次方程 $Ax=b$ 若有解,则 $r(A)>0$.

非齐次方程若有不止一个解,则必有无穷多解.

解的结构、解的性质

齐±齐=齐　非齐±齐=非齐　非齐－非齐=齐　是解+不是解=不是解.

若$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是齐次解，则$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$是齐次解

若$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是非齐次解，则$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ $\begin{cases}是齐次解，当k_1+k_2+\cdots+k_s=0时,\\ 是非齐次解，当k_1+k_2+\cdots+k_s=1时.\end{cases}$

若$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是线性无关的非齐次解，则$\eta_1-\eta_2,\eta_2-\eta_3,\cdots,\eta_{s-1}-\eta_s$是线性无关的齐次解.

$Ax=0$的解向量与A的行向量正交.

齐次方程线性无关解的个数是$n-r(A)$.

非齐次方程线性无关解的个数是$n-r(A)+1$.

基础解系：解向量的极大无关组. ①是解. ②线性无关. ③个数$=n-r(A)$.

例17.设齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系是η_1,η_2,η_3，则此方程组的基础解系还可表示为(　).

A. η_1,η_2,η_3的等秩向量组

B. η_1,η_2,η_3的等价向量组

C. $\eta_1-\eta_2,\eta_2-\eta_3,\eta_3-\eta_1$

D. $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_1$.

例18.设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为6维非零列向量. 若$\eta_1=(3,2,2,2)^T$和$\eta_2=(1,2,2,6)^T$是$Ax=0$的基础解系，则下列命题正确的个数为(　).

①α_1可由α_3,α_4线性表示.

②α_2可由α_1,α_3线性表示.

③$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

④α_3,α_4线性无关.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4.

例19. 设 $\eta_1=(1,2,-1,3)^T$, $\eta_2=(2,1,4,-3)^T$ 是 $A_{3\times4}X=0$ 的基础解系，则下列向量中是 $Ax=0$ 解向量的是（ ）.

A. $(1,0,0,1)^T$ B. $(1,3,5,2)^T$ C. $(1,0,3,-3)^T$ D. $(-2,1,3,0)^T$

例20. 设 $A_{3\times4}X=b$ 有通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1(1,2,0,-2)^T+k_2(4,-1,-1,-1)^T+(1,0,-1,1)^T$. 则下列向量中是 $Ax=b$ 解向量的是（ ）.

A. $(1,2,0,-2)^T$ B. $(6,1,-2,-2)^T$ C. $(3,1,-2,4)^T$ D. $(5,1,-1,-3)^T$

选择题
已知通解，问下列哪个是解
(已知向量组，问下列哪个可被表示)
先把已知向量化为行最简可快速判断

例21. 已知 $\alpha_1=(-9,1,2,11)^T$, $\alpha_2=(1,-5,13,0)^T$, $\alpha_3=(-7,-9,24,11)^T$ 是方程组 $\begin{cases}a_1x_1+7x_2+a_3x_3+x_4=d_1\\3x_1+b_2x_2+2x_3+2x_4=d_2\\9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2\end{cases}$ 的解，求方程组的通解

例22. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为4维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求 $Ax=\beta$ 的通解.

例23. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为4维列向量，且 $Ax=\beta$ 的通解为 $(1,2,2,1)^T+k(1,-2,4,0)^T$，记 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta-\alpha_4)$，求 $Bx=\alpha_1-\alpha_2$ 的通解.

例24. 设 $A=(a_{ij})$ 是4阶矩阵，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $A_{11}\neq0$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 A 的列向量组，若非齐次方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，则下列命题错误的是（ ）.

A. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $A^*x=0$ 的基础解系 B. β 是 $A^*x=0$ 的解

C. $A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}$ 是 A^* 的特征值 D. A^* 相似于对角阵

求抽象方程组的通解，先判断 $r(A)$

包含解、同解、公共解

$Ax=0$的解都是$Bx=0$的解

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$的基础解系可由$Bx=0$的基础解系表示. $\Rightarrow$ $n-r(A)\leqslant n-r(B)$

$\Leftrightarrow$ B的行向量组可由A的行向量组表示. $\Rightarrow$ $r(A)\geqslant r(B)$

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$和$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$同解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

$Ax=0$和$Bx=0$同解
($Ax=0$的解都是$Bx=0$的解
$Bx=0$的解都是$Ax=0$的解)
$\Leftrightarrow$
- $Ax=0$和$Bx=0$的基础解系等价
- $Ax=0$的解都是$Bx=0$的解, 且$r(A)=r(B)$
- A和B的行向量组等价
- B的行向量组可由A的行向量组表示., 且$r(A)=r(B)$
- $r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

$Ax=c$和$Bx=d$同解 $\Leftrightarrow$
- (A,c)和(B,d)的行向量组等价.
- $Ax=0$和$Bx=0$同解, 且$Ax=c$和$Bx=d$有公共解
- $r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & c\\B & d\end{pmatrix}$

$Ax=0$和$Bx=0$有非零公共解 $\Leftrightarrow$
- $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$有非零解
- $Ax=0$的基础解系和$Bx=0$的基础解系线性相关