

# Integrálny počet

## Neurčitý integrál - 1.časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie  
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

27 Október 2022

# Obsah prednášky

- **Motivácia**
- **Primitívna funkcia a neurčitý integrál**
- **Všeobecné pravidlá integrovania funkcií**
- **Základné neurčité integrály**
- **Metódy počítania neurčitého integrálu**
  - Substitučná metóda
  - Metóda per partes (integrovanie po častiach)

# Motivácia

# Motivácia

- Jednoducho povedané, **určitý integrál** nezápornej funkcie  $f(x)$  medzi nejakými dvoma bodmi  $a, b$  **je rovný ploche obrazca** ohraničeného priamkami  $x = a, x = b$ , osou  $x$  a krívkou definovanou funkciou  $f$ .

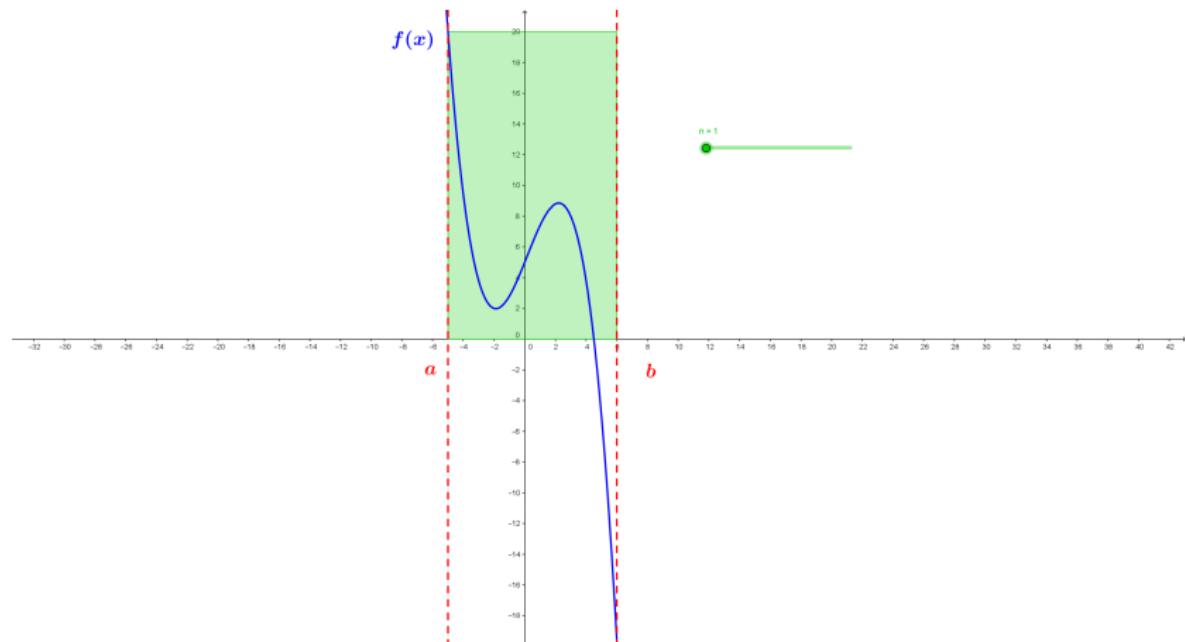
# Motivácia

- Jednoducho povedané, **určitý integrál** nezápornej funkcie  $f(x)$  medzi nejakými dvoma bodmi  $a, b$  **je rovný ploche obrazca** ohraničeného priamkami  $x = a, x = b$ , osou  $x$  a krívkou definovanou funkciou  $f$ .
- Princípy integrovania boli formulované nezávisle na začiatku 17. storočia **Isaacom Newtonom a Gottfriedom Leibnizom**. Obaja považovali **integrál za nekonečnú sumu obdĺžnikov veľmi malej šírky**.

# Motivácia

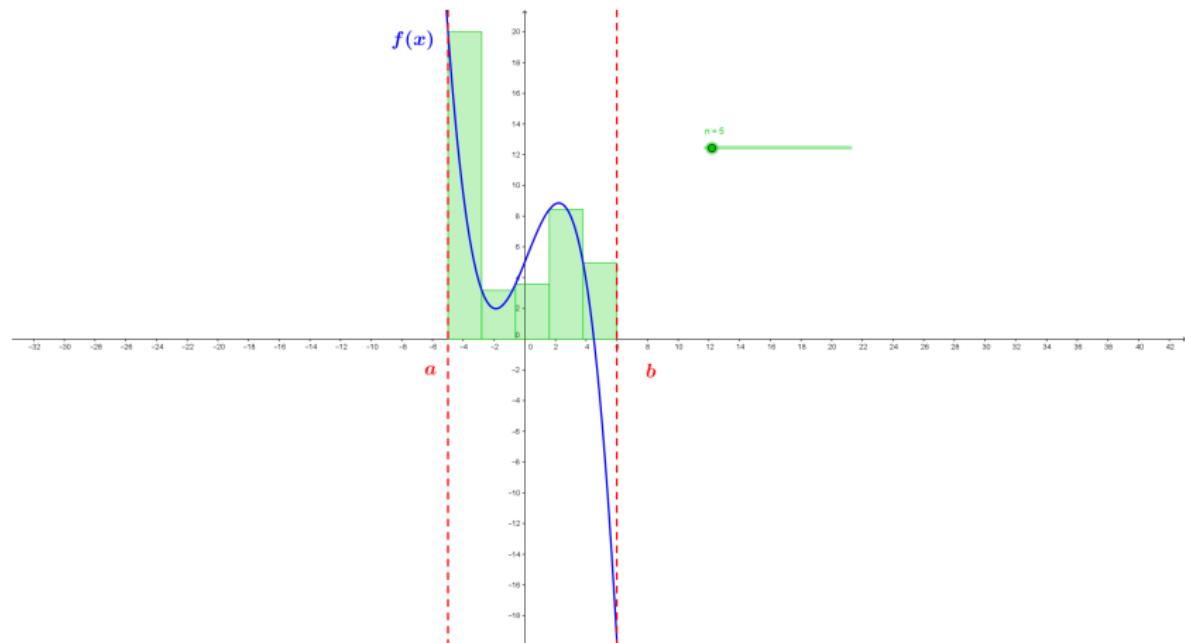
- Jednoducho povedané, **určitý integrál** nezápornej funkcie  $f(x)$  medzi nejakými dvoma bodmi  $a, b$  **je rovný ploche obrazca** ohraničeného priamkami  $x = a, x = b$ , osou  $x$  a krívkou definovanou funkciou  $f$ .
- Princípy integrovania boli formulované nezávisle na začiatku 17. storočia **Isaacom Newtonom a Gottfriedom Leibnizom**. Obaja považovali **integrál za nekonečnú sumu obdĺžnikov veľmi malej šírky**.
- Neskôr **Bernhard Riemann** (17.9. 1826 – 20.7. 1866) predstavil exaktnú matematickú definíciu integrálov.

# Motivácia



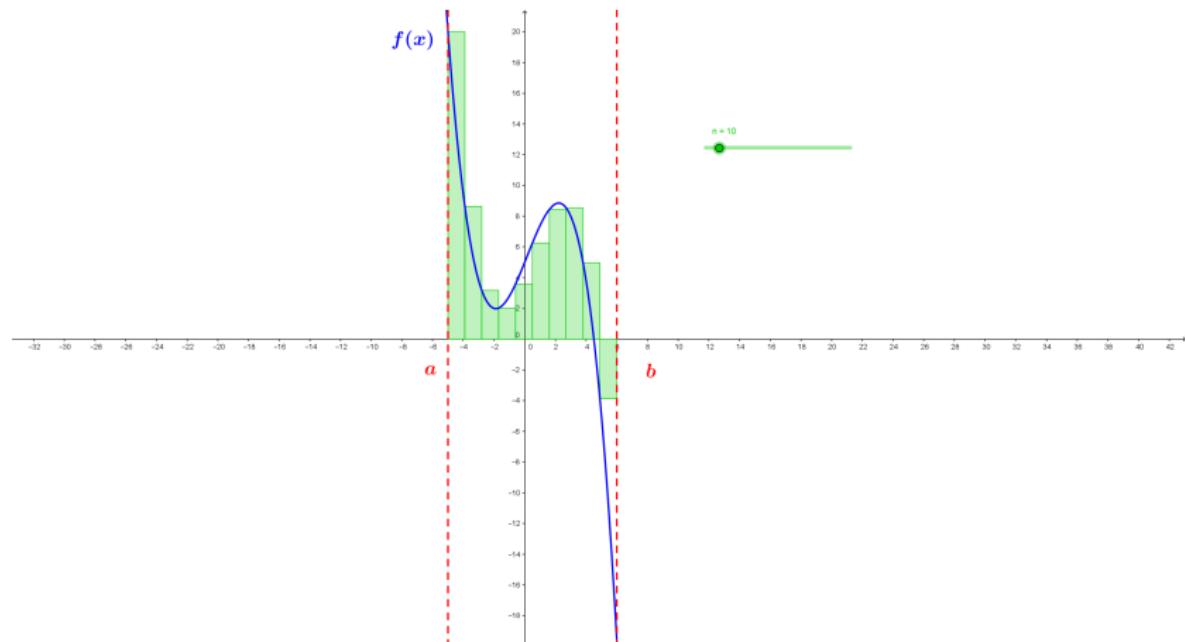
Obr.: Aproximácia plochy,  $n=1$

# Motivácia



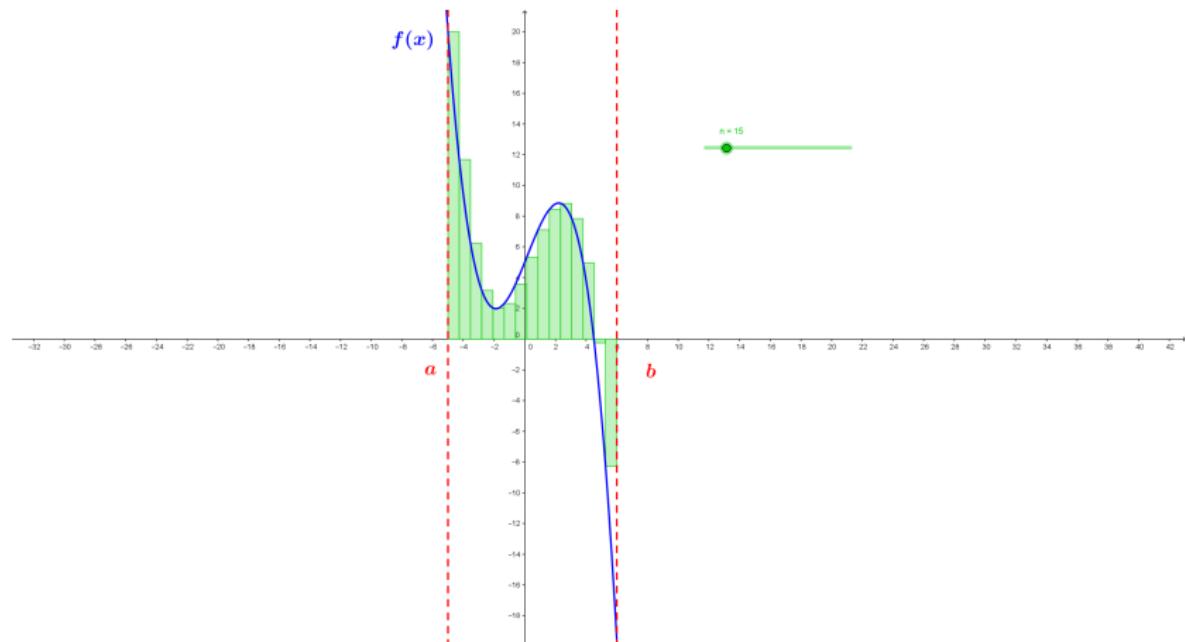
Obr.: Aproximácia plochy,  $n=5$

# Motivácia



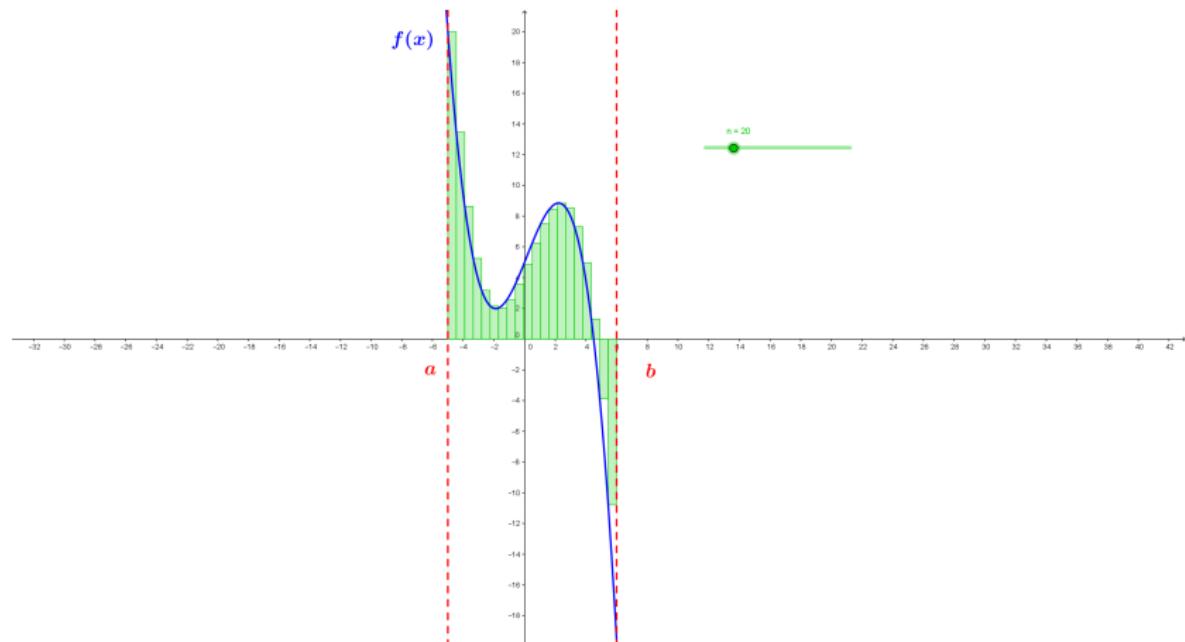
Obr.: Aproximácia plochy,  $n=10$

# Motivácia



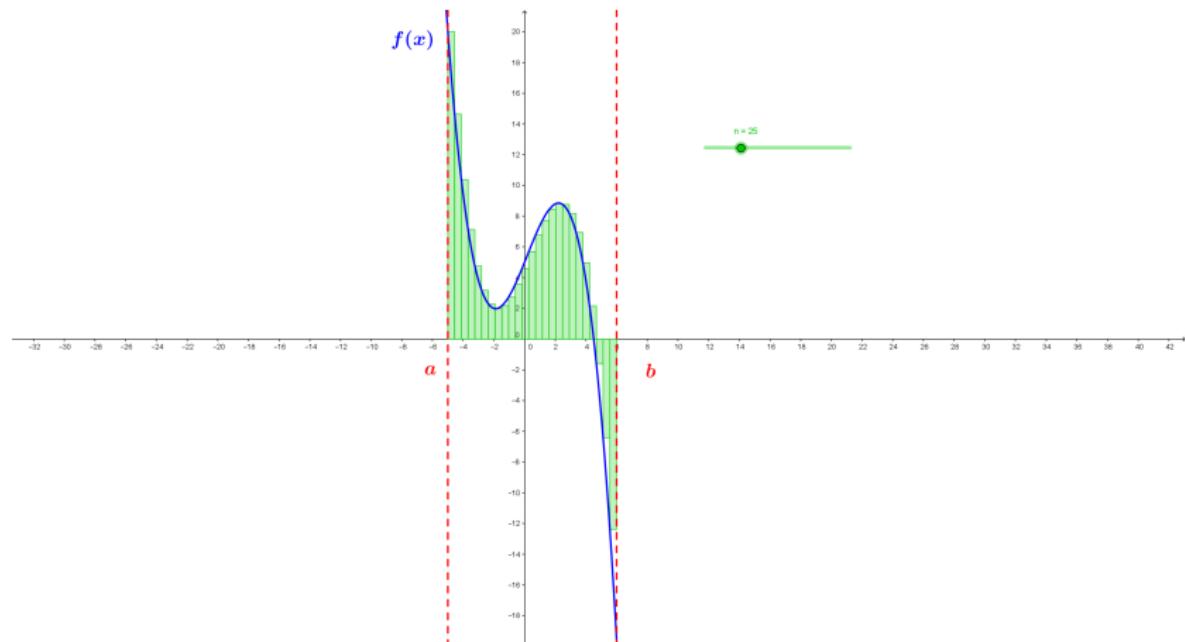
Obr.: Aproximácia plochy,  $n=15$

# Motivácia



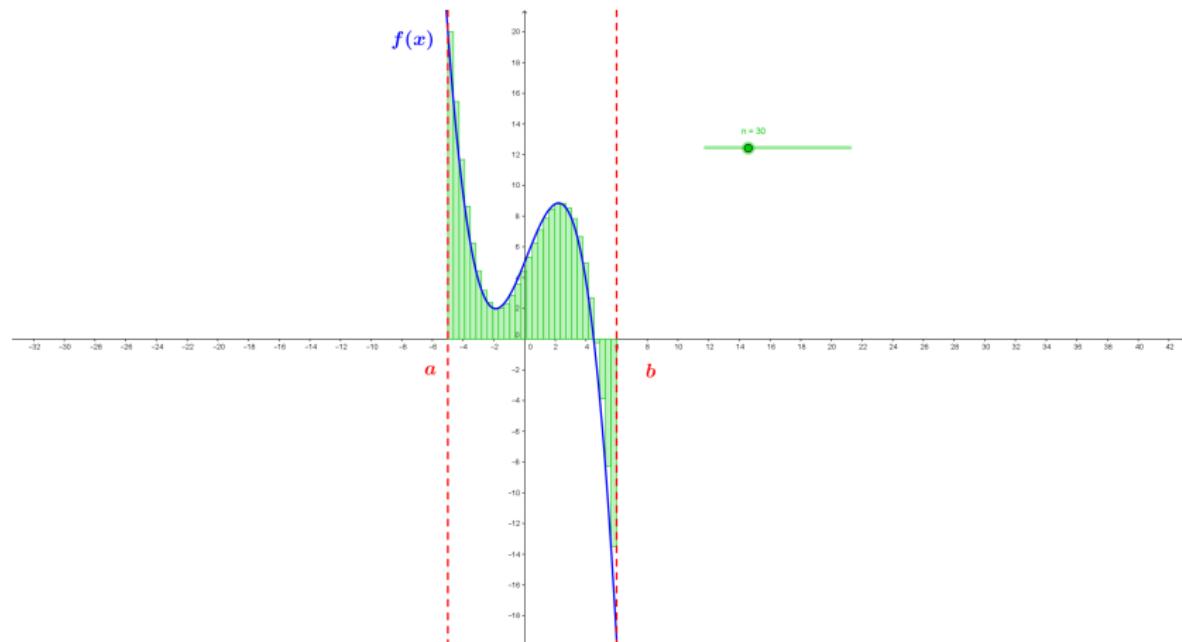
Obr.: Aproximácia plochy,  $n=20$

# Motivácia



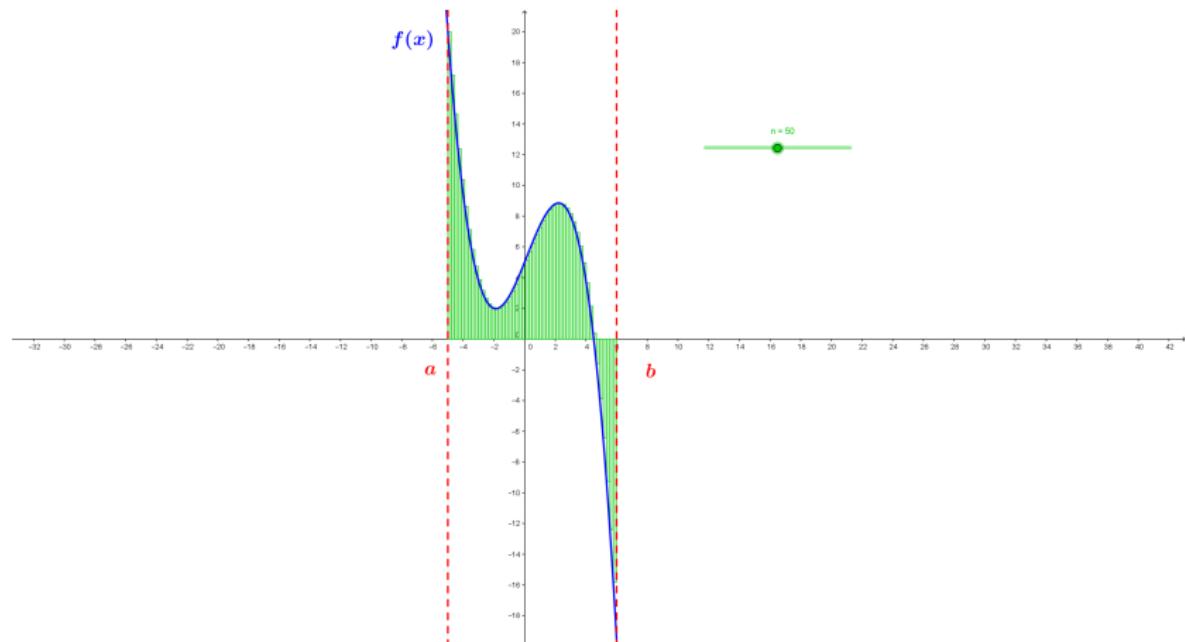
Obr.: Aproximácia plochy,  $n=25$

# Motivácia



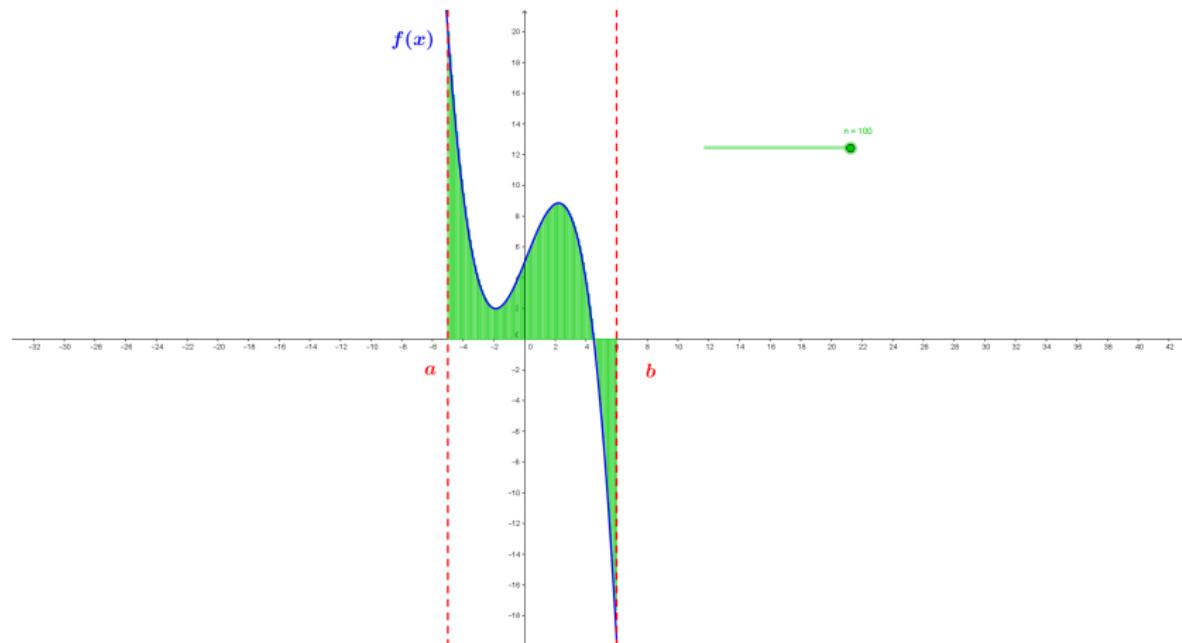
Obr.: Aproximácia plochy,  $n=30$

# Motivácia



Obr.: Aproximácia plochy,  $n=50$

# Motivácia



Obr.: Aproximácia plochy, n=100

# Motivácia



Obr.: Výpočet obsahu plochy nepravidelného tvaru

# Motivácia



Obr.: Výpočet objemu rotačného telesa

# Motivácia



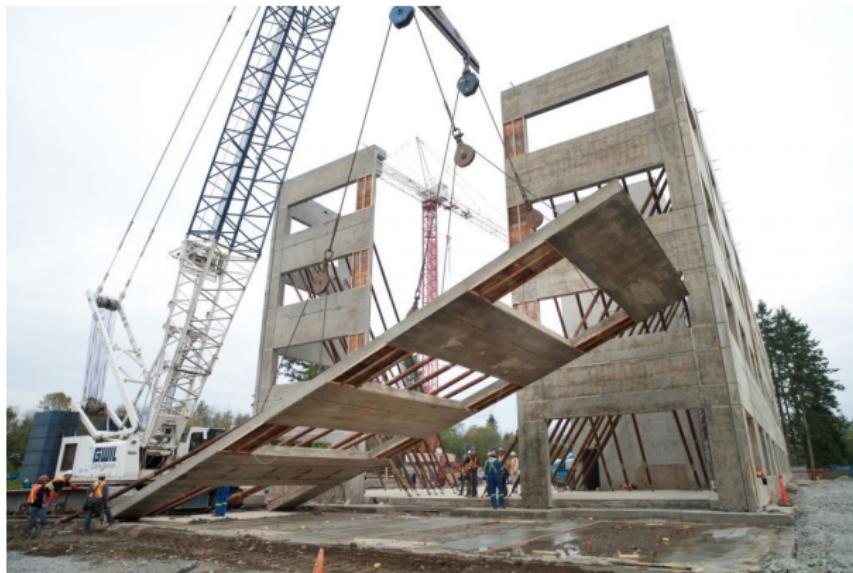
Obr.: Výpočet momentu zotrvačnosti

# Motivácia



Obr.: Výpočet práce potrebnej na premiestnenie nákladu

# Motivácia



Obr.: Výpočet súradníc ťažiska

# Primitívna funkcia a neurčitý integrál

# Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Funkcia  $F(x)$  sa nazýva **primitívnou funkciovou** k funkcií  $f(x)$  na intervale  $(a, b)$ , ak pre každé  $x \in (a, b)$  platí

$$F'(x) = f(x)$$

# Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Funkcia  $F(x)$  sa nazýva **primitívnou funkciovou** k funkcií  $f(x)$  na intervale  $(a, b)$ , ak pre každé  $x \in (a, b)$  platí

$$F'(x) = f(x)$$

- Z definície vidíme, že **pojem primitívnej funkcie je opačný k pojmu derivácie**. Teda pri hľadaní primitívnej funkcie k funkcií  $f(x)$  si kladieme otázku:

*Akú funkciu musíme derivovať, aby výsledkom bola funkcia  $f(x)$ ?*

# Primitívna funkcia a neurčitý integrál

## Príklad 1

Dokážte, že funkcia  $F(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$  je primitívou funkciou k funkciei  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

# Primitívna funkcia a neurčitý integrál

## Príklad 1

Dokážte, že funkcia  $F(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$  je primitívou funkciou k funkcie  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

## Príklad 2

Najdite primitívnu funkciu k funkcií  $f(x) = x$  na množine reálnych čísel.

# Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Vo všeobecnosti platí, že **k danej funkcií existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií**, ktoré sa navzájom líšia iba reálnou konštantou.

# Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Vo všeobecnosti platí, že **k danej funkcií existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií**, ktoré sa navzájom líšia iba reálnou konštantou.
- Množinu všetkých primitívnych funkcií  $F(x)$  k funkcií  $f(x)$  na intervale  $(a, b)$  nazývame **neurčitým integrálom funkcie  $f(x)$**  na intervale  $(a, b)$  a označujeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

kde  $dx$  označuje premennú, podľa ktorej sa integruje.

# Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Vo všeobecnosti platí, že **k danej funkcií existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií**, ktoré sa navzájom líšia iba reálnou konštantou.
- Množinu všetkých primitívnych funkcií  $F(x)$  k funkcií  $f(x)$  na intervale  $(a, b)$  nazývame **neurčitým integrálom funkcie  $f(x)$**  na intervale  $(a, b)$  a označujeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

kde  $dx$  označuje premennú, podľa ktorej sa integruje.

- Metódu, ako nájsť k danej funkcií neurčitý integrál, nazývame **integrovanie**.

# Všeobecné pravidlá integrovania funkcií

# Všeobecné pravidlá integrovania funkcií

- Nasledujúce pravidlá integrovania sú **dôsledkom pravidiel pre derivovanie funkcií**:

$$\begin{aligned}\int c \cdot f(x) \, dx &= c \int f(x) \, dx \\ \int f(x) \pm g(x) \, dx &= \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx\end{aligned}$$

# Základné neurčité integrály

# Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce:**

$$1) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ ak } a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}.$$

$$2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$$

$$3) \int e^x dx = e^x + c.$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \text{ ak } a \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$7) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c.$$

$$8) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + c.$$

$$9) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \arctg x + c, \\ -\operatorname{arccotg} x + c. \end{cases}$$

# Základné neurčité integrály

$$10) \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c. \end{cases}$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + c.$$

$$13) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

## Príklad 3

Vypočítame integrály:

a)  $\int (6x^5 - 2x^3 + 11x^2 + 3) dx$

b)  $\int \frac{3x^2+4x+2}{5x} dx$

c)  $\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx$

d)  $\int \tan^2 x dx$

e)  $\int \cotg x dx$

f)  $\int (2^x - 3^{1-x}) dx$

g)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10}}$

h)  $\int \frac{dx}{4+4x^2}$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

**Riešenie:**

a)

$$\begin{aligned} \int (6x^5 - 2x^3 + 11x^2 + 3) dx &= \\ &= 6 \int x^5 dx - 2 \int x^3 dx + 11 \int x^2 dx + 3 \int x^0 dx = \\ &= 6 \frac{x^6}{6} - 2 \frac{x^4}{4} + 11 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^1}{1} = x^6 - \frac{x^4}{2} + \frac{11}{3}x^3 + 3x + c. \end{aligned}$$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

**Riešenie:**

a)

$$\begin{aligned}\int (6x^5 - 2x^3 + 11x^2 + 3) dx &= \\ &= 6 \int x^5 dx - 2 \int x^3 dx + 11 \int x^2 dx + 3 \int x^0 dx = \\ &= 6 \frac{x^6}{6} - 2 \frac{x^4}{4} + 11 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^1}{1} = x^6 - \frac{x^4}{2} + \frac{11}{3}x^3 + 3x + c.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{5x} dx &= \frac{3}{5} \int x dx + \frac{4}{5} \int x^0 dx + \frac{2}{5} \int \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{3}{10}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \ln|x| + c.\end{aligned}$$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx = -3 \cos x - 2 \sin x + c.$$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx = -3 \cos x - 2 \sin x + c.$$

d)

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c.\end{aligned}$$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

**Riešenie:**

c)

$$\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx = -3 \cos x - 2 \sin x + c.$$

d)

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c.\end{aligned}$$

e)

$$\int \cotg x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + c.$$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

f)

$$\int (2^x - 3^{1-x}) \, dx = \int 2^x \, dx - 3 \int \left(\frac{1}{3}\right)^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} \left(\frac{1}{3}\right)^x + c.$$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

f)

$$\int (2^x - 3^{1-x}) \, dx = \int 2^x \, dx - 3 \int \left(\frac{1}{3}\right)^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} \left(\frac{1}{3}\right)^x + c.$$

g)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln |x + \sqrt{x^2 - 2}| + c.$$

# Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

f)

$$\int (2^x - 3^{1-x}) dx = \int 2^x dx - 3 \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} \left(\frac{1}{3}\right)^x + c.$$

g)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln |x + \sqrt{x^2 - 2}| + c.$$

h)

$$\int \frac{dx}{4 + 4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + c.$$

# Základné neurčité integrály - neriešené príklady

## Príklad 4

Vypočítajte zadané integrály:

a)  $\int (x^2 + 1) dx$

b)  $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$

c)  $\int \tan x dx$

d)  $\int \cotg^2 x dx$

e)  $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$

f)  $\int \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

g)  $\int \frac{dx}{x^2+9}$

h)  $\int \frac{dx}{\sin^2(x) \cos^2(x)}$

i)  $\int 3^x \cdot 5^{2x} dx$

# Metódy počítania neurčitého integrálu

# Metódy počítania neurčitého integrálu

- Sú **dve všeobecné metódy počítania neurčitých integrálov:** substitučná metóda a metóda integrovania per partes.

# Metódy počítania neurčitého integrálu

- Sú **dve všeobecné metódy počítania neurčitých integrálov:** substitučná metóda a metóda integrovania per partes.

## A) Substitučná metóda:

# Metódy počítania neurčitého integrálu

- Sú **dve všeobecné metódy počítania neurčitých integrálov:** substitučná metóda a metóda integrovania per partes.

## A) Substitučná metóda:

Táto metóda je odvodená od vzťahu pre deriváciu zloženej funkcie a jej princíp je v nasledujúcim tvrdení:

# Metódy počítania neurčitého integrálu

- Sú **dve všeobecné metódy počítania neurčitých integrálov:** substitučná metóda a metóda integrovania per partes.

## A) Substitučná metóda:

Táto metóda je odvodená od vzťahu pre deriváciu zloženej funkcie a jej princíp je v nasledujúcim tvrdení:

*Nech  $F$  je primitívna funkcia k funkcií  $f$  v intervale  $I$ , nech funkcia  $\varphi$  má deriváciu v intervale  $(a, b)$  a nech pre každé  $x \in (a, b)$  je  $\varphi(x) \in I$ . Potom*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c, \quad \text{v intervale } (a, b).$$

# Substitučná metóda - riešené príklady

## Príklad 5

Vypočítame integrály:

a)  $\int \frac{dx}{3x+7}$

b)  $\int (5 - 7x)^{21} dx$

c)  $\int \cos 2x dx$

d)  $\int \frac{dx}{4+x^2}$

e)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

f)  $\int \cos^4 x \sin x dx$

g)  $\int \frac{dx}{x \ln x}$

h)  $\int 3x\sqrt{x^2 + 6} dx$

# Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

a)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x+7} &= \left\{ \begin{array}{l} t = 3x + 7 \\ dt = 3dx \end{array} \rightarrow dx = \frac{dt}{3} \right\} = \\ &= \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln |t| = \frac{1}{3} \ln |3x+7| + c.\end{aligned}$$

# Substitučná metóda - riešené príklady

**Riešenie:**

b)

$$\begin{aligned}\int (5 - 7x)^{21} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = 5 - 7x \\ dt = -7dx \end{array} \rightarrow dx = \frac{dt}{-7} \right\} = \\ &= \int \frac{t^{21} dt}{-7} = -\frac{1}{7} \int t^{21} dt = -\frac{1}{7} \frac{t^{22}}{22} = \\ &= -\frac{(5 - 7x)^{22}}{154} + c.\end{aligned}$$

# Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\begin{aligned}\int \cos 2x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2dx \end{array} \rightarrow dx = \frac{dt}{2} \right\} = \\ &= \int \frac{\cos t \, dt}{2} = \frac{1}{2} \int \cos t \, dt = \frac{1}{2} \sin t = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + c = \sin x \cos x + c.\end{aligned}$$

# Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

d)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{4+x^2} &= \left\{ \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c.\end{aligned}$$

# Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

e)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + c,\end{aligned}$$

# Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

f)

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \sin x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right\} = \int t^4 (-dt) = \\ &= - \int t^4 \, dt = -\frac{t^5}{5} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + c.\end{aligned}$$

# Substitučná metóda - riešené príklady

**Riešenie:**

g)

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |\ln x| + c,$$

# Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

h)

$$\begin{aligned}\int 3x\sqrt{x^2 + 6} \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 6 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right\} = \frac{3}{2} \int \sqrt{t} \, dt = \\ &= \frac{3}{2} \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = \frac{3}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = (x^2 + 6)^{\frac{3}{2}} + c.\end{aligned}$$

# Substitučná metóda - neriešené príklady

## Príklad 6

Vypočítajte integrály:

a)  $\int (2x + 5)(x^2 + 5x)^7 \, dx$

b)  $\int (x + 3)\sqrt{x^2 + 6x + 1} \, dx$

c)  $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$

d)  $\int xe^{1-x^2} \, dx$

e)  $\int \frac{x}{x+16} \, dx$

f)  $\int \frac{x}{x^2+16} \, dx$

g)  $\int \frac{x}{x^4+16} \, dx$

h)  $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \, dx$

# Substitučná metóda - domáca úloha

## Príklad 7

Vypočítajte integrály (zdroj: Satko, Str 60., Pr 1.):

a)  $\int \frac{1}{4+3x^2} dx$

b)  $\int \frac{x}{4+3x^2} dx$

c)  $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$

d)  $\int \frac{3x-3}{x^2+2x+2} dx$

e)  $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx$

f)  $\int e^x \cotg e^x dx$

# Metóda per partes

B) Metóda per partes (integrovanie po častiach):

# Metóda per partes

## B) Metóda per partes (integrovanie po častiach):

Táto metóda je odvodená zo vzťahu pre deriváciu súčinu funkcií a spočíva v nasledovnom:

# Metóda per partes

## B) Metóda per partes (integrovanie po častiach):

Táto metóda je odvodená zo vzťahu pre deriváciu súčinu funkcií a spočíva v nasledovnom:

*Nech funkcie  $u$  a  $v$  majú derivácie v intervale  $(a, b)$ . Potom*

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

*v intervale  $(a, b)$ .*

# Metóda per partes - riešené príklady

## Príklad 8

Vypočítame integrály:

- a)  $\int xe^x \, dx$
- b)  $\int 2x^3 \ln x \, dx$
- c)  $\int 3x \cos 5x \, dx$
- d)  $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$
- e)  $\int \arcsin x \, dx$
- f)  $\int (x^2 + 2x - 1) \sin 3x \, dx$
- g)  $\int e^{-x} \sin x \, dx$
- h)  $\int \sin(\ln x) \, dx$

# Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

a)

$$\begin{aligned}\int xe^x \, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = e^x & v = x \\ u = e^x & v' = 1 \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x \cdot 1 \, dx = \\ &= xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c.\end{aligned}$$

# Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

b)

$$\begin{aligned}\int 2x^3 \ln x \, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = 2x^3 & v = \ln x \\ u = \frac{x^4}{2} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{x^4}{2} \ln x - \int \frac{x^4}{2} \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{x^4}{8} + c.\end{aligned}$$

# Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\begin{aligned}\int 3x \cos 5x \, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = \cos 5x & v = 3x \\ u = \frac{\sin 5x}{5} & v' = 3 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{3}{5}x \sin 5x - \int 3 \frac{\sin 5x}{5} \, dx = \\ &= \frac{3}{5}x \sin 5x - \frac{3}{5} \int \sin 5x \, dx = \\ &= \frac{3}{5}x \sin 5x + \frac{3}{25} \cos 5x + c.\end{aligned}$$

# Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

d)

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = x \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left( \int 1 \, dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + c.\end{aligned}$$

# Metóda per partes - riešené príklady

## Riešenie:

- e) Metódu PP môžeme použiť aj vtedy, ak integrovaná funkcia nie je súčinom dvoch funkcií. Vtedy za druhý činitel' považujeme konštantu 1

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \arcsin x \\ u = x & v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\} = \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \stackrel{(t=1-x^2)}{=} \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c, \quad x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Podobne sa riešia integrály

$$\int \ln(x) \, dx, \quad \int \operatorname{arctg}(x) \, dx, \quad \int \arccos(x) \, dx,$$

# Metóda per partes - riešené príklady

## Riešenie:

f) V tomto príklade budeme musieť použiť metódu per partes opakovane dvakrát.

$$\begin{aligned} & \int (x^2 + 2x - 1) \sin 3x \, dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u' = \sin 3x \quad v' = x^2 + 2x - 1 \\ u = -\frac{1}{3} \cos 3x \quad v = x^2 + 2x \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1) \cos 3x + \frac{2}{3} \int (x + 1) \cos 3x \, dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u' = \cos 3x \quad v = x + 1 \\ u = \frac{1}{3} \sin 3x \quad v' = 1 \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1) \cos 3x + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3}(x + 1) \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x \, dx \right) = \end{aligned}$$

## Metóda per partes - riešené príklady

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1) \cos 3x + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3}(x+1) \sin 3x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cos 3x \right) + c = \\ &= \left( -\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{11}{27} \right) \cos 3x + \frac{2}{9}(x+1) \sin 3x + c. \end{aligned}$$

# Metóda per partes - riešené príklady

## Riešenie:

g) V tomto príklade použijeme metódu dvakrát, čo nám umožní vyjadríť hľadaný integrál pomocou neho samého.

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin x \, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = \sin x & v = e^{-x} \\ u = -\cos x & v' = -e^{-x} \end{array} \right\} = \\ &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = \cos x & v = e^{-x} \\ u = \sin x & v' = -e^{-x} \end{array} \right\} = \\ &= -e^{-x} \cos x - \left( e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, dx \right) = \\ &= -e^{-x}(\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x \, dx.\end{aligned}$$

## Metóda per partes - riešené príklady

Ak označíme hľadaný integrál symbolom  $I = \int e^{-x} \sin x \, dx$ , tak sme dostali rovnicu  $I = -e^{-x}(\cos x + \sin x) - I$ , z ktorej vypočítame

$$I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + c.$$

# Metóda per partes - riešené príklady

## Riešenie:

h) V tomto príklade opäť použijeme metódu dvakrát, aby sme vyjadrili hľadaný integrál pomocou neho samého.

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x) dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \sin(\ln x) \\ u = x & v' = \cos(\ln x) \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \\ &= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \cos(\ln x) \\ u = x & v' = -\sin(\ln x) \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \\ &= x \sin(\ln x) - \left( x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \right).\end{aligned}$$

Po úprave, pri označení  $I = \int \sin(\ln x) dx$ , dostávame riešenie

$$I = \frac{1}{2}x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c.$$

# Metóda per partes - neriešené príklady

## Príklad 9

Vypočítajte zadané integrály:

a)  $\int x \sin x \, dx$

b)  $\int x^2 e^{3x} \, dx$

c)  $\int x \ln(x^2) \, dx$

d)  $\int \arctan(x) \, dx$

e)  $\int \ln(x^2 + 1) \, dx$

f)  $\int e^{2x} \cos x \, dx$

# Metóda per partes - domáca úloha

## Príklad 10

Vypočítajte zadané integrály:

a)  $\int x^2 \cdot 3^x dx$

b)  $\int x \operatorname{arccotg}(x) dx$

c)  $\int \ln(x) dx$

d)  $\int \sin(2x) \cos(3x) dx$

Ďakujem za pozornosť.