Číselné postupnosti

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

28 November 2022

Postupnosti

Obsah prednášky:

- úvod
- základné pojmy
- ohraničenosť
- monotónnosť
- aritmetická a geometrická postupnosť
- limity
- hromadná hodnota
- množina hodnôt postupnosti
- konvergencia a divergencia
- podpostupnosť
- príklady

Postupnosti - úvod

Postupnosti - úvod

Obr.: Postupnosť - fázovanie pohybu (akrobatické lyžovanie)

Postupnosti - úvod

Obr.: Postupnosť - fázovanie pohybu (freestyle motocross)

Postupnosti - úvod

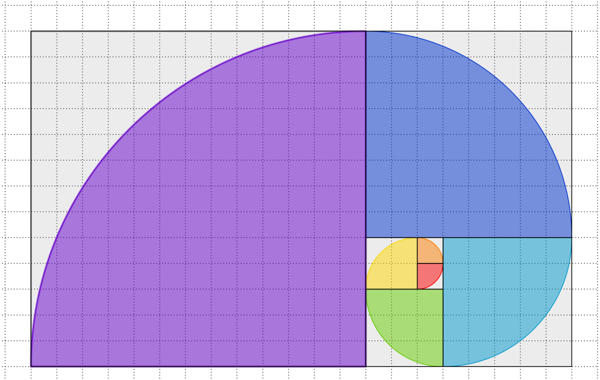
Obr.: Leonardo z Pisy - Fibonacci (cca 1175 - 1250)

Postupnosti - úvod

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Obr.: Fibonacciho postupnosť - okvetné lístky

Postupnosti - úvod

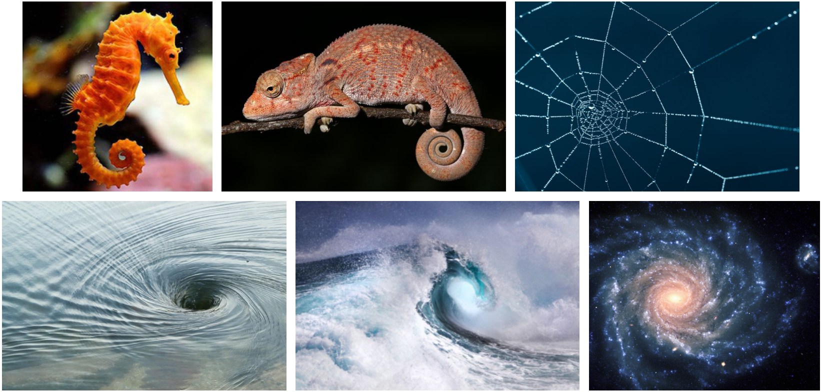


Obr.: Fibonacciho špirála

Postupnosti - úvod

Obr.: Fibonacciho špirála v prírode

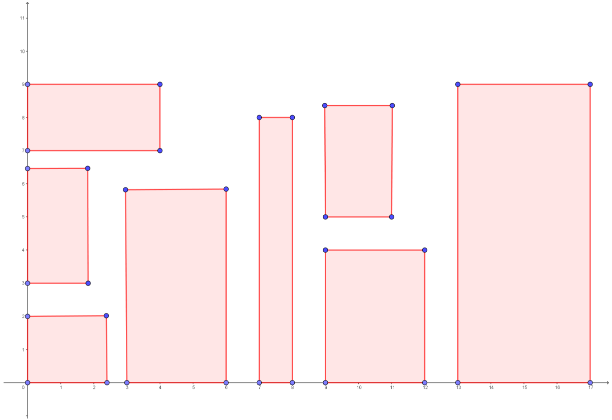
Postupnosti - úvod



Obr.: Fibonacciho špirála v prírode

Postupnosti - úvod

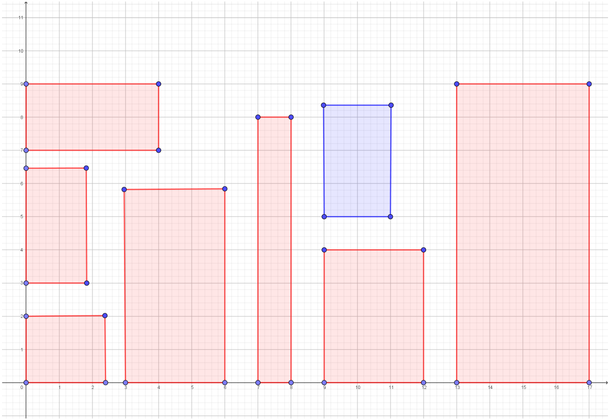
Vyberte obdĺžnik, ktorý sa vám zdá najestetickejší :-)



Obr.: Zlatý podiel, zlaté číslo, zlatý rez, ...

Postupnosti - úvod

Bol to tento? ;-)



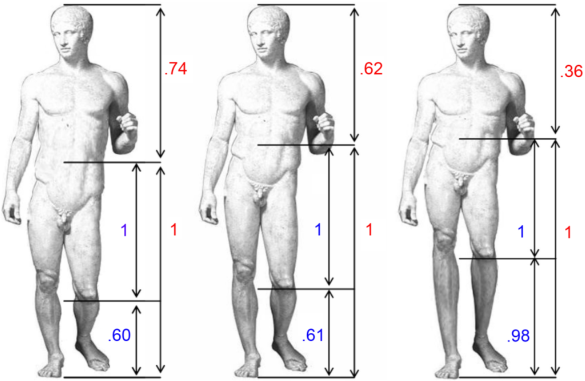
Obr.: Zlatý podiel, zlaté číslo, zlatý rez, ...

Postupnosti - úvod

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

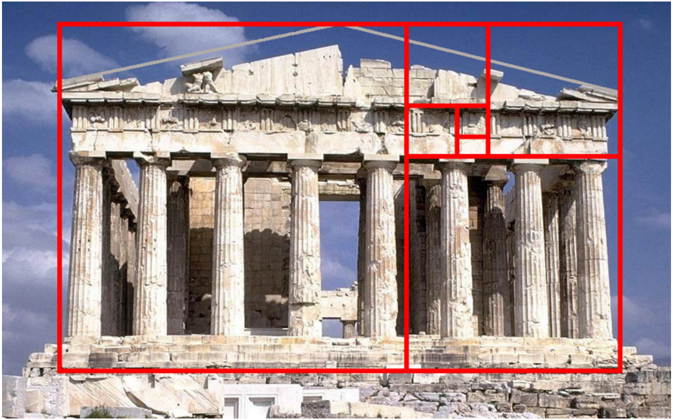
x_i	x_{i+1}	$\frac{x_{i+1}}{x_i}$
1	1	1
1	2	2
2	3	1.5
3	5	1.667
5	8	1.600
8	13	1.625
13	21	1.615
21	34	1.619
34	55	1.617
55	89	1.618
...	...	≈ 1.618033989

Postupnosti - úvod



Obr.: Zlatý rez - Doryphoros (Polykleitos)

Postupnosti - úvod

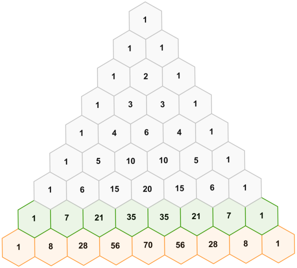


Obr.: Zlatý rez - Chrám Partenón v Aténach

Postupnosti - úvod

Obr.: Blaise Pascal (1623 – 1662)

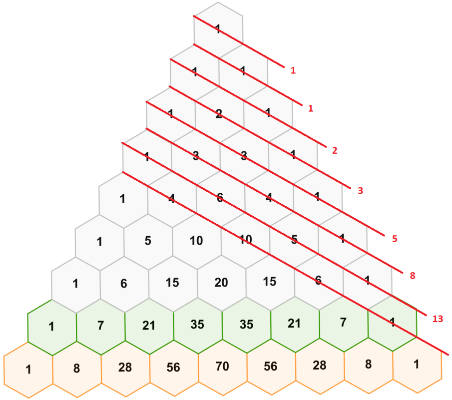
Postupnosti - úvod



Obr.: Pascalov trojuholník

$$
\begin{aligned}
(a-b)^1 &= a-b \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\
(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\
(a-b)^4 &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 \\
(a-b)^5 &= a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Postupnosti - úvod



Obr.: Fibonacciho postupnosť a Pascalov trojuholník (alebo všetko so všetkým nejak súvisí :-))

Postupnosti - úvod

Obr.: A niečo z reálneho života - úroky

Postupnosti - úvod

Niečo na zahriatie:

$$5, 8, 11, 14, 17, \ldots$$

$$20, 16, 12, 8, \ldots$$

$$4, 6, 9, 13, 18, 24, \ldots$$

$$3, 6, 5, 10, 9, 18, \ldots$$

$$1, 2, 4, 5, 8, 9, \ldots$$

$$1, 16, 81, \ldots, 625, 1296$$

$$8, 6, 7, 5, 6, 4, \ldots$$

Postupnosti - úvod

Niečo na zahriatie:

$$5, 8, 11, 14, 17, 20$$

$$20, 16, 12, 8, 4$$

$$4, 6, 9, 13, 18, 24, 31$$

$$3, 6, 5, 10, 9, 18, 17$$

$$1, 2, 4, 5, 8, 9, 13$$

$$1, 16, 81, 256, 625, 1296$$

$$8, 6, 7, 5, 6, 4, 5$$

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosť je funkcia z množiny prirodzených čísel **N** do množiny reálnych čísel **R**.

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosť je funkcia z množiny prirodzených čísel **N** do množiny reálnych čísel **R**.Postupnosti označujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$\begin{aligned} (a_n)_{n=1}^{\infty} &= \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\} \\ &= \{[n, f(n)]; n \in \mathbf{N}\} \\ &= \{[1, f(1)], [2, f(2)], [3, f(3)], ..., [n, f(n)], ...\} \end{aligned}$$

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosť je funkcia z množiny prirodzených čísel **N** do množiny reálnych čísel **R**.Postupnosti označujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$\begin{aligned}(a_n)_{n=1}^{\infty} &= \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\} \\ &= \{[n, f(n)]; n \in \mathbf{N}\} \\ &= \{[1, f(1)], [2, f(2)], [3, f(3)], ..., [n, f(n)], ...\}\end{aligned}$$

Inými slovami, postupnosť je **reálna funkcia**, ktorej definičný obor je množina prirodzených čísel, a preto môžeme na postupnosti **aplikovať všetky definície a tvrdenia o funkciách**.

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosť je funkcia z množiny prirodzených čísel **N** do množiny reálnych čísel **R**.Postupnosti označujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$
\begin{aligned}
(a_n)_{n=1}^{\infty} &= \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\} \\
&= \{[n, f(n)]; n \in \mathbf{N}\} \\
&= \{[1, f(1)], [2, f(2)], [3, f(3)], ..., [n, f(n)], ...\}
\end{aligned}
$$

Inými slovami, postupnosť je **reálna funkcia**, ktorej definičný obor je množina prirodzených čísel, a preto môžeme na postupnosti **aplikovať všetky definície a tvrdenia o funkciách**.

Funkčné hodnoty priradené prirodzeným číslam $1, 2, \ldots, n$ nazývame **členy postupnosti**. n-tý člen postupnosti označujeme a_n.

Postupnosti - základné pojmy

Príklad

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{n^2 + 1\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 5, 10, 17, 26, ...\}$$

Explicitné zadanie: $a_n = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}$
Rekurentné zadanie: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ pre $n \in \mathbf{N}$.

Postupnosti - základné pojmy

Príklad

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{n^2 + 1\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 5, 10, 17, 26, ...\}$$

Explicitné zadanie: $a_n = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}$
Rekurentné zadanie: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ pre $n \in \mathbf{N}$.

Príklad

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{2n - 1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$$

Explicitné zadanie: $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}$
Rekurentné zadanie: $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ pre $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Postupnosti - vlastnosti

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in$ **R** také, že $\forall n \in$ **N** : $a_n \leq \alpha$.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq \alpha$.
- **ohraničená zdola** ak $\exists \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq \beta$.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq \alpha$.
- **ohraničená zdola** ak $\exists \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq \beta$.
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora **a** ohraničená zdola, teda ak $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N}$: $\beta \leq a_n \leq \alpha$.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq \alpha$.
- **ohraničená zdola** ak $\exists \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq \beta$.
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora **a** ohraničená zdola, teda ak $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : \beta \leq a_n \leq \alpha$.
- **neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq \alpha$.
- **ohraničená zdola** ak $\exists \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq \beta$.
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora **a** ohraničená zdola, teda ak $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : \beta \leq a_n \leq \alpha$.
- **neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.
- **neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in$ **R** také, že $\forall n \in$ **N** : $a_n \leq \alpha$.
- **ohraničená zdola** ak $\exists \beta \in$ **R** také, že $\forall n \in$ **N** : $a_n \geq \beta$.
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora **a** ohraničená zdola, teda ak $\exists \alpha, \beta \in$ **R** také, že $\forall n \in$ **N** : $\beta \leq a_n \leq \alpha$.
- **neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.
- **neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola.
- **neohraničená**, ak je neohraničená zhora **alebo** neohraničená zdola.

Postupnosti - monotónnosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **rastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n < a_{n+1}$

Postupnosti - monotónnosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **rastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n < a_{n+1}$
- **klesajúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n > a_{n+1}$

Postupnosti - monotónnosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **rastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n < a_{n+1}$
- **klesajúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n > a_{n+1}$
- **nerastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n \geq a_{n+1}$

Postupnosti - monotónnosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **rastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n < a_{n+1}$
- **klesajúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n > a_{n+1}$
- **nerastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n \geq a_{n+1}$
- **neklesajúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n \leq a_{n+1}$

Postupnosti - monotónnosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **rastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} : a_n < a_{n+1}$
- **klesajúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} : a_n > a_{n+1}$
- **nerastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- **neklesajúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- **stacionárna (konštantná)**, ak $\forall n \in \mathbf{N} : a_n = a_{n+1}$

Postupnosti - monotónnosť

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **rastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \; : \; a_n < a_{n+1}$
- **klesajúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \; : \; a_n > a_{n+1}$
- **nerastúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \; : \; a_n \geq a_{n+1}$
- **neklesajúca**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \; : \; a_n \leq a_{n+1}$
- **stacionárna (konštantná)**, ak $\forall n \in \mathbf{N} \; : \; a_n = a_{n+1}$

Rastúcu a klesajúcu postupnosť nazývame **rýdzo (ostro) monotónnou**.

Postupnosti - monotónnosť

Príklad

Zistite, či nasledujúca postupnosť je rastúca alebo klesajúca: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Postupnosti - monotónnosť

Príklad

Zistite, či nasledujúca postupnosť je rastúca alebo klesajúca: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Riešenie: Napíšeme niekoľko prvých členov postupnosti:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

Postupnosti - monotónnosť

Príklad

Zistite, či nasledujúca postupnosť je rastúca alebo klesajúca: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Riešenie: Napíšeme niekoľko prvých členov postupnosti:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Zdá sa, že postupnosť je rastúca, t.j. platí:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &\leq \frac{n+1}{n+2} \\ n^2+2n &\leq n^2+2n+1 \\ 0 &\leq 1 \end{aligned}$$

pre každé $n \in \mathbf{N}$. Postupnosť je teda rastúca.

Aritmetická a geometrická postupnosť

Aritmetická a geometrická postupnosť

Aritmetická postupnosť: $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je diferencia.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Aritmetická a geometrická postupnosť

Aritmetická postupnosť: $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je diferencia.

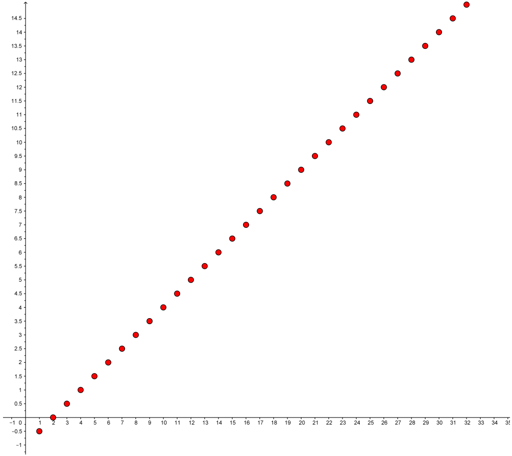
$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **aritmetická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $a_{n+1} - a_n = d$.

Aritmetická a geometrická postupnosť



Obr.: Aritmetická postupnosť: $a_1 = -0.5, a_n = a_1 + (n-1) \cdot 0.5$

Aritmetická a geometrická postupnosť

Geometrická postupnosť: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde q je quotient (kvocient).

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 \cdot q^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

Aritmetická a geometrická postupnosť

Geometrická postupnosť: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde q je quotient (kvocient).

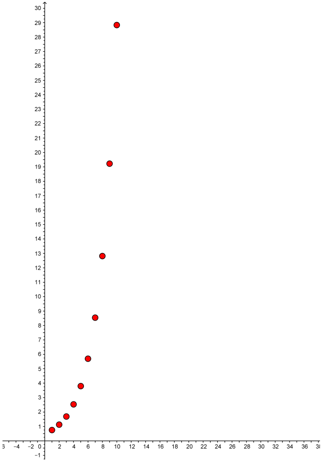
$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{(n-1)} \end{aligned}$$

Súčet prvých n členov geometrickej postupnosti:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1 \\ &= n \cdot a_1, \quad q = 1 \end{aligned}$$

(*pozn.* Súčet geometrického radu je $s = a_1/(1-q)$.)

Aritmetická a geometrická postupnosť



Obr.: Geometrická postupnosť: $a_{n+1} = 0.5 \cdot 1.5^n$

Aritmetická a geometrická postupnosť

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Aritmetická a geometrická postupnosť

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Ak pre kvocient q geometrickej postupnosti platí:

Aritmetická a geometrická postupnosť

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Ak pre kvocient q geometrickej postupnosti platí:

- $q < 0$, tak uvedenú postupnosť nazývame postupnosť **so striedavými znamienkami** resp. **alternujúca** postupnosť,

Aritmetická a geometrická postupnosť

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Ak pre kvocient q geometrickej postupnosti platí:

- $q < 0$, tak uvedenú postupnosť nazývame postupnosť **so striedavými znamienkami** resp. **alternujúca** postupnosť,
- $0 < q < 1$ a $a_1 > 0$, tak uvedená postupnosť je **klesajúca**,

Aritmetická a geometrická postupnosť

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Ak pre kvocient q geometrickej postupnosti platí:

- $q < 0$, tak uvedenú postupnosť nazývame postupnosť **so striedavými znamienkami** resp. **alternujúca** postupnosť,
- $0 < q < 1$ a $a_1 > 0$, tak uvedená postupnosť je **klesajúca**,
- $0 < q < 1$ a $a_1 < 0$, tak uvedená postupnosť je **rastúca**,

Aritmetická a geometrická postupnosť

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Ak pre kvocient q geometrickej postupnosti platí:

- $q < 0$, tak uvedenú postupnosť nazývame postupnosť **so striedavými znamienkami** resp. **alternujúca** postupnosť,
- $0 < q < 1$ a $a_1 > 0$, tak uvedená postupnosť je **klesajúca**,
- $0 < q < 1$ a $a_1 < 0$, tak uvedená postupnosť je **rastúca**,
- $q > 1$ a $a_1 > 0$, tak uvedená postupnosť je **rastúca**,

Aritmetická a geometrická postupnosť

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Ak pre kvocient q geometrickej postupnosti platí:

- $q < 0$, tak uvedenú postupnosť nazývame postupnosť **so striedavými znamienkami** resp. **alternujúca** postupnosť,
- $0 < q < 1$ a $a_1 > 0$, tak uvedená postupnosť je **klesajúca**,
- $0 < q < 1$ a $a_1 < 0$, tak uvedená postupnosť je **rastúca**,
- $q > 1$ a $a_1 > 0$, tak uvedená postupnosť je **rastúca**,
- $q > 1$ a $a_1 < 0$, tak uvedená postupnosť je **klesajúca**,

Aritmetická a geometrická postupnosť

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Ak pre kvocient q geometrickej postupnosti platí:

- $q < 0$, tak uvedenú postupnosť nazývame postupnosť **so striedavými znamienkami** resp. **alternujúca** postupnosť,
- $0 < q < 1$ a $a_1 > 0$, tak uvedená postupnosť je **klesajúca**,
- $0 < q < 1$ a $a_1 < 0$, tak uvedená postupnosť je **rastúca**,
- $q > 1$ a $a_1 > 0$, tak uvedená postupnosť je **rastúca**,
- $q > 1$ a $a_1 < 0$, tak uvedená postupnosť je **klesajúca**,
- $q = 1$, tak uvedená postupnosť je **konštantná**.

Limita postupnosti

Postupnosti - limity

Definícia

Hovoríme, že **postupnosť** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **má limitu** L, *ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ *tak, že pre všetky* $n > n_\varepsilon$ *platí*

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Limitu postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *označujeme* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Postupnosti - limity

Definícia

Hovoríme, že **postupnosť** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **má limitu** L*, ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ *tak, že pre všetky* $n > n_\varepsilon$ *platí*

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Limitu postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *označujeme* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L.$

Pri postupnostiach môžu existovať **len limity v nevlastnom bode** ∞, a preto hovoríme o **konvergentnej alebo divergentnej** postupnosti **bez nutnosti určenia bodu**.

Postupnosti - limity

Limity postupností počítame tak ako **limity funkcií** v nevlastnom bode ∞. Používame pritom nasledujúce pravidlo:

Postupnosti - limity

Limity postupností počítame tak ako **limity funkcií** v nevlastnom bode ∞. Používame pritom nasledujúce pravidlo:

> *Nech* f *je taká funkcia, že pre každé* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $f(n) = a_n$ *a* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *existuje. Potom existuje aj* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a obidve limity sa rovnajú.*

Postupnosti - limity

Limity postupností počítame tak ako **limity funkcií** v nevlastnom bode ∞. Používame pritom nasledujúce pravidlo:

> *Nech* f *je taká funkcia, že pre každé* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $f(n) = a_n$ *a* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *existuje. Potom existuje aj* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *a obidve limity sa rovnajú.*

Veta

(Existencia limity postupnosti). *Nech* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je daná postupnosť. Postupnosť* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *má* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje číslo* $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ *také, že pre ľubovoľné* $m, n > n_\varepsilon$ *platí*

$$|b_m - b_n| < \varepsilon.$$

Postupnosti - limity

Veta

(Postačujúca podmienka existencie limity postupnosti). *Nech* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je daná postupnosť. Ak je postupnosť* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *monotónna a ohraničená, tak má limitu.*

Hromadná hodnota postupnosti

Postupnosti - hromadná hodnota

Definícia

Bod a (a môže byť reálne číslo alebo $+\infty$, resp. $-\infty$) nazývame **hromadnou hodnotou postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$*, ak pre ľubovoľné okolie $O(a)$ existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n takých, že $a_n \in O(a)$*

Postupnosti - hromadná hodnota

Definícia

Bod a (a môže byť reálne číslo alebo $+\infty$, resp. $-\infty$) nazývame **hromadnou hodnotou postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *ak pre ľubovoľné okolie $O(a)$ existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n takých, že $a_n \in O(a)$*

Príklad

Postupnosť $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$
Postupnosť $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$
Postupnosť $\{0, n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{0, 1, 1, 0, 2, \frac{1}{2,} ...\}$
Postupnosť $\{1, n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, 2, \frac{1}{2,} ...\}$

Postupnosti - hromadná hodnota

Definícia

Bod a (a môže byť reálne číslo alebo $+\infty$, resp. $-\infty$) nazývame **hromadnou hodnotou postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$*, ak pre ľubovoľné okolie $O(a)$ existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n takých, že $a_n \in O(a)$.*

Príklad

Postupnosť $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ *má dve hromadné hodnoty* $0, 1$.
Postupnosť $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ *má jednu hromadnú hodnotu* ∞.
Postupnosť $\{0, n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{0, 1, 1, 0, 2, \frac{1}{2}, ...\}$ *má dve hromadné hodnoty* $0, \infty$.
Postupnosť $\{1, n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, 2, \frac{1}{2}, ...\}$ *má tri hromadné hodnoty* $0, 1, \infty$.

Postupnosti - hromadná hodnota

Veta

Nech postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu a nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Potom* a *je hromadnou hodnotou postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti - hromadná hodnota

Veta

Nech postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu a nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Potom* a *je hromadnou hodnotou postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Veta

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená číselná postupnosť. Potom existuje z nej vybraná postupnosť* $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, *ktorá je konvergentná.*

Postupnosti - hromadná hodnota

Veta

Nech postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu a nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Potom* a *je hromadnou hodnotou postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Veta

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená číselná postupnosť. Potom existuje z nej vybraná postupnosť* $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, *ktorá je konvergentná.*

Veta

Každá postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má aspoň jednu hromadnú hodnotu.*

Množina hodnôt postupnosti

Postupnosti - množina hodnôt postupnosti

Ku každej postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ patrí jej obor hodnôt. Tento nazývame tiež **množinu hodnôt postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
(*pozn.* Treba rozlišovať medzi pojmami *postupnosť* a *množina hodnôt postupnosti*.)

Postupnosti - množina hodnôt postupnosti

Ku každej postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ patrí jej obor hodnôt. Tento nazývame tiež **množinu hodnôt postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
(*pozn.* Treba rozlišovať medzi pojmami *postupnosť* a *množina hodnôt postupnosti*.)

Príklad

Množina hodnôt postupnosti $\{1, -1, 1, -1, ...,\}$ *teda postupnosti* $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *je ... .*

Príklad

Množina hodnôt postupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ... .*

Postupnosti - množina hodnôt postupnosti

Ku každej postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ patrí jej obor hodnôt. Tento nazývame tiež **množinu hodnôt postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
(*pozn.* Treba rozlišovať medzi pojmami postupnosť a množina hodnôt postupnosti.)

Príklad

Množina hodnôt postupnosti $\{1, -1, 1, -1, ...,\}$ *teda postupnosti* $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *je dvojprvková množina* $\{-1, 1\}$.

Príklad

Množina hodnôt postupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ *je množina* **N** *všetkých prirodzených čísel.*

Konvergencia a divergencia postupnosti

Postupnosti - konvergencia a divergencia

Definícia

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ľubovoľná postupnosť reálnych čísel. Nech* H *je množina všetkých jej hromadných hodnôt. Potom prvok* $\sup H (\inf H)$ *nazveme* **limes superior (limes inferior) číselnej postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *a označujeme ho* $\lim_{n\to\infty} \sup a_n \, (\lim_{n\to\infty} \inf a_n)$.

Postupnosti - konvergencia a divergencia

Definícia

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ľubovoľná postupnosť reálnych čísel. Nech* H *je množina všetkých jej hromadných hodnôt. Potom prvok* $\sup H (\inf H)$ *nazveme* **limes superior (limes inferior) číselnej postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *a označujeme ho* $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$ $(\lim_{n\to\infty} \inf a_n)$.

Príklad

Majme postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *kde* $a_n = (-1)^n$. *Táto postupnosť ... limitu, ľahko však zistíme, že* $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \ldots$ *a* $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \ldots$.

Postupnosti - konvergencia a divergencia

Definícia

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ľubovoľná postupnosť reálnych čísel. Nech* H *je množina všetkých jej hromadných hodnôt. Potom prvok* $\sup H (\inf H)$ *nazveme* **limes superior (limes inferior) číselnej postupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *a označujeme ho* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ $(\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n)$.

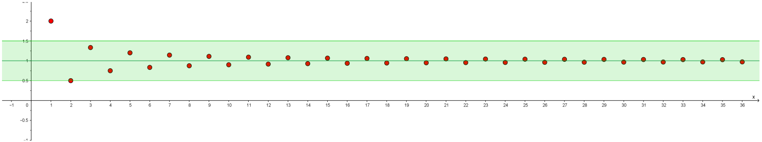
Príklad

Majme postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *kde* $a_n = (-1)^n$. *Táto postupnosť nemá limitu, ľahko však zistíme, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = 1$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = -1$.

Postupnosti - konvergencia a divergencia

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

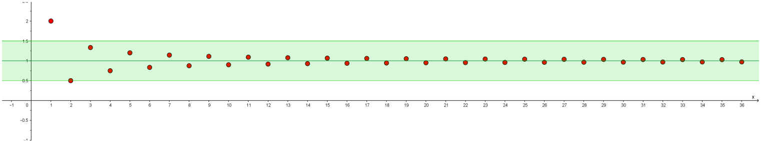
- $a \in \mathbf{R}$, t.j. postupnosť **konverguje** k číslu a, nazývame ju **vlastnou limitou**,



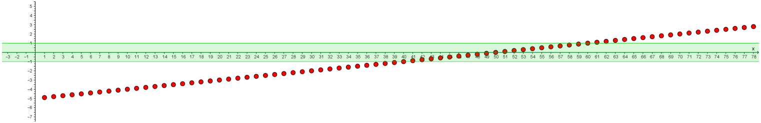
Postupnosti - konvergencia a divergencia

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

- $a \in \mathbf{R}$, t.j. postupnosť **konverguje** k číslu a, nazývame ju **vlastnou limitou**,

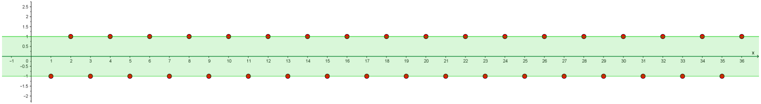


- $\pm\infty$, t.j. postupnosť **diverguje** do $\pm\infty$, nazývame ju **nevlastnou limitou**,



Postupnosti - konvergencia a divergencia

- $\nexists$, t.j. postupnosť **osciluje=diverguje**.



Podpostupnosť

Postupnosti - podpostupnosť

Definícia

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť. Nech* $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Postupnosť* $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ *sa nazýva* **podpostupnosť** *alebo* **vybraná** *alebo aj* **čiastočná postupnosť** *z postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti - podpostupnosť

Definícia

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť. Nech* $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Postupnosť* $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ *sa nazýva* **podpostupnosť** *alebo* **vybraná** *alebo aj* **čiastočná postupnosť** *z postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Príklad

Podpostupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ *sú napr:*

$$\begin{array}{rrcl} & (a_{2n})_{n=1}^{\infty} & = & \{2(2n)-1\}_{n=1}^{\infty} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 7, 11, 15, ...\} \\ \text{pre} & (k_n)_{n=1}^{\infty} & = & \{2n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 6, 8, ...\} \\ & (a_{n^2})_{n=1}^{\infty} & = & \{2(n^2)-1\}_{n=1}^{\infty} = \{2n^2-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 7, 17, 31, ...\} \\ \text{pre} & (k_n)_{n=1}^{\infty} & = & \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, ...\} \end{array}$$

Postupnosti - podpostupnosť

Veta

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je taká postupnosť, že* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$*. Nech* $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ *je z nej vybraná postupnosť, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Príklady

Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Majme danú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ predpisom

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Vypočítajte jej limitu.

Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

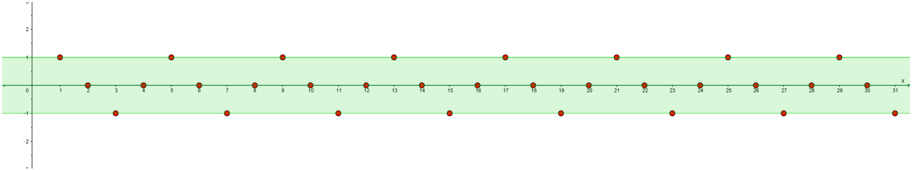
Majme danú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ predpisom

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Vypočítajte jej limitu.

Riešenie:

Táto postupnosť nemá limitu, lebo pre každé $n \in \mathbf{N}$ platí $|a_{2n-1} - a_{2n+1}| = 2.$



Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{3n^3-n^2}{2n^3+1}$.

Postupnosti - príklady na limity postupností

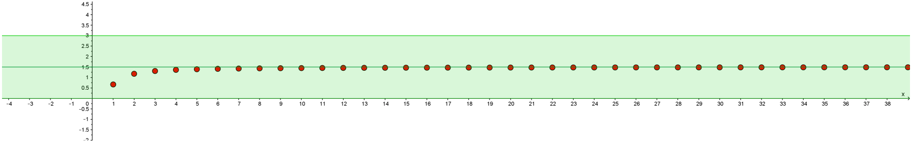
Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{3n^3-n^2}{2n^3+1}$.

Riešenie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n^2}{2n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^3}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{3}{2}.$$



Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $J = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 - 1}{51n^2 + 102n + 1998}$.

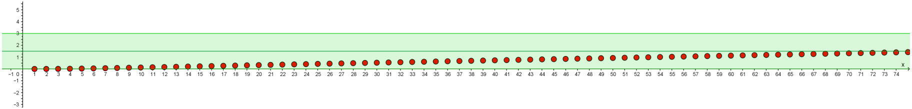
Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $J = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{51n^2+102n+1998}$.

Riešenie:

$$J = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{51n^2+102n+1998} = \infty.$$



Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $K = \lim_{n\to\infty} \log_4 \frac{n^3-1}{16n^3+102n+1998}$.

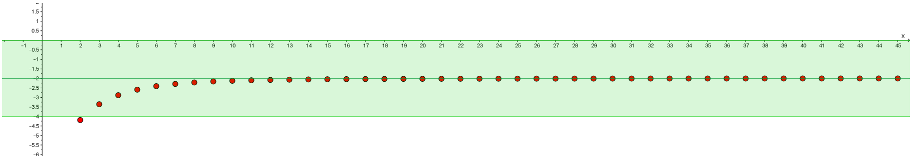
Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $K = \lim\limits_{n\to\infty} \log_4 \frac{n^3-1}{16n^3+102n+1998}$.

Riešenie:

$$K = \lim_{n\to\infty} \log_4 \frac{n^3-1}{16n^3+102n+1998} = \log_4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{16} = -2.$$



Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+4} - \sqrt{n-4}$.

Postupnosti - príklady na limity postupností

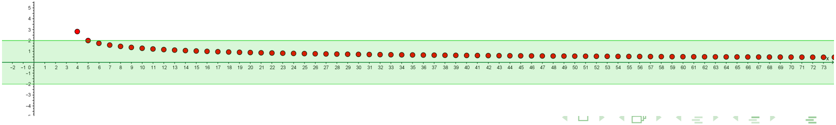
Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+4} - \sqrt{n-4}$.

Riešenie:

Výraz $\sqrt{n+4} - \sqrt{n-4}$ je typu $\infty - \infty$, preto ho upravíme pomocou násobenia číslom $\frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n-4}}$ rovným 1 a potom počítame

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n-4}).(\sqrt{n+4} + \sqrt{n-4})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n-4}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+4-n+4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n-4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n-4}} = 0.
\end{aligned}
$$



Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $M = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$.

Postupnosti - príklady na limity postupností

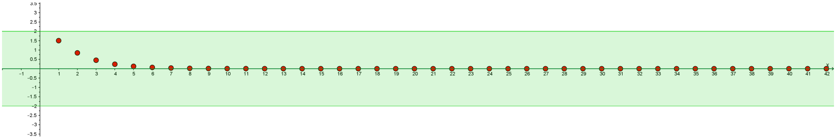
Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $M = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$.

Riešenie:

Taktikou pri riešení limty tohoto typu je previesť výraz na typ $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$, ktorého limita je rovná e, ak t je ľubovoľná premenná blížiaca sa k ∞.

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = \\ &= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$



Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

Vypočítajte limitu postupnosti $O = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$.

Postupnosti - príklady na limity postupností

Príklad

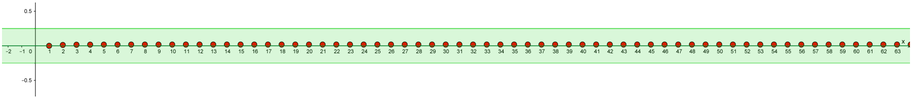
Vypočítajte limitu postupnosti $O = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade.

$$O = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}\frac{4n}{n+1}} = e^{-\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}} = e^{-4}.$$



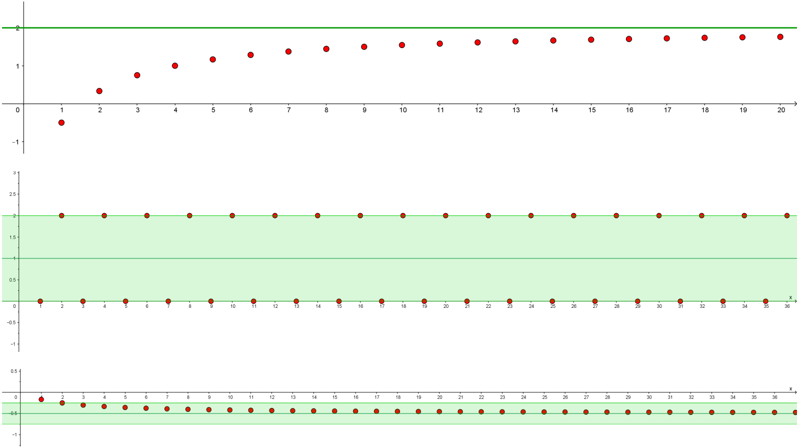
Postupnosti - príklady

Príklad

Vyriešte príklady:

1) Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2$, a nájdite príslušné n_0, ak $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.
2) Nájdite n-tý člen postupnosti $0.9, 0.99, 0.999, \ldots$ a vypočítajte jej limitu.
3) Zistite, či sú postupnosti konvergentné:
   a) $1 + \cos(n\pi)_{n=1}^{\infty}$
   b) $\left\{ \frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Postupnosti - príklady



Obr.: Znázornenie postupností z Pr.1, Pr.3 a), Pr.3 b)

Ďakujem za pozornosť.