Reálna funkcia jednej reálnej premennej

Elementárne funkcie

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

22 September 2022

Elementárne funkcie

Elementárnymi funkciami budeme nazývať

- polynomické,
- racionálne,
- mocninové,
- exponenciálne,
- logaritmické,
- goniometrické,
- cyklometrické,
- hyperbolické,
- hyperbolometrické,

a všetky funkcie, ktoré z týchto funkcií vzniknú ich súčtom, súčinom, rozdielom, podielom a zložením.

Polynomické funkcie

Polynomické funkcie

Definícia

Funkcia

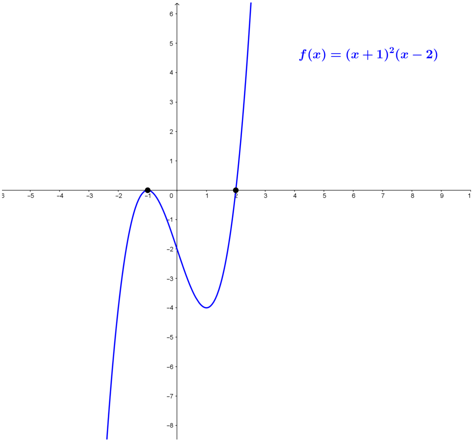
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbf{R}$$

pre $a_n \neq 0$*, sa nazýva* **polynóm (mnohočlen)** n**-tého stupňa**. *Reálne čísla* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sa nazývajú* **koeficienty polynómu** *a* n *je* **stupeň polynómu**. *Koeficient* a_n *sa nazýva* **vedúci koeficient mnohočlena**.

Veta

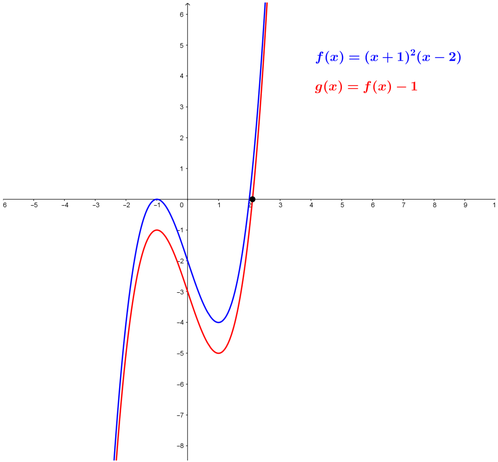
Nech P *je polynóm* n*-tého stupňa. Hodnotu* x_0 *nazveme* **koreňom polynómu** P_n*, ak* $P(x_0) = 0$*. Ak* x_0 *je koreňom polynómu* P*, tak výraz* $(x - x_0)$ *nazveme koreňovým činiteľom.*

Polynomické funkcie



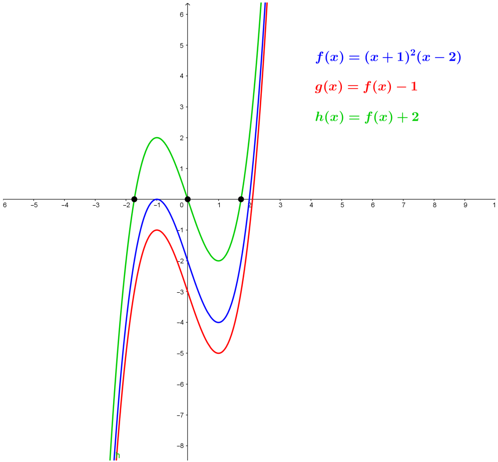
Obr.: Funkcia $f(x) = (x+1)^2(x-2)$ má 2 reálne korene, pričom -1 je dvojnásobný koreň

Polynomické funkcie



Obr.: Funkcia $g(x) = f(x) - 1$ má 1 reálny koreň

Polynomické funkcie



Obr.: Funkcia $h(x) = f(x) + 2$ má 3 rôzne reálne korene

Polynomické funkcie

Lemma

Nech P je polynóm n-tého stupňa. Potom P má najviac n reálnych koreňov. Ak n je nepárne číslo, tak P má aspoň jeden reálny koreň.

Veta

Nech P je polynóm n-tého stupňa, kde $n \geq 3$. Potom sa dá zapísať v tvare

$$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x),$$

kde P_1 a P_2 sú polynómy menšieho stupňa ako n.

Polynomické funkcie

Každý mnohočlen P možno jednoznačne vyjadriť **v tvare súčinu koreňových činiteľov**, t.j. súčinu

- vedúceho koeficientu
- všetkých výrazov typu $(x-r)^k$, kde r je k-násobným koreňom P
- všetkých výrazov typu $(x^2+px+q)^l$ vytvorených l-násobnými komplexne združenými koreňmi mnohočlena P.

Príklad

Rozložte polynóm $P(x)=x^4-1$ na súčin.

Riešenie:

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x+1)(x-1)(x^2+1).$

Polynomické funkcie

Príklad

Pomocou Hornerovej schémy rozložte dané polynómy na súčin polynómov prvého a druhého stupňa a nájdite všetky ich korene:

1. $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$
2. $x^3 + 9x^2 - x - 105 = 0$
3. $x^4 + x^3 - 10x^2 + 2x - 24 = 0$

Polynomické funkcie

Príklad

Pomocou Hornerovej schémy rozložte dané polynómy na súčin polynómov prvého a druhého stupňa a nájdite všetky ich korene:

1. $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)(x^2+1)$
2. $x^3 + 9x^2 - x - 105 = (x-3)(x+5)(x+7)$
3. $x^4 + x^3 - 10x^2 + 2x - 24 = (x-3)(x+4)(x^2+2)$

Polynomické funkcie

Vlastnosti polynomických funkcií sú vo všeobecnosti ťažko popísateľné, najčastejšie sa však stretneme s nasledujúcimi špeciálnymi prípadmi polynomických funkcií:

konštantná, lineárna, kvadratická.

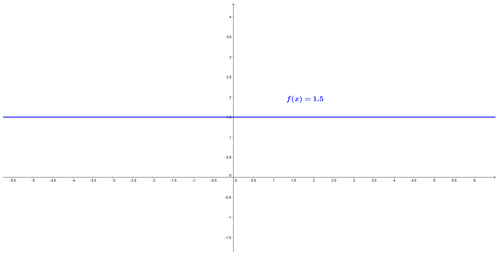
Polynomické funkcie - Konštantná funkcia

Definícia

Funkcia definovaná v **R** *rovnicou*

$$y = a_0$$

sa nazýva **konštantná funkcia**. *Grafom je priamka rovnobežná s osou* O_x.



Obr.: Konštantná funkcia

Polynomické funkcie - Lineárna funkcia

Definícia

Funkcia definovaná v **R** *rovnicou*

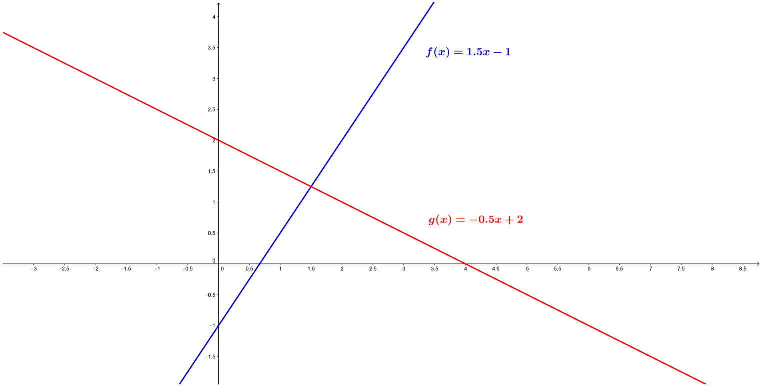
$$y = a_1 x + a_0, \quad a_1 \neq 0$$

sa nazýva **lineárna funkcia**, *a* a_1 *je jej smernica.*

Jej grafom je priamka rôznobežná s osou O_x, a os O_y pretína v bode $[0, a_0]$. Lineárna funkcia je

- rastúca, ak $a_1 > 0$
- klesajúca, ak $a_1 < 0$

Polynomické funkcie - Lineárna funkcia



Obr.: Lineárna funkcia

Polynomické funkcie - Kvadratická funkcia

Definícia

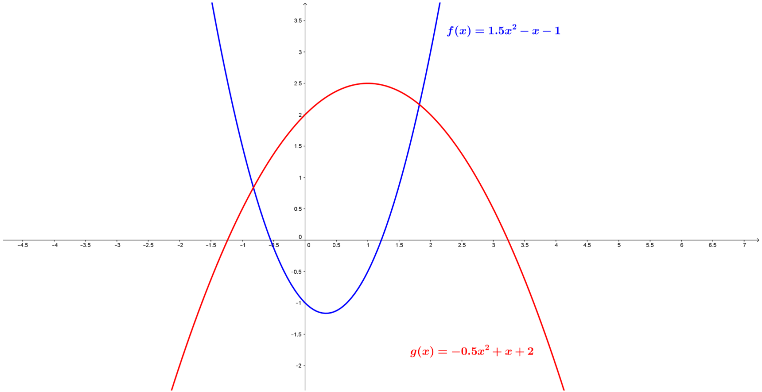
Funkcia definovaná v **R** *rovnicou*

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0$$

sa nazýva **kvadratická funkcia**.

- Jej grafom je parabola s osou rovnobežnou s osou O_y.
- Parabola je otvorená nahor ak $a_2 > 0$, a nadol ak $a_2 < 0$.
- Jej vrchol je v bode $\left[-\frac{a_1}{2a_2}, \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_2}\right]$.

Polynomické funkcie - Kvadratická funkcia



Obr.: Kvadratická funkcia

Racionálne funkcie

Racionálne (lomené) funkcie

Definícia

Nech P_1 *a* P_2 *sú polynómy stupňa* n_1*, resp.* n_2*. Potom funkciu*

$$f(x) = \frac{P_2(x)}{P_1(x)}$$

nazveme **racionálnou (alebo lomenou)**.

Prirodzený definičný obor:
$D(f) = R - \{\text{korene } P_1(x) = 0\}$.

Racionálne (lomené) funkcie

Príklad

Vydeľte polynóm polynómom:

1. $(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x + 1)$
2. $(x^5 + 1) : (x^2 + x + 1)$
3. $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 - x + 1)$

Racionálne (lomené) funkcie

Príklad

Vydeľte polynóm polynómom:

1. $(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x + 1) = x^3 - 2x^2 + x - 2$
2. $(x^5 + 1) : (x^2 + x + 1) = x^3 - x^2 + 1 - \frac{x}{x^2+x+1}$
3. $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 - x + 1) = x^2 + 2x + 2 + \frac{x-1}{x^2-x+1}$

Racionálne (lomené) funkcie

Príklad

Rozložte na parciálne zlomky:

1. $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$
2. $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^3-x^2}$
3. $h(x) = \frac{x^3+2x^2-x+4}{x^2+5x+6}$

Racionálne (lomené) funkcie

Príklad

Rozložte na parciálne zlomky:

1. $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1}$
2. $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$
3. $h(x) = \frac{x^3+2x^2-x+4}{x^2+5x+6} = x - 3 + \frac{2}{x+3} + \frac{6}{x+2}$

Pozn. Rozkladu na PZ sa podrobnejšie budeme venovať neskôr.

Racionálne funkcie - Lineárna lomená funkcia

Najdôležitejší špeciálny typ racionálnej funckie je lineárna lomená funkcia:

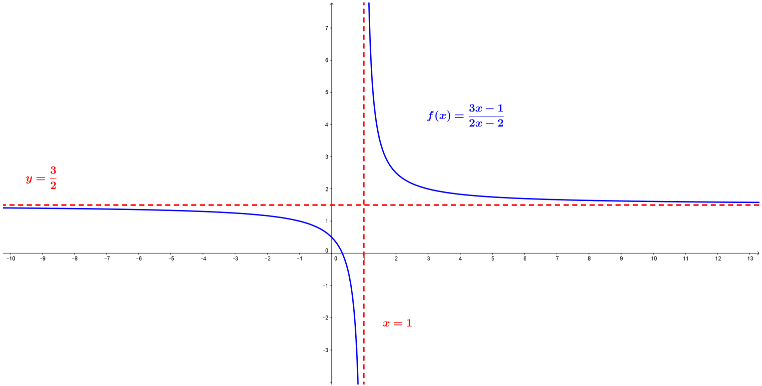
Definícia

Funkciu typu

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}$$

nazývame **lineárnou lomenou funkciou**. *Jej* $D(f) = \mathbf{R} - \{\frac{-d}{c}\}$ *a grafom je hyperbola s asymptotami* $y = \frac{a}{c}$ *a* $x = -\frac{d}{c}$.

Racionálne funkcie - Lineárna lomená funkcia

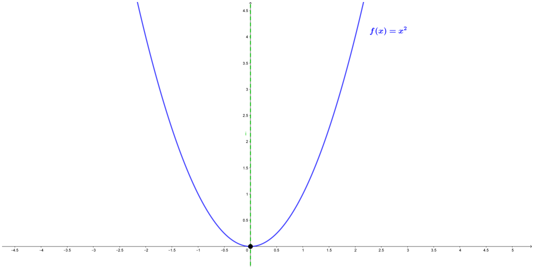


Obr.: Lineárna lomená funkcia

Mocninové funkcie

Mocninové funkcie

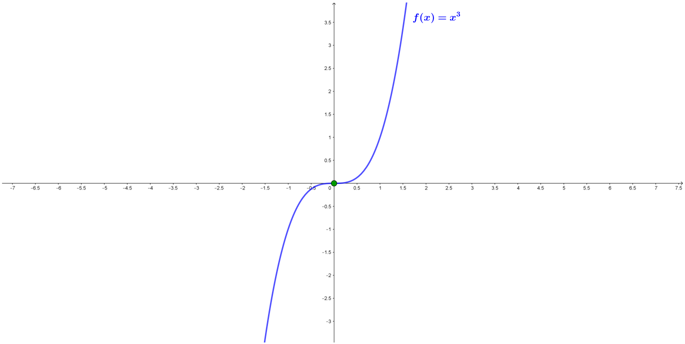
Mocninové funkcie (resp. aj mocninné funkcie) sú funkcie typu $f(x) = x^t$, kde $t \in \mathbf{R}$ je daná konštanta.



Obr.: a) Mocninová funkcia $f(x) = x^t$, keď konštanta t je kladné, párne číslo

$D(f) = \mathbf{R}$, funkcia je párna, klesajúca v $(-\infty, 0)$, rastúca v $(0, \infty)$.

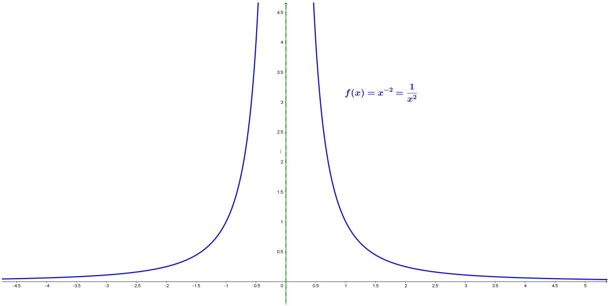
Mocninové funkcie



Obr.: b) Mocninová funkcia $f(x) = x^t$, keď konštanta t je kladné, nepárne číslo

$D(f) = \mathbf{R}$, funkcia je nepárna, rastúca v celom $D(f)$.

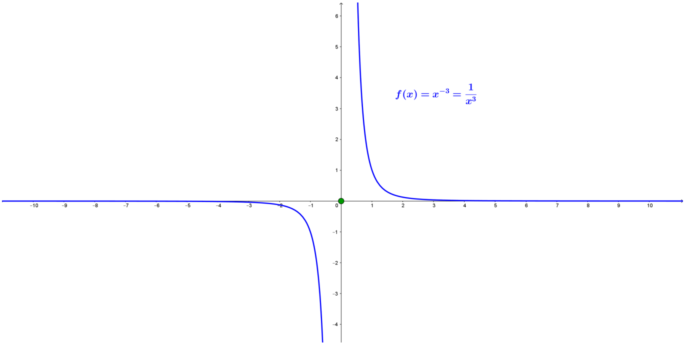
Mocninové funkcie



Obr.: c) Mocninová funkcia $f(x) = x^t$, keď konštanta $t = -n$ kde n je prirodzené, párne číslo

$D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$, funkcia f je párna, rastúca v $(-\infty, 0)$ a klesajúca v $(0, \infty)$.

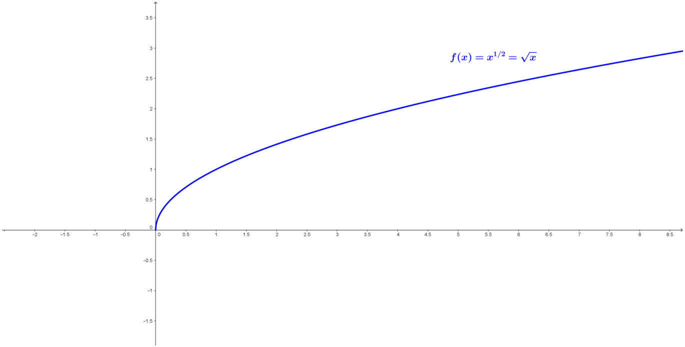
Mocninové funkcie



Obr.: d) Mocninová funkcia $f(x) = x^t$, keď konštanta $t = -n$ kde n je prirodzené, nepárne číslo

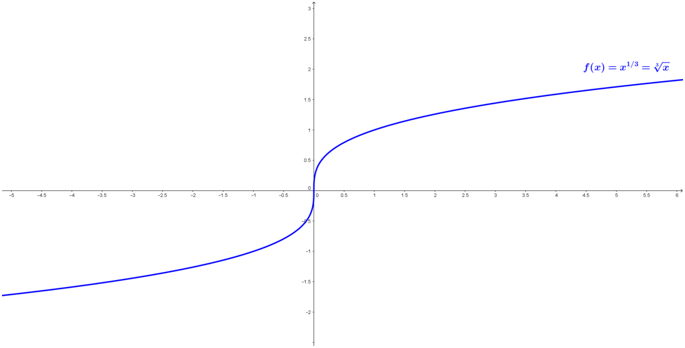
$D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$, funkcia f je nepárna, klesajúca.

Mocninové funkcie



Obr.: e) Konštanta $t = \frac{1}{s}$, kde s je párne prirodzené číslo

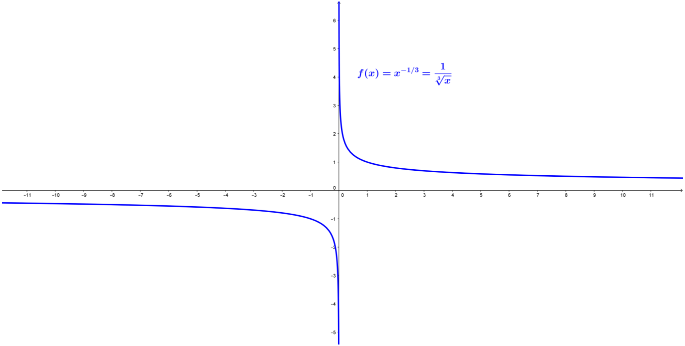
$D(f) = \langle 0, \infty)$, funkcia f je rastúca.



Obr.: f) Konštanta $t = \frac{1}{s}$, kde s je nepárne prirodzené číslo

Funkcia f je rastúca v $D(f) = \mathbf{R}$.

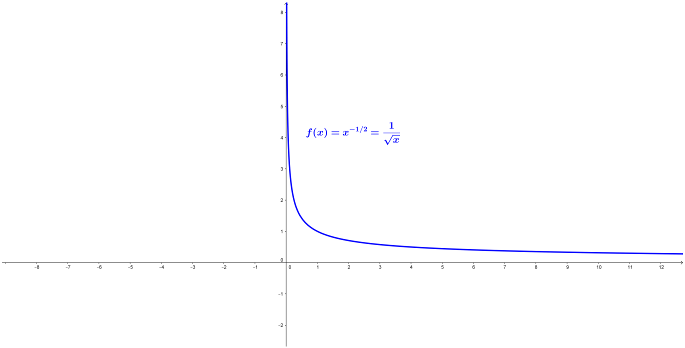
Mocninové funkcie



Obr.: g) Konštanta $t = \frac{1}{s}$, kde s je záporné, nepárne číslo

Funkcia f je klesajúca v $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$.

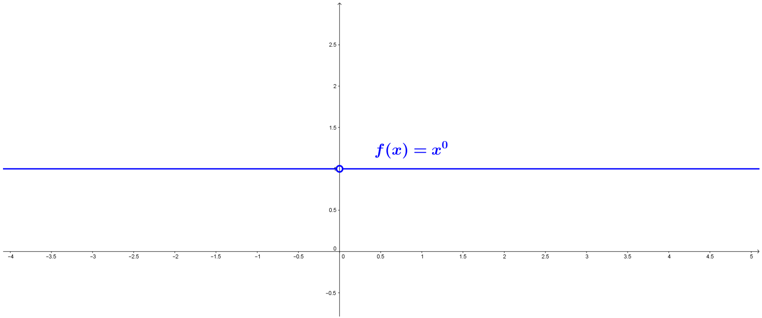
Mocninové funkcie



Obr.: h) Konštanta $t = \frac{1}{s}$, kde s je záporné, párne číslo

Funkcia f je klesajúca v $D(f) = (0, \infty)$.

Mocninové funkcie



Obr.: g) Konštanta $t = 0$

Pozor $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$ (lebo mocninová funkcia s exponentom $t = 0$ je definovaná iba pre nenulové čísla). Potom $f(x) = 1$.

Mocninové funkcie - zhrnutie

Mocninová funkcia: $y = x^t$, $t \in \mathbf{R}$

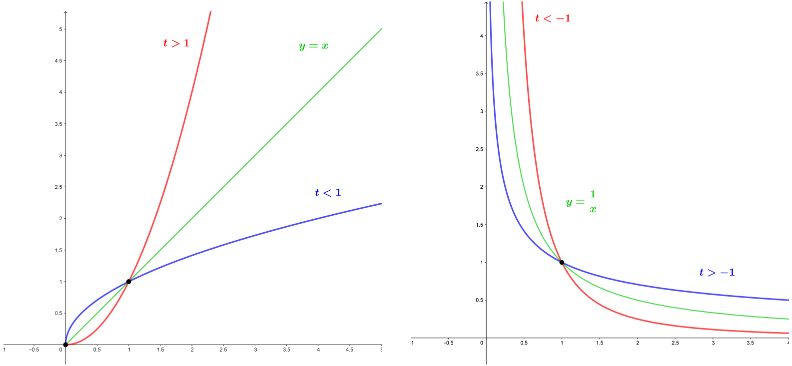
- pre $t \in \mathbf{N}$ je polynómom
- pre $t \in \mathbf{Z}^-$ je racionálnou lomenou funkciou

Prirodzený $D(f)$

- Ak $t > 0$, $\langle 0, \infty)$ pre $t \notin \mathbf{N}$, $\quad \mathbf{R}$ pre $t \in \mathbf{N}$
- Ak $t < 0$, $(0, \infty)$ pre $t \notin \mathbf{Z}^-$, $\quad \mathbf{R} - \{0\}$ pre $t \in \mathbf{Z}^-$

Inverzná funkcia k $y = x^t$, $t \neq 0$ je mocninová funkcia $y = x^{\frac{1}{t}}$.

Mocninové funkcie - zhrnutie

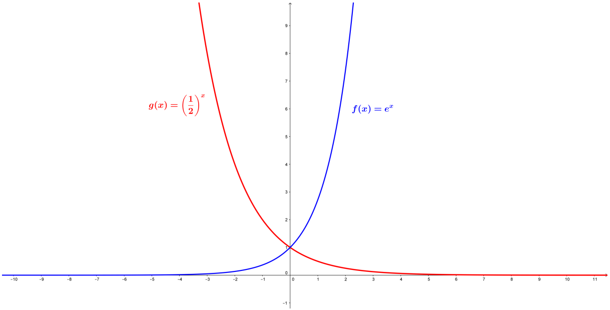


Obr.: Mocninová funkcia - zhrnutie: a) $t > 0$, b) $t < 0$

Exponenciálne a logaritmické funkcie

Exponenciálne a logaritmické funkcie

Exponenciálna funkcia je funkcia $f(x) = a^x$, kde $a > 0$ je daná konštanta. Číslo **a** sa volá **základ exponenciálnej funkcie**.



Obr.: Exponenciálna funkcia

Exponenciálne a logaritmické funkcie

- **Definičný obor** exponenciálnej funkcie je $D(a^x) = \mathbf{R}$.
- **Obor hodnôt** je

$$H(a^x) = \begin{cases} (0, \infty), & \text{ak } a \neq 1, \\ 1, & \text{ak } a = 1. \end{cases}$$

- Pre $a > 1$ je $f(x) = a^x$ **rýdzo rastúca** funkcia, pre $a \in (0, 1)$ je $f(x) = a^x$ **rýdzo klesajúca**.
- Graf (**exponenciála**) prechádza bodmi $[0, 1]$, $[1, a]$, $(a^0 = 1, a^1 = a)$.
- **Grafy** funkcií $y = a^x$ a $y = a^{-x}$ sú **symetrické podľa osi** y.
- Najdôležitejšia je funkcia $y = e^x$ so základom e (Eulerovo číslo).

Exponenciálne a logaritmické funkcie

- Základné pravidlá **pre prácu s exponenciálnymi funkciami**:

$$
\begin{aligned}
a^{x_1+x_2} &= a^{x_1} \cdot a^{x_2}, \\
\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} &= a^{x_1-x_2}, \qquad a \neq 0 \\
a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x, \\
(a^x)^z &= a^{x \cdot z}
\end{aligned}
$$

Exponenciálne a logaritmické funkcie

- Inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii je **logaritmus čísla x so základom a (pri základe a)**,

$$f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Teda

$$\log_a x = z \quad \text{práve vtedy, keď} \quad x = a^z.$$

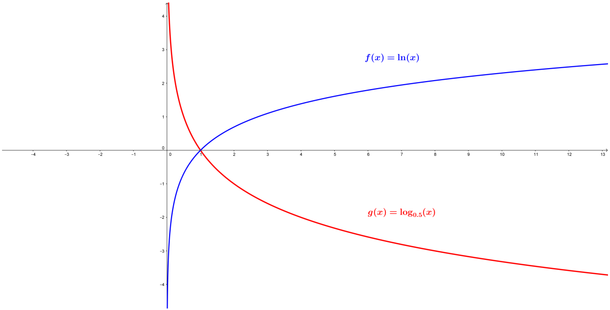
- Z toho dostaneme dôležitý vzťah pre $a > 0$, $a \neq 1$

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \quad \text{pre } x > 0 \\ \log_a (a^x) &= x \quad \text{pre } x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

- Definičný obor logaritmu je $D(\log_a) = (0, \infty)$ a obor hodnôt je $H(\log_a) = \mathbf{R}$.

Exponenciálne a logaritmické funkcie

- Funkcia je rýdzo monotónna (rastúca pre $a > 1$, klesajúca pre $a < 1$).
- Graf (**logaritmická krivka**) prechádza bodmi $[1, 0]$, $[a, 1]$.



Obr.: Logaritmická funkcia

- Základné pravidlá **pre prácu s logaritmickými funkciami**:

$$\begin{aligned}
\log_a(x \cdot z) &= \log_a x + \log_a z, \\
\log_a\left(\frac{x}{z}\right) &= \log_a x - \log_a z, \\
\log_a x^z &= z \cdot \log_a x, \\
\log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \left(\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\right)
\end{aligned}$$

Exponenciálne a logaritmické funkcie

- **Základ prirodzeného logaritmu** $(\log_e x = \ln x)$ je $e \doteq 2,718$.
- **Dekadický logaritmus** (t.j. logaritmus pri základe 10) označujeme $\log_{10} x = \log x$.
- **Základné hodnoty** exponenciálnych a logaritmických funkcií:

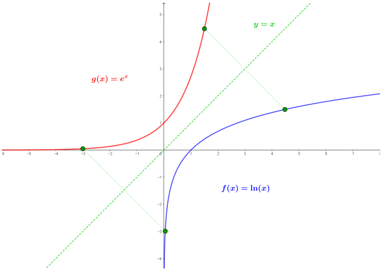
$$
\begin{array}{ll}
a^0 = 1 & \log_a 1 = 0 \\
a^1 = a & \log_a a = 1 \\
 & \log_a a^n = n
\end{array}
$$

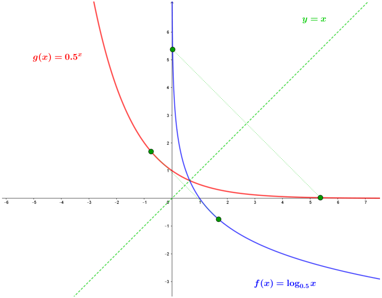
Exponenciálne a logaritmické funkcie

- Grafy funkcií:

$$\begin{aligned} y &= \log_a x, \quad x > 0 \\ y &= a^x, \quad x \in R \end{aligned}$$

sú **osovo súmerné podľa priamky** $y = x$.





Goniometrické funkcie

Goniometrické funkcie

- **Hodnoty goniometrických** (trigonometrických) **funkcií** na intervale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sú dané **pomerom dĺžok dvojice strán pravouhlého trojuholníka**.
- Takýchto (usporiadaných) dvojíc môžeme vybrať 6, teda aj **goniometrických funkcií je 6**.
- Konkrétne, keď máme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C a so štandardným označením strán a, b, c, tak

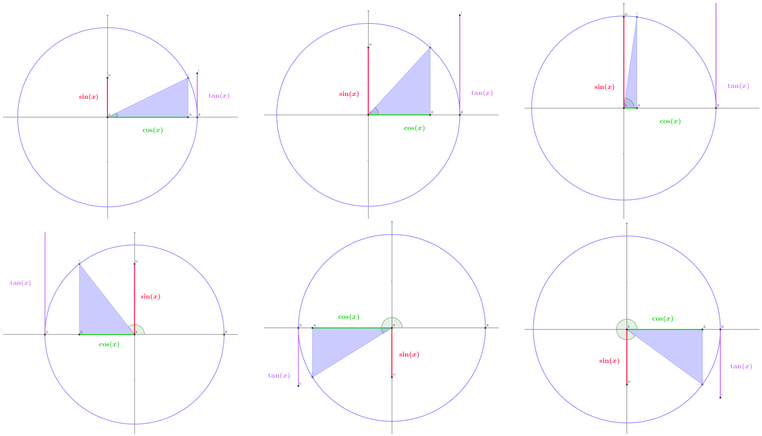
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \csc\alpha = \frac{c}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

- Funkcie sa volajú postupne **sínus, kosekans, kosínus, sekans, tangens, kotangens**.

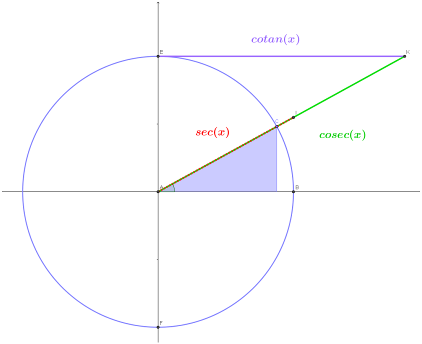
Goniometrické funkcie

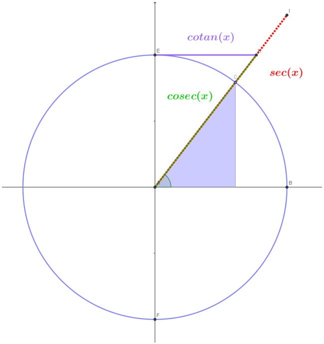
Goniometrické funkcie môžeme definovať aj **pomocou jednotkovej kružnice**:



Obr.: Jednotková kružnica - $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$

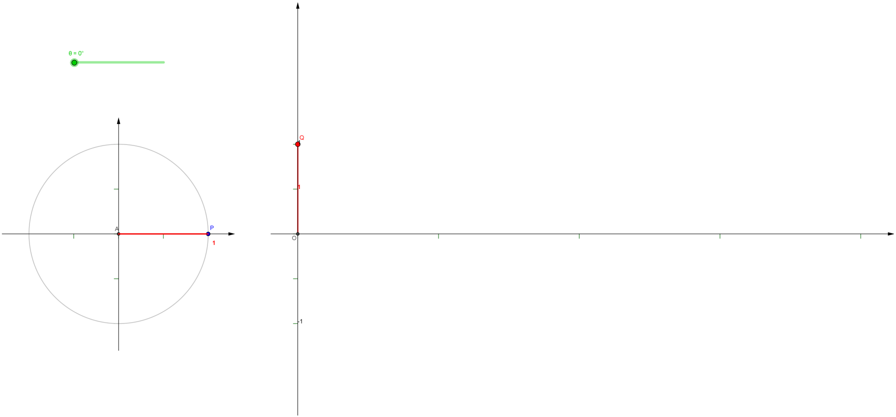
Goniometrické funkcie





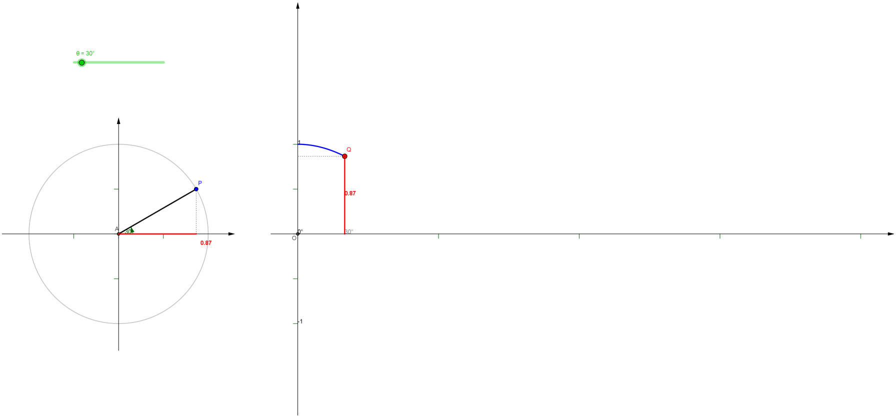
Obr.: Jednotková kružnica - $\csc(x), \sec(x), \operatorname{cotg}(x)$

Goniometrické funkcie



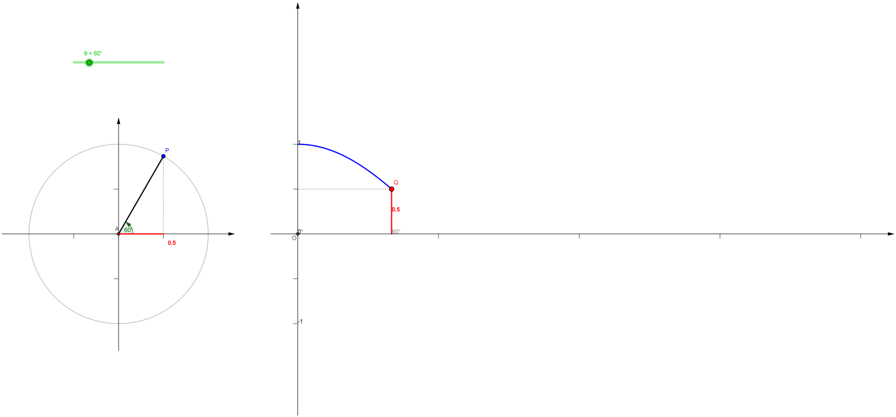
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



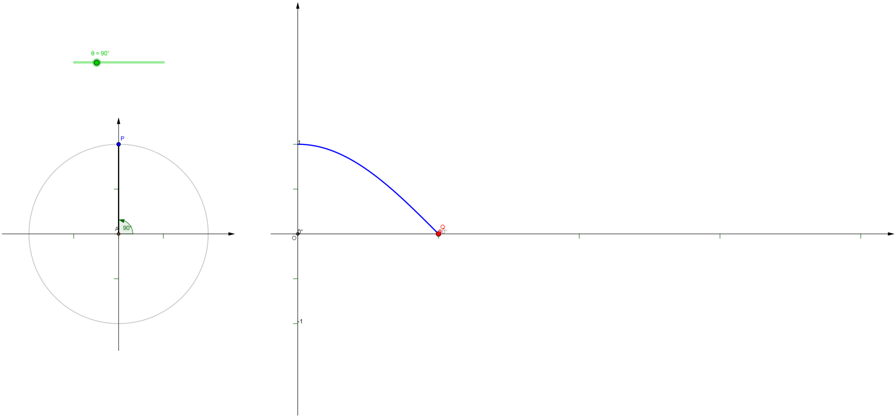
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



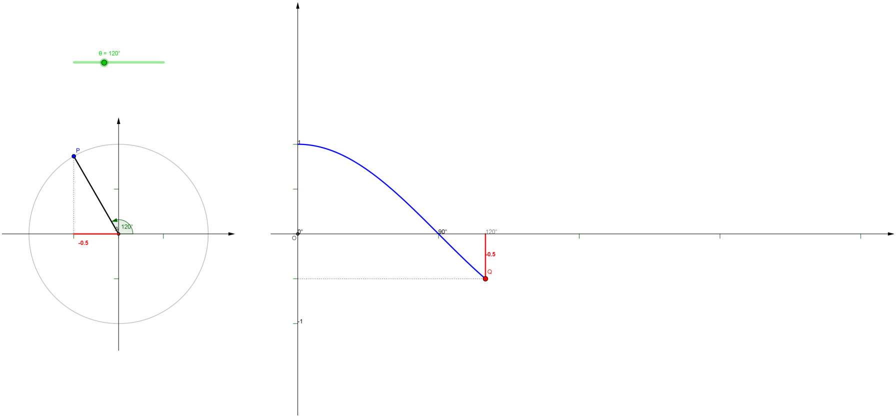
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



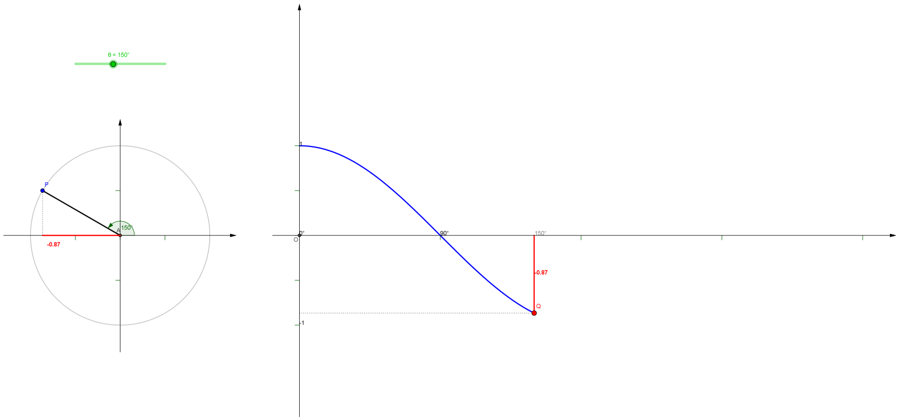
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



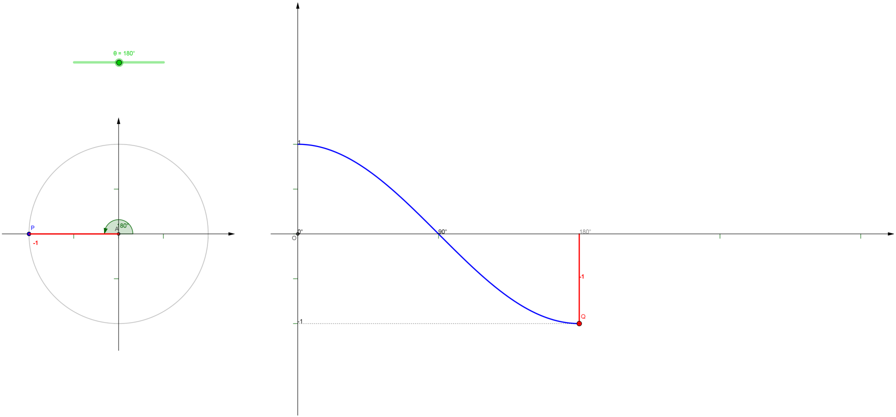
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



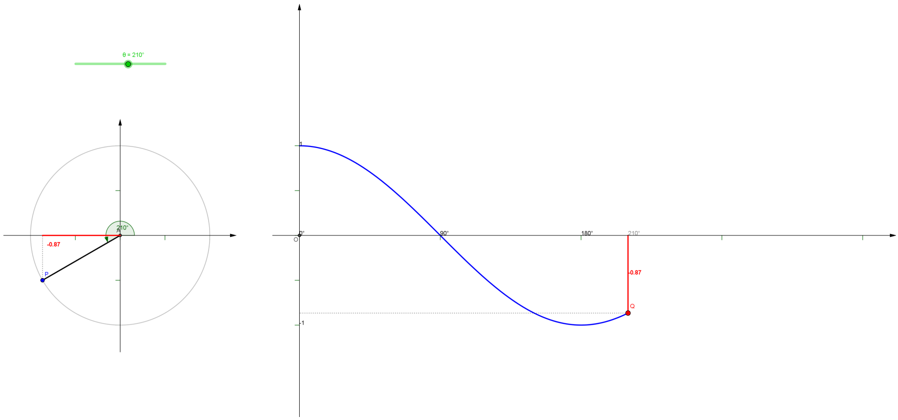
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



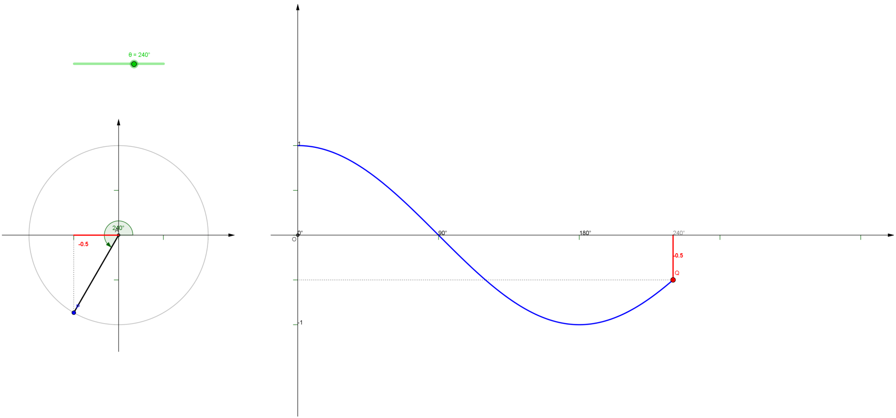
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



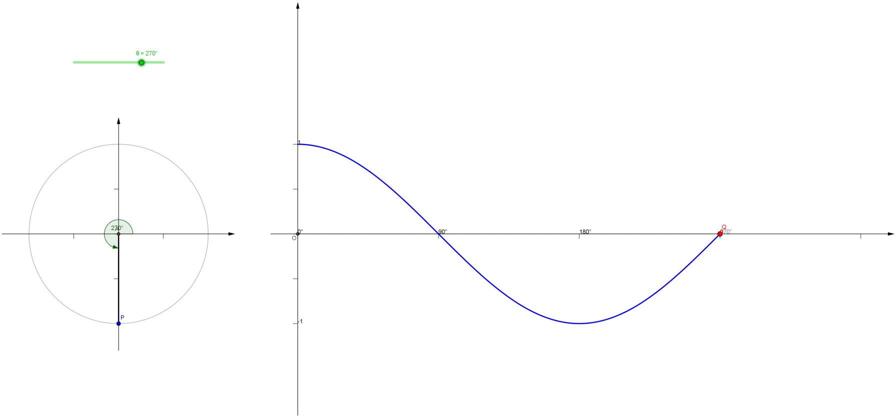
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



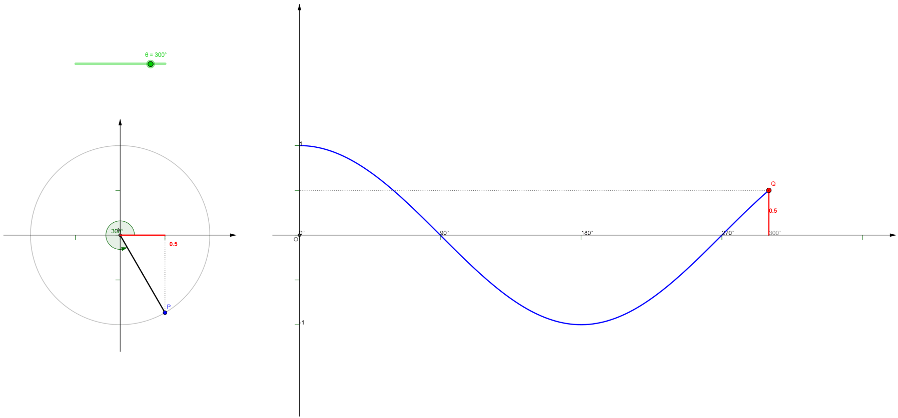
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



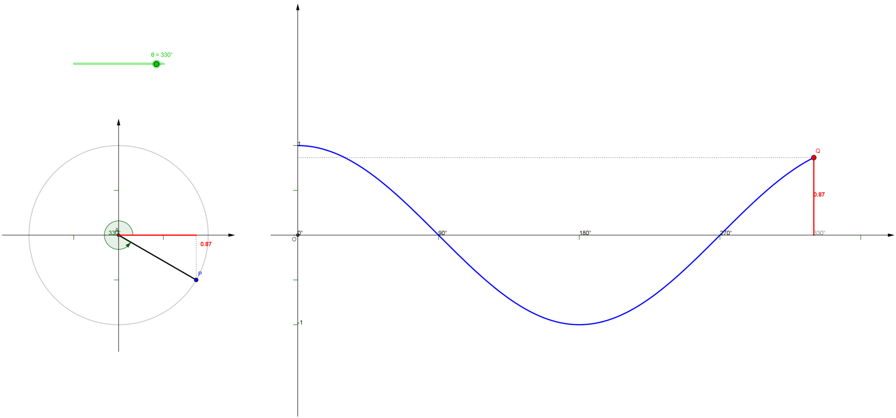
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie



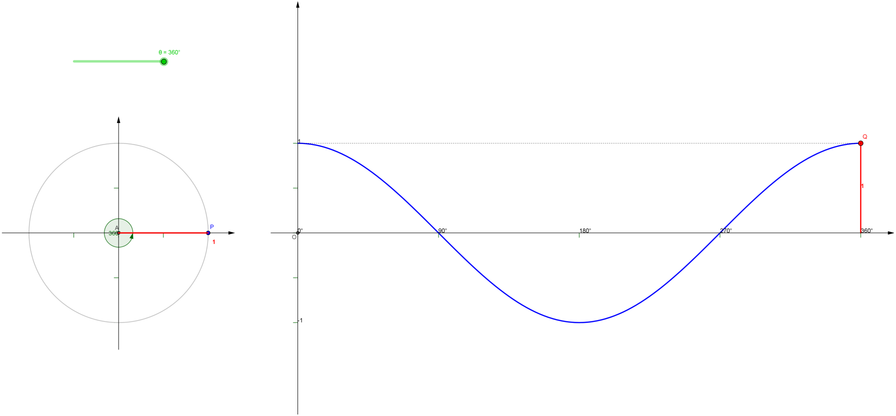
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

Goniometrické funkcie

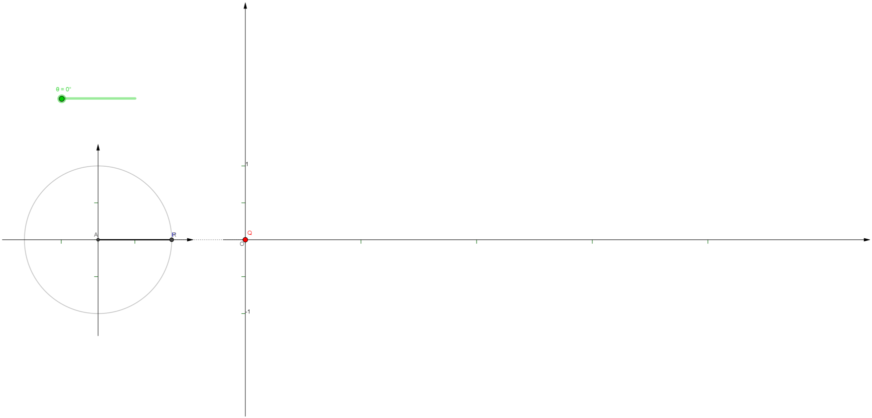


Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

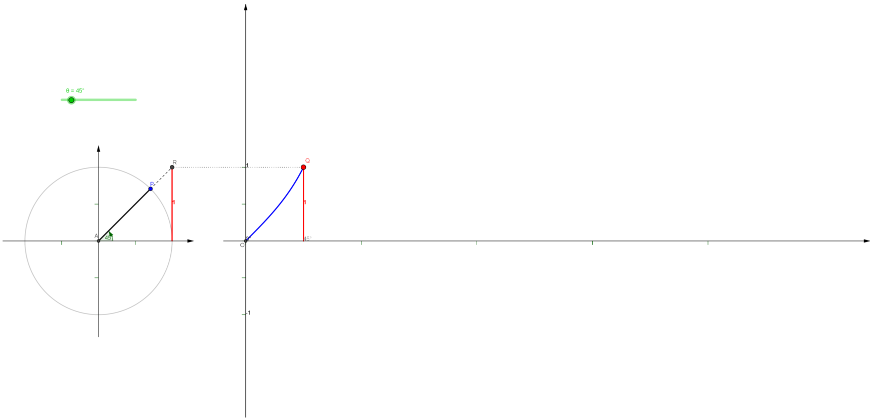
Goniometrické funkcie



Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\cos(x)$

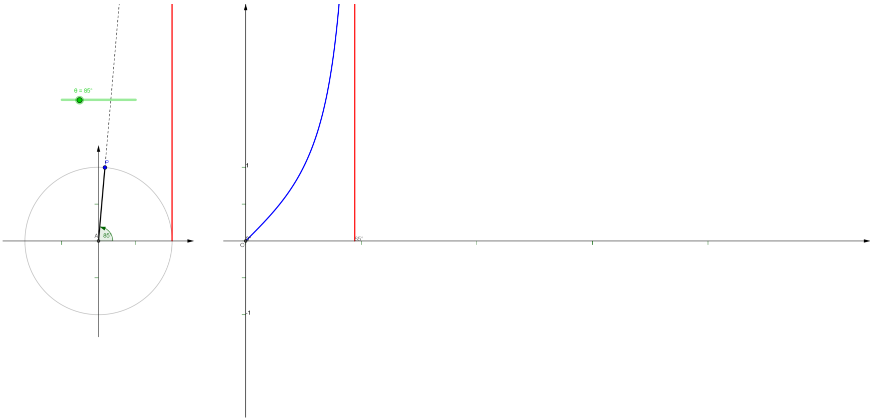


Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

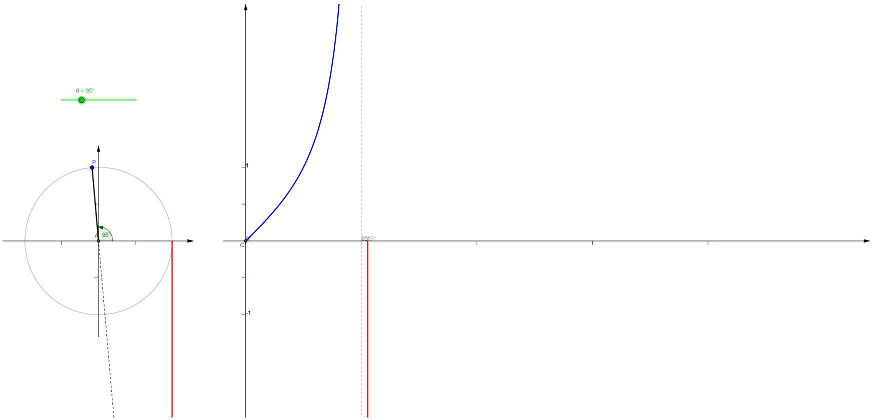


Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie

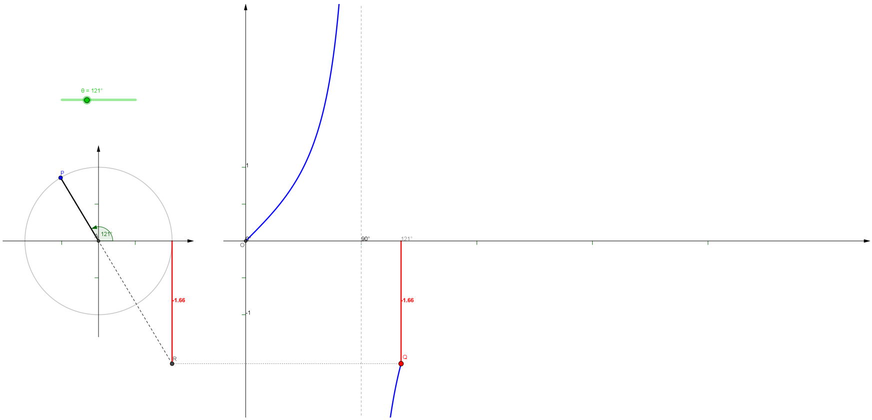


Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$



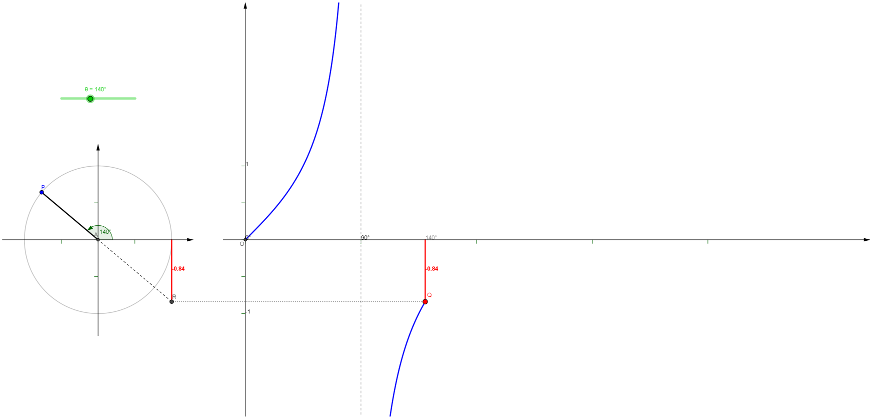
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie



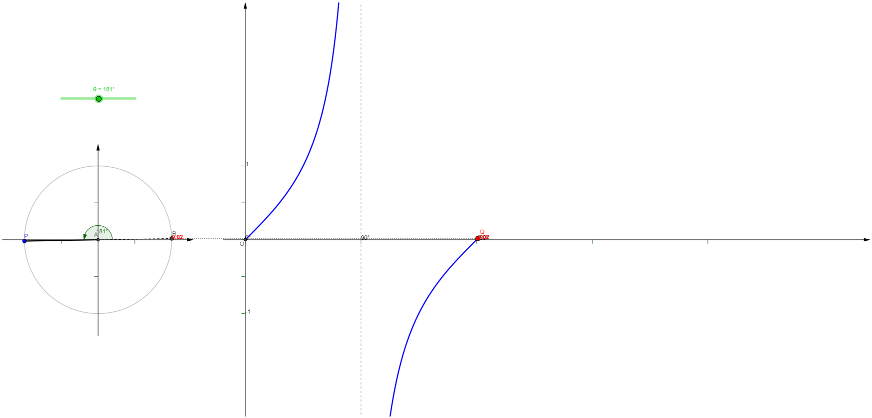
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie



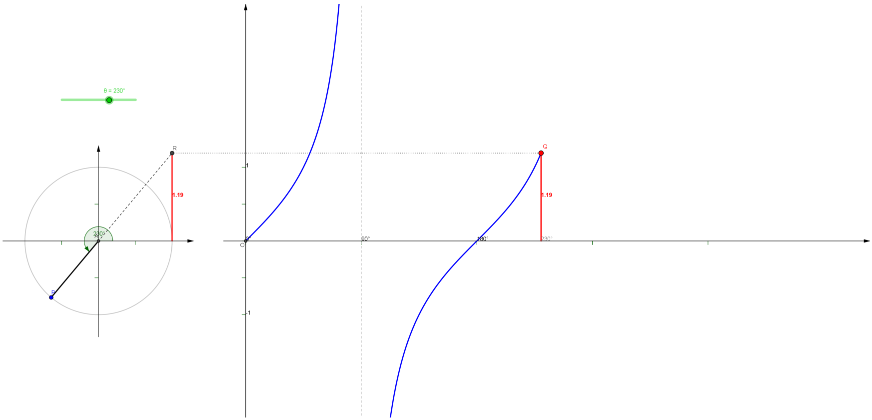
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie



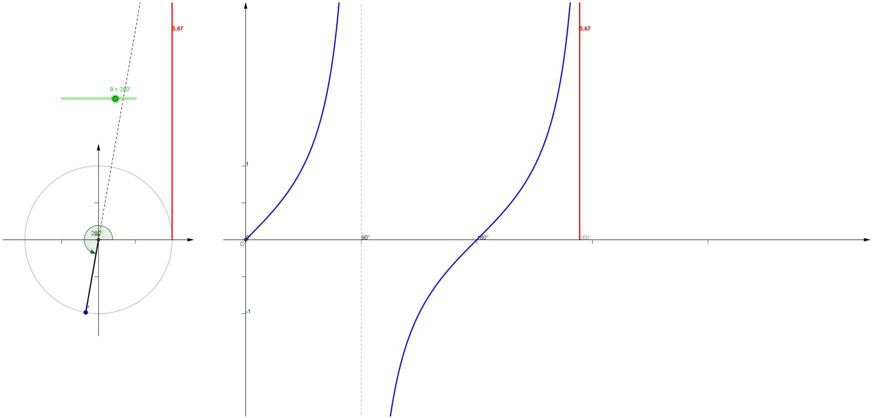
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie



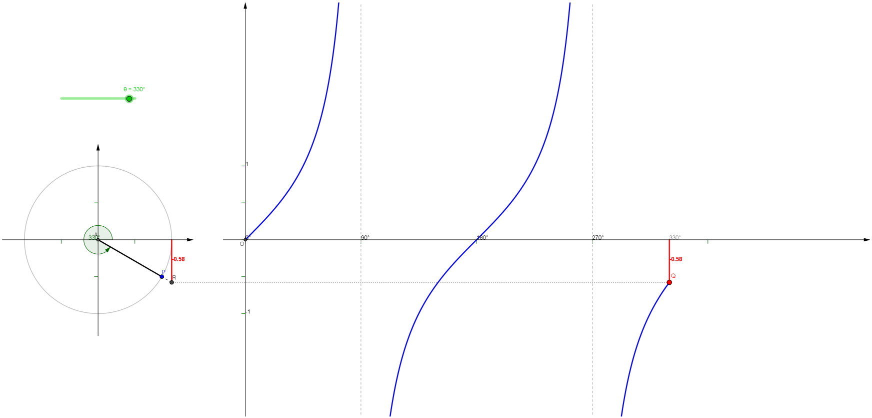
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie



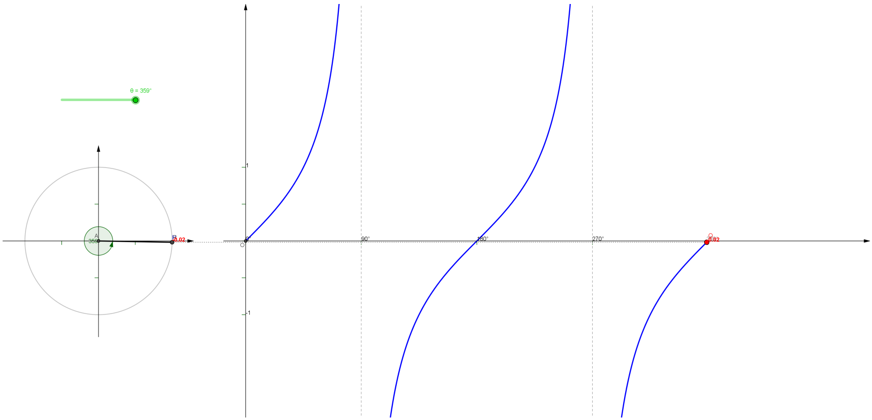
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie



Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie



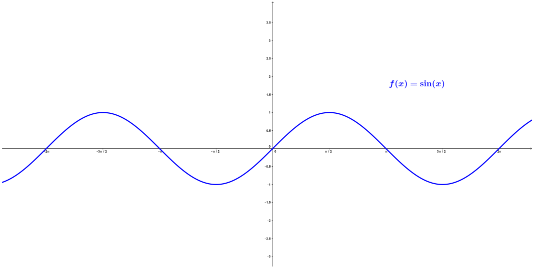
Obr.: Postupné znázornenie funkcie $\tan(x)$

Goniometrické funkcie

Zvyšné funkcie si môžete vykresliť rovnakým spôsobom doma :-)

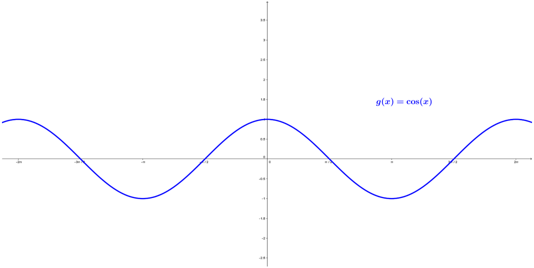
Goniometrické funkcie

- $D(\sin(x)) = \mathbf{R}, H(\sin(x)) = [-1, 1]$,
- **periodická** s periódou 2π, **nepárna**,
- **klesajúca** na $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right)$,
- **rastúca** na $\left\langle \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$,
- **nulové body** sú $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



Obr.: Goniometrické funkcie - $\sin(x)$. Grafom je **sínusoida**.

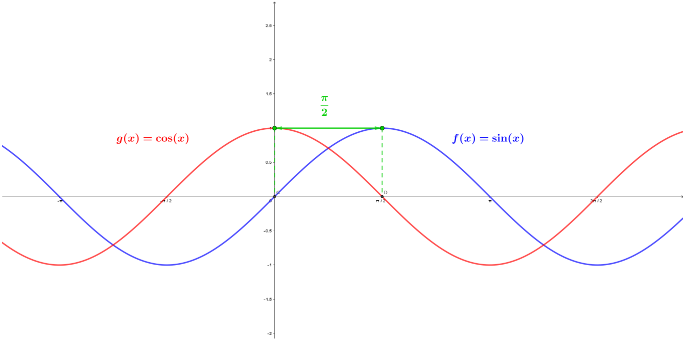
- $D(\cos(x)) = \mathbf{R}, H(\cos(x)) = [-1, 1]$,
- **periodická** s periódou 2π, **párna**,
- **klesajúca** na $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$,
- **rastúca** na $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$,
- **nulové body** sú $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



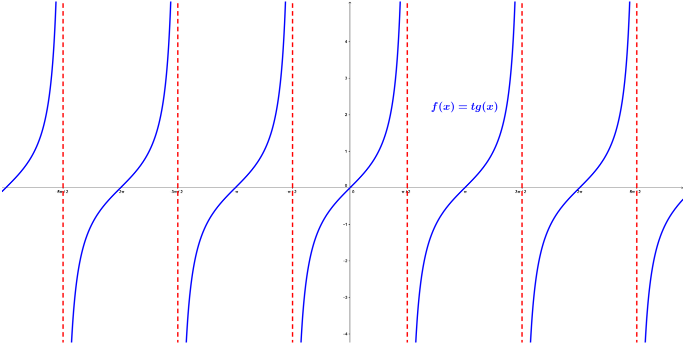
Obr.: Goniometrické funkcie - $\cos(x)$. Grafom je **kosínusoida**.

Goniometrické funkcie

- $\sin(x \pm \pi) = -\sin x, \qquad \cos(x \pm \pi) = -\cos x$
- $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos x, \qquad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin x$



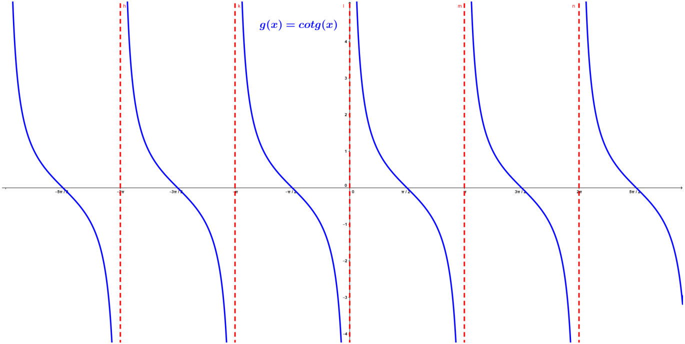
Goniometrické funkcie



Obr.: Goniometrické funkcie - $\tan(x)$. Grafom je **tangenta**.

$D(\tan(x)) = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $H(\tan(x)) = \mathbf{R}$, perióda je π, nepárna, rastúca na $\left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, nulové body $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

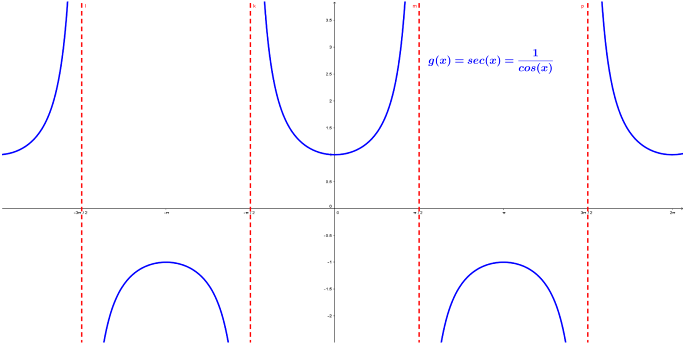
Goniometrické funkcie



Obr.: Goniometrické funkcie - $\operatorname{cotg}(x)$. Grafom je **cotangenta**

$D(\operatorname{cotg}(x)) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $H(\operatorname{cotg}(x)) = \mathbf{R}$, perióda je π, nepárna, klesajúca na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, nulové body $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

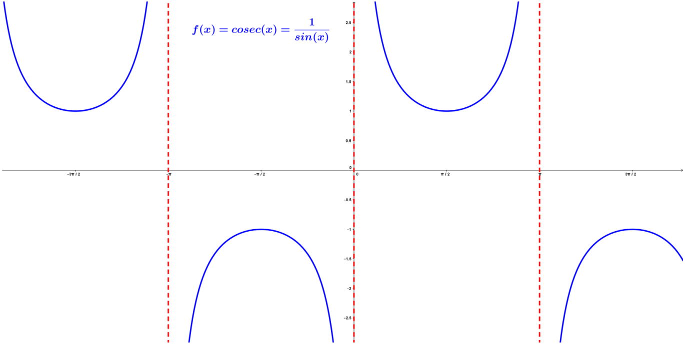
Goniometrické funkcie



Obr.: Goniometrické funkcie - $\sec(x)$

$D(\sec(x)) = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$, $H(\sec(x)) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, perióda je 2π, funkcia je párna.

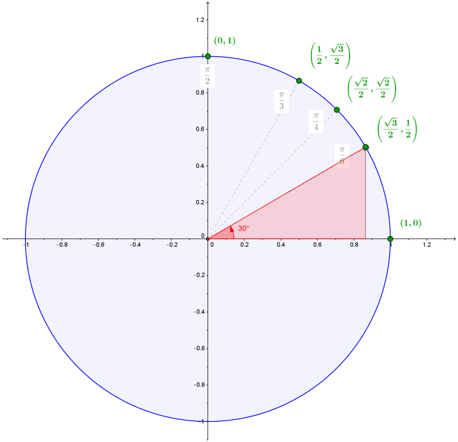
Goniometrické funkcie



Obr.: Goniometrické funkcie - $\csc(x)$

$D(\csc(x)) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in Z\}$, $H(\csc(x)) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, perióda je 2π, funkcia je nepárna.

Goniometrické funkcie



Obr.: Vybrané hodnoty goniometrických funkcií znázornené na jednotkovej kružnici

Goniometrické funkcie

Tabuľka: Vybrané hodnoty goniometrických funkcií - ľahko zapamätovateľná verzia

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0	-1	0
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1	0	1

Tabuľka: Vybrané hodnoty goniometrických funkcií - štandartná verzia

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Goniometrické funkcie - Užitočné vzťahy

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad x \in \mathbf{R}$.

Súčtové vzorce:

- $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,
- $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

Dvojnásobné uhly:

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad x \in \mathbf{R}$,
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \quad x \in \mathbf{R}$.

Polovičné uhly:

- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$,
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$.

Cyklometrické funkcie

Cyklometrické funkcie

- **Goniometrické funkcie** sú periodické, teda **nie sú prosté** a neexistujú k nim inverzné funkcie.
- Napriek tomu, niekedy potrebujeme zistiť, akému uhlu zodpovedá konkrétna hodnota funkcie.
- Postupuje sa tak, že **definičný obor danej funkcie zúžime na oblasť**, **v ktorej je táto funkcia prostá**.
- Zvyčajne sa ako tieto zúžené definičné obory berú tieto oblasti:

$$
\begin{aligned}
\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad & \sin, \qquad \left[-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \csc, \\
[0,\pi] \quad & \cos, \qquad \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right] \quad \sec, \\
\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad & \tan, \qquad (0,\pi) \quad \operatorname{cotg}.
\end{aligned}
$$

Cyklometrické funkcie

- Keď takýmto spôsobom zúžime definičné obory goniometrických funkcií, môžeme zaviesť k nim inverzné funkcie. Tieto sa volajú **cyklometrické**.

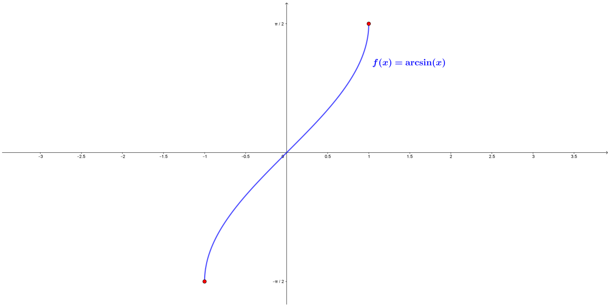
Definícia

Inverzná funkcia k zúženému sínusu sa volá **arkus sínus**, *ozn.* $\arcsin$.
$D(\arcsin) = [-1, 1]$, $H(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Inverzná funkcia k zúženému kosínusu sa volá **arkus kosínus**, *ozn.* $\arccos$.
$D(\arccos) = [-1, 1]$, $H(\arccos) = [0, \pi]$.
Inverzná funkcia k zúženému tangensu sa volá **arkus tangens**, *ozn.* arctg.
$D(\mathrm{arctg}) = \mathbf{R}$, $H(\mathrm{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Inverzná funkcia k zúženému kotangensu sa volá **arkus kotangens**, *ozn.* $\mathrm{arccotg}$.
$D(\mathrm{arccotg}) = \mathbf{R}$, $H(\mathrm{arccotg}) = (0, \pi)$.

Cyklometrické funkcie

Definícia

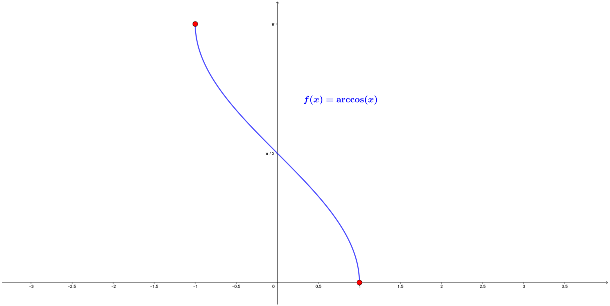
Inverzná funkcia k zúženému kosekansu sa volá **arkus kosekans**, *ozn.* arccsc.
$D(\mathrm{arccsc}) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $H(\mathrm{arccsc}) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Inverzná funkcia k zúženému sekansu sa volá **arkus sekans**, *ozn.* arcsec.
$D(\mathrm{arcsec}) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $H(\mathrm{arccsc}) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.



Obr.: Cyklometrické funkcie - $\arcsin(x)$

Nepárna, rastúca, nulový bod $\arcsin(0) = 0$,
$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

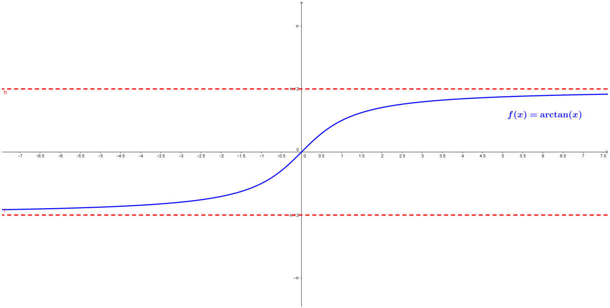
Cyklometrické funkcie



Obr.: Cyklometrické funkcie - $\arccos(x)$

Klesajúca, nulový bod $\arccos(1) = 0$,
$\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

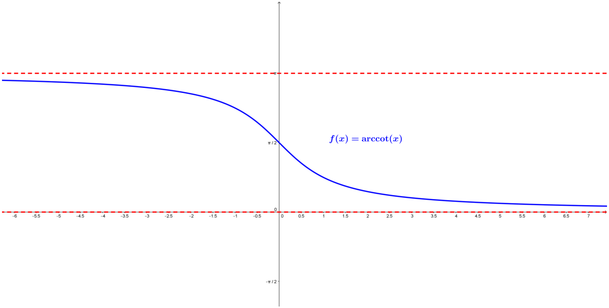
Cyklometrické funkcie



Obr.: Cyklometrické funkcie - $\arctan(x)$

Nepárna, rastúca, nulový bod $\arctan(0) = 0$

Cyklometrické funkcie



Obr.: Cyklometrické funkcie - $\mathrm{arccotg}(x)$

Klesajúca, nemá nulové body, $\mathrm{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$

Cyklometrické funkcie - Užitočné vzťahy

- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$
- $\arctan(x) + \mathrm{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$

Hyperbolické funkcie

NEBOJTE SA, TIETO FUNKCIE NESKÚŠAME ☺

Hyperbolické funkcie

Hyperbolické funkcie majú podobné vlastnosti a platia pre ne podobné vzťahy ako pre goniometrické funkcie.

Definícia

Hyperbolický sínus *je definovaný pre všetky* $x \in \mathbf{R}$ *predpisom*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Hyperbolický kosínus *je definovaný pre všetky* $x \in \mathbf{R}$ *predpisom*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Hyperbolické funkcie

Definícia

Hyperbolický tangens *je definovaný pre všetky* $x \in \mathbf{R}$ *predpisom*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

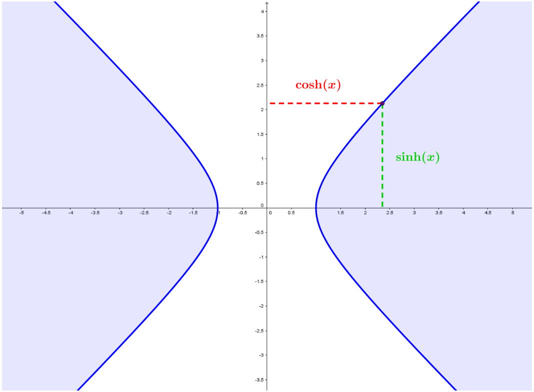
Hyperbolický kotangens *je definovaný pre všetky* $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$$

Základný vzťah medzi hyperbolickým sínusom a hyperbolickým kosínusom je:

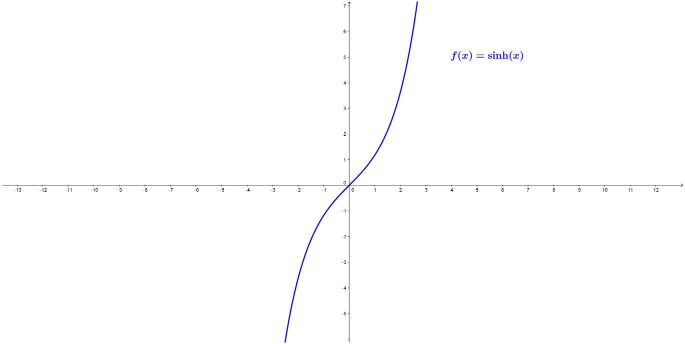
$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1.$$

Tento vzťah hovorí, že body $(\cosh(x), \sinh(x))$ ležia na hyperbole.



Obr.: Hyperbolické funkcie - $\sinh(x), \cosh(x)$

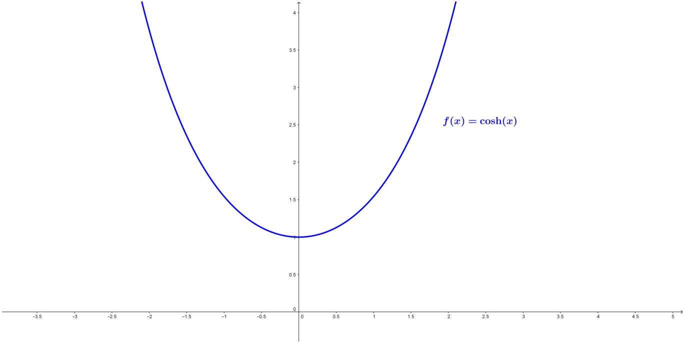
Hyperbolické funkcie



Obr.: Hyperbolické funkcie - $\sinh(x)$

Nepárna, rastúca, nulový bod $x = 0$.

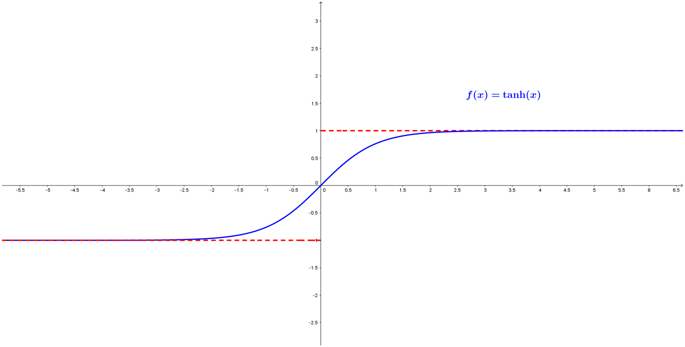
Hyperbolické funkcie



Obr.: Hyperbolické funkcie - $\cosh(x)$

Párna, klesajúca na $(-\infty, 0\rangle$, rastúca na $\langle 0, \infty)$.

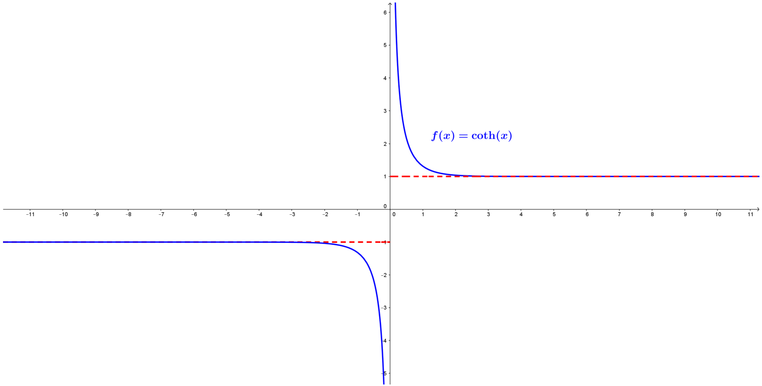
Hyperbolické funkcie



Obr.: Hyperbolické funkcie - $\tanh(x)$

Nepárna, rastúca, nulový bod $x = 0$.

Hyperbolické funkcie



Obr.: Hyperbolické funkcie - $\coth(x)$

Párna, klesajúca na $(-\infty, 0)$, klesajúca na $(0, \infty)$.

Hyperbolické funkcie

Základné vlastnosti hyperbolických funkcií

1. $\cosh$ je párna funkcia, $\sinh$, $\tanh$, $\coth$ sú nepárne funkcie,
2. $\cosh(x) > \sinh(x)$ pre každé $x \in \mathbf{R}$,
3. $H(\cosh) = [1, \infty)$, $H(\sinh) = \mathbf{R}$, $H(\tanh) \subset (-1, 1)$, $H(\coth) \subset (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Hyperbolické funkcie - Užitočné vzťahy

Súčtové vzorce:

- $\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh(x_1)\cosh(x_2) \pm \cosh(x_1)\sinh(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R},$
- $\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh(x_1)\cosh(x_2) \mp \sinh(x_1)\sinh(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$

Dvojnásobný argument:

- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x), \quad x \in \mathbf{R},$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x), \quad x \in \mathbf{R}.$

Polovičný argument:

- $\sinh^2(x) = \frac{1-\cosh(2x)}{2}, \quad x \in \mathbf{R},$
- $\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}, \quad x \in \mathbf{R}.$

Hyperbolometrické funkcie

A ANI TIETO ☺

Hyperbolometrické funkcie

Funkcie $\sinh(x)$ a $\tanh(x)$ sú bijektívne na **R**, $\coth(x)$ na **R** – $\{0\}$ a $\cosh(x)$ na $\langle 0, \infty)$. Inverzné funkcie k nim sa nazývajú **hyperbolometrické funkcie**.

Definícia

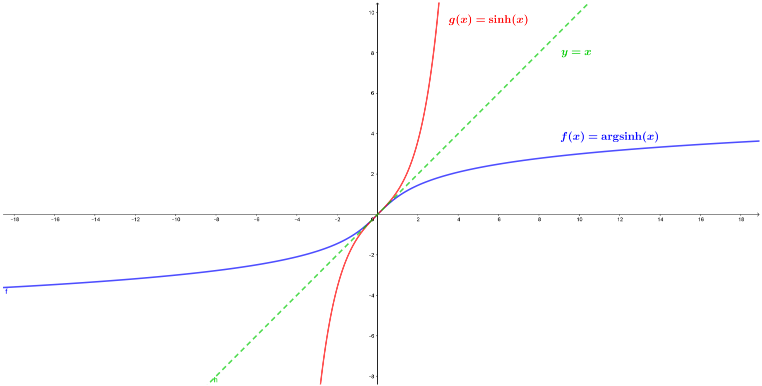
Argument sínusu hyperbolického *je definovaný pre všetky* $x \in$ **R** *predpisom* $\operatorname{argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{(1 + x^2)}\right)$

Argument kosínusu hyperbolického *je definovaný pre všetky* $x \in \langle 1, \infty)$ *predpisom* $\operatorname{argcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{(1 - x^2)}\right)$

Argument tangensu hyperbolického *je definovaný pre všetky* $x \in (-1, 1)$ *predpisom* $\operatorname{argtgh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Argument cotangensu hyperbolického *je definovaný pre všetky* $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ *predpisom* $\operatorname{argcotgh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

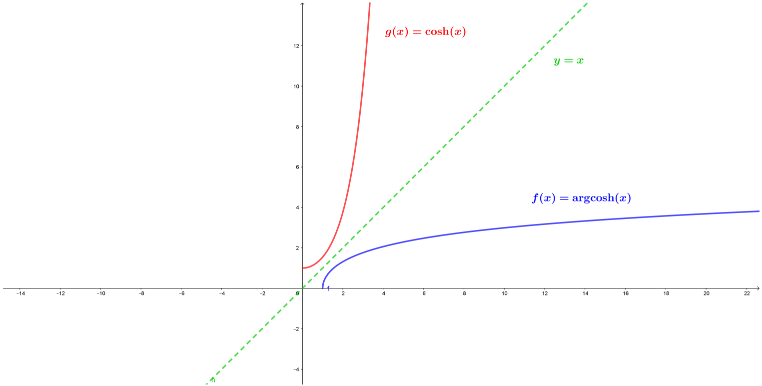
Hyperbolometrické funkcie



Obr.: Hyperbolometrické funkcie - $\text{argsinh}(x)$

Nepárna, rastúca, nulový bod je $\text{argsinh}(0) = 0$.

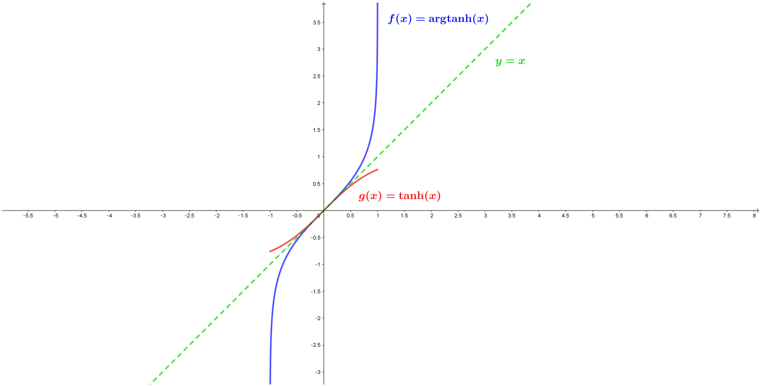
Hyperbolometrické funkcie



Obr.: Hyperbolometrické funkcie - $\operatorname{argcosh}(x)$

Rastúca, nulový bod je $\operatorname{argcosh}(0) = 1$.

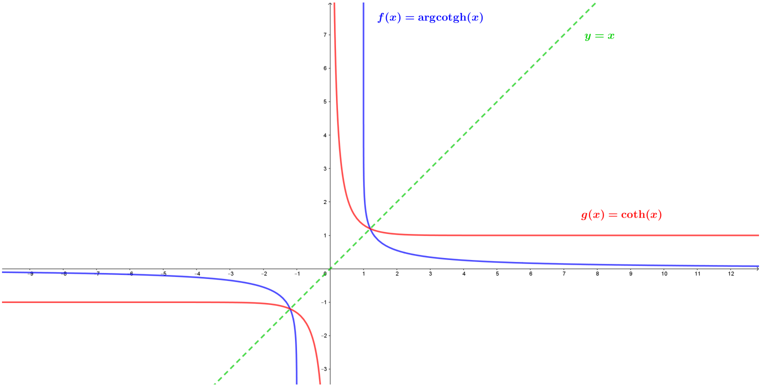
Hyperbolometrické funkcie



Obr.: Hyperbolometrické funkcie - $\mathrm{argtgh}(x)$

Nepárna, rastúca, nulový bod je $\mathrm{argtgh}(0) = 0$.

Hyperbolometrické funkcie



Obr.: Hyperbolometrické funkcie - $\operatorname{argcotgh}(x)$

Nepárna, klesajúca na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Ďakujem za pozornosť.