Spojitosť a limita funkcie - 1. časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

26 September 2022

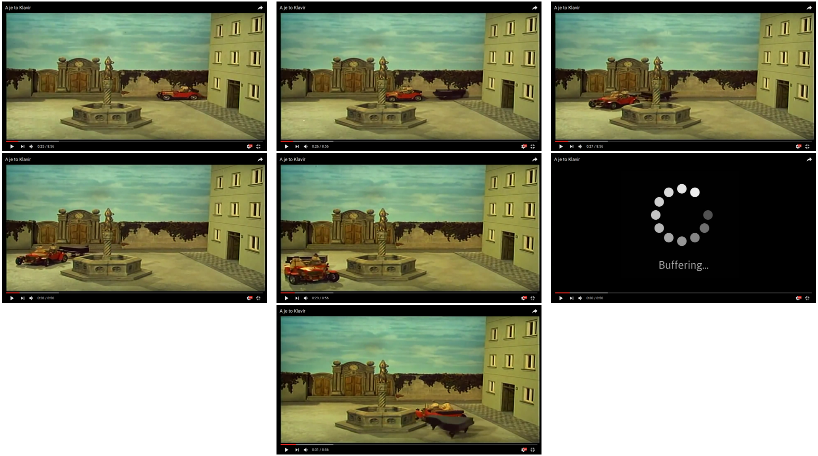
Obsah prednášky

- **Spojitosť funkcie** (definícia, spojitosť a operácie s funkciami, spojitosť a graf, spojitosť a globálne vlastnosti, spojitosť a riešenie rovníc)
- **Limita funkcie** (pojem limity, počítanie limít, pravidlá pre vlastné limity, pravidlá pre nevlastné limity, typy limít, neriešené príklady)

Spojitosť funkcie

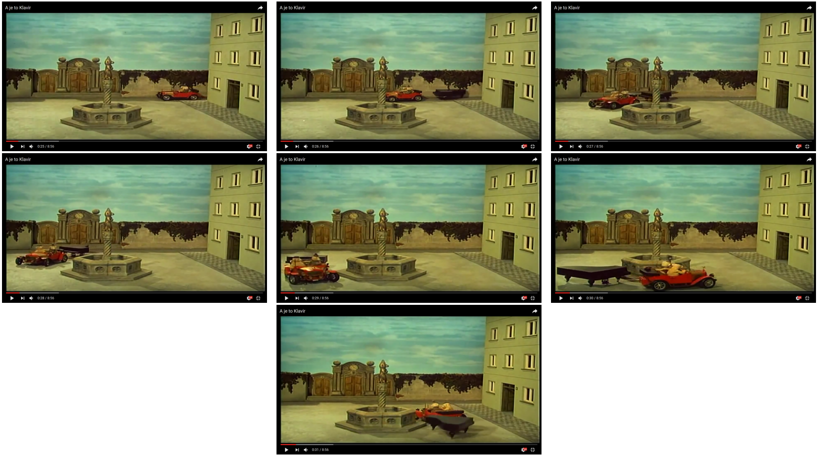
Spojitosť funkcie

Spojitosť



Obr.: A je to! - Klavir (1984) (Prerušenie plynulého deja)

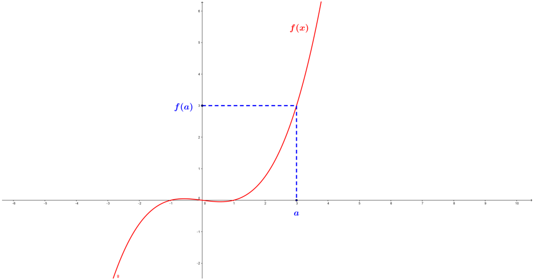
Spojitosť



Obr.: A je to! - Klavir (1984)

Spojitosť

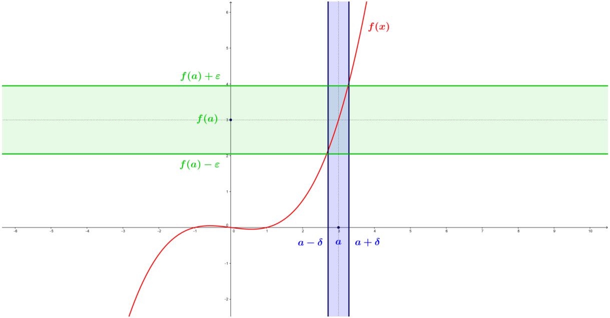
- **Spojitosť funkcie** v čísle je lokálna vlastnosť, ktorá **dáva do súvisu hodnotu funkcie v čísle s hodnotami v jeho okolí.** Voľne povedané, funkcia f je spojitá v čísle a zo svojho definičného oboru, ak hodnoty funkcie f v číslach blízkych a sú blízke hodnote $f(a)$.



Obr.: Spojitosť funkcií

Spojitosť

- Presne povedané, **funkcia f je spojitá v čísle (bode) a zo svojho definičného oboru, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre všetky $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D(f)$ platí $f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.**



Obr.: Spojitosť funkcií - definícia

Spojitosť

- Čísla z definičného oboru, v ktorých je funkcia spojitá, sa volajú **body spojitosti**. Čísla z definičného oboru, v ktorých funkcia spojitá nie je, sa volajú **body nespojitosti**.
- **Spojitá funkcia** je taká funkcia, ktorá je **spojitá v každom čísle svojho definičného oboru**.
- Funkcia f je **spojitá v intervale** $(a, b) \subset D(f)$, ak je **spojitá v každom bode tohoto intervalu**.
- Všetky funkcie, ktoré sme si doteraz uviedli, okrem funkcií vytvorených pomocou funkcie sign (*pozn.* funkcia $y = \operatorname{sign}(x)$ je nespojitá v bode 0), sú spojité.

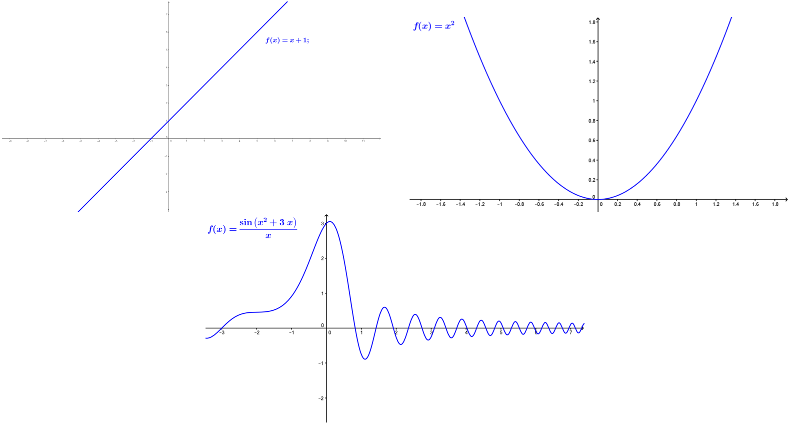
Spojitosť a operácie s funkciami

Funkcie vytvorené operáciami zo spojitých funkcií bývajú spojité, t.j.

- zúženie spojitej funkcie je spojitá funkcia,
- ak sú v čísle a spojité funkcie f a g, tak sú v čísle a spojité aj funkcie $f+g$, $f-g$ a $f.g$ a tiež funkcia $\frac{f}{g}$, ak $g(a) \neq 0$,
- ak je funkcia f spojitá v čísle a a funkcia g je spojitá v čísle $f(a)$, tak funkcia $g \circ f$ je spojitá v čísle a,
- ak je prostá funkcia spojitá, tak aj k nej inverzná funkcia je spojitá.

Spojitosť a graf:
Voľne povedané, ak je graf funkcie súvislá krivka, tak je funkcia spojitá.

Spojitosť a graf



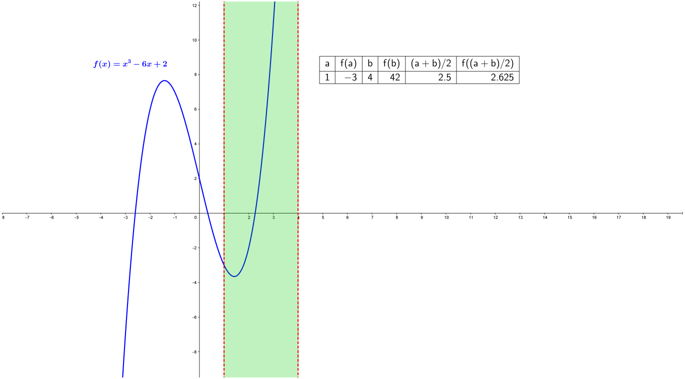
Obr.: Ukážky spojitých funkcií

Spojitosť a globálne vlastnosti

- Funkcia spojitá v uzavretom intervale je v tomto intervale **ohraničená**.
- Funkcia spojitá v uzavretom intervale má v tomto intervale **maximum aj minimum**.
- Ak je spojitá funkcia prostá v niektorom intervale, tak je v tomto intervale aj **rýdzo monotónna**.

Spojitosť a riešenie rovníc:
Ak f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a $f(a)$ a $f(b)$ majú opačné znamienka, tak rovnica $f(x) = 0$ má v intervale (a, b) **aspoň jedno riešenie**.

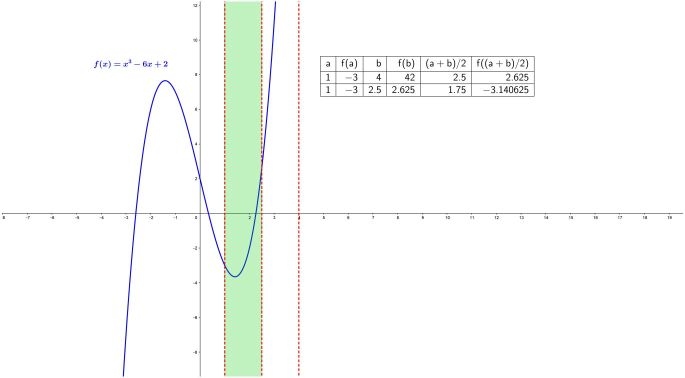
Spojitosť a riešenie rovníc



a	f(a)	b	f(b)	(a + b)/2	f((a + b)/2)
1	−3	4	42	2.5	2.625

Obr.: Metóda bisekcie (Metóda delenia intervalu) - princíp. (pozn. Nevyhnutnou podmienkou na aplikovanie tejto metódy je, aby funkcia f bola spojitá na celom $D(f)$. Podrobnejšie sa o tejto metóde budete učiť na numerickej matematike.)

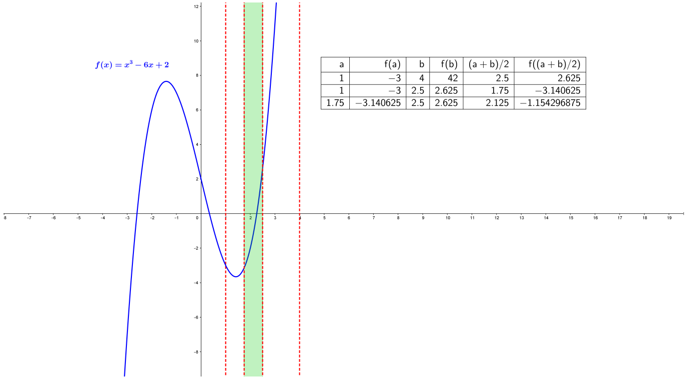
Spojitosť a riešenie rovníc



a	f(a)	b	f(b)	(a + b)/2	f((a + b)/2)
1	−3	4	42	2.5	2.625
1	−3	2.5	2.625	1.75	−3.140625

Obr.: Metóda bisekcie (Metóda delenia intervalu) - princíp. (pozn. Nevyhnutnou podmienkou na aplikovanie tejto metódy je, aby funkcia f bola spojitá na celom $D(f)$. Podrobnejšie sa o tejto metóde budete učiť na numerickej matematike.)

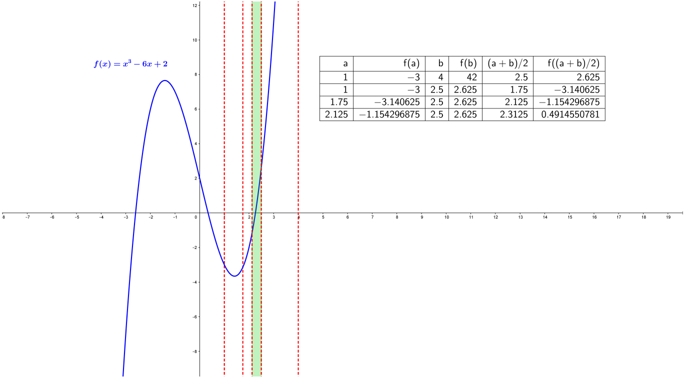
Spojitosť a riešenie rovníc



a	f(a)	b	f(b)	(a + b)/2	f((a + b)/2)
1	−3	4	42	2.5	2.625
1	−3	2.5	2.625	1.75	−3.140625
1.75	−3.140625	2.5	2.625	2.125	−1.154296875

Obr.: Metóda bisekcie (Metóda delenia intervalu) - princíp. (pozn. Nevyhnutnou podmienkou na aplikovanie tejto metódy je, aby funkcia f bola spojitá na celom $D(f)$. Podrobnejšie sa o tejto metóde budete učiť na numerickej matematike.)

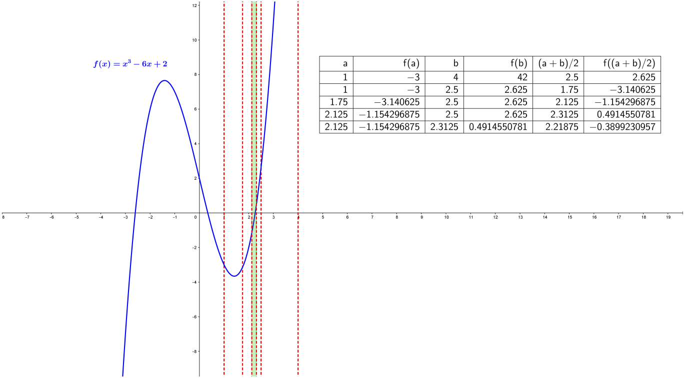
Spojitosť a riešenie rovníc



a	f(a)	b	f(b)	(a + b)/2	f((a + b)/2)
1	−3	4	42	2.5	2.625
1	−3	2.5	2.625	1.75	−3.140625
1.75	−3.140625	2.5	2.625	2.125	−1.154296875
2.125	−1.154296875	2.5	2.625	2.3125	0.4914550781

Obr.: Metóda bisekcie (Metóda delenia intervalu) - princíp. (pozn. Nevyhnutnou podmienkou na aplikovanie tejto metódy je, aby funkcia f bola spojitá na celom $D(f)$. Podrobnejšie sa o tejto metóde budete učiť na numerickej matematike.)

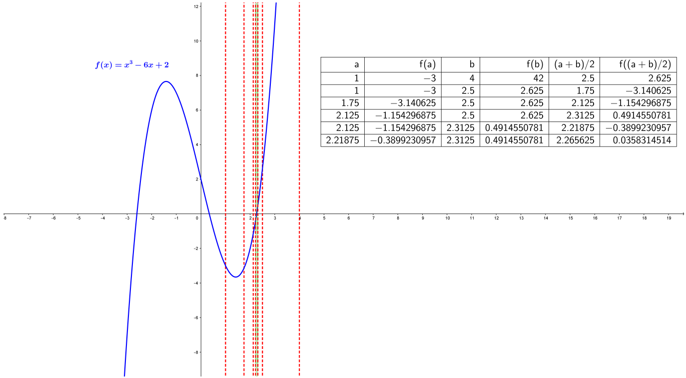
Spojitosť a riešenie rovníc



a	f(a)	b	f(b)	(a + b)/2	f((a + b)/2)
1	−3	4	42	2.5	2.625
1	−3	2.5	2.625	1.75	−3.140625
1.75	−3.140625	2.5	2.625	2.125	−1.154296875
2.125	−1.154296875	2.5	2.625	2.3125	0.4914550781
2.125	−1.154296875	2.3125	0.4914550781	2.21875	−0.3899230957

Obr.: Metóda bisekcie (Metóda delenia intervalu) - princíp. (pozn. Nevyhnutnou podmienkou na aplikovanie tejto metódy je, aby funkcia f bola spojitá na celom $D(f)$. Podrobnejšie sa o tejto metóde budete učiť na numerickej matematike.)

Spojitosť a riešenie rovníc



a	f(a)	b	f(b)	(a + b)/2	f((a + b)/2)
1	−3	4	42	2.5	2.625
1	−3	2.5	2.625	1.75	−3.140625
1.75	−3.140625	2.5	2.625	2.125	−1.154296875
2.125	−1.154296875	2.5	2.625	2.3125	0.4914550781
2.125	−1.154296875	2.3125	0.4914550781	2.21875	−0.3899230957
2.21875	−0.3899230957	2.3125	0.4914550781	2.265625	0.0358314514

Obr.: Metóda bisekcie (Metóda delenia intervalu) - princíp. (pozn. Nevyhnutnou podmienkou na aplikovanie tejto metódy je, aby funkcia f bola spojitá na celom $D(f)$. Podrobnejšie sa o tejto metóde budete učiť na numerickej matematike.)

Spojitosť - príklady

Príklad

Nájdite body nespojitosti funkcií:

1. $f(x) = \operatorname{sign}(2^x)$,
2. $g(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$,
3. $h(x) = \frac{x^3 - 3x - 10}{x - 5}$.

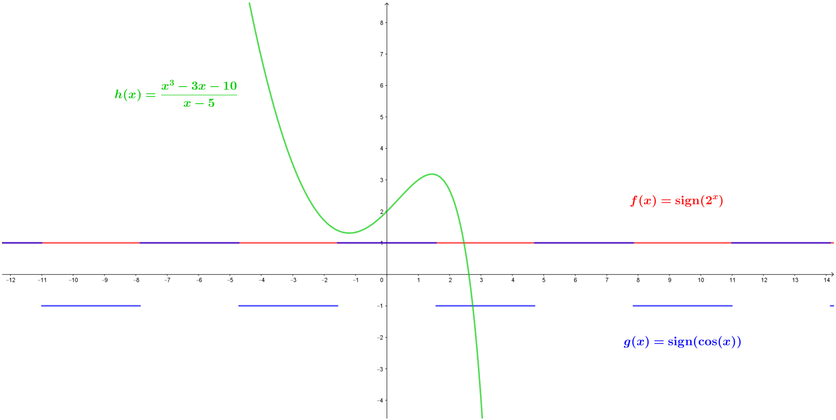
Spojitosť - príklady

Príklad

Nájdite body nespojitosti funkcií:

1. $f(x) = \operatorname{sign}(2^x)$, Funkcia $f(x)$ je spojitá na celom $D(f)$.
2. $g(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$, Body nespojitosti sú $\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbf{Z}$.
3. $h(x) = \frac{x^3-3x-10}{x-5}$, Funkcia $h(x)$ je spojitá na celom $D(h)$.

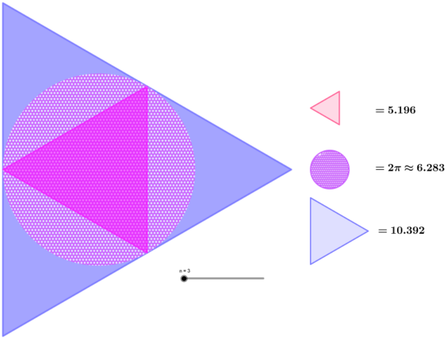
Spojitosť - príklady



Obr.: Riešené príklady - spojitosť

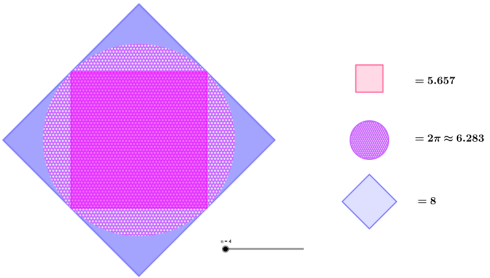
Limita funkcie

Limita



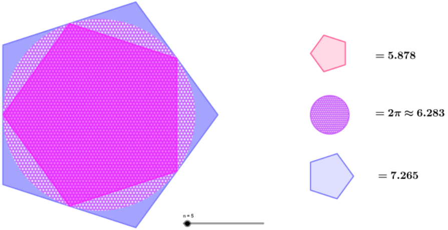
Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 3$

Limita



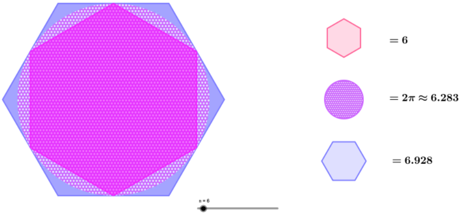
Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 4$

Limita



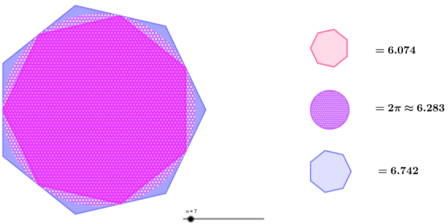
Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 5$

Limita



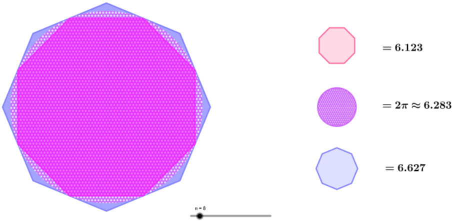
Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 6$

Limita



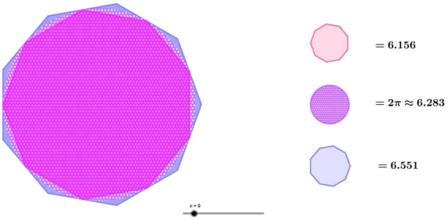
Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 7$

Limita



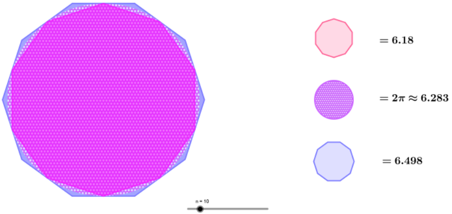
Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 8$

Limita



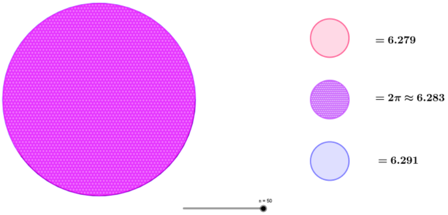
Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 9$

Limita



Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 10$

Limita



Obr.: Odhad hodnoty π podľa Archimeda, $n = 50$

Limita

- Archimedes odhadol hodnotu čísla π pomocou výpočtu obvodu 96-uholníka medzi $3,1408 < \pi < 3,1428$.
- Nikdy nebudeme poznať celú hodnotu čísla π, pretože je to iracionálne číslo.
- Mnemotechnická pomôcka na zapamätanie si čísla π s presnosťou na 9 desatinných miest: Stačí spočítať písmená v jednotlivých slovách vety:

  " *Tak, ó milá, ó drahá, zapamätaj si týchto čísel rad.*"

Pojem limity

- Existencia limity funkcie v bode vyjadruje istú **ustálenosť hodnôt funkcie** v okolí tohoto bodu. Voľne povedané, funkcia f má v bode a limitu L, ak hodnoty funkcie f v číslach blízkych a sú blízke L.
- K tomu, aby limita funkcie f mohla existovať v bode a, **nie je nutné, aby bola v bode a definovaná**, t.j. na prvý pohľad sa môže zdať, že sú definície spojitosti a limity identické, rozdiel je však v tom, že **keď vyšetrujeme spojitosť, musí byť funkcia f definovaná v bode a**.
- Pod bodom rozumieme ľubovoľné reálne číslo ako aj každú z hodnôt $\pm\infty$.
- Pod okolím bodu rozumieme ľubovoľný otvorený interval obsahujúci tento bod (pozri úvodná prednáška).

Pojem limity

- Funkcia f **má v bode** a **limitu** L, ak sú splnené tieto podmienky:

  - pre každé okolie O bodu a platí $(O - \{a\}) \cap D(f) \neq \emptyset$
  - pre každé okolie V bodu L existuje také okolie O bodu a,

  že platí ak $x \in (O - \{a\}) \cap D(f)$, tak $f(x) \in V$.
- Fakt, že funkcia f má v bode a limitu L označujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

- Ak bod a je reálne číslo, tak hovoríme o **limite vo vlastnom bode**, v opačnom prípade hovoríme o **limite v nevlastnom bode**.

Pojem limity

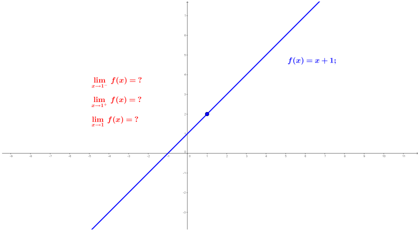
- Ak hodnota L limity je reálne číslo, tak hovoríme o **vlastnej limite**, v opačnom prípade hovoríme o **nevlastnej limite**.
- Ak má funkcia f v bode a vlastnú limitu, hovoríme, že v bode a konverguje alebo je **konvergentná**, v opačnom prípade v bode a diverguje alebo je **divergentná**.
- Funkcia f má v bode a limitu L **zľava (sprava)**, ak má v bode a limitu L funkcia $f_{/(-\infty,a)}$ resp. $f_{/(a,\infty)}$

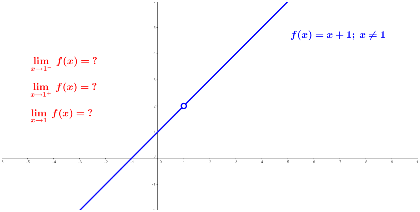
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad resp. \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

- Limity zľava a sprava nazývame spoločným názvom **jednostranné limity**.

Pojem limity

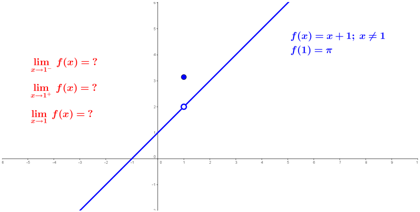
Situácie, keď existujú vlastné jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$:

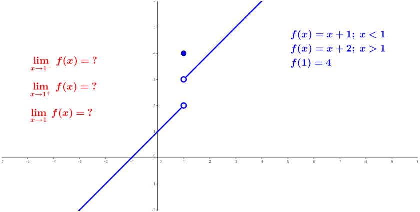




Obr.: Pojem limity - prípad č.1 a č.2

Pojem limity

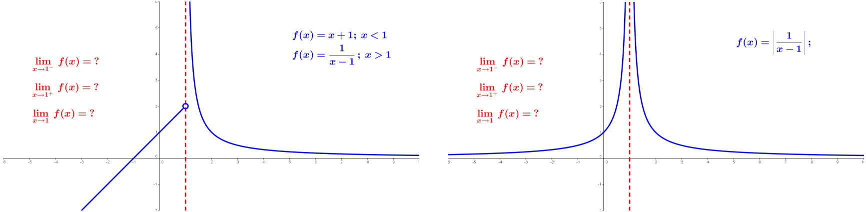




Obr.: Pojem limity - prípad č.3 a č.4

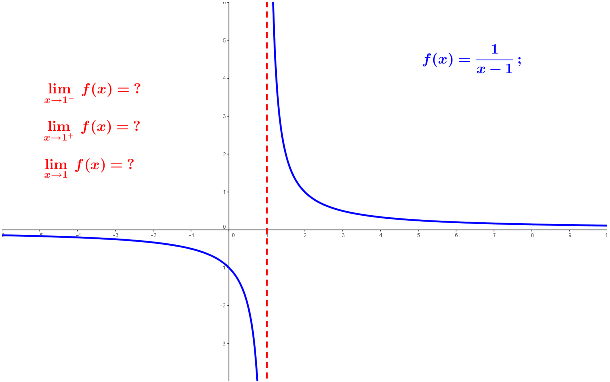
Pojem limity

Situácie, keď aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná:



Obr.: Pojem limity - prípad č.5 a č.6

Pojem limity

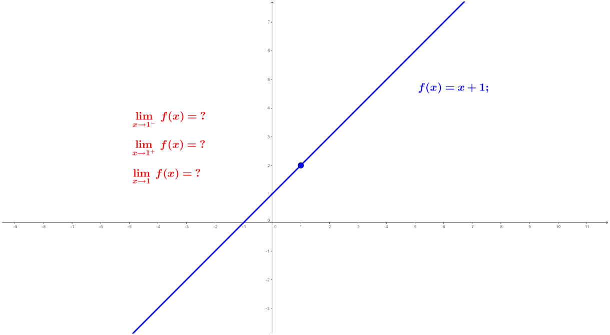


Obr.: Pojem limity - prípad č.7

Počítanie limít

Pri počítaní limity funkcie f v bode a **postupujeme nasledovne**:

- Ak je f **spojitá v bode** a, tak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Obr.: Limita vo vlastnom bode

Pravidlá pre vlastné limity

- Ak funkcia f **nie je spojitá v bode** a, tak **sa ju snažíme upraviť na funkciu, ktorá s ňou sa zhoduje všade mimo bodu** a **a je spojitá v** a **alebo na funkciu, ktorej limitu poznáme**.

1) Funkcia f definovaná v niektorom okolí bodu a **je spojitá v bode** a **vtedy a len vtedy, ak** $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$**.**
2) Limita **zachováva algebraické operácie**, t.j. ak $\lim_{x \to a} f(x) = F$ a $\lim_{x \to a} g(x) = G$, $c \in \mathbf{R}$, tak

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = F \pm G,$$
$$\lim_{x \to a} c.f(x) = c.F,$$
$$\lim_{x \to a} (f.g)(x) = F.G,$$
$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{F}{G}, \quad ak \quad G \neq 0.$$

Pravidlá pre vlastné limity

3) **Pravidlo substitúcie**: Nech $x = f(t)$ je spojitá v bode a, prostá v okolí bodu a, pričom $p = f(a)$. Potom ak $\lim\limits_{t \to a} g(f(t)) = L$, tak aj $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L$.
4) Ak funkcie f a g majú v bode a limitu a pre každé x z niektorého okolia bodu a (s možnou výnimkou bodu a) platí $f(x) \leq g(x)$, tak $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
5) Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ a pre každé x z niektorého okolia bodu a (s možnou výnimkou bodu a) platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, tak existuje aj $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.
6) Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená v okolí bodu a, tak $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = 0$.

Pravidlá pre nevlastné limity, typy limít

- Najčastejšie počítame limitu funkcie f v bode, v ktorom nie je definovaná, prípadne nie je spojitá, pričom f vzniká pomocou algebrických operácií z jednoduchších funkcií, ktorých limity v danom bode sme schopní počítať.
- Ak tieto limity dosadíme do príslušných operácií, dostávame výraz, ktorý nemá zmysel. Tento výraz nazývame **typom** limity, napr. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ je typu $\frac{0}{0}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{|x|}}$ je typu 1^{∞} ....
- Na výpočet niektorých typov limít môžeme použiť nasledujúce pravidlá, v ktorých symbol 0^{+} (0^{-}) znamená, že limita príslušnej funkcie je rovná 0, a naviac hodnoty funkcie v istom okolí daného bodu sú len kladné (záporné), napr. $\lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0^{+}$.

Pravidlá pre nevlastné limity, typy limít

Písmeno r označuje ľubovoľné **nenulové** reálne číslo a písmeno k označuje ľubovoľné **kladné** reálne číslo:

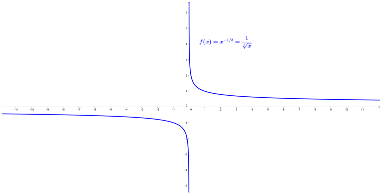
$$
\begin{aligned}
\frac{r}{\pm\infty} &= 0 \\
\frac{k}{0^+} &= \infty \\
\frac{k}{0^-} &= -\infty \\
k \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \\
r \pm \infty &= \pm\infty \\
k^{\infty} &= \infty, \quad ak \quad k > 1 \\
k^{\infty} &= 0, \quad ak \quad 0 < k < 1
\end{aligned}
$$

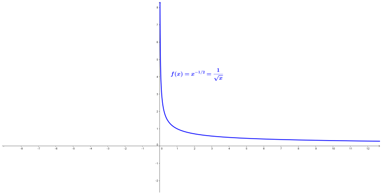
Pravidlá pre nevlastné limity, typy limít

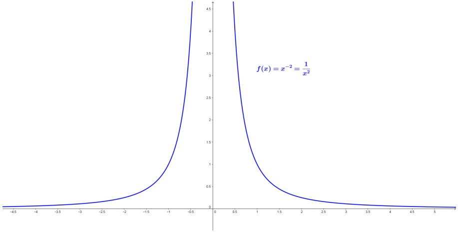
- Výsledky ďalších typov limít, ako napríklad $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ nie sú jednoznačne určené.
- Pri ich počítaní používame uvedené pravidlá aj napriek tomu, že nevieme, či počítaná limita existuje.
- Ak takto vypočítame limitu, jej existencia dodatočne "legalizuje" náš postup.

Niekoľko dôležitých limít

$$\lim_{x \to \infty} x^k = 0 \quad \text{ak} \quad k < 0$$

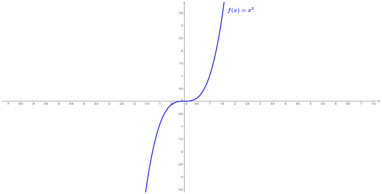


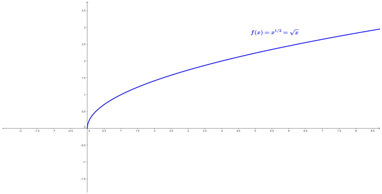


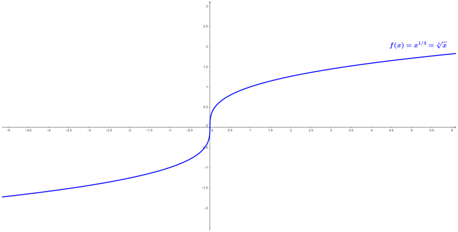


Niekoľko dôležitých limít

$$\lim_{x\to\infty} x^k = \infty \quad \text{ak} \quad k > 0$$

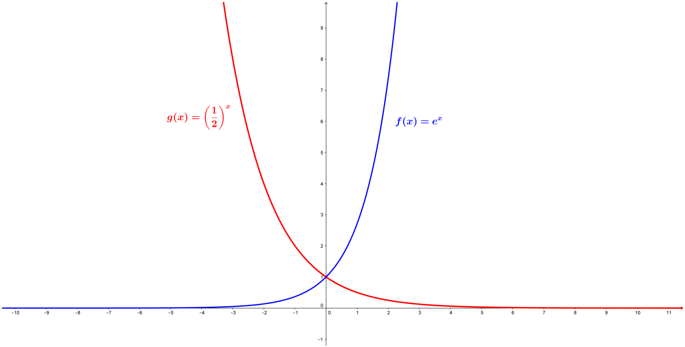






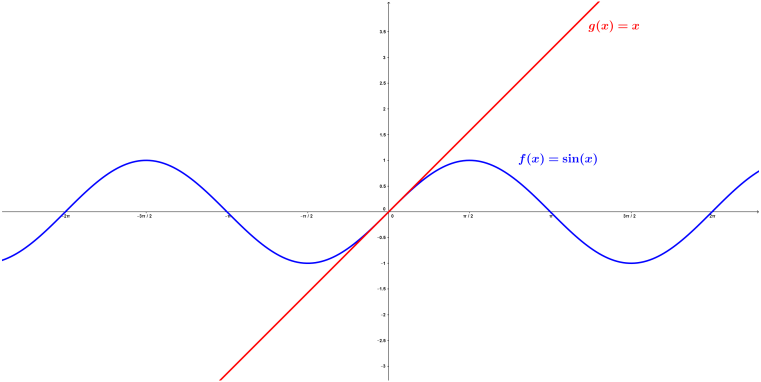
Niekoľko dôležitých limít

$$\lim_{x\to\infty} k^x = 0 \quad \text{ak} \quad k < 1$$
$$\lim_{x\to\infty} k^x = \infty \quad \text{ak} \quad k > 1$$



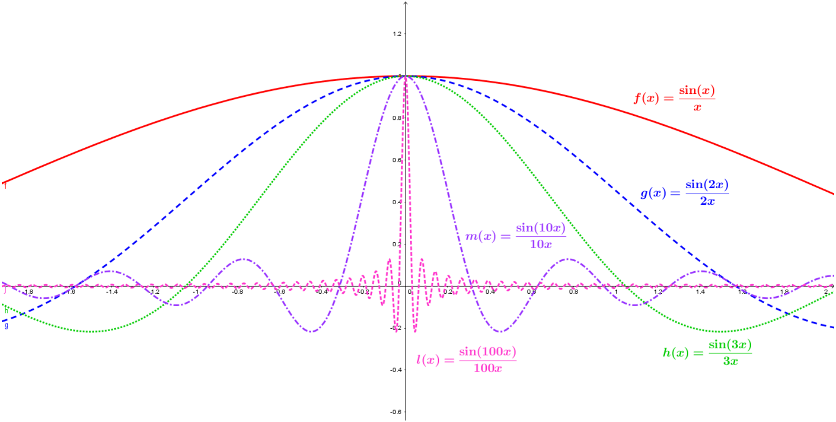
Niekoľko dôležitých limít

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Niekoľko dôležitých limít

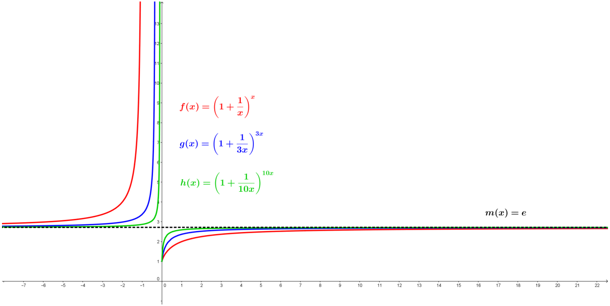
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$$



Niekoľko dôležitých limít

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$$



Príklady - limity

Príklad

Vypočítajte limity:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+\frac{2}{x}}{x+\frac{4}{x}} = \frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{1-x}{x^2} + \frac{1-2x}{2-3x}\right) = \frac{2}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = -1$

5) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{5x^2}{x^2-1} + 2^{\frac{1}{x}}\right) = 6$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-3^x}{x} = -2$

Príklady - limity

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-3^x}{x} = -\ln 3$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-3^x}{x} = 0$

9) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1-3^x}{x} = -\infty$

10) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$

11) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = e^{-1}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1}{2}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$

Príklady - limity

14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = 1$

15) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x} = 2$

16) $\lim\limits_{x\to \infty} (x - \sqrt{x^2-1}) = 0$

17) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{3}{2}$

18) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{4}{3}$

19) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1} = -2$

20) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

21) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} = \frac{m}{n}$

Príklady - limity

22) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

23) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\tan x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$

24) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x} = \frac{1}{2}$

25) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 2$

26) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\cos x-\sin x} = \sqrt{2}$

27) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1} = 8$

28) $\lim\limits_{x\to \infty} e^x(2+\cos x) = \infty$

29) $\lim\limits_{x\to \infty} x(\ln(x+2)-\ln x) = 2$

30) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\tan^2(x))^{\mathrm{cotg}^2(x)} = e^3$

Ďakujem za pozornosť.