Diferenciálny počet - derivácia funkcie (1. časť)

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

3 Október 2022

Obsah prednášky

Derivácia funkcie:

- pojem a označenia
- derivácie elementárnych funkcií
- derivácia a algebrické operácie
- derivácia zloženej funkcie
- logaritmické derivovanie

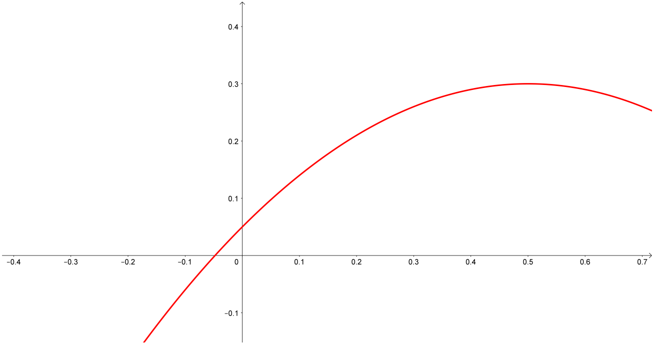
Obsah prednášky

Derivácia funkcie:

- **pojem a označenia**
- derivácie elementárnych funkcií
- derivácia a algebrické operácie
- derivácia zloženej funkcie
- logaritmické derivovanie

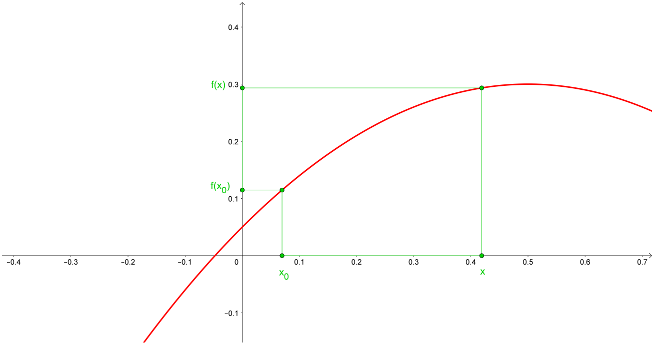
1. prístup - podľa Leibniza (konštrukcia dotyčnice ku grafu funkcie):

- Majme funkciu $f(x)$ s definičným oborom $D(f)$, ktorej grafom je nejaká krivka:



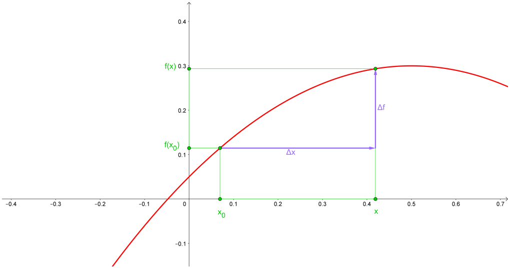
Derivácia - pojem a označenia

- Zvoľme si čísla $x_0, x \in D(f)$, ktorým prislúchajú funkčné hodnoty $f(x_0)$ a $f(x)$:



Derivácia - pojem a označenia

- Rozdiel $\Delta x = x - x_0$ sa nazýva **prírastok argumentu**, a teda $x = x_0 + \Delta x$.
- Rozdiel funkčných hodnôt x a x_0 označujeme $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ a nazýva sa **prírastok hodnôt funkcie** f v bode x_0, ktorý prislúcha argumentu Δx.

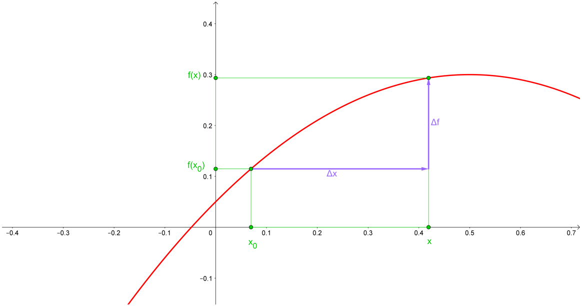


Derivácia - pojem a označenia

- Podiel

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

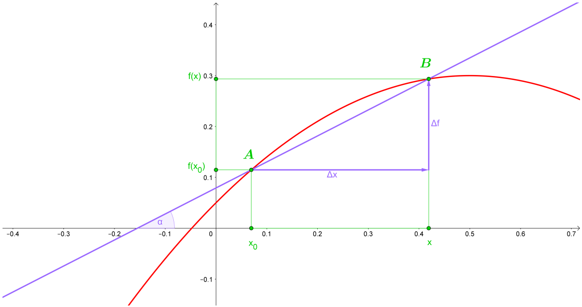
sa nazýva **diferenčný podiel** funkcie f v bode x_0 alebo aj **relatívny prírastok** hodnoty funkcie v bode x_0.



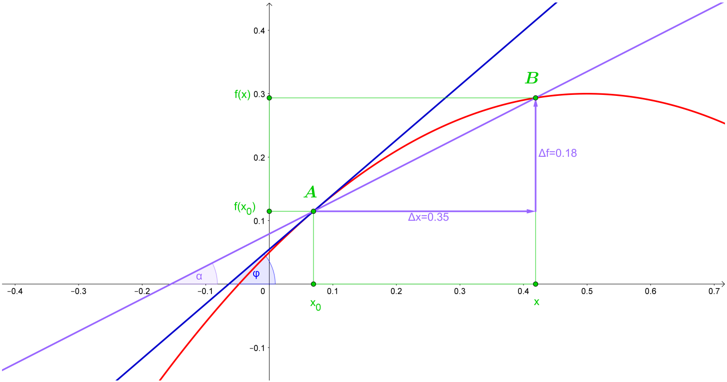
Derivácia - pojem a označenia

- **Diferenčný rozdiel** sa dá interpretovať ako spád, teda ako **smernica priamky** (sečnice grafu) prechádzajúcej bodmi $A[x_0, f(x_0)]$ a $B[x, f(x)]$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

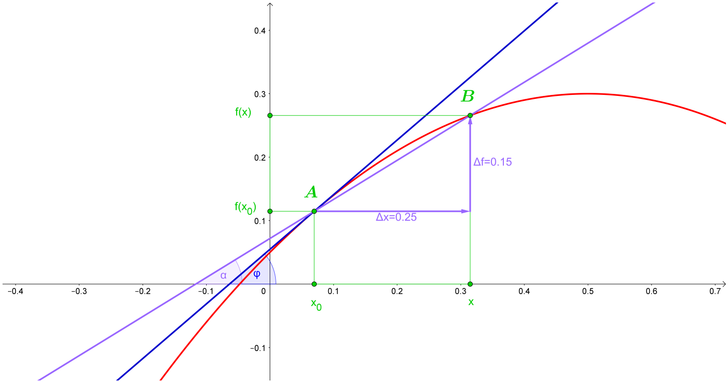


- Zostrojme **dotyčnicu** ku grafu funkcie f v bode A:



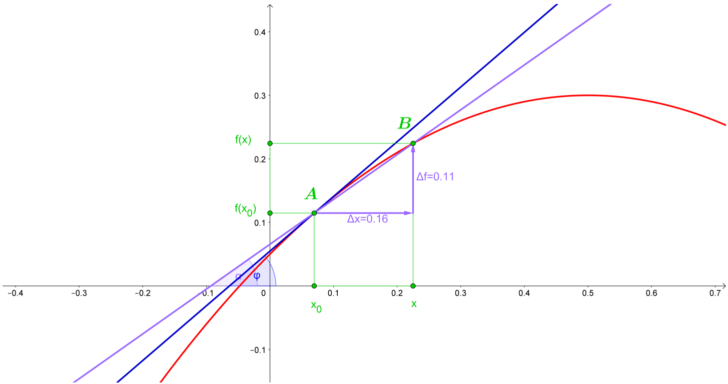
Derivácia - pojem a označenia

a postupne **zmenšujme prírastok argumentu** Δx...



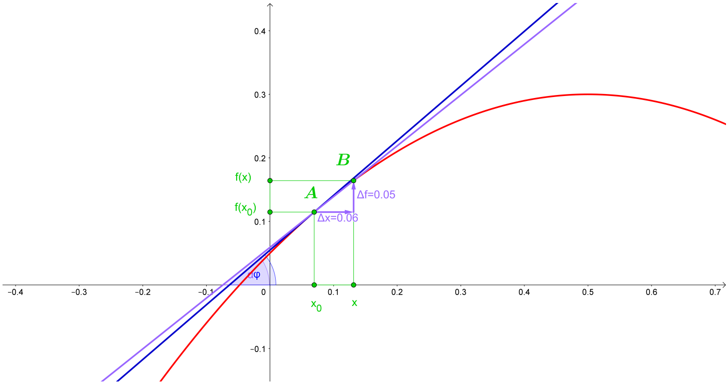
Derivácia - pojem a označenia

...ešte zmenšujme...



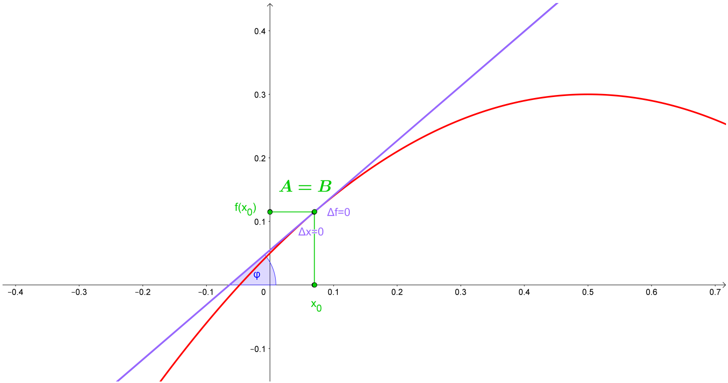
Derivácia - pojem a označenia

...ešte...



Derivácia - pojem a označenia

...až nakoniec...



Derivácia - pojem a označenia

- Zistili sme, že pre **smernicu dotyčnice** ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_0 platí

$$\tan\varphi = \lim_{\alpha\to\varphi} \tan\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- **Derivácia funkcie** f v čísle (v bode) x_0 je číslo

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ak **existuje vlastná limita** na pravej strane rovnosti.

Derivácia - pojem a označenia

- Ak platí
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty,$$
hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **nevlastnú deriváciu**.
- Ak existuje limita
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{resp.} \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$
nazýva sa **deriváciou funkcie** v bode x_0 **sprava**, resp. **zľava** a označuje sa symbolmi:

Derivácia - pojem a označenia

$$
\begin{aligned}
f'_{+}(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \\
f'_{-}(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.
\end{aligned}
$$

- Pre deriváciu sprava a deriváciu zľava funkcie f v bode x_0 sa používa spoločný názov **jednostranná derivácia** funkcie f v bode x_0.
- Funkcia f má v bode x_0 deriváciu vtedy a len vtedy, keď má v tomto bode deriváciu sprava a zľava, a tieto **derivácie sa rovnajú**

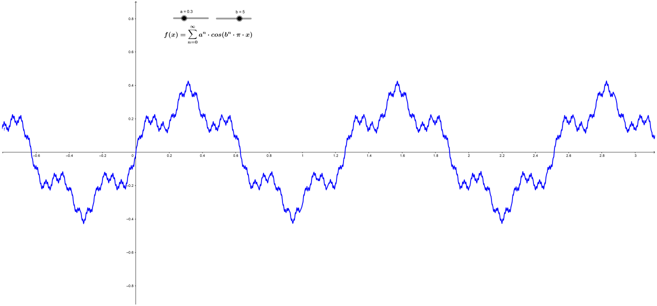
$$f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0) = f'(x_0).$$

Derivácia - pojem a označenia

- Ak existuje derivácia funkcie f v každom bode niektorej množiny M, tak funkcia f', ktorá priradí každému číslu $x \in M$ hodnotu $f'(x)$ je derivácia funkcie f v množine M.
- **Z existencie derivácie vyplýva spojitosť**: Ak má funkcia f v bode a deriváciu, tak je v bode a spojitá.
- **Pre väčšinu elementárnych funkcií existuje derivácia v každom bode definičného oboru**, preto derivácia elementárnej funkcie je zvyčajne funkcia s tým istým definičným oborom.

Derivácia - pojem a označenia

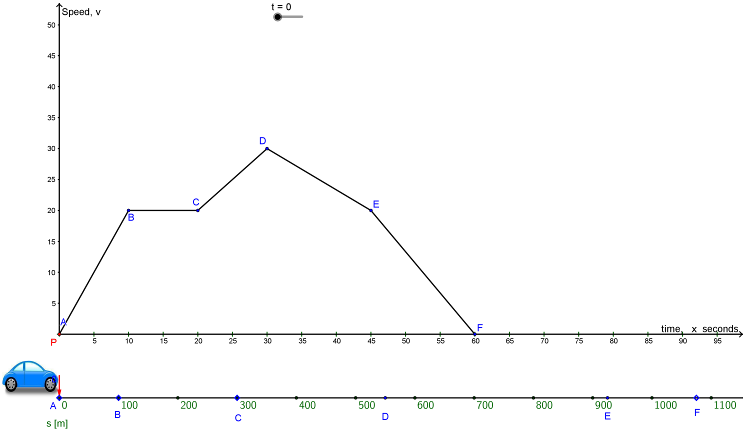
- **Weierstrassova funkcia** je funkcia, ktorá je vo všetkých bodoch spojitá, ale v žiadnom bode nemá deriváciu (t.j. nikde nie je diferencovateľná).



Funkcia sa chová ako fraktál.

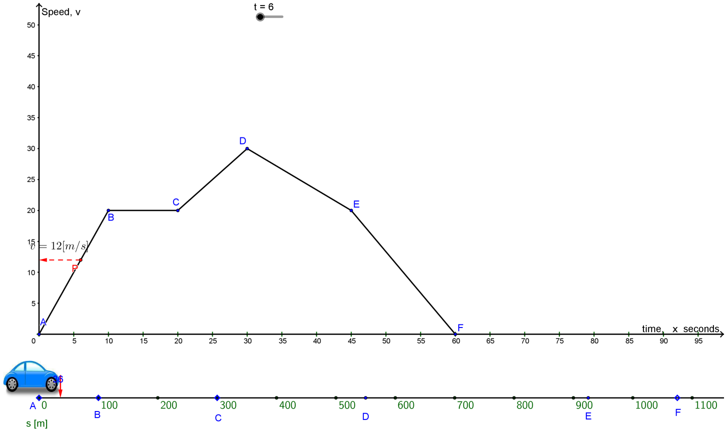
Derivácia - pojem a označenia

2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):

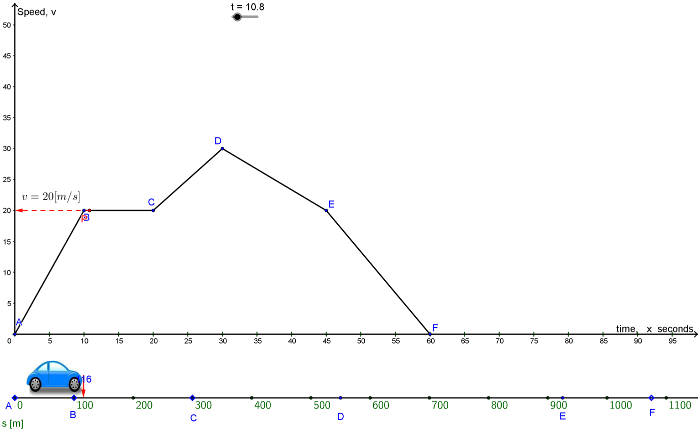


Derivácia - pojem a označenia

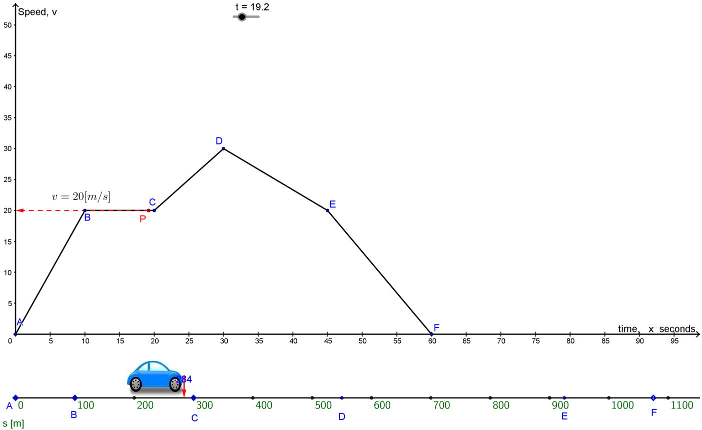
2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):



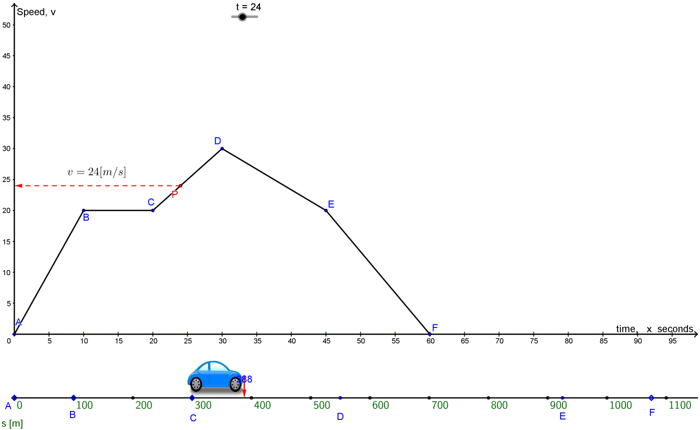
2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):



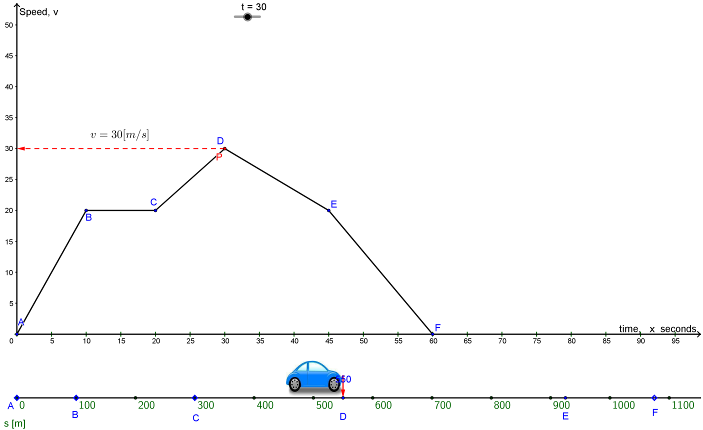
2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):



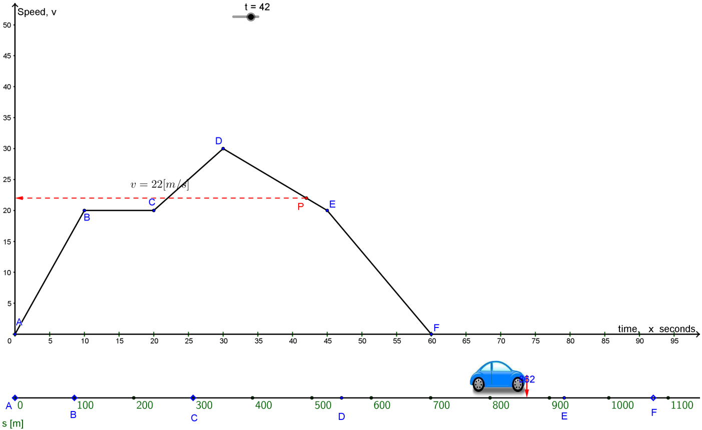
2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):



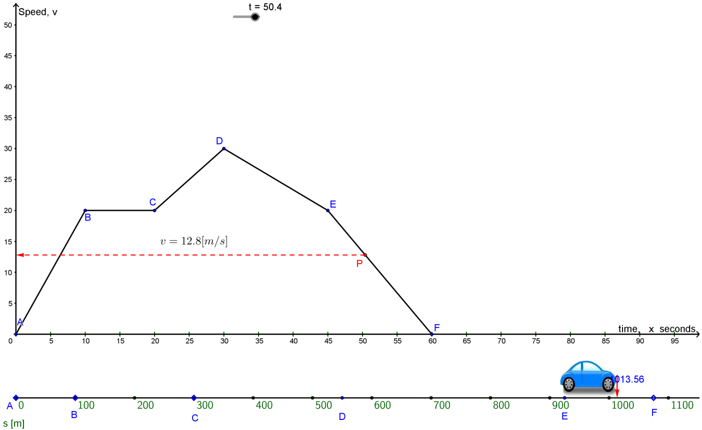
2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):



2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):

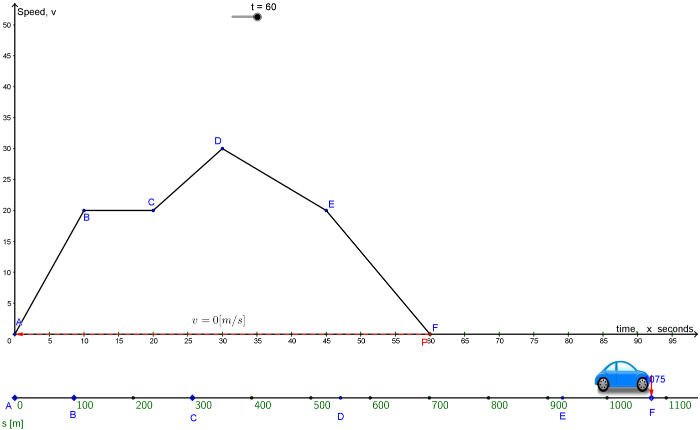


2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):



Derivácia - pojem a označenia

2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):



Derivácia - pojem a označenia

2. prístup - podľa Newtona (určenie okamžitej rýchlosti bodu, ktorý sa pohybuje nerovnomerne priamočiaro):

- **Hmotný bod** sa pohybuje **priamočiarym nerovnomerným pohybom** a jeho poloha na priamke p je určená $y = s(t)$, kde t je čas.
- V čase t_0 sa nachádza v bode P_0 a v čase t sa nachádza v bode P.
- V časovom intervale $\langle t_0, t\rangle$, $\Delta t = t - t_0$ prejde dráhu $s(t) - s(t_0)$ **priemernou rýchlosťou** $v_p(t)$

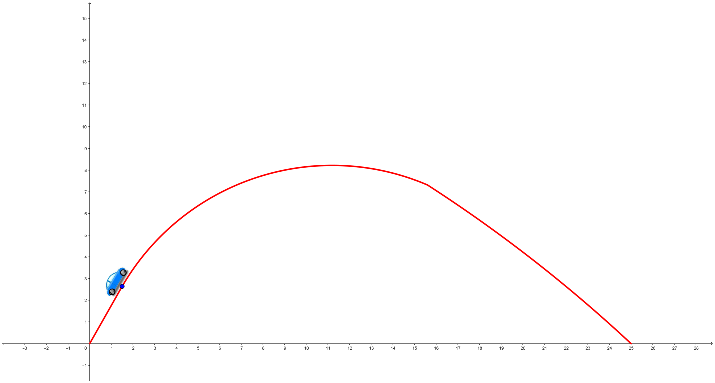
$$v_p(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Derivácia - pojem a označenia

- Takto definovaná **priemerná rýchlosť** medzi dvoma pozíciami $s(t_0)$ a $s(t_0 + \Delta f)$ sa stáva **okamžitou rýchlosťou** $v(t_0)$ ak $\Delta t \to 0$

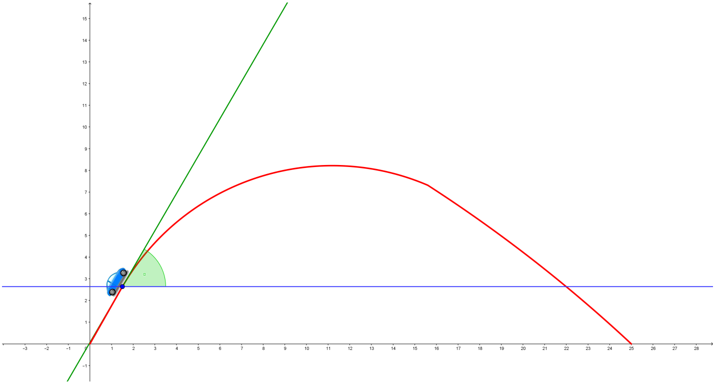
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Derivácia - pojem a označenia



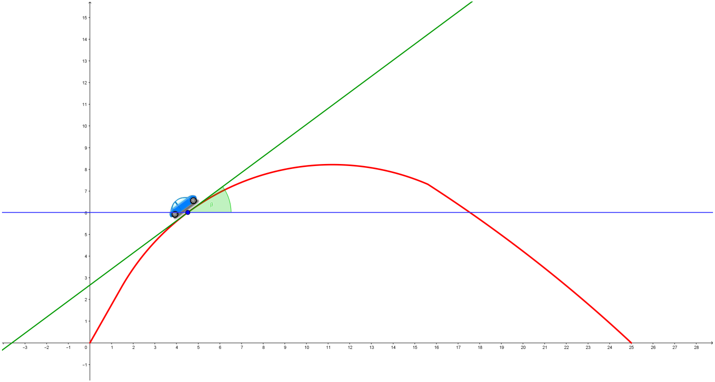
Obr.: **Oba prístupy spolu** - smer vektora okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa auta je totožný so smerom dotyčnice ku dráhe v danom bode.

Derivácia - pojem a označenia



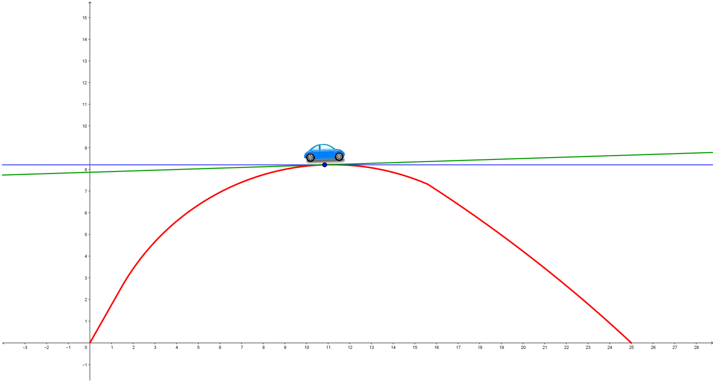
Obr.: **Oba prístupy spolu** - smer vektora okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa auta je totožný so smerom dotyčnice ku dráhe v danom bode.

Derivácia - pojem a označenia



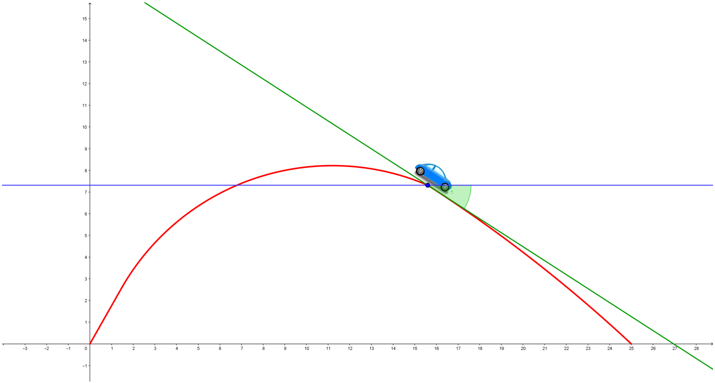
Obr.: **Oba prístupy spolu** - smer vektora okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa auta je totožný so smerom dotyčnice ku dráhe v danom bode.

Derivácia - pojem a označenia



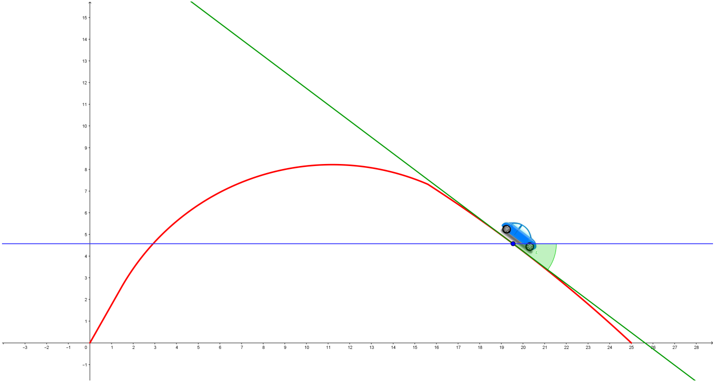
Obr.: **Oba prístupy spolu** - smer vektora okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa auta je totožný so smerom dotyčnice ku dráhe v danom bode.

Derivácia - pojem a označenia



Obr.: **Oba prístupy spolu** - smer vektora okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa auta je totožný so smerom dotyčnice ku dráhe v danom bode.

Derivácia - pojem a označenia



Obr.: **Oba prístupy spolu** - smer vektora okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa auta je totožný so smerom dotyčnice ku dráhe v danom bode.

Derivácia - pojem a označenia

- **Derivácia meria zmenu hodnôt závislej veličiny vzhľadom k zmene hodnôt nezávislej veličiny**.
- Na označenie **derivácie funkcie** f **v bode** x_0 sa používajú viaceré symboly:
    - podľa Gottfrieda Leibniza

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$$

    - podľa Josepha Louisa Lagrangea

$$f'(x_0), \quad y'(x_0)$$

    - podľa Isaaca Newtona

$$\dot{f}(x_0), \quad \dot{y}(x_0)$$

Príklad 1

Pomocou definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a.

a) $a = 0, \quad f(x) = x^2 - 3$

b) $a = 3, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

c) $a = 4, \quad f(x) = |2x - 8|$

d) $a = 0,$

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos x, & \text{ak } x \leq 0 \\ f(x) = x^2, & \text{ak } x > 0 \end{cases}$$

Príklad 2

Pomocou definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a.

a) $a = 0, \quad f(x) = x^2 - 3, \quad f'(0) = 0$

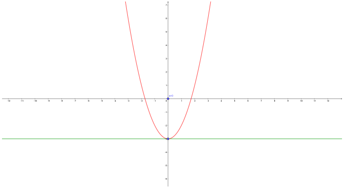
b) $a = 3, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(3) = -\frac{1}{9}$

c) $a = 4, \quad f(x) = |2x - 8|, \quad f'(4)$ – neexistuje

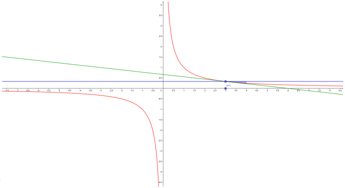
d) $a = 0, \quad f'(0)$ – neexistuje

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos x, & \text{ak } x \leq 0 \\ f(x) = x^2, & \text{ak } x > 0 \end{cases}$$

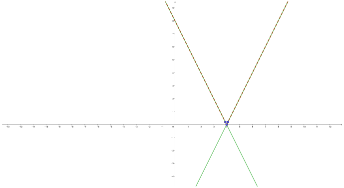
Derivácia - pojem a označenia



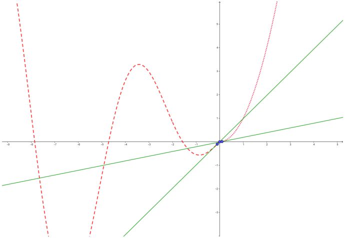
a)



b)



c)



d)

Obsah prednášky

Derivácia funkcie:

- pojem a označenia
- **derivácie elementárnych funkcií**
- derivácia a algebrické operácie
- derivácia zloženej funkcie
- logaritmické derivovanie

Derivácie elementárnych funkcií

1) $(c)' = 0$
2) $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde a je ľubovoľné reálne číslo
3) $(a^x)' = a^x \ln a$, kde $a > 0,\ a \neq 1$
4) $(e^x)' = e^x$
5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, kde $a > 0,\ a \neq 1$
6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7) $(\sin x)' = \cos x$
8) $(\cos x)' = -\sin x$
9) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10) $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Obsah prednášky

Derivácia funkcie:

- pojem a označenia
- derivácie elementárnych funkcií
- **derivácia a algebrické operácie**
- derivácia zloženej funkcie
- logaritmické derivovanie

Derivácia a algebrické operácie

- Ak nová funkcia vznikne **pomocou algebrických operácií** z funkcií f a g, tak jej deriváciu môžeme počítať **podľa nasledujúcich pravidiel:**

Nech funkcie f a g majú derivácie v množine M. Potom platí

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= f'+g', \\
(f-g)' &= f'-g', \\
(f.g)' &= f'.g+f.g', \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'.g-f.g'}{g^2},
\end{aligned}
$$

pričom posledný vzťah platí v číslach x, kde $g(x) \neq 0$.

Príklady

Príklad 3

Vypočítajte deriváciu funkcie:

1) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2$
2) $f(x) = x\sqrt{x}$
3) $f(x) = 2e^x$
4) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$
5) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$
6) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
7) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
8) $f(x) = (x^3 + 8)(x - 2)$

Príklady

9) $f(x) = 3 \cdot 4^x + 2 \log x$
10) $f(x) = \frac{e^x + \sin x}{2}$
11) $f(x) = x \ln x - 4x$
12) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
13) $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$
14) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
15) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
16) $f(x) = \tan x - 3x \log_4 x$
17) $f(x) = \sqrt[5]{x^9}$
18) $f(x) = 4^x + x^4$
19) $f(x) = \arcsin x - \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$
20) $f(x) = \operatorname{cotg} x - \frac{3^x}{\sqrt[3]{\pi}}$

Obsah prednášky

Derivácia funkcie:

- pojem a označenia
- derivácie elementárnych funkcií
- derivácia a algebrické operácie
- **derivácia zloženej funkcie**
- logaritmické derivovanie

Derivácia zloženej funkcie

- Ak poznáme derivácie zložiek, tak **deriváciu zloženej funkcie** môžeme vypočítať **pomocou nasledujúceho pravidla:**

  Nech funkcia $y = f(x)$ má deriváciu v množine M a funkcia $z = g(y)$ má deriváciu v obore hodnôt funkcie f. Potom aj zložená funkcia $g \circ f$ má v množine M deriváciu a pre každé $x \in M$ platí

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

  čo môžeme zapísať aj

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

  a tento vzťah sa nazýva **reťazové pravidlo**.

Riešené príklady

Príklad 4

Vypočítajte deriváciu funkcie $y = \sqrt[3]{x}$.

Riešenie: Pri počítaní derivácie prepíšeme odmocniny do tvaru mocniny s racionálnym exponentom:

$$y' = \left((x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Riešené príklady

Príklad 5

Vypočítajte deriváciu funkcie $y = 2x^5 - 7\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 9.$

Riešenie:

$$\begin{aligned} y' &= (2x^5)' - (7\sqrt[3]{x^4})' + \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)' - (9)' = \\ &= 2(x^5)' - 7 \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} + 3\left(\frac{-1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} - 0 = \\ &= 10x^4 - \frac{28}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

Príklad 6

Vypočítajte deriváciu funkcie $y = \sin x \cdot \cos x$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

Riešené príklady

Príklad 7

Vypočítajte deriváciu funkcie $y = \frac{5x+3}{x^2-2x}$.

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(5x+3)'.(x^2-2x)-(5x+3)(x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2} = \\
&= \frac{5(x^2-2x)-(5x+3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \\
&= \frac{-5x^2-6x+6}{(x^2-2x)^2}
\end{aligned}
$$

Riešené príklady

Príklad 8

Vypočítajte deriváciu funkcie $y = \sin(2x)$.

Riešenie:

$$y'(x) = (\sin t)'_{[t=2x]} \cdot (2x)' = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

Riešené príklady

Príklad 9

Vypočítajte deriváciu funkcie $y = \arcsin\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (\arcsin t)'_{[t=\frac{2x+3}{5-3x}]} \cdot \left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)^2}} \cdot \frac{2(5-3x)-(2x+3)(-3)}{(5-3x)^2} = \\
&= \frac{19}{(5-3x)\sqrt{5x^2-42x+16}}
\end{aligned}$$

Príklady

Príklad 10

Nájdite deriváciu zloženej funkcie:

1) $f(x) = (2+3x)^{17}$
2) $f(x) = \sin(x^{-5})$
3) $f(x) = e^{3x}$
4) $f(x) = x^2(x^3-1)^2$
5) $f(x) = \sqrt[3]{(2x+3)^2}$
6) $f(x) = 4^{3x} + 3^{x^3}$
7) $f(x) = \log(x+2x^2)$
8) $f(x) = \sqrt{\sin\frac{2x}{3}}$
9) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\right)$
10) $f(x) = \tan^2(x^3)$

Obsah prednášky

Derivácia funkcie:

- pojem a označenia
- derivácie elementárnych funkcií
- derivácia a algebrické operácie
- derivácia zloženej funkcie
- **logaritmické derivovanie**

Logaritmické derivovanie

- Nasledujúce pravidlo sa volá **pravidlo o logaritmickom derivovaní**.

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))', \quad \text{ak } f(x) > 0 \quad \text{a} \quad f'(x) \quad \text{existuje.}$$

Je to špeciálny prípad pravidla pre deriváciu zloženej funkcie a používa sa pre deriváciu funkcií, ktoré majú premennú v exponente, ale najmä **funkcií, ktoré majú premennú aj v základe aj v exponente**.

Logaritmické derivovanie - Riešené príklady

Príklad 11

Vypočítajte deriváciu funkcie $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
y' &= y.(\ln y)' = x^{\frac{1}{x}}.\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = x^{\frac{1}{x}}.\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \\
&= x^{\frac{1}{x}}.\frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)
\end{aligned}
$$

Príklady

Príklad 12

Vypočítajte deriváciu funkcie:

1) $f(x) = x^x$
2) $f(x) = x^{\sin x}$
3) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
4) $f(x) = (x^2 + 1)^{\arctan x}$

Ďakujem za pozornosť.