Reálna funkcia jednej reálnej premennej

Základné pojmy a vlastnosti

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

19 September 2022

Úvod do funkcií jednej premennej

Obsah prednášky:

- **funkcie ako súčasť každodenného života**
- **základné pojmy:** pojem funkcie a obory, rovnosť funkcií, graf funkcie
- **operácie s funkciami:** zúženie funkcie, algebraické operácie, zložená funkcia, inverzná funkcia
- **vlastnosti funkcií:** prostá funkcia, monotónnosť, ohraničenosť, existencia minima a maxima, symetria, periodickosť, konvexnosť a konkávnosť

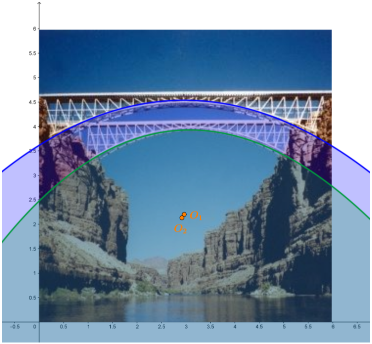
Funkcie ako súčasť každodenného života

- Tento semester sa budeme venovať **funkcii jednej reálnej premennej**.
- Objekty okolo nás sú síce hlavne "3D", na druhej strane však mnohé z nich úzko súvisia s 2D krivkami, ktoré sú grafickým zobrazením vyššie spomínaných funkcií.
- Na nasledujúcich obrázkoch uvidíte niekoľko takýchto ale aj mnoho iných príkladov.

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Winston bridge (Durham, England) - kamenný most postavený v roku 1764 (záber zo seriálu "Piece of Cake"(1988) - popod most prelieta Spitfire MH434)

Funkcie ako súčasť každodenného života



Obr.: Navajo mosty (Arizona, USA) - dvojica oceľových mostov, prvý je z roku 1929 (v súčastnosti už len pre chodcov), druhý bol postavený v roku 1995

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Hun River Ribbon Bridge (Shenyang, Čína) - 2014, Oblúk - Gateway Arch (St. Louis, Missouri) - postavený v roku 1965

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Eiffelova veža (Paríž, Francúzsko) - dokončená v roku 1889

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Goliath coaster (Kalifornia, USA) - otvorenie v roku 2000, max. rýchlosť 93 mph (150 km/h)

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Logo McDonald's

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Bellagio fontána (Las Vegas, USA)

Funkcie ako súčasť každodenného života


Obr.: Skákajúci delfín

Funkcie ako súčasť každodenného života

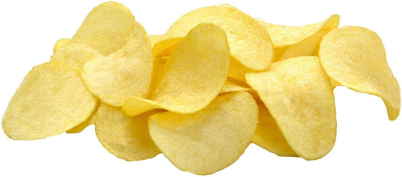
Obr.: Dúha

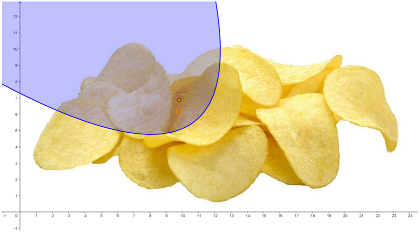
Funkcie ako súčasť každodenného života




Obr.: Ohrievač, Four solaire d'Odeillo (Francúzsko), Satelitná anténa, Priemyselné zrkadlá

Funkcie ako súčasť každodenného života



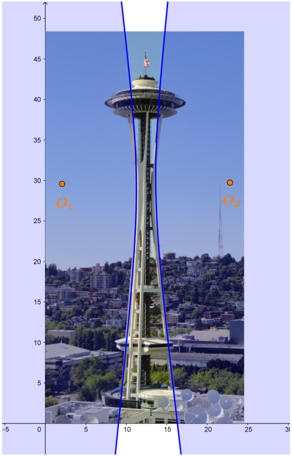


Obr.: Zemiakové lupienky

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Atómové elektrárne v Jaslovských Bohuniciach

Funkcie ako súčasť každodenného života



Obr.: Space Needle (Seattle, USA)

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Kobe Port Tower (Kobe, Japonsko)

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Gitara

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Basketbalová lopta

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Basebalová lopta

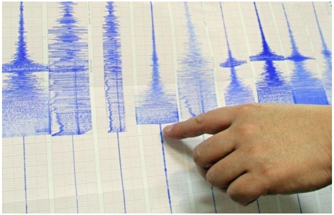
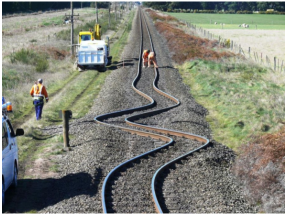
Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Tieň lampy, Presýpacie hodiny

Funkcie ako súčasť každodenného života

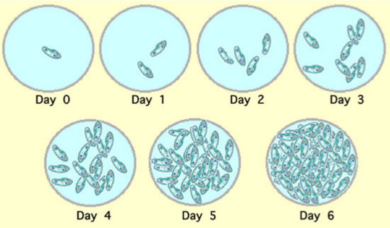
Obr.: Niektoré dámy "disponujú krivkami v tvare hyperboly" (Sofia Loren vo filme The Millionairess (1960))

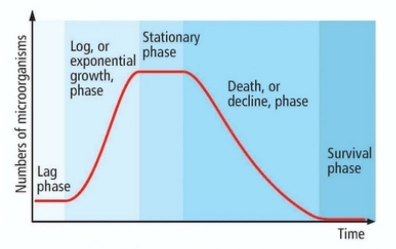
Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Zemetrasenie, Tsunami, Zvuková vlna

Funkcie ako súčasť každodenného života





Obr.: Sledovanie zmien množstva baktérií

Funkcie ako súčasť každodenného života

Obr.: Compound interest, Zmeny vo veľkosti populácie

RFJRP - Základné pojmy

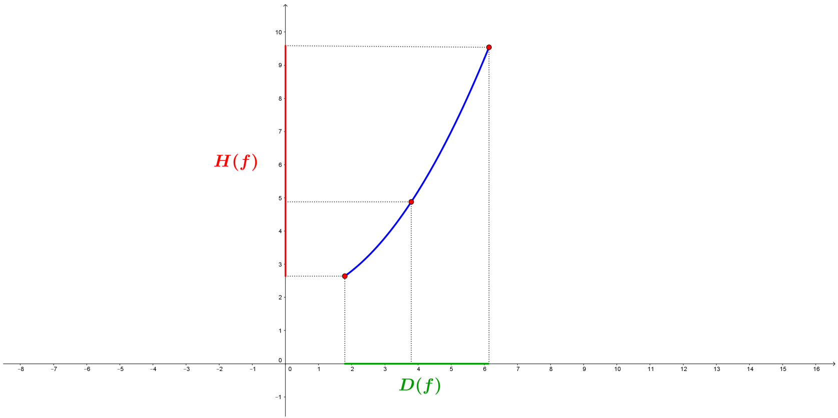
Funkcia $f : X \to Y$ je zobrazenie množiny X do množiny Y. Presnejšie, každému prvku $x \in X$ vieme jednoznačne priradiť prvok $y \in Y$ tak, že platí $f(x) = y$.

My sa budeme zaoberať **reálnymi funkciami jednej reálnej premennej** (RFJRP), resp. stručne funkciami, to znamená, že budeme predpokladať $X \subset R$ aj $Y \subset R$. Pre funkcie zavádzame:

- **definičný obor**, $D(f) = \{x \in X; (\exists y \in Y)(f(x) = y)\}$,
- **obor hodnôt**, $H(f) = \{y \in Y; (\exists x \in X)(f(x) = y)\}$.

kde x je nezávislá premenná (vzor), a y je závislá premenná (funkčná hodnota, obraz).

RFJRP - Základné pojmy



Obr.: Funkcia f, jej definičný obor $D(f)$ a obor hodnôt $H(f)$

RFJRP - Základné pojmy

Príklad

Sú nasledujúce priradenia funkciami alebo nie?

1. Každému kosoštvorcu priradíme dĺžku jeho uhlopriečky.
2. Každému lichobežníku priradíme dĺžku jeho výšky.
3. Každému prirodzenému číslu priradíme súčin jeho deliteľov.
4. Každému trojuholníku priradíme jeho výšku.
5. Každému trojuholníku priradíme súčet dĺžok jeho strán.
6. Každému trojuholníku priradíme kružnicu jemu vpísanú.
7. Každému reálnemu číslu priradíme jeho druhú mocninu.
8. Každému reálnemu číslu priradíme jeho druhú odmocninu.
9. Každému reálnemu číslu priradíme jeho tretiu odmocninu.

RFJRP - Základné pojmy

Príklad

Sú nasledujúce priradenia funkciami alebo nie?

1. Každému kosoštvorcu priradíme dĺžku jeho uhlopriečky. NIE
2. Každému lichobežníku priradíme dĺžku jeho výšky. ÁNO
3. Každému prirodzenému číslu priradíme súčin jeho deliteľov. ÁNO
4. Každému trojuholníku priradíme jeho výšku. NIE
5. Každému trojuholníku priradíme súčet dĺžok jeho strán. ÁNO
6. Každému trojuholníku priradíme kružnicu jemu vpísanú. ÁNO
7. Každému reálnemu číslu priradíme jeho druhú mocninu. ÁNO
8. Každému reálnemu číslu priradíme jeho druhú odmocninu. NIE
9. Každému reálnemu číslu priradíme jeho tretiu odmocninu. ÁNO

RFJRP - Základné pojmy

Príklad

Nájdite definičný obor funkcie:

1. $f(x) = \sqrt[3]{2 - \ln x}$,
2. $g(x) = \ln(2\cos x - \sqrt{3})$,
3. $h(x) = \sqrt{2 - \log_{0.5} x}$,
4. $i(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$,
5. $j(x) = \arcsin(2x + 1)$,
6. $k(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\right)$.

RFJRP - Základné pojmy

Príklad

Nájdite definičný obor funkcie:

1. $f(x) = \sqrt[3]{2 - \ln x}$, $\quad D(f) = (0, \infty)$
2. $g(x) = \ln(2\cos x - \sqrt{3})$, $\quad D(g) = \{\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right); k \in Z\}$
3. $h(x) = \sqrt{2 - \log_{0.5} x}$, $\quad D(h) = \langle \frac{1}{4}, \infty)$
4. $i(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $\quad D(i) = (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty)$
5. $j(x) = \arcsin(2x + 1)$, $\quad D(j) = \langle -1, 0\rangle$
6. $k(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}\right)$. $\quad D(k) = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

RFJRP - Základné pojmy

Funkcie f môžeme definovať:

1) **explicitne** predpisom:

Meno	Predpis	Def. obor	Obor hodnôt
f	$y = x^2$	$x \in \langle -5, 6 \rangle$	$\langle 0, 36 \rangle$
f	$f(x) = x^2$	$x \in \langle -5, 6 \rangle$	$\langle 0, 36 \rangle$
f	$x \mapsto x^2$	$x \in \langle -5, 6 \rangle$	$\langle 0, 36 \rangle$

- Funkcia môže byť definovaná tabuľkou, vtedy je definovaná na konečnom počte bodov:

x	1	2	3	...
y	2	2.1	1.9	...

$D(f) = 1, 2, 3, ...,$ $H(f) = 2, 2.1, 1.9, ...$
Tento spôsob sa používa pri meraniach.

RFJRP - Základné pojmy

- Funkcia môže byť definovaná viacerými predpismi:

  Signum (z latinčiny *znamienko*), ozn. sign, je funkcia $\mathrm{sign} : \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}$. Nadobúda len 3 hodnoty

$$\mathrm{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{ak } x < 0 \\ 0 & \text{ak } x = 0 \\ 1 & \text{ak } x > 0 \end{cases}$$

  Absolútna hodnota je funkcia $|\cdot| : \mathbf{R} \to [0, \infty)$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ak } x \geq 0, \\ -x, & \text{ak } x < 0. \end{cases}$$

RFJRP - Základné pojmy

2) **parametricky** pomocnými funkciami $x = \phi(t), y = \psi(t), t \in J$,

$$\begin{aligned} x &= t, \quad t \in R \\ y &= t^2 \end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned} x &= t, \quad t \in R \\ y &= |t| \end{aligned}$$

3) **implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$ a podmienkami pre x, y.

$$y^2 - x^2 = 0, y > 0$$

alebo

$$y - |x| = 0$$

Rovnosť funkcií

Funkcie f a g sa rovnajú, ak platí: $D(f) = D(g)$, a zároveň $\forall x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Príklad

Zistite, či sa dané funkcie rovnajú

1. $f(x) = 1,\ g(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$,
2. $f(x) = x + 2,\ g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$,

Rovnosť funkcií

Funkcie f a g sa rovnajú, ak platí: $D(f) = D(g)$, a zároveň $\forall x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

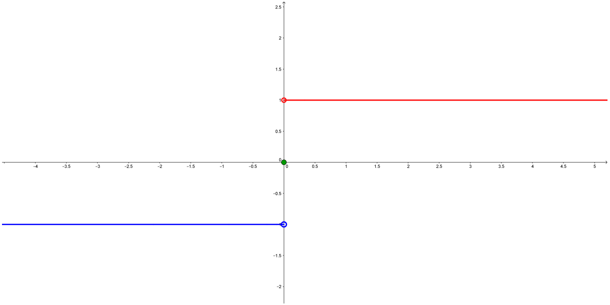
Príklad

Zistite, či sa dané funkcie rovnajú

1. $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$, ÁNO
2. $f(x) = x + 2$, $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, NIE

Graf funkcie

Je to množina usporiadaných dvojíc x a $f(x)$ daná predpisom:
$G(f) = [x, f(x)], \forall x \in D(f) \in E_2$



Obr.: Graf funkcie $Signum$. Funkciu $Signum$ prvý krát zadefinoval Oliver Heaviside (1850-1925).

Príklad

Nakreslite graf funkcie:

1. $f(x) = \ln(x)$
2. $g(x) = -\ln(x)$
3. $h(x) = \ln(-x)$
4. $i(x) = |\ln(x)|$
5. $j(x) = \ln(x) + 2$
6. $k(x) = \ln(x + 2)$
7. $l(x) = 2\ln(x)$

RFJRP - Operácie s funkciami

Zúženie (reštrikcia)

Príklad

$f(x) = x^3$, $D(f) = \mathbf{R}$, $\qquad g(x) = x^3$, $D(g) = \langle -1, 1 \rangle$
Funkcia g je zúžením (reštrikciou) funkcie f na intervale $\langle -1, 1 \rangle$. Inými slovami, operácia zúženia spočíva len v ohraničení jej definičného oboru.

RFJRP - Operácie s funkciami

Algebraické operácie

Funkcie môžeme **sčítavať, odčítavať, násobiť, deliť, umocňovať...**
Majme f, g s $D(f)$, $D(g)$ potom pre $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ platí

$$\begin{aligned}
(f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x) \\
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0 \\
(f)^n(x) &= [f(x)]^n, \quad n \in N.
\end{aligned}$$

Zložená funkcia (kompozícia)

Nech $H(g)$ je podmnožinou $D(f)$ potom pre $\forall x \in D(g)$ definujeme **zloženú funkciu** $f \circ g(x) = f(g(x))$, funkciu f potom nazývame vonkajšia (hlavná) zložka, funkciu g vnútorná zložka.
Inými slovami vykonávame substitúciu premennej x výrazom $g(x)$.

Príklad

$h(x) = \sin^2(x)$
$g(x) = \sin(x)$, $f(x) = x^2 \quad f(g(x)) = f(\sin(x)) = \sin^2(x).$

Príklad

$h(x) = \sin(x^2)$
$g(x) = x^2$, $f(x) = \sin(x) \quad f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2).$

RFJRP - Operácie s funkciami

Príklad

Rozložme funkciu $f: \ y = \tan^3(x - \frac{\pi}{4})$ *na zložky.*

Riešenie:

Postupujeme tak, že si uvedomujeme postupnosť úkonov s hodnotou x:

$$x \quad \xrightarrow{-\frac{\pi}{4}} \quad x - \frac{\pi}{4} \quad \xrightarrow{\tan} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \xrightarrow{(\ \ )^3} \quad \tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Preto $f(x) = p \circ q \circ r(x)$, kde $p(x) = x^3$, $q(x) = \tan\, x$ a $r(x) = x - \frac{\pi}{4}$.

RFJRP - Operácie s funkciami

Príklad

Porovnajme funkcie $g \circ h$ *a* $h \circ g$, *ak* $g(x) = \sqrt{x}$ *a* $h(x) = x^2$.

Riešenie:

$g \circ h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$
$h \circ g(x) = (\sqrt{x})^2 = x_{/\langle 0,\infty)}$.

Príklad

Porovnajme funkcie $g \circ h$ a $h \circ g$, ak $g(x) = \sqrt{x}$ a $h(x) = x^2$.

Riešenie:

$g \circ h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

$h \circ g(x) = (\sqrt{x})^2 = x_{/\langle 0,\infty)}$.

Funkcie sa nerovnajú, funkcia $h \circ g(x)$ je zúžením funkcie $g \circ h(x)$.

RFJRP - Operácie s funkciami

Inverzná funkcia

Definícia

Nech f je prostá funkcia s $D(f) = X$ a $H(f) = Y$. Potom označíme $f^{-1} : Y \to X$ funkciu, definovanú predpisom

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y.$$

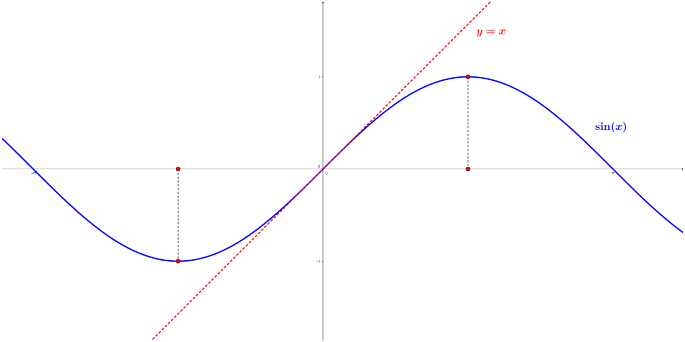
Funkciu f^{-1} nazveme **inverznou** *k f.*

Bezprostredne z definície inverznej funkcie vyplýva: Nech f je prostá funkcia s $D(f) = X$ a $H(f) = Y$. Potom platí:

$$D(f) = H\left(f^{-1}\right), \quad D\left(f^{-1}\right) = H(f), \quad (\forall x \in X)(f^{-1}(f(x)) = x).$$

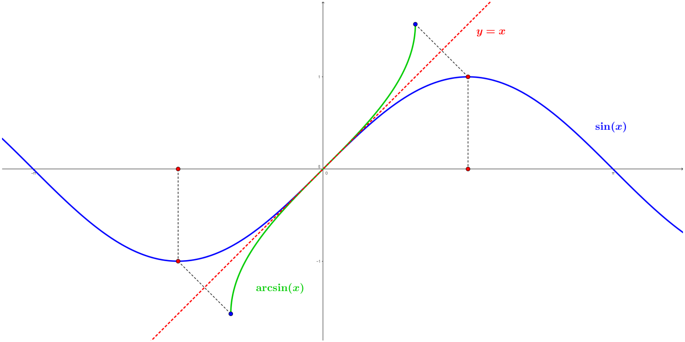
RFJRP - Operácie s funkciami

Ak existuje inverzná funkcia k f, tak grafy funkcií f a f^{-1} sú súmerné podľa osi prvého kvadrantu, teda podľa priamky $y = x$.



Obr.: **Geometrická konštrukcia inverznej funkcie** - 1) zúženie funkcie $f(x) = \sin(x)$ na interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

Ak existuje inverzná funkcia k f, tak grafy funkcií f a f^{-1} sú súmerné podľa osi prvého a tretieho kvadrantu, teda podľa priamky $y = x$.



Obr.: **Geometrická konštrukcia inverznej funkcie** - 2) vytvorenie inverznej funkcie $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

RFJRP - Operácie s funkciami

Príklad

Zistite, či sú funkcie

1. $f(x) = \frac{x^3-3}{2+x^3}$,
2. $g(x) = \frac{x^2-3}{2+x^2}$,
3. $h(x) = 5 + \ln(x+1)$.

prosté a ak áno, nájdite k nim inverznú.

RFJRP - Operácie s funkciami

Príklad

Zistite, či sú funkcie

1. $f(x) = \frac{x^3-3}{2+x^3}$, $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{3+2x}{1-x}}$, $\quad D(f^{-1}) = \mathbf{R} \setminus \{1\} = H(f)$
2. $g(x) = \frac{x^2-3}{2+x^2}$, $\quad$ Funkcia $g(x)$ nie je prostá
3. $h(x) = 5 + \ln(x+1)$. $\quad h^{-1}(x) = e^{x-5} - 1$, $\quad D(h^{-1}) = \mathbf{R} = H(h)$

prosté a ak áno, nájdite k nim inverznú.

RFJRP - vlastnosti funkcií

Globálne a lokálne vlastnosti funkcie

Ak nejaká vlastnosť funkcie $y = f(x), x \in D(f)$ platí:

- $\forall x \in A$, kde $A \subset D(f)$ nazýva sa **lokálna** vlastnosť na A,
- $\forall x \in D(f)$ nazýva sa **globálna** vlastnosť (t.j. platí na celom $D(f)$).

1) Prostá funkcia

Definícia

Funkcia f je **prostá***, ak pre každé $y \in H(f)$ existuje práve jedno $x \in D(f)$ také, že $f(x) = y$.*

pozn. Každá priamka rovnobežná s x-ovou osou pretne graf funkcie f najviac v jednom bode.

Lemma

Funkcia f je prostá práve vtedy, keď pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in D(f)$ platí

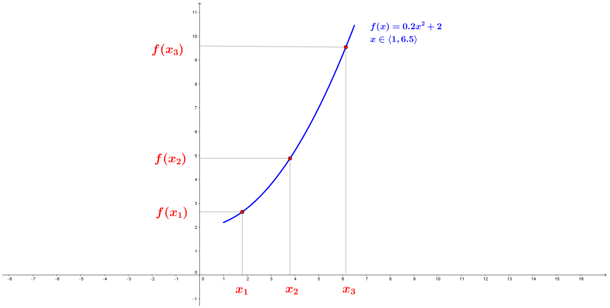
$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \neq x_2.$$

RFJRP - vlastnosti funkcií

2) Monotónnosť

Definícia

Funkcia f *sa nazýva* **rýdzo (ostro) rastúca** *na množine* $M \subset D(f)$, *ak pre všetky* $x_1, x_2 \in M$ *také, že* $x_1 < x_2$, *platí* $f(x_1) < f(x_2)$.

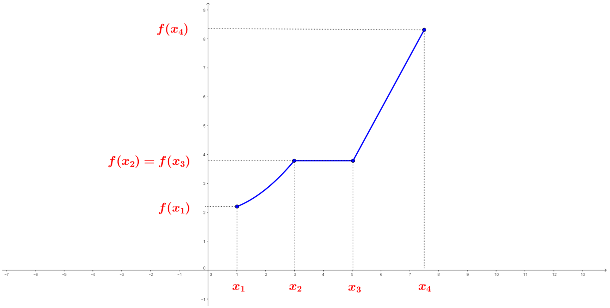


Obr.: Rýdzo rastúca funkcia

RFJRP - vlastnosti funkcií

Definícia

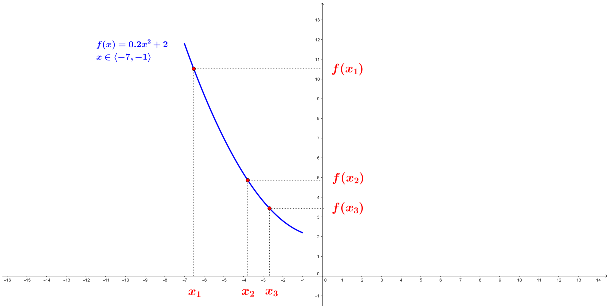
Funkcia f sa nazýva **rastúca (neklesajúca)** *na množine $M \subset D(f)$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in M$ také, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.*



Obr.: Neklesajúca funkcia

Definícia

Funkcia f sa nazýva **rýdzo (ostro) klesajúca** *na množine $M \subset D(f)$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in M$ také, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.*

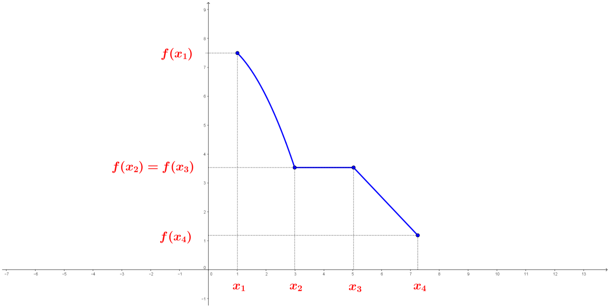


Obr.: Rýdzo klesajúca funkcia

RFJRP - vlastnosti funkcií

Definícia

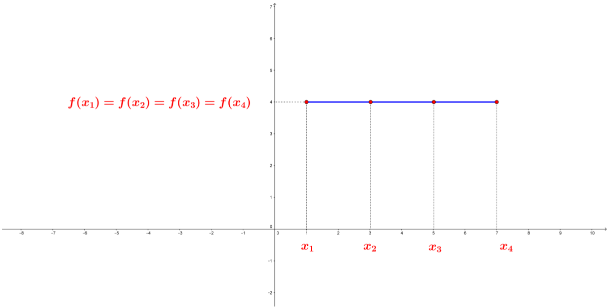
Funkcia f sa nazýva **klesajúca (nerastúca)** *na množine $M \subset D(f)$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in M$ také, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.*



Obr.: Nerastúca funkcia

Definícia

Funkcia f *sa nazýva* **konštatná (stacionárna)** *na množine* $M \subset D(f)$, *ak pre všetky* $x_1, x_2 \in M$ *také, že* $x_1 < x_2$, *platí* $f(x_1) = f(x_2)$.



Obr.: Konštantná funkcia

RFJRP - vlastnosti funkcií

Definícia

Funkcia f sa nazýva **rýdzo monotónna** *na množine $M \subset D(f)$, ak je rýdzo rastúca alebo rýdzo klesajúca na množine M.*
Funkcia f sa nazýva **monotónna** *na množine $M \subset D(f)$, ak je rastúca alebo klesajúca na množine M.*

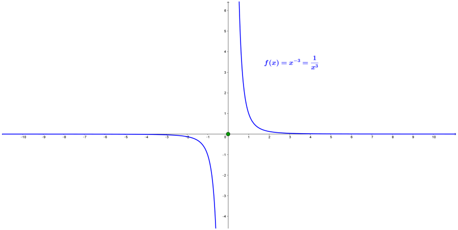
Veta

Ak je funkcia f na množine $D(f)$ rýdzo monotónna, tak je prostá.

pozn. Ak je funkcia f rastúca (klesajúca) na množine $M_1 \subset D(f)$ aj na množine $M_2 \subset D(f)$ takej, že $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, tak z toho nevyplýva, že f je rastúca (klesajúca) na množine $M_1 \cup M_2$.

Príklad

Majme funkciu $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Potom f je rýdzo klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$ aj na intervale $(0, \infty)$, ale nie je rýdzo klesajúca (ani klesajúca) na množine $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, lebo, napríklad, $f(-1) = -1 < f(1) = 1$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že je prostá.



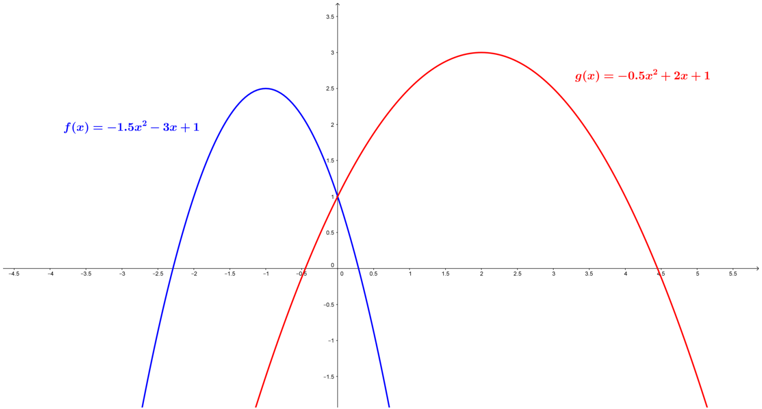
Obr.: Lokálne a globálne vlastnosti funkcie - monotónnosť

3) Ohraničenosť

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva

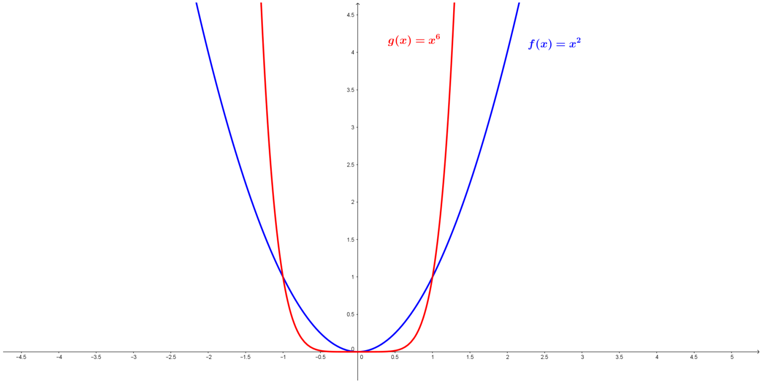
- **ohraničená zhora**, ak $\exists M \in R$ také, že $\forall x \in D(f) : f(x) \leq M$
- **ohraničená zdola**, ak $\exists m \in R$ také, že $\forall x \in D(f) : m \leq f(x)$
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora **a** ohraničená zdola,
- **neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora,
- **neohraničená zdola**, ak nie je ohraničená zdola,
- **neohraničená**, ak je neohraničená zhora **alebo** neohraničená zdola.

RFJRP - vlastnosti funkcií



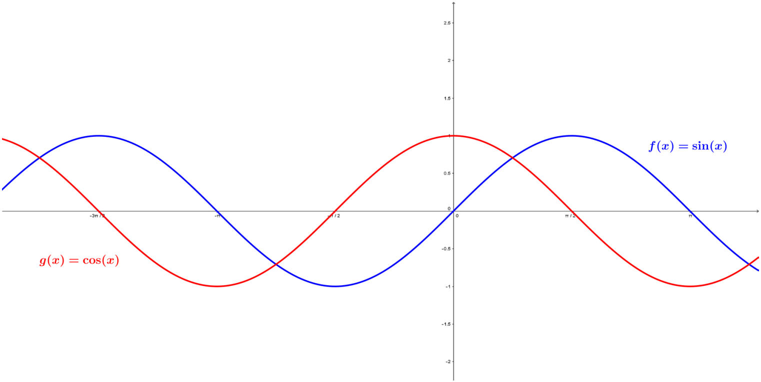
Obr.: Funkcia zhora ohraničená a zdola neohraničená, t.j. neohraničená

RFJRP - vlastnosti funkcií



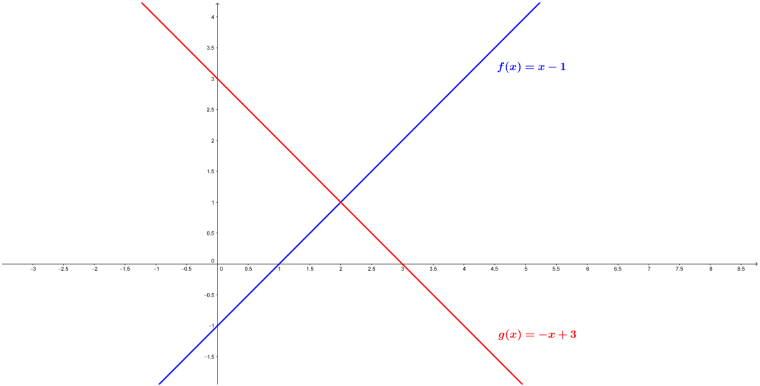
Obr.: Funkcia zhora neohraničená a zdola ohraničená, t.j. neohraničená

RFJRP - vlastnosti funkcií



Obr.: Funkcia ohraničená, ohraničená zhora a ohraničená zdola

RFJRP - vlastnosti funkcií



Obr.: Funkcia neohraničená zhora aj zdola

4) Lokálne extrémy

Definícia

Nech $f : X \to Y$ *je ľubovoľná funkcia. Hovoríme, že* $(x_M, f(x_M))$ *je* **lokálne maximum** *funkcie* f*, ak existuje* $\varepsilon > 0$ *také, že pre všetky* $x \in (x_M - \varepsilon, x_M + \varepsilon) \cap X$ *platí* $f(x_M) \geq f(x)$*.*

Inými slovami, f má lokálne maximálnu hodnotu $f(x_M) \in Y$, ktorá sa nadobúda v $x_M \in X$.

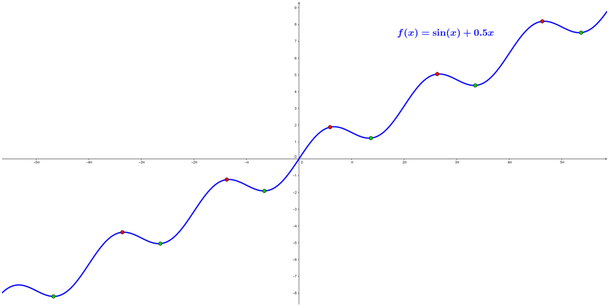
Definícia

Nech $f : X \to Y$ *je ľubovoľná funkcia. Hovoríme, že* $(x_m, f(x_m))$ *je* **lokálne minimum** *funkcie* f*, ak existuje* $\varepsilon > 0$ *také, že pre všetky* $x \in (x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon) \cap X$ *platí* $f(x_m) \leq f(x)$*.*

Inými slovami, f má lokálne minimálnu hodnotu $f(x_m) \in Y$ v $x_m \in X$.

RFJRP - vlastnosti funkcií

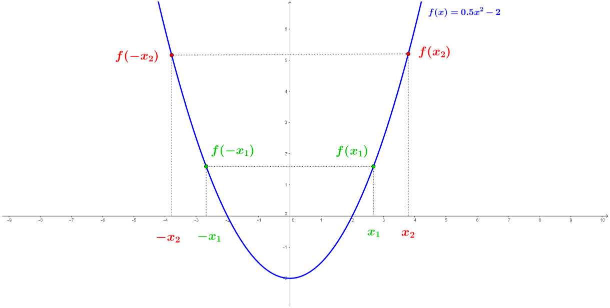
pozn. Funkcia f môže mať niekoľko (aj nekonečne veľa) lokálnych miním a maxím, t.j. napr. ak $f(x_M)$ je lokálne maximum funkcie f, tak to nemusí byť najväčšia hodnota, ktorú funkcia f dosahuje. Dokonca, ak $f(x_m)$ je jej lokálne minimum, tak sa môže stať, že $f(x_M) < f(x_m)$.



Obr.: Lokálne extrémy funkcie

5) Symetria (resp. súmernosť)

- Funkcia f sa nazýva **párna**, ak pre každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(x) = f(-x)$.

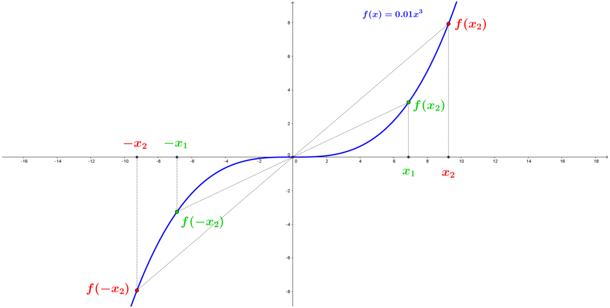


Obr.: Párna funkcia

pozn. Graf párnej funkcie je súmerný podľa y-ovej osi.

RFJRP - vlastnosti funkcií

- Funkcia f sa nazýva **nepárna**, ak pre každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $-f(x) = f(-x)$.



Obr.: Nepárna funkcia

pozn. Graf nepárnej funkcie je súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy.

RFJRP - vlastnosti funkcií

Príklad

Zistite, či je daná funkcia párna alebo nepárna:

1. $f(x) = \sin(x+5)$,
2. $g(x) = \frac{x^2}{1+2x^2}$,
3. $h(x) = \frac{2}{9}(x^3 - 12x)$,
4. $i(x) = 5 + \sqrt{\cos(x)}$,
5. $j(x) = \frac{5x^3+2x}{\sqrt{x^2+1}}$,

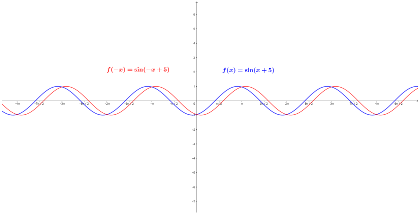
RFJRP - vlastnosti funkcií

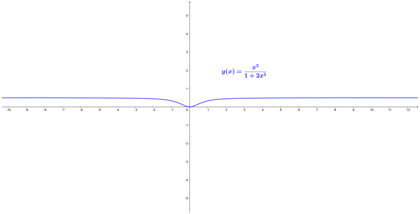
Príklad

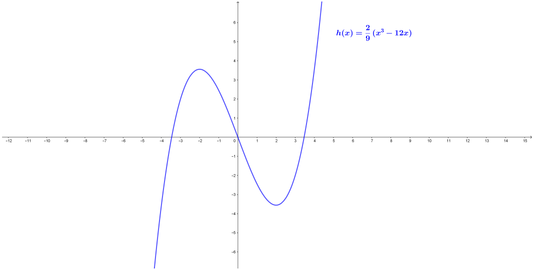
Zistite, či je daná funkcia párna alebo nepárna:

1. $f(x) = \sin(x+5)$, Funkcia $f(x)$ nie je ani párna ani nepárna.
2. $g(x) = \frac{x^2}{1+2x^2}$, Funkcia $g(x)$ je párna.
3. $h(x) = \frac{2}{9}(x^3 - 12x)$, Funkcia $h(x)$ je nepárna.
4. $i(x) = 5 + \sqrt{\cos(x)}$, Funkcia $i(x)$ je párna.
5. $j(x) = \frac{5x^3+2x}{\sqrt{x^2+1}}$, Funkcia $j(x)$ je nepárna.

RFJRP - vlastnosti funkcií

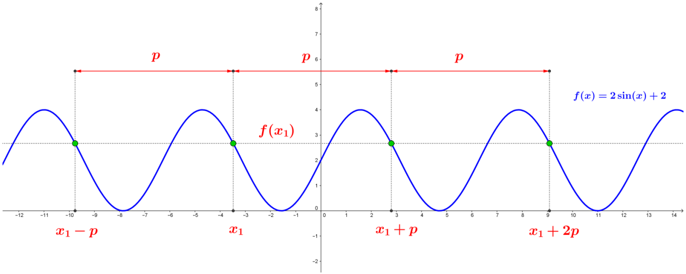






6) Periodičnosť (resp. periodicita)

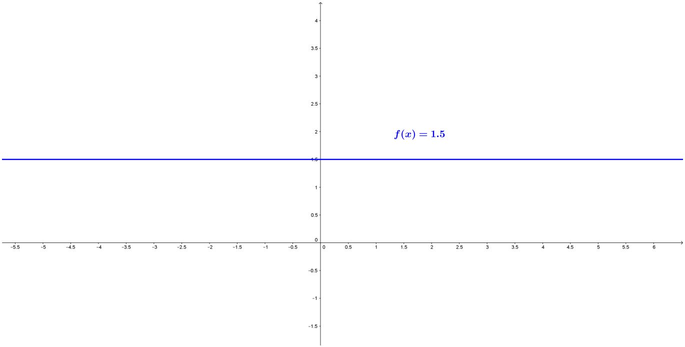
- Funkcia f sa nazýva **periodická**, ak $\exists p > 0$ také, že $f(x) = f(x+p)$ pre každé $x \in X$. Najmenšie číslo $\bar{p} > 0$ s vlastnosťou $f(x) = f(x+p)$ pre každé $x \in X$ sa nazýva primitívna (základná) perióda funkcie f.



Obr.: Periodická funkcia

RFJRP - vlastnosti funkcií

pozn. Konštantná funkcia, napr. $f(x) = 1.5$, je periodická, lebo pre každé $p > 0$ platí $f(x) = f(x+p)$, ale funkcia f nemá periódu, lebo interval $(0, \infty)$ nemá najmenší prvok.



Obr.: Konštantná funkcia

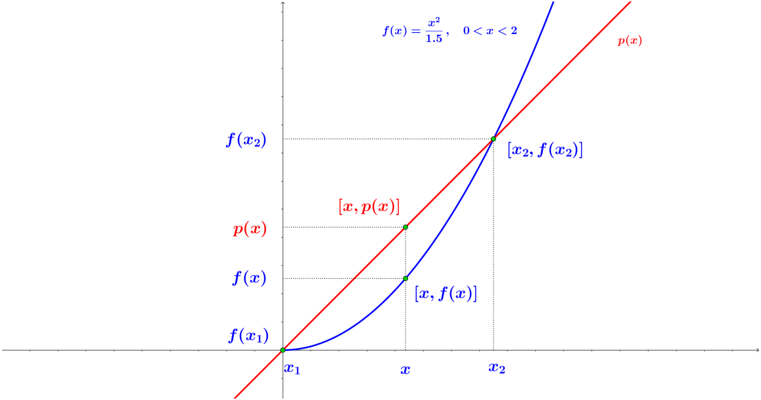
7) Konvexnosť a konkávnosť

Funkcia $y = f(x)$ sa na intervale $I \subset D(f)$ nazýva

- **konvexná**, ak pre $\forall x, x_1, x_2 \in I$ platí, ak $x_1 < x < x_2$, potom $f(x) \leq p(x)$,
- **konkávna**, ak pre $\forall x, x_1, x_2 \in I$ platí, ak $x_1 < x < x_2$, potom $f(x) \geq p(x)$,
- **rýdzo (ostro) konvexná**, ak pre $\forall x, x_1, x_2 \in I$ platí, ak $x_1 < x < x_2$, potom $f(x) < p(x)$,
- **rýdzo (ostro) konkávna**, ak pre $\forall x, x_1, x_2 \in I$ platí, ak $x_1 < x < x_2$, potom $f(x) > p(x)$

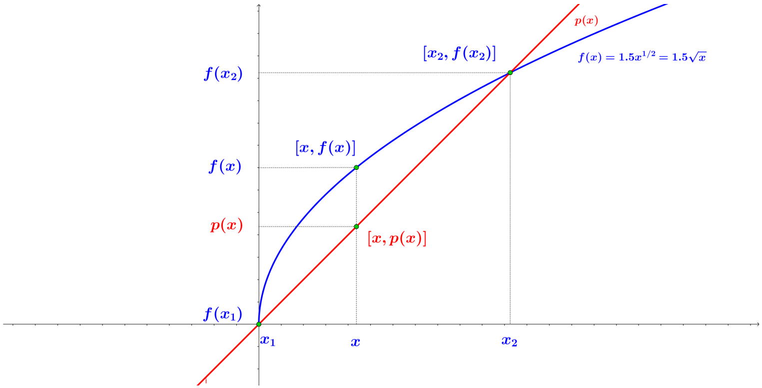
RFJRP - vlastnosti funkcií

Konvexná funkcia - graf funkcie leží pod spojnicou bodov.



Obr.: Konvexná funkcia

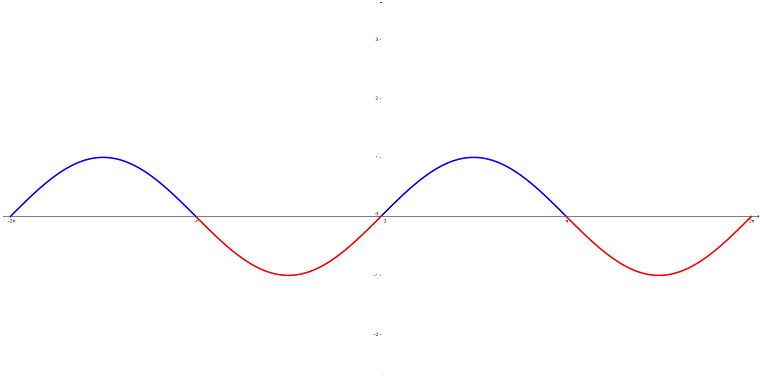
Konkávna funkcia - graf funkcie leží nad spojnicou bodov.



Obr.: Konkávna funkcia

RFJRP - vlastnosti funkcií

- Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie delia **inflexné body**. V týchto bodoch funkcia mení zakrivenie.



Obr.: Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie

RFJRP - vlastnosti funkcií

Príklad

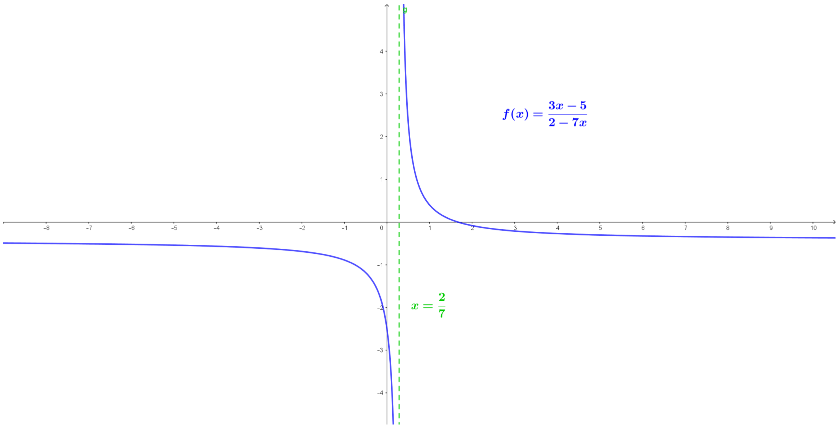
Popíšme vlastnosti funkcií určených nasledujúcimi rovnicami

$$\textbf{a)}\, f(x) = \frac{3x-5}{2-7x}, \quad \textbf{b)}\, g(x) = 3 - \sqrt{5-2x}, \quad \textbf{c)}\, h(x) = x^2 + x + 4$$

Riešenie:

a) Nech $f(x_1) = f(x_2)$, teda $\frac{3x_1-5}{2-7x_1} = \frac{3x_2-5}{2-7x_2}$. Po vynásobení obidvomi menovateľmi a úpravách dostaneme, že $x_1 = x_2$, teda f je prostá.
Nech $x_1 < x_2$ sú z $D(f) = \left(-\infty, \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{2}{7}, \infty\right)$. Funkcia f je klesajúca v obidvoch intervaloch $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$ a $\left(\frac{2}{7}, \infty\right)$.
Funkcia nie je ohraničená, nemá teda ani maximum ani minimum.
Funkcia teda nie je párna, ani nepárna, takisto nie je periodická.

RFJRP - vlastnosti funkcií



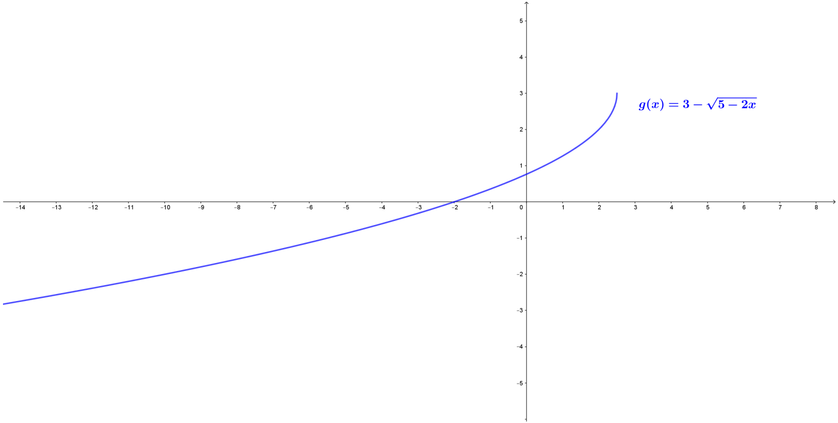
RFJRP - vlastnosti funkcií

b) Funkcia $g(x) = 3 - \sqrt{5-2x}$ je zložená z troch funkcií

$$g_1: \; y = 5 - 2x, \quad g_2: \; z = \sqrt{y}, \quad \text{a} \quad g_3: \; w = 3 - z.$$

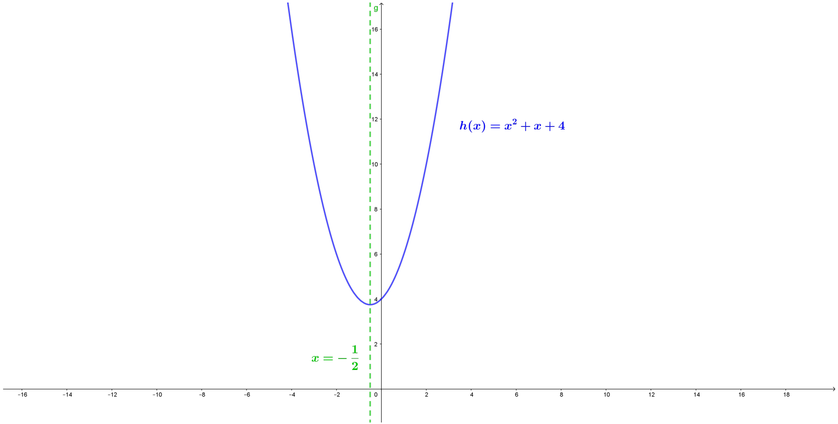
g je prostá, rastúca.
Pretože $D(g) = (-\infty, \frac{5}{2}\rangle$ a g je rastúca, nadobúda v bode $\frac{5}{2}$ maximálnu hodnotu 3 a je zhora ohraničená. Pre čísla x "blízke" $-\infty$ je $g_1(x)$ "blízke" ∞, $g_2 \circ g_1(x)$ taktiež a následne $g(x)$ je "blízke" $-\infty$. Preto g nie je ohraničená zdola.
V dôsledku svojho definičného oboru nemôže byť ani párna ani nepárna a ani periodická.

RFJRP - vlastnosti funkcií



RFJRP - vlastnosti funkcií

c) Keďže graf kvadratickej funkcie je ľahké načrtnúť, vlastnosti funkcie h vyčítame z jej grafu.



RFJRP - vlastnosti funkcií

Funkcia h nie je prostá, klesá v intervale $(-\infty, -\frac{1}{2})$ a rastie v intervale $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Je zdola ohraničená s minimom $\frac{15}{4}$ v bode $-\frac{1}{2}$ a zhora neohraničená. Nemá žiadnu z vlastností symetrie, jej graf je však symetrický podľa priamky $x = -\frac{1}{2}$

Ďakujem za pozornosť.