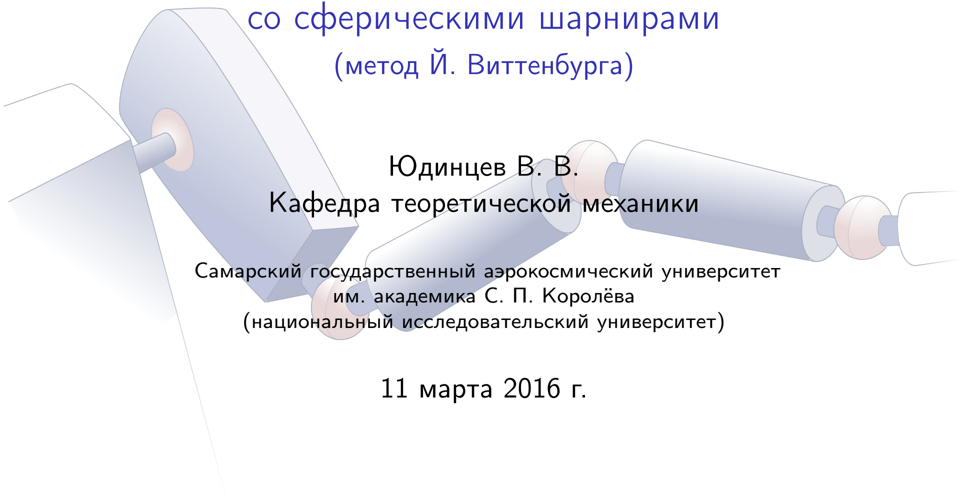
Уравнения движения систем со сферическими шарнирами

(метод Й. Виттенбурга)

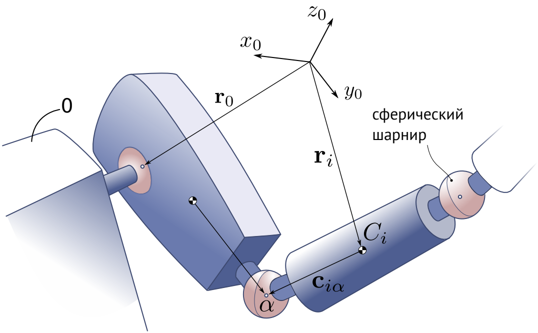


Юдинцев В. В.
Кафедра теоретической механики

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С. П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

11 марта 2016 г.

Рассматриваемый класс механических систем



- Структура взаимосвязей тел системы описывается ациклическим связанным графом – деревом.
- Одно из тел присоединено к телу 0, движение которого известно.
- Тела, связаны сферическими шарнирами.

Метод Й. Виттенбурга

- Для записи уравнений используются шарнирные координаты (углы Эйлера, Брайнта).
- В уравнения движения не входят реакции связей.
- Динамические уравнения:

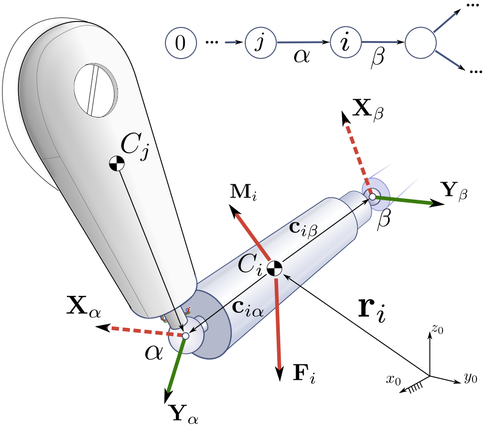
$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}). \tag{1}$$

- Кинематические уравнения:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}). \tag{2}$$

Й. Виттенбург Динамика систем твёрдых тел / М.: Мир, 1980.

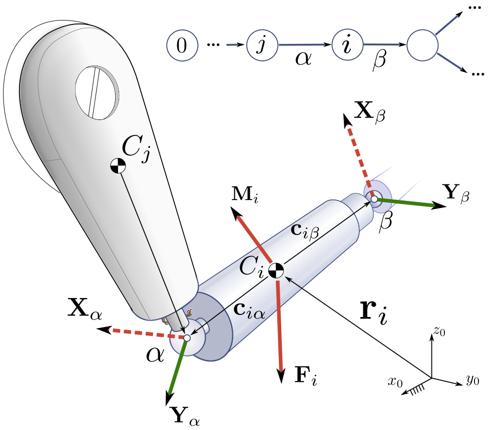
Уравнения движения центра масс



- $\mathbf{F}_i$ – главный вектор внешних сил, действующих на тело i.
- $\mathbf{M}_i$ – главный момент, действующий на тело i.
- $\mathbf{X}_\alpha$ – сила реакции в шарнире α.
- $\mathbf{c}_{i\alpha}, \mathbf{c}_{i\beta}$ – шарнирные векторы.

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{n} S_{i\alpha} \mathbf{X}_\alpha^c, \quad i = 1, \dots, n.$$

Уравнения движения вокруг центра масс



- $\mathbf{L}_i$ – момент количества движения тела i.
- $\mathbf{M}_i$ – главный момент, действующий на тело i.
- $\mathbf{X}_\alpha$ – сила реакции в шарнире α.
- $\mathbf{Y}_\alpha$ – шарнирный момент в шарнире α.

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{M}_i + \sum_{\alpha=1}^{n} S_{i\alpha}(\mathbf{c}_{i\alpha} \times \mathbf{X}^c_\alpha + \mathbf{Y}_\alpha), \quad i = 1, \dots, n.$$

Система уравнений движения

$$\begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum\limits_{a=1}^{n} S_{ia} \mathbf{X}_a^c, \\ \dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{M}_i + \sum\limits_{a=1}^{n} S_{ia} (\mathbf{c}_{ia} \times \mathbf{X}_a^c + \mathbf{Y}_a). \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

Уравнения движения центра масс тела

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{X}_a^c, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

объединяются в одно матричное уравнение

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{S}\mathbf{X}^c, \tag{5}$$

где столбцы векторов

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^c \\ \mathbf{X}_2^c \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^c \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\mathbf{m} = \mathrm{diag}(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ – диагональная матрица масс.

Уравнения движения вокруг центра масс

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}(\mathbf{c}_{ia} \times \mathbf{X}_a^c + \mathbf{Y}_a), \quad i = 1, \dots, n, \tag{7}$$

объединяются в одно матричное уравнение

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{X}^c + \mathbf{S}\mathbf{Y} \tag{8}$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{X}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^c \\ \mathbf{X}_2^c \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^c \end{bmatrix}, \ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

$\mathbf{C}$ – $(n \times n)$ матрица векторов с элементами: $\mathbf{C}_{ia} = S_{ia}\mathbf{c}_{ia}$, $i, a = 1, \dots, n$.

Система матричных уравнений

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{S}\mathbf{X}^c, \tag{10}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{X}^c + \mathbf{S}\mathbf{Y}. \tag{11}$$

Умножив (10) слева на $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$, можно выразить силы реакции $\mathbf{X}^c$

$$\mathbf{X}^c = \mathbf{T}(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}). \tag{12}$$

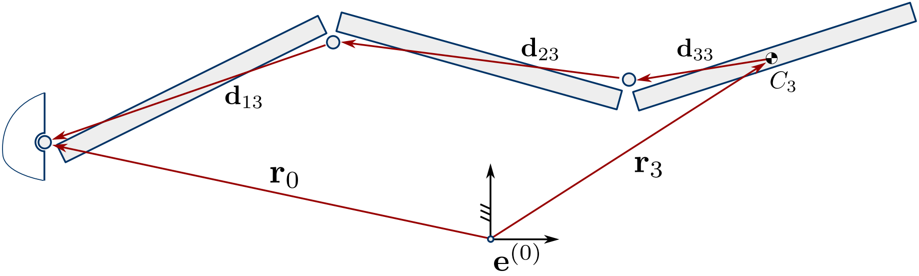
и исключить из (11) силу реакции:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{C}\mathbf{T} \times (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{Y}}$$

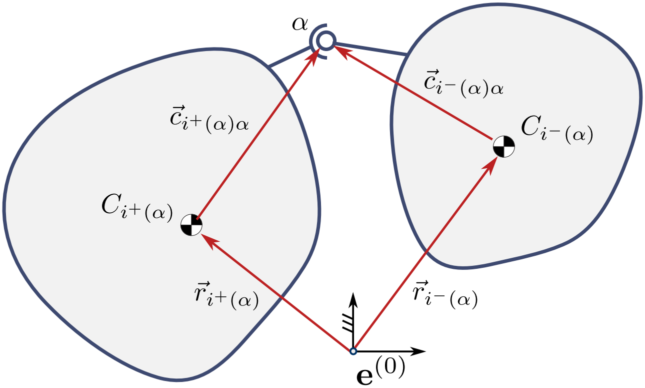
Кинематика относительного движения тел

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}}$$

Между $\ddot{\mathbf{r}}_i$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$, которые входят в $\dot{\mathbf{L}}$, есть связь, определяемая кинематикой относительного движения тел в системе.



Кинематика относительного движения тел



$$(\mathbf{r}_{i+(\alpha)} + \mathbf{c}_{i+(\alpha)\alpha}) - (\mathbf{r}_{i-(\alpha)} + \mathbf{c}_{i-(\alpha)\alpha}) = 0,\ \alpha = 1, \ldots, n. \qquad (13)$$

Кинематика относительного движения тел

$$(\mathbf{r}_{i^+(\alpha)\alpha} + \mathbf{c}_{i^+(\alpha)\alpha}) - (\mathbf{r}_{i^-(\alpha)} + \mathbf{c}_{i^-(\alpha)\alpha}) = 0,\ \ a = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

или, используя матрицу $\boldsymbol{S}$:

$$\sum_{i=0}^{n} S_{i\alpha}(\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{i\alpha}) = 0,\ \ a = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Кинематика относительного движения тел

Движение тела 0 известно: $\mathbf{r}_0(t), \boldsymbol{\omega}_0(t)$.

Базис, связанный с телом 0, удобней поместить в первую шарнирную точку, соединяющую тело 0 с первым телом системы.

В этом случае $\mathbf{c}_{0\alpha} = 0$ для всех $\alpha = 1, \ldots, n$.

$$\sum_{i=0}^{n} S_{i\alpha}(\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{i\alpha}) = 0, \ \alpha = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

$$S_{0\alpha}\mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{n}(S_{i\alpha}\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_{i\alpha}) = 0, \ \alpha = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Векторы $\mathbf{r}_i$

$$S_{0\alpha}\mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{n}(S_{i\alpha}\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_{i\alpha}) = 0,\ \ \alpha = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

Матричная форма

$$\mathbf{r}_0\mathbf{S}_0^T + \mathbf{S}^T\mathbf{r} + \mathbf{C}^T\mathbf{1}_n = \mathbf{0}. \tag{19}$$

Умножив (19) слева на $\mathbf{T}^T$, можно выразить столбец радиус-векторов тел:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\mathbf{1}_n - (\mathbf{CT})^T\mathbf{1}_n. \tag{20}$$

$\mathbf{CT}$ – матрица с элементами $\mathbf{d}_{ij}$:

$$\boxed{\mathbf{d}_{ij} = (\mathbf{CT})_{ij} = \sum_{a=1}^{n} T_{aj}S_{ia}\mathbf{c}_{ia},\ \ i, j = 1, \ldots, n} \tag{21}$$

Векторы $\mathbf{d}_{ij}$

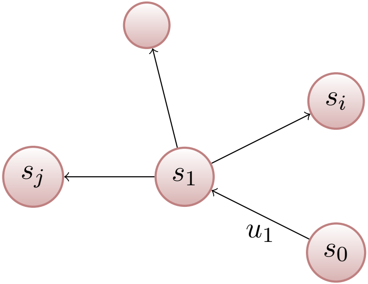
$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^{n} T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}, \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Произведения $T_{ai}S_{ja}$ отличны от нуля

- для дуг u_a, которые принадлежат пути между s_0 и s_i $(T_{ai} \neq 0)$
- и которые инцидентны s_j $(S_{ja} \neq 0)$.

Три случая взаимного положения вершин

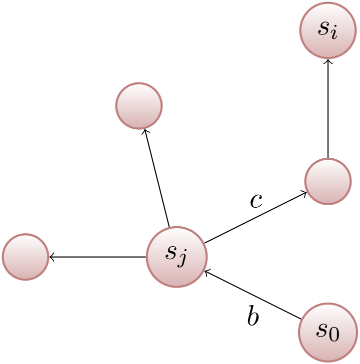
$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^{n} T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja},\ \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{23}$$



Если s_j не лежит на пути от тела 0 к телу s_i - в этом случае ни одна из дуг не вносит вклад в сумму (25) и, следовательно, $\mathbf{d}_{ij} = 0$;

Три случая взаимного положения вершин

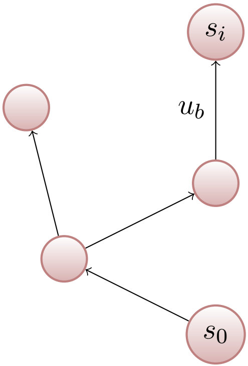
$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^{n} T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}, \; i,j = 1,\ldots,n. \qquad (24)$$



Если s_j лежит на пути от тела 0 к телу s_i - в этом случае вклад в сумму (25) вносят две дуги, обозначим их индексами b и c, и следовательно $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{c}_{jb} - \mathbf{c}_{jc}$, поскольку $T_{bi} S_{jb} = +1$, $T_{ci} S_{jc} = -1$, где b - индекс дуги u_b, предшествующей вершине s_i.

Векторы $\mathbf{d}_{ij}$

$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^{n} T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}, \; i, j = 1, \ldots, n. \tag{25}$$



Если s_j и s_i - одно тело, в этом случае только дуга u_b предшествующая s_i:

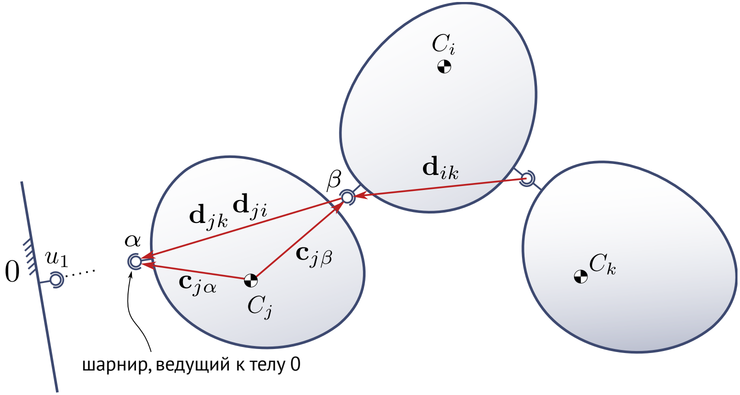
$$S_{ib} = \pm 1,$$

дает вклад в сумму и, следовательно

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{c}_{ib}.$$

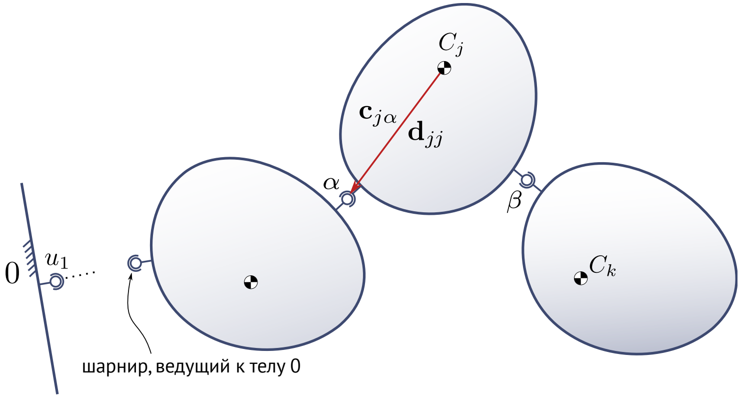
Определение вектора $\mathbf{d}_{ji}$

Если $i \neq j$, то вектор $\mathbf{d}_{ji}$ выходит из шарнирной точки, расположенной на теле j и ведущей к телу i и заканчивается в шарнирной точке тела j, ведущей к телу 0.



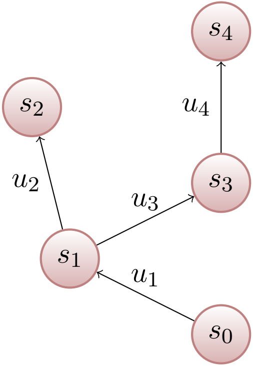
Определение вектора $\mathbf{d}_{ji}$

Если $i = j$, то вектор $\mathbf{d}_{jj}$ выходит из центра масс тела j и заканчивается в шарнирной точке тела j, ведущей к телу 0.



Определение вектора $\mathbf{d}_{ji}$

$$\forall\, i, j : s_i < s_j \;\vee\; (s_i \nleq s_j \;\wedge\; s_j \nleq s_i) \rightarrow \mathbf{d}_{ij} = 0$$



$$\mathbf{d}_{21} = \mathbf{d}_{23} = \mathbf{d}_{24} = \mathbf{d}_{42} = \mathbf{d}_{43} = \mathbf{d}_{41} = \mathbf{d}_{31} = \mathbf{d}_{32} = 0$$

Векторы $\mathbf{g}_{ij}$

Подставим в уравнение движения

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}}$$

вторую производную по времени от $\mathbf{r}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{1}_n - (\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n.$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n - (\mathbf{CT}) \times (\ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{m} \mathbf{1}_n - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}} \tag{26}$$

$\mathbf{g}_{ij}$ – элементы матрицы $(\mathbf{CT}) \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^T$:

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{jk}, \; i, j = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Векторы $\mathbf{g}_{ij}$

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{jk}, \; i, j = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Четыре случая сочетаний индексов i и j:

1. $i = j$;
2. $s_i < s_j \Rightarrow$ для $\forall s_k : s_i < s_k,\ \mathbf{d}_{ik} = \mathbf{d}_{ij}$;
3. $s_j < s_i \Rightarrow$ для $\forall s_k : s_j < s_k,\ \mathbf{d}_{jk} = \mathbf{d}_{ji}$;
4. все прочие случаи.

$\mathbf{g}_{ij}$ при $i = j$

При $i = j$ выражение

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{jk}, \ \ i, j = 1, \ldots, n, \tag{29}$$

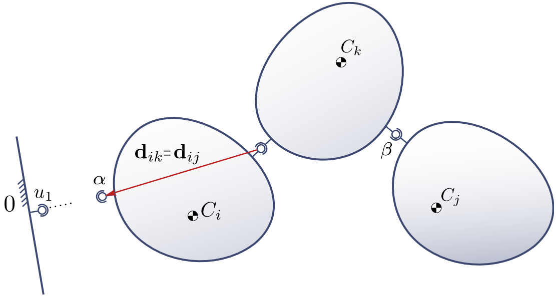
принимает следующий вид:

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}, \ \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

$\mathbf{g}_{ij}$ при $s_i < s_j$

При $s_i < s_j$

$$\forall s_k : s_i < s_k, \ \mathbf{d}_{ik} = \mathbf{d}_{ij}, \tag{31}$$



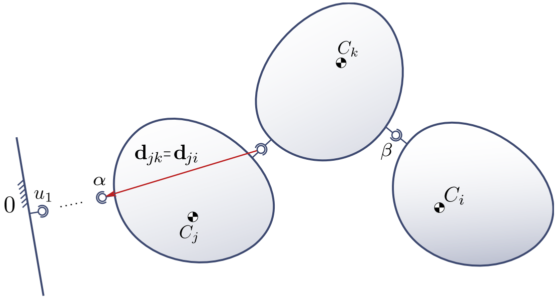
следовательно

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{jk} = \mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{d}}_{jk}, \ \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{32}$$

$\mathbf{g}_{ij}$ при $s_j < s_i$

При $s_j < s_i$

$$\forall s_k : s_j < s_k,\ \mathbf{d}_{jk} = \mathbf{d}_{ji}, \tag{33}$$



следовательно

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ji},\ \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{34}$$

$\mathbf{g}_{ij}$ при $s_j \not\leq s_i$ и $s_i \not\leq s_j$

При $s_j \not\leq s_i$ и $s_i \not\leq s_j$

$$\forall s_k : \text{ или } \mathbf{d}_{jk} = 0 \text{ или } \mathbf{d}_{ji} = 0, \tag{35}$$

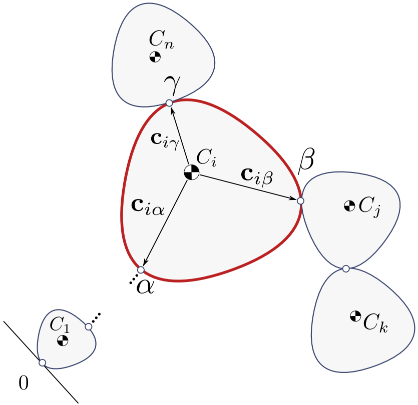
следовательно

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{jk} = 0. \tag{36}$$

Векторы $\mathbf{g}_{ij}$

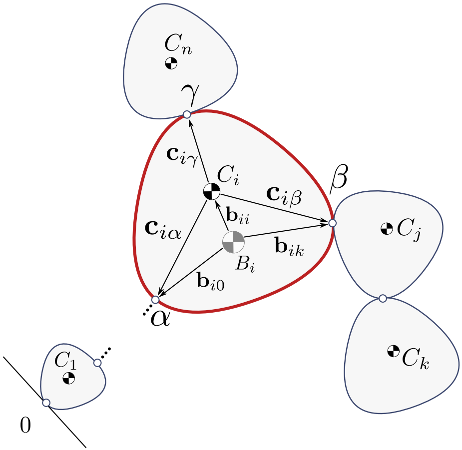
$$\mathbf{g}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}, & s_i = s_j \\ \mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{d}}_{jk}, & s_i < s_j \\ \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ji}, & s_j < s_i \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{37}$$

Дополненное тело



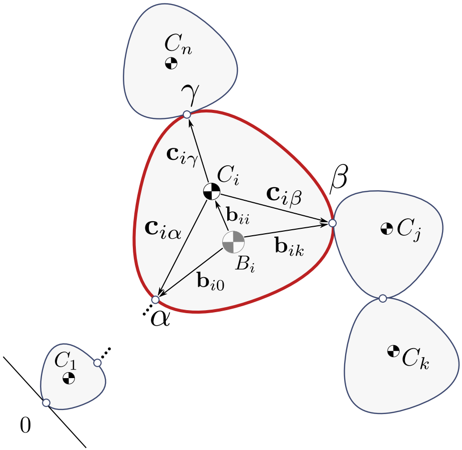
Тело i с дополнительными сосредоточенными массами в шарнирных точках. В каждую шарнирную точку тела i помещается масса всех тел, прямо или косвенно закрепленных при помощи этого шарнира.

Барицентр



- Для дополненного тела может быть определено положение центра масс B_i.
- Барицентр тела i – центр масс дополненного тела B_i.

Векторы $\mathbf{b}_{ij}$



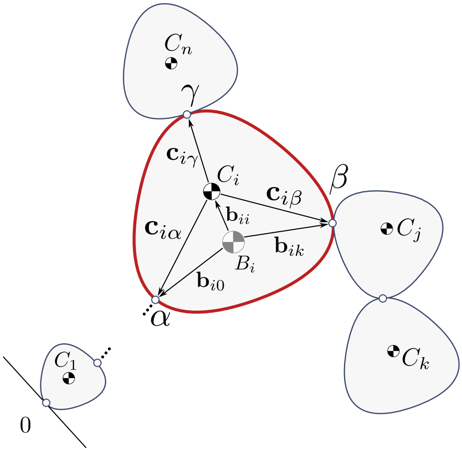
- Положение барицентра определяется векторами $\mathbf{b}_{ij}$.
- Векторы $\mathbf{b}_{ij}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_{ij} m_j = 0. \tag{38}$$

- Для системы, изображённой на рисунке

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{ik} \tag{39}$$

Векторы $\mathbf{b}_{ij}$ и $\mathbf{d}_{ij}$



Векторы $\mathbf{b}_{ij}$ и $\mathbf{d}_{ij}$ связаны соотношениями:

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ij}. \qquad (40)$$

$$\mathbf{d}_{ik} = \mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ik}. \qquad (41)$$

Упрощение $\mathbf{g}_{ij}$

Используя

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ij},\ \ i, j = 1, \ldots, n.$$

$$\mathbf{g}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}, \\ \mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{d}}_{jk}, \\ \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ji}, \\ 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik},\ \ s_i = s_j \\ M\mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0},\ \ s_i < s_j \\ M\mathbf{b}_{i0} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ji},\ \ s_j < s_i \\ 0,\ \ \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{42}$$

Пример преобразования для случая $s_i < s_j$:

$$\mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{d}}_{jk} \rightarrow \mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{b}}_{j0} - \mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{b}}_{jk} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{d}_{ij} \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k}_{M} \ddot{\mathbf{b}}_{j0} - \mathbf{d}_{ij} \times \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{b}_{jk}}_{0} \rightarrow M\mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0}$$

Подставив выражения (42) для $\mathbf{g}_{ij}$ в уравнение (26)

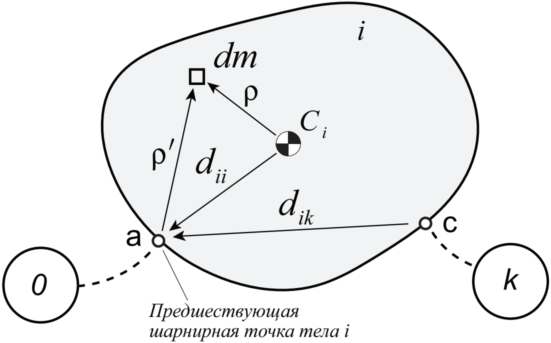
$$\dot{\mathbf{L}} - \underbrace{\mathbf{CT} \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^T}_{[\mathbf{g}]_{ij}} \mathbf{1}_n - (\mathbf{CT}) \times (\ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{m} \mathbf{1}_n - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}, \tag{43}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{j=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik} + M \left(\sum_{j:s_i<s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \mathbf{b}_{i0} \times \sum_{j:s_j<s_i} \ddot{\mathbf{d}}_{ji} \right) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times (m_j \ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{F}_j) = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia} \mathbf{Y}_a, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{44}$$

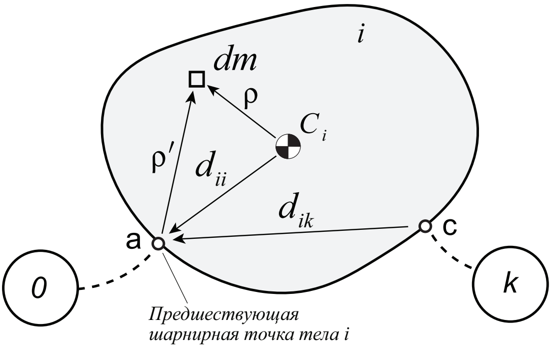
Далее необходимо выразить через угловые скорости и ускорения тела векторы $\dot{\mathbf{L}}_i$, $\ddot{\mathbf{b}}_{j0}$, $\ddot{\mathbf{d}}_{ji}$.

Момент количества движения тела i



$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} - \mathbf{d}_{ii}$$

$$\mathbf{L}_i' = \int_m \boldsymbol{\rho}' \times \dot{\boldsymbol{\rho}}' dm \rightarrow \mathbf{L}_i' = \int_m (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{d}_{ii}) \times (\dot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\mathbf{d}}_{ii}) dm$$



Производная $\mathbf{L}_i'$:

$$\frac{d\mathbf{L}_i'}{dt} = \int_{m_i} (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{d}_{ii}) \times (\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \ddot{\mathbf{d}}_{ii}) dm = \int_{m_i} \boldsymbol{\rho} \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{45}$$

Учитывая, что $\int_m \rho dm = 0$:

$$\frac{d\mathbf{L}_i'}{dt} = \dot{\mathbf{L}}_i + m_i \mathbf{d}_{ii} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ii}. \tag{46}$$

Если выражению

$$\frac{d\mathbf{L}_i'}{dt} = \dot{\mathbf{L}}_i + m_i \mathbf{d}_{ii} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ii}.$$

добавить сумму $\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}$, то получатся два первых члена в уравнении

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{j=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}} + M \left(\sum_{j:s_i<s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \mathbf{b}_{i0} \times \sum_{j:s_i<s_j} \ddot{\mathbf{d}}_{ji} \right) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times (m_j \ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{F}_j) = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia} \mathbf{Y}_a, \ \ i = 1, \dots, n,$$

$\dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{j=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}$ – абсолютная производная по времени момента количества абсолютного движения дополненного тела i относительно его предшествующей шарнирной точки.

Тензор инерции дополненного тела

- Пусть $\mathbf{K}_i$ - тензор инерции дополненного тела i по отношению к его предшествующей шарнирной точке.
- Связь между $\mathbf{K}_i$ и центральным тензором инерции тела $\mathbf{J}_i$:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^{n} m_k(\mathbf{d}_{ik}^2\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ik}\mathbf{d}_{ik}), \; i = 1, \ldots, n. \tag{47}$$

- Тензор инерции $\mathbf{K}_i$ отличается от тензора инерции тела $\mathbf{J}_i$ учётом сосредоточенных масс в шарнирных точках.

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^{n} m_k(\mathbf{d}_{ik}^2\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ik}\mathbf{d}_{ik}), \; i = 1, \dots, n. \tag{48}$$

Два первых члена уравнения движения можно выразить, используя угловую скорость вращения тела $\boldsymbol{\omega}_i$:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{j=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}} = \mathbf{K}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_i\boldsymbol{\omega}_i. \tag{49}$$

В выражении

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times (m_j \ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{F}_j) = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ij}) \times \ddot{\mathbf{r}}_0 m_j + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \\ = \mathbf{b}_{i0} \times \ddot{\mathbf{r}}_0 M - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times (m_j \ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{F}_j) \quad (50)$$

множитель $\mathbf{d}_{ij}$ отличен от нуля только для тех значений j, которые удовлетворяют соотношению $s_i \leq s_j$. Учитывая это, преобразуем уравнения движения к виду

$$\mathbf{K}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_i \boldsymbol{\omega}_i + M \left[\sum_{j: s_i < s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \mathbf{b}_{i0} \times \left(-\ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j: s_j < s_i} \ddot{\mathbf{d}}_{ji}\right) \right] + \\ + \sum_{j: s_i < s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia} \mathbf{Y}_a, \; i = 1, \ldots, n. \quad (51)$$

Производные векторов $\mathbf{b}_{j0}$ и $\mathbf{d}_{ji}$

Векторы $\mathbf{b}_{j0}$ и $\mathbf{d}_{ji}$ связаны с телом j, поэтому их производные определяются движением тела j:

$$\ddot{\mathbf{b}}_{j0} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times \mathbf{b}_{j0} + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{b}_{j0}),\ \ i, j = 1, \ldots, n, \tag{52}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{ji} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times \mathbf{d}_{ji} + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{d}_{ji}),\ \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{53}$$

Уравнения движения

После подстановки $\ddot{\mathbf{b}}_{j0}$ и $\ddot{\mathbf{d}}_{ji}$

$$\mathbf{K}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + M\left[\sum_{j:s_i<s_j}\mathbf{d}_{ij}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\times\mathbf{b}_{j0}) + \mathbf{b}_{i0}\times\sum_{j:s_j<s_i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\times\mathbf{d}_{ji}\right] =$$

$$= \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a,\ \ i = 1,\ldots,n. \quad (54)$$

где

$$\mathbf{M}'_i = -\boldsymbol{\omega}_i\times\mathbf{K}_i\boldsymbol{\omega}_i - M\left[\sum_{j:s_i<s_j}\mathbf{d}_{ij}\times(\boldsymbol{\omega}_j\times(\boldsymbol{\omega}_j\times\mathbf{b}_{j0})) - \mathbf{b}_{i0}\times\ddot{\mathbf{r}}_0 + \right.$$

$$\left. +\mathbf{b}_{i0}\times\sum_{j:s_j<s_i}\boldsymbol{\omega}_j\times(\boldsymbol{\omega}_j\times\mathbf{d}_{ji})\right] - \sum_{j:s_i\le s_j}\mathbf{d}_{ij}\times\mathbf{F}_j,\ \ i = 1,\ldots,n. \quad (55)$$

Тензорная запись векторного произведения

Двойные векторные произведения выражаются через тензорные произведения следующим образом:

$$\mathbf{d}_{ij} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times \mathbf{b}_{j0}) = (\mathbf{b}_{j0} \cdot \mathbf{d}_{ij}\mathbf{E} - \mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_j. \tag{56}$$

где

- $\mathbf{b}_{j0} \cdot \mathbf{d}_{ij}$ – скалярное произведение в координатной форме, записываемое в виде
$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$
- $\mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij}$ – диадное произведение в координатной форме, записываемое в виде:
$$\mathbf{a}\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}.$$

Тензоры $\mathbf{K}_{ij}$

Уравнения

$$\mathbf{K}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + M\left[\sum_{j:s_i<s_j}\mathbf{d}_{ij}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\times\mathbf{b}_{j0}) + \mathbf{b}_{i0}\times\sum_{j:s_j<s_i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\times\mathbf{d}_{ji}\right] =$$

$$= \mathbf{M}_i' + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a,\ \ i = 1,\dots,n \qquad (57)$$

после замены векторных произведений на тензорные произведения принимают вид

$$\mathbf{K}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + M\left[\sum_{j:s_i<s_j}(\mathbf{b}_{j0}\cdot\mathbf{d}_{ij}\mathbf{E} - \mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij})\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j:s_j<s_i}(\mathbf{d}_{ji}\cdot\mathbf{b}_{i0}\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0})\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\right] = \mathbf{M}_i' + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a,\ i = 1,\dots,n.$$

Тензоры $\mathbf{K}_{ij}$

Первые три слагаемых уравнения

$$\mathbf{K}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + M\left[\sum_{j:s_i<s_j}(\mathbf{b}_{j0}\cdot\mathbf{d}_{ij}\mathbf{E}-\mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij})\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j:s_j<s_i}(\mathbf{d}_{ji}\cdot\mathbf{b}_{i0}\mathbf{E}-\mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0})\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\right] = \mathbf{M}_i' + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a, \; i = 1, \ldots, n.$$

объединяются при помощи тензоров $\mathbf{K}_{ij}$:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0}\cdot\mathbf{d}_{ij}\mathbf{E}-\mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji}\cdot\mathbf{b}_{i0}\mathbf{E}-\mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0}), & s_j < s_i, \\ \mathbf{0}, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{58}$$

Тензоры $\mathbf{K}_{ij}$

При помощи тензоров $\mathbf{K}_{ij}$ уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ij} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia} \mathbf{Y}_a, \;\; i = 1, \ldots, n. \tag{59}$$

Уравнения движения

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ij}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \mathbf{M}_i' + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a, \;\; i = 1, \ldots, n} \tag{60}$$

где

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0} \cdot \mathbf{d}_{ij}\mathbf{E} - \mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji} \cdot \mathbf{b}_{i0}\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0}), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{61}$$

Вектор $\mathbf{M}'_i$

$$\mathbf{M}'_i = -\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - M \left[\sum_{j:s_i<s_j} \mathbf{d}_{ij} \times (\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{b}_{j0})) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{b}_{i0} \times \left(\sum_{j:s_j<s_i} \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{d}_{ji}) - \ddot{\mathbf{r}}_0 \right) \right] - \sum_{j:s_i \leq s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \mathbf{F}_j, \;\; i = 1, \ldots n.$$

Преобразование координат

- Выполнение операций необходимо проводить над координатными столбцами в одной системе координат.
- Необходимо использовать матрицы ортогональных преобразований:
  $\mathbf{A}^i$ – матрица преобразования координат из базиса i в базис 0
  $\mathbf{A}^{ij}$ – матрица преобразования координат из базиса j в базис i
- Матрицы $\mathbf{A}^i$ определяются из кинематических уравнений, интегрируемых совместно с динамическими уравнениями.

Тензоры $\mathbf{K}_{ij}$ в базисе 0

$$
\mathbf{K}_{ij}^{(0)} = \begin{cases}
\mathbf{A}^i \mathbf{K}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT}, & i = j, \\
M \left[(\mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0}^{(j)})^T \mathbf{d}_{ij}^{(i)} \mathbf{E} - \mathbf{A}^j \mathbf{b}_{j0}^{(j)} (\mathbf{A}^i \mathbf{d}_{ij}^{(i)})^T \right], & s_i < s_j, \\
M \left[(\mathbf{A}^{ij} \mathbf{d}_{ji}^{(j)})^T \mathbf{b}_{i0}^{(i)} \mathbf{E} - \mathbf{A}^j \mathbf{d}_{ji}^{(j)} (\mathbf{A}^i \mathbf{b}_{i0}^{(i)})^T \right], & s_j < s_i, \\
0, & \text{в других случаях.}
\end{cases}
$$

$$
\mathbf{K}_i^{(i)} = \mathbf{J}_i^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} m_k (|d_{ik}|^2 \mathbf{E} - \mathbf{d}_{ik}^{(i)} \mathbf{d}_{ik}^{(i)T}), \; i = 1, \ldots, n. \qquad (62)
$$

Координатная форма вектора $\mathbf{M}'_i$

$$\mathbf{M}_i'^{(i)} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{K}_i^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} - M \left[\sum_{j:s_i<s_j} \tilde{\mathbf{d}}_{ij}^{(i)} \mathbf{A}^{ij} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{b}_{j0}^{(j)} + \right.$$

$$\left. + \tilde{\mathbf{b}}_{i0}^{(i)} \left(\sum_{j:s_j<s_i} \mathbf{A}^{ij} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{d}_{ji}^{(j)} - \mathbf{A}^{iT} \ddot{\mathbf{r}}_0^{(0)} \right) \right] -$$

$$- \sum_{j:s_i\le s_j} \tilde{\mathbf{d}}_{ij}^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{F}_j^{(0)}, \; i = 1, \ldots n. \qquad (63)$$

$$\mathbf{M}_i'^{(0)} = \mathbf{A}^i \mathbf{M}_i'^{(i)} \qquad (64)$$

Кинематические уравнения

Для определения матриц $\mathbf{A}^i$ необходимо к динамическим уравнениям добавить кинематические уравнения, связывающие производные параметров, определяющих ориентацию каждого тела с его угловой скоростью:

- углы Эйлера;
- углы Брайнта;
- кватернионные параметры;
- элементы матрицы поворота.

Кинематические уравнения для углов Брайнта (1-2-3)

Кинематические уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{i1} \\ \dot{\alpha}_{i2} \\ \dot{\alpha}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos\alpha_{i3}}{\cos\alpha_{i2}} & -\frac{\sin\alpha_{i3}}{\cos\alpha_{i2}} & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ -\cos\alpha_3\tan\alpha_2 & \sin\alpha_3\tan\alpha_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{ix}^{(i)} \\ \omega_{iy}^{(i)} \\ \omega_{iz}^{(i)} \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Матрица преобразования координат из базиса i в базис 0:

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 \\ s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 & s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 \end{bmatrix}. \tag{66}$$

где $s_1 = \sin\alpha_{i1}$, $s_2 = \sin\alpha_{i2}$, $s_3 = \sin\alpha_{i3}$, $c_1 = \sin\alpha_{i1}$, $c_2 = \cos\alpha_{i1}$, $c_3 = \cos\alpha_{i3}$.

Кинематические уравнения для углов Эйлера (3-1-3)

Кинематические уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\varphi_i}{\sin\theta_i} & \frac{\cos\varphi_i}{\sin\theta_i} & 0 \\ \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 \\ -\sin\varphi_i \operatorname{ctg}\theta_i & -\cos\varphi_i \operatorname{ctg}\theta_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{ix}^{(i)} \\ \omega_{iy}^{(i)} \\ \omega_{iz}^{(i)} \end{bmatrix}. \tag{67}$$

Матрица преобразования координат из базиса i в базис 0:

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} c_{\psi_i} c_{\varphi_i} - s_{\psi_i} c_{\theta_i} s_{\varphi_i} & -c_{\psi_i} s_{\varphi_i} - s_{\psi_i} c_{\theta_i} c_{\varphi_i} & s_{\psi_i} s_{\theta_i} \\ s_{\psi_i} c_{\varphi_i} + c_{\psi_i} c_{\theta_i} s_{\varphi_i} & -s_{\psi_i} s_{\varphi_i} + c_{\psi_i} c_{\theta_i} c_{\varphi_i} & -c_{\psi_i} s_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} s_{\varphi_i} & s_{\theta_i} c_{\varphi_i} & c_{\theta_i} \end{bmatrix}. \tag{68}$$

где $s_{\psi_i} = \sin\psi_i$, $s_{\theta_i} = \sin\theta_i$, $s_{\varphi_i} = \sin\varphi_i$, $c_{\psi_i} = \cos\psi_i$, $c_{\theta_i} = \cos\theta_i$, $c_{\varphi_i} = \cos\varphi_i$.