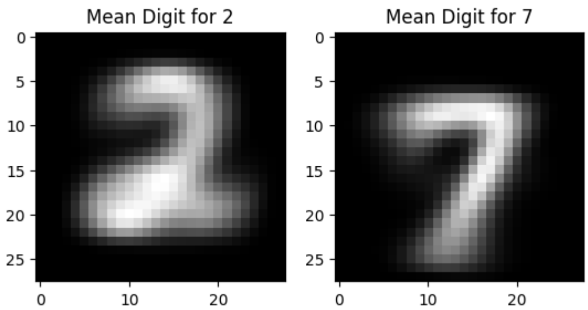
COMPUTER VISION LAB EXERCISE 5

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ
ΑΜ: 1072636

February 27, 2024

Ερώτημα 1 σελίδα 34

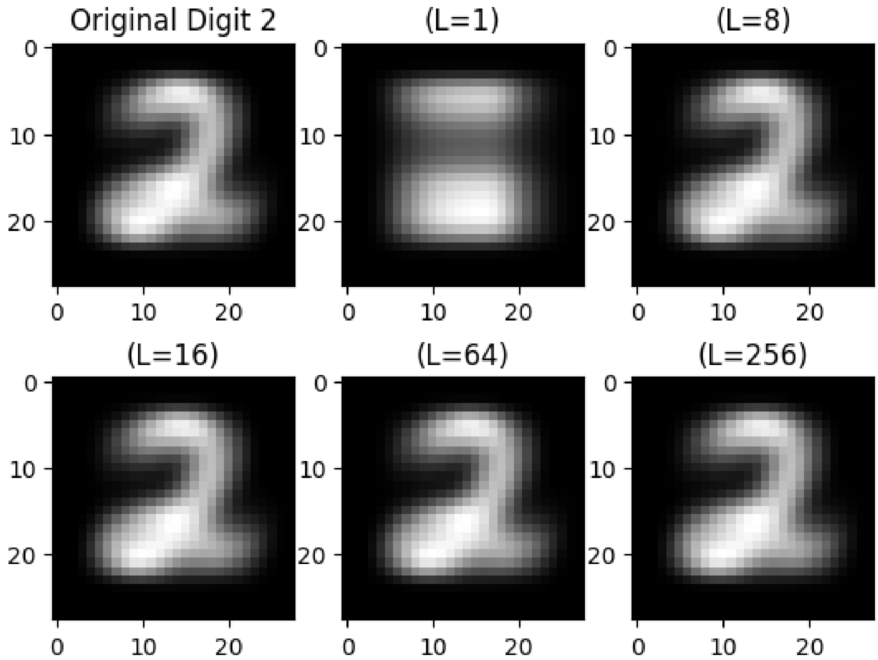
Επιλέγουμε τα ψηφία 2 και 7 από το MNIST dataset για να εφαρμόσουμε SVD πάνω σε αυτά.
α) Το μέσο ψηφίο για τα επιλεγμένα ψηφία:



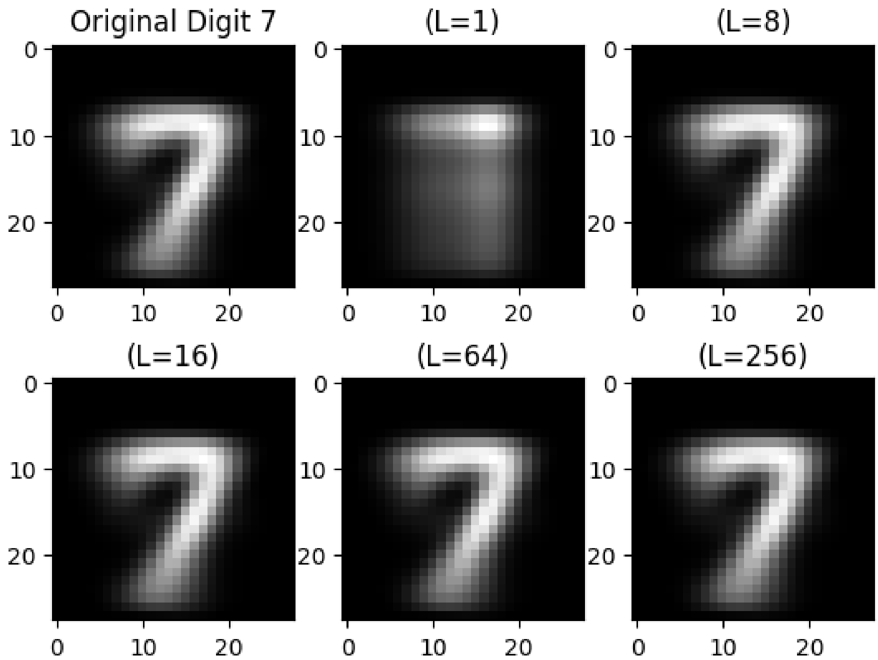
β) Το μητρώο συνδιασπορών υπολογίζεται μέσα στον κώδικα αλλά λόγω του μεγέθους του δεν μπορώ να το παραθέσω στην αναφορά.

γ) Οι 8 πρώτες κύριες συνιστώσες για τα ψηφία είναι:
Για το ψηφίο 2:
[1728.30873103 415.49275646 280.40397492 78.77673441 37.25160715 11.55124631 5.41617206 3.22471263]
Για το ψηφίο 7:
[1728.30873103 415.49275646 280.40397492 78.77673441 37.25160715 11.55124631 5.41617206 3.22471263]

δ) Οι ανακατασκεασμένες εικόνες για τα ψηφία για $L = 1, 8, 16, 64, 256$:
Για το ψηφίο 2:

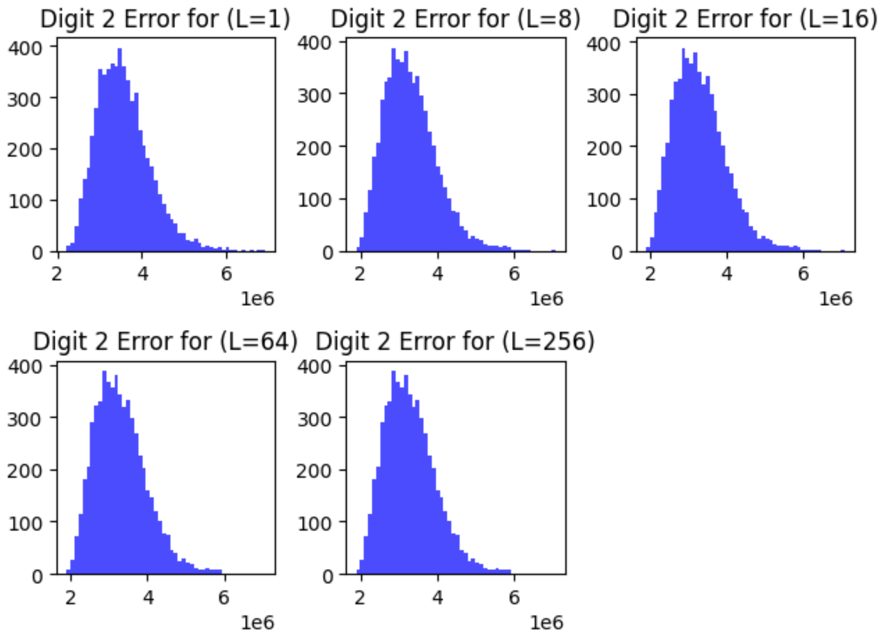


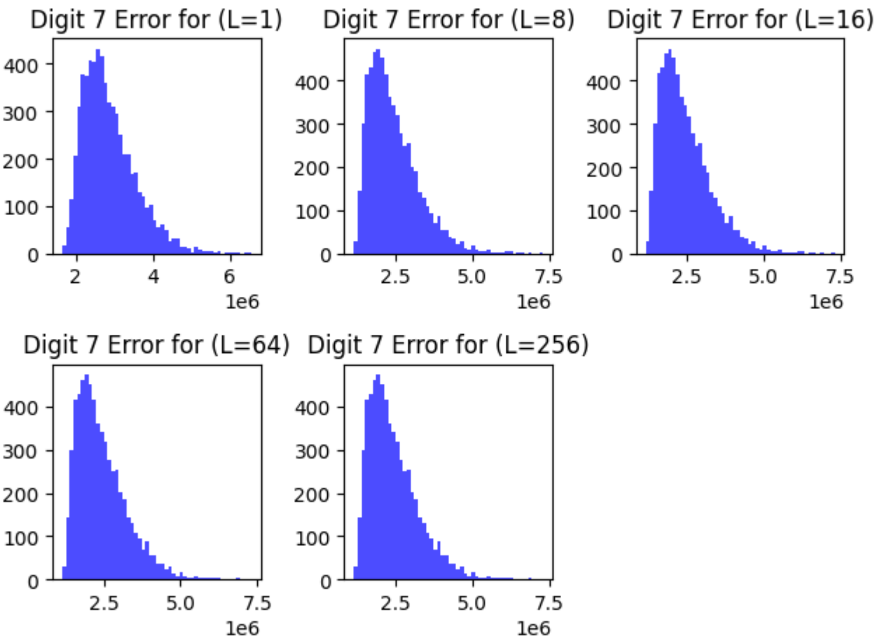
Για το ψηφίο 7:



Παρατηρούμε ότι για $L > 8$, η ακρίβεια ανακατασκευής των ψηφίων δεν βελτιώνεται, αρκούν δηλαδή οι 8 πρώτες συνιστώσες για την αποδοτική ανακατασκευή του αρχικού ψηφίου.

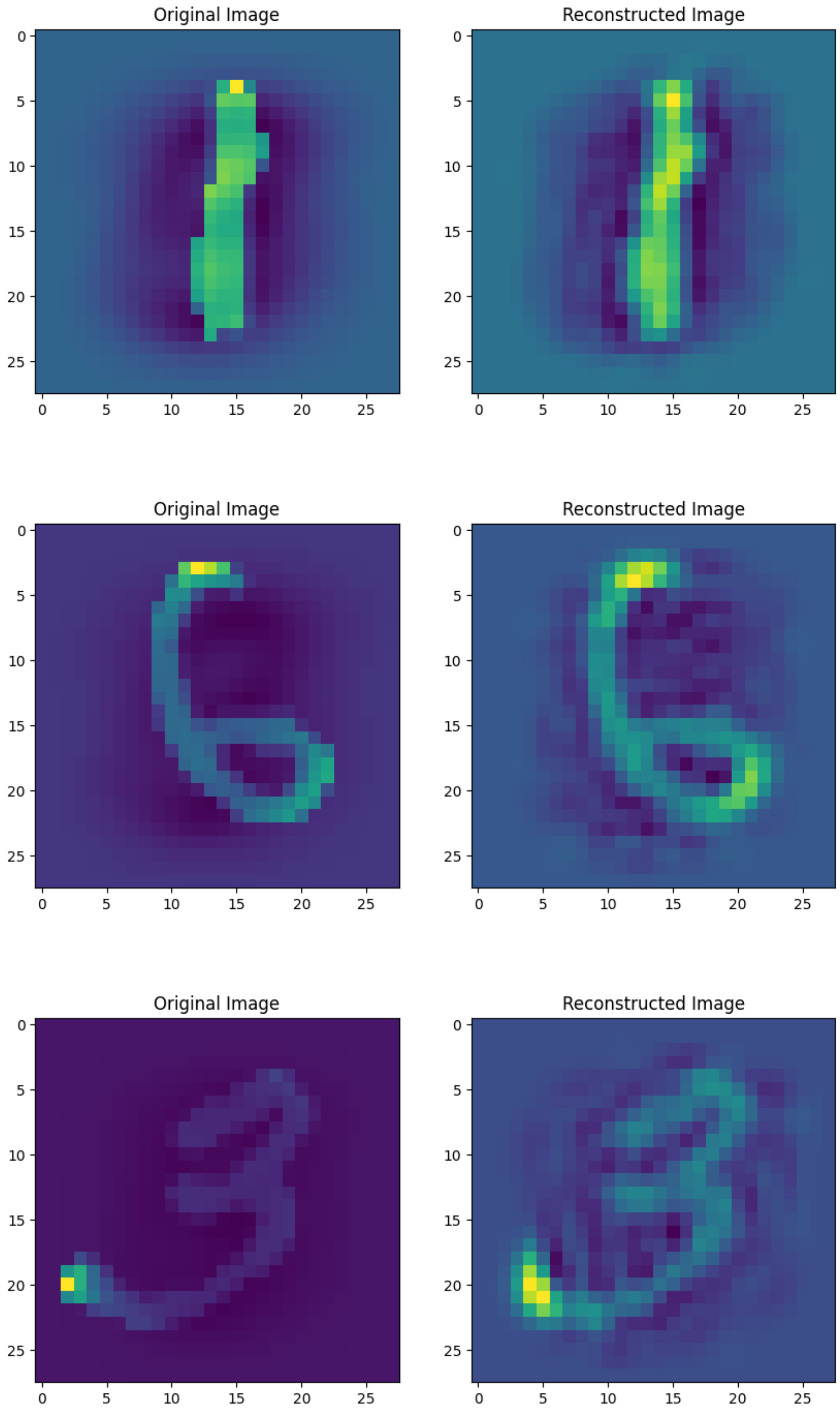
ε) Κατασκευάζουμε τα ιστογράμματα σφαλμάτων ως το σφάλμα μεταξύ του ανακατασκευασμένου ψηφίου για κάποιο από τα L και του αρχικού συνόλου των επιλεγμένων ψηφίων:



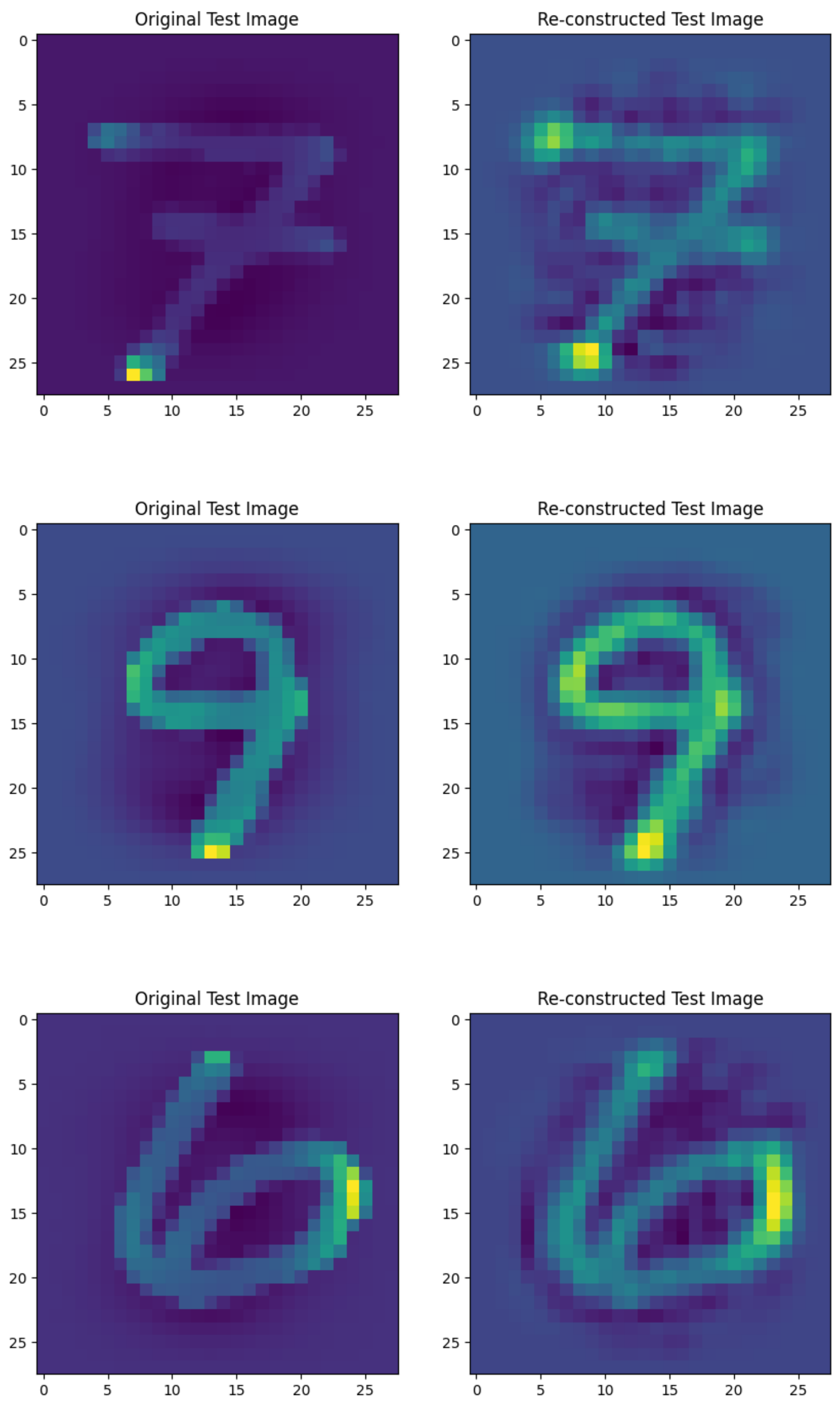


Ερώτημα 2 σελίδα 35

α) Αφού υπολογίσουμε το ζητούμενο μητρώο (δίνεται μέσα στον κώδικα), ανακατασκευάζουμε τα δεδομένα εκπαίδευσης και κάνουμε print 3 τυχαία από αυτά:



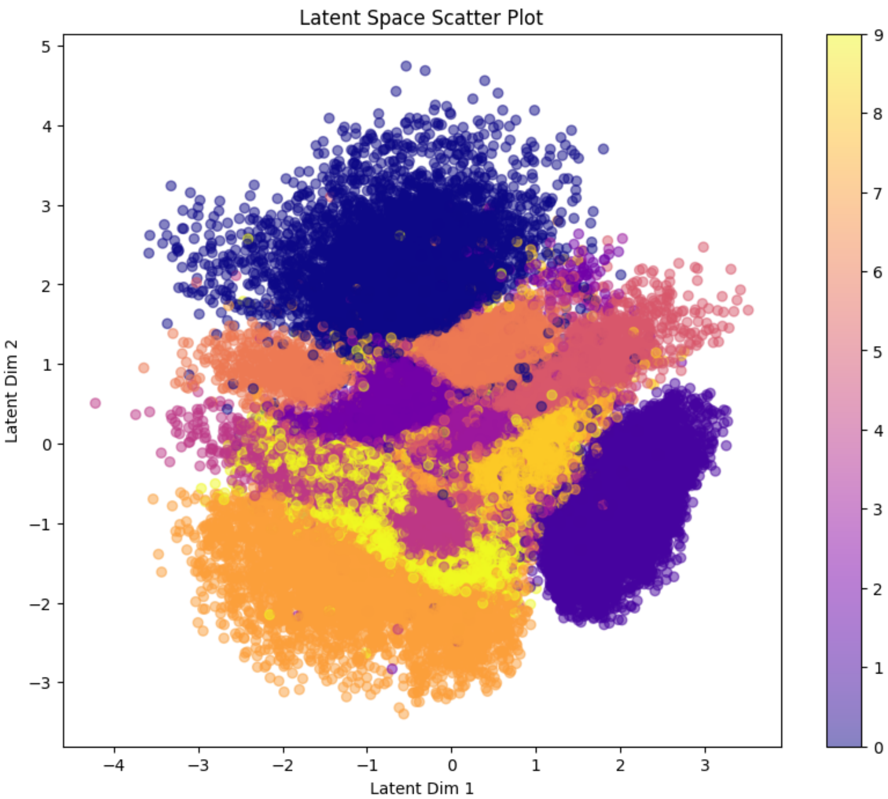
β) Με βάση το μητρώο που υπολογίσαμε παραπάνω ανακατασκευάζουμε τα δεδομένα ελέγχου και παραθέτουμε 3 τυχαίο παραδείγματα:



Ερώτημα 1 σελίδα 44

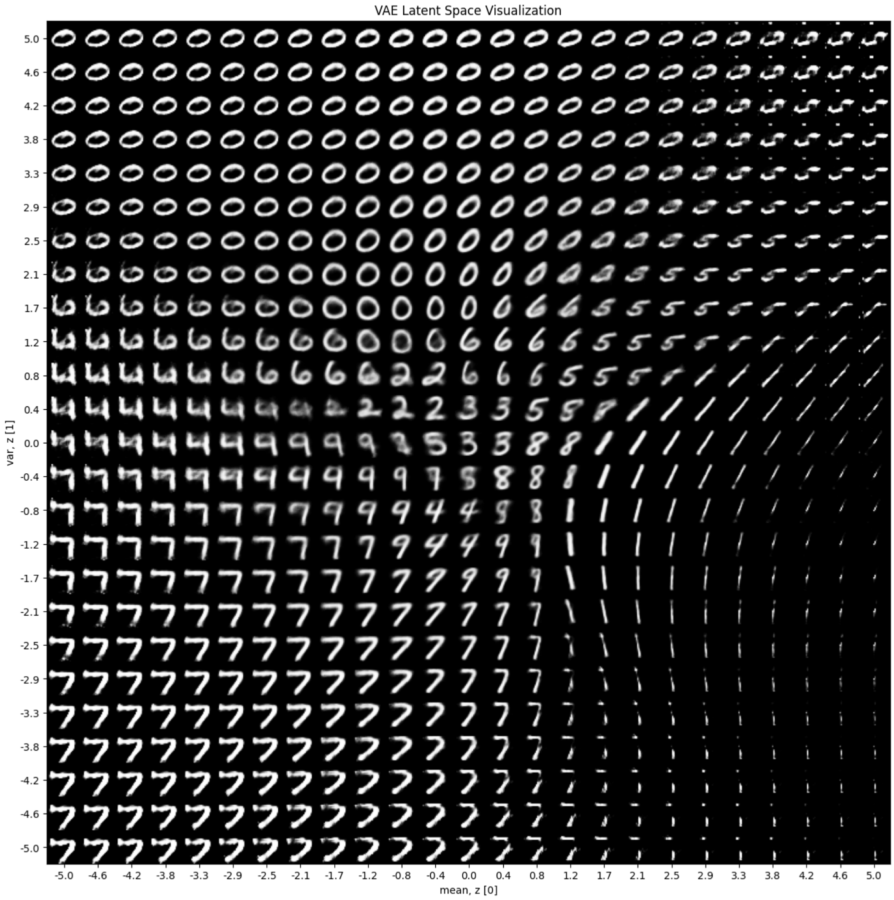
α)
Για ένα συγκεκριμένο batch παρουσιάζουμε την ανακατασκευή του κατά την 1, 50 και 100 εποχή εκπαίδευσης:

β) Δίνουμε το scatter plot για τα ψηφία:



Δίνουμε και την εικόνα του λανθάνοντα χώρου όπου φαίνονται τα ψηφία:

Παρατηρούμε ότι στα άκρα του scatter (όπως και στην εικόνα με τους αριθμούς), βρίσκονται οι αριθμοί που δεν έχουν και τόσα κοινά χαρακτηριστικά μεταταξύ των υπολοίπων και όσο μεταφερόμαστε σε αλλαγές περιοχής και στο κέντρο, βλέπουμε μεγαλύτερη ομοιότητα μεταξύ των χαρακτηριστικών των αριθμών.



Αποδείξεις

Απόδειξη 1 σελίδα 33:
Έστω μητρώο D διάστασης nxd. Για $L = 1$, ψάχνουμε ουσιαστικά την ευθεία που προσεγγίζει βέλτιστα το D ως προς την διακύμανση των προβαλλόμενων σημείων. Έστω ότι το διάνυσμα βάσης $\mathbf{u}$ έχει μέτρο $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$ και ότι τα δεδομένα έχουν μέση τιμή $\mu = 0$. Η προβολή του διανύσματος $\mathbf{x_i}$, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{u'}_i = \left(\frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{x}_i}{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}}\right)\mathbf{u} = (\mathbf{u}^\top \mathbf{x_i})\mathbf{u} = a_i \mathbf{u},$$

όπου η βαθμωτή ποσότητα: $a_i = \mathbf{u}^\top \mathbf{x_i}$, δίνει την συντεταγμένη του $\mathbf{x'_i}$ κατά μήκος του $\mathbf{u}$.

Πρέπει να επιλέξουμε την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ ώστε να μεγιστοποιείται η διακύμανση των προβαλλόμενων σημείων. Η προβαλλόμενη διακύμανση κατά μήκος του $\mathbf{u}$ είναι:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_u)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{u}^\top \mathbf{x_i})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}^\top \mathbf{x_i}\mathbf{x_i}^\top \mathbf{u} = \mathbf{u}^\top(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}\mathbf{x_i}^\top)\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u},$$

όπου Σ η μήτρα συνδιακύμανσης για τα κεντραρισμένα δεδομένα D.
Για να μεγιστοποιήσουμε την προβαλλόμενη διακύμανση, πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το σ_u^2 με βάση τον περιορισμό $\mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αν εισάγουμε έναν πολλαπλασιαστή Lagrange α για τον περιορισμό, ώστε να πάρουμε το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοπίησης χωρίς περιορισμούς:

$$\max_u J(u) = \mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u} - a(\mathbf{u}^\top \mathbf{u} - 1)$$

Θέτοντας την παράγωγο του $J(u)$ ως προς $\mathbf{u}$ ίση με το μηδενικό διάνυσμα παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial(\mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u} - a(\mathbf{u}^\top \mathbf{u} - 1))}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{0} \\
2\Sigma \mathbf{u} - 2a\mathbf{u} &= 0 \\
\Sigma \mathbf{u} &= a\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

Αυτό συνεπάγεται ότι το α είναι ιδιοτιμή της μήτρας συνδιακύμανσης Σ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{u}$. Ακόμα, ο υπολογισμός του βαθμωτού γινομένου και των δύο μελών της εξίσωσης με το $\mathbf{u}$ μας δίνει:

$$\mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u} = \mathbf{u}^\top a \mathbf{u}$$

όπου σε συνδιασμό με την εξίσωση της προβαλλόμενης διακύμανσης έχουμε:

$$\sigma_u^2 = a\mathbf{u}^\top \mathbf{u} \text{ ή } \sigma_u^2 = a$$

Επομένος για να μεγιστοποιήσουμε την προβαλλόμενη διακύμανση, πρέπει να επιλέξουμε τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή της μήτρας Σ. Δηλαδή, το κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u_1}$ καθορίζει την κατέυθυνση με την περισσότερη διακύμανση ή αλλιώς την πρώτη κύρια συνιστώσα $\mathbf{u} = \mathbf{u_1}$. Ακόμα, η μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ_1 καθορίζει την προβαλλόμενη διακύμανση δηλαδή $\sigma_u^2 = \alpha = \lambda_1$

Απόδειξη 2 σελίδα 33:
Δεν πρόλαβα να καθαρογράψω στη Latex τις υπόλοιπες αποδείξεις...