

Исследование операций

Лекция 1. Введение в исследование операций

Виктор Васильевич Лепин

Институт математики
НАН Беларуси, Минск

Исследование операций (ИО) **operations research** – OR, также **management science** – наука управления или **decision science** – наука о решениях) – дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения **оптимальных решений** на основе **математического моделирования**, **статистического моделирования** и различных **эвристических** подходов в различных областях человеческой деятельности.

Исследование операций – применение **математических, количественных методов** для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Исследование операций начинается тогда, когда для обоснования решений применяется тот или другой математический аппарат.

Операция – система действий, объединенная единым замыслом и направленная на достижение определенной цели.

Решение (удачное, неудачное, разумное, неразумное) — всякий определённый набор зависящих от человека параметров.

Оптимальное — решение, которое по тем или другим признакам предпочтительнее других.

Цель исследования операций — предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Элементы решения — параметры, совокупность которых образует решение: числа, векторы, функции, физические признаки и т. д.

Схема исследования



- Этапы решения задач исследования операций:
 - 1 Формализация исходной проблемы
 - 2 Построение математической модели
 - 3 Поиск оптимального решения (решение модели)
 - 4 Проверка адекватности модели
 - 5 Реализация решения
- Из всех этапов только третий достаточно точно определен и прост в силу хорошо проработанной математической теории. Выполнение остальных этапов в значительной мере является искусством, а не наукой.
- На всех этапах, предшествующих получению оптимального решения математической модели, успех зависит от опыта и творчества всей команды (специалистов-аналитиков и заказчиков задачи принятия решений), занимающейся решением задачи исследования операций

Формализация исходной проблемы

- предполагает исследование предметной области, где возникла рассматриваемая проблема
- описание возможных альтернативных решений
- выбор варьируемых параметров
- определение критерия оптимальности
- построение системы ограничений

Математическая модель – математическое представление реальности, один из вариантов модели как системы, исследование которой позволяет получать информацию о некоторой другой системе.

Математическая модель – объективная схематизация основных аспектов решаемой задачи или ее описание в математических терминах.

Математическим моделированием называется процесс построения математических моделей.

Построение математической модели



- перевод формализованной задачи на язык математических соотношений
- попытка построить математическую модель как одну из стандартных математических моделей
- если модель очень сложная и не приводится к стандартному типу, ее следует упростить, либо применить эвристический подход, либо методы имитационного моделирования

К моделям предъявляется ряд обязательных требований:

- Модель должна быть **адекватной** объекту, т.е. как можно более полно соответствовать ему с точки зрения выбранных для изучения свойств.
- Модель должна быть **полной**, т.е. должна давать возможность с помощью соответствующих способов и методов изучения модели исследовать и сам объект.

Виды моделей: **аналоговые, аналитические, имитационные, ситуационные.**

Аналоговые модели – замена носителей свойств, другими физическими носителями.

Примеры:

- транспортные потоки моделируются с помощью гидрасетей;
- биологические системы – с помощью электрических схем.

Процессы разной физической природы сходны на уровне преобразований входных переменных в выходные.

Основу компьютерного моделирования составляет триада **модель — алгоритм — программа**.

- **строится модель** исследуемого объекта, отражающая в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи между его составляющими элементами, и т. д.

Под моделью при этом понимается “эквивалент” объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т.д.

- **разрабатывается алгоритм** для реализации модели на компьютере.

Необходимо получить искомые величины с заданной точностью на имеющейся вычислительной технике.

Алгоритмы должны быть адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых вычислительных средств.

- **создается программное обеспечение** (решатель) для реализации модели и алгоритма на компьютере.

Имитационная модель – алгоритм или компьютерная программа, реализующая поведение системы в зависимости от конкретного управляющего решения.

Этапы моделирования:

- 1 **Подготовительный**: постановка задачи, выбор критерия, анализ ограничений, подготовка данных, разработка программы;
- 2 **Рабочий**: генерирования случайных управляющих решений и многократное применение ИМ, проверка на чувствительность;
- 3 **Заключительный**: анализ и интеграция результатов, подготовка рекомендаций и предложений по изучению модели.

Недостатки имитационных моделей:

- ограниченная точность моделирования и трудность ее априорной оценки;
- отсутствие общности результатов;
- высокая стоимость и продолжительность разработок моделей, многократное обращение к модели с соответствующими затратами машинного времени.

Ситуационная модель – предсказание процессов функционирования системы в виде последовательности отдельных ситуаций в дискретные моменты времени. Совокупность ситуаций называется ситуационной моделью.

Недостатки ситуационного моделирования:

- статичность и невозможность учета альтернативных вариантов поведения ее элементов.

Объединение имитационной и ситуационной моделей называется **деловой игрой** и чаще всего используется для обучения.

Аналитические модели – замена материальных носителей абстрактными, математическими символами и соотношениями между ними.

Пример: модель колебания маятника – дифференциальное уравнение.

В аналитических моделях **необходимо определить:**

- **чем управлять** – какой математический объект считать решением задачи;
- **при каких ограничениях управлять** – учет условий управления, определяет множество допустимых решений;
- **для чего управлять** – определение критерия сравнения решений и выбор наилучшего.

Принципы построения моделей:

Сначала строится идеальная конструкция – **содержательная модель**, затем **формальная математическая модель**

Принципы:

- **целенаправленность моделей**: выбор необходимо производить в строгом соответствии с целями - модель хорошая для одних целей - может оказаться плохой для других;
- **нейтральность модели**: процессы, происходящие в модели, не должны воздействовать на функционирование системы;
- **согласование точности** моделирования различных элементов системы и **устойчивости** решения при изменениях параметров модели.

Поиск оптимального решения (решение модели)



- Применение известных методов оптимизации, методов имитационного моделирования или эвристических подходов
- Исследование чувствительности оптимального решения к отклонению варьируемых параметров



- Оценка полученного решения: имеет ли оно смысл и приемлемо ли интуитивно
- Сравнение полученного решения с известными ранее моделями или поведением реальной системы



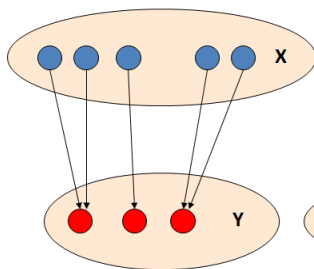
- Перевод результатов решения модели в рекомендации, комплекты технической документации или другие документы, понятные для лиц принимающих решение – заказчиков решения исходной проблемы

Четыре ключевых вопроса постановки любой задачи исследования операций:

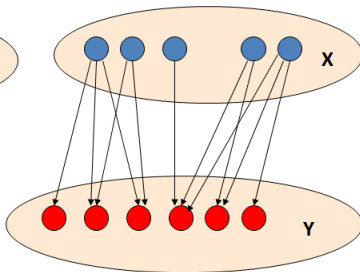
- Что в данном случае считать альтернативными решениями?
- Каким ограничениям должно удовлетворять возможное решение?
- Каков **характер связи** альтернатив и исходов?
- По какому критерию **отдать предпочтение** тем или иным альтернативным решениям?



Сравнение альтернатив. Характер связи альтернатив и исходов



Детерминированная связь



Вероятностная связь

$$f : X \rightarrow Y$$

$$X \rightarrow^{p(x,y)} Y$$

$$\forall x \in X \sum_{y \in Y} p(x, y) = 1.$$

- Для выбора наилучшего решения необходимо задать систему предпочтений, позволяющую сравнивать различные исходы.
- Существуют различные способы задания системы предпочтений лица, принимающего решение.
- Важно, что формирование системы предпочтений никак не ограничивается характером связи альтернатив и исходов

Основные способы описания системы предпочтений:

- Критериальный (задание критериев оптимальности и сопоставление каждому исходу одной или нескольких числовых характеристик, значения которых определяют предпочтительность того или иного исхода с точки зрения соответствующего критерия)
- С помощью бинарных отношений (отдельный исход сам по себе не оценивается и четкие критерии оценки могут не формироваться; сравниваются пары исходов с точки зрения предпочтительности одного перед другим)
- Использование функций выбора (выделение из некоторого множества альтернатив лучших вариантов).

Критериальный способ описания системы предпочтений

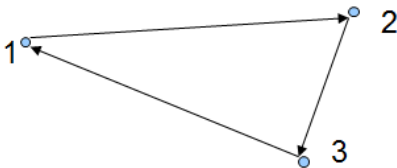
- Критерий оптимальности – правило, позволяющее оценивать исходы и сравнивать их между собой.
- Обычно критерий оптимальности дает возможность объективно оценить каждый возможный исход независимо от других.
- Простейшая ситуация: каждый исход y можно оценить конкретным вещественным числом в соответствии с некоторым заданным отображением: $f : Y \rightarrow R$.
Сравнение исходов сводится к сравнению соответствующих вещественных чисел. Исходы y_1 и y_2 эквивалентны, если $f(y_1) = f(y_2)$.
- Функция f называется целевой функцией.
- Более сложная ситуация: несколько критериев. (Это многокритериальная оптимизация)

- Отдельный исход сам по себе не оценивается и критериальные (целевые) функции не вводятся.
- Каждая пара исходов y, z может находиться в одном из следующих бинарных отношений:
 - первый предпочтительнее второго (строго доминирует);
 - первый предпочтительнее второго;
 - первый не менее предпочтителен, чем (не строго доминирует) второй;
 - первый не менее предпочтителен, чем второй;
 - первый эквивалентен второму;
 - первый и второй исходы несравнимы между собой

Сравнение альтернатив. Язык бинарных отношений

Пример

- Молодой кандидат наук выбирает место будущей работы, исходя из следующих альтернатив:
 - 1 ассистент в Университете с окладом 250 у.е.
 - 2 доцент в техническом университете с окладом 350 у.е.
 - 3 зав. кафедрой в международном институте заготовки рогов и копыт с окладом 450 у.е.
- Критерии предпочтительности:
 - Зарплата
 - Престиж вуза и возможность дальнейшей научной работы
 - Ученый построил для себя следующее отношение предпочтения на данном множестве исходов:



Долгосрочное стратегическое планирование:

задачи размещения производства, развитие нефтяной и газовой промышленности

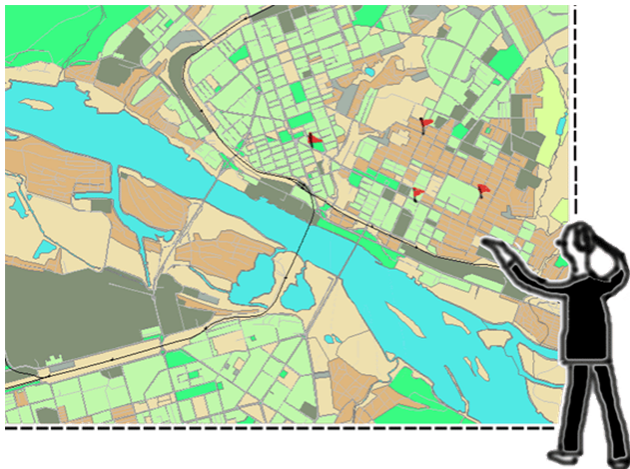
Среднесрочное планирование:

транспортные задачи, задачи маршрутизации, задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами

Оперативное управление:

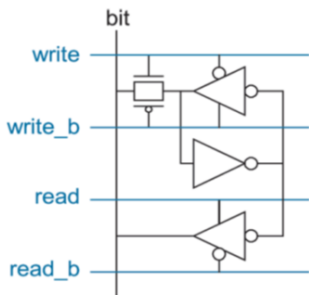
задачи теории расписаний, задачи раскроя и упаковки, задачи управления сложным оборудованием

Задачи размещения производства



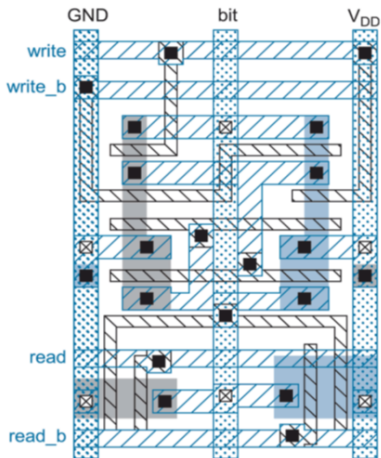
Системы сотовой связи, филиалы банков, производство продукции, магазины, заправки

Задачи размещения и трассировки

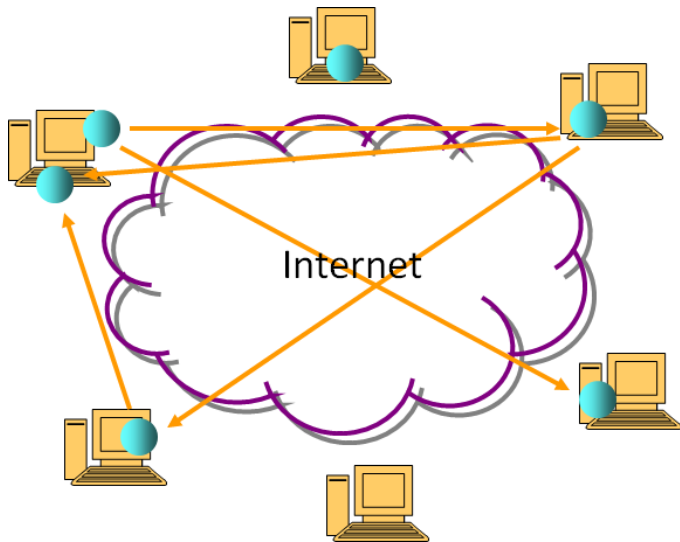


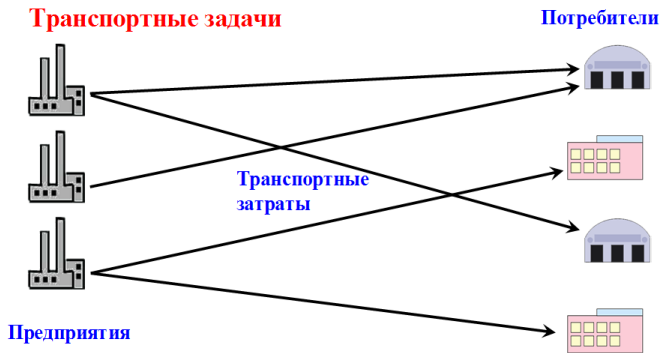
Гиперграф – сигнальные
сети

Граф каналов – каналы для
трассировки



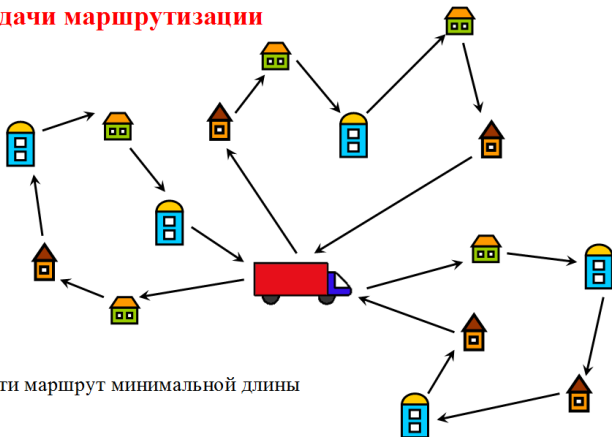
Системы распределенного хранения информации



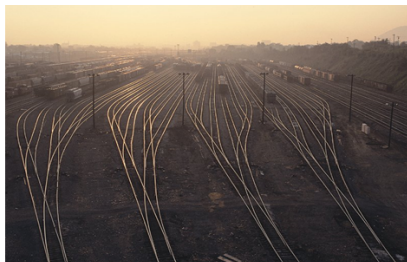


Минимизировать затраты на перевозку продукции

Задачи маршрутизации



Найти маршрут минимальной длины



Схемы маневров, склады контейнеров

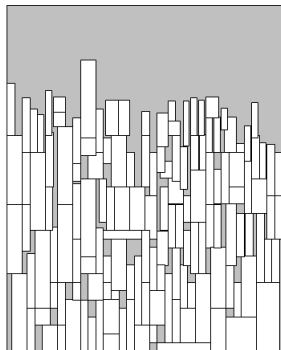
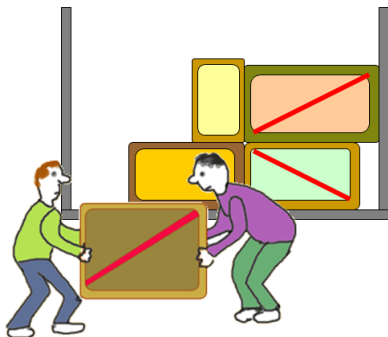
Задачи теории расписаний

14:25

007	Москва – Владивосток	02:30	02:50	007	Москва – Владивосток	02:30	02:50
874	Москва – Одесса	11:05	11:25	874	Москва – Одесса	11:05	11:25
65	Урюпинск – Киев	12:20	12:45	65	Урюпинск – Киев	12:20	12:45
874	Новосибирск – Бийск	14:45	14:55	874	Новосибирск – Бийск	14:45	14:55
007	Барнаул – Магистрала	16:00	16:10	007	Барнаул – Магистрала	16:00	16:10
874	Москва – Карелия	18:25	18:45	874	Москва – Карелия	18:25	18:45

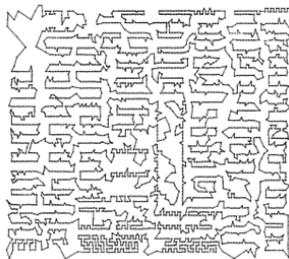
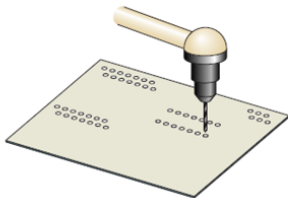
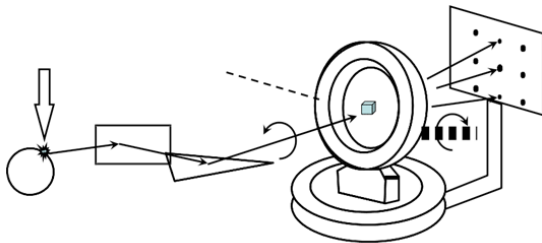


Графики движения поездов, рабочие бригады, ремонт составов



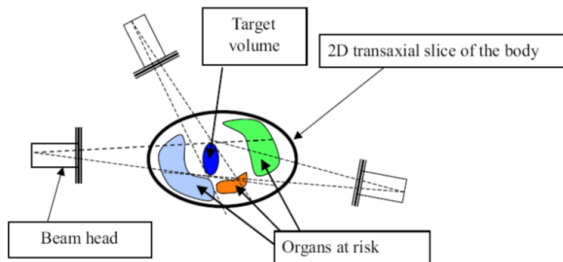
Раскрой пиломатериала, листового железа, станки с ЧПУ

Задачи управления сложным оборудованием



Управление аппаратом лучевой терапии





Параметры управления:

- позиции излучателя;
- траектория движения;
- доза;
- геометрия диафрагмы.

