Симплекс-метод

Виктор Васильевич Лепин

Идея метода

Задача линейного программирования состоит в том, что необходимо максимизировать или минимизировать некоторый линейный функционал на многомерном пространстве при заданных линейных ограничениях.

Идея метода

Задача линейного программирования состоит в том, что необходимо максимизировать или минимизировать некоторый линейный функционал на многомерном пространстве при заданных линейных ограничениях.

Сущность метода: построение базисных решений, на которых монотонно убывает линейный функционал, до ситуации, когда выполняются необходимые условия локальной оптимальности.

Идея метода

- Заметим, что каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве.

Идея метода

- Заметим, что каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве.
- В результате все неравенства ограничивают некоторый выпуклый многогранник (возможно, бесконечный).

Идея метода

- Заметим, что каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве.
- В результате все неравенства ограничивают некоторый выпуклый многогранник (возможно, бесконечный).
- Уравнение $W(x) = c$, где $W(x)$ — максимизируемый (или минимизируемый) линейный функционал, порождает гиперплоскость $L(c)$.

Идея метода

- Заметим, что каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве.
- В результате все неравенства ограничивают некоторый выпуклый многогранник (возможно, бесконечный).
- Уравнение $W(x) = c$, где $W(x)$ — максимизируемый (или минимизируемый) линейный функционал, порождает гиперплоскость $L(c)$.
- Зависимость от c порождает семейство параллельных гиперплоскостей.

Идея метода

- Заметим, что каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве.
- В результате все неравенства ограничивают некоторый выпуклый многогранник (возможно, бесконечный).
- Уравнение $W(x) = c$, где $W(x)$ — максимизируемый (или минимизируемый) линейный функционал, порождает гиперплоскость $L(c)$.
- Зависимость от c порождает семейство параллельных гиперплоскостей.
- Тогда экстремальная задача приобретает следующую формулировку — требуется найти такое наибольшее c, что гиперплоскость $L(c)$ пересекает многогранник хотя бы в одной точке.

Идея метода

- Заметим, что пересечение оптимальной гиперплоскости и многогранника будет содержать хотя бы одну вершину, причём их будет более одной, если пересечение содержит ребро или k-мерную грань.

Идея метода

- Заметим, что пересечение оптимальной гиперплоскости и многогранника будет содержать хотя бы одну вершину, причём их будет более одной, если пересечение содержит ребро или k-мерную грань.
- Поэтому максимум функционала можно искать в вершинах многогранника.

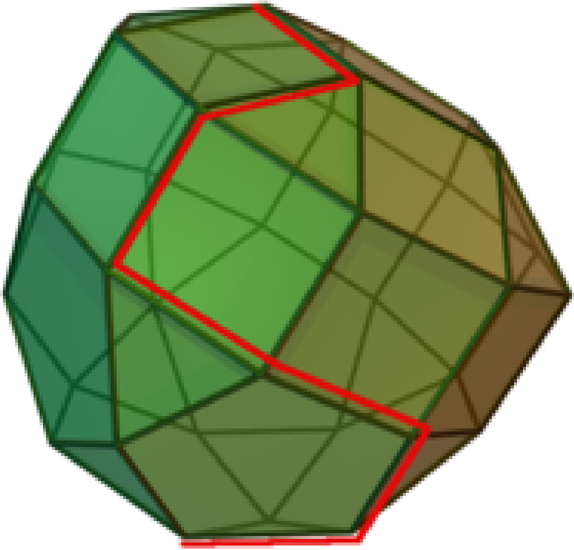
Идея метода

- Заметим, что пересечение оптимальной гиперплоскости и многогранника будет содержать хотя бы одну вершину, причём их будет более одной, если пересечение содержит ребро или k-мерную грань.
- Поэтому максимум функционала можно искать в вершинах многогранника.
- Принцип симплекс-метода состоит в том, что выбирается одна из вершин многогранника, после чего начинается движение по его рёбрам от вершины к вершине в сторону увеличения значения функционала.

Идея метода

- Заметим, что пересечение оптимальной гиперплоскости и многогранника будет содержать хотя бы одну вершину, причём их будет более одной, если пересечение содержит ребро или k-мерную грань.
- Поэтому максимум функционала можно искать в вершинах многогранника.
- Принцип симплекс-метода состоит в том, что выбирается одна из вершин многогранника, после чего начинается движение по его рёбрам от вершины к вершине в сторону увеличения значения функционала.
- Когда переход по ребру из текущей вершины в другую вершину с более высоким значением функционала невозможен, считается, что оптимальное значение с найдено.

Идея метода



Идея метода

Последовательность вычислений симплекс-методом можно разделить на две основные фазы:

Идея метода

Последовательность вычислений симплекс-методом можно разделить на две основные фазы:

1. нахождение исходной вершины множества допустимых решений,

Идея метода

Последовательность вычислений симплекс-методом можно разделить на две основные фазы:

1. нахождение исходной вершины множества допустимых решений,
2. последовательный переход от одной вершины к другой, ведущий к оптимизации значения целевой функции.

- При этом в некоторых случаях исходное решение очевидно или его определение не требует сложных вычислений, например, когда все ограничения представлены неравенствами вида «меньше или равно» (тогда нулевой вектор совершенно точно является допустимым решением).
- В таких задачах первую фазу симплекс-метода можно вообще не проводить.

Канонический вид и крайние точки для линейной задачи

Определение

Линейной задачей в канонической форме (другими словами, канонической линейной задачей) называется задача

$$
\begin{cases}
c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min), \\
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{cases}
$$

Таким образом, линейной задачей в канонической форме называется задача, в которой все ограничения представлены в виде равенств, а все переменные неотрицательны.

Введем обозначения $x = (x_1, \dots, x_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n};j=\overline{1,m}}$.
Тогда получим эквивалентное определение.

Определение

Линейной задачей в канонической форме называется задача

$$\begin{cases} c \cdot x \to \max(\min), \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Замечания

- Разница между числом переменных и уравнений даёт нам число степеней свободы.

Замечания

- Разница между числом переменных и уравнений даёт нам число степеней свободы.
- Проще говоря, если мы рассматриваем вершину многогранника, то это число рёбер, по которым мы можем продолжать движение.

Замечания

- Разница между числом переменных и уравнений даёт нам число степеней свободы.
- Проще говоря, если мы рассматриваем вершину многогранника, то это число рёбер, по которым мы можем продолжать движение.
- Тогда мы можем присвоить этому числу переменных значение 0 и назвать их «небазисными».

Замечания

- Разница между числом переменных и уравнений даёт нам число степеней свободы.
- Проще говоря, если мы рассматриваем вершину многогранника, то это число рёбер, по которым мы можем продолжать движение.
- Тогда мы можем присвоить этому числу переменных значение 0 и назвать их «небазисными».
- Остальные переменные при этом будут вычисляться однозначно и называться «базисными».

Замечания

- Разница между числом переменных и уравнений даёт нам число степеней свободы.
- Проще говоря, если мы рассматриваем вершину многогранника, то это число рёбер, по которым мы можем продолжать движение.
- Тогда мы можем присвоить этому числу переменных значение 0 и назвать их «небазисными».
- Остальные переменные при этом будут вычисляться однозначно и называться «базисными».
- Полученная точка будет вершиной в пересечении соответствующих небазисным переменным гиперплоскостей.

Предварительные сведения. Базисное решение системы линейных уравнений

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} cx \to \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Предварительные сведения. Базисное решение системы линейных уравнений

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} cx \to \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем считать, что СЛУ $Ax = b$ совместна (имеет решение), следовательно выполнено условие:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$$

Предварительные сведения. Базисное решение системы линейных уравнений

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} cx \to \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем считать, что СЛУ $Ax = b$ совместна (имеет решение), следовательно выполнено условие:

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A, b)$$

Решения системы $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ образуют множество D допустимых решений задачи (1).

Предварительные сведения. Базисное решение системы линейных уравнений

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} cx \to \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем считать, что СЛУ $Ax = b$ совместна (имеет решение), следовательно выполнено условие:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$$

Решения системы $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ образуют множество D допустимых решений задачи (1).

- Решение единственно: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b) = n$.
- Бескон. множество решений: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b) < n$.

Базисным решением СЛУ, зависящим от множества индексов $S = \{1, \ldots, m\}$, будем называть решение СЛУ, которое находится по правилам:

Базисным решением СЛУ, зависящим от множества индексов $S = \{1, \ldots, m\}$, будем называть решение СЛУ, которое находится по правилам:

- привести данную систему, используя метод Гаусса, к диагональной форме по переменным $x_1, \ldots, x_m$ (базисные переменные)

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad x_2 \qquad\quad + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots \\ \qquad\qquad x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases}$$

  переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ называются небазисными, возьмем $x_{m+1} = 0, \ldots x_n = 0$, получим $x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2, \ldots, x_m = b'_m$.
  Вектор $\mathbf{x} = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_m, 0, \ldots, 0)$ — базисное решение

Замечание 1. Базисное решение не может содержать более чем m отличных от нуля элементов.

Замечание 1. Базисное решение не может содержать более чем m отличных от нуля элементов.

Замечание 2. Если базисное решение содержит ровно m отличных от нуля компонент, то оно называется невырожденным базисным решением. В противном случае — вырожденным базисным решением.

Замечание 1. Базисное решение не может содержать более чем m отличных от нуля элементов.

Замечание 2. Если базисное решение содержит ровно m отличных от нуля компонент, то оно называется невырожденным базисным решением. В противном случае — вырожденным базисным решением.

Замечание 3. Если все компоненты базисного решения неотрицательные, то такое базисное решение называется допустимым базисным решением.

Замечание 1. Базисное решение не может содержать более чем m отличных от нуля элементов.

Замечание 2. Если базисное решение содержит ровно m отличных от нуля компонент, то оно называется невырожденным базисным решением. В противном случае — вырожденным базисным решением.

Замечание 3. Если все компоненты базисного решения неотрицательные, то такое базисное решение называется допустимым базисным решением.

Замечание 4. Количество базисных решений СЛУ не может превышать величину

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Утверждение 1

Если у системы линейных уравнений существует решение, то существует и базисное решение этой системы ЛУ.

Предварительные сведения

Утверждение 1

Если у системы линейных уравнений существует решение, то существует и базисное решение этой системы ЛУ.

Утверждение 2

Если задача ЛП имеет допустимое решение, то она имеет и допустимое базисное решение.

Предварительные сведения

Утверждение 1

Если у системы линейных уравнений существует решение, то существует и базисное решение этой системы ЛУ.

Утверждение 2

Если задача ЛП имеет допустимое решение, то она имеет и допустимое базисное решение.

Утверждение 3

Если задача ЛП имеет оптимальное решение, то она имеет и оптимальное базисное решение.

Предварительные сведения

Утверждение 1

Если у системы линейных уравнений существует решение, то существует и базисное решение этой системы ЛУ.

Утверждение 2

Если задача ЛП имеет допустимое решение, то она имеет и допустимое базисное решение.

Утверждение 3

Если задача ЛП имеет оптимальное решение, то она имеет и оптимальное базисное решение.

Определение

Точка x из замкнутого выпуклого множества D называется крайней, если она не является внутренней ни для одного отрезка, содержащегося в D. Другими словами, для любых $a, b \in D$ если $x \in [a, b] \subset D$, то $x = a$ или $x = b$.

Основные теоремы, на которых базируется симплекс-метод.

Теорема 1

Если каноническая ЗЛП разрешима, то среди крайних точек допустимого множества D существует такая точка x_0, в которой достигается экстремум целевой функции z.

Основные теоремы, на которых базируется симплекс-метод.

Теорема 1

Если каноническая ЗЛП разрешима, то среди крайних точек допустимого множества D существует такая точка x_0, в которой достигается экстремум целевой функции z.

Теорема 2

Если x_0 — крайняя точка допустимого множества канонической ЗЛП, то положительным координатам x_0 отвечают линейно независимые столбцы матрицы A задачи и x_0 — базисное решение.

Предварительные сведения

- Из теоремы 2 вытекают два важных вывода.
  - Число положительных координат у крайней точки допустимого множества D не может превосходить ранга матрицы A.

- Из теоремы 2 вытекают два важных вывода.
  - Число положительных координат у крайней точки допустимого множества D не может превосходить ранга матрицы A.
  - Число крайних точек D всегда конечно.

- Из теоремы 2 вытекают два важных вывода.
  - Число положительных координат у крайней точки допустимого множества D не может превосходить ранга матрицы A.
  - Число крайних точек D всегда конечно.
- А в силу теоремы 1 если у целевой функции есть точки экстремума, то среди крайних точек D обязательно найдутся такие, в которых эти экстремумы достигаются.

- Из теоремы 2 вытекают два важных вывода.
  - Число положительных координат у крайней точки допустимого множества D не может превосходить ранга матрицы A.
  - Число крайних точек D всегда конечно.
- А в силу теоремы 1 если у целевой функции есть точки экстремума, то среди крайних точек D обязательно найдутся такие, в которых эти экстремумы достигаются.
- Поэтому, чтобы решить каноническую ЗЛП, достаточно перебрать все крайние точки допустимого множества, посчитать значения целевой функции в этих точках и найти среди них максимум и минимум.

- Из теоремы 2 вытекают два важных вывода.
  - Число положительных координат у крайней точки допустимого множества D не может превосходить ранга матрицы A.
  - Число крайних точек D всегда конечно.
- А в силу теоремы 1 если у целевой функции есть точки экстремума, то среди крайних точек D обязательно найдутся такие, в которых эти экстремумы достигаются.
- Поэтому, чтобы решить каноническую ЗЛП, достаточно перебрать все крайние точки допустимого множества, посчитать значения целевой функции в этих точках и найти среди них максимум и минимум.
- В симплекс-методе осуществляется направленный перебор крайних точек допустимого множества.

Определение

Каноническая ЗЛП называется невырожденной, если для любой крайней точки x_0 допустимого множества D число ее положительных координат равно рангу матрицы A.

Определение

Каноническая ЗЛП называется невырожденной, если для любой крайней точки x_0 допустимого множества D число ее положительных координат равно рангу матрицы A.

- Почти все задачи линейного программирования являются невырожденными.

Определение

Каноническая ЗЛП называется невырожденной, если для любой крайней точки x_0 допустимого множества D число ее положительных координат равно рангу матрицы A.

- Почти все задачи линейного программирования являются невырожденными.
- Симплекс-метод разработан именно для невырожденных задач.

Определение

Каноническая ЗЛП называется невырожденной, если для любой крайней точки x_0 допустимого множества D число ее положительных координат равно рангу матрицы A.

- Почти все задачи линейного программирования являются невырожденными.
- Симплекс-метод разработан именно для невырожденных задач.
- Всякую вырожденную задачу можно сделать невырожденной при помощи сколь угодно малого изменения ее коэффициентов, и затем считать решение модифицированной невырожденной задачи приближенным решением исходной вырожденной.

Рассмотрим для определенности задачу на минимум

$$
\begin{cases}
z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min, \\
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{cases}
\tag{1}
$$

Рассмотрим для определенности задачу на минимум

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min, \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

- Невырожденность задачи означает, что у любой крайней точки x_0 множества D есть ровно m положительных координат $(m = \mathrm{rang}(A))$.

Рассмотрим для определенности задачу на минимум

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min, \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

- Невырожденность задачи означает, что у любой крайней точки x_0 множества D есть ровно m положительных координат $(m = \operatorname{rang}(A))$.
- Назовем эти положительные координаты базисными, а все остальные координаты свободными.

Рассмотрим для определенности задачу на минимум

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min, \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \qquad (1)$$

- Невырожденность задачи означает, что у любой крайней точки x_0 множества D есть ровно m положительных координат ($m = \text{rang}(A)$).
- Назовем эти положительные координаты базисными, а все остальные координаты свободными.
- Столбцы матрицы A в системе (1), стоящие при базисных координатах, будем называть базисными столбцами.

- Для того, чтобы начать симплекс-метод, нужно заранее найти хоть какую-нибудь одну крайнюю точку (ее называют начальным опорным планом). Как ее находить, объясним позже.

- Для того, чтобы начать симплекс-метод, нужно заранее найти хоть какую-нибудь одну крайнюю точку (ее называют начальным опорным планом). Как ее находить, объясним позже.
- Для удобства записи мы будем считать, что у начальной крайней точки x_0 положительны первые m координат:

$$x_0 = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0),$$

то есть базисными переменными являются $x_1, \dots, x_m$.

- Для того, чтобы начать симплекс-метод, нужно заранее найти хоть какую-нибудь одну крайнюю точку (ее называют начальным опорным планом). Как ее находить, объясним позже.
- Для удобства записи мы будем считать, что у начальной крайней точки x_0 положительны первые m координат:

$$x_0 = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),$$

  то есть базисными переменными являются $x_1, \ldots, x_m$.
- Если нужно, этого всегда можно добиться изменением нумерации координат.

1) Введем новую переменную

$$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

и перепишем исходную задачу в следующем виде:

$$\begin{cases} z \to \min, \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ z - c_1x_1 - \dots - c_nx_n = 0, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \qquad (2)$$

2) В этой системе сделаем следующие преобразования: при помощи метода Гаусса выделим единичную матрицу в базисных столбцах, а затем исключим базисные переменные из уравнения, содержащего z. В результате получится система вида

$$\begin{cases} z \to \min, \\ x_1 + 0 + \cdots + 0 + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ x_2 + \cdots + 0 + \alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \cdots \\ x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \\ z + \delta_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \delta_n x_n = \gamma, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

Из этой системы следует, что

$$x_0 = (\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0),$$

где все
$\beta_i > 0$ и $z(x_0) = \gamma$.

3) Предположим, что $\delta_i \leq 0$ при всех $i = m+1, \ldots, n$. Тогда из последнего уравнения системы (3) следует, что значение функции z невозможно уменьшить, не нарушая условий $x_i \geq 0$. В данном случае минимальное значение функции z уже найдено; при этом $z_{\min} = \gamma$, и точкой минимума является x_0.

3) Предположим, что $\delta_i \le 0$ при всех $i = m+1, \dots, n$. Тогда из последнего уравнения системы (3) следует, что значение функции z невозможно уменьшить, не нарушая условий $x_i \ge 0$. В данном случае минимальное значение функции z уже найдено; при этом $z_{\min} = \gamma$, и точкой минимума является x_0.

Предположим теперь, что есть такой номер $j_0 \in \{m+1, \dots, n\}$, при котором $\delta_{j_0} > 0$. Рассмотрим тогда семейство точек

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t), 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0), \qquad t \ge 0,$$

где параметр t стоит на месте j_0, а $x_i(t)$ находятся из системы (3):

$$x_i(t) = \beta_i - \alpha_{ij_0} t, \quad i = 1, \dots, m.$$

Очевидно, $x_i(t) \geq 0$ при всех достаточно малых t, и, следовательно, $x(t) \in D$. Значение целевой функции в этой точке будет равно

$$z(x(t)) = \gamma - \delta_{j_0} t < z(x_0) \text{ при } t > 0.$$

Чем больше параметр t, тем меньше значение функции в точке $x(t)$.

Очевидно, $x_i(t) \geq 0$ при всех достаточно малых t, и, следовательно, $x(t) \in D$. Значение целевой функции в этой точке будет равно

$$z(x(t)) = \gamma - \delta_{j_0} t < z(x_0) \text{ при } t > 0.$$

Чем больше параметр t, тем меньше значение функции в точке $x(t)$.

Если $\alpha_{ij_0} \leq 0$ при всех $i = 1, \ldots, m$, то $x_i(t) \geq 0$ для любого $t > 0$. В этом случае целевая функция не ограничена снизу на множестве D, и исходная задача не имеет решения (минимума у целевой функции на множестве D нет).

Если найдутся $\alpha_{ij_0} > 0$ при некоторых $i \in \{1, \ldots, m\}$, то мы можем увеличивать t только до тех пор, пока выполняются условия

$$x_i(t) = \beta_i - \alpha_{ij_0} t \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

то есть вплоть до значения

$$t_0 = \min_{\alpha_{ij_0} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_0}} \right\},$$

где минимум берется по всем $i \in \{1, \ldots, m\}$, для которых $\alpha_{ij_0} > 0$.

Если найдутся $\alpha_{ij_0} > 0$ при некоторых $i \in \{1, \ldots, m\}$, то мы можем увеличивать t только до тех пор, пока выполняются условия

$$x_i(t) = \beta_i - \alpha_{ij_0} t \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

то есть вплоть до значения

$$t_0 = \min_{\alpha_{ij_0} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_0}} \right\},$$

где минимум берется по всем $i \in \{1, \ldots, m\}$, для которых $\alpha_{ij_0} > 0$.

Из невырожденности задачи вытекает, что этот минимум достигается лишь при единственном значении индекса $i = i_0$. При этом, очевидно, $x_{i_0}(t_0) = 0$. Отсюда вытекает, что точка $x(t_0)$ имеет ровно $m = \mathrm{rank} A$ положительных координат, и, значит, она является крайней точкой множества D.

- По построению значение целевой функции в новой крайней точке $x(t_0)$ стого меньше, чем в точке x_0, а координаты $x(t_0)$ удовлетворяют равенствам $x_{i_0}(t_0) = 0$ и $x_{j_0}(t_0) = t_0$.

- По построению значение целевой функции в новой крайней точке $x(t_0)$ стого меньше, чем в точке x_0, а координаты $x(t_0)$ удовлетворяют равенствам $x_{i_0}(t_0) = 0$ и $x_{j_0}(t_0) = t_0$.
- Значит, базисными переменными для новой крайней точки будут все базисные переменные точки x_0, кроме x_{i_0}, и еще одна переменная x_{j_0}.

- По построению значение целевой функции в новой крайней точке $x(t_0)$ строго меньше, чем в точке x_0, а координаты $x(t_0)$ удовлетворяют равенствам $x_{i_0}(t_0) = 0$ и $x_{j_0}(t_0) = t_0$.
- Значит, базисными переменными для новой крайней точки будут все базисные переменные точки x_0, кроме x_{i_0}, и еще одна переменная x_{j_0}.
- Для новой крайней точки переход от старой системы (3) к новой системе такого же вида выполняется следующим образом.

- По построению значение целевой функции в новой крайней точке $x(t_0)$ строго меньше, чем в точке x_0, а координаты $x(t_0)$ удовлетворяют равенствам $x_{i_0}(t_0) = 0$ и $x_{j_0}(t_0) = t_0$.
- Значит, базисными переменными для новой крайней точки будут все базисные переменные точки x_0, кроме x_{i_0}, и еще одна переменная x_{j_0}.
- Для новой крайней точки переход от старой системы (3) к новой системе такого же вида выполняется следующим образом.
- В исходной системе (3) посредством элементарных преобразований строк нужно сделать элемент $i_0 j_0$ равным единице, а остальные элементы столбца с номером j_0 сделать нулевыми.

- По построению значение целевой функции в новой крайней точке $x(t_0)$ стого меньше, чем в точке x_0, а координаты $x(t_0)$ удовлетворяют равенствам $x_{i_0}(t_0) = 0$ и $x_{j_0}(t_0) = t_0$.
- Значит, базисными переменными для новой крайней точки будут все базисные переменные точки x_0, кроме x_{i_0}, и еще одна переменная x_{j_0}.
- Для новой крайней точки переход от старой системы (3) к новой системе такого же вида выполняется следующим образом.
- В исходной системе (3) посредством элементарных преобразований строк нужно сделать элемент $i_0 j_0$ равным единице, а остальные элементы столбца с номером j_0 сделать нулевыми.
- После этого система будет иметь по отношению к новым базисным переменным тот же вид, что и (3).

4) Повторяем шаг 2) и шаг 3) до тех пор, пока не найдем точку минимума вместе с минимальным значением целевой функции, либо пока не обнаружим, что целевая функция неограничена снизу на D.

Решить задачу

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad & \to \max, \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad\quad & = 10, \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 \qquad & = 12, \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad\qquad\quad + x_6 & = 8, \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 & \geq 0.
\end{aligned}
$$

Решить задачу

$$\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & & & & \to \max, \\
2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + x_4 & & & & & = 10, \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & + x_5 & & & = 12, \\
2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 & & & + x_6 & & = 8, \\
& & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 & & & \geq 0.
\end{aligned}$$

Запишем систему в табличной форме:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
5	2	3	0	0	0	0
2	3	1	1	0	0	10
4	2	2	0	1	0	12
2	1	2	0	0	1	8

Симплекс-таблица

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
5	2	3	0	0	0	0
2	3	1	1	0	0	10
4	2	2	0	1	0	12
2	1	2	0	0	1	8

- Переместим столбец b в начало таблицы.
- Пометим строки таблицы символами:
  - $-z$ — строка целевых коэффициентов;
  - x_4 — строка базисной переменной x_4;
  - x_5 — строка базисной переменной x_5;
  - x_6 — строка базисной переменной x_6.
- Столбец для записи отношений.

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	5	2	3	0	0	0
10	2	3	1	1	0	0
12	4	2	2	0	1	0
8	2	1	2	0	0	1

- Переместим столбец b в начало таблицы.
- Пометим строки таблицы символами:
  - $-z$ — строка целевых коэффициентов;
  - x_4 — строка базисной переменной x_4;
  - x_5 — строка базисной переменной x_5;
  - x_6 — строка базисной переменной x_6.
- Столбец для записи отношений.

Симплекс-таблица

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	5	2	3	0	0	0
	10	2	3	1	1	0	0
	12	4	2	2	0	1	0
	8	2	1	2	0	0	1

- Переместим столбец b в начало таблицы.
- Пометим строки таблицы символами:
  - $-z$ — строка целевых коэффициентов;
  - x_4 — строка базисной переменной x_4;
  - x_5 — строка базисной переменной x_5;
  - x_6 — строка базисной переменной x_6.
- Столбец для записи отношений.

Симплекс-таблица

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	0	5	2	3	0	0	0
	10	2	3	1	1	0	0
	12	4	2	2	0	1	0
	8	2	1	2	0	0	1

- Переместим столбец b в начало таблицы.
- Пометим строки таблицы символами:
  - $-z$ — строка целевых коэффициентов;
  - x_4 — строка базисной переменной x_4;
  - x_5 — строка базисной переменной x_5;
  - x_6 — строка базисной переменной x_6.
- Столбец для записи отношений.

Симплекс-таблица

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	0	5	2	3	0	0	0
x_4	10	2	3	1	1	0	0
	12	4	2	2	0	1	0
	8	2	1	2	0	0	1

- Переместим столбец b в начало таблицы.
- Пометим строки таблицы символами:
  - $-z$ — строка целевых коэффициентов;
  - x_4 — строка базисной переменной x_4;
  - x_5 — строка базисной переменной x_5;
  - x_6 — строка базисной переменной x_6.
- Столбец для записи отношений.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	0	5	2	3	0	0	0
x_4	10	2	3	1	1	0	0
x_5	12	4	2	2	0	1	0
	8	2	1	2	0	0	1

- Переместим столбец b в начало таблицы.
- Пометим строки таблицы символами:
    - $-z$ — строка целевых коэффициентов;
    - x_4 — строка базисной переменной x_4;
    - x_5 — строка базисной переменной x_5;
    - x_6 — строка базисной переменной x_6.
- Столбец для записи отношений.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	0	5	2	3	0	0	0
x_4	10	2	3	1	1	0	0
x_5	12	4	2	2	0	1	0
x_6	8	2	1	2	0	0	1

- Переместим столбец b в начало таблицы.
- Пометим строки таблицы символами:
  - $-z$ — строка целевых коэффициентов;
  - x_4 — строка базисной переменной x_4;
  - x_5 — строка базисной переменной x_5;
  - x_6 — строка базисной переменной x_6.
- Столбец для записи отношений.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_5	12	4	2	2	0	1	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переместим столбец b в начало таблицы.
- Пометим строки таблицы символами:
  - $-z$ — строка целевых коэффициентов;
  - x_4 — строка базисной переменной x_4;
  - x_5 — строка базисной переменной x_5;
  - x_6 — строка базисной переменной x_6.
- Столбец для записи отношений.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_5	12	4	2	2	0	1	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отношения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_5	12	4	2	2	0	1	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

$-z$	b 0	x_1 5	x_2 2	x_3 3	x_4 0	x_5 0	x_6 0	Отно-шения
x_4	10	2	3	1	1	0	0	$\frac{10}{2} = 5$
x_5	12	4	2	2	0	1	0	$\frac{12}{4} = 3$
x_6	8	2	1	2	0	0	1	$\frac{8}{2} = 4$

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

$-z$	b 0	x_1 5	x_2 2	x_3 3	x_4 0	x_5 0	x_6 0	Отно-шения
x_4	10	2	3	1	1	0	0	$\frac{10}{2} = 5$
x_5	12	4	2	2	0	1	0	$\frac{12}{4} = 3$
x_6	8	2	1	2	0	0	1	$\frac{8}{2} = 4$

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	$\frac{10}{2} = 5$
x_5	12	4	2	2	0	1	0	$\frac{12}{4} = 3$
x_6	8	2	1	2	0	0	1	$\frac{8}{2} = 4$

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

$-z$	b 0	x_1 5	x_2 2	x_3 3	x_4 0	x_5 0	x_6 0	Отношения
x_4	10	2	3	1	1	0	0	$\frac{10}{2} = 5$
x_5	12	4	2	2	0	1	0	$\frac{12}{4} = 3$
x_6	8	2	1	2	0	0	1	$\frac{8}{2} = 4$

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	$\frac{10}{2} = 5$
x_5	12	4	2	2	0	1	0	$\frac{12}{4} = 3$
x_6	8	2	1	2	0	0	1	$\frac{8}{2} = 4$

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	$\frac{10}{2} = 5$
x_5	12	4	2	2	0	1	0	$\frac{12}{4} = 3$
x_6	8	2	1	2	0	0	1	$\frac{8}{2} = 4$

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отношения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	$\frac{10}{2}=5$
x_5	12	4	2	2	0	1	0	$\frac{12}{4}=3$
x_6	8	2	1	2	0	0	1	$\frac{8}{2}=4$

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_1.
- Объявляем столбец x_1 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_1.
- Наименьшее отношение находится в строке x_5.
- Объявляем строку x_5 ведущей.

Итерация 1: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_5	12	4	2	2	0	1	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим

Итерация 1: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-ношения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_5	12	4	2	2	0	1	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим

Итерация 1: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отношения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_1	12	4	2	2	0	1	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим

Итерация 1: операция замещения

$-z$	b 0	x_1 5	x_2 2	x_3 3	x_4 0	x_5 0	x_6 0	Отно-шения
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_1	12	4	2	2	0	1	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим

$-z$	b 0	x_1 5	x_2 2	x_3 3	x_4 0	x_5 0	x_6 0	Отно-шения
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим

Итерация 1: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим
  1. на 5 и отнимет от строки $-z$,
  2. на 2 и отнимем от строки x_4,
  3. на 2 и отнимем от строки x_6.

Итерация 1: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим
  1. на 5 и отнимет от строки $-z$,
  2. на 2 и отнимем от строки x_4,
  3. на 2 и отнимем от строки x_6.

Итерация 1: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим
  1. на 5 и отнимет от строки $-z$,
  2. на 2 и отнимем от строки x_4,
  3. на 2 и отнимем от строки x_6.

Итерация 1: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим
  1. на 5 и отнимет от строки $-z$,
  2. на 2 и отнимем от строки x_4,
  3. на 2 и отнимем от строки x_6.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим
  1. на 5 и отнимет от строки $-z$,
  2. на 2 и отнимем от строки x_4,
  3. на 2 и отнимем от строки x_6.

Итерация 1: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	8	2	1	2	0	0	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим
  1. на 5 и отнимет от строки $-z$,
  2. на 2 и отнимем от строки x_4,
  3. на 2 и отнимем от строки x_6.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отношения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_5 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_1.
- Делим ведущую строку на 4,
- а затем результат умножим
  1. на 5 и отнимет от строки $-z$,
  2. на 2 и отнимем от строки x_4,
  3. на 2 и отнимем от строки x_6.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	∞
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	∞
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	∞
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отношения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	∞
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отношения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	∞
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	∞
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: выбор переменных для ввода в базис и вывода из базиса

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	∞
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

- Наибольший коэффициент в строке $-z$ имеет переменная x_3.
- Объявляем столбец x_3 ведущим.
- Вычисляем отношения элементов столбца b к элементам столбца x_3.
- Наименьшее отношение находится в строке x_6.
- Объявляем строку x_6 ведущей.

Итерация 2: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_6 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_3.
- Ведущую строку умножим

Итерация 2: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_6	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_6 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_3.
- Ведущую строку умножим

Итерация 2: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_6 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_3.
- Ведущую строку умножим

Итерация 2: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_6 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_3.
- Ведущую строку умножим
  1. на $1/2$ и отнимет от строки $-z$,
  2. на $1/2$ и отнимем от строки x_1,

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-15	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_6 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_3.
- Ведущую строку умножим
  1. на $1/2$ и отнимет от строки $-z$,
  2. на $1/2$ и отнимем от строки x_1,

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-16	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_6 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_3.
- Ведущую строку умножим
  1. на $1/2$ и отнимет от строки $-z$,
  2. на $1/2$ и отнимем от строки x_1,

Итерация 2: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-16	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_6 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_3.
- Ведущую строку умножим
  1. на $1/2$ и отнимет от строки $-z$,
  2. на $1/2$ и отнимем от строки x_1,

Итерация 2: операция замещения

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-16	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Переменная x_6 должна покинуть базис,
- а ее место должна занять переменная x_3.
- Ведущую строку умножим
  1. на $1/2$ и отнимет от строки $-z$,
  2. на $1/2$ и отнимем от строки x_1,

Оптимальная симплекс-таблица

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-16	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Поскольку в строке $-z$ все коэффициенты неположительны, то эта таблица является *оптимальной*.
- В столбце b записаны ненулевые компоненты оптимального базисного решения.
- Поэтому $x^* = (2, 0, 2)^T$ — опт. решение задачи.

Оптимальная симплекс-таблица

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-16	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Поскольку в строке $-z$ все коэффициенты неположительны, то эта таблица является *оптимальной*.
- В столбце b записаны ненулевые компоненты оптимального базисного решения.
- Поэтому $x^* = (2, 0, 2)^T$ — опт. решение задачи.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-16	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Поскольку в строке $-z$ все коэффициенты неположительны, то эта таблица является *оптимальной*.
- В столбце b записаны ненулевые компоненты оптимального базисного решения.
- Поэтому $x^* = (2, 0, 2)^T$ — опт. решение задачи.

Оптимальная симплекс-таблица

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно-шения
$-z$	-16	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	
x_4	4	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
x_1	2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
x_3	2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	

- Поскольку в строке $-z$ все коэффициенты неположительны, то эта таблица является *оптимальной*.
- В столбце b записаны ненулевые компоненты оптимального базисного решения.
- Поэтому $x^* = (2, 0, 2)^T$ — опт. решение задачи.

Поиск начального опорного плана методом искусственного базиса

Пусть дана каноническая задача ЛП

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to \mathrm{extr}, \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{4}$$

где $b_i > 0, \quad i = 1, \dots, m.$

Поиск начального опорного плана методом искусственного базиса

Пусть дана каноническая задача ЛП

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to \text{extr}, \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{4}$$

где $b_i > 0, \quad i = 1, \dots, m.$

- Алгоритм симплекс-метода начинает свою работу, когда известна хотя бы одна крайняя точка допустимого множества (начальный опорный план).

Поиск начального опорного плана методом искусственного базиса

Пусть дана каноническая задача ЛП

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to \text{extr}, \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{4}$$

где $b_i > 0, \quad i = 1, \dots, m.$

- Алгоритм симплекс-метода начинает свою работу, когда известна хотя бы одна крайняя точка допустимого множества (начальный опорный план).
- Для нахождения этой точки используется специальный метод искусственного базиса.

Поиск начального опорного плана методом искусственного базиса

Пусть дана каноническая задача ЛП

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \mathrm{extr}, \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{4}$$

где $b_i > 0, \quad i = 1, \ldots, m.$

- Алгоритм симплекс-метода начинает свою работу, когда известна хотя бы одна крайняя точка допустимого множества (начальный опорный план).
- Для нахождения этой точки используется специальный метод искусственного базиса.
- Он позволяет найти начальную крайнюю точку исходной задачи с помощью симплекс-метода, но уже для другой линейной задачи, которая получается из исходной путем введения искусственных переменных.

- Прежде всего следует привести исходную задачу к каноническому виду, в котором все правые части b_i неотрицательны.

- Прежде всего следует привести исходную задачу к каноническому виду, в котором все правые части b_i неотрицательны.
- Этого можно добиться при помощи изменения знака у тех уравнений, в которых $b_i < 0$.

- Прежде всего следует привести исходную задачу к каноническому виду, в котором все правые части b_i неотрицательны.
- Этого можно добиться при помощи изменения знака у тех уравнений, в которых $b_i < 0$.
- Затем к каждому из уравнений задачи (4) добавим новую «искусственную» неотрицательную переменную, а в качестве целевой функции возьмем новую функцию w, равную сумме этих «искусственных» переменных:

$$\begin{cases} w = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} \to \min, \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n+m. \end{cases} \tag{5}$$

- Полученная задача называется w-задачей.

- Полученная задача называется w-задачей.
- Для w-задачи сразу виден начальный опорный план: $x_0 = (0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

- Полученная задача называется w-задачей.
- Для w-задачи сразу виден начальный опорный план: $x_0 = (0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$.
- Для всех x из области определения w-задачи выполняется неравенство $w(x) \geq 0$.

- Полученная задача называется w-задачей.
- Для w-задачи сразу виден начальный опорный план: $x_0 = (0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$.
- Для всех x из области определения w-задачи выполняется неравенство $w(x) \geq 0$.
- Если допустимое множество D исходной задачи (4) непусто, то для всех точек $x \in D$ соответствующие искусственные переменные в (5) обращаются в нуль.

- Полученная задача называется w-задачей.
- Для w-задачи сразу виден начальный опорный план: $x_0 = (0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$.
- Для всех x из области определения w-задачи выполняется неравенство $w(x) \geq 0$.
- Если допустимое множество D исходной задачи (4) непусто, то для всех точек $x \in D$ соответствующие искусственные переменные в (5) обращаются в нуль.
- Значит, на этих точках целевая функция w тоже будет принимать нулевое значение.

- Полученная задача называется w-задачей.
- Для w-задачи сразу виден начальный опорный план: $x_0 = (0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$.
- Для всех x из области определения w-задачи выполняется неравенство $w(x) \geq 0$.
- Если допустимое множество D исходной задачи (4) непусто, то для всех точек $x \in D$ соответствующие искусственные переменные в (5) обращаются в нуль.
- Значит, на этих точках целевая функция w тоже будет принимать нулевое значение.
- Таким образом, чтобы получить начальный опорный план для исходной задачи (4), достаточно найти крайнюю точку для w-задачи (5), в которой целевая функция w достигает минимума, равного нулю.

Фаза 1.

- Решаем w-задачу симплекс-методом

Фаза 1.

- Решаем w-задачу симплекс-методом
- Если окажется, что в этой задаче $w_{\min} = 0$, то в точке минимума

$$x'_0 = (x'_1, \ldots, x'_n, x'_{n+1}, \ldots, x'_{n+m})$$

все координаты x'_{n+i} будут нулевыми.

Фаза 1.

- Решаем w-задачу симплекс-методом
- Если окажется, что в этой задаче $w_{\min} = 0$, то в точке минимума

$$x'_0 = (x'_1, \ldots, x'_n, x'_{n+1}, \ldots, x'_{n+m})$$

все координаты x'_{n+i} будут нулевыми.
В этом случае точка $(x'_1, \ldots, x'_n)$ будет крайней для допустимого множества D исходной задачи.

Фаза 1.

- Решаем w-задачу симплекс-методом
- Если окажется, что в этой задаче $w_{\min} = 0$, то в точке минимума

$$x'_0 = (x'_1, \ldots, x'_n, x'_{n+1}, \ldots, x'_{n+m})$$

все координаты x'_{n+i} будут нулевыми.
В этом случае точка $(x'_1, \ldots, x'_n)$ будет крайней для допустимого множества D исходной задачи.

- Если же выяснится, что $w_{\min} > 0$, то из приведенного выше рассуждения следует, что $D = \emptyset$, то есть исходная задача не имеет решений. Фазу 2 ненужно выполнять.

Фаза 1.

- Решаем w-задачу симплекс-методом
- Если окажется, что в этой задаче $w_{\min} = 0$, то в точке минимума

$$x'_0 = (x'_1, \ldots, x'_n, x'_{n+1}, \ldots, x'_{n+m})$$

все координаты x'_{n+i} будут нулевыми.
В этом случае точка $(x'_1, \ldots, x'_n)$ будет крайней для допустимого множества D исходной задачи.

- Если же выяснится, что $w_{\min} > 0$, то из приведенного выше рассуждения следует, что $D = \emptyset$, то есть исходная задача не имеет решений. Фазу 2 ненужно выполнять.

Фаза 2.

- Решаем исходную задачу (4), используя начальное базисное решение $(x'_1, \ldots, x'_n)$.