

Применение ЛП

Моделирование: основа применения ЛП

Виктор Васильевич Лепин

План

1 Задача о диете

Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продемонстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.

Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продемонстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
 - холестерина не превышала 175 единиц,

Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продemonстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
 - холестерина не превышала 175 единиц,
 - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,

Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продемонстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
 - холестерина не превышала 175 единиц,
 - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
 - белков должно быть не меньше 200 единиц,

Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продemonстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
 - холестерина не превышала 175 единиц,
 - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
 - белков должно быть не меньше 200 единиц,
 - калорий – не меньше 100 единиц.

Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.

Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

Продукт	Цена	К-во холест.	К-во жиров	К-во белков	К-во калорий
яйцо	\$0.15	50	0	70	30
мороженое	\$0.25	150	100	10	80
сироп	\$0.10	90	50	0	200

Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

Продукт	Цена	К-во холест.	К-во жиров	К-во белков	К-во калорий
яйцо	\$0.15	50	0	70	30
мороженое	\$0.25	150	100	10	80
сироп	\$0.10	90	50	0	200

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы

Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

Продукт	Цена	К-во холест.	К-во жиров	К-во белков	К-во калорий
яйцо	\$0.15	50	0	70	30
мороженое	\$0.25	150	100	10	80
сироп	\$0.10	90	50	0	200

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
 - удовлетворялись вышеперечисленные требования

Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

Продукт	Цена	К-во холест.	К-во жиров	К-во белков	К-во калорий
яйцо	\$0.15	50	0	70	30
мороженое	\$0.25	150	100	10	80
сироп	\$0.10	90	50	0	200

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
 - удовлетворялись вышеперечисленные требования
 - и стоимость единицы коктейля была минимальной.

Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:

Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
 - E – количество яиц в единице коктейля;

Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
 - E – количество яиц в единице коктейля;
 - C – количество единиц мороженого в единице коктейля;

Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
 - E – количество яиц в единице коктейля;
 - C – количество единиц мороженого в единице коктейля;
 - S – количество единиц сиропа в единице коктейля.

Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
 - E – количество яиц в единице коктейля;
 - C – количество единиц мороженого в единице коктейля;
 - S – количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} 0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\ 50E + 150C + 90S &\leq 175, & (\text{холестерин}) \\ 100C + 50S &\leq 150, & (\text{жир}) \\ 70E + 10C &\geq 200, & (\text{белки}) \\ 30E + 80C + 200S &\geq 100, & (\text{калории}) \\ E, C, S &\geq 0. \end{aligned}$$

Метод DEA

- Метод DEA (Data Envelopment Analysis) применяется для сравнения эффективности работы ряда аналогичных сервисных подразделений:

Метод DEA

- Метод DEA (Data Envelopment Analysis) применяется для сравнения эффективности работы ряда аналогичных сервисных подразделений:
- отделений банка, ресторанов, учреждений образования, здравоохранения, станций технического обслуживания автомобилей и многих других.

Метод DEA

- Метод DEA (Data Envelopment Analysis) применяется для сравнения эффективности работы ряда аналогичных сервисных подразделений:
- отделений банка, ресторанов, учреждений образования, здравоохранения, станций технического обслуживания автомобилей и многих других.
- Метод DEA не требует стоимостной оценки предоставляемых услуг.

Исходные данные

- Предположим, что имеется n подразделений, которые занумерованы числами $1, \dots, n$.

Исходные данные

- Предположим, что имеется n подразделений, которые занумерованы числами $1, \dots, n$.
- За тестовый период подразделение i ($i = 1, \dots, n$) использовало r_{ij} единиц ресурса j ($j = 1, \dots, m$)

Исходные данные

- Предположим, что имеется n подразделений, которые занумерованы числами $1, \dots, n$.
- За тестовый период подразделение i ($i = 1, \dots, n$) использовало r_{ij} единиц ресурса j ($j = 1, \dots, m$)
- и оказало s_{ik} услуг вида k ($k = 1, \dots, l$).

Исходные данные

- Предположим, что имеется n подразделений, которые занумерованы числами $1, \dots, n$.
- За тестовый период подразделение i ($i = 1, \dots, n$) использовало r_{ij} единиц ресурса j ($j = 1, \dots, m$)
- и оказало s_{ik} услуг вида k ($k = 1, \dots, l$).
- Эффективность работы подразделения i оценивается отношением

$$E_i(u, v) = \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

Исходные данные

- Предположим, что имеется n подразделений, которые занумерованы числами $1, \dots, n$.
- За тестовый период подразделение i ($i = 1, \dots, n$) использовало r_{ij} единиц ресурса j ($j = 1, \dots, m$)
- и оказало s_{ik} услуг вида k ($k = 1, \dots, l$).
- Эффективность работы подразделения i оценивается отношением

$$E_i(u, v) = \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

- взвешенной суммы оказанных услуг к взвешенной сумме использованных ресурсов,

Исходные данные

- Предположим, что имеется n подразделений, которые занумерованы числами $1, \dots, n$.
- За тестовый период подразделение i ($i = 1, \dots, n$) использовало r_{ij} единиц ресурса j ($j = 1, \dots, m$)
- и оказало s_{ik} услуг вида k ($k = 1, \dots, l$).
- Эффективность работы подразделения i оценивается отношением

$$E_i(u, v) = \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

- взвешенной суммы оказанных услуг к взвешенной сумме использованных ресурсов,
- где u_k и v_j есть весовые множители, которые нужно определить.

Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения i_0 , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$E_{i_0}(u, v) \rightarrow \max,$$

$$E_i(u, v) \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u \in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m.$$

Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения i_0 , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$E_{i_0}(u, v) \rightarrow \max,$$

$$E_i(u, v) \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u \in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m.$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения i_0 весовые множители u_k и v_j .

Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения i_0 , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$E_{i_0}(u, v) \rightarrow \max,$$

$$E_i(u, v) \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u \in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m.$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения i_0 весовые множители u_k и v_j .
- Пусть пара (u^*, v^*) есть оптимальное решение данной задачи.

Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения i_0 , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$E_{i_0}(u, v) \rightarrow \max,$$

$$E_i(u, v) \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u \in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m.$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения i_0 весовые множители u_k и v_j .
- Пусть пара (u^*, v^*) есть оптимальное решение данной задачи.
- Если $E_{i_0}(u^*, v^*) < 1$, то подразделение i_0 работало неэффективно, и его работу можно улучшить,

Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения i_0 , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$E_{i_0}(u, v) \rightarrow \max,$$

$$E_i(u, v) \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u \in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m.$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения i_0 весовые множители u_k и v_j .
- Пусть пара (u^*, v^*) есть оптимальное решение данной задачи.
- Если $E_{i_0}(u^*, v^*) < 1$, то подразделение i_0 работало неэффективно, и его работу можно улучшить,
- если перенять опыт работы у более эффективных подразделений i , для которых $E_i(u^*, v^*) = 1$.

Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\ E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ u &\in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned}$$

Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\ E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ u &\in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned}$$

- можно переформулировать как следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l s_{i_0 k} u_k &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^m r_{i_0 j} v_j &= 1, \\ \sum_{k=1}^l s_{ik} u_k &\leq \sum_{j=1}^m r_{ij} v_j, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ u_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, l, \\ v_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Пример

- Фирма быстрого питания имеет шесть подразделений, каждое из которых размещено в одном из торговых центров с большой парковкой.

Пример

- Фирма быстрого питания имеет шесть подразделений, каждое из которых размещено в одном из торговых центров с большой парковкой.
- Фирма предлагает клиентам только один стандартный набор, включающий бургергер, картофель фри и напиток.

Пример

- Фирма быстрого питания имеет шесть подразделений, каждое из которых размещено в одном из торговых центров с большой парковкой.
- Фирма предлагает клиентам только один стандартный набор, включающий бургергер, картофель фри и напиток.
- Менеджеры фирмы решили использовать DEA, чтобы выявить те подразделения, которые используют свои ресурсы наиболее эффективно.

Данные для DEA анализа

Подразделение	Труд (часов)	Материалы (долларов)	Наборов продано
1	32	3200	1600
2	16	600	400
3	24	600	600
4	24	400	400
5	16	160	200
6	8	40	80

Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

Подразделение	Труд (часов)	Материалы (долларов)	Наборов продано
1	32	3200	1600
2	16	600	400
3	24	600	600
4	24	400	400
5	16	160	200
6	8	40	80

$$E_1 = 1600u_1 \rightarrow \max,$$

$$32v_1 + 3200v_2 = 1,$$

$$400u_1 - 16v_1 - 600v_2 \leq 0,$$

$$600u_1 - 24v_1 - 600v_2 \leq 0,$$

$$400u_1 - 24v_1 - 400v_2 \leq 0,$$

$$200u_1 - 16v_1 - 160v_2 \leq 0,$$

$$80u_1 - 8v_1 - 40v_2 \leq 0,$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0.$$