Исследование операций

Приемы моделировани

Виктор Васильевич Лепин

Институт математики
НАН Беларуси, Минск

Пример задачи смешанного целочисленного линейного программирования, СЦП

СЦП в стандартной форме

$A \in Q^{mn}$, $B \in Q^{mp}$, $b \in Q^m$, $c \in Q^n$, $f \in Q^p$.

$\min cx + fy$

при ограничениях $Ax + By \geq b$,

$x \geq 0$,

$y \geq 0$, целые

множество решений

$X = \{x \in R^n, y \in R^p | x \geq 0, y \geq 0, Ax + By \geq b\}$

значения целевой функции $f(x, y) = cx + fy$, $\forall (x, y) \in X$

Классификация задач

задача линейного программирования

$x \geq 0,$

$y \geq 0$

Классификация задач

задача линейного программирования

$x \geq 0,$

$y \geq 0$

задача булева (или 0-1) программирования

$x \in \{0, 1\},$

$y \in \{0, 1\}$

Классификация задач

задача линейного программирования

$x \geq 0,$

$y \geq 0$

задача булева (или 0-1) программирования

$x \in \{0, 1\},$

$y \in \{0, 1\}$

задача смешанного булева программирования

$x \in \{0, 1\},$

$y \geq 0$

Классификация задач

задача линейного программирования
$x \geq 0$,
$y \geq 0$
задача булева (или 0-1) программирования
$x \in \{0, 1\}$,
$y \in \{0, 1\}$
задача смешанного булева программирования
$x \in \{0, 1\}$,
$y \geq 0$
задача полностью целочисленного программирования
$x \geq 0$, целые,
$y \geq 0$, целые

Замечание
Любая целочисленная переменная x, принимающая значения из отрезка $[0, U]$ может быть представлена в следующем виде

$$x = \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 U \rfloor} 2^j x_j$$

Замечание

Любая целочисленная переменная x, принимающая значения из отрезка $[0, U]$ может быть представлена в следующем виде

$$x = \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 U \rfloor} 2^j x_j$$

Definition

Имликация — логическая связка некоторого условия и следствия из него ("если". . . ,"то". . .)

Правила моделирования

Первое правило моделирования логических отношений

Пусть I — конечное множество индексов, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$ и $0 \le y \le 1$. Тогда импликация если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$ моделируется неравенством

$$y \le \sum_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Правила моделирования

Первое правило моделирования логических отношений

Пусть I — конечное множество индексов, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$ и $0 \le y \le 1$. Тогда импликация если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$ моделируется неравенством

$$y \le \sum_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Доказательство. Если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $\sum_{i \in I} x_i = 0$ и (1) превращается в $y \le 0$, поскольку $y \ge 0$, то $y = 0$.

Первое правило моделирования логических отношений

Пусть I — конечное множество индексов, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$ и $0 \leq y \leq 1$. Тогда импликация если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$ моделируется неравенством

$$y \leq \sum_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Доказательство. Если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $\sum_{i \in I} x_i = 0$ и (1) превращается в $y \leq 0$, поскольку $y \geq 0$, то $y = 0$.

Неравенство (1) не порождает никаких лишних ограничений: если $x_i = 1$ для некоторого i, то $1 \leq \sum_{i \in I} x_i$ и так как $y \leq 1$, то (1) всегда выполнено.

Правила моделирования

Следствие

Пусть $0 \le y \le c$. Тогда импликация если $x_i = 0$ для всех $i \in I$, то $y = 0$ моделируется неравенством

$$y \le c \sum_{i \in I} x_i. \tag{2}$$

Пример. Задача размещения производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства

Пример. Задача размещения производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов

Пример. Задача размещения производства

- Дано

  I — множество возможных мест производства

  J — множество клиентов

  c_i — затраты на организацию производства в пункте i

Пример. Задача размещения производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — стоимость доставки клиенту j из пункта i

Пример. Задача размещения производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — стоимость доставки клиенту j из пункта i
- Определить в каких пунктах следует разместить производство, чтобы обслужить всех клиентов с наименьшими суммарными затратами?

Пример. Задача размещения производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

Пример. Задача размещения производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из пункта производства } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Задача размещения производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если клиент } j \text{ обслуживается из пункта производства } i, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Если в пункте i производство не размещено, то клиент j не обслуживается из i, то есть

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \text{ для каждого } i \in I, \ j \in J.$$

Пример. Задача размещения производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из пункта производства } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если в пункте i производство не размещено, то клиент j не обслуживается из i, то есть

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \text{ для каждого } i \in I,\ j \in J.$$

Следуя правилу 1 получаем ограничение:

$$y_{ij} \leq x_i, \text{ для каждого } i \in I,\ j \in J.$$

Пример. Задача размещения производства

Математическая модель

$$\min \left(\sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij} \right)$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1 \; \forall j \in J,$$

$$y_{ij} \leq x_i, \; \forall i \in I, \; j \in J,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано

  I — множество возможных мест производства

  J — множество клиентов

  c_i — затраты на организацию производства в пункте i

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — удельные затраты на доставку продукции клиенту j из пункта i

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — удельные затраты на доставку продукции клиенту j из пункта i
  u_i — производственная мощность предприятия i

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — удельные затраты на доставку продукции клиенту j из пункта i
  u_i — производственная мощность предприятия i
  b_j — спрос клиента j

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

- Дано
  I — множество возможных мест производства
  J — множество клиентов
  c_i — затраты на организацию производства в пункте i
  d_{ij} — удельные затраты на доставку продукции клиенту j из пункта i
  u_i — производственная мощность предприятия i
  b_j — спрос клиента j
- Определить в каких пунктах следует разместить производство, чтобы удовлетворить спрос всех клиентов с наименьшими суммарными затратами?

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$y_{ij} \geq 0$ — количество продукции поставляемое клиенту j из пункта i.

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$y_{ij} \geq 0$ — количество продукции поставляемое клиенту j из пункта i.

Если в пункте i открыто предприятие, то общее количество продукции, отправленное из него всем клиентам не может быть больше, чем величина u_i, т. е.

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \forall j \in J \text{ и } 0 \leq \sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i$$

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если в пункте } i \text{ размещается производство,} \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$y_{ij} \geq 0$ — количество продукции поставляемое клиенту j из пункта i.

Если в пункте i открыто предприятие, то общее количество продукции, отправленное из него всем клиентам не может быть больше, чем величина u_i, т. е.

$$\text{если } x_i = 0, \text{ то } y_{ij} = 0, \forall j \in J \text{ и } 0 \leq \sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i$$

Это ограничение в виде неравенства:

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq u_i x_i, \forall i \in I.$$

Пример. Задача размещения производства с ограничениями на мощности производства

Математическая модель

$$\min \sum_{i\in I} c_i x_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} y_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = b_j \ \forall j \in J,$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = u_i x_i \ \forall i \in I,$$

$$x_i, \in \{0,1\}, \forall i \in I,$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \forall i \in I, \forall j \in J.$$

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов
  d_{ij} — кратчайшие расстояния между элементами i и j

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов
  d_{ij} — кратчайшие расстояния между элементами i и j
  s_j — максимальное расстояние, которое клиент j согласен преодолеть до магазина

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов
  d_{ij} — кратчайшие расстояния между элементами i и j
  s_j — максимальное расстояние, которое клиент j согласен преодолеть до магазина
  N_j — множество магазинов, которые клиент j мог бы посещать,
  $N_j := \{i \in I | d_{ij} \leq s_j\}$

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов
  d_{ij} — кратчайшие расстояния между элементами i и j
  s_j — максимальное расстояние, которое клиент j согласен преодолеть до магазина
  N_j — множество магазинов, которые клиент j мог бы посещать,
  $N_j := \{i \in I | d_{ij} \leq s_j\}$
  w_i — затраты, связанные с открытием магазина в пункте i

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов
  d_{ij} — кратчайшие расстояния между элементами i и j
  s_j — максимальное расстояние, которое клиент j согласен преодолеть до магазина
  N_j — множество магазинов, которые клиент j мог бы посещать,
  $N_j := \{i \in I | d_{ij} \leq s_j\}$
  w_i — затраты, связанные с открытием магазина в пункте i
  B — общий бюджет на открытие магазинов

Пример. Задача о покрытии

- Дано
  I — множество возможных пунктов размещения магазинов
  J — множество клиентов
  d_{ij} — кратчайшие расстояния между элементами i и j
  s_j — максимальное расстояние, которое клиент j согласен преодолеть до магазина
  N_j — множество магазинов, которые клиент j мог бы посещать,
  $N_j := \{i \in I | d_{ij} \leq s_j\}$
  w_i — затраты, связанные с открытием магазина в пункте i
  B — общий бюджет на открытие магазинов
- Требуется обслужить как можно больше клиентов при ограниченном бюджете на открытие магазинов.

Задача о покрытии

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ магазин открыт,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ магазин открыт,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент j обслуживается,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Задача о покрытии

Переменные y_j и x_i логически связаны:

Задача о покрытии

Переменные y_j и x_i логически связаны:
$y_j = 1$, тогда и только тогда, когда $x_i = 1$ для некоторого $i \in N_j$.

Задача о покрытии

Переменные y_j и x_i логически связаны:
$y_j = 1$, тогда и только тогда, когда $x_i = 1$ для некоторого $i \in N_j$.
То есть
если $x_i = 1$ для некоторого $i \in N_j$, то $y_j = 1$ или
если $x_i = 0$ для всех $i \in N_j$, то $y_j = 0$

Задача о покрытии

Переменные y_j и x_i логически связаны:
$y_j = 1$, тогда и только тогда, когда $x_i = 1$ для некоторого $i \in N_j$.
То есть
если $x_i = 1$ для некоторого $i \in N_j$, то $y_j = 1$ или
если $x_i = 0$ для всех $i \in N_j$, то $y_j = 0$
и
если $y_j = 1$, то $x_i = 1$ для некоторого $i \in N_j$ или
если $y_j = 0$, то $x_i = 0$ для всех $i \in N_j$.

Следуя правилу 1 получаем:

$$y_j \leq \sum_{i \in N_j} x_i \ \ \forall j \in J,$$

$$x_i \leq y_j, \ \ \forall i \in N_j, \ \ \forall j \in J.$$

Задача о покрытии

Математическая модель

$$\max \sum_{j \in J} y_j$$

при ограничениях

$$y_j \le \sum_{i \in N_j} x_i \quad \forall j \in J,$$

$$x_i \le y_j, \quad \forall i \in N_j, \quad \forall j \in J.$$

$$\sum_{i \in I} w_i x_i \le B$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J.$$

Второе правило моделирования логических отношений

Пусть I — конечное множество индексов, $I_0, I_1 \subseteq I$, $I_0 \cap I_1 = \emptyset$, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$, и $y \in R$, $0 \le y \le 1$. Тогда импликация если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $x_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 0$ моделируется неравенством

$$y \le \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i). \tag{3}$$

Второе правило моделирования логических отношений

Пусть I — конечное множество индексов, $I_0, I_1 \subseteq I$, $I_0 \cap I_1 = \emptyset$, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$, и $y \in R$, $0 \leq y \leq 1$. Тогда импликация если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $x_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 0$ моделируется неравенством

$$y \leq \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i). \tag{3}$$

Импликация
если $x_i = 0$ для всех $i \in I_0$ и $x_i = 1$ для всех $i \in I_1$, то $y = 1$
моделируется неравенством

$$(1 - y) \leq \sum_{i \in I_0} x_i + \sum_{i \in I_1} (1 - x_i). \tag{4}$$

Второе правило моделирования логических отношений

После приведения подобных неравенства (3) и (4) можно переписать в более компактном виде:

$$\sum_{i \in I_1} x_i - \sum_{i \in I_0} x_i + y \leq |I_1|,$$

$$\sum_{i \in I_1} x_i - \sum_{i \in I_0} x_i - y \leq |I_1| - 1.$$

Пример. Назначение клиента к ближайшему предприятию

- В задачах размещения часто необходимо назначить клиентов к ближайшим открытым предприятиям.

Пример. Назначение клиента к ближайшему предприятию

- В задачах размещения часто необходимо назначить клиентов к ближайшим открытым предприятиям.
- Пусть C_{ij} — множество всех предприятий, которые находятся к клиенту j ближе, чем предприятие i.

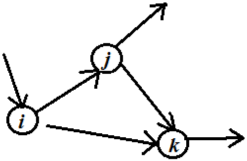
Пример. Назначение клиента к ближайшему предприятию

- В задачах размещения часто необходимо назначить клиентов к ближайшим открытым предприятиям.
- Пусть C_{ij} — множество всех предприятий, которые находятся к клиенту j ближе, чем предприятие i.
- Тогда
  если $x_i = 1$ и $x_t = 0$ для всех $t \in C_{ij}$, то $y_{ij} = 1$.

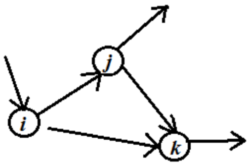
Пример. Назначение клиента к ближайшему предприятию

- В задачах размещения часто необходимо назначить клиентов к ближайшим открытым предприятиям.
- Пусть C_{ij} — множество всех предприятий, которые находятся к клиенту j ближе, чем предприятие i.
- Тогда
  если $x_i = 1$ и $x_t = 0$ для всех $t \in C_{ij}$, то $y_{ij} = 1$.
- Применяя второе правило получаем
  $1 - y_{ij} \leq (1 - x_i) + \sum_{t \in C_{ij}} x_t$ или $y_{ij} \geq x_i - \sum_{t \in C_{ij}} x_t$,
  где $x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}$.

Пример. Моделирование отношения транзитивности

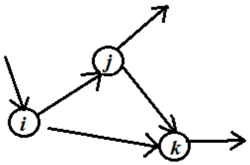


Задан граф $G = (V, E)$



Задан граф $G = (V, E)$
Требуется смоделировать транзитивность отношения связности вершин.

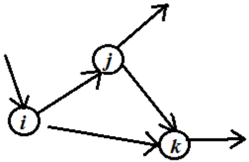
Пример. Моделирование отношения транзитивности



Задан граф $G = (V, E)$

Требуется смоделировать транзитивность отношения связности вершин.

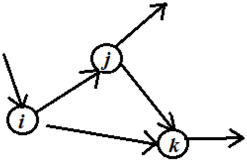
Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть ребро,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$



Задан граф $G = (V, E)$
Требуется смоделировать транзитивность отношения связности вершин.

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть ребро,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Для любой тройки вершин $(i, j, k) \in V \times V \times V$ если $x_{ij} = 1$ и $x_{jk} = 1$, то $x_{ik} = 1$.



Задан граф $G = (V, E)$

Требуется смоделировать транзитивность отношения связности вершин.

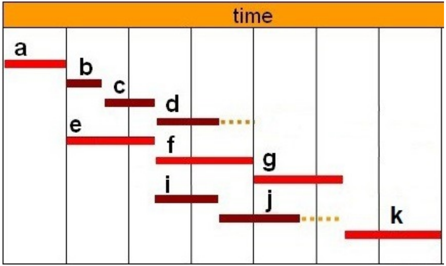
Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть ребро,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Для любой тройки вершин $(i, j, k) \in V \times V \times V$ если $x_{ij} = 1$ и $x_{jk} = 1$, то $x_{ik} = 1$.

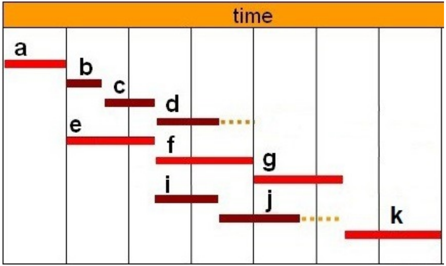
Следуя правилу 2 получаем линейное неравенство

$(1 - x_{ik}) \leq (1 - x_{ij}) + (1 - x_{jk})$ или $x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1$.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

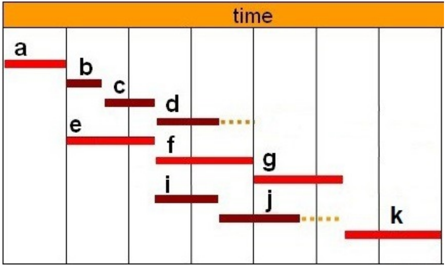


Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)



Очередная работа не может начаться, пока не закончится предыдущая работа.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

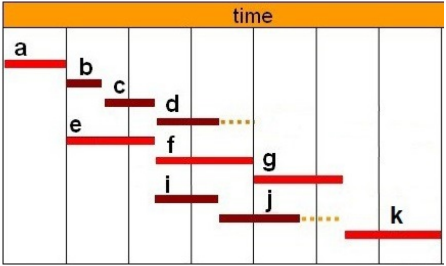


Очередная работа не может начаться, пока не закончится предыдущая работа.

Пусть

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ выполняется до работы } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)



Очередная работа не может начаться, пока не закончится предыдущая работа.

Пусть

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ выполняется до работы } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Можно ограничиться рассмотрением только переменных x_{ij} с $i < j$ и $x_{ii} = 0$.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

Для каждой тройки работ i, j и k должно выполняться отношение транзитивности.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

Для каждой тройки работ i, j и k должно выполняться отношение транзитивности.

Убедитесь, что в результате получится следующая система неравенств:

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

Для каждой тройки работ i, j и k должно выполняться отношение транзитивности.

Убедитесь, что в результате получится следующая система неравенств:

$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

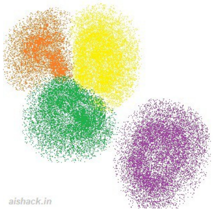
Для каждой тройки работ i, j и k должно выполняться отношение транзитивности.

Убедитесь, что в результате получится следующая система неравенств:

$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$

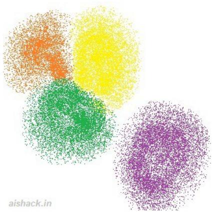
$(1 - x_{ij}) - x_{jk} + x_{ik} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$

Кластеризация



В задачах кластеризации некоторое конечное множество объектов I нужно разбить на подмножества.

Кластеризация

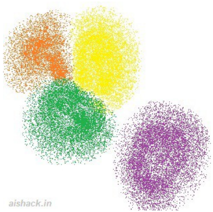


В задачах кластеризации некоторое конечное множество объектов I нужно разбить на подмножества.

Пусть

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если объекты } i \text{ и } j \text{ лежат в одном подмножестве,} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Кластеризация



В задачах кластеризации некоторое конечное множество объектов I нужно разбить на подмножества.

Пусть

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если объекты } i \text{ и } j \text{ лежат в одном подмножестве,} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

В силу симметричности принадлежности двух объектов одному подмножеству число переменных можно сократить и рассматривать только x_{ij} с $i < j$, $x_{ji} = x_{ij}$, $x_{ii} = 1$.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

- Если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

- Если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

  $x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$.

- Если i и j в одном подмножестве, i и k в одном подмножестве, то j и k, также в одном подмножестве

  $x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$.

Пример. Моделирование отношения порядка (транзитивность и антисимметричность)

- Если i и j в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и k, также в одном подмножестве

  $x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$.

- Если i и j в одном подмножестве, i и k в одном подмножестве, то j и k, также в одном подмножестве

  $x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$.

- Если i и k в одном подмножестве, j и k в одном подмножестве, то i и j, также в одном подмножестве

  $x_{ik} + x_{jk} - x_{ij} \leq 1$ для любых (i, j, k), $i < j < k$.

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Как выбрать минимум из двух неотрицательных чисел?

$y = \min(u_1, u_2)$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Нужно, чтобы выполнялось

- $y \leq u_1$ и $y \leq u_2$,

Нужно, чтобы выполнялось

- $y \leq u_1$ и $y \leq u_2$,
- $y \geq u_1$ и $y \geq u_2$,

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$
- $x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_2 \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

Пусть

- $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_1 \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$
- $x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если неравенство } y \geq u_2 \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$
- W — некоторое большое положительное число.

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2)$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$

- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$

Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2)$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$

- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$
- $x_1 + x_2 = 1$

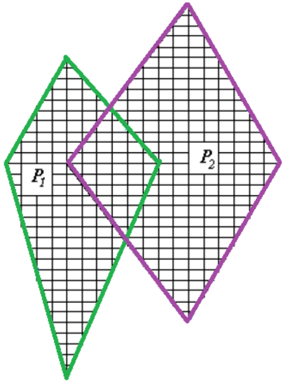
Пример. Моделирование выбора минимального элемента

$y = \min(u_1, u_2)$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$

- $y \leq u_1$
- $y \leq u_2$
- $x_1 + x_2 = 1$
- $y \geq u_1 - W(1 - x_1)$
- $y \geq u_2 - W(1 - x_2)$
  $y \geq 0$, $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

Моделирование взаимоисключающих событий

Пусть допустимая область образована объединением двух многоугольников P_1 и P_2:



Моделирование взаимоисключающих событий

Многоугольники задаются группой неравенств

$P_1:$

$2y_1 + y_2 \geq 4$

$y_1 - y_2 \geq -4$

$-4y_1 + 3y_2 \geq -8$

$2y_1 + 3y_2 \leq 22$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

$P_2:$

$3y_1 + 4y_2 \geq 22$

$-3y_1 + 4y_2 \leq 10$

$3y_1 + 3y_2 \leq 39$

$y_1 - y_2 \leq 5$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

Многоугольники задаются группой неравенств

$P_1:$

$$2y_1 + y_2 \geq 4$$
$$y_1 - y_2 \geq -4$$
$$-4y_1 + 3y_2 \geq -8$$
$$2y_1 + 3y_2 \leq 22$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

$P_2:$

$$3y_1 + 4y_2 \geq 22$$
$$-3y_1 + 4y_2 \leq 10$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 39$$
$$y_1 - y_2 \leq 5$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

Решение является допустимым, если оно удовлетворяет хотя бы одной группе неравенств P_1 или P_2.

Моделирование взаимоисключающих событий

Многоугольники задаются группой неравенств

P_1 :

$2y_1 + y_2 \geq 4$

$y_1 - y_2 \geq -4$

$-4y_1 + 3y_2 \geq -8$

$2y_1 + 3y_2 \leq 22$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

P_2 :

$3y_1 + 4y_2 \geq 22$

$-3y_1 + 4y_2 \leq 10$

$3y_1 + 3y_2 \leq 39$

$y_1 - y_2 \leq 5$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

Решение является допустимым, если оно удовлетворяет хотя бы одной группе неравенств P_1 или P_2.
Другими словами из двух групп ограничений нужно, чтобы выполнялась по крайней мере одна группа.

Преобразуем ограничения, кроме ограничений на значение переменных, в ограничения со знаком $\leq$ в неравенствах:

$P_1:$
$$-2y_1 - y_2 \leq -4$$
$$-y_1 + y_2 \leq 4$$
$$4y_1 - 3y_2 \leq -8$$
$$2y_1 + 3y_2 \leq 22$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

$P_2:$
$$-3y_1 - 4y_2 \leq -22$$
$$-3y_1 + 4y_2 \leq 10$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 39$$
$$y_1 - y_2 \leq 5$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

Переменные:

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Переменные:

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена группа неравенств для } P_2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

W — большое положительное число

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \le -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \le 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \le 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \le 22 + W(1 - x_1)$

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leq -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \leq 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \leq 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \leq 22 + W(1 - x_1)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leq -22 + W(1 - x_2)$
  $-3y_1 + 4y_2 \leq 10 + W(1 - x_2)$
  $3y_1 + 3y_2 \leq 39 + W(1 - x_2)$
  $y_1 - y_2 \leq 5 + W(1 - x_2)$

Моделирование взаимоисключающих событий
Первый способ

- P_1 :
  $-2y_1 - y_2 \leq -4 + W(1 - x_1)$
  $-y_1 + y_2 \leq 4 + W(1 - x_1)$
  $4y_1 - 3y_2 \leq 8 + W(1 - x_1)$
  $2y_1 + 3y_2 \leq 22 + W(1 - x_1)$
- P_2 :
  $-3y_1 - 4y_2 \leq -22 + W(1 - x_2)$
  $-3y_1 + 4y_2 \leq 10 + W(1 - x_2)$
  $3y_1 + 3y_2 \leq 39 + W(1 - x_2)$
  $y_1 - y_2 \leq 5 + W(1 - x_2)$
- $x_1 + x_2 \geq 1$
  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$
  $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

Моделирование взаимоисключающих событий

Второй способ

$$
\begin{array}{cccc}
 & & y_1 & y_2 \\
 & & \| & \| \\
P_1 & : & y_1^1 & y_2^1 \\
 & & + & + \\
P_2 & : & y_1^2 & y_2^2
\end{array}
$$

Булевы переменные x_1, x_2 как в первом способе.

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$

- P_1 :
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$
- P_2 :
  $3y_1^2 + 4y_2^2 \geq 22x_2$
  $-3y_1^2 + 4y_2^2 \leq 10x_2$
  $3y_1^2 + 3y_2^2 \leq 39x_2$
  $y_1^2 - y_2^2 \geq 5x_2$

- $P_1:$
  $2y_1^1 + y_2^1 \geq 4x_1$
  $y_1^1 - y_2^1 \geq -4x_1$
  $-4y_1^1 + 3y_2^1 \geq -8x_1$
  $2y_1^1 + 3y_2^1 \leq 22x_1$
- $P_2:$
  $3y_1^2 + 4y_2^2 \geq 22x_2$
  $-3y_1^2 + 4y_2^2 \leq 10x_2$
  $3y_1^2 + 3y_2^2 \leq 39x_2$
  $y_1^2 - y_2^2 \geq 5x_2$
- $y_1^1 + y_1^2 = y_1$
  $y_2^1 + y_2^2 = y_2$
  $x_1 + x_2 = 1$
  $y_1^1 \geq 0,\ y_2^1 \geq 0$
  $y_1^2 \geq 0,\ y_2^2 \geq 0$
  $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$
  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

Утверждается, что $P_1 \cup P_2 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда система неравенств разрешима.

Пример. Задача составления расписания

- Задан порядок выполнения работ на машинах:

Пример. Задача составления расписания

- Задан порядок выполнения работ на машинах:
- работа j сначала выполняется на машине с номером $j(1)$, затем на машине с номером $j(2)$...

Пример. Задача составления расписания

- Задан порядок выполнения работ на машинах:
- работа j сначала выполняется на машине с номером $j(1)$, затем на машине с номером $j(2)$...
- В каждый момент времени машина может выполнять не более одной работы, каждая работа выполняется не более, чем на одной машине.

Пример. Задача составления расписания

- Задан порядок выполнения работ на машинах:
- работа j сначала выполняется на машине с номером $j(1)$, затем на машине с номером $j(2)$...
- В каждый момент времени машина может выполнять не более одной работы, каждая работа выполняется не более, чем на одной машине.
- Работы не прерываются.

Пример. Задача составления расписания

- Задан порядок выполнения работ на машинах:
- работа j сначала выполняется на машине с номером $j(1)$, затем на машине с номером $j(2)$...
- В каждый момент времени машина может выполнять не более одной работы, каждая работа выполняется не более, чем на одной машине.
- Работы не прерываются.
- p_{ij} — длительность выполнения работы j на машине i.

Пример. Задача составления расписания

- Задан порядок выполнения работ на машинах:
- работа j сначала выполняется на машине с номером $j(1)$, затем на машине с номером $j(2)$...
- В каждый момент времени машина может выполнять не более одной работы, каждая работа выполняется не более, чем на одной машине.
- Работы не прерываются.
- p_{ij} — длительность выполнения работы j на машине i.
- Требуется выполнить все работы и минимизировать сумму времен завершения всех работ.

Пример. Задача составления расписания

Переменные:

$t_{ij} \geq 0$, целые — время начала выполнения работы j на машине i

Переменные:

$t_{ij} \geq 0$, целые — время начала выполнения работы j на машине i

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } j \text{ предшествует } k \text{ на машине } i,\ j < k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Пример. Задача составления расписания

Если работа j предшествует работе k на машине i, то время начала работы k должно наступить не раньше времени завершения работы j :

- $t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$, если $x_{ijk} = 1$
  и

Пример. Задача составления расписания

Если работа j предшествует работе k на машине i, то время начала работы k должно наступить не раньше времени завершения работы j :

- $t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$, если $x_{ijk} = 1$
  и
- $t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$, если $x - ijk = 0$

Пример. Задача составления расписания

Если работа j предшествует работе k на машине i, то время начала работы k должно наступить не раньше времени завершения работы j :

- $t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$, если $x_{ijk} = 1$
  и
- $t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$, если $x - ijk = 0$
- $t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk})$

Пример. Задача составления расписания

Если работа j предшествует работе k на машине i, то время начала работы k должно наступить не раньше времени завершения работы j :

- $t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$, если $x_{ijk} = 1$
  и
- $t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$, если $x - ijk = 0$
- $t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk})$
- $t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik} - W x_{ijk}$,
  где W — большое положительное число.

Пример. Задача составления расписания

Каждая работа состоит из операций, выполняемых на разных машинах и $(r+1)$-ая операция работы j не может начаться пока не будет завершена предыдущая r-ая операция, значит

$$t_{j(r+1)j} \geq t_{j(r)j} + p_{j(r)j}.$$

Пример. Задача составления расписания

Математическая модель

$\min \sum_{j=1}^{n} (t_{j(m)j} + p_{j(m)j})$

при ограничениях:

$t_{j(r+1)j} \geq t_{j(r)j} + p_{j(r)j}$, $r = 1, \ldots, (m-1)$, $j = 1, \ldots, n$

$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij} - W(1 - x_{ijk})$, $i = 1, \ldots, m$; $j, k = 1, \ldots, n$

$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik} - W x_{ijk}$, $i = 1, \ldots, m$; $j, k = 1, \ldots, n$

$t_{ij} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$

$x_{ijk} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, m$; $j, k = 1, \ldots, n$

Линеаризация произведения переменных

Как сделать эквивалентную линейную переформулировку?

$x_i \cdot x_j$, где $x_i, x_j \in \{0, 1\}$

Линеаризация произведения переменных

Пусть $y_{ij} = x_i x_j$, то есть

$$y_{ij} = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } x_i = 1 \text{ и } x_j = 1,$$

Линеаризация произведения переменных

Пусть $y_{ij} = x_i x_j$, то есть

$$y_{ij} = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } x_i = 1 \text{ и } x_j = 1,$$

другими словами

$$\text{если } y_{ij} = 1, \text{ то } x_i = 1,$$
$$\text{если } y_{ij} = 1, \text{ то } x_j = 1,$$

и

$$\text{если } x_i = 1 \text{ и } x_j = 1, \text{ то } y_{ij} = 1.$$

Линеаризация произведения переменных

Применяя первое и второе правила получаем:

$1 - x_i \leq 1 - y_{ij},$

Линеаризация произведения переменных

Применяя первое и второе правила получаем:

$$1 - x_i \leq 1 - y_{ij},$$
$$1 - x_j \leq 1 - y_{ij},$$

Линеаризация произведения переменных

Применяя первое и второе правила получаем:

$$1 - x_i \leq 1 - y_{ij},$$
$$1 - x_j \leq 1 - y_{ij},$$
$$1 - y_{ij} \leq 1 - x_i + 1 - x_j$$

Линеаризация произведения переменных

Применяя первое и второе правила получаем:

$$1 - x_i \leq 1 - y_{ij},$$
$$1 - x_j \leq 1 - y_{ij},$$
$$1 - y_{ij} \leq 1 - x_i + 1 - x_j$$

Или в более упрощенной форме:

$$y_{ij} \leq x_i$$
$$y_{ij} \leq x_j$$
$$x_i + x_j - y_{ij} \leq 1$$

Дано

$G = (V, E)$ — неориентированный граф.

Найти максимальный (по количеству вершин) полный подграф, то есть клику.

Простой граф без петель и кратных ребер называется полным, если любая пара вершин соединена ребром.

Пример. Задача о клике

Переменные:

$$x_v = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v \text{ входит в подграф} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Пример. Задача о клике

Подграф является кликой, тогда и только тогда, когда он не содержит пару вершин, между которыми нет ребра в исходном графе.
То есть

$$\text{если } x_w = 1, \text{ то } x_v = 0, \text{ для } (v, w) \notin E.$$

В виде неравенства:
$x_v \leq 1 - x_w$ для $(v, w) \notin E$

Пример. Задача о клике

Математическая модель

$\max_{v \in V} x_v$

при ограничениях:

$x_v \leq 1 - x_w \; \forall (v, w) \notin E$

$x_v \in \{0, 1\}, \; v \in V$

Пример. Задача о клике максимального веса

Нужно знать еще и ребра, входящие в полный подграф.

Дополнительные переменные:

$$y_{vw} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } vw \text{ входит в подграф} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Ребро (v, w) из множества E входит в подграф, тогда и только тогда, когда обе вершины v и w входят в подграф.
Следовательно, $y_{vw} = x_v x_w$.

Пример. Задача о клике максимального веса

Линеаризация

$y_{vw} = 1$, тогда и только тогда, когда
$x_v = 1$ и $x_w = 1$ для $(v, w) \in E$

Пример. Задача о клике максимального веса

Линеаризация

$y_{vw} = 1$, тогда и только тогда, когда
$x_v = 1$ и $x_w = 1$ для $(v, w) \in E$

в виде неравенств:

$1 - y_{vw} \leq 1 - x_v + 1 - x_w, \ (v, w) \in E$
$y_{vw} \leq x_v, \ (v, w) \in E$
$y_{vw} \leq x_w, \ (v, w) \in E$

- Дано
  I — множество возможных мест для открытия p торговых центров
  J — множество потребителей
  u_{ij} — предпочтение торгового центра i потребителем j
  B_j — бюджет потребителя j
  c_{ij} — удельная прибыль предпринимателя от потраченной потребителем j денежной единицы в магазине i
- Задача предпринимателя — открыть p торговых центров так, чтобы получить максимальную прибыль.

Переменные:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в месте } i \text{ открывается торговый центр} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$y_{ij} \geq 0$ — сумма, потраченная клиентом j в торговом центре i.

Задача размещения с распределенными закупками

Математическая модель

$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}$

$\sum_{i \in I} x_i = p$

$y_{ij} = B_j \frac{u_{ij} x_i}{\sum_{k \in I} u_{kj} x_k} \;\; i \in I,\; j \in J$

$x_i \in \{0, 1\},\; y_{ij} \geq 0,\; i \in I,\; j \in J$

Замена переменных

$z_j \geq 0,\ j \in J$

$$z_j = \frac{B_j}{\sum_{k \in I} u_{kj} x_k}$$

ЗРРЗ. Линеаризация модели

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_i = p$$

$$y_{ij} \le B_j x_i \;\; i \in I, \;\; j \in J$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = B_j \;\; j \in J$$

$$y_{ij} \le u_{ij} z_j, \;\; i \in I, \;\; j \in J$$

$$u_{ij} z_j \le y_{ij} + B_j(1 - x_i), \;\; i \in I, \;\; j \in J$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \;\; y_{ij} \ge 0, \;\; i \in I, \;\; j \in J$$

Задача о ценообразовании

- Дано
  I — множество филиалов
  J — множество потребителей
  b_j — бюджет j-го потребителя
  c_{ij} — транспортные затраты от i-го филиала до j-го потребителя
- Задача фирмы назначить такую стоимость продукции в каждом филиале, чтобы получить максимальный суммарный доход от своих филиалов.

Переменные:

$p_i \geq 0$ - стоимость продукции в i-м филиале

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ый потребитель выбрал } i\text{-ый филиал} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача о ценообразовании

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I} p_i \sum_{j\in J} x_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \le 1, \quad j \in J$$

$$\sum_{i\in I} (b_j - c_{ij} - p_i) x_{ij} \ge 0, \quad j \in J$$

$$\sum_{i\in I} (c_{ij} + p_i) x_{ij} \le c_{kj} + p_k, \quad k \in I, \quad j \in J$$

$$p_i \ge 0, \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J$$

Пусть $\bar{p}_i$ — максимально возможная цена в i-ом филиале, $\bar{p}_i = \max_{j \in J}(b_j - c_{ij})$.
Введем переменные $z_{ij} \geq 0$ — доход, который получает производитель от i-го филиала и j-го потребителя в нем, $z_{ij} = p_i x_{ij}$.

Задача о ценообразовании. Линеаризация модели

Математическая модель

$$\max \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} z_{ij}$$

при ограничениях:

$\sum_{i\in I}(b_j - c_{ij})x_{ij} - \sum_{i\in I} z_{ij} \geq 0, \quad j \in J$

$c_{kj} + p_k - \sum_{i\in I} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i\in I} z_{ij} \geq 0, \quad k \in I, \quad j \in J$

$(1 - x_{ij})\bar{p}_i - z_{ij} + p_i \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J$

$(1 - x_{ij})\bar{p}_i + z_{ij} - p_i \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J$

$z_{ij} \leq \bar{p}_i x_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J$

$\sum_{i\in I} x_{ij} \leq 1, \quad j \in J$

$p_i \geq 0, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J$

Требуется

разбить конечное множество объектов I на p групп. Каждый объект может попасть только в одну группу.

Необходимо отслеживать количество групп, поэтому переменные

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если объект } i \text{ попадает в группу } k \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $i \in I$, $k = 1, \ldots, p$.

Ограничение каждый объект должен попасть только в одну группу:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = 1$$

В чем же недостаток?

$I = a, b, c, d,\ p = 3$

Возможное разбиение $\{a\}$, $\{b, d\}$, $\{c\}$ Но эти решения эквивалентны:

группа 1	группа 2	группа 3
b, d	a	c
b, d	c	a
a	b, d	c
a	c	b,d
c	b, d	a
c	a	b, d

Каждому разбиению множества объектов соответствует $(p!)$ эквивалентных решений!

Нужно избавиться от перестановочной симметрии!!!

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.
- Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.
- Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:
- в каждой группе найти объект с наименьшим номером,

Симметрия в математических моделях

Выход есть: лексикографический порядок на множестве решений!

- Упорядочить объекты множества I от 1 до $|I|$.
- Среди множества эквивалентных решений выбрать одно следующим образом:
- в каждой группе найти объект с наименьшим номером,
- упорядочить группы по возрастанию этих номеров и пронумеровать группы от 1 до p согласно полученному порядку.

Построенное таким образом решение называется лексикографически минимальным решением среди эквивалентных ему решений.