Матричные игры

Виктор Васильевич Лепин

Определение матричной игры

- *Матричная игра* это конечная антагонистич. игра,

Определение матричной игры

- *Матричная игра* это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{def}{=} \{1, \ldots, m\}$,

Определение матричной игры

- *Матричная игра* это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \overset{def}{=} \{1, \ldots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \overset{def}{=} \{1, \ldots, n\}$.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \overset{def}{=} \{1, \ldots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \overset{def}{=} \{1, \ldots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \overset{def}{=} a_{ij}$,

Определение матричной игры

- *Матричная игра* это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{def}{=} \{1, \ldots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{def}{=} \{1, \ldots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{def}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{def}{=} -a_{ij}$.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \overset{def}{=} \{1, \dots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \overset{def}{=} \{1, \dots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \overset{def}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \overset{def}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Игры двух лиц с постоянной суммой

- К матричной игре сводится любая конечная игра $(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{\phi_1,\phi_2\})$ двух лиц с постоянной суммой,

Игры двух лиц с постоянной суммой

- К матричной игре сводится любая конечная игра $(\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{\phi_1, \phi_2\})$ двух лиц с постоянной суммой,
- в которой $\phi_1(i, j) + \phi_2(i, j) = a$ для всех ситуаций $(i, j) \in S_1 \times S_2$, где a — это некоторая константа.

Игры двух лиц с постоянной суммой

- К матричной игре сводится любая конечная игра $(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{\phi_1,\phi_2\})$ двух лиц с постоянной суммой,
- в которой $\phi_1(i,j)+\phi_2(i,j)=a$ для всех ситуаций $(i,j)\in S_1\times S_2$, где a — это некоторая константа.
- Если мы переопределим функции выигрышей игроков по правилу $\bar{\phi}_k(i,j)\stackrel{def}{=}\phi_k(i,j)-a/2$, $k=1,2$,

Игры двух лиц с постоянной суммой

- К матричной игре сводится любая конечная игра $(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{\phi_1,\phi_2\})$ двух лиц с постоянной суммой,
- в которой $\phi_1(i,j)+\phi_2(i,j)=a$ для всех ситуаций $(i,j)\in S_1\times S_2$, где a — это некоторая константа.
- Если мы переопределим функции выигрышей игроков по правилу $\bar{\phi}_k(i,j)\overset{def}{=}\phi_k(i,j)-a/2,\ k=1,2,$
- то получим эквивалентную игру с нулевой суммой: $\bar{\phi}_1(i,j)+\bar{\phi}_2(i,j)=0.$

В экономике антагонистические конфликты встречаются

1. В так называемых «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.

В экономике антагонистические конфликты встречаются

1. В так называемых «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,

В экономике антагонистические конфликты встречаются

1. В так называемых «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.

В экономике антагонистические конфликты встречаются

1. В так называемых «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

В экономике антагонистические конфликты встречаются

1. В так называемых «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

В экономике антагонистические конфликты встречаются

1. В так называемых «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

Решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр.

Равновесие в чистых стратегиях

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют седловую точку матрицы A :
$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. (*)

Равновесие в чистых стратегиях

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют седловую точку матрицы A :
  $a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}, \; i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n. \qquad (*)$
- Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются оптимальными чистыми стратегиями.

Равновесие в чистых стратегиях

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют седловую точку матрицы A :
  $a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$ (*)
- Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются оптимальными чистыми стратегиями.
- Из (*) следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют седловую точку матрицы A :
  $a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}, \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$ (*)
- Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются оптимальными чистыми стратегиями.
- Из (*) следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.
- Поэтому ситуация (i_0, j_0) есть ситуация равновесия в бескоалиционной игре $\gamma = (\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{\phi_1, \phi_2\})$, где $\phi_1(i, j) \stackrel{def}{=} a_{ij}$ и $\phi_2(i, j) \stackrel{def}{=} -a_{ij}$.

Верхняя и нижняя чистая цена игры

- По теореме о совпадении максимина и минимакса (если $X = \{1, \ldots, m\}$, $Y = \{1, \ldots, n\}$, $f(i, j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда,

Верхняя и нижняя чистая цена игры

- По теореме о совпадении максимина и минимакса (если $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$, $f(i,j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда,
- когда *нижняя чистая цена игры* $\alpha(A) \stackrel{def}{=} \max_{1\leq i\leq n} \min_{1\leq j\leq n} a_{ij}$

Верхняя и нижняя чистая цена игры

- По теореме о совпадении максимина и минимакса (если $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$, $f(i, j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда,
- когда *нижняя чистая цена игры* $\alpha(A) \stackrel{def}{=} \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$
- равна *верхней чистой цене игры* $\beta(A) \stackrel{def}{=} \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le n} a_{ij}$.

- По теореме о совпадении максимина и минимакса (если $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$, $f(i, j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда,
- когда *нижняя чистая цена игры* $\alpha(A) \stackrel{def}{=} \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$
- равна *верхней чистой цене игры* $\beta(A) \stackrel{def}{=} \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij}$.
- В таком случае число $\alpha(A) = \beta(A)$ называется *чистой ценой игры.*

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1

Смешаные стратегии

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$,

Смешаные стратегии

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \dots, p_m)^T$,
- а смешанная стратегия игрока 2 — вектор $q = (q_1, \dots, q_n)^T$.

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$,
- а смешанная стратегия игрока 2 — вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$.
- В смешанной ситуации $(p, q) \in \Sigma_m \times \Sigma_n$ выигрыш игрока 1 определяется как математическое ожидание его выигрша:

$$E_A(p, q) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = p^T A q.$$

Смешаные стратегии

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$,
- а смешанная стратегия игрока 2 — вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$.
- В смешанной ситуации $(p, q) \in \Sigma_m \times \Sigma_n$ выигрыш игрока 1 определяется как математическое ожидание его выигрша:

$$E_A(p,q) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = p^T A q.$$

- Понятно, что в ситуации (p, q) средний выигрыш игрока 2 равен $-E_A(p,q)$.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е. $E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q)$, $p \in \Sigma_m$, $q \in \Sigma_n$. (*)

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p,q)$, т. е. $E_A(p,q^0) \le E_A(p^0,q^0) \le E_A(p^0,q)$, $p \in \Sigma_m$, $q \in \Sigma_n$. (*)
- Левые нер-ва в (*) означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е. $E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q)$, $p \in \Sigma_m$, $q \in \Sigma_n$. $\quad (*)$
- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е. $E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q)$, $p \in \Sigma_m$, $q \in \Sigma_n$. (*)
- Левые нер-ва в (*) означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е. $E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q)$, $p \in \Sigma_m$, $q \in \Sigma_n$. $\quad (*)$
- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е. $E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q)$, $p \in \Sigma_m$, $q \in \Sigma_n$. $\quad (*)$
- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p^0, q^0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е. $E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q)$, $p \in \Sigma_m$, $q \in \Sigma_n$. (*)
- Левые нер-ва в (*) означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p^0, q^0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p_0, q_0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е. $E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q)$, $p \in \Sigma_m$, $q \in \Sigma_n$. (*)
- Левые нер-ва в (*) означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p^0, q^0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $\nu(A) \stackrel{def}{=} E_A(p^0, q^0)$ — *ценой матричной игры.*

Теорема фон Неймана

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- Пусть A есть $m \times n$ матрица.

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- Пусть A есть $m \times n$ матрица.
- Имеет место равенство

$$\nu(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q.$$

Теорема фон Неймана

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- Пусть A есть $m \times n$ матрица.
- Имеет место равенство

$$\nu(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q.$$

- Для любых $p^0 \in \arg\max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j$, $q^0 \in \arg\min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q$, Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- Пусть A есть $m \times n$ матрица.
- Имеет место равенство

$$\nu(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q.$$

- Для любых $p^0 \in \arg\max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j$, $q^0 \in \arg\min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q$,
- пара (p^0, q^0) является решением в смешанных стратегиях матричной игры, заданной матрицей A.

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ выигрышей игрока 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ проигрышей игрока 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1 \le j \le n} p^t A e_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \qquad p \in \Sigma_m,$$

$$g(q) = \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \qquad q \in \Sigma_n.$$

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ выигрышей игрока 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ проигрышей игрока 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1 \le j \le n} p^t A e_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \qquad p \in \Sigma_m,$$

$$g(q) = \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \qquad q \in \Sigma_n.$$

- f — кусочно-линейная вогнутая функция,

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ выигрышей игрока 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ проигрышей игрока 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1 \le j \le n} p^t A e_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \qquad p \in \Sigma_m,$$

$$g(q) = \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \qquad q \in \Sigma_n.$$

- f — кусочно-линейная вогнутая функция,
- g — кусочно-линейная выпуклая функция.

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ выигрышей игрока 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ проигрышей игрока 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1 \le j \le n} p^t A e_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \qquad p \in \Sigma_m,$$

$$g(q) = \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \qquad q \in \Sigma_n.$$

- f — кусочно-линейная вогнутая функция,
- g — кусочно-линейная выпуклая функция.
- Из теоремы фон Неймана следует, что игрок 1 найдет свою оптимальную стратегию, решая задачу $\max\{f(p) : p \in \Sigma_m\}$,

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ выигрышей игрока 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ проигрышей игрока 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1 \le j \le n} p^t A e_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \qquad p \in \Sigma_m,$$

$$g(q) = \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \qquad q \in \Sigma_n.$$

- f — кусочно-линейная вогнутая функция,
- g — кусочно-линейная выпуклая функция.
- Из теоремы фон Неймана следует, что игрок 1 найдет свою оптимальную стратегию, решая задачу $\max\{f(p) : p \in \Sigma_m\}$,
- а игрок 2 найдет свою опт. стратегию, решая задачу $\min\{g(q) : q \in \Sigma_n\}$.

Решим игру $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,
$q^0 = (?, ?)$,
$\nu(A) = ?$.

Решим игру $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,
$q^0 = (?, ?)$,
$\nu(A) = ?$.

- Предположим, что игрок 2 использует свою смешанную стратегию $q = (q_1, q_2)^T = (x, 1 - x)^T$,

Решим игру $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,
$q^0 = (?, ?)$,
$\nu(A) = ?$.

- Предположим, что игрок 2 использует свою смешанную стратегию $q = (q_1, q_2)^T = (x, 1 - x)^T$,
- а игрок 1 использует свою чистую стратегию i.

Решим игру $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,
$q^0 = (?, ?)$,
$\nu(A) = ?$.

- Предположим, что игрок 2 использует свою смешанную стратегию $q = (q_1, q_2)^T = (x, 1 - x)^T$,
- а игрок 1 использует свою чистую стратегию i.
- Тогда средний проигрыш игрока 2 (выигрыш игрока 1) равен: $g_i(x) = xa_{i1} + (1 - x)a_{i2}$.

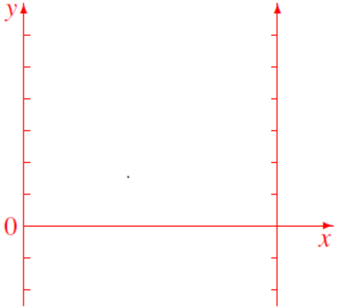
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



Чтобы нарисовать графики функций $y = g_i(x)$ на координатной плоскости (x, y) удобно провести две вертикальных координатных оси, проходящие через точки $x = 0$ и $x = 1$.

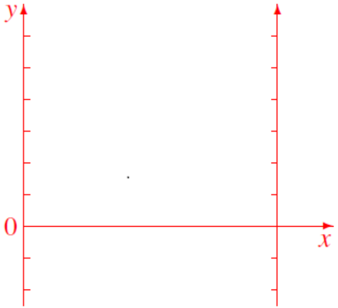
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

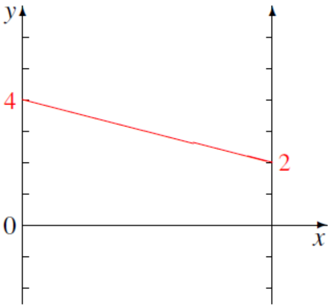
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?.$



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x)$;

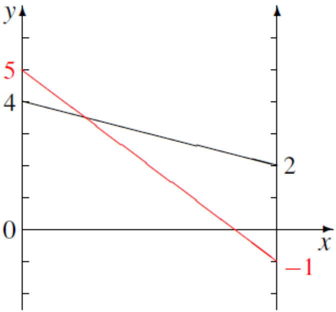
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?.$



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x)$;
2. $y = g_2(x) = (-1)x + 5(1 - x)$;

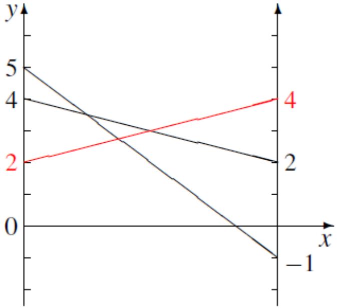
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x)$;
2. $y = g_2(x) = (-1)x + 5(1 - x)$;
3. $y = g_3(x) = 4x + 2(1 - x)$;

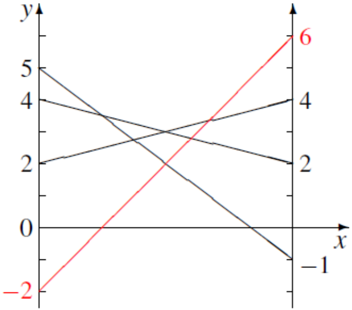
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x)$;
2. $y = g_2(x) = (-1)x + 5(1 - x)$;
3. $y = g_3(x) = 4x + 2(1 - x)$;
4. $y = g_4(x) = 6x + (-2)(1 - x)$;

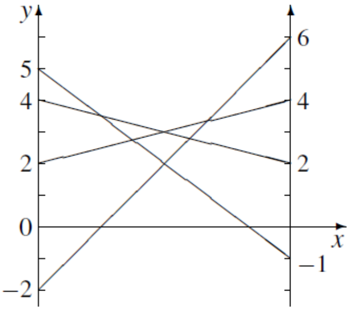
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?,?,?,?)$,

$q^0 = (?,?)$,

$v(A) = ?$.



- Функция $g(x) \stackrel{def}{=} \max_{i\in\{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функция проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

Графический метод решения матричных игр

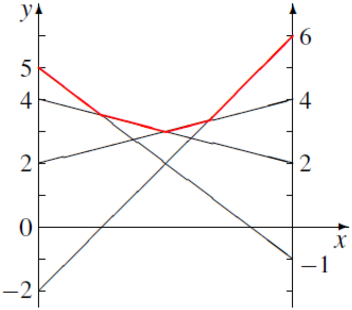
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?.$



- Функция $g(x) \stackrel{def}{=} \max_{i\in\{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функция проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

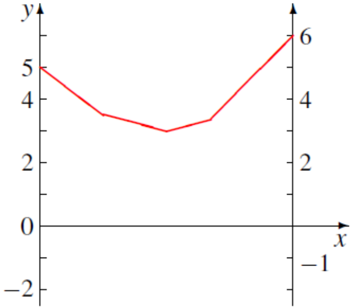
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?.$



- Функция $g(x) \stackrel{def}{=} \max_{i \in \{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функция проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

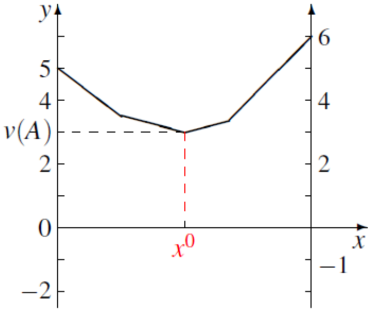
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?.$



- Стремясь минимизировать свой проигрыш, игрок 2 должен найти точку x^0 минимума функции $g(x)$.
- Тогда $(x^0, 1 - x^0)$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2,
- а $g(x^0)$ есть цена игры $\nu(A)$.

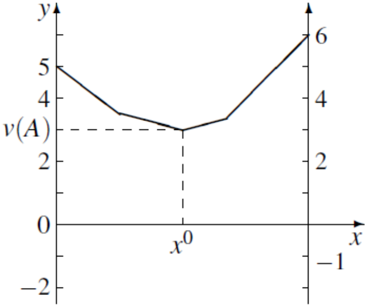
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



- Чтобы точно вычислить точку минимума x^0, нужно выделить две активных стратегии игрока 1.
- Эти стратегии определяются по линиям 1 и 3, пересекающимся в точке x^0.

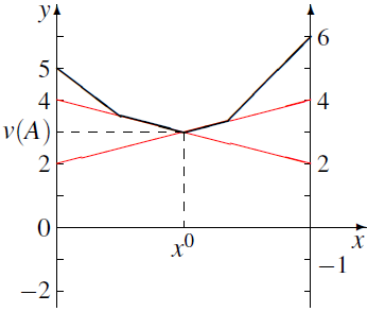
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?,?,?,?)$,

$q^0 = (?,?)$,

$v(A) = ?.$



- Чтобы точно вычислить точку минимума x^0, нужно выделить две активных стратегии игрока 1.
- Эти стратегии определяются по линиям 1 и 3, пересекающимся в точке x^0.

Графический метод решения матричных игр

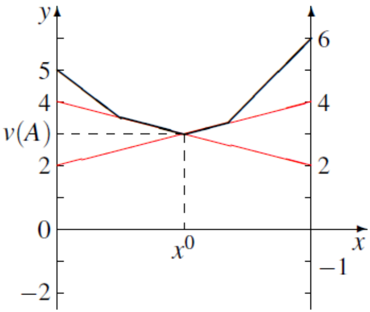
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{2} & \color{red}{4} \\ -1 & 5 \\ \color{red}{4} & \color{red}{2} \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



- Следовательно, x^0 есть решение уравнения $g_1(x) = g_3(x) : 2x + 4(1-x) = 4x + 2(1-x) \Rightarrow x^0 = 1/2$.
- Откуда, $q^0 = (1/2, 1/2)^T$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2.
- Вычислим цену игры как значение $g_1(x^0)$ (или $g_3(x^0)$) в точке $x^0 : \nu(A) = g_1(x^0) = 2(1/2) + 4(1/2) = 3$.

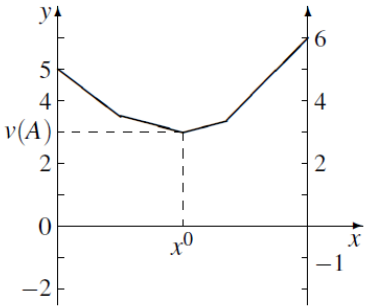
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = ?.$



- Следовательно, x^0 есть решение уравнения $g_1(x) = g_3(x) : 2x + 4(1 - x) = 4x + 2(1 - x) \Rightarrow x^0 = 1/2.$
- Откуда, $q^0 = (1/2, 1/2)^T$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2.
- Вычислим цену игры как значение $g_1(x^0)$ (или $g_3(x^0)$) в точке x^0 : $\nu(A) = g_1(x^0) = 2(1/2) + 4(1/2) = 3.$

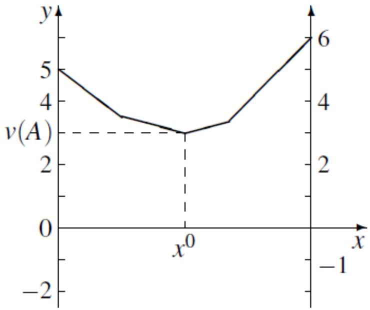
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = 3$.



- Следовательно, x^0 есть решение уравнения $g_1(x) = g_3(x) : 2x + 4(1 - x) = 4x + 2(1 - x) \Rightarrow x^0 = 1/2$.
- Откуда, $q^0 = (1/2, 1/2)^T$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2.
- Вычислим цену игры как значение $g_1(x^0)$ (или $g_3(x^0)$) в точке $x^0 : \nu(A) = g_1(x^0) = 2(1/2) + 4(1/2) = 3$.

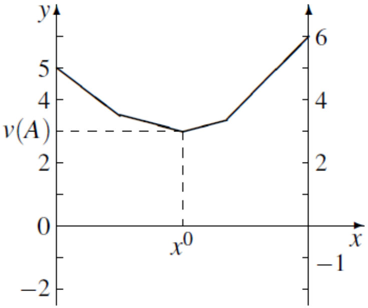
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = 3$.



- Использование неактивных стратегий не может увеличить выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2).
- Если игрок 1 откажется от любой своей неактивной стратегии, то функция проигрышей игрока 2 может измениться, но минимум новой функции будет достигаться в той же самой точке x^0.

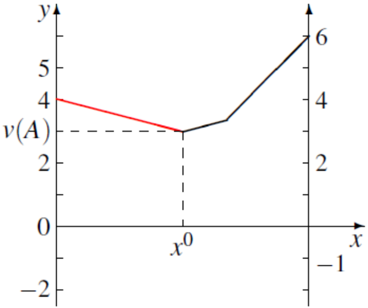
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = 3$.



- Например, если игрок 1 не будет использовать стратегию 2, то функция проигрышей игрока 2 примет вид как на рисунке справа.
- Следовательно, можно считать, что игрок 1 применяет свои неактивные стратегии с нулевой вероятностью.

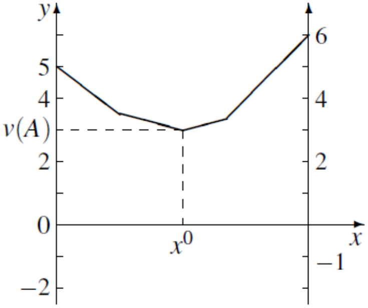
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = 3$.



- Например, если игрок 1 не будет использовать стратегию 2, то функция проигрышей игрока 2 примет вид как на рисунке справа.
- Следовательно, можно считать, что игрок 1 применяет свои неактивные стратегии с нулевой вероятностью.

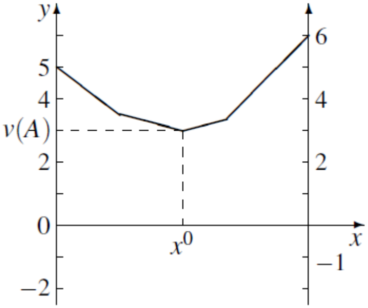
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?),$

$q^0 = (1/2, 1/2),$

$v(A) = 3.$



- $p_2^0 = p_4^0 = 0 \Rightarrow p_3^0 = 1 - p_1^0.$
- Мы найдем p^0, решив игру с усеченной матрицей $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, которая получается из исходной матрицы A после удаления строк 2 и 4, соответствующих неактивным стратегиям.

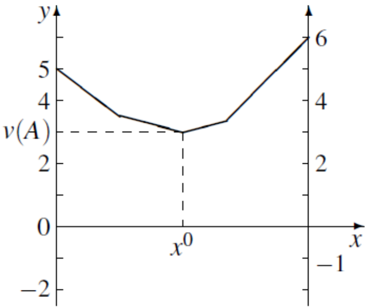
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?),$

$q^0 = (1/2, 1/2),$

$v(A) = 3.$



- $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$
- Мы можем найти p_1^0 из уравнения (обоснуйте это!): $2p_1^0 + 4(1 - p_1^0) = 3 = \nu(A).$
- Откуда, $p_1^0 = 1/2$ и $p^0 = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$ есть оптимальная стратегия игрока 1.

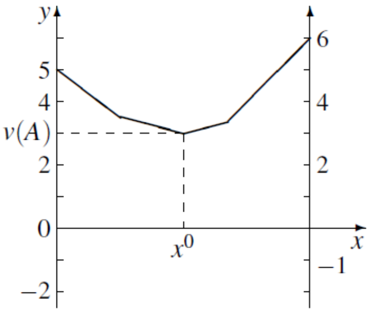
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (1/2, 0, 1/2, 0)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = 3$.



- $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$,
- Мы можем найти p_1^0 из уравнения (обоснуйте это!): $2p_1^0 + 4(1 - p_1^0) = 3 = \nu(A)$.
- Откуда, $p_1^0 = 1/2$ и $p^0 = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$ есть оптимальная стратегия игрока 1.

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.

Решение матричных игр размера $2 \times n$

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:

Решение матричных игр размера $2 \times n$

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,

Решение матричных игр размера $2 \times n$

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.

Решение матричных игр размера $2 \times n$

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как нижнюю огибающую построенного семейства прямых.

Решение матричных игр размера $2 \times n$

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как нижнюю огибающую построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $\nu(A) = f(x^0)$.

Решение матричных игр размера $2 \times n$

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как нижнюю огибающую построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $\nu(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.

Решение матричных игр размера $2 \times n$

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как нижнюю огибающую построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $\nu(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.
- Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна w_j.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.
- Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна w_j.
- Поэтому хотя бы один из r вертолетов обнаружит человека в j-м районе (при условии, что он там находится) с вероятностью $u_j(r) = 1 - (1 - w_j)^r$.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.
- Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна w_j.
- Поэтому хотя бы один из r вертолетов обнаружит человека в j-м районе (при условии, что он там находится) с вероятностью $u_j(r) = 1 - (1 - w_j)^r$.
- Каким образом нужно распределить вертолеты по лесным массивам, чтобы вероятность обнарудения человека была максимальной.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \ldots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \ldots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.
- Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \ldots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^{n} s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры: $a_{11} = 1 - (1 - 0.6)^2 = 0.84$

$A =$

	Район 1	*Район 2*	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	0.4
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	0.64	

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры: $a_{22} = 1 - (1 - 0.6)^2 = 0.64$

$A =$

	Район 1	*Район 2*	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	0.4
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	0.64	

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

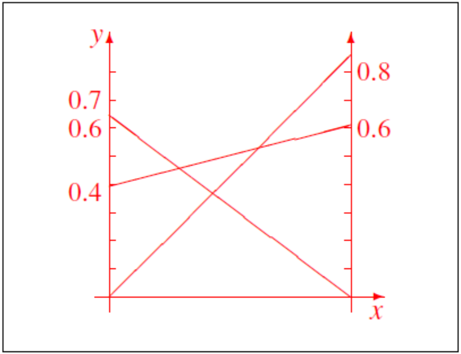
- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

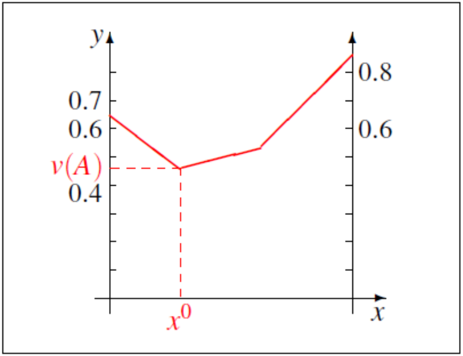
Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



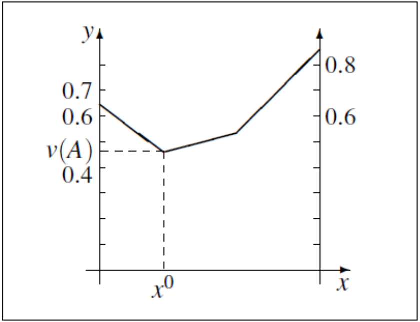
Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

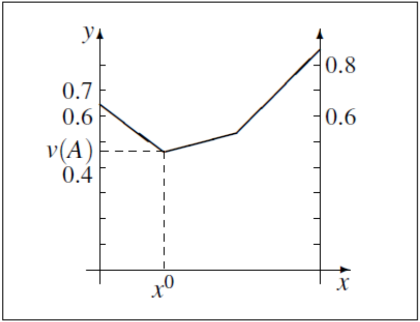
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Активные стратегии игрока 1: (1, 1) и (0, 2),

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

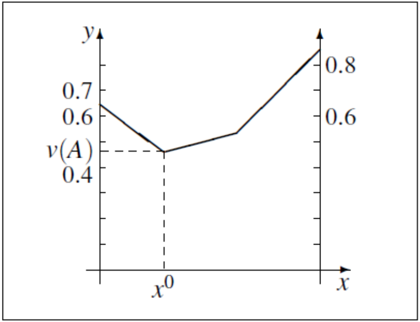
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Активные стратегии игрока 1: (1, 1) и (0, 2),
- его опт. стратегия имеет вид $p^0 = (0, y^0, 1 - y^0)$.

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

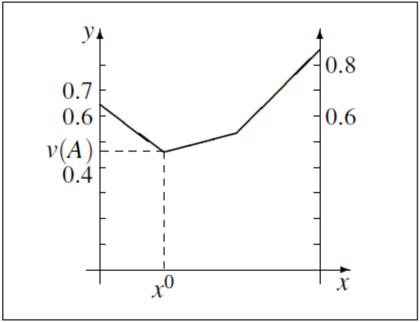
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Активные стратегии игрока 1: (1, 1) и (0, 2),
- его опт. стратегия имеет вид $p^0 = (0, y^0, 1 - y^0)$.
- Найдем y^0 из уравнения $0.6y + 0(1 - y) = 0.4y + 0.64(1 - y) \Rightarrow y^0 = 16/21.$

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

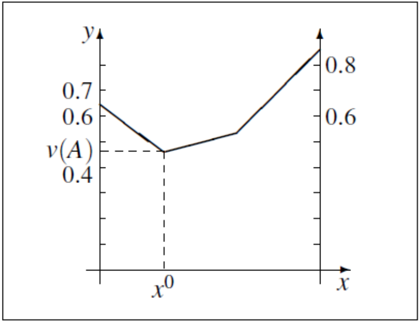
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Активные стратегии игрока 1: (1, 1) и (0, 2),
- его опт. стратегия имеет вид $p^0 = (0, y^0, 1 - y^0)$.
- Найдем y^0 из уравнения
  $0.6y + 0(1 - y) = 0.4y + 0.64(1 - y) \Rightarrow y^0 = 16/21.$
- Откуда $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ и
  $\nu(A) = 0.84 \cdot 0 + 0.6 \cdot (16/21) + 0 \cdot (5/21) = 16/35.$

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

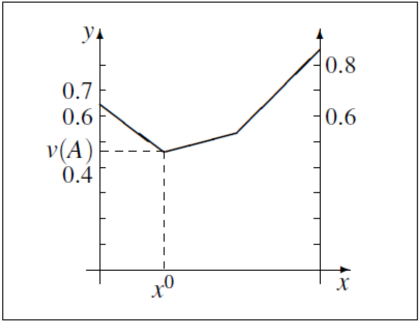
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Стратегию $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ можно реализовать следующим образом:

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

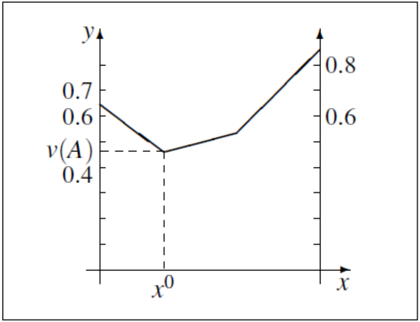
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Стратегию $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ можно реализовать следующим образом:
- каждый день $16/21$ времени поиска в каждом из районов находится по одному вертолету,

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Стратегию $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ можно реализовать следующим образом:
- каждый день $16/21$ времени поиска в каждом из районов находится по одному вертолету,
- а в остальное время два вертолета должны находится во втором районе.

Сведение матричной игры к задаче ЛП

Задача поиска оптимальной стратегии игрока 1

Игрок 1 найдет свою оптим. стратегию p^0, решая задачу

$$\max \left\{ f(p) = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ : \ p \in \Sigma_m \right\},$$

Задача поиска оптимальной стратегии игрока 1

Игрок 1 найдет свою оптим. стратегию p^0, решая задачу

$$\max\left\{ f(p) = \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \ :\ p \in \Sigma_m \right\},$$

эквивалентную задаче ЛП,

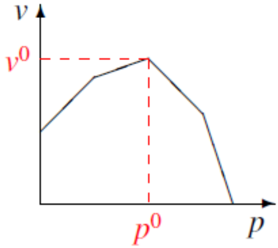
$\nu \to \max,$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i - \nu \ge 0, \quad j = 1,\dots,n,$

$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$

$p_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m.$

в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (p^0, v^0) с максим. координатой $v^0 = f(p^0)$.



Задача поиска оптимальной стратегии игрока 2

Игрок 2 найдет свою оптим. стратегию q^0, решая задачу

$$\min \left\{ g(q) = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \ : \ q \in \Sigma_n \right\},$$

Задача поиска оптимальной стратегии игрока 2

Игрок 2 найдет свою оптим. стратегию q^0, решая задачу

$$\min \left\{ g(q) = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \ : \ q \in \Sigma_n \right\},$$

эквивалентную задаче ЛП, $\nu \to \min$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - \nu \ge 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

$$q_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

в которой в надграфике функции $g(q)$ ищется точка (q^0, ν^0) с минимальной координатой $\nu^0 = g(q^0)$.

Лемма

Пусть матрица A^a получена добавлением к каждому элементу матрицы A числа a. Тогда $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ для любых смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_n$.

Переход к игре с положительной ценой

Лемма

Пусть матрица A^a *получена добавлением к каждому элементу матрицы* A *числа* a*. Тогда* $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ *для любых смешанных стратегий* $p \in \Sigma_m$ *и* $q \in \Sigma_n$*.*

Следствие

Матричные игры с матрицами A *и* A^a *эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные стратегии.*

Переход к игре с положительной ценой

Лемма

Пусть матрица A^a получена добавлением к кажлому элементу матрицы A числа a. Тогда $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ для любых смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_n$.

Следствие

Матричные игры с матрицами A и A^a эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные стратегии.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что
нижняя чистая цена игры положительна, т. е. $\alpha(A) > 0$.

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$\begin{array}{l} v \to \max, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \\ p_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array} \qquad \begin{array}{l} v \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ q_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

переменная ν — также положительна. Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{\nu}, \ i = 1, \ldots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{\nu}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$v \to \max,$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n,$ $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$ $p_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$	$v \to \min,$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$ $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$ $q_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$

переменная ν — также положительна. Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{\nu},\ i = 1, \ldots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{\nu},\ j = 1, \ldots, n.$$

Так как $\frac{1}{\nu} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема

Решение матричной игры эквивалентно решению пары двойственных задач ЛП.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае $(\alpha(A) < \beta(A))$ переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае $(\alpha(A) < \beta(A))$ переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \le 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае $(\alpha(A) < \beta(A))$ переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{\nu} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $\nu(A) = \bar{\nu} - a$,

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{\nu} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $\nu(A) = \bar{\nu} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{\nu} y^*$ и $q^0 = \bar{\nu} x^*$.

Пример: планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами,

Пример: планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами,
- если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим.

Пример: планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами,
- если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим.
- Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:

	прохладное и дождливое	нормальное	жаркое и сухое
Культура 1	0	2	5
Культура 2	2	3	1
Культура 3	4	3	-1

Пример: планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами,
- если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим.
- Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:

	прохладное и дождливое	нормальное	жаркое и сухое	
Культура 1	0	2	5	0
Культура 2	2	3	1	$\underline{1}$
Культура 3	4	3	-1	-1
	4	$\underline{3}$	5	

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,
- в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2.

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,
- в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2.
- Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:
  $x_1 + x_2 + x_3 \to \max$
  $2x_2 + 5x_3 \leq 1,$
  $2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 1,$
  $4x_1 + 3x_2 - 1x_3 \leq 1,$
  $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:
  $x_1 + x_2 + x_3 \to \max$
  $2x_2 + 5x_3 \leq 1,$
  $2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 1,$
  $4x_1 + 3x_2 - 1x_3 \leq 1,$
  $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$
- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:
  $x_1 + x_2 + x_3 \to \max$
  $2x_2 + 5x_3 \leq 1,$
  $2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 1,$
  $4x_1 + 3x_2 - 1x_3 \leq 1,$
  $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$
- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.
- Найдем цену игры: $\nu(A) = \dfrac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \dfrac{1}{1/4 + 1/4} = 2.$

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:
  $x_1 + x_2 + x_3 \to \max$
  $2x_2 + 5x_3 \leq 1,$
  $2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 1,$
  $4x_1 + 3x_2 - 1x_3 \leq 1,$
  $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$
- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.
- Найдем цену игры: $\nu(A) = \dfrac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \dfrac{1}{1/4 + 1/4} = 2.$
- Опт. стратегия игрока 1: $p^0 = \nu(A)y^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$.

Обсуждение результата

- Здесь смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$ допускает иную, более естественную, интерпретацию.

- Здесь смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$ допускает иную, более естественную, интерпретацию.
- Она рекомендует фермеру засеять половину своего поля культурой 1,

Обсуждение результата

- Здесь смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$ допускает иную, более естественную, интерпретацию.
- Она рекомендует фермеру засеять половину своего поля культурой 1,
- а другую половину — культурой 3.

- Здесь смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$ допускает иную, более естественную, интерпретацию.
- Она рекомендует фермеру засеять половину своего поля культурой 1,
- а другую половину — культурой 3.
- При любой погоде доход фермера не будет меньшим цены $\nu(A) = 2$ данной игры.

Теорема

Пусть для действительной функции $f(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$ существуют

$$\alpha \stackrel{def}{=} \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) \quad \text{и} \quad \beta \stackrel{def}{=} \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y).$$

Тогда $\alpha \leq \beta$.

1. *$\alpha = \beta$ тогда и только тогда, когда функция $f(x,y)$ имеет седловую точку (x^0, y^0) :*
   $f(x,y^0) \leq f(x^0,y^0) \leq f(x^0,y), \quad x \in X, \; y \in Y.$

О совпадении максимина и минимакса

Теорема

Пусть для действительной функции $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ *существуют*

$$\alpha \overset{def}{=} \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{и} \quad \beta \overset{def}{=} \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Тогда $\alpha \leq \beta$.

1. $\alpha = \beta$ *тогда и только тогда, когда функция* $f(x, y)$ *имеет седловую точку* (x^0, y^0) :
$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y), \quad x \in X, \; y \in Y.$
2. *Если* (x^0, y^0) *— седловая точка функции* $f(x, y)$, *то* $f(x^0, y^0) = \alpha = \beta$.

Решение примера в AMPL

```
reset;
set I;
set J;
param M {I,J};      # матрица игры
var X{J} >= 0;    # оптимальная смешанная стратегия игрока 1
var v;

maximize game:  v;
subject to constraints {i in I}:
        v - sum {j in J} M[j,i]*X[j] <=0;

subject to probability:
        sum {j in J} X[j]=1;

data;

set I := 1 2 3 ;
set J := 1 2 3 ;
param M:
    1   2   3 :=    #
 1  0   2   5   #A[i,j] матрица игры
 2  2   3   1
 3  4   3   -1 ;

option solver cplex;

solve;
print 'цена игры' ;
display v;
print 'оптимальная смешанная стратегия игрока 1' ;
display X;
```

Решение примера в AMPL. Ответ

цена игры

v = 2

оптимальная смешанная стратегия игрока 1

```
X [*] :=
1 0.5
2 0
3 0.5
;
```