Исследование операций

Анализ качества математических моделей

Виктор Васильевич Лепин

Институт математики
НАН Беларуси, Минск

MIP в стандартной форме

$$\min(cx + fy) \tag{1}$$

$$Ax + By \geq b, \tag{2}$$

$$x \geq 0, \tag{3}$$

$$y \geq 0, \text{целые} \tag{4}$$

$c = (c_1, \ldots, c_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$ — вектора (строки) с вещественными компонентами;
$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор-столбец с неотрицательными вещественными значениями;
$y = (y_1, \ldots, y_p)^T$ — вектор-столбец с неотрицательными целочисленными значениями;
A, B — матрицы $(m \times n)$ и $(m \times p)$ соответственно, с вещественными и целочисленными значениями элементов;
$b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ — вектор-столбец с вещественными компонентами.

Обозначения

- X_{MIP} — множество значений переменных, удовлетворяющих ограничениям (2)–(4), множество допустимых решений задачи

Обозначения

- X_{MIP} — множество значений переменных, удовлетворяющих ограничениям (2)–(4), множество допустимых решений задачи
- $z^*(X_{MIP})$ — оптимальное значение целевой функции (1) на множестве X_{MIP}.

Линейная релаксация

LR (от англ. relaxation - ослабление) для задачи (1)–(4)

$$\min(cx + fy)$$

$$Ax + By \geq b,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0,$$

Свойство линейной релаксации

Множество X_{LR} шире допустимого множества X_{MIP}:

$$X_{MIP} \subset X_{LR}.$$

Свойство линейной релаксации

Множество X_{LR} шире допустимого множества X_{MIP}:

$$X_{MIP} \subset X_{LR}.$$

Оптимальное значение целевой функции задачи линейной релаксации дает нижнюю оценку на оптимум соответствующей задачи MIP:

$$z^*(X_{LP}) \leq z^*(X_{MIP}),$$

Свойство линейной релаксации

Множество X_{LR} шире допустимого множества X_{MIP}:

$$X_{MIP} \subset X_{LR}.$$

Оптимальное значение целевой функции задачи линейной релаксации дает нижнюю оценку на оптимум соответствующей задачи MIP:

$$z^*(X_{LP}) \leq z^*(X_{MIP}),$$

если исходная задача на минимум, и

Свойство линейной релаксации

Множество X_{LR} шире допустимого множества X_{MIP}:

$$X_{MIP} \subset X_{LR}.$$

Оптимальное значение целевой функции задачи линейной релаксации дает нижнюю оценку на оптимум соответствующей задачи MIP:

$$z^*(X_{LP}) \leq z^*(X_{MIP}),$$

если исходная задача на минимум, и
дает верхнюю оценку, если исходная задача MIP на максимум.

Разрыв целочисленности

Разрыв целочисленности

Величина отклонения оптимального значения линейной релаксации от оптимального значения целевой функции для задачи смешанного целочисленного программирования.

Разрыв целочисленности

Разрыв целочисленности

Величина отклонения оптимального значения линейной релаксации от оптимального значения целевой функции для задачи смешанного целочисленного программирования.

Абсолютный разрыв целочисленности

$$|z^*(X_{LP}) - z^*(X_{MIP})|,$$

Разрыв целочисленности

Разрыв целочисленности

Величина отклонения оптимального значения линейной релаксации от оптимального значения целевой функции для задачи смешанного целочисленного программирования.

Абсолютный разрыв целочисленности

$$|z^*(X_{LP}) - z^*(X_{MIP})|,$$

Относительный разрыв целочисленности

$$\frac{|z^*(X_{LP}) - z^*(X_{MIP})|}{\max\{|z^*(X_{LP})|, |z^*(X_{MIP})|\}} \cdot 100\%,$$

Если оптимальные значения не найдены, но получены хорошие приближенные значения для $z^*(X_{LR})$ и $z^*(X_{MIP})$, то вместо разрыва целочисленности вычисляют:

$$\frac{UB - LB}{UB} \cdot 100\%,$$

где UB, LB — верхняя и нижняя оценка оптимального решения соответственно.
$z^*(X_{MIP}) \in [LB, UB]$

Пример 1

P_1:

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15,$$

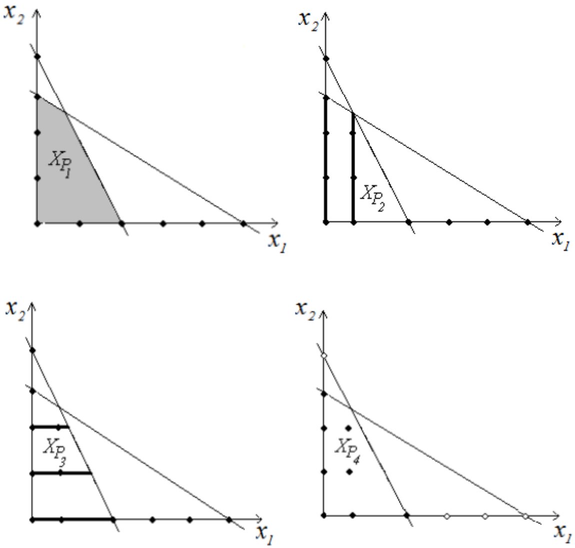
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 0, \tag{5}$$

$$x_2 \geq 0. \tag{6}$$

- $P_2 : x_1 \geq 0$, целые вместо (5)
- $P_3 : x_2 \geq 0$, целые вместо (6)
- $P_4 : x_1 \geq 0$, целые и $x_2 \geq 0$, целые вместо (5), (6)

Графическое представление допустимых областей для P_1, P_2, P_3 и P_4



Оптимальные решения задач P_1, P_2, P_3 и P_4

$$P_1 : z^*(X_{P_1}) = 3.4211 \quad x^{*P_1} = (1.0526, 2.3684);$$

$$P_2 : z^*(X_{P_2}) = 3.4 \quad x^{*P_2} = (1, 2.4);$$

$$P_3 : z^*(X_{P_3}) = 3.2 \quad x^{*P_3} = (1.2, 2);$$

$$P_4 : z^*(X_{P_4}) = 3 \quad x^{*P_4} = (1, 2);$$

Переходя от решения задачи P_1 с наименее жесткими требованиями к задаче P_4 с более жесткими требованиями, оптимальное значение целевой функции уменьшается:

$$z^*(X_{P_4}) < z^*(X_{P_1})$$

Решение x^{*P_4} может быть получено округлением x^{*P_1} вниз.

Пример 2

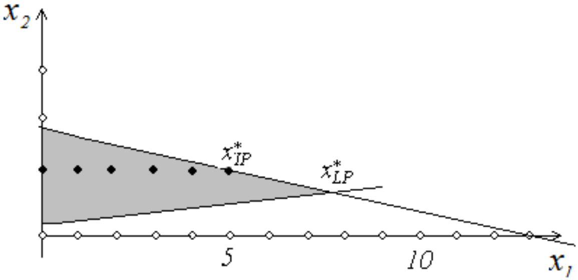
$$\max(2x_1 + x_2)$$

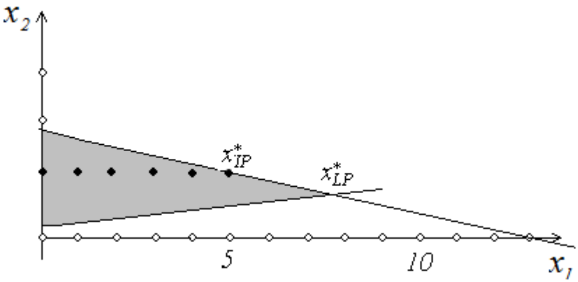
$$7x_1 + 48x_2 \leq 84,$$

$$-x_1 + 12x_2 \geq 3,$$

$$x_1 \geq 0, \text{целые},$$

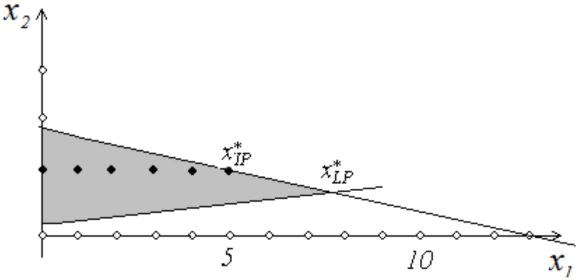
$$x_2 \geq 0, \text{целые}.$$


x_2
x^*_{IP}
x^*_{LP}
5
10
x_1



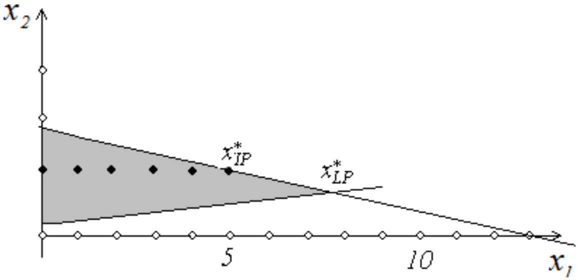
$z^*_{IP} = 11 \; x^*_{IP} = (5, 1);$

Оптимальное решение LP и MIP



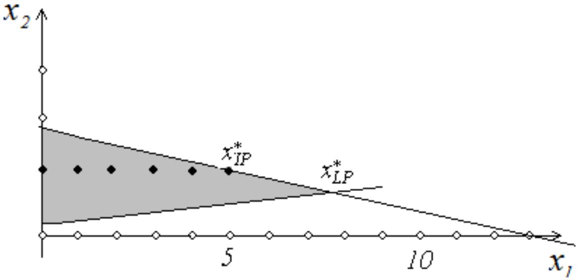
$z^*_{IP} = 11 \; x^*_{IP} = (5, 1);$
$z^*_{LP} = 13.8864 \; x^*_{LP} = (6.5455, 0.7955);$

Оптимальное решение LP и MIP



$z^*_{IP} = 11$ $x^*_{IP} = (5, 1)$;
$z^*_{LP} = 13.8864$ $x^*_{LP} = (6.5455, 0.7955)$;
x^*_{IP} нельзя получить простым округлением решения x^*_{LP}.
Абсолютный разрыв составляет 13.8864-11=2.8864,

Оптимальное решение LP и MIP



$z^*_{IP} = 11$ $x^*_{IP} = (5, 1)$;
$z^*_{LP} = 13.8864$ $x^*_{LP} = (6.5455, 0.7955)$;
x^*_{IP} нельзя получить простым округлением решения x^*_{LP}.
Абсолютный разрыв составляет 13.8864-11=2.8864,
относительный равен $\frac{2.8864}{13.8864} \cdot 100\% = 20.79\%$

Пример 3

$$\max(2x_1 + x_2)$$

$$7x_1 + 48x_2 \leq 84,$$

$$-x_1 + 12x_2 \geq 13,$$

$$x_1 \geq 0, \text{целые},$$

$$x_2 \geq 0, \text{целые}.$$

Множество допустимых решений

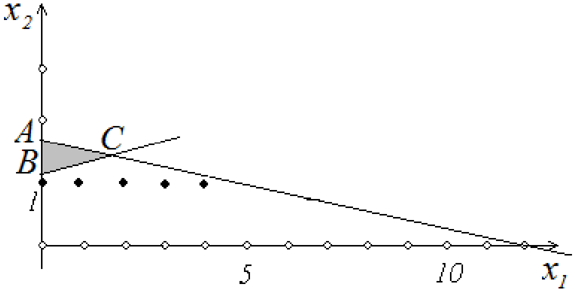
X_{LR} — треугольник ABC

Множество допустимых решений

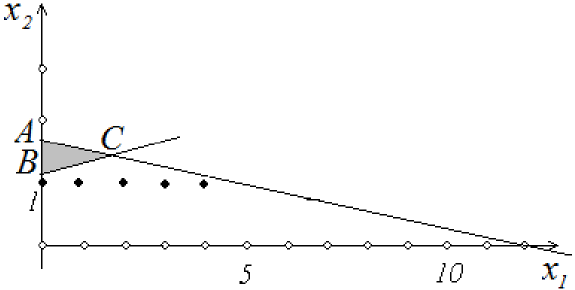
X_{LR} — треугольник ABC

$X_{IP} = \emptyset$

X_{LR} — треугольник ABC
$X_{IP} = \emptyset$



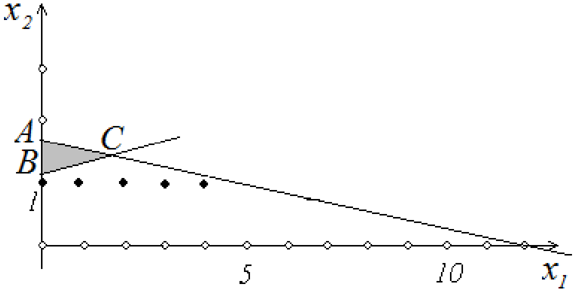
X_{LR} — треугольник ABC
$X_{IP} = \emptyset$



Оптимальное решение задачи LR находится в точке C.

Множество допустимых решений

X_{LR} — треугольник ABC
$X_{IP} = \emptyset$



Оптимальное решение задачи LR находится в точке C.
Ни одна целочисленная точка не входит в область ABC.

Пример 4

$$x_1 + x_2 \leq 10,$$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 15,$$

$$x_1 \leq 6,$$

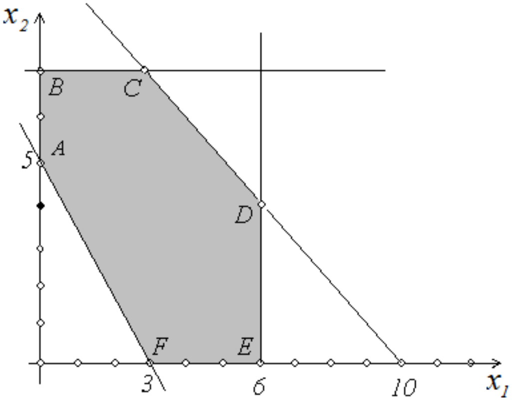
$$x_2 \leq 7,$$

$$x_1 \geq 0,$$

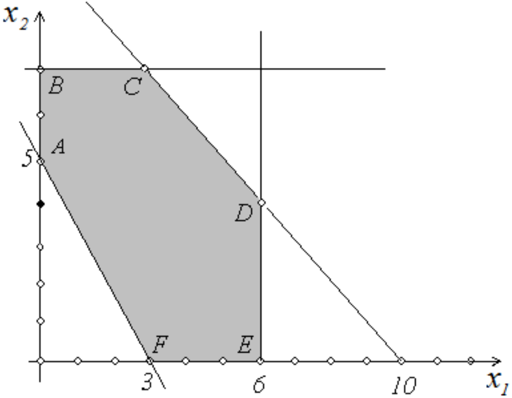
$$x_2 \geq 0.$$

Пример 4. Допустимая область

X_{LP} — многоугольник $ABCDEF$



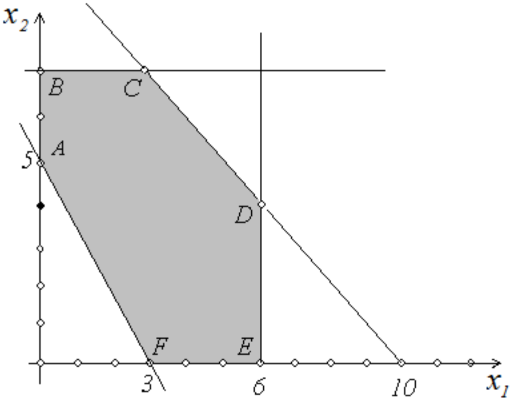
X_{LP} — многоугольник $ABCDEF$



Оптимальное решение задачи LP лежит в одной из угловых точек $ABCDEF$.

Пример 4. Допустимая область

X_{LP} — многоугольник $ABCDEF$

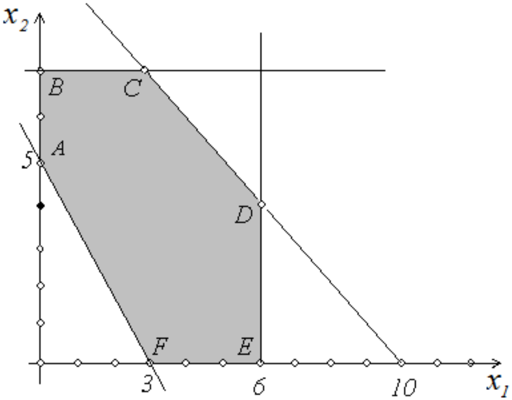


Оптимальное решение задачи LP лежит в одной из угловых точек $ABCDEF$.

Все угловые точки — целочисленные.

Пример 4. Допустимая область

X_{LP} — многоугольник $ABCDEF$



Оптимальное решение задачи LP лежит в одной из угловых точек $ABCDEF$.

Все угловые точки — целочисленные.

Разрыв целочисленности равен нулю.

Пример. Задача планирования производства

Дано:

- T — промежуток времени,

Пример. Задача планирования производства

Дано:

- T — промежуток времени,
- d_t — заказ на продукцию в месяц t,

Пример. Задача планирования производства

Дано:

- T — промежуток времени,
- d_t — заказ на продукцию в месяц t,
- c_t — затраты на запуск производства в месяц t,

Пример. Задача планирования производства

Дано:

- T — промежуток времени,
- d_t — заказ на продукцию в месяц t,
- c_t — затраты на запуск производства в месяц t,
- p_t — удельные затраты на производство в месяц t,

Пример. Задача планирования производства

Дано:

- T — промежуток времени,
- d_t — заказ на продукцию в месяц t,
- c_t — затраты на запуск производства в месяц t,
- p_t — удельные затраты на производство в месяц t,
- h_t — удельные затраты на хранение продукции в течение месяца t.

Пример. Задача планирования производства

Дано:

- T — промежуток времени,
- d_t — заказ на продукцию в месяц t,
- c_t — затраты на запуск производства в месяц t,
- p_t — удельные затраты на производство в месяц t,
- h_t — удельные затраты на хранение продукции в течение месяца t.

Найти план производства и хранения продукции так, чтобы выполнить заказ с минимальными затратами.

Пример. Задача планирования производства. Первая модель

Переменные задачи:

y_t — количество продукции, произведенной в месяц t;

Пример. Задача планирования производства. Первая модель

Переменные задачи:

y_t — количество продукции, произведенной в месяц t;

s_t — количество продукции, оставленной на складе к концу месяца t;

Пример. Задача планирования производства. Первая модель

Переменные задачи:

y_t — количество продукции, произведенной в месяц t;

s_t — количество продукции, оставленной на складе к концу месяца t;

$$x_t = \begin{cases} 1, & \text{если в месяц } t \text{ было запущено производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Пример. Задача планирования производства. Первая модель

$$\min \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + p_t y_t + h_t s_t) \tag{7}$$

$$y_1 = d_1 + s_1 \tag{8}$$

$$s_{t-1} + y_t = d_t + s_t, \quad t = 2, \ldots, T, \tag{9}$$

$$y_t \le \sum_{k=1}^{T} d_k x_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{10}$$

$$s_T = 0, \tag{11}$$

$$y_t \ge 0, \quad s_t \ge 0, \text{целые}, \quad x_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{12}$$

Пример. Задача планирования производства. Вторая модель

Переменные задачи: q_{it} — столько продукции производится в месяц i, чтобы выполнить заказ в месяц t, $t \geq i$

Пример. Задача планирования производства. Вторая модель

Переменные задачи: q_{it} — столько продукции производится в месяц i, чтобы выполнить заказ в месяц t, $t \geq i$

$$x_t = \begin{cases} 1, & \text{если в месяц } t \text{ было запущено производство,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Пример. Задача планирования производства. Вторая модель

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{t} (p_i + h_i + h_{i+1} + \ldots + h_{t-1}) q_{it} + \sum_{t=1}^{T} c_t x_t, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{t} q_{it} = d_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{14}$$

$$q_{it} \leq d_t x_i, \quad i = 1, \ldots, T, \quad t = i, \ldots, T, \tag{15}$$

$$q_{it} \geq 0, \quad x_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{16}$$

Разрыв целочисленности для LR (13)–(16) равен нулю.

Теорема об оценки близости решений IP и соответствующей LR

Пусть A — целочисленная $(m \times n)$-матрица, каждый минор которой по абсолютной величине не превосходит Δ, и пусть даны векторы b и c. Предположим, что оба максимума

$$\max\{cx|Ax \leq b\} \tag{17}$$

и

$$\max\{cx|Ax \leq b, \ \ x \in Z\} \tag{18}$$

конечны. Тогда:

Теорема об оценки близости решений IP и соответствующей LR

Пусть A — целочисленная $(m \times n)$-матрица, каждый минор которой по абсолютной величине не превосходит Δ, и пусть даны векторы b и c. Предположим, что оба максимума

$$\max\{cx|Ax \leq b\} \tag{17}$$

и

$$\max\{cx|Ax \leq b, \quad x \in Z\} \tag{18}$$

конечны. Тогда:

1. Для любого оптимального решения y задачи (17) существует оптимальное решение z задачи (18), для которого $||y - z||_\infty \leq n\Delta$.

Теорема об оценки близости решений IP и соответствующей LR

Пусть A — целочисленная $(m \times n)$-матрица, каждый минор которой по абсолютной величине не превосходит Δ, и пусть даны векторы b и c. Предположим, что оба максимума

$$\max\{cx|Ax \leq b\} \tag{17}$$

и

$$\max\{cx|Ax \leq b, \quad x \in Z\} \tag{18}$$

конечны. Тогда:
1. Для любого оптимального решения y задачи (17) существует оптимальное решение z задачи (18), для которого $||y - z||_\infty \leq n\Delta$.
2. Для любого оптимального решения z задачи (18) существует оптимальное решение y задачи (17), для которого $||y - z||_\infty \leq n\Delta$.

Пример. Граница $n\Delta$ не улучшаема

$$A := \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & +1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix},$$

$$b := \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$c := (1, \dots, 1)$$

Пример. Граница $n\Delta$ не улучшаема

Следующие векторы являются единственными решениями задач $\max\{cx|Ax \le b\}$ и $\max\{cx|Ax \le b,\ x \in Z\}$:

$$y := \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ \vdots \\ n\beta \end{pmatrix},\ z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$||y - z||_\infty \le n\Delta\beta$, для любого β, $0 \le \beta < 1$.

Число ограничений и переменных в модели. Пример

- Имеется парк из трех грузовиков и два маршрута, по которым нужно отправить грузовики.

Число ограничений и переменных в модели. Пример

- Имеется парк из трех грузовиков и два маршрута, по которым нужно отправить грузовики.
- Предполагается, что все грузовики одинаковые.

Число ограничений и переменных в модели. Пример

- Имеется парк из трех грузовиков и два маршрута, по которым нужно отправить грузовики.
- Предполагается, что все грузовики одинаковые.
- Требуется назначить грузовики на маршруты.

Пример. Введение переменных. Два способа

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если грузовик } i \text{ отправляется по маршруту } j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$
  где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$.
  В дереве ветвления в худшем случае будет 2^6 вершин.

Пример. Введение переменных. Два способа

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если грузовик } i \text{ отправляется по маршруту } j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$
  где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$.
  В дереве ветвления в худшем случае будет 2^6 вершин.
- $y_i = \begin{cases} 1, & \text{если грузовик } i \text{ отправляется по 1-му маршруту} \\ 0, & \text{если грузовик } i \text{ отправляется по 2-му маршруту,} \end{cases}$
  где $i \in \{1, 2, 3\}$. В дереве ветвления в худшем случае будет 2^3 вершин.

Все грузовики одинаковые, то пара допустимых решений (первый способ)

$$x_{11} = 1, \quad x_{22} = 1, \quad x_{32} = 1 \tag{19}$$

и

$$x_{12} = 1, \quad x_{21} = 1, \quad x_{32} = 1, \tag{20}$$

и пара допустимых решений (второй способ)

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0 \tag{21}$$

и

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0 \tag{22}$$

по сути, представляют одно и то же назначение грузовиков на маршруты.

Пример. Введение переменных. Третий способ

n_j — количество грузовиков, отправленных по маршруту j.

Пример. Введение переменных. Третий способ

n_j — количество грузовиков, отправленных по маршруту j.
Решение $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ и решения (19), (20), (21) и (22), по сути — одно и то же назначение грузовиков на маршруты.

Пример. Введение переменных. Третий способ

n_j — количество грузовиков, отправленных по маршруту j. Решение $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ и решения (19), (20), (21) и (22), по сути — одно и то же назначение грузовиков на маршруты.

В модели в три раза меньше переменных.

$$\min fx$$

$$Ax \le b,$$

$$x \ge 0, \quad \text{целые.}$$

X — множество допустимых решений этой задачи.

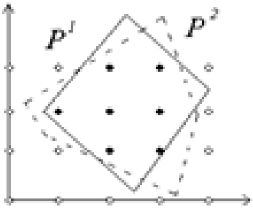
$$\min fx$$
$$Ax \leq b,$$
$$x \geq 0, \quad \text{целые}.$$

X — множество допустимых решений этой задачи.

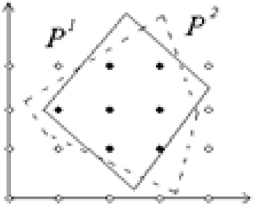
Определение

Множество точек $P = \{x \in R^n | Ax \leq b\}$, удовлетворяющих конечному числу линейных неравенств называют многогранником.

Многогранники. Два представления



Многогранники. Два представления



Определение

Многогранник P называют представлением множества допустимых решений X, если X совпадает с целочисленными точками из многогранника, т. е. $X = P \cap Z^n$.

Определение

Представление P^1 лучше P^2, если $P^1 \subset P^2$.

Допустимые целочисленные решения задачи лежат и в P^1, и в P^2.

Определение

Представление P^1 лучше P^2, если $P^1 \subset P^2$.

Допустимые целочисленные решения задачи лежат и в P^1, и в P^2.

С точки зрения линейной релаксации допустимая область представления P^2 больше, поэтому разрыв целочисленности с P^1 будет меньше, чем с P^2.

Определение

Представление P^1 лучше P^2, если $P^1 \subset P^2$.

Допустимые целочисленные решения задачи лежат и в P^1, и в P^2.
С точки зрения линейной релаксации допустимая область представления P^2 больше, поэтому разрыв целочисленности с P^1 будет меньше, чем с P^2.
Для задачи на минимум $z^*(X) \geq z^*(P^1) \geq z^*(P^2)$.

Определение

Выпуклой оболочкой множества X называется множество $conv(X)$,
состоящее из точек вида $x = \sum_{i=1}^{T} \lambda_i x^i$, где $\sum_{i=1}^{T} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, T$, где $\{x_1, \ldots, x_T\}$ все точки из X, а T – общее число точек в множестве X. В этом случае точка x является выпуклой комбинацией точек $\{x_1, \ldots, x_T\}$.

Многогранники.

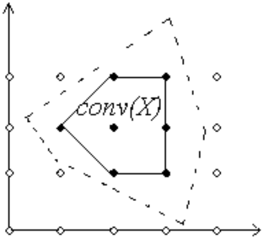
Определение

Выпуклой оболочкой множества X называется множество $conv(X)$,
состоящее из точек вида $x = \sum_{i=1}^{T} \lambda_i x^i$, где $\sum_{i=1}^{T} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, T$, где $\{x_1, \ldots, x_T\}$ все точки из X, а T – общее число точек в множестве X. В этом случае точка x является выпуклой комбинацией точек $\{x_1, \ldots, x_T\}$.

Определение

Неравенства, добавление которых не меняет целочисленную допустимую область, называют правильными неравенствами

Выпуклая оболочка $conv(X)$ образует многогранник и является лучшим из возможных представлений для X, разрыв целочисленности равен нулю.



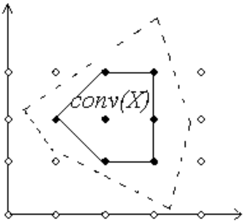
Трудности при поиске переформулировки с $conv(X)$.

- заранее неизвестно, как задать $conv(X)$, а ее нахождение является не менее сложной задачей, чем решить исходную задачу MIP;

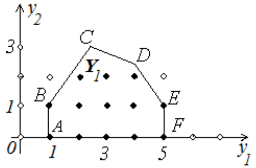
Трудности при поиске переформулировки с $conv(X)$.

- заранее неизвестно, как задать $conv(X)$, а ее нахождение является не менее сложной задачей, чем решить исходную задачу MIP;
- для многих задач MIP описание $conv(X)$ требует экспоненциального числа переменных и линейных неравенств, а значит для решения полученной таким образом задачи LP потребуется много времени. С другой стороны, добавление "правильных" ограничений улучшает верхнюю оценку LP и может заметно ускорить время работы алгоритма.

Пример правильных неравенств

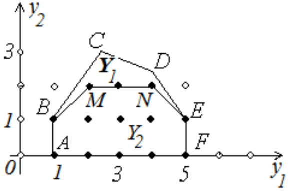


Y_1 :
$y_1 \geq 1,$
$y_1 \leq 5,$
$y_1 + 0.8y_2 \leq 5.8,$
$y_1 - 0.8y_2 \geq 0.2,$
$y_1 + 8y_2 \leq 26,$
$y_1 \geq 0,$ целые,
$y_2 \geq 0,$ целые.



Y_2 :
$y_1 + y_2 \leq 6,$
$y_1 - y_2 \geq 0,$
$y_2 \leq 2,$
$y_1 \geq 0,$
$y_2 \geq 0.$

Допустимая область совпадает с $conv(Y_1 \cup Y_2)$:



$$
\begin{aligned}
&y_1 \geq 1,\\
&y_1 \leq 5,\\
&y_1 + 0.8y_2 \leq 5.8,\\
&y_1 - 0.8y_2 \geq 0.2,\\
&y_1 + 8y_2 \leq 26,\\
&y_1 + y_2 \leq 6,\\
&y_1 - y_2 \geq 0,\\
&y_2 \leq 2,\\
&y_1 \geq 0, \text{целые}, y_2 \geq 0, \text{целые}.
\end{aligned}
$$

- Под релаксацией множества X понимается любое надмножество Y, такое, что $X \subset Y$.

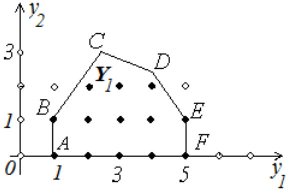
Построение правильных неравенств

- Под релаксацией множества X понимается любое надмножество Y, такое, что $X \subset Y$.
- Тогда любое правильное неравенство для множества Y является правильным неравенством для множества X.

Построение правильных неравенств

- Под релаксацией множества X понимается любое надмножество Y, такое, что $X \subset Y$.
- Тогда любое правильное неравенство для множества Y является правильным неравенством для множества X.
- В качестве релаксации можно взять часть неравенств, определяющих область X и ограничения на значения переменных.

Построить правильное неравенство для:



Y_1 :
$y_1 \geq 1,$
$y_1 \leq 5,$
$y_1 + 0.8y_2 \leq 5.8,$
$y_1 - 0.8y_2 \geq 0.2,$
$y_1 + 8y_2 \leq 26,$
$y_1 \geq 0,$ целые, $y_2 \geq 0,$ целые.

Пример построения правильных неравенств

Y :

$y_1 \geq 1,$

$y_1 \leq 5,$

$y_1 + 0.8y_2 \leq 5.8,$

$y_1 - 0.8y_2 \geq 0.2,$

$y_1 + 8y_2 \leq 26, \quad \Rightarrow y_2 \leq \lfloor \frac{26}{8} \rfloor = 3$

$y_1 \geq 0,$ целые,

$y_2 \geq 0,$ целые.

$$y_1 + 2.4 \leq 5.8$$
$$\Downarrow$$
$$y_1 \leq \lfloor 3.4 \rfloor$$
$$\Downarrow$$
$$y_1 \leq 3$$
$$\Downarrow$$
$$y_1 + y_2 \leq 6$$

правильное неравенство для Y

$$\Downarrow$$

и для Y_1

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Утверждение

Для любых l и C неравенства

$$\sum_{i \in C} y_i \leq \sum_{i \in C} \left(\sum_{t=i}^{l} d_t \right) x_i + s_l, \quad 1 \leq l \leq T, \;\; C \subseteq \{1, \dots, l\} \quad (23)$$

являются правильными для задачи (7) – (12).

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Утверждение

Для любых l и C неравенства

$$\sum_{i\in C} y_i \le \sum_{i\in C}\left(\sum_{t=i}^{l} d_t\right) x_i + s_l, \quad 1 \le l \le T, \;\; C \subseteq \{1,\dots,l\} \quad (23)$$

являются правильными для задачи (7) – (12).

Доказательство.
Проверим, что добавление неравенств (23) в модель не приводит к потере допустимых решений задачи. Возьмем допустимое решение (y, s, x) задачи (8) – (12) и покажем, что неравенства (23) выполняются.

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Рассмотрим два случая.

- $x_i = 0$ для любого $i \in C$.
  Тогда $y_i = 0$ для любого $i \in C$ и из (23) получаем, что $s_l \geq 0$.

Правильные неравенства для задачи планирования производства

Рассмотрим два случая.

- $x_i = 0$ для любого $i \in C$.
  Тогда $y_i = 0$ для любого $i \in C$ и из (23) получаем, что $s_l \geq 0$.
- $x_i = 1$ для некоторого $i \in C$.
  Пусть $k = \min\{i \in C | x_i = 1\}$. Тогда $y_i = 0$ для любого $i < k$ и $\sum_{i \in C} y_i \leq \sum_{t=k}^{l} y_t = \sum_{t=k}^{l} d_t + s_l - s_{k-1} \leq \sum_{t=k}^{l} d_t + s_l \leq \sum_{i \in C} (\sum_{t=i}^{l} d_t) x_i + s_l$.

  Что и требовалось доказать.

Теорема

Выпуклая оболочка множества (8)–(12) задается следующей системой ограничений:

$$y_1 = d_1 + s_1, \tag{24}$$

$$s_{t-1} + y_t = d_t + s_t, \quad t = 2, \ldots, T, \tag{25}$$

$$s_T = 0, \tag{26}$$

$$x_t \leq 1, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{27}$$

$$\sum_{i \in C} y_i \leq \sum_{i \in C} \left(\sum_{t=i}^{l} d_t \right) x_i + s_l \text{ для любого } l, \text{ и } C \neq \emptyset, \tag{28}$$

$$y_t \geq 0, \; s_t \geq 0, \; x_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{29}$$