

Численные методы математической физики

Репников В.И.

Содержание

2.6.1	Математическое моделирование и вычислительный эксперимент	4
2.6.2	Типичные задачи математической физики	5
2.6.2.1	Стационарные задачи	5
2.6.2.2	Нестационарные задачи	7
2.6	Разностные схемы для уравнения переноса	8
2.6.1	Явные схемы для задачи Коши	8
2.6.2	Разностные схемы для краевой задачи	12
2.6	Разностные схемы для уравнения теплопроводности	16
2.6.1	Одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами	16
2.6.1.1	Семейство шеститочечных схем	16
2.6.1.1.1	Погрешность аппроксимации семейства схем с весами	18
2.6.1.1.2	Устойчивость рассматриваемого семейства по начальным данным	19
2.6.1.1.3	Устойчивость рассматриваемого семейства по правой части	22
2.6.1.1.4	Устойчивость рассматриваемого семейства в равномерной метрике	24
2.6.1.1.5	Краевые условия третьего рода	25
2.6.1.2	Трехслойные разностные схемы для задачи	28
2.6.1.3	Схемы бегущего счета	30
2.6.1.4	Асимптотическая устойчивость	33
2.6.1.4.1	Безусловно асимптотически устойчивая схема второго порядка	35

2.6.2	Разностные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами	39
2.6.2.1	Метод баланса и однородные разностные схемы с весами	39
2.6.2.2	Монотонные схемы для параболических уравнений общего вида	41
2.6	Разностные схемы для уравнения колебаний струны	42
2.6.1	Разностные схемы для уравнения с постоянными коэффициентами	42
2.6.1.1	Исходное семейство девятиточечных схем с весами	42
2.6.1.1.1	Погрешность аппроксимации семейства схем с весами	44
2.6.1.1.2	Краевые условия третьего рода	46
2.6.1.1.3	Устойчивость схемы с весами по начальным данным	50
2.6	Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	56
2.6.1	Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона	56
2.6.1.1	Простейшая разностная схема	56
2.6.1.2	Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле	58
2.6.1.3	Схема повышенного порядка точности для уравнения Пуассона	63
2.6.2	Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами	65
2.6.3	Методы решения сеточных уравнений	67
2.6.3.1	Прямые методы	67
2.6.3.1.1	Метод разделения переменных	68
2.6.3.1.2	Метод декомпозиции	69
2.6.3.2	Итерационные методы	72
2.6.3.2.1	Метод простой итерации	72
2.6.3.2.2	Метод Зейделя	73
2.6.3.2.3	Метод релаксации	74
2.6	Экономичные методы решения многомерных нестационарных задач	75
2.6.1	Стандартные разностные схемы и их недостатки	75
2.6.1.1	Явная разностная схема	75

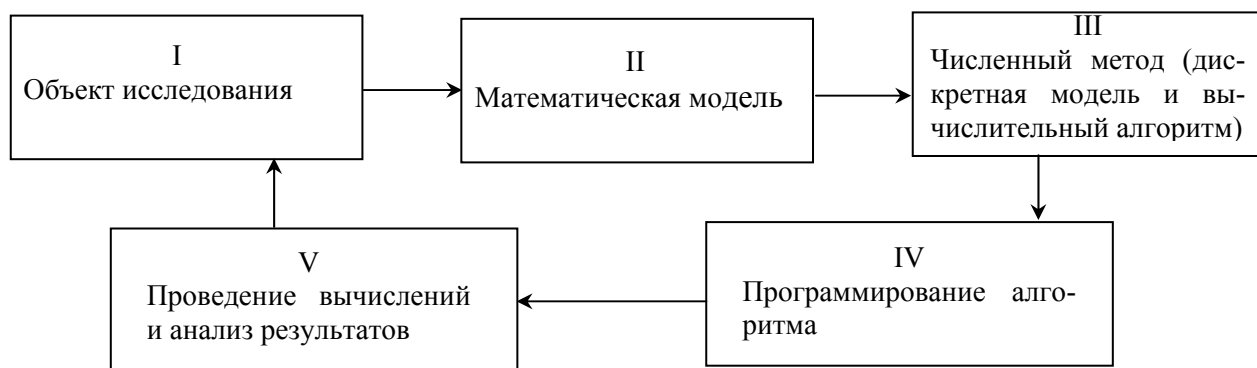
2.6.1.2	Схема с опережением (чисто неявная разностная схема)	77
2.6.2	Схема переменных направлений (продольно-поперечная схема)	78
2.6.2.1	Организация расчетов	78
2.6.2.2	Аппроксимация и устойчивость схемы переменных направлений	79

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент

Эффективное решение крупных естественнонаучных и народнохозяйственных задач в настоящее время невозможно себе представить без применения компьютеров (в последнее время даже появился термин «промышленная математика»). В частности, одной из причин этого является исключительно высокая стоимость так называемых натурных исследований, связанных с построением опытного изделия и проверки на нем соответствующих свойств путем проведения физических наблюдений: так, например, опытные термоядерные установки типа «Токамак» уже стоят миллиарды долларов (проект ИТЭР постройки демонстрационного термоядерного реактора в городе Кадараш – 15 млрд. евро). К текущему моменту уже вполне сложилась технология исследования сложных проблем, основанная на построении и анализе с помощью компьютера *математических моделей* изучаемого объекта (явления, процесса). Такой метод исследования называют *вычислительным экспериментом*. Изложим несколько подробнее его схему.

Пусть требуется изучить некоторый объект (явление, процесс). Тогда основная схема вычислительного эксперимента выглядит следующим образом.



На первом этапе формулируются основные законы, управляющие данным объектом (процессом, явлением) на естественнонаучном уровне. На втором этапе проводится математическая запись этих законов, которая представляет собой некоторую систему уравнений (как частный случай – одно) (дифференциальных, интегральных, алгебраических и т.п.) (возможно, с некоторыми дополнительными условиями). Эту систему и называют математической моделью.

При выборе естественнонаучной, и, следовательно, математической, модели мы пренебрегаем некоторыми факторами, не оказывающими существенного влияния на характеристики изучаемого объекта (процесса, явления). Типичные математические модели, соответствующие естественнонаучным процессам (явлениям, объектам), формулируются в виде уравнений математической физики. Большинство реальных процессов описывается нелинейными уравнениями и лишь в первом приближении (при малых значениях параметров, малых отклонениях от положения равновесия и т.п.) эти уравнения можно заменить линейными. Естественно, такие задачи, как правило, мы не умеем решать аналитически. Поэтому третий этап, обозначенный на схеме, предназначен для «дискретизации» математической модели, т.е. для перехода к системе алгебраических уравнений и описания алгоритмов ее решения.

Наконец, четвертый и пятый этапы в комментариях не нуждаются. Заметим только, что анализ полученных результатов, безусловно, обязателен. В результате такого анализа мы исследуем соответствие полученных данных естественнонаучному смыслу (поэтому – стрелка к первому этапу) и, как следствие, можем уточнять математическую модель. Таким образом, далее все идет по кругу.

Если математическая модель адекватно отражает свойства реального процесса (объекта, явления), то вычислительный эксперимент может полностью заменить натурные экспериментальные исследования.

§ 2. Типичные задачи математической физики

Различают два типа физических процессов – нестационарные (меняющиеся во времени) и стационарные (не меняющиеся во времени). Нестационарные процессы, как правило, описываются уравнениями параболического и гиперболического типов, а стационарные – уравнениями эллиптического типа. Следует при этом заметить, что возможны и более сложные сочетания типов уравнений, а также (о чем мы говорили выше) и не только дифференциальные уравнения (например, интегральные, интегро-дифференциальные и т.п.).

2.1. Стационарные задачи

Простейшим представителем уравнений эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $u = u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_p)$.

Неоднородное уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x) \quad (2.2)$$

называют уравнением Пуассона.

К уравнениям Лапласа и Пуассона приводят задачи о стационарном распределении тепла, задачи диффузии, электростатики, магнитостатики, гидродинамики и многие другие.

Стационарное распределение температуры в однородной среде, если диапазон изменения температуры в среде невелик, описывается уравнением Пуассона

$$k \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad (2.3)$$

где $f(x)$ – плотность тепловых источников (стоков), $k = \text{const} > 0$ – коэффициент теплопроводности.

Если среда неоднородна, то $k = k(x) > 0$, и вместо (2.3) получаем уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = -f(x). \quad (2.4)$$

Если же диапазон изменения температуры в среде достаточно большой, то $k = k(u)$ и получаем квазилинейное стационарное уравнение теплопроводности

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = -f(x) \quad (2.5)$$

(заметим, что коэффициент теплопроводности может быть и вектор-функцией (в случае так называемых анизотропных сред), т.е. зависеть и от направления).

Если в среде имеются источники или стоки тепла, пропорциональные температуре, то стационарное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) - q(x)u = -f(x) \quad (2.6)$$

(здесь при $q(x) > 0$ имеем источник, а при $q(x) < 0$ – сток).

Если процесс теплопроводности сопровождается конвективным переносом тепла, что имеет место в жидкостях и газах, то соответствующее стационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + v_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right] - q(x)u = -f(x), \quad (2.7)$$

где $v = (v_1, \dots, v_p)$ – вектор скорости среды.

Остановимся на формулировке основных краевых задач для уравнения Пуассона.

Пусть G – область p -мерного пространства с границей Γ . Обычно ставятся следующие краевые задачи.

В замкнутой области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ требуется найти решение уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} = -f(x), \quad x \in G,$$

удовлетворяющее на границе Γ одному из дополнительных условий:

1) условие первого рода: на границе задается температура:

$$u = \mu_1(x), \quad x \in \Gamma.$$

Получим первую краевую задачу (или **задачу Дирихле**);

2) условие второго рода: на границе задается тепловой поток:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = \mu_2(x), \quad x \in \Gamma.$$

Получим вторую краевую задачу (или **задачу Неймана**) ($\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к границе области);

3) условие третьего рода: на границе происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma(u + \mu_3(x)), \quad x \in \Gamma.$$

Получаем третью краевую задачу.

На разных участках границы принципиально возможны различные типы граничных условий.

2.2. Нестационарные задачи

Типичным представителем уравнений параболического типа является уравнение теплопроводности, описывающее нестационарный процесс теплопроводности

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0,$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)$. Здесь $k(x, t)$, как и выше, коэффициент теплопроводности, а $c(x, t) > 0$ – теплоемкость единицы объема среды.

Типичная постановка задачи осуществляется следующим образом: по временной переменной t ставится задача Коши, т.е. задается условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (2.7)$$

а по пространственным переменным – одна из трех краевых задач, описанных выше, причем все функции μ_i там могут зависеть от $x \in \Gamma$ и $t \geq 0$. Так, например, в случае первой краевой задачи имеем:

$$u = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

В случае однородной среды, когда $k(x, t) = k = \text{const} > 0$, $c(x, t) = c = \text{const} > 0$ уравнение теплопроводности записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} + \bar{f}(x, t), \quad (2.9)$$

где $a = \frac{k}{c} > 0$ – коэффициент температуропроводности, $\bar{f} = \frac{f}{c}$. Меняя масштаб для t , всегда можно добиться, чтобы коэффициент a был равен единице (для этого достаточно использовать замену $\bar{t} = at$).

Таким образом, вместо уравнения (2.9) без ограничения общности можно рассматривать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0$$

с начальным условием (2.7) и краевыми условиями, например, (2.8).

Упражнение. Записать возможные постановки задач в одномерном ($p = 1$) случае.

Наиболее известным уравнением *гиперболического* типа второго порядка является *волновое* уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} + f(x, t), \quad \rho = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0.$$

Здесь ρ – плотность объекта (струны ($p = 1$), мембраны ($p = 2$) и т.п.), k – его натяжение.

Постановка задач аналогична параболическому случаю с той лишь разницей, что при $t = 0$ задается два начальных условия:

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \end{cases} \quad x \in \overline{G}.$$

Используя замену переменных, аналогичную описанной выше, можно коэффициент $a = \frac{k}{\rho}$ – скорость распространения колебаний – сделать равным единице. Аналогичная замена пространственных переменных (в случае, когда G – параллелепипед) позволяет перейти к кубу с единичным ребром.

Упражнение. Выписать соответствующие замены переменных и постановки задач для случая $p = 1$.

ГЛАВА I

Разностные схемы для уравнения переноса

Уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

называют уравнением переноса.

Такое уравнение получается, например, для плотности несжимаемой жидкости, движущейся вдоль оси Ox с постоянной скоростью (равной a). Уравнение переноса является модельным и позволяет «отрабатывать» схемы для более сложных уравнений акустики, кинетических интегро-дифференциальных уравнений переноса нейтронов, нелинейных уравнений газовой динамики и т.п.

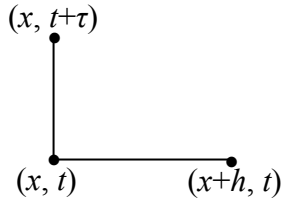
§ 1. Явные схемы для задачи Коши

Рассмотрим вначале задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad a = \text{const} \neq 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

Решением задачи (1.1) является «**бегущая волна**» $u(x,t) = u_0(x - at)$ (если $u(\xi)$ – дифференцируемая функция), где a – скорость волны.

На плоскости (x,t) введем сетку $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$; $\omega_h = \{x_k = kh, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots\}$. Для приближенного решения задачи Коши естественно использовать явные разностные схемы. Учитывая, что уравнение (1.1) имеет первый порядок по каждой из независимых переменных, получаем: простейшую разностную схему для решения рассматриваемой задачи можно записать, используя трехточечный шаблон: две точки по каждому направлению, из них одна общая. Начнем изучение с шаблона, изображенного на рисунке. На этом шаблоне разностная схема будет иметь вид



$$\begin{cases} y_t + ay_x = 0, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h \end{cases}$$

или в индексной форме

$$\begin{cases} \frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a \frac{y_{k+1}^j - y_k^j}{h} = 0, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ y_k^0 = u_0(x_k), & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.2)$$

Так как

$$\psi = u_t + au_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) \right) = O(\tau + h),$$

то данная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по обоим независимым переменным.

Покажем, что при $a > 0$ схема абсолютно неустойчива. В соответствии с методом гармоник ищем частное решение в виде $y_k^j = q^j e^{ik\varphi}$. Подставляя это выражение в (1.2), найдем:

$$q = 1 - \gamma(e^{i\varphi} - 1) = (1 + \gamma - \gamma \cos \varphi) - i\gamma \sin \varphi,$$

где $\gamma = \frac{a\tau}{h}$.

Тогда

$$\begin{aligned} |q|^2 &= (1 + \gamma - \gamma \cos \varphi)^2 + \gamma^2 \sin^2 \varphi = (1 + \gamma)^2 - 2\gamma(1 + \gamma)\cos \varphi + \gamma^2 = \\ &= 1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\gamma(1 + \gamma)\cos \varphi = 1 + 2\gamma(1 + \gamma)(1 - \cos \varphi) = 1 + 4\gamma(1 + \gamma)\sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

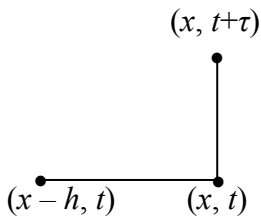
Полученное выражение, очевидно больше единицы при всех значениях $\varphi \neq 0$, что и означает неустойчивость схемы (1.2) при любом постоянном значении γ .

Замечание. Если положить $\gamma = O(h)$, то разностная схема будет устойчива на любом **конечном** промежутке изменения переменной t .

Если же $a < 0$, то разностная схема (1.2), очевидно, будет устойчива при выполнении условия $\gamma \in [-1; 0]$ или $|\gamma| = |a| \frac{\tau}{h} \leq 1$.

Приближенное решение с помощью схемы (1.2) может быть найдено (мы это уже отмечали ранее) послойно. Для этого схему необходимо переписать в виде

$$y_k^{j+1} = (1 + \gamma)y_k^j - \gamma y_{k+1}^j.$$



Наряду с изученной рассмотрим также разностную схему на шаблоне, изображенном на рисунке ниже. Такая разностная схема, очевидно, будет иметь вид (записываем только аппроксимацию уравнения)

$$y_t + ay_{\bar{x}} = 0$$

или

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a \frac{y_k^j - y_{k-1}^j}{h} = 0. \quad (1.3)$$

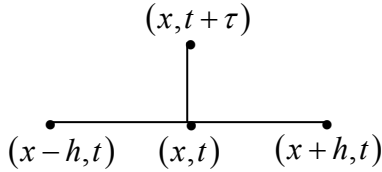
Легко видеть, что схема (1.3), как и (1.2), имеет первый порядок аппроксимации по обеим переменным. Ее устойчивость при $a > 0$ была нами исследована ранее (смотри «Примеры исследования устойчивости с помощью метода разделения переменных»). Соответствующее условие имеет вид $\gamma \leq 1$, где, как и выше, $\gamma = \frac{a\tau}{h}$. В случае же $a < 0$ схема (1.3), как это следует из рассуждений, приведенных выше, будет абсолютно неустойчивой при $\frac{\tau}{h} = \text{const}$.

По аналогии с разностной схемой (1.2) реализация (1.3) осуществляется послойно, для чего схема переписывается в виде

$$y_k^{j+1} = (1 - \gamma)y_k^j + \gamma y_{k-1}^j.$$

Рассмотрим сейчас примеры явных разностных схем для задачи (1.1) более высокого порядка аппроксимации.

1⁰. Простейшим путем повышения порядка аппроксимации, как известно, является расширение шаблона. Поэтому, используя четырехточечный шаблон, изображенный слева, мы можем записать разностную схему



$$\begin{cases} y_t + ay_x = 0, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h \end{cases}$$

или в индексной форме

$$\begin{cases} \frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2h} = 0, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ y_k^0 = u_0(x_k), & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.4)$$

Очевидно, данная разностная схема имеет погрешность аппроксимации $\psi = O(\tau + h^2)$. Нахождение приближенного решения по схеме (1.4) может быть осуществлено, как и по схемам (1.2) и (1.3) послойно. Для этого так же, как и ранее, необходимо выразить из (1.4) значение y_k^{j+1} .

Используя метод разделения переменных, исследуем устойчивость рассматриваемой схемы. Подставляя $y_k^j = q^j e^{ik\varphi}$ в (1.4), найдем:

$$q = 1 - \gamma \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = 1 + 2i\gamma \sin \varphi,$$

где, как и ранее, $\gamma = \frac{a\tau}{h}$. Тогда, очевидно,

$$|q|^2 = 1 + 4\gamma^2 \sin^2 \varphi$$

и при любом $\varphi \neq 0$ имеем неравенство $|q| > 1$.

Таким образом, независимо от знака коэффициента a разностная схема (1.4) является абсолютно неустойчивой.

2⁰. Чтобы получить на том же четырехточечном шаблоне устойчивую схему, заменим в (1.4) значение y_k^j полусуммой $\frac{1}{2}(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j)$. В итоге получим разностную схему

$$\frac{y_k^{j+1} - 0.5(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j)}{\tau} + a \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2h} = 0. \quad (1.5)$$

Отсюда имеем:

$$y_k^{j+1} = \frac{1}{2}(1 + \gamma)y_{k-1}^j + \frac{1}{2}(1 - \gamma)y_{k+1}^j$$

и в соответствии с принципом максимума схема будет устойчива при выполнении неравенств

$$\begin{cases} 1 + \gamma \geq 0, \\ 1 - \gamma \geq 0, \end{cases}$$

т.е. при условии $|\gamma| \leq 1$ независимо от знака коэффициента a .

Чтобы оценить погрешность аппроксимации схемы (1.5), преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{y_{k+1}^j - 2y_k^j + y_{k-1}^j}{\tau} + a \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2h} = 0$$

или в безындексной форме

$$y_t - \frac{h^2}{2\tau} y_{xx} + ay_x = 0. \quad (1.5')$$

Отсюда

$$\psi = u_t - \frac{h^2}{2\tau} u_{xx} + au_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{2\tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) \right) + O(\tau^2 + h^2).$$

Так как из (1.1) следует, что $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, а с другой стороны $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t}$ и, значит,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Поэтому последнее равенство для погрешности можно переписать в виде

$$\psi = \left(\frac{a^2 \tau}{2} - \frac{h^2}{2\tau} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O\left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^4}{\tau} \right).$$

Отсюда заключаем, что схема (1.5) обладает **условной аппроксимацией**; она аппроксимирует исходное уравнение только при выполнении условия $\frac{h^2}{\tau} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$.

Так, например, если выбрать $\tau = O(h)$, то $\psi = O(\tau + h)$, т.е. схема в этом случае будет схемой первого порядка. Если же положить $\tau = \frac{h}{|a|}$, то получим схему второго порядка.

3⁰. В заключение данного параграфа рассмотрим еще одну разностную схему на том же четырехточечном шаблоне (*схему Лакса-Вендроффа*), по свойству устойчивости совпадающую с предыдущей, а по аппроксимации ее превосходящую:

$$y_t + ay_{\bar{x}} - \frac{\tau}{2} a^2 y_{\bar{x}\bar{x}} = 0. \quad (1.6)$$

Вычисляя невязку, получаем:

$$\begin{aligned} \psi &= u_t + au_{\bar{x}} - \frac{\tau}{2} a^2 u_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) + a \frac{\partial u}{\partial x} + O(h^2) - \frac{\tau}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau h^2) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали отмеченное выше равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Таким образом, схема (1.6) имеет второй порядок аппроксимации по каждой независимой переменной.

Вычисления по схеме (1.6), очевидно, следует проводить, переписав ее в виде

$$y_k^{j+1} = (1 - \gamma^2) y_k^j + \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) y_{k+1}^j + \frac{1}{2} \gamma (\gamma + 1) y_{k-1}^j. \quad (1.6')$$

Подставив сюда $y_k^j = q^j e^{ik\varphi}$, получим:

$$q = 1 - \gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) - \frac{1}{2} \gamma (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = 1 - \gamma^2 + \gamma^2 \cos \varphi - i\gamma \sin \varphi = 1 - \gamma^2 (1 - \cos \varphi) - i\gamma \sin \varphi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |q|^2 &= (1 - \gamma^2 + \gamma^2 \cos \varphi)^2 + \gamma^2 \sin^2 \varphi = (1 - \gamma^2)^2 + 2\gamma^2 (1 - \gamma^2) \cos \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi + \gamma^4 \cos^2 \varphi = \\ &= 1 - 2\gamma^2 + \gamma^4 + 2\gamma^2 (1 - \gamma^2) \cos \varphi + \gamma^2 - \gamma^2 \cos^2 \varphi + \gamma^4 \cos^2 \varphi = 1 - \gamma^2 (1 - \gamma^2) + 2\gamma^2 (1 - \gamma^2) \cos \varphi - \\ &- \gamma^2 (1 - \gamma^2) \cos^2 \varphi = 1 - \gamma^2 (1 - \gamma^2) (1 - \cos \varphi)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что при $|\gamma| \leq 1$ схема (1.6) устойчива независимо от знака коэффициента a (как и схема (1.5)).

§ 2. Разностные схемы для краевой задачи

Рассмотрим теперь краевую задачу, когда при $x = 0$ задано граничное значение $\mu(t)$ и решение ищется при $x > 0$, $t > 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0, \quad 0 < x < \infty, \quad a = \text{const}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = \mu_0(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

причем должно выполняться условие согласования $u_0(0) = \mu_0(0)$.

Если $u_0(x)$ и $\mu_0(t)$ – дифференцируемые функции, то задача (2.1) имеет решением функцию

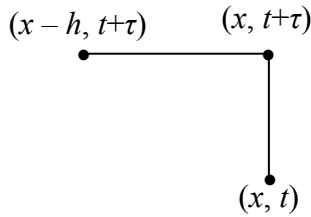
$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at) & \text{при } t \leq \frac{x}{a}, \\ \mu_0\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } t \geq \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Вновь рассмотрим равномерную по каждому направлению сетку

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_k, t_j), x_k = kh, k = 0, 1, \dots; t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}.$$

Для решения задачи (2.1) можно применять все рассмотренные выше явные разностные схемы, свойства которых, очевидно, останутся такими же. В то же время для решения краевой задачи возможно и применение нового класса схем – **неявных**. Простейшей из схем такого класса является схема

$$\begin{cases} y_t + a\hat{y}_x = 0, (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), x \in \omega_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), t \in \omega_\tau, \end{cases} \quad (2.3)$$



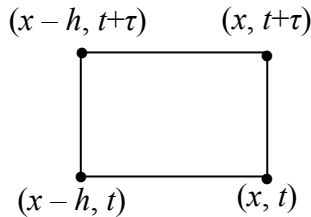
записанная на шаблоне, изображенном на рисунке. Записывая первое из уравнений в индексной форме и выражая из него y_k^{j+1} , получим правило для выполнения расчетов (γ здесь имеет то же значение, что и в предыдущем параграфе):

$$y_k^{j+1} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} y_{k-1}^{j+1} + \frac{1}{\gamma + 1} y_k^j. \quad (2.4)$$

Таким образом, видим, что счет можно начинать с точки (x_1, t_0) , последовательно вычисляя y_1^j до некоторого $j = j_0$, затем, увеличив k , повторять все сначала (либо в обратном порядке: сначала вычислять y_k^1 до некоторого $k = k_0$, затем увеличивать j).

Легко видеть, что схема (2.3) является схемой первого порядка аппроксимации по обоим независимым переменным. Кроме того, из принципа максимума (см. (2.4)) непосредственно следует, что при $a > 0$ схема **безусловно устойчива** (т.е. ее применение не накладывает никаких ограничений на шаги сетки).

Рассмотрим теперь более общее семейство разностных схем, включающее в себя (2.4) как частный случай. Добавив в шаблон, изученный выше, четвертую точку (см. рисунок слева), запишем однопараметрическое семейство разностных схем с весами



$$\begin{cases} y_t + a(\sigma \hat{y}_x + (1 - \sigma)y_x) = 0, (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), x \in \omega_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), t \in \omega_\tau. \end{cases} \quad (2.5)$$

При $\sigma = 1$ получим схему (2.3), а при $\sigma = 0$ – (1.3).

Определим погрешность аппроксимации схемы (2.5) (для сокращения записи будем использовать обозначения $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$):

$$\begin{aligned}
\psi &= u_t + a(\sigma \hat{u}_{\bar{x}} + (1-\sigma)u_{\bar{x}}) = \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + a\left[\sigma\left(\hat{u}' - \frac{h}{2}\hat{u}''\right) + (1-\sigma)\left(u' - \frac{h}{2}u''\right)\right] + O(\tau^2 + h^2) = \\
&= \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + a\left[\sigma\left(u' + \tau\dot{u}' - \frac{h}{2}u''\right) + (1-\sigma)\left(u' - \frac{h}{2}u''\right)\right] + O(\tau^2 + h^2) = \dot{u} + a\dot{u}' + \\
&+ \frac{\tau}{2}\ddot{u} - \frac{ah}{2}u'' + a\sigma\tau\dot{u}' + O(\tau^2 + h^2) = \left[\text{из уравнения (2.1) следует: } \ddot{u} = -a\dot{u}'; u'' = -\frac{1}{a}\dot{u}'\right] = \\
&= \left(-\frac{a\tau}{2} + \frac{h}{2} + a\sigma\tau\right)\dot{u}' + O(\tau^2 + h^2) = a\tau\left(\sigma - \frac{1}{2} + \frac{h}{2a\tau}\right)\dot{u}' + O(\tau^2 + h^2).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что схема с весами при $\sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\tau}$ имеет второй порядок аппроксимации по обеим переменным и первый (также по обеим переменным) в противном случае.

Перепишав первое из уравнений (2.5) в виде

$$y_k^{j+1} = \frac{1-(1-\sigma)\gamma}{1+\sigma\gamma} y_k^j + \frac{\sigma\gamma}{1+\sigma\gamma} y_{k-1}^{j+1} + \frac{(1-\sigma)\gamma}{1+\sigma\gamma} y_{k-1}^j, \quad (2.5')$$

видим, что расчеты по данной схеме можно вести точно так же, как и по схеме (2.3).

Для исследования устойчивости схемы (2.5) применим метод энергетических неравенств (точнее, используем критерий устойчивости двухслойных разностных схем, полученный нами ранее при изучении соответствующего материала). Для этого приведем схему к каноническому виду (см. формулу (3.1), Глава XVII, Методы численного анализа). Вводя в пространстве H сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $i = 0$, оператор \tilde{A} , действие которого определяется по формуле $\tilde{A}y = ay_{\bar{x}}$, получим:

$$y_t + \sigma\tilde{A}\hat{y} + (1-\sigma)\tilde{A}y = 0$$

или

$$y_t + \sigma\tilde{A}(\hat{y} - y) + \tilde{A}y = 0.$$

Отсюда получаем:

$$(E + \sigma\tau\tilde{A})y_t + \tilde{A}y = 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, схема (2.5) имеет канонический вид с $B = E + \sigma\tau\tilde{A}$, $A = \tilde{A}$. Однако (2.6) не принадлежит исходному семейству разностных схем, для которого мы формулировали критерий устойчивости, так как оператор \tilde{A} не является самосопряженным (как и B).

Но так как

$$yy_{\bar{x}} = \frac{1}{2}(y^2)_{\bar{x}} + \frac{h}{2}(y_{\bar{x}})^2,$$

то

$$(\tilde{A}y, y) = \frac{a}{2}y_N^2 + \frac{ah}{2}\|y_{\bar{x}}\|^2. \quad (*)$$

Отсюда следует, что при $a > 0$ оператор \tilde{A} положителен (при $a < 0$ – отрицателен) и, таким образом, существует обратный к нему оператор \tilde{A}^{-1} . Поэтому, применяя к схеме (2.6) оператор \tilde{A}^{-1} , перепишем ее в виде

$$(\tilde{A}^{-1} + \sigma\tau E)y_i + Ey = 0.$$

Здесь уже $B = \tilde{A}^{-1} + \sigma\tau E$ и $A = E = A^* > 0$. Поэтому в соответствии с критерием устойчивости рассматриваемая разностная схема будет устойчива при выполнении операторного неравенства $B \geq \frac{\tau}{2}A$ или

$$(\tilde{A}^{-1}v, v) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau(v, v) \geq 0$$

для произвольных сеточных функций v . Подставляя в последнее неравенство $\tilde{A}^{-1}v = y$ (откуда $v = \tilde{A}y$), перепишем его в виде

$$(\tilde{A}y, y) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau(\tilde{A}y, \tilde{A}y) \geq 0.$$

Теперь, воспользовавшись соотношением (*), перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{a}{2}y_N^2 + \frac{h}{2a}(\tilde{A}y, \tilde{A}y) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau(\tilde{A}y, \tilde{A}y) \geq 0$$

или

$$\frac{a}{2}y_N^2 + \tau(\tilde{A}y, \tilde{A}y) \left[\sigma - \frac{1}{2} + \frac{h}{2a\tau} \right] \geq 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что при $a > 0$ и $\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\tau}$ разностная схема (2.6) безусловно устойчива в евклидовой норме; при этом справедлива априорная оценка

$$\|y^j\| \leq \|y^0\|.$$

Замечание. Аналогичное семейство разностных схем с весами можно записать и на основе правой разностной производной.

Упражнения.

1. Построить указанное семейство и провести его исследование;
2. Исследовать устойчивость схемы (2.6) в равномерной метрике.

ГЛАВА II

Разностные схемы для уравнения теплопроводности

§ 1. Одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами

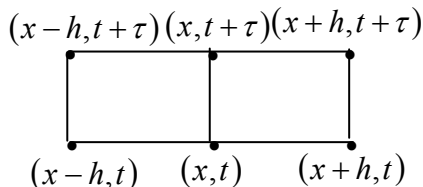
В качестве исходной задачи рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами. Без ограничения общности можно считать, что требуется найти в прямоугольнике $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq T\}$ непрерывное решение первой краевой задачи вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_0(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.1)$$

При этом функции, задающие дополнительные условия, должны быть согласованы, что требует выполнения соотношений $u_0(0) = \mu_0(0)$ и $u_0(1) = \mu_1(0)$.

1.1. Семейство шеститочечных схем

В области \bar{D} введем равномерную пространственно-временную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$. Тогда, как мы видели ранее, для аппроксимации оператора теплопроводности может быть использован шеститочечный разностный оператор $L_{h\tau}^{(\sigma)}$ (см. Глава XV, § 2 курса «Методы численного анализа»). Таким образом, используя изображенный на рисунке шаблон, можем записать исходное однопараметрическое семейство разностных схем



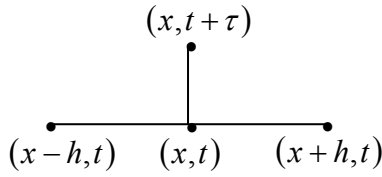
$$\begin{cases} y_i = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & (x, t) \in \bar{\omega}_{h\tau}, \quad \Lambda y = y_{xx}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), & t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь φ – сеточная функция, аппроксимирующая $f(x, t)$. (1.2) в литературе называют семейством схем с весами (или просто: **схема с весами**). Множество узлов сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$, лежащее на прямой $t = t_j$, называют временным слоем. Поскольку в (1.2) задействованы два соседних временных слоя, то схема принадлежит классу двухслойных. Изучим вначале вопрос о ее реализации. Как уже не раз отмечалось ранее, для разностных схем, аппроксимирующих эволюционные задачи, основным принципом их реализации является послойный. Чтобы сделать более конкретные заключения, запишем (1.2) в индексной форме:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma)y_i^j) + \varphi_i^j, & i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, N_1-1}, \\ y_i^0 = u_0(x_i), & i = \overline{0, N}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), & j = \overline{0, N_1-1}, \\ y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), & j = \overline{0, N_1-1}. \end{cases}$$

Дальнейшие действия зависят от конкретных значений параметра σ . Поэтому рассмотрим отдельно следующие случаи:

1⁰. $\sigma = 0$. В этом случае шаблон, соответствующий разностному уравнению, записываемому во внутренних узлах сетки, становится четырехточечным и принимает вид, изображенный на рисунке. Таким образом, на верхнем временном слое присутствует только одна точка и, следовательно, схема становится **явной**:



$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^j + \varphi_i^j. \quad (1.3)$$

Следовательно, порядок расчетов будет таким:

1) заполняем начальный (нулевой слой) по формулам

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}; \quad (1.4)$$

2) для всех $j = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ заполняем очередной $((j+1)$ -й) слой по формулам

$$y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}),$$

где $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$ и все формулы, кроме соответствующих $i = 0$ и $i = N$ получены путем разрешения уравнения (1.3) относительно значения на верхнем слое.

2⁰. $\sigma \neq 0$. При всех таких значениях весового параметра схема остается **неявной** и расчеты по ней следует осуществлять следующим образом: заполнив по формулам (1.4) нулевой слой, далее для всех $j = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ заполняем очередной $((j+1)$ -й) слой, решая систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\begin{cases} \sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -\frac{1}{\tau} y_i^j - (1 - \sigma) \Lambda y_i^j - \varphi_i^j, & i = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \\ y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \end{cases}$$

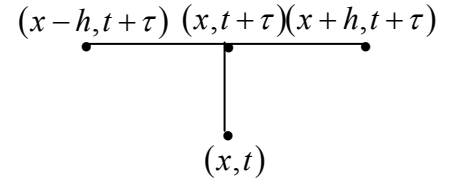
или

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\sigma}{h^2} \right) y_i^{j+1} + \frac{\sigma}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, & i = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \\ y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \end{cases} \quad (1.5)$$

где $F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j$. Решение такой системы целесообразно проводить с использованием метода разностной прогонки, которая, очевидно, будет устойчивой.

Здесь следует отметить два частных значения параметра σ , чаще других используемых в приложениях:

а) $\sigma = 1$. В этом случае шаблон, как и в случае явной схемы является четырехточечным (см. рисунок), однако «перевернутым» по отношению к шаблону явной схемы. Схему по этой причине часто называют **чисто неявной** или **схемой с опережением**. Соответствующая система для нахождения решения на $(j+1)$ -м временном слое будет иметь вид



$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} \right) y_i^{j+1} + \frac{1}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = - \left(\frac{1}{\tau} y_i^j + \varphi_i^j \right), & i = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \\ y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}). \end{cases}$$

б) Вторым частным случаем является случай $\sigma = \frac{1}{2}$. В этом случае разностная схема во внутренних узлах сетки принимает вид

$$y_t = \frac{\hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + y_{\bar{x}\bar{x}}}{2} + \varphi.$$

Такая разностная схема в литературе называется **симметричной схемой** или **схемой Кранка-Николсона**. Ее реализация также осуществляется по указанной выше схеме (путем решения системы вида (1.5)).

1.1.1. Погрешность аппроксимации семейства схем с весами

Вводя, как это мы уже делали ранее, погрешность приближенного решения $z = y - u$, можем записать для нее задачу

$$\begin{cases} z_t = \Lambda(\sigma \hat{z} + (1-\sigma)z) + \psi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z(x, 0) = 0, & x \in \bar{\omega}_h, \\ z(0, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau, \\ z(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau, \end{cases}$$

где $\psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1-\sigma)u) - u_t + \varphi$ – погрешность аппроксимации разностной схемы (1.2) на решении задачи (1.1). Исследуем сеточную функцию ψ , придерживаясь для краткости системы обозначений, принятых в предыдущей главе: $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi + \Lambda(\sigma \hat{u} + (1-\sigma)u) - u_t = \varphi + \sigma \left[\hat{u}'' + \frac{h^2}{12} \hat{u}^{IV} + O(h^4) \right] + (1-\sigma) \left[u'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} + O(h^4) \right] - \\ &- \left(\dot{u} + \frac{\tau}{2} \ddot{u} + O(\tau^2) \right) = \varphi + \sigma \left[u'' + \tau \dot{u}'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} + O(\tau^2 + h^4) \right] + (1-\sigma) \left[u'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} + O(h^4) \right] - \\ &- \left(\dot{u} + \frac{\tau}{2} \ddot{u} + O(\tau^2) \right) = \varphi - f + \sigma \tau \dot{u}'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} - \frac{\tau}{2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^4) = \varphi - f + \sigma \tau \dot{u}'' + \frac{h^2}{12} (u'' - f'') - \end{aligned}$$

$$-\frac{\tau}{2}(\dot{u}'' + \dot{f}) + O(\tau^2 + h^4) = \varphi - f + \tau \dot{u}'' \cdot \left[\sigma - \frac{1}{2} + \frac{h^2}{12\tau} \right] - \frac{\tau}{2} \dot{f} - \frac{h^2}{12} f'' + O(\tau^2 + h^4).$$

При выполнении преобразований мы использовали следующие непосредственно из уравнения (1.1) равенства $\ddot{u} = \dot{u}'' + \dot{f}$ и $\dot{u}'' = u^{IV} + f''$.

Теперь при анализе выражения для погрешности необходимо учесть три возможные ситуации:

- 1) параметр σ – произвольное число (вообще говоря, не совпадающее ни с одним из значений, рассматриваемых ниже) (таким образом, мы выражение для погрешности оставляем «целиком»). Тогда, выбирая $\varphi = f + O(\tau + h^2)$, в случае, если решение исходной задачи принадлежит классу гладкости $C_2^4(\bar{D})$, получаем: $\psi = O(\tau + h^2)$;
- 2) $\tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) = \alpha h^2$ при некотором постоянном значении α , т.е. $\sigma = \frac{1}{2} + \alpha \frac{h^2}{\tau} = \sigma_\alpha$ (в выражении для погрешности мы слагаемые порядка τ «переводим» в слагаемые порядка h^2). Тогда, выбирая $\varphi = f + \frac{\tau}{2} \dot{f} + O(\tau^2 + h^2) = f\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) + O(\tau^2 + h^2)$, получаем: при $u \in C_3^4(\bar{D})$ и любом $\alpha = \text{const}$ $\psi = O(\tau^2 + h^2)$. Таким образом, имеем однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации по каждой из независимых переменных, частным случаем которого (при $\alpha = 0$) является схема Кранка-Николсона;
- 3) Наконец, $\tau\left(\sigma - \frac{1}{2} + \frac{h^2}{12\tau}\right) = 0$, т.е. $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma^*$ (таким образом, в погрешности мы «убираем» все слагаемые порядка $\tau + h^2$. Заметим, что можно было бы «перевести» их в $O(\tau^2 + h^4)$) и выбирая $\varphi = f + \frac{\tau}{2} \dot{f} + \frac{h^2}{12} f'' + O(\tau^2 + h^4)$ (например, $\varphi = f + \frac{\tau}{2} f_t + \frac{h^2}{12} f_{xx}$), получаем: при $u \in C_3^6(\bar{D})$ $\psi = O(\tau^2 + h^4)$.

1.1.2. Устойчивость рассматриваемого семейства по начальным данным

Так как разностная схема для погрешности приближенного решения $z = y - u$ имеет в случае задачи (1.1) однородные граничные условия, то исследование устойчивости будем проводить для разностной схемы

$$\begin{cases} y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (1.6)$$

Напомним, что разностная схема называется устойчивой, если для разностного решения справедлива оценка

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (1.7)$$

где M_1 и M_2 – положительные постоянные, не зависящие от τ и h , $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ – некоторые нормы на слое.

Пусть $\varphi = 0$. Тогда оценка

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)}, \quad t \in \omega_\tau \quad (1.8)$$

выражает устойчивость схемы (1.6) по начальным данным.

Если же $y(x, 0) = 0$, то неравенство

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad t \in \omega_\tau \quad (1.9)$$

выражает устойчивость схемы по правой части.

Само же неравенство (1.7) выражает устойчивость разностной схемы (1.6) и по начальным данным, и по правой части.

Для получения оценки (1.7) решение разностной схемы (1.6) представляют в виде суммы $y = \bar{y} + \bar{\bar{y}}$, где \bar{y} – решение однородного уравнения с ненулевым начальным условием, т.е.

$$\begin{cases} \bar{y}_t = \Lambda(\sigma \hat{\bar{y}} + (1 - \sigma)\bar{y}), & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \bar{y}(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ \bar{y}(0, t) = \bar{y}(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau, \end{cases} \quad (1.10)$$

а $\bar{\bar{y}}$ – решение неоднородного уравнения с нулевым начальным условием, т.е.

$$\begin{cases} \bar{\bar{y}}_t = \Lambda(\sigma \hat{\bar{\bar{y}}} + (1 - \sigma)\bar{\bar{y}}) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \bar{\bar{y}}(x, 0) = 0, & x \in \bar{\omega}_h, \\ \bar{\bar{y}}(0, t) = \bar{\bar{y}}(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau, \end{cases} \quad (1.11)$$

Для исследования устойчивости по начальным данным необходимо найти оценку для решения задачи (1.10). Решение данной задачи будем искать методом разделения переменных. При этом, учитывая, что граничные условия задачи нулевые, разложим его по собственным функциям оператора второй разностной производной (в этом – некоторое отличие от стандартного метода разделения переменных):

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t) \mu_k(x) \quad (1.12)$$

(напомним: $\mu_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x$).

Подставляя это разложение в (1.10), будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{N-1} (T_k)_t \mu_k = \sum_{k=1}^{N-1} [\sigma \hat{T}_k + (1 - \sigma) T_k] \Lambda \mu_k.$$

Отсюда, поскольку $\Lambda \mu_k = -\lambda_k \mu_k$, где $\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}$, следует (учитывая ортонормированность системы $\{\mu_k(x)\}$):

$$\frac{\hat{T}_k - T_k}{\tau} = -\lambda_k \left[\sigma \hat{T}_k + (1 - \sigma) T_k \right]$$

или

$$\hat{T}_k (1 + \sigma \lambda_k \tau) = T_k [1 - (1 - \sigma) \lambda_k \tau],$$

т.е.

$$\hat{T}_k = q_k T_k, \quad \text{где} \quad q_k = \frac{1 - (1 - \sigma) \lambda_k \tau}{1 + \sigma \lambda_k \tau}, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (1.13)$$

Ранее мы уже отмечали, что решение (1.10) вида $y_k = T_k \mu_k$ называют k -й *гармоникой*. Оно, очевидно, является решением (1.10) при начальном условии $u_0(x) = T_k^0 \mu_k(x)$. При этом, как это следует из признака спектральной устойчивости, если схема устойчива на каждой гармонике, то она устойчива в сеточном варианте нормы пространства L_2 по начальным данным. Устойчивость же на k -й гармонике будет иметь место при выполнении неравенства $|q_k| \leq 1$.

Учитывая (1.13) (из него непосредственно следует, что q_k — вещественное), получим: неравенство $q_k \leq 1$ последовательно дает:

$$1 - \frac{\lambda_k \tau}{1 + \sigma \lambda_k \tau} \leq 1, \quad 1 + \sigma \lambda_k \tau > 0 \quad \text{и, наконец,} \quad \sigma > -\frac{1}{\tau \lambda_k};$$

Аналогично преобразуем неравенство $q_k \geq -1$:

$$1 - \frac{\lambda_k \tau}{1 + \sigma \lambda_k \tau} \geq -1, \quad \frac{2(1 + \sigma \lambda_k \tau) - \tau \lambda_k}{1 + \sigma \lambda_k \tau} \geq 0.$$

Последнее неравенство с учетом полученной выше положительности знаменателя приводит к условию

$$2 + (2\sigma - 1) \lambda_k \tau \geq 0$$

или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda_k \tau}.$$

Поскольку для собственных значений λ_k справедлива оценка $\lambda_k \leq \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}$, то с ее учетом получаем:

$$-\frac{1}{\lambda_k \tau} \leq -\frac{1}{\lambda_{N-1} \tau} < -\frac{h^2}{4\tau}.$$

Следовательно, $|q_k| \leq 1$ для всех $k = \overline{1, N-1}$ при выполнении условия

$$\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}. \quad (1.14)$$

Таким образом, разностная схема (1.6) устойчива по начальным данным в сеточной норме $L_2(\omega_h)$ при выполнении условия (1.14).

Рассмотрим сейчас некоторые частные случаи:

1⁰. Явная схема ($\sigma = 0$). Условие (1.14) дает:

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau},$$

т.е.

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}.$$

Полученная связь между шагами пространственно-временной сетки означает условную устойчивость явной разностной схемы.

2⁰. Неявные схемы при $\sigma \geq \frac{1}{2}$ устойчивы при любых шагах τ и h , так как $\sigma \geq \frac{1}{2} > \sigma_0$. Таким образом, чисто неявная схема ($\sigma = 1$) и схема Кранка-Николсона абсолютно устойчивы.

3⁰. Схема повышенного порядка аппроксимации $\sigma = \sigma^* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ абсолютно устойчива, так как

$$\sigma^* - \sigma_0 = -\frac{h^2}{12\tau} + \frac{h^2}{4\tau} > 0.$$

4⁰. Неявные схемы с $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ при σ , не зависящем от $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$, условно устойчивы, так как из (1.14) в этом случае получаем:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2 - 4\sigma}.$$

5⁰. Неявные схемы с $\sigma = \sigma_\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\alpha h^2}{\tau}$, при любом постоянном α обладающие вторым порядком аппроксимации по обоим независимым переменным, будут абсолютно устойчивы при $\alpha \geq -\frac{1}{4}$.

Таким образом, параметр σ управляет не только порядком аппроксимации, но и устойчивостью разностной схемы (1.6).

1.1.3. Устойчивость рассматриваемого семейства по правой части

Рассмотрим сейчас неоднородную задачу с однородными граничными и начальными условиями (1.11).

Покажем, что условие (1.14) достаточно для устойчивости схемы (1.6) и по правой части при $\sigma \geq 0$ (т.е. для устойчивости задачи (1.11)).

Вновь будем искать решение в виде (1.12). Разлагая сеточную функцию φ по системе $\{\mu_k\}$ $\left(\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k(t) \mu_k(x) \right)$ и выполнив подстановку в (1.11) (для упрощения записи здесь будем полагать $\bar{y} = y$), получим:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left[(T_k)_t + \lambda_k \left(\sigma \hat{T}_k + (1 - \sigma) T_k \right) - \varphi_k \right] \mu_k = 0.$$

Отсюда

$$\hat{T}_k = q_k T_k + \frac{\tau \varphi_k}{1 + \sigma \lambda_k \tau}, \quad (1.15)$$

где q_k определяется по формуле (1.13).

Следовательно,

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k \mu_k = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k \mu_k + \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma \lambda_k \tau} \mu_k.$$

Из этого соотношения, пользуясь неравенством треугольника, получим:

$$\begin{aligned} \|\hat{y}\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k \mu_k \right\| + \tau \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma \lambda_k \tau} \mu_k \right\| = \left(\sum_{k=1}^{N-1} q_k^2 T_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \tau \left(\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\varphi_k}{1 + \sigma \lambda_k \tau} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq N-1} |q_k| \cdot \left(\sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \max_{1 \leq k \leq N-1} \frac{\tau}{|1 + \sigma \lambda_k \tau|} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

или

$$\|\hat{y}\| \leq \max_{1 \leq k \leq N-1} |q_k| \cdot \|y\| + \max_{1 \leq k \leq N-1} \frac{\tau}{|1 + \sigma \lambda_k \tau|} \cdot \|\varphi\|.$$

Если теперь одновременно выполняются условия $\sigma \geq \sigma_0$ и $\sigma \geq 0$, то $|q_k| \leq 1$ и $1 + \sigma \lambda_k \tau \geq 1$ для всех значений k . Поэтому

$$\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \tau \|\varphi\|.$$

Суммируя последнее неравенство по всем временным слоям от нулевого до j -го, получим неравенство

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y^0\| + \tau \sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\| = \tau \sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\| = \|\varphi\|_{\omega_{h\tau}},$$

выражающее устойчивость разностной схемы (1.6) по правой части.

Объединяя полученные результаты и учитывая, что решение разностной схемы (1.6) можно представить в виде суммы решений задач (1.10) и (1.11), получим:

Теорема 1. Если выполнены условия $\sigma \geq \sigma_0$ и $\sigma \geq 0$, то разностная схема (1.6) устойчива по начальным данным и по правой части, так что для ее решения справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u^0\| + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|. \quad (1.16)$$

На основании этой теоремы и теоремы Лакса получаем сходимость схемы (1.6) со скоростью, совпадающей с порядком аппроксимации.

Замечание. Если не требовать неотрицательности параметра σ , то можно показать, что условие устойчивости разностной схемы (1.6) примет вид

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau} \text{ при некотором } \varepsilon \in (0;1),$$

а вместо неравенства (1.16) получим неравенство

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u^0\| + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|.$$

Упражнение. Доказать соответствующее утверждение.

1.1.4. Устойчивость рассматриваемого семейства в равномерной метрике

Вначале с помощью принципа максимума исследуем устойчивость исходного семейства разностных схем с весами по начальным и граничным условиям. Полагая $\varphi = 0$, перепишем разностную схему в виде

$$\begin{cases} y_k^{j+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\sigma}{h^2} \right) = \frac{\sigma}{h^2} (y_{k+1}^{j+1} + y_{k-1}^{j+1}) + \frac{1-\sigma}{h^2} (y_{k+1}^j + y_{k-1}^j) + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2(1-\sigma)}{h^2} \right) y_k^j, & k = \overline{1, N-1}, \\ y_k^0 = u_0(x_k), & k = \overline{0, N}; \quad y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}); \quad y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}). \end{cases} \quad (1.17)$$

Отсюда видим, что условия принципа максимума выполняются, если

$$\sigma \in [0;1] \text{ и } \frac{1}{\tau} - \frac{2(1-\sigma)}{h^2} \geq 0, \quad (1.18)$$

т.е. при $\sigma \geq 1 - \frac{h^2}{2\tau}$ (или при $\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)}$). При этом согласно следствию 3 из принципа максимума справедлива оценка

$$\|y\|_{C_{\bar{\omega}_{h\tau}}} \leq \|u_0\|_{C_{\bar{\omega}_h}} + \|\mu_0\|_{C_{\bar{\omega}_\tau}} + \|\mu_1\|_{C_{\bar{\omega}_\tau}},$$

которая означает, что исходная разностная схема при выполнении условия (1.18) устойчива по начальным данным и граничным условиям.

Теперь исследуем устойчивость по правой части. Для этого, полагая $\mu_0(t) = 0$, $\mu_1(t) = 0$, $u_0(x) = 0$, перепишем схему в виде

$$(1 + 2\sigma\gamma)y_k^{j+1} = \sigma\gamma(y_{k+1}^{j+1} + y_{k-1}^{j+1}) + (1-\sigma)\gamma(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j) + [1 - 2(1-\sigma)\gamma]y_k^j + \tau\varphi_k^j.$$

Отсюда при выполнении условий (1.18) имеем: для всех значений $k = \overline{1, N-1}$

$$(1 + 2\sigma\gamma)|y_k^{j+1}| \leq \sigma\gamma|y_{k+1}^{j+1} + y_{k-1}^{j+1}| + (1-\sigma)\gamma|y_{k+1}^j + y_{k-1}^j| + [1 - 2(1-\sigma)\gamma]|y_k^j| + \tau|\varphi_k^j|.$$

Рассматривая данное неравенство при некотором k_0 таком, что $\|y\|_{C_{\bar{\omega}_h}} = |y_{k_0}|$, получим:

$$(1 + 2\sigma\gamma)\|y^{j+1}\|_{C_{\bar{\omega}_h}} \leq \sigma\gamma|y_{k_0+1}^{j+1} + y_{k_0-1}^{j+1}| + (1-\sigma)\gamma|y_{k_0+1}^j + y_{k_0-1}^j| + [1 - 2(1-\sigma)\gamma]|y_{k_0}^j| + \tau|\varphi_{k_0}^j| \leq$$

$$\leq 2\sigma\gamma\|y^{j+1}\|_{C_{\bar{\omega}_h}} + 2(1-\sigma)\gamma\|y^j\|_{C_{\bar{\omega}_h}} + [1-2(1-\sigma)\gamma]\|y^j\|_{C_{\bar{\omega}_h}} + \tau\|\varphi^j\|_{C_{\bar{\omega}_h}}.$$

Приводя подобные, имеем оценку:

$$\|y^{j+1}\|_{C_{\bar{\omega}_h}} \leq \|y^j\|_{C_{\bar{\omega}_h}} + \tau\|\varphi^j\|_{C_{\bar{\omega}_h}} \leq \|y^0\|_{C_{\bar{\omega}_h}} + \tau(j+1)\|\varphi\|_{C_{\bar{\omega}_h\tau}} \leq T\|\varphi\|_{C_{\bar{\omega}_h\tau}}.$$

Таким образом, исходная разностная схема при выполнении условия $\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)}$ устойчива в равномерной метрике по всем входным данным и, значит, равномерно сходится с той же скоростью, что и в $L_2(\bar{\omega}_{h\tau})$.

Отметим, что условия устойчивости в $\|\cdot\|_{C_{\bar{\omega}}}$ и в $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}$ совпадают только в двух случаях: при $\sigma = 0$ схема устойчива при $\tau \leq \frac{h^2}{2}$, а при $\sigma = 1$ – абсолютно устойчива. В то же время, например, схема Кранка-Николсона в $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}$ абсолютно устойчива, а в $\|\cdot\|_{C_{\bar{\omega}}}$ – лишь при условии $\tau \leq h^2$.

1.1.5. Краевые условия третьего рода

Краевые условия первого рода, которые мы рассматривали до сих пор, удовлетворяются на сетке $\bar{\omega}_h$ точно.

Пусть теперь при $x = 0$ задано краевое условие третьего рода

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta_0 u(0,t) - \mu_0(t), \quad \beta_0 = \text{const} > 0. \quad (1.19)$$

Ранее (см. Пример 4, § 6, глава XV, курс «Методы численного анализа») мы показывали, как путем повышения порядка аппроксимации построить разностные краевые условия с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$ для некоторых частных случаев схемы с весами. В частности там (см. (6.15)) была получена аппроксимация вида

$$\hat{y}_x(0,t) = \beta_0 \hat{y}(0,t) + \frac{h}{2} y_t(0,t) - \tilde{\mu}_0(t) \quad (1.20)$$

с соответствующим выбором сеточной функции $\tilde{\mu}_0(t)$.

Легко видеть, что аналогичным порядком будет обладать и аппроксимация

$$y_x(0,t) = \beta_0 y(0,t) + \frac{h}{2} y_t(0,t) - \tilde{\mu}_0(t). \quad (1.21)$$

Опишем сейчас общий подход к построению однопараметрического семейства разностных аппроксимаций условия (1.19). Как и при построении рассматриваемого семейства разностных схем с весами, составим линейную комбинацию аппроксимаций (1.20) и (1.21) с коэффициентами σ и $(1-\sigma)$ соответственно. Тогда на четырехточечном шаблоне $III = \{(0, t_{j+1}), (h, t_{j+1}), (0, t_j), (h, t_j)\}$ получим следующее разностное краевое условие:

$$y_x^{(\sigma)}(0, t) = \beta_0 y^{(\sigma)}(0, t) + \frac{h}{2} y_t(0, t) - \tilde{\mu}_0(t), \quad (1.22)$$

где использовано обозначение $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y$. Исследуем погрешность аппроксимации условия (1.22):

$$\nu(0, t) = u_x^{(\sigma)}(0, t) - \beta_0 u^{(\sigma)}(0, t) - \frac{h}{2} u_t(0, t) + \tilde{\mu}_0(t).$$

Так как

$$\begin{aligned} u^{(\sigma)}(0, t) &= \sigma u(0, t + \tau) + (1 - \sigma)u(0, t) = \sigma \left[u(0, t) + \tau \dot{u}(0, t) + O(\tau^2) \right] + (1 - \sigma)u(0, t) = \\ &= u(0, t) + \sigma \tau \dot{u}(0, t) + O(\tau^2), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} u_x^{(\sigma)}(0, t) &= u'(0, t) + \frac{h}{2} u''(0, t) + \frac{h^2}{6} u'''(0, t) + \frac{h^3}{24} u^{IV}(0, t) + O(h^4) + \\ &+ \sigma \tau \left[\dot{u}'(0, t) + \frac{h}{2} \dot{u}''(0, t) + O(h^2) \right] + O(\tau^2) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \nu(0, t) &= u'(0, t) + \frac{h}{2} u''(0, t) + \frac{h^2}{6} u'''(0, t) + \frac{h^3}{24} u^{IV}(0, t) + O(h^4) + \sigma \tau \left[\dot{u}'(0, t) + \frac{h}{2} \dot{u}''(0, t) + O(h^2) \right] + \\ &+ O(\tau^2) - \beta_0 \left[u(0, t) + \sigma \tau \dot{u}(0, t) + O(\tau^2) \right] - \frac{h}{2} \left[\dot{u}(0, t) + \frac{\tau}{2} \ddot{u}(0, t) + O(\tau^2) \right] + \tilde{\mu}_0(t). \end{aligned}$$

Теперь, используя исходное уравнение (1.1) и условие (1.19), найдем:

$$\begin{aligned} u'(0, t) &= \beta_0 u(0, t) - \mu_0(t), \\ u''(0, t) &= \dot{u}(0, t) - f(0, t), \\ u'''(0, t) &= \dot{u}'(0, t) - f'(0, t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\beta_0 u(0, t) - \mu_0(t)) - f'(0, t) = \beta_0 \dot{u}(0, t) - \dot{\mu}_0(t) - f'(0, t), \\ u^{IV}(0, t) &= \dot{u}''(0, t) - f''(0, t), \\ \ddot{u}(0, t) &= \dot{u}''(0, t) + \dot{f}(0, t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \nu(0, t) &= \tilde{\mu}_0(t) + \beta_0 u(0, t) - \mu_0(t) + \frac{h}{2} \left[\dot{u}(0, t) - f(0, t) \right] + \frac{h^2}{6} \left[\beta_0 \dot{u}(0, t) - \dot{\mu}_0(t) - f'(0, t) \right] + \\ &+ \frac{h^3}{24} \left[\dot{u}''(0, t) - f''(0, t) \right] + \sigma \tau \left[\beta_0 \dot{u}(0, t) - \dot{\mu}_0(t) \right] + \sigma \tau \frac{h}{2} \dot{u}''(0, t) - \beta_0 u(0, t) - \beta_0 \sigma \tau \dot{u}(0, t) - \\ &- \frac{h}{2} \dot{u}(0, t) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{h}{2} \left[\dot{u}''(0, t) + \dot{f}(0, t) \right] + O(\tau^2 + h^4) = \tilde{\mu}_0(t) - \mu_0(t) - \frac{h}{2} f(0, t) - \sigma \tau \dot{\mu}_0(t) + \end{aligned}$$

$$+\frac{h^2}{6}\beta_0\dot{u}(0,t)-\frac{h^2}{6}\dot{\mu}_0(t)-\frac{h^2}{6}f'(0,t)-\frac{h^3}{24}f''(0,t)+\tau\frac{h}{2}\left(\frac{h^2}{12\tau}+\sigma-\frac{1}{2}\right)\dot{u}''(0,t)-$$

$$-\frac{\tau}{2}\cdot\frac{h}{2}\dot{f}(0,t)+O(\tau^2+h^4).$$

Отсюда видим, что возможны следующие ситуации:

- 1) при произвольном значении σ и $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t)$ следует: $\nu(0,t) = O(\tau + h^2)$;
- 2) при произвольном значении σ и $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \sigma\tau\dot{\mu}_0(t)$ следует: $\nu(0,t) = O(\tau^2 + h^2)$;
- 3) при $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma^*$ и

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_0(t) &= \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \left(\sigma\tau + \frac{h^2}{6}\right)\dot{\mu}_0(t) - \frac{h^2}{6}\beta_0y_t(0,t) + \frac{h^2}{6}f'(0,t) + \frac{h^3}{24}f''(0,t) + \frac{\tau h}{4}\dot{f}(0,t) = \\ &= \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{h^2}{12}\right)\dot{\mu}_0(t) - \frac{h^2}{6}\beta_0y_t(0,t) + \frac{h^2}{6}f'(0,t) + \frac{h^3}{24}f''(0,t) + \frac{\tau h}{4}\dot{f}(0,t) = \\ &= \bar{\mu}_0(t) - \frac{h^2}{6}\beta_0y_t(0,t)\end{aligned}$$

следует: $\nu(0,t) = O(\tau^2 + h^4)$.

Таким образом, разностное граничное условие с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$ или $O(\tau^2 + h^2)$ имеет вид (1.22) с указанными в п.п. 1)-2) значениями $\tilde{\mu}_0(t)$, а условие с порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^4)$ выглядит следующим образом:

$$y_x^{(\sigma)}(0,t) = \beta_0y^{(\sigma)}(0,t) + \frac{h}{2}\left(1 + \beta_0\frac{h}{3}\right)y_t(0,t) - \bar{\mu}_0(t), \quad (1.23)$$

где $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma^*$ и

$$\bar{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{h^2}{12}\right)\dot{\mu}_0(t) + \frac{h^2}{6}f'(0,t) + \frac{h^3}{24}f''(0,t) + \frac{\tau h}{4}\dot{f}(0,t). \quad (1.24)$$

По аналогии можно записать соответствующие аппроксимации для краевого условия третьего рода при $x = 1$

$$-\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \beta_1u(1,t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 = \text{const} > 0. \quad (1.25)$$

Эти аппроксимации имеют либо вид (σ – любое)

$$-y_x^{(\sigma)}(1,t) = \beta_1y^{(\sigma)}(1,t) + \frac{h}{2}y_t(1,t) - \tilde{\mu}_1(t), \quad (1.26)$$

с $\tilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h}{2}f(1,t)$ для $\nu(1,t) = O(\tau + h^2)$ либо $\tilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h}{2}f(1,t) + \sigma\tau\dot{\mu}_1(t)$ для $\nu(1,t) = O(\tau^2 + h^2)$ соответственно, либо

$$-y_x^{(\sigma)}(1,t) = \beta_1 y^{(\sigma)}(1,t) + \frac{h}{2} \left(1 + \beta_1 \frac{h}{3} \right) y_t(1,t) - \bar{\mu}_1(t), \quad (1.27)$$

где $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma^*$ и

$$\bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h}{2} f(1,t) + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \dot{\mu}_1(t) + \frac{h^2}{6} f'(1,t) + \frac{h^3}{24} f''(1,t) + \frac{\tau h}{4} \dot{f}(1,t). \quad (1.28)$$

При $\beta_0 = \beta_1 = 0$ имеем краевые условия второго рода. Порядок аппроксимации при этом, очевидно, сохраняется.

Устойчивость разностной схемы (1.2) с краевыми условиями третьего рода может быть исследована любым из рассмотренных нами ранее способов.

1.2. Трехслойные разностные схемы для задачи (1.1)

Одной из исторически первых разностных схем, применявшихся для численного решения уравнения теплопроводности, была явная трехслойная *схема Ричардсона*

$$\begin{cases} y_i = y_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi, & (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t), & t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y(1,t) = \mu_1(t), & t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (1.29)$$

Легко видеть, что данная схема имеет второй порядок аппроксимации по обоим независимым переменным: $\psi = \Lambda u - u_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi = O(\tau^2 + h^2)$, а также требует специальной организации вычислений (которой мы коснемся немного позже) на *первом* слое.

В то же время метод разделения переменных, примененный к разностному уравнению с $\varphi \equiv 0$ дает:

$$\frac{\hat{T}_k - \tilde{T}_k}{2\tau} + \lambda_k T_k = 0$$

или

$$\hat{T}_k + 2\tau\lambda_k T_k - \tilde{T}_k = 0.$$

Здесь мы имеем для определения T_k разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Отыскивая его частные решения в виде $T_k = q_k$, получим для q_k уравнение (характеристическое)

$$q_k^2 + 2\tau\lambda_k q_k - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$(q_k)_{1,2} = -\tau\lambda_k \pm \sqrt{1 + \tau^2 \lambda_k^2}.$$

Отсюда видим, что один из этих корней (конкретно $q_k = -\tau\lambda_k - \sqrt{1 + \tau^2 \lambda_k^2}$) всегда по модулю больше единицы.

Таким образом, разностная схема Ричардсона (1.29) абсолютно (при любом постоянном значении отношения $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$) неустойчива.

Расписывая схему в индексной форме

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j,$$

заменяем в правой части уравнения (по аналогии с тем, как мы это уже делали в одной из абсолютно неустойчивых схем для уравнения переноса) слагаемое $2y_i^j$ суммой значений на двух соседних временных слоях, т.е. $2y_i^j \sim y_i^{j+1} + y_i^{j-1}$. В результате получим трехслойную схему «ромб» (схему Дюфорта и Франкела):

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^j - y_i^{j+1} - y_i^{j-1} + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j \quad (1.30)$$

(граничные и начальные условия остаются теми же, что и в (1.29)).

Схема по-прежнему остается явной, так как содержит только одну точку на верхнем временном слое.

Прежде чем исследовать устойчивость и аппроксимацию схемы (1.30), перепишем ее в несколько ином виде:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} - \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{h^2} + \varphi_i^j$$

или

$$y_i + \frac{\tau^2}{h^2} y_{ii} = y_{xx} + \varphi. \quad (1.31)$$

Теперь, применяя метод разделения переменных, получим ($\varphi \equiv 0$) уравнение, связывающее коэффициенты T_k на трех временных слоях:

$$\frac{\hat{T}_k - \tilde{T}_k}{2\tau} + \frac{\tau^2}{h^2} \frac{\hat{T}_k - 2T_k + \tilde{T}_k}{\tau^2} + \lambda_k T_k = 0$$

или

$$\left(1 + \frac{h^2}{2\tau}\right) \hat{T}_k - (2 - \lambda_k h^2) T_k + \left(1 - \frac{h^2}{2\tau}\right) \tilde{T}_k = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение

$$f(q_k) \equiv \left(1 + \frac{h^2}{2\tau}\right) q_k^2 - (2 - \lambda_k h^2) q_k + \left(1 - \frac{h^2}{2\tau}\right) = 0. \quad (1.32)$$

Отсюда видим, что в случае отрицательного дискриминанта уравнение имеет комплексно-сопряженную пару корней, модули которых одинаковы и меньше единицы, так как произ-

ведение их $q_{k,1} \cdot q_{k,2} = \frac{1 - \frac{h^2}{2\tau}}{1 + \frac{h^2}{2\tau}}$, очевидно, меньше единицы.

Если же $D \geq 0$, то достаточно проверить условия $f(1) > 0$ и $f(-1) > 0$, т.е.

$$\begin{cases} 1 + \frac{h^2}{2\tau} - (2 - \lambda_k h^2) + 1 - \frac{h^2}{2\tau} > 0, \\ 1 + \frac{h^2}{2\tau} + (2 - \lambda_k h^2) + 1 - \frac{h^2}{2\tau} > 0. \end{cases}$$

Записанная система неравенств после приведения подобных переписывается в виде

$$\begin{cases} \lambda_k h^2 > 0, \\ 4 - \lambda_k h^2 > 0. \end{cases}$$

Оба последних неравенства, очевидно, выполняются.

Таким образом, при любых τ и h оба корня уравнения (1.32) по модулю меньше единицы, т.е. схема (1.30) безусловно устойчива.

В то же время

$$\begin{aligned} \psi &= u_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi - u_i - \frac{\tau^2}{h^2} u_{\bar{i}\bar{i}} = u'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} + O(h^4) + \varphi - \dot{u} + O(\tau^2) - \frac{\tau^2}{h^2} \ddot{u} + O\left(\frac{\tau^4}{h^2}\right) = \\ &= \varphi - f + O\left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^4}{h^2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что исследуемая разностная схема имеет *условную аппроксимацию*.

Как уже отмечалось выше, для расчетов необходимо вычислить значения на первом слое. Для этих целей можно воспользоваться какой-либо устойчивой двухслойной схемой (с порядком, согласованным с порядком (1.30)), либо, например, соотношением

$$y(x, \tau) = u_0(x) + \tau(u_0''(x) + f(x, 0)) + \frac{\tau^2}{2}(u_0^{IV}(x) + \dot{f}(x, 0) + f''(x, 0)).$$

Помимо указанных здесь схем, используют также и неявные трехслойные схемы, например, однопараметрическое семейство

$$(1 + \theta)y_i - \theta y_{\bar{i}} = \hat{y}_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi. \quad (1.33)$$

Упражнение. Исследовать свойства аппроксимации и устойчивости схемы (1.33).

1.3. Схемы бегущего счета

Как уже показано выше, классические явные схемы значительно слабее неявных по свойствам устойчивости. Поэтому было проведено достаточно большое количество исследований, имеющих целью избавиться от этого недостатка. Один из результатов – схему «ромб» – мы рассмотрели в предыдущем пункте.

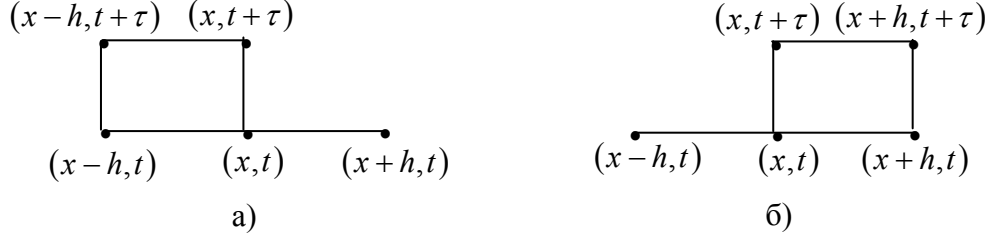
В.К. Саулевым были предложены два однопараметрических семейства двухслойных разностных схем вида

$$y_i + \frac{\alpha\tau}{h} y_{\bar{i}\bar{x}} = y_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi \quad (1.34)$$

и

$$y_t - \frac{\alpha\tau}{h} y_{tx} = y_{xx} + \varphi. \quad (1.35)$$

Обе схемы являются пятиточечными. Первая из них записывается на шаблоне а), а вторая – на шаблоне б). Несмотря на наличие на верхнем временном слое двух точек,



обе схемы по организации вычислений являются, по сути, явными. Покажем порядок заполнения $(j+1)$ -го временного слоя по первой из них.

Расписывая (1.34) в индексной форме, имеем:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + \frac{\alpha\tau}{h} \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1} - y_i^j + y_{i-1}^j}{\tau h} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j. \quad (1.36)$$

Отсюда, разрешая данное уравнение относительно y_i^{j+1} , получим следующее правило заполнения очередного временного слоя (в случае первой краевой задачи):

$$\begin{aligned} y_0^{j+1} &= \mu_0(t_{j+1}); \\ y_i^{j+1} &= \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} y_{i-1}^{j+1} + \frac{\gamma}{1+\alpha\gamma} y_{i+1}^j + \frac{1+(\alpha-2)\gamma}{1+\alpha\gamma} y_i^j + \frac{(1-\alpha)\gamma}{1+\alpha\gamma} y_{i-1}^j + \frac{\tau}{1+\alpha\gamma} \varphi_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}; \\ y_N^{j+1} &= \mu_1(t_{j+1}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Таким образом, расчет по данной схеме ведется от левой границы к правой. Заметим также, что в случае задания на левой границе условия не первого рода необходимо для «старта» средней из формул (1.37) предварительно решить совместно уравнения (1.36) при $i=1$ и уравнение, аппроксимирующее левое граничное условие.

Упражнение. Получить соответствующие расчетные формулы.

Аналогично изложенному выше могут быть получены формулы, реализующие разностную схему (1.35) с той лишь разницей, что в этом случае меняется на противоположное направление расчетов при заполнении очередного временного слоя: от правой границы к левой.

Упражнение. Построить соответствующий алгоритм.

Несложно видеть, что наличие дополнительного слагаемого в левой части (которое, собственно, и отличает схему от стандартной явной схемы) ухудшает аппроксимацию. Действительно, например, для схемы (1.34) имеем:

$$\psi = \varphi + u_{xx} - u_t - \frac{\alpha\tau}{h} u_{tx} = \varphi + u'' + O(h^2) - \dot{u} + O(\tau) - \frac{\alpha\tau}{h} \left(\dot{u}' + O(\tau + h) \right) = O\left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} \right)$$

при соответствующем выборе сеточной функции φ .

Таким образом, схемы (1.34), (1.35), как и схема Дюфорта и Франкела, являются схемами с *условной аппроксимацией*.

В то же время, исследование устойчивости, например, схемы (1.34) дает следующий результат. Схема имеет канонический вид

$$By_t + Ay = \varphi,$$

где

$$By = y + \frac{\alpha\tau}{h} y_{\bar{x}}, \quad A = -\Lambda.$$

Тогда, согласно критерию устойчивости двухслойных разностных схем схема (1.34) будет устойчива при выполнении неравенства

$$B \geq \frac{\tau}{2} A$$

или

$$(By, y) \geq \frac{\tau}{2} (Ay, y)$$

для произвольной сеточной функции y .

Оператор B не является самосопряженным. Но так как

$$y_{\bar{x}} = y_{\dot{x}} - \frac{h}{2} y_{xx} = y_{\dot{x}} + \frac{h}{2} Ay$$

и

$$\left(y_{\dot{x}}, y \right) = h \sum_{i=1}^{N-1} y_{\dot{x},i} y_i = 0$$

(проверьте (!) это равенство. Такой оператор называют *кососимметричным*), то

$$(By, y) = (y, y) + \frac{\alpha\tau}{h} \cdot \frac{h}{2} (Ay, y)$$

и, следовательно, условие устойчивости примет вид

$$(y, y) + \frac{\alpha\tau}{2} (Ay, y) \geq \frac{\tau}{2} (Ay, y). \quad (1.38)$$

Отсюда, в частности, видно, что при $\alpha \geq 1$ это неравенство заведомо выполняется, т.е. при $\alpha \geq 1$ схема (1.34) будет безусловно устойчивой в сеточной W_2^1 -норме. В то же время, из (1.38) можно получить более слабое условие. Для этого следует воспользоваться одной из теорем вложения. Для сеточной функции y , обращающейся в нуль на границе, справедливо неравенство (см. (7.21), Глава XV, «Методы численного анализа»)

$$\|y\|^2 \geq \frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2 = \frac{h^2}{4} (Ay, y).$$

С учетом этого неравенства получаем:

$$(y, y) + \frac{\alpha\tau}{2} (Ay, y) \geq \frac{h^2}{4} (Ay, y) + \frac{\alpha\tau}{2} (Ay, y) \geq \frac{\tau}{2} (Ay, y).$$

Отсюда следует: последнее неравенство выполняется для всех сеточных функций u , если

$$\frac{h^2}{4} + \frac{\alpha\tau}{2} \geq \frac{\tau}{2}$$

т.е.

$$\alpha \geq 1 - \frac{h^2}{2\tau}. \quad (1.39)$$

(1.39) и есть максимально слабое условие устойчивости разностной схемы (1.39).

Упражнение. Показать, что разностная схема (1.35) также устойчива при выполнении условия (1.39).

1.4. Асимптотическая устойчивость

Выше мы рассмотрели различные подходы к ослаблению условия устойчивости. Но в конечном итоге нас в большей степени интересует точность, с которой мы находим приближенное решение дифференциального уравнения. Понятно стремление добиться заданной точности с минимальными затратами, что может быть достигнуто за счет усовершенствования разностных схем. Причем естественным направлением совершенствования схем является направление, связанное с углублением уровня согласования свойств разностной схемы и исходной дифференциальной задачи.

Одним из таких важных свойств является асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение решения дифференциального уравнения.

Поясним это на примере задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

где $X_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x$ – собственные функции, а $\lambda_k = k^2 \pi^2$ – собственные значения оператора второй производной. При этом, так как собственные функции образуют ортонормированную систему, то

$$\|u(x, t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-2\lambda_k t}$$

и, поскольку собственные значения упорядочены по возрастанию, то

$$\|u(x, t)\|^2 \leq e^{-2\lambda_1 t} \|u_0\|^2,$$

т.е. для решения задачи (1.40) верна оценка

$$\|u(x, t)\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|u(x, 0)\| \text{ при всех } t > 0. \quad (1.41)$$

С ростом t гармоники $u^{(k)} = c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x)$ при $k > 1$ затухают быстрее, чем первая, так что при достаточно больших t имеем:

$$u(x, t) \approx c_1 e^{-\lambda_1 t} X_1(x), \quad c_1 \neq 0. \quad (1.42)$$

Эта стадия процесса называется **регулярным режимом**.

Будем требовать, чтобы решение разностной схемы, аппроксимирующей задачу (1.40), также обладало свойствами (1.41) и (1.42). В этом случае разностную схему будем называть **асимптотически устойчивой**.

Обратимся к схеме с весами, рассмотренной нами выше. Решение разностной задачи было найдено методом разделения переменных и имело вид

$$y(x, t_j) = \sum_{k=1}^{N-1} C_k q_k^j \mu_k(x),$$

где

$$q_k = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}, \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}, \quad \mu_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x.$$

При этом

$$\|y^j\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} C_k^2 q_k^{2j} \leq \rho^{2j} \|y^0\|^2,$$

т.е.

$$\|y^j\| \leq \rho^j \|y^0\|,$$

где

$$\rho = \max_{1 \leq k \leq N-1} |q_k|.$$

При выполнении последнего неравенства разностную схему называют **ρ -устойчивой**.

Оценка вида (1.41) возможна, если $\rho < 1$. Найдем сейчас условия, при которых решение y^j разностной схемы с весами (1.2) выходит на регулярный режим вида (1.42), т.е.

$$y^j \approx C_1 q_1^j \mu_1(x).$$

Очевидно, это возможно лишь в том случае, когда $\max_{1 \leq k \leq N-1} |q_k|$ достигается при $k = 1$, т.е.

$$\rho = \left| \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_1}{1 + \sigma\tau\lambda_1} \right|.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \left(\frac{1 - (1 - \sigma)z_1}{1 + \sigma z_1} \right)^2 - \left(\frac{1 - (1 - \sigma)z}{1 + \sigma z} \right)^2, \quad z = \tau\lambda_k \geq \tau\lambda_1 = z_1$$

и потребуем, чтобы при всех $z \geq z_1$ эта функция принимала только неотрицательные значения. Имеем:

$$f(z) = \frac{f_1(z) \cdot f_2(z)}{K},$$

где

$$K = (1 + \sigma z_1)^2 (1 + \sigma z)^2 > 0,$$

$$f_1(z) = (1 - (1 - \sigma)z_1)(1 + \sigma z) - (1 - (1 - \sigma)z)(1 + \sigma z_1) = z - z_1 \geq 0,$$

$$f_2(z) = (1 - (1 - \sigma)z_1)(1 + \sigma z) + (1 - (1 - \sigma)z)(1 + \sigma z_1) = 2 + (2\sigma - 1)(z + z_1) - 2(1 - \sigma)\sigma z z_1.$$

Отсюда видно, что:

при $\sigma = 1$ $f_2(z) = 2 + z + z_1$ и следовательно, $f_2(z) > 0$ при всех τ ;

при $\sigma = 0$ $f_2(z) = 2 - (z + z_1) \geq 2 - \tau(\lambda_{N-1} + \lambda_1)$. Поэтому неравенство $f_2(z) \geq 0$ выполняется,

$$\text{если } \tau \leq \tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_{N-1}};$$

при $\sigma = \frac{1}{2}$ $f_2(z) = 2 - \frac{1}{2}zz_1 \geq 2 - \frac{1}{2}\tau^2\lambda_1\lambda_{N-1}$. Теперь неравенство $f_2(z) \geq 0$ приводит к огра-

$$\text{ничению } \tau \leq \tau_1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1\lambda_{N-1}}}.$$

Таким образом, схема с опережением безусловно асимптотически устойчива, симметричная схема асимптотически устойчива, если $\tau \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_1\lambda_{N-1}}} = \frac{2}{\frac{4}{h^2} \sin \frac{\pi h}{2} \cos \frac{\pi h}{2}} =$

$$= \frac{h^2}{\sin \pi h} \approx \frac{h}{\pi}; \text{ условие же асимптотической устойчивости явной схемы совпадает с усло-}$$

$$\text{вием ее обычной устойчивости, так как } \lambda_1 + \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{\pi h}{2} + \cos^2 \frac{\pi h}{2} \right) = \frac{4}{h^2}.$$

Несложные выкладки позволяют также установить недостаточную **точность** схемы с опережением при достаточно больших τ (т.е. фактически величину погрешности при аппроксимации функции $e^{-\lambda_1 \tau}$ посредством функции $\rho = \frac{1}{1 + \tau \lambda_1}$). Это говорит о том,

что при больших τ схему с опережением, несмотря на ее безусловную асимптотическую устойчивость, использовать нецелесообразно (для других же рассмотренных выше разностных схем это следует из наличия ограничений сверху на величину τ).

1.4.1. Безусловно асимптотически устойчивая схема второго порядка

Сказанное выше свидетельствует о том, что имеет смысл заняться поисками разностных схем, обладающих свойством безусловной асимптотической устойчивости и более высоким по сравнению со схемой опережения порядком аппроксимации.

Одна из таких схем имеет вид

$$\begin{cases} \left(E - \frac{1}{2} \sigma \tau \Lambda \right) \frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} = \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \right) \Lambda y^j, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{1}{2} \sigma \Lambda y^{j+1}, \end{cases} \quad (1.43)$$

где $y^{j+\frac{1}{2}}$ – промежуточный временной слой.

При $i = 0$ и $i = N$ заданы нулевые граничные условия:

$$y_0^{j+\frac{1}{2}} = y_N^{j+\frac{1}{2}} = 0, \quad y_0^{j+1} = y_N^{j+1} = 0.$$

Найдем значение параметра σ , при котором схема имеет второй порядок аппроксимации. Для этого вначале исключим промежуточный слой $y^{j+\frac{1}{2}}$. Перепишем (1.43), оставив в левой части каждого из уравнений только неизвестные:

$$\begin{cases} \left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)y^{j+\frac{1}{2}} = (E + \tau(1-\sigma)\Lambda)y^j, \\ \left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)y^{j+1} = y^{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Теперь применим ко второму уравнению оператор $E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda$ (уравниваем операторные коэффициенты при $y^{j+\frac{1}{2}}$ в первом и втором уравнении):

$$\begin{cases} \left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)y^{j+\frac{1}{2}} = (E + \tau(1-\sigma)\Lambda)y^j, \\ \left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)^2 y^{j+1} = \left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)y^{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Отсюда получаем разностную схему, не содержащую промежуточного временного слоя:

$$\left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)^2 \hat{y} = (E + \tau(1-\sigma)\Lambda)y. \quad (1.44)$$

Так как $\hat{y} = y + \tau y_t$, то последнее равенство может быть переписано в виде

$$\left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)^2 y + \tau \left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)^2 y_t = (E + \tau(1-\sigma)\Lambda)y$$

или, после приведения подобных,

$$\left(E - \frac{\sigma\tau}{2}\Lambda\right)^2 y_t = \left(\Lambda - \frac{\sigma^2\tau}{4}\Lambda^2\right)y.$$

Найдем теперь погрешность аппроксимации:

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda u - \frac{\sigma^2\tau}{4}\Lambda^2 u - u_t + \sigma\tau\Lambda u_t - \frac{\sigma^2\tau^2}{4}\Lambda^2 u_t = \\ &= u'' + O(h^2) - \frac{\sigma^2\tau}{4}(u^{IV} + O(h^2)) - \left(\dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + O(\tau^2)\right) + \sigma\tau\left(\dot{u}'' + O(\tau + h^2)\right) + O(\tau^2) = \\ &= \left[\ddot{u} = \dot{u}'; \quad u^{IV} = \dot{u}''\right] = -\frac{\tau}{4}(\sigma^2 - 4\sigma + 2)\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Теперь видим, что $\psi = O(\tau^2 + h^2)$, если $\sigma^2 - 4\sigma + 2 = 0$, т.е. $\sigma = 2 - \sqrt{2}$ (выбираем значение, принадлежащее промежутку $[0; 1]$).

Найдем теперь решение граничной задачи методом разделения переменных. Полагая

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t) \mu_k(x)$$

и подставляя это выражение в (1.44), имеем:

$$\left(1 + \frac{\sigma \tau \lambda_k}{2}\right)^2 \hat{T}_k = (1 - (1 - \sigma) \tau \lambda_k) T_k,$$

т.е. $\hat{T}_k = q_k T_k$, где $q_k = \frac{1 - (1 - \sigma) \tau \lambda_k}{\left(1 + \frac{\sigma \tau \lambda_k}{2}\right)^2}$.

Покажем, что $\max_{1 \leq k \leq N-1} |q_k|$ достигается при $k = 1$.

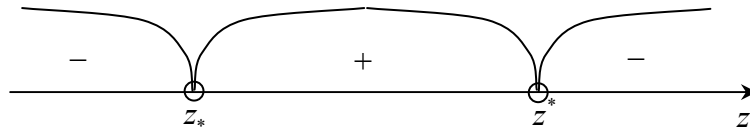
Как и ранее, рассмотрим функцию

$$f(z) = \left[\frac{1 - (1 - \sigma)z}{\left(1 + \frac{\sigma}{2}z\right)^2} \right]^2 = \omega^2(z).$$

Вычислим ее производную. Так как $\omega'(z) = \frac{-1 + \frac{\sigma}{2}(1 - \sigma)z}{\left(1 + \frac{\sigma}{2}z\right)^3}$, то

$$f'(z) = 2\omega(z) \cdot \omega'(z) = -2 \cdot \frac{1 - (1 - \sigma)z}{\left(1 + \frac{\sigma}{2}z\right)^2} \cdot \frac{1 - \frac{\sigma}{2}(1 - \sigma)z}{\left(1 + \frac{\sigma}{2}z\right)^3}.$$

Отсюда видно, что $f'(z) = 0$ либо при $z = z_* = \frac{1}{1 - \sigma}$, либо при $z = z^* = \frac{2}{\sigma(1 - \sigma)}$. При значении $\sigma = 2 - \sqrt{2}$ $z_* = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ и $z^* = \frac{2}{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)^2 > z_*$. Поэтому распределение знаков производной выглядит следующим образом:



Следовательно, наибольшее значение функция $f(z)$ может принимать либо при $z = z^*$, либо при $z = z_1 (= \tau \lambda_1)$. Найдем $f(z^*)$. Так как

$$\begin{aligned}\omega(z^*) &= \frac{1 - \frac{2}{\sigma}}{\left(1 + \frac{1}{1 - \sigma}\right)^2} = \frac{\sigma - 2}{\sigma} \cdot \frac{(1 - \sigma)^2}{(2 - \sigma)^2} = -\frac{(1 - \sigma)^2}{\sigma(2 - \sigma)} = -\frac{1 - \sigma}{\sigma} \cdot \frac{1 - \sigma}{2 - \sigma} = \\ &= \left[\frac{1 - \sigma}{\sigma} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad 2 - \sigma = \sqrt{2} \right] = -\frac{1 - \sigma}{2},\end{aligned}$$

то

$$f(z^*) = \frac{(1 - \sigma)^2}{4}.$$

Поэтому

$$f(z_1) - f(z) = \left[\frac{1 - (1 - \sigma)z_1}{\left(1 + \frac{\sigma}{2}z_1\right)^2} \right]^2 - \left(\frac{1 - \sigma}{2} \right)^2 = \frac{f_1(z_1) \cdot f_2(z_1)}{K},$$

где

$$\begin{aligned}f_1(z_1) &= 2[1 - (1 - \sigma)z_1] - (1 - \sigma) \left(1 + \frac{\sigma}{2}z_1\right)^2, \\ f_2(z_1) &= 2[1 - (1 - \sigma)z_1] + (1 - \sigma) \left(1 + \frac{\sigma}{2}z_1\right)^2.\end{aligned}$$

Преобразуя выражение для $f_1(z_1)$, имеем:

$$\begin{aligned}f_1(z_1) &= 2[1 - (1 - \sigma)z_1] - (1 - \sigma) \left(1 + \sigma z_1 + \frac{\sigma^2}{4}z_1^2\right) = 2 - 1 + \sigma - 2(1 - \sigma)z_1 - \sigma(1 - \sigma)z_1 - \\ &- (1 - \sigma) \frac{\sigma^2}{4}z_1^2 = 1 + \sigma - (2 - 2\sigma + \sigma - \sigma^2)z_1 - (1 - \sigma) \cdot \frac{4\sigma - 2}{4}z_1^2 = 1 + \sigma - (4 - 5\sigma)z_1 - \\ &- \frac{3 - 5\sigma}{2}z_1^2 = -\frac{1}{2}[(5\sqrt{2} - 7)z_1^2 + 2(5\sqrt{2} - 6)z_1 - 2(3 - \sqrt{2})].\end{aligned}$$

Квадратный трехчлен в скобках, поскольку

$$D_1 = (5\sqrt{2} - 6)^2 + 2(5\sqrt{2} - 7)(3 - \sqrt{2}) = (4 - 2\sqrt{2})^2,$$

имеет корни $z_1^{(1)} = \sqrt{2}$ и $z_1^{(2)} < 0$. Поэтому при $z_1 \leq \sqrt{2}$ справедливо неравенство $f_1(z_1) \geq 0$. Аналогично имеем для $f_2(z_1)$:

$$\begin{aligned}f_2(z_1) &= 2[1 - (1 - \sigma)z_1] + (1 - \sigma) \left(1 + \sigma z_1 + \frac{\sigma^2}{4}z_1^2\right) = 2 + 1 - \sigma - 2(1 - \sigma)z_1 + \sigma(1 - \sigma)z_1 + \\ &+ (1 - \sigma) \frac{\sigma^2}{4}z_1^2 = 3 - \sigma - (2 - 2\sigma - \sigma + \sigma^2)z_1 + (1 - \sigma) \cdot \frac{4\sigma - 2}{4}z_1^2 = 3 - \sigma - \sigma z_1 + \\ &+ \frac{3 - 5\sigma}{2}z_1^2 = \frac{1}{2}[(5\sqrt{2} - 7)z_1^2 - 2(2 - \sqrt{2})z_1 + 2(\sqrt{2} + 1)].\end{aligned}$$

Для дискриминанта данного квадратного трехчлена имеем:

$$D_1 = (2 - \sqrt{2})^2 - 2(5\sqrt{2} - 7)(\sqrt{2} + 1) = 6 - 4\sqrt{2} - 2(3 - 2\sqrt{2}) = 0.$$

Поэтому $f_2(z_1)$ всегда неотрицателен.

Таким образом, изучаемая разностная схема (1.43) асимптотически устойчива при выполнении условия $\tau\lambda_1 \leq 2$ или $\tau \leq \frac{2}{\lambda_1} = \frac{2h^2}{4\sin^2 \frac{\pi h}{2}} \approx \frac{2h^2}{4 \cdot \left(\frac{\pi h}{2}\right)^2} = \frac{2}{\pi^2}$, т.е. при ограничении

на временной шаг сверху, не связанном с шагом сетки по пространственной переменной.

Замечание. Если рассмотреть разностную схему

$$\begin{cases} \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^{j+\frac{1}{2}}, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda y^{j+1}, \end{cases} \quad (1.45)$$

то ограничений из соображений асимптотической устойчивости схемы вообще никаких не будет, а схема также будет схемой второго порядка (правда, немного сложнее в реализации, ибо требует решения системы с пятидиагональной матрицей).

Упражнения.

1. Показать, что схема (1.45) обладает указанными свойствами.
2. Построить аналог и схем (1.43), (1.45) для случая неоднородного уравнения теплопроводности.

§ 2. Разностные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), & (x, t) \in D = (0; 1) \times (0; T), \quad c_2 \geq k(x, t) \geq c_1 > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0; 1], \\ u(0, t) = \mu_0(t), & t \in [0; T], \\ u(1, t) = \mu_1(t), & t \in [0; T]. \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1. Метод баланса и однородные разностные схемы с весами

Как уже отмечалось ранее (см. Глава XVI курса «Методы численного анализа»), простейшие аппроксимации уравнений не всегда приводят к удовлетворительным результатам. Особенно это касается схем для задач с переменными (и в еще большей степени – разрывными) коэффициентами. При этом важными свойствами схем мы называли их однородность консервативность, а в качестве одного из основных способов построения консервативных однородных разностных схем был рассмотрен метод баланса (интегро-интерполяционный метод). Построим с его помощью разностную схему для записанной выше задачи (2.1).

Задавая в области \bar{D} равномерную пространственно-временную сетку $\bar{\omega}_{h\tau}$, запишем уравнение баланса в прямоугольнике $x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}$, $t_j \leq t \leq t_{j+1}$. Для этого последовательно проинтегрируем исходное уравнение (2.1) вначале по переменной t , а затем – по переменной x (либо наоборот). Тогда, вводя обозначение $w(x, t) = -k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}$, получим:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)] dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} [w(x_{i-\frac{1}{2}}, t) - w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)] dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx.$$

Замечание. Переход к уравнению баланса можно также осуществить не путем последовательного интегрирования, а путем непосредственного интегрирования по элементарному прямоугольнику $\Delta_{ij} = [x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_j; t_{j+1}]$.

По рассмотренной ранее схеме (см. § 2, Глава XVI курса «Методы численного анализа») аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы и производные:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx &\sim hu(x_i, t), \quad w_{i-\frac{1}{2}} \sim -\bar{a}_i u_{x_i}, \quad \left(\bar{a}_i = a_i \left(t_j + \frac{\tau}{2} \right) \right), \\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} w(x_{i-\frac{1}{2}}, t) dt &\sim \tau [\sigma w_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} + (1 - \sigma) w_{i-\frac{1}{2}}^j], \\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx &= h \tau \varphi_i^j. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь коэффициенты \bar{a}_i выражаются через значения $k(x, t)$ с помощью введенных ранее шаблонных функционалов:

$$a(x_i) = a_i = A[k(x_i + sh, t)] \quad \text{или} \quad \frac{1}{a_i} = A \left[\frac{1}{k(x_i + sh, t)} \right]$$

(t в обоих случаях играет роль параметра). В частности,

$$\bar{a}_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k \left(x, t_j + \frac{\tau}{2} \right)} \right]^{-1}.$$

Напомним, что $A[\bar{k}(s)]$ – линейный функционал, обеспечивающий второй порядок аппроксимации, т.е. удовлетворяющий условиям

$$A[1] = 1, \quad A[s] = -0.5.$$

Подставляя (2.2) в уравнение баланса, получим разностную схему вида

$$y_t = \Lambda[\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y] + \varphi, \quad (2.3)$$

где $\Lambda y = (\bar{a}y_{\bar{x}})_x$.

Начальные и граничные условия аппроксимируются очевидным образом.

Для вычисления сеточных функций φ и \bar{a} можно использовать простейшие формулы типа

$$a_i^j = k\left(x_i - \frac{h}{2}, t_j + \frac{\tau}{2}\right) \quad \text{или} \quad a_i^j = \frac{1}{2}\left[k\left(x_i - h, t_j + \frac{\tau}{2}\right) + k\left(x_i, t_j + \frac{\tau}{2}\right)\right];$$

$$\varphi_i^j = f_i^{j+\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad \varphi_i^j = \frac{1}{2}(f_i^j + f_i^{j+1}).$$

Несложно показать, что порядок аппроксимации полученной разностной схемы при данном значении параметра σ совпадает с порядком аппроксимации в случае $k(x, t) \equiv 1$: $\psi = O(\tau^2 + h^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2}$; $\psi = O(\tau + h^2)$ при $\sigma \neq \frac{1}{2}$.

Упражнения.

1. Провести подробное исследование погрешности аппроксимации схемы (2.3);
2. Исследовать устойчивость разностной схемы (2.3) в равномерной метрике.

2.2. Монотонные схемы для параболических уравнений общего вида

В области \bar{D} рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t)u + f(x, t), & (x, t) \in D = (0; 1) \times (0; T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0; 1], \quad 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \quad 0 < c_1 \leq c(x, t), \quad 0 \leq q(x, t), \\ u(0, t) = \mu_0(t), & t \in [0; T], \\ u(1, t) = \mu_1(t), & t \in [0; T]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Чтобы получить для задачи (2.4) монотонную разностную схему, для которой справедлив принцип максимума при любых h и τ , как и ранее (см. § 1, Глава XVII, курс «Методы численного анализа»), рассмотрим уравнение с возмущенным оператором:

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{L}u + f(x, t), \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{L}u = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t)u, \quad \kappa = \frac{1}{1 + R}, \quad R = \frac{h}{2} \cdot \frac{|r(x, t)|}{k(x, t)}.$$

Оператор \tilde{L} при фиксированном $t = \bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}$ аппроксимируем разностным оператором $\tilde{\Lambda}$:

$$\tilde{\Lambda}y = \kappa (ay_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+1)} y_x + b^- ay_{\bar{x}} - dy,$$

где

$$a = A[k(x + sh, \bar{t})], \quad d = F[q(x + sh, \bar{t})], \quad b^\pm = F[\tilde{r}^\pm(x + sh, \bar{t})], \quad \tilde{r}^\pm = \frac{r^\pm}{k}, \quad r^\pm = \frac{r \pm |r|}{2}.$$

Теперь остается для уравнения (2.5) записать чисто неявную схему:

$$\begin{cases} \rho(x, \bar{t}) y_t = \tilde{\Lambda}(\bar{t}) \hat{y} + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), & t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (2.6)$$

Коэффициенты ρ и φ вычисляются по тем же формулам, что и d , b^\pm . Погрешность аппроксимации этой схемы, в силу построения оператора $\tilde{\Lambda}$, есть величина $O(\tau + h^2)$.

Упражнение. Исследовать погрешность аппроксимации и доказать монотонность разностной схемы (2.6).

ГЛАВА III

Разностные схемы для уравнения колебаний струны

Прежде всего, отметим, что все сказанное выше относительно уравнения теплопроводности, остается в силе и для уравнения колебаний. Поэтому изложение материала проведем на примере простейшей задачи.

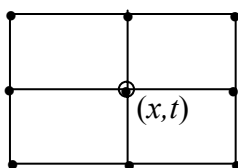
§ 1. Разностные схемы для уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение колебаний однородной струны, концы которой движутся по заданным законам:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_0(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.1)$$

1.1. Исходное семейство девятиточечных схем с весами

В области \bar{D} введем равномерную пространственно-временную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$. Тогда, как мы видели ранее, для аппроксимации волнового оператора может быть использован девятиточечный разностный оператор $L_{h\tau}^{(\sigma_1, \sigma_2)}$ (см. Глава XV, § 2 курса



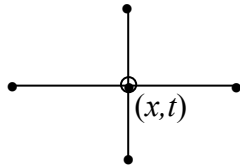
«Методы численного анализа»). Таким образом, используя изображенный на рисунке шаблон и высказанные ранее соображения по порядку аппроксимации (что приводит к выбору $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$), можем записать исходное однопараметрическое семейство разностных схем

$$\begin{cases} y_{\bar{t}} = \Lambda \left(\sigma \hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma \check{y} \right) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad \Lambda y = y_{\bar{x}\bar{x}}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ y_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y(1, t) = \mu_1(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь φ – сеточная функция, аппроксимирующая $f(x, t)$. (1.2) – *схема с весами*. Вновь начнем изучение разностной задачи с вопроса организации вычислений. Принцип такой организации – прежний, послойный. Но, в отличие от схем для уравнения теплопроводности, данная разностная схема при всех значениях параметра σ является трехслойной. Это накладывает определенную специфику, требуя предварительного (перед началом работы по «основному» разностному уравнению) заполнения не одного, а двух начальных временных слоев. В остальном же конкретные действия, как и в случае уравнения теплопроводности, зависят от конкретного значения параметра σ .

Вновь рассмотрим два случая:

- 1⁰. $\sigma = 0$. В этом случае шаблон, соответствующий разностному уравнению, записываемому во внутренних узлах сетки, становится пятиточечным и принимает вид, изображенный на рисунке. Таким образом, схема становится *явной*:



$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \Lambda y_i^j + \varphi_i^j. \quad (1.3)$$

Следовательно, порядок расчетов будет таким:

- 1) заполняем начальный (нулевой слой) по формулам

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}; \quad (1.4)$$

- 2) заполняем первый по формулам

$$y_0^1 = \mu_0(\tau), \quad y_i^1 = y_i^0 + \tau \tilde{u}_1(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_N^1 = \mu_1(\tau). \quad (1.5)$$

Здесь расчетные формулы получены из разностной аппроксимации начального условия для производной;

- 3) для всех $j = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ заполняем очередной $((j+1)$ -й) слой по формулам

$$y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad y_i^{j+1} = 2y_i^j - y_i^{j-1} + \tau^2 \left(\frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j \right), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}),$$

где все формулы, кроме соответствующих $i = 0$ и $i = N$ получены путем разрешения уравнения (1.3) относительно значения на верхнем слое.

- 2⁰. $\sigma \neq 0$. При всех таких значениях весового параметра схема остается *неявной* и расчеты по ней следует осуществлять следующим образом: заполнив по формулам (1.4), (1.5) нулевой и первый слой, далее для всех $j = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ заполняем очередной $((j+1)$ -й) слой, решая систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\begin{cases} \sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau^2} y_i^{j+1} = -\frac{2}{\tau} y_i^j + \frac{1}{\tau^2} y_i^{j-1} - (1-2\sigma) \Lambda y_i^j - \sigma \Lambda y_i^{j-1} - \varphi_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \\ y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\sigma}{h^2} \right) y_i^{j+1} + \frac{\sigma}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \\ y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \end{cases} \quad (1.6)$$

где $F_i^j = \frac{2}{\tau^2} y_i^j - \frac{1}{\tau^2} y_i^{j-1} + (1-2\sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \sigma \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j$. Решение такой системы целесообразно проводить с использованием метода разностной прогонки, которая, очевидно, при $\sigma > 0$ будет устойчивой.

1.1.1. Погрешность аппроксимации семейства схем с весами

По аналогии со случаем исследования разностных схем для уравнения теплопроводности запишем задачу для погрешности $z = y - u$:

$$\begin{cases} z_t = \Lambda \left(\sigma \hat{z} + (1-2\sigma)z + \sigma \check{z} \right) + \psi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \\ z_t(x, 0) = \nu, \quad x \in \overline{\omega}_h, \\ z(0, t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \\ z(1, t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases}$$

где $\psi = \Lambda \left(\sigma \hat{u} + (1-2\sigma)u + \sigma \check{u} \right) - u_{\bar{t}} + \varphi$ – погрешность аппроксимации разностной схемы на решении исходной задачи, а $\nu = \tilde{u}_1(x) - u_t$ – погрешность аппроксимации второго начального условия.

Так как

$$\hat{u} = u + \tau u_t, \quad \check{u} = u - \tau u_t,$$

то

$$\hat{u} + \check{u} = 2u + \tau^2 u_{\bar{t}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda u + \sigma \tau^2 \Lambda u_{\bar{t}} - u_{\bar{t}} + \varphi = u'' + \frac{h^2}{12} u^{IV} + O(h^4) + \sigma \tau^2 \Lambda \left(\ddot{u} + O(\tau^2) \right) - \ddot{u} - \frac{\tau^2}{12} u^{(4)} + O(\tau^4) + \varphi = \\ &= \varphi - f + \frac{h^2}{12} u^{IV} + \sigma \tau^2 \ddot{u}'' - \frac{\tau^2}{12} u^{(4)} + O(\tau^4 + h^4) = \varphi - f + \frac{h^2}{12} \left(\ddot{u}'' - f'' \right) + \sigma \tau^2 \ddot{u}'' - \frac{\tau^2}{12} \left(\ddot{u}'' + \ddot{f} \right) + \\ &+ O(\tau^4 + h^4) = \varphi - f - \frac{h^2}{12} f'' - \frac{\tau^2}{12} \ddot{f} + \tau^2 \left(\sigma - \frac{1}{12} + \frac{h^2}{12\tau^2} \right) \ddot{u}'' + O(\tau^4 + h^4). \end{aligned}$$

При выполнении преобразований мы использовали следующие непосредственно из уравнения (1.1) равенства $u^{(4)} = \ddot{u}'' + \ddot{f}''$ и $\ddot{u}'' = u^{IV} + f''$.

Теперь при анализе выражения для погрешности рассмотрим следующие возможные ситуации:

4) параметр σ – произвольное число (вообще говоря, не совпадающее ни с одним из значений, рассматриваемых ниже) (таким образом, мы выражение для погрешности оставляем «целиком»). Тогда, выбирая $\varphi = f + O(\tau^2 + h^2)$, в случае, если решение исходной задачи принадлежит классу гладкости $C_4^4(\bar{D})$, получаем: $\psi = O(\tau^2 + h^2)$;

5) $\sigma\tau^2 + \frac{h^2}{12} = \bar{\sigma}\tau^2$ при некотором постоянном значении $\bar{\sigma}$, т.е. $\sigma = \bar{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2}$ (в выражении для погрешности мы слагаемые порядка h^2 «переводим» в слагаемые порядка τ^2).

Тогда, выбирая $\varphi = f + \frac{h^2}{12}f'' + O(\tau^2 + h^4)$, получаем: при $u \in C_4^6(\bar{D})$ и любом $\bar{\sigma} = \text{const}$ $\psi = O(\tau^2 + h^4)$. Таким образом, имеем однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации по t и четвертого – по x ;

6) если выбирать параметр σ таким образом, чтобы «убрать» в выражении для погрешности аппроксимации все слагаемые порядка τ^2 , т.е. $\sigma = \frac{1}{12}$, а также положить

$$\varphi = f + \frac{\tau^2}{12}\ddot{f} + O(\tau^4 + h^2) \quad (\text{например, } \varphi = f + \frac{\tau^2}{12}f_{tt} = \frac{\hat{f} + 10f + \check{f}}{12}), \quad \text{то получаем: при } u \in C_6^4(\bar{D}) \quad \psi = O(\tau^4 + h^2);$$

7) наконец, «убирая» все слагаемые порядка τ^2 и h^2 , т.е. полагая $\tau^2\left(\sigma - \frac{1}{12} + \frac{h^2}{12\tau^2}\right) = 0$

или $\sigma = \frac{1}{12} - \frac{h^2}{12\tau^2}$, а также $\varphi = f + \frac{\tau^2}{12}\ddot{f} + \frac{h^2}{12}f'' + O(\tau^4 + h^4)$, при $u \in C_6^6(\bar{D})$ получаем: $\psi = O(\tau^4 + h^4)$ (для сеточной функции φ можно указать, например, такой вариант выбора: $\varphi = f + \frac{\tau^2}{12}f_{tt} + \frac{h^2}{12}f_{xx}$).

Исследуем теперь величину ν :

$$\begin{aligned} \nu(x, 0) &= \tilde{u}_1(x) - u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x) - \dot{u}(x, 0) - \frac{\tau}{2}\ddot{u}(x, 0) - \frac{\tau^2}{6}\dddot{u}(x, 0) - \frac{\tau^3}{24}u^{(4)}(x, 0) + O(\tau^4) = \\ &= \tilde{u}_1(x) - u_1(x) - \frac{\tau}{2}(u''(x, 0) + f(x, 0)) - \frac{\tau^2}{6}\left(\dot{u}''(x, 0) + \dot{f}(x, 0)\right) - \\ &\quad - \frac{\tau^3}{24}\left(\ddot{u}''(x, 0) + \ddot{f}(x, 0)\right) + O(\tau^4). \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что для того чтобы порядок аппроксимации начального условия был не ниже порядка аппроксимации самого разностного уравнения, выбор сеточной функции $\tilde{u}_1(x)$ необходимо подчинить следующим условиям:

1) $\tilde{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}(u''(x, 0) + f(x, 0)) + O(\tau^2 + h^2)$. Такой выбор может быть осуществлен, например, с помощью соотношений

а) $\tilde{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}(y_{xx}(x, 0) + f(x, 0));$

б) $\tilde{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}(u_0''(x) + f(x, 0));$

$$\text{в) } \tilde{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}((u_0)_{\bar{x}x}(x) + f(x,0)).$$

Заметим, что все выписанные варианты обеспечивают погрешность не хуже $O(\tau^2 + h^4)$ и поэтому могут использоваться во всех схемах второго порядка аппроксимации по времени.

2)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x) = & u_1(x) + \frac{\tau}{2}(u''(x,0) + f(x,0)) + \frac{\tau^2}{6}(\dot{u}''(x,0) + \dot{f}(x,0)) + \\ & + \frac{\tau^3}{24}(\ddot{u}''(x,0) + \ddot{f}(x,0)) + O(\tau^4 + h^4) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}(u''(x,0) + f(x,0)) + \frac{\tau^2}{6}(u_1'(x) + \dot{f}(x,0)) + \\ & + \frac{\tau^3}{24}(u_0^{IV}(x) + \ddot{f}(x,0) + f''(x,0)) + O(\tau^4 + h^4). \end{aligned}$$

Отсюда, как и выше, имеем конкретные варианты выбора:

$$\begin{aligned} \text{а) } \tilde{u}_1(x) = & u_1(x) + \frac{\tau}{2}(y_{\bar{x}x}(x,0) + f(x,0)) + \frac{\tau^2}{6}(u_1''(x) + \dot{f}(x,0)) + \frac{\tau^3}{24}(u_0^{IV}(x) + \ddot{f}(x,0) + f''(x,0)); \\ \text{б) } \tilde{u}_1(x) = & u_1(x) + \frac{\tau}{2}(u_0''(x) + f(x,0)) + \frac{\tau^2}{6}(u_1''(x) + \dot{f}(x,0)) + \frac{\tau^3}{24}(u_0^{IV}(x) + \ddot{f}(x,0) + f''(x,0)) \end{aligned}$$

и т.п. (заменяя, где это целесообразно, производные от известных функций разностными отношениями).

1.1.2. Краевые условия третьего рода

Как известно, стандартная двухточечная аппроксимация краевых условий третьего рода

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta_0 u(0,t) - \mu_0(t), \\ -\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \beta_1 u(1,t) - \mu_1(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

имеет вид

$$\begin{cases} y_x(0,t) = \beta_0 y(0,t) - \mu_0(t), \\ -y_x(1,t) = \beta_1 y(1,t) - \mu_1(t) \end{cases}$$

и является аппроксимацией первого порядка по пространственной переменной (по времени погрешности здесь нет).

Поэтому, применяя процедуру повышения порядка аппроксимации, построим (на примере левого граничного условия) некоторую «базовую» аппроксимацию не ниже второго порядка по *каждой* переменной.

Итак, будем искать разностное граничное условие в виде

$$y_x(0,t) = \beta_0 y(0,t) - \bar{\mu}_0(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
v(0,t) &= \beta_0 u(0,t) - \bar{\mu}_0(t) - u_x(0,t) = \beta_0 u(0,t) - \bar{\mu}_0(t) - u'(0,t) - \frac{h}{2} u''(0,t) + O(h^2) = \\
&= \beta_0 u(0,t) - \bar{\mu}_0(t) - \beta_0 u(0,t) + \mu_0(t) - \frac{h}{2} \left(\ddot{u}(0,t) - f(0,t) \right) + O(h^2) = \\
&= -\bar{\mu}_0(t) + \mu_0(t) - \frac{h}{2} \left(\ddot{u}(0,t) - f(0,t) \right) + O(h^2).
\end{aligned}$$

Отсюда видим, что, выбрав $\bar{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0,t) - \frac{h}{2} y_{it}(0,t) = \tilde{\mu}_0(t) - \frac{h}{2} y_{it}(0,t)$, получим разностное граничное условие с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$:

$$y_x(0,t) = \beta_0 y(0,t) + \frac{h}{2} y_{it}(0,t) - \tilde{\mu}_0(t). \quad (1.8)$$

Аналогичным порядком аппроксимации, очевидно, обладают и условия (мы просто по-другому заменяем производную \ddot{u} : выше – стандартной второй разностной производной, а еще – дважды правой и дважды левой)

$$\hat{y}_x(0,t) = \beta_0 \hat{y}(0,t) + \frac{h}{2} y_{it}(0,t) - \tilde{\mu}_0(t) \quad (1.9)$$

и

$$\check{y}_x(0,t) = \beta_0 \check{y}(0,t) + \frac{h}{2} y_{it}(0,t) - \tilde{\mu}_0(t). \quad (1.10)$$

Составляя симметричную линейную комбинацию аппроксимаций (1.8) – (1.10), получим на шаблоне $\mathcal{III} = \{(0, t_{j-1}); (0, t_j); (0, t_{j+1}); (h, t_{j-1}); (h, t_j); (h, t_{j+1})\}$ однопараметрическое семейство разностных граничных условий

$$y_x^{(\sigma)}(0,t) = \beta_0 y^{(\sigma)}(0,t) + \frac{h}{2} y_{it}(0,t) - \tilde{\mu}_0(t). \quad (1.11)$$

где использовано обозначение $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma \check{y}$. Исследуем погрешность аппроксимации условия (1.11):

$$v(0,t) = u_x^{(\sigma)}(0,t) - \beta_0 u^{(\sigma)}(0,t) - \frac{h}{2} u_{it}(0,t) + \tilde{\mu}_0(t).$$

Так как

$$\begin{aligned}
u^{(\sigma)}(0,t) &= \sigma u(0,t+\tau) + (1-2\sigma)u(0,t) + \sigma u(0,t-\tau) = \\
&= \sigma \left[u(0,t) + \tau \dot{u}(0,t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}(0,t) + \frac{\tau^3}{6} \dddot{u}(0,t) + O(\tau^4) \right] + (1-2\sigma)u(0,t) + \\
&+ \sigma \left[u(0,t) - \tau \dot{u}(0,t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}(0,t) - \frac{\tau^3}{6} \dddot{u}(0,t) + O(\tau^4) \right] = \\
&= u(0,t) + \sigma \tau^2 \ddot{u}(0,t) + O(\tau^4),
\end{aligned}$$

то

$$u_x^{(\sigma)}(0, t) = u'(0, t) + \frac{h}{2} u''(0, t) + \frac{h^2}{6} u'''(0, t) + \frac{h^3}{24} u^{IV}(0, t) + O(h^4) + \\ + \sigma \tau^2 \left[\ddot{u}'(0, t) + \frac{h}{2} \ddot{u}''(0, t) + O(h^2) \right] + O(\tau^4)$$

и, следовательно,

$$v(0, t) = u'(0, t) + \frac{h}{2} u''(0, t) + \frac{h^2}{6} u'''(0, t) + \frac{h^3}{24} u^{IV}(0, t) + O(h^4) + \sigma \tau^2 \left[\ddot{u}'(0, t) + \frac{h}{2} \ddot{u}''(0, t) + O(h^2) \right] + \\ + O(\tau^4) - \beta_0 \left[u(0, t) + \sigma \tau^2 \ddot{u}(0, t) + O(\tau^4) \right] - \frac{h}{2} \left[\ddot{u}(0, t) + \frac{\tau^2}{12} u^{(4)}(0, t) + O(\tau^4) \right] + \tilde{\mu}_0(t).$$

Теперь, используя исходное уравнение (1.1) и первое из условий (1.7), найдем:

$$u'(0, t) = \beta_0 u(0, t) - \mu_0(t),$$

$$u''(0, t) = \ddot{u}(0, t) - f(0, t),$$

$$u'''(0, t) = \ddot{u}'(0, t) - f'(0, t) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\beta_0 u(0, t) - \mu_0(t)) - f'(0, t) = \beta_0 \ddot{u}(0, t) - \ddot{\mu}_0(t) - f'(0, t),$$

$$u^{IV}(0, t) = \ddot{u}''(0, t) - f''(0, t),$$

$$u^{(4)}(0, t) = \ddot{u}''(0, t) + \ddot{f}(0, t).$$

Поэтому

$$v(0, t) = \tilde{\mu}_0(t) + \beta_0 u(0, t) - \mu_0(t) + \frac{h}{2} \left[\ddot{u}(0, t) - f(0, t) \right] + \frac{h^2}{6} \left[\beta_0 \ddot{u}(0, t) - \ddot{\mu}_0(t) - f'(0, t) \right] + \\ + \frac{h^3}{24} \left[\ddot{u}''(0, t) - f''(0, t) \right] + \sigma \tau^2 \left[\beta_0 \ddot{u}(0, t) - \ddot{\mu}_0(t) \right] + \sigma \tau^2 \frac{h}{2} \ddot{u}'''(0, t) - \beta_0 u(0, t) - \beta_0 \sigma \tau^2 \ddot{u}(0, t) - \\ - \frac{h}{2} \ddot{u}(0, t) - \frac{\tau^2}{12} \cdot \frac{h}{2} \left[\ddot{u}''(0, t) + \ddot{f}(0, t) \right] + O(\tau^4 + h^4) = \tilde{\mu}_0(t) - \mu_0(t) - \frac{h}{2} f(0, t) - \sigma \tau^2 \ddot{\mu}_0(t) + \\ + \frac{h^2}{6} \beta_0 \ddot{u}(0, t) - \frac{h^2}{6} \ddot{\mu}_0(t) - \frac{h^2}{6} f'(0, t) - \frac{h^3}{24} f''(0, t) + \\ + \tau^2 \frac{h}{2} \left(\frac{h^2}{12\tau^2} + \sigma - \frac{1}{12} \right) \ddot{u}''(0, t) - \frac{\tau^2}{12} \cdot \frac{h}{2} \ddot{f}(0, t) + O(\tau^4 + h^4).$$

Отсюда видим, что возможны следующие основные ситуации:

- 1) при произвольном значении σ и $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t)$ $v(0, t) = O(\tau^2 + h^2)$;
- 2) при $\sigma = \frac{1}{12}$ (убираем слагаемые порядка τ^2) и $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t) + \frac{\tau^2}{12} \ddot{\mu}_0(t)$ $v(0, t) = O(\tau^4 + h^2)$;

3) при $\sigma = \bar{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2}$ (убираем слагаемые порядка h^2 , преобразуя их в слагаемые порядка τ^2) и $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \frac{h^2}{12}\ddot{\mu}_0(t) - \beta_0 \frac{h^2}{6}y_{it}(0,t) + \frac{h^2}{6}f'(0,t) + \frac{h^3}{24}f''(0,t) =$
 $= \bar{\mu}_0(t) - \beta_0 \frac{h^2}{6}y_{it}(0,t) \quad \nu(0,t) = O(\tau^2 + h^4);$

4) при $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau^2} = \sigma^*$ и

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_0(t) &= \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \left(\sigma^* \tau^2 + \frac{h^2}{6}\right)\ddot{\mu}_0(t) - \frac{h^2}{6}\beta_0 y_{it}(0,t) + \frac{h^2}{6}f'(0,t) + \frac{h^3}{24}f''(0,t) + \frac{\tau^2 h}{24}\ddot{f}(0,t) = \\ &= \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \left(\frac{\tau^2}{12} + \frac{h^2}{12}\right)\ddot{\mu}_0(t) - \frac{h^2}{6}\beta_0 y_{it}(0,t) + \frac{h^2}{6}f'(0,t) + \frac{h^3}{24}f''(0,t) + \frac{\tau^2 h}{24}\ddot{f}(0,t) = \\ &= \bar{\mu}_0(t) - \frac{h^2}{6}\beta_0 y_{it}(0,t)\end{aligned}$$

следует: $\nu(0,t) = O(\tau^4 + h^4)$.

Таким образом, разностное граничное условие с порядками аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ и $O(\tau^4 + h^2)$ имеет вид (1.11) с указанными в п.п. 1), 2) значениями σ и $\tilde{\mu}_0(t)$, а условия с порядками аппроксимации $O(\tau^2 + h^4)$ и $O(\tau^4 + h^4)$ выглядят следующим образом:

$$y_x^{(\sigma)}(0,t) = \beta_0 y^{(\sigma)}(0,t) + \frac{h}{2}\left(1 + \beta_0 \frac{h}{3}\right)y_{it}(0,t) - \bar{\mu}_0(t), \quad (1.12)$$

где

$$\begin{cases} \sigma = \bar{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2}, \\ \bar{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \frac{h^2}{12}\ddot{\mu}_0(t) + \frac{h^2}{6}f'(0,t) + \frac{h^3}{24}f''(0,t) \end{cases} \quad (1.13)$$

в первом случае и

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau^2}, \\ \bar{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0,t) + \left(\frac{\tau^2}{12} + \frac{h^2}{12}\right)\ddot{\mu}_0(t) + \frac{h^2}{6}f'(0,t) + \frac{h^3}{24}f''(0,t) + \frac{\tau^2 h}{24}\ddot{f}(0,t) \end{cases} \quad (1.14)$$

во втором.

По аналогии можно записать соответствующие аппроксимации для краевого условия третьего рода при $x = 1$. Они будут иметь вид:

$$-y_x^{(\sigma)}(1,t) = \beta_1 y^{(\sigma)}(1,t) + \frac{h}{2}y_{it}(1,t) - \tilde{\mu}_1(t) \quad (1.15)$$

где

$$\begin{cases} \sigma - \text{любое}, \\ \tilde{\mu}_1(t) = \tilde{\mu}_1(t) + \frac{h}{2}f(1,t) \end{cases} \quad (1.16)$$

в случае $\nu(1, t) = O(\tau^2 + h^2)$ и

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{12}, \\ \tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t) + \frac{\tau^2}{12} \ddot{\mu}_0(t), \end{cases} \quad (1.17)$$

а также

$$-y_{\bar{x}}^{(\sigma)}(1, t) = \beta_1 y^{(\sigma)}(1, t) + \frac{h}{2} \left(1 + \beta_1 \frac{h}{3}\right) y_{\bar{t}t}(1, t) - \bar{\mu}_1(t), \quad (1.18)$$

где

$$\begin{cases} \sigma = \bar{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau}, \\ \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h}{2} f(1, t) + \frac{h^2}{12} \ddot{\mu}_1(t) + \frac{h^2}{6} f'(1, t) + \frac{h^3}{24} f''(1, t) \end{cases} \quad (1.19)$$

в случае $\nu(1, t) = O(\tau^2 + h^4)$ и

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{12} - \frac{h^2}{12\tau^2}, \\ \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h}{2} f(1, t) + \left(\frac{\tau^2}{12} + \frac{h^2}{12}\right) \ddot{\mu}_1(t) + \frac{h^2}{6} f'(1, t) + \frac{h^3}{24} f''(1, t) + \frac{\tau^2 h}{24} \ddot{f}(1, t) \end{cases} \quad (1.20)$$

в случае $\nu(1, t) = O(\tau^4 + h^4)$.

1.1.3. Устойчивость схемы с весами по начальным данным

Рассмотрим однородную задачу с неоднородными начальными условиями

$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \Lambda \left(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y} \right), \\ y(x, 0) = u_0(x), \\ y_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \\ y(0, t) = 0, \\ y(1, t) = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Выполнив разделение переменных, для T_k получим задачу

$$(T_k)_{\bar{t}t} + \lambda_k \left(\sigma \hat{T}_k + (1 - 2\sigma)T_k + \sigma \check{T}_k \right) = 0$$

или

$$(1 + \sigma\tau^2\lambda_k)\hat{T}_k - (2 + \tau^2\lambda_k(2\sigma - 1))T_k + (1 + \sigma\tau^2\lambda_k)\check{T}_k = 0.$$

Последнее равенство, разделив почленно на $(1 + \sigma\tau^2\lambda_k)$, перепишем в виде

$$\hat{T}_k - 2(1 - \alpha_k)T_k + \check{T}_k = 0, \quad (1.22)$$

где $\alpha_k = \frac{0.5\tau^2\lambda_k}{1 + \sigma\tau^2\lambda_k}$.

Очевидно, достаточным условием устойчивости данного разностного уравнения, а значит, и устойчивости разностной схемы (1.21) по начальным данным, будет условие

$$|q_{1,2}| \leq 1, \quad (1.23)$$

где q_i – корни характеристического уравнения

$$q^2 - 2(1 - \alpha_k)q + 1 = 0.$$

Так как $|q_1 \cdot q_2| = 1$, то выполнение условия (1.23) возможно лишь в том случае, когда q_1 и q_2 образуют комплексно сопряженную пару (заметим: случай вещественных корней дает кратный корень с модулем, равным единице и (!) рассматриваемое разностное уравнение не будет устойчивым), а тогда

$$\frac{D}{4} = (1 - \alpha_k)^2 - 1 = -\alpha_k(2 - \alpha_k) < 0,$$

т.е. $\alpha_k \in (0; 2)$.

Отсюда, учитывая вид α_k , получим:

$$0 < \frac{0.5\tau^2\lambda_k}{1 + \sigma\tau^2\lambda_k} < 2.$$

Решая это двойное неравенство относительно σ (по аналогии с тем, как мы это делали при исследовании разностной схемы с весами для уравнения теплопроводности), найдем:

$$\sigma > \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2\lambda_k}.$$

Требуя выполнения этого неравенства для всех k , отсюда получим:

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}. \quad (1.24)$$

Выпишем сейчас решение разностной задачи (1.21). При выполнении условия (1.23) положим $\cos \varphi_k = 1 - \alpha_k$. Тогда $\sin \varphi_k = \sqrt{\alpha_k(2 - \alpha_k)}$ и общее решение разностного уравнения (1.22) будет иметь вид

$$T_k(t_j) = A_k \cos j\varphi_k + B_k \sin j\varphi_k$$

и

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} (A_k \cos j\varphi_k + B_k \sin j\varphi_k) \mu_k(x). \quad (1.25)$$

Найдем коэффициенты A_k и B_k . Пусть

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{N-1} u_{0k} \mu_k(x), \quad \tilde{u}_1(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{1k} \mu_k(x).$$

Тогда, полагая в (1.25) $j = 0$ и $j = 1$, получим систему уравнений ($y^1 = y^0 + \tau \tilde{u}_1(x)$)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} A_k \mu_k(x) = \sum_{k=1}^{N-1} u_{0k} \mu_k(x), \\ \sum_{k=1}^{N-1} (A_k \cos \varphi_k + B_k \sin \varphi_k) \mu_k(x) = \sum_{k=1}^{N-1} (u_{0k} + \tau \tilde{u}_{1k}) \mu_k(x), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A_k = u_{0k}, \\ A_k \cos \varphi_k + B_k \sin \varphi_k = u_{0k} + \tau \tilde{u}_{1k}. \end{cases}$$

Отсюда

$$A_k = u_{0k}$$

и

$$B_k = u_{0k} \frac{1 - \cos \varphi_k}{\sin \varphi_k} + \tilde{u}_{1k} \frac{\tau}{\sin \varphi_k} = u_{0k} \frac{\sin \frac{\varphi_k}{2}}{\cos \frac{\varphi_k}{2}} + \tilde{u}_{1k} \frac{\tau}{\sin \varphi_k}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} y^j &= \sum_{k=1}^{N-1} \left[u_{0k} \left(\cos j \varphi_k + \frac{\sin \frac{\varphi_k}{2}}{\cos \frac{\varphi_k}{2}} \sin j \varphi_k \right) + \tilde{u}_{1k} \frac{\tau}{\sin \varphi_k} \sin j \varphi_k \right] \mu_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \left[u_{0k} \frac{\cos \left(j - \frac{1}{2} \right) \varphi_k}{\cos \frac{\varphi_k}{2}} + \tilde{u}_{1k} \frac{\tau}{\sin \varphi_k} \sin j \varphi_k \right] \mu_k(x). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Получим сейчас оценку величины $\|y^j\|$ через нормы начальных данных. Можно показать, что непосредственное использование строгого неравенства (1.24) не позволяет достичь поставленной цели. Поэтому положим $\sigma \geq \sigma_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}$, где $\varepsilon > 0$ – любое число. Для простоты выкладок рассмотрим подробнее частный случай $\sigma = 0$. Тогда, учитывая сделанное выше допущение, имеем:

$$0 \geq \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2},$$

т.е. $\frac{\tau^2}{h^2} \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$. Следовательно,

$$\alpha_k = 0.5\tau^2\lambda_k \leq 0.5 \cdot \tau^2 \cdot \frac{4}{h^2} = 2 \cdot \frac{\tau^2}{h^2} \leq \frac{2}{1+\varepsilon}.$$

Отсюда

$$\cos \frac{\varphi_k}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi_k}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \alpha_k}{2}} = \sqrt{1 - \frac{\alpha_k}{2}} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}.$$

Для второго коэффициента разложения (1.26) имеем:

$$\frac{\sin \varphi_k}{\tau} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_k}{2}}{\tau} \cdot \cos \frac{\varphi_k}{2} \geq \frac{2 \sin \frac{\varphi_k}{2}}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

а так как

$$\frac{2 \sin \frac{\varphi_k}{2}}{\tau} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_k)}}{\tau} = \frac{\sqrt{2\alpha_k}}{\tau} = \frac{\sqrt{\tau^2 \lambda_k}}{\tau} = \sqrt{\lambda_k},$$

то

$$\frac{\sin \varphi_k}{\tau} \geq \sqrt{\lambda_k \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}}.$$

Теперь, применяя к (1.26) неравенство треугольника, запишем:

$$\|y^j\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} u_{0k} \frac{\cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\varphi_k}{\cos \frac{\varphi_k}{2}} \mu_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{1k} \frac{\tau}{\sin \varphi_k} \sin j \varphi_k \mu_k \right\|.$$

Теперь, используя полученные выше оценки, окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \|y^j\| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\cos^2\left(j - \frac{1}{2}\right)\varphi_k}{\cos^2 \frac{\varphi_k}{2}} u_{0k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\tau}{\sin \varphi_k}\right)^2 \sin^2 j \varphi_k \tilde{u}_{1k}^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_{0k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tilde{u}_{1k}^2}{\lambda_k}} \right) = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} (\|u_0\| + \|\tilde{u}_1\|_{A^{-1}}), \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $Ay = -\Delta y = -y_{xx}$, так как

$$A^{-1} \tilde{u}_1 = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{1k} A^{-1} \mu_k = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tilde{u}_{1k}}{\lambda_k} \mu_k$$

и поэтому

$$(A^{-1} \tilde{u}_1, \tilde{u}_1) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tilde{u}_{1k}^2}{\lambda_k}.$$

Из неравенства (1.27) следует устойчивость явной разностной схемы в сеточном аналоге нормы пространства L_2 (учитывая, что $\|\cdot\|_{A^{-1}} \leq \frac{1}{8} \|\cdot\|$ (показать (!))) при выполнении нера-

венства $\frac{\tau^2}{h^2} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon}.$

Неравенство, аналогичное (1.27), может быть доказано и для $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$. Заметим, однако, что специальный выбор разностного варианта второго начального условия (а именно: $y_t = u_1 + \frac{\tau}{2} y_{xx}$) позволяет доказать устойчивость в евклидовой норме явной схемы при выполнении неравенства $\tau \leq h$ (и, таким образом, неравенство (1.24) в этом случае может быть сделано нестрогим).

Точно так же знак строгого неравенства в неравенстве (1.24) может быть снят, если проводить исследование методом энергетических неравенств. Покажем, как это может быть сделано.

Переписав исследуемую разностную схему в виде

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{it} = \Lambda y,$$

умножим ее скалярно на y_i :

$$\left((E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{it}, y_i\right) = (\Lambda y, y_i). \quad (1.28)$$

Так как

$$\begin{aligned} (y_{it}, y_i) &= \left(\frac{y_t - y_i}{\tau}, \frac{y_t + y_i}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\|y_t\|^2 - \|y_i\|^2}{\tau} = \frac{1}{2} (\|y_t\|^2)_t, \\ -(\Lambda y_{it}, y_i) &= (y_{\bar{x}it}, y_{\bar{x}i}) = \frac{1}{2} (\|y_{\bar{x}i}\|^2)_t, \end{aligned}$$

то левая часть (1.28) примет вид

$$\left((E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{it}, y_i\right) = \frac{1}{2} (\|y_t\|^2 + \sigma\tau^2 \|y_{\bar{x}i}\|^2)_t.$$

С другой стороны

$$-(\Lambda y, y_i) = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}i})$$

и поскольку

$$v v_i = \frac{1}{2} \frac{\hat{v}v - v\check{v}}{\tau} = \frac{1}{2} (v\check{v})_t = \frac{1}{8} \left[(v + \check{v})^2 - (v - \check{v})^2 \right]_t = \frac{1}{8} \left((v + \check{v})^2 \right)_t - \frac{\tau^2}{8} ((v_i)^2)_t,$$

то

$$-(\Lambda y, y_i) = \frac{1}{8} \left(\left\| y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}} \right\|^2 \right)_t - \frac{\tau^2}{8} (\|y_{\bar{x}i}\|^2)_t.$$

Поэтому (1.28) переписывается в виде

$$\frac{1}{2} (\|y_t\|^2 + \sigma\tau^2 \|y_{\bar{x}i}\|^2)_t + \frac{1}{8} \left(\left\| y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}} \right\|^2 \right)_t - \frac{\tau^2}{8} (\|y_{\bar{x}i}\|^2)_t = 0$$

или

$$\left(\|y_i\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}i}\|^2 + \frac{1}{4} \left\| y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}} \right\|^2 \right)_t = 0.$$

Полученное равенство представляет собой так называемое **основное энергетическое тождество**, которое можно переписать в виде

$$\mathcal{E}^{j+1} = \mathcal{E}^j, \quad (1.29)$$

где

$$\mathcal{E}^j = \|y_i^j\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}i}^j\|^2 + \frac{1}{4} \left\| y_{\bar{x}}^j + \check{y}_{\bar{x}}^j \right\|^2. \quad (1.30)$$

Найдем значения параметра σ , при которых величина ε^j неотрицательна при любых y^j и y^{j-1} .

Поскольку

$$\|y_{\bar{x}i}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|y_i\|^2,$$

то

$$\|y_i\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \|y_{\bar{x}i}\|^2 \geq \left(\frac{h^2}{4} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2\right) \|y_{\bar{x}i}\|^2.$$

Следовательно, правая часть (1.30) будет неотрицательна, если потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{h^2}{4} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \geq 0,$$

т.е.

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2} = \sigma_0.$$

При этом выражение $(\varepsilon^j)^{\frac{1}{2}}$ можно считать нормой (точнее, полунормой) и равенство (1.29) будет выражать устойчивость разностной схемы в этой норме. Такие «комбинированные» нормы характерны для многослойных разностных схем.

Таким образом, явная разностная схема устойчива при $\tau \leq h$, все схемы с погрешностью аппроксимации порядка $O(\tau^2 + h^4)$ устойчивы при $\bar{\sigma} \geq \frac{1}{4}$, схема повышенного порядка $(O(\tau^4 + h^4))$ устойчива при $\tau \leq h$.

Замечание. Если трехслойную разностную схему записать в каноническом виде

$$\begin{cases} By_i + \tau^2 Ry_{it} + Ay = \varphi(t), \\ y(0) = y_0, \\ y(\tau) = y_1, \end{cases}$$

то, как и в случае двухслойных разностных схем, можно получить *достаточное* условие устойчивости:

$$B \geq 0, \quad R^* = R \geq \frac{1}{4}A, \quad A = A^* \geq 0.$$

При этом устойчивость будет иметь место в полунорме

$$\|Y^j\|^2 = \frac{1}{4} \left(\|y^j + y^{j-1}\|_{(1)}^2 + \|y^j - y^{j-1}\|_{(2)}^2 \right).$$

Упражнение. Доказать сформулированное выше достаточное условие устойчивости трехслойных разностных схем по начальным данным.

ГЛАВА IV

Разностные схемы для уравнений эллиптического типа

§ 1. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона

Как уже отмечалось ранее, постановка исходной дифференциальной задачи выглядит следующим образом: требуется найти непрерывную в некоторой области G p -мерного евклидова пространства с границей Γ функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению Пуассона

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x \in G \quad (1.1)$$

и условию первого рода (Дирихле) на границе

$$u|_\Gamma = \mu(x). \quad (1.2)$$

Для простоты изложения будем вести на примере задачи Дирихле на плоскости (т.е. будем предполагать $p = 2$). Случай $p > 2$ с теоретической точки зрения аналогичен.

1.1. Простейшая разностная схема

Сложность численного решения поставленной выше задачи существенно зависит от формы области, в которой она ставится. Сообразно этому рассмотрим два случая:

1⁰. Область G – прямоугольник: $\bar{G} = \{0 \leq x_1 \leq l_1; 0 \leq x_2 \leq l_2\}$.

Построим в области \bar{G} равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2}$ с шагами $h_1 = \frac{l_1}{N_1}$ и

$h_2 = \frac{l_2}{N_2}$. Тогда в каждом внутреннем узле $x \in \omega_h$ для аппроксимации исходного дифференциального оператора Лапласа может быть использован пятиточечный регулярный шаблон «крест», все узлы которого $x^{(\pm 1_\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, принадлежат сетке $\bar{\omega}_h$. Поэтому во всех внутренних узлах оператор Лапласа можно заменить разностным оператором

$$\Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}.$$

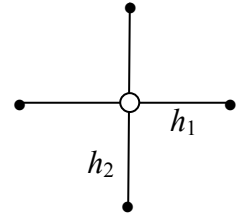
Правую часть уравнения (1.1) можно по стандартной схеме аппроксимировать некоторой сеточной функцией $\varphi(x)$ так, чтобы $\varphi(x) - f(x) = O(|h|^2)$ (например, считая $f(x)$ непрерывной, положим $\varphi(x) = f(x)$, $x \in \omega_h$).

В результате задаче (1.1), (1.2) будет поставлена в соответствие разностная задача Дирихле

$$\begin{cases} \Lambda u = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ u(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1.3)$$

Оператор Λ в (1.3) – пятиточечный сеточный оператор:

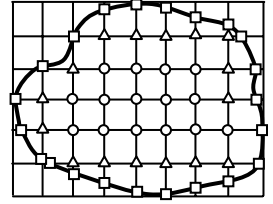
$$\Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{h_1^2} (u^{(+1_1)} - 2u + u^{(-1_1)}) + \frac{1}{h_2^2} (u^{(+1_2)} - 2u + u^{(-1_2)}).$$



Легко видеть, что разностная схема (1.3) аппроксимирует исходную задачу (1.1), (1.2) с погрешностью $O(h_1^2 + h_2^2)$, т.е. является схемой второго порядка.

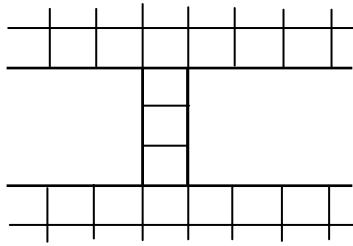
2⁰. Область \bar{G} является областью сложной формы.

Построим в ней прямоугольную сетку так, как это описано в § 1 (гл. XV, Методы численного анализа). При этом такая сетка, как уже отмечалось, неравномерна вблизи границы. Для построения разностной схемы, аппроксимирующей (1.1), (1.2), целесообразно все внутренние узлы сетки $\bar{\omega}_h$ разбить на два подмножества:

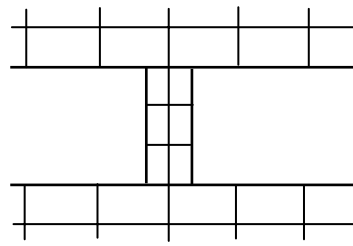


$\bar{\omega}_h = \dot{\omega}_h + \hat{\omega}_h$, где $\dot{\omega}_h$ – множество **внутренних регулярных** узлов сетки ω_h , для которых расстояние от них до границы Γ не меньше полного шага сетки по каждому из направлений (на рисунке они обозначены кружочками); $\hat{\omega}_h$ – множество **внутренних нерегулярных** узлов, т.е. тех узлов ω_h , для которых расстояние до границы Γ хотя бы по одному направлению меньше полного шага по данному направлению (на рисунке - треугольники). Кроме того, на рисунке квадратиками обозначены граничные узлы.

Помимо этого, будем предполагать также, что сетка $\bar{\omega}_h$ является связной (определение см. § 1 (гл. XVII, Методы численного анализа)).



а) несвязная сетка



б) связная сетка

После такой подготовительной работы разностная схема в области сложной формы может быть построена достаточно просто. Действительно, если узел $x \in \dot{\omega}_h$, то оператор Δu можно заменить его разностным аналогом на **регулярном** шаблоне «крест»:

$$\Delta u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}. \quad (1.4)$$

Если же $x \in \hat{\omega}_h$, то для аппроксимации Δu следует использовать нерегулярный шаблон «крест» и, соответственно, вторые разностные производные на нерегулярном шаблоне:

$$\Lambda^* u = \Lambda_1^* u + \Lambda_2^* u = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}, \quad (1.5)$$

где

$$y_{\bar{x}_a \hat{x}_a} = \frac{1}{\hat{h}_a} \left(\frac{y^{(+1_a)} - y}{h_a^+} - \frac{y - y^{(-1_a)}}{h_a^-} \right), \quad \hat{h}_a = \frac{h_a^+ + h_a^-}{2},$$

т.е. окончательно разностная задача может быть записана в виде

$$\begin{cases} \Delta u = -\varphi(x), & x \in \dot{\omega}_h, \\ \Lambda^* u = -\varphi(x), & x \in \hat{\omega}_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (1.6)$$

где операторы Λ и Λ^* определяются формулами (1.4), (1.5).

Легко видеть, что разностная схема (1.6) имеет второй порядок аппроксимации при $x \in \dot{\omega}_h$, первый – при $x \in \dot{\omega}_h^*$, и точна при $x \in \gamma_h$.

Заметим, однако, что на множестве узлов $x \in \dot{\omega}_h^*$ чаще используется несколько отличный от (1.5) способ аппроксимации оператора Лапласа, сохраняющий такое важное свойство исходного дифференциального оператора как самосопряженность и знакоопределенность (это важно при построении эффективных методов реализации). Указанная замена имеет вид

$$\Lambda^{**}y = -\varphi(x), \quad x \in \dot{\omega}_h^*, \quad \Lambda^{**}y = \Lambda_1^{**}y + \Lambda_2^{**}y, \quad (1.7)$$

где

$$\Lambda_\alpha^{**}y = \begin{cases} \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} - \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-} \right), & \text{если } x^{(-1_\alpha)} \in \gamma_h, \\ \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^+} - \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha} \right), & \text{если } x^{(+1_\alpha)} \in \gamma_h, \\ \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^+} - \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-} \right), & \text{если } x^{(-1_\alpha)} \in \gamma_h, x^{(+1_\alpha)} \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1.8)$$

Формальное различие между операторами (1.6) и (1.8) в замене множителя $\frac{1}{h_\alpha}$ в (1.6) на $\frac{1}{h_\alpha}$ в (1.8). Но при этом оператор (1.8) имеет нулевой (!) (показать!) порядок аппроксимации.

Замечание. С формальной точки зрения операторы (1.6) и (1.8) в случае равномерной сетки переходят в оператор (1.4). Поэтому разностную схему можно было записать и без разбиения указанным выше способом множества узлов сетки. Однако с точки зрения исследования запись, которую мы применили, более предпочтительна.

1.2. Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле

Применим принцип максимума для получения априорных оценок решения построенных выше разностных схем для задачи Дирихле. Для этого предварительно докажем еще одну (в дополнение к рассмотренным ранее) теорему, дающую априорную оценку решения задачи

$$\begin{cases} Sy(x) = F(x), & x \in \omega, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma, \end{cases} \quad (1.9)$$

где оператор S и свойства его коэффициентов определены ранее (см. § 1 главы XVII, Методы численного анализа).

Теорема 1. Пусть $\omega = \dot{\omega} + \dot{\omega}^*$, где $\dot{\omega}$ – связная сетка и $D(x) \geq 0$ на $\dot{\omega}$, $D(x) > 0$ на $\dot{\omega}^*$. Тогда решение задачи (1.9) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\|y(x)\|_{C_{\dot{\omega}}^-} \leq \|\mu(x)\|_{C_\gamma} + \|U(x)\|_{C_{\dot{\omega}}^-} + \left\| \frac{F(x)}{D(x)} \right\|_{C_{\dot{\omega}}}, \quad (1.10)$$

где $U(x)$ – мажорантная функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} SU(x) = \bar{F}(x), & x \in \omega, \\ U(x) \geq 0 & \text{при } x \in \gamma, \\ \bar{F}(x) \geq |F(x)| & \text{при } x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \bar{F}(x) \geq 0 & \text{при } x \in \overset{*}{\omega}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Доказательство.

Однородная задача

$$\begin{cases} Sy(x) = 0, & x \in \omega, \\ y(x) = 0, & x \in \gamma \end{cases}$$

в силу принципа максимума (см. § 1 (гл. XVII, Методы численного анализа)) имеет только тривиальное решение.

Представим решение задачи (1.11) в виде суммы трех слагаемых:

$$y(x) = \overset{1}{y}(x) + \overset{2}{y}(x) + \overset{3}{y}(x),$$

где

$$\begin{cases} S \overset{1}{y}(x) = 0, & x \in \omega, \\ \overset{1}{y}(x) = \mu(x), & x \in \gamma; \end{cases} \quad \begin{cases} S \overset{2}{y}(x) = F(x), & x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ S \overset{2}{y}(x) = 0, & x \in \overset{*}{\omega}, \\ \overset{2}{y}(x) = 0, & x \in \gamma; \end{cases} \quad \begin{cases} S \overset{3}{y}(x) = 0, & x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ S \overset{3}{y}(x) = F(x), & x \in \overset{*}{\omega}, \\ \overset{3}{y}(x) = 0, & x \in \gamma. \end{cases}$$

В силу Следствия 3 (§ 1, гл. XVII, Методы численного анализа) имеем:

$$\left\| \overset{1}{y}(x) \right\|_{C_{\gamma}^{\omega}} \leq \|\mu(x)\|_{C_{\gamma}}. \quad (1.12)$$

Функцию $\overset{2}{y}(x)$ оценим с помощью мажорантной функции $U(x)$, определяемой условиями (1.11) (Теорема 2, § 1 (гл. XVII, Методы численного анализа)):

$$\left\| \overset{2}{y}(x) \right\|_{C_{\omega}^{\omega}} \leq \|U(x)\|_{C_{\omega}^{\omega}}. \quad (1.13)$$

Далее, так как $\overset{\circ}{\omega}$ – связная область и $D(x) > 0$ при $x \in \overset{*}{\omega}$, то в силу Теоремы 4 (§ 1, гл. XVII, Методы численного анализа) имеем:

$$\left\| \overset{3}{y}(x) \right\|_{C_{\omega}^{\omega}} \leq \left\| \frac{F(x)}{D(x)} \right\|_{C_{\omega}^{\omega}}. \quad (1.14)$$

Суммируя оценки (1.12) – (1.14), окончательно получаем:

$$\|y(x)\|_{C_{\bar{\omega}}} \leq \|\mu(x)\|_{C_{\gamma}} + \|U(x)\|_{C_{\bar{\omega}}} + \left\| \frac{F(x)}{D(x)} \right\|_{C_{\bar{\omega}}}.$$

⊠

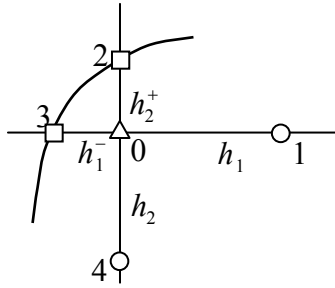
Рассмотрим теперь разностную задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Lambda y = -\varphi(x), & x \in \mathring{\omega}_h, \\ \Lambda^{**} y = -\varphi(x), & x \in \mathring{\omega}_h^*, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (1.15)$$

где Λ^{**} определяется формулами (1.7), (1.8).

Запишем (1.15) в канонической форме. В регулярных узлах ($x \in \mathring{\omega}$) имеем:

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y(x) = \frac{1}{h_1^2}(y^{(+1_1)} + y^{(-1_1)}) + \frac{1}{h_2^2}(y^{(+1_2)} + y^{(-1_2)}) + \varphi(x). \quad (1.16)$$



Таким образом, в данном случае все условия на коэффициенты разностного оператора, предъявляемые принципом максимума, выполняются, причем $D(x) \equiv 0$.

Пусть теперь $x \in \mathring{\omega}^*$ и реализуется ситуация, изображенная на рисунке. Тогда, учитывая вид Λ^{**} , можем записать (у нас в изображенной на рисунке ситуации $x^{(-1_1)} \in \gamma$ и $x^{(+1_2)} \in \gamma$):

$$\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 h_1^-} + \frac{1}{h_2 h_2^+} + \frac{1}{h_2^2}\right)y(x) = \frac{1}{h_1^2}y^{(+1_1)} + \frac{1}{h_2^2}y^{(-1_2)} + \varphi(x) + \frac{1}{h_1 h_1^-}\mu(x^{(-1_1)}) + \frac{1}{h_2 h_2^+}\mu(x^{(+1_2)}). \quad (1.17)$$

Если же, например, $x^{(-1_1)} \in \gamma$, а $x^{(+1_2)} \notin \gamma$, то вместо (1.17) получим соотношение

$$\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 h_1^-} + \frac{2}{h_2^2}\right)y(x) = \frac{1}{h_1^2}y^{(+1_1)} + \frac{1}{h_2^2}(y^{(-1_2)} + y^{(+1_2)}) + \varphi(x) + \frac{1}{h_1 h_1^-}\mu(x^{(-1_1)}). \quad (1.17')$$

Все другие случаи расположения нерегулярных узлов могут быть рассмотрены аналогично (рассмотреть!). Из (1.17), (1.17') видим, что вновь $A(x) > 0$, $B(x, \xi) > 0$ и

$$D(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_1 h_1^-} + \frac{1}{h_2 h_2^+}, & x^{(-1_1)} \in \gamma, \quad x^{(+1_2)} \in \gamma, \\ \frac{1}{h_1 h_1^+}, & x^{(-1_1)} \in \gamma, \quad x^{(+1_2)} \notin \gamma. \end{cases}$$

Разбор всех случаев позволяет утверждать, что в области $x \in \mathring{\omega}^*$ для $D(x)$ верна оценка

$$D(x) \geq \frac{1}{h^2}, \quad h = \max\{h_1^+, h_2^+\}. \quad (1.18)$$

Таким образом, если $x \in \omega$ и все узлы $\xi \in \mathcal{M}'(x)$ – внутренние, то $D(x) = 0$; если же по крайней мере один из соседних узлов попадает на границу и $x \in \omega^*$, то $D(x) > 0$, т.е. $D(x) \geq 0$ при $x \in \omega$.

Пусть $y = y(x)$ – решение задачи (1.15), а $u(x)$ – решение исходной дифференциальной задачи (1.1), (1.2). Обозначим, как и ранее, через $z(x) = y(x) - u(x)$ погрешность приближенного решения. Тогда, учитывая линейность разностной схемы, для сеточной функции $z(x)$ можем записать задачу

$$\begin{cases} \Lambda z(x) = -\psi(x), & x \in \dot{\omega}, \\ \Lambda^{**} z(x) = -\psi^{**}(x), & x \in \omega^*, \\ z(x) = 0, & x \in \gamma \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} Sz(x) = \psi(x), & x \in \dot{\omega}, \\ Sz(x) = \psi^{**}(x), & x \in \omega^*, \\ z(x) = 0, & x \in \gamma \end{cases} \quad (1.19)$$

Построим мажорантную функцию, о которой идет речь в доказанной выше теореме, для задачи

$$\begin{cases} S\ddot{z}(x) = \psi(x), & x \in \dot{\omega}, \\ S\ddot{z}(x) = 0, & x \in \omega^*, \\ \ddot{z}(x) = 0, & x \in \gamma. \end{cases} \quad (1.20)$$

Пусть начало координат $O(0;0)$ принадлежит области \overline{G} , в которой поставлена исходная задача, и R – радиус наименьшего круга с центром в точке $O(0;0)$, содержащего область \overline{G} . Положим

$$U(x) = \frac{K}{4}(R^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad (1.21)$$

где $K > 0$ – постоянная, которую мы выберем позже.

В силу выбора R для всех значений $x \in \overline{G}$ выполняется неравенство $U(x) \geq 0$.

Кроме того, если $x \in \dot{\omega}$, то

$$\begin{aligned} \Lambda U &= -\frac{K}{4} \left(\frac{1}{h_1} \left(\frac{(x_1 + h_1)^2 - x_1^2}{h_1} - \frac{x_1^2 - (x_1 - h_1)^2}{h_1} \right) + \frac{1}{h_2} \left(\frac{(x_2 + h_2)^2 - x_2^2}{h_2} - \frac{x_2^2 - (x_2 - h_2)^2}{h_2} \right) \right) = \\ &= -\frac{K}{4} \left(\frac{(2x_1 + h_1) - (2x_1 - h_1)}{h_1} + \frac{(2x_2 + h_2) - (2x_2 - h_2)}{h_2} \right) = -K. \end{aligned}$$

Если же $x \in \omega^*$, то в общем случае можно записать: $\Lambda^{**}U = -\kappa K$, где величина κ зависит от того, сколько и какие узлы попадают на границу сеточной области. Например, если $x^{(-1)} \in \gamma$ и $x^{(+1_2)} \in \gamma$ (вообще – две точки), то

$$\begin{aligned}\Lambda^{**}U &= -\frac{K}{4} \left(\frac{1}{h_1} \left(\frac{(x_1 + h_1)^2 - x_1^2}{h_1} - \frac{x_1^2 - (x_1 - h_1^-)^2}{h_1^-} \right) + \frac{1}{h_2} \left(\frac{(x_2 + h_2^+)^2 - x_2^2}{h_2^+} - \frac{x_2^2 - (x_2 - h_2)^2}{h_2} \right) \right) = \\ &= -\frac{K}{4} \left(\frac{(2x_1 + h_1) - (2x_1 - h_1^-)}{h_1} + \frac{(2x_2 + h_2^+) - (2x_2 - h_2)}{h_2} \right) = -\frac{K}{4} \left(\frac{h_1 + h_1^-}{h_1} + \frac{h_2 + h_2^+}{h_2} \right) = -\kappa K.\end{aligned}$$

В этом случае, очевидно, $\kappa > \frac{1}{2}$. В то же время, если границе сеточной области принадлежит только точка $x^{(-1)}$ (вообще – одна точка), то

$$\begin{aligned}\Lambda^{**}U &= -\frac{K}{4} \left(\frac{1}{h_1} \left(\frac{(x_1 + h_1)^2 - x_1^2}{h_1} - \frac{x_1^2 - (x_1 - h_1^-)^2}{h_1^-} \right) + \frac{1}{h_2} \left(\frac{(x_2 + h_2)^2 - x_2^2}{h_2} - \frac{x_2^2 - (x_2 - h_2)^2}{h_2} \right) \right) = \\ &= -\frac{K}{4} \left(\frac{(2x_1 + h_1) - (2x_1 - h_1^-)}{h_1} + \frac{(2x_2 + h_2) - (2x_2 - h_2)}{h_2} \right) = -\frac{K}{4} \left(\frac{h_1 + h_1^-}{h_1} + 2 \right) = -\kappa K\end{aligned}$$

и, таким образом, $\kappa > \frac{3}{4}$.

Наконец, если на границе сеточной области расположены три из четырех точек, участвующих в аппроксимации, то $\Lambda^{**}U = -\kappa K$, где $\kappa > \frac{1}{4}$.

Таким образом, при всех $x \in \mathring{\omega}^*$ имеем: $\Lambda^{**}U = -\kappa K$, где $\kappa > \frac{1}{4}$. Поэтому сеточная функция $U(x)$ удовлетворяет разностной задаче

$$\begin{cases} SU(x) = K, & x \in \mathring{\omega}, \\ SU(x) = \kappa K, & x \in \mathring{\omega}^*, \quad \left(\kappa > \frac{1}{4} \right) \\ U(x) \geq 0, & x \in \gamma. \end{cases}$$

Сравнивая эту задачу с (1.20), видим, что $U(x) \geq \left| \frac{1}{2} z(x) \right|$, если положить, например,

$$K = \|\psi(x)\|_{C_{\mathring{\omega}}}. \text{ Следовательно, } 0 \leq U(x) \leq \frac{R^2}{4} K = \frac{R^2}{4} \|\psi(x)\|_{C_{\mathring{\omega}}}.$$

Учитывая, что $D(x) \geq 0$ при $x \in \mathring{\omega}$ и $D(x) \geq \frac{1}{h^2}$ при $x \in \mathring{\omega}^*$, на основании Теоремы 1 получаем оценку

$$\|z(x)\|_{C_{\omega}} = \|y(x) - u(x)\|_{C_{\omega}} \leq \frac{R^2}{4} \|\psi(x)\|_{C_{\mathring{\omega}}} + h^2 \|\psi^{**}(x)\|_{C_{\mathring{\omega}}^*}.$$

Отсюда следует

Теорема 2. Если решение задачи (1.1), (1.2) $u(x) \in C^4(\overline{G})$, то решение разностной задачи (1.15) равномерно сходится к нему со скоростью $O(|h|^2)$, т.е.

$$\|y(x) - u(x)\|_{C_\omega} \leq M|h|^2, \quad M = \text{const} > 0.$$

Аналогичная оценка справедлива и для задачи (1.6).

1.3. Схема повышенного порядка точности для уравнения Пуассона

Возвращаясь вновь к случаю, когда область \overline{G} есть прямоугольник, построим на равномерной по каждому направлению сетке $\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_{h_1} \times \overline{\omega}_{h_2}$ разностную схему четвертого порядка аппроксимации.

Возьмем за основу разностную задачу Дирихле в прямоугольнике (1.3)

$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases}$$

которая, как отмечалось выше, имеет второй порядок аппроксимации по каждой переменной при надлежащем выборе сеточной функции $\varphi(x)$, и применим к ней процедуру повышения порядка аппроксимации на решении исходной дифференциальной задачи.

Итак, исследуем погрешность аппроксимации:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} + \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + O(h_1^4) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + O(h_2^4) + \varphi = \\ &= \varphi - f + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + O(h_1^4 + h_2^4). \end{aligned}$$

Отсюда видим, что, выбрав $\varphi(x) = f(x) + O(h_1^2 + h_2^2)$ (например, $\varphi(x) = f(x)$ при $x \in \omega_h$) получим разностную схему второго порядка, о чем уже говорилось выше.

Если же выбрать

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_1^4} - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_2^4} + O(h_1^4 + h_2^4), \quad (1.22)$$

то в итоге можно было бы получить схему с погрешностью $O(h_1^4 + h_2^4)$. Однако при этом для аппроксимации производных четвертого порядка потребуется как минимум пятиточечный шаблон по каждому направлению, что не соответствует требованию минимальности. Поэтому, используя исходное уравнение Пуассона, найдем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -f(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

откуда

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} = -\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2};$$

аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

откуда

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = -\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}.$$

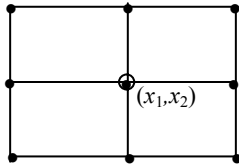
Таким образом, (1.22) можно переписать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Наконец, выполнив в последнем соотношении замену производных разностными аналогами

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = f_{\bar{x}_1 x_1} + O(h_1^2); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = f_{\bar{x}_2 x_2} + O(h_2^2); \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + O(h_1^2 + h_2^2),$$

получим на девятиточечном шаблоне типа «ящик» разностную схему



$$\begin{cases} \Lambda y = -\varphi(x), & x \in \omega_h, & \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, & \varphi = f + \frac{h_1^2}{12} f_{\bar{x}_1 x_1} + \frac{h_2^2}{12} f_{\bar{x}_2 x_2}, \end{cases} \quad (1.23)$$

имеющую четвертый порядок аппроксимации по каждой переменной.

Приведем разностную схему (1.23) к каноническому виду (для применения принципа максимума), развернув предварительно разностные операторы:

$$\begin{aligned} & \frac{y^{(+1)} - 2y + y^{(-1)}}{h_1^2} + \frac{y^{(+1_2)} - 2y + y^{(-1_2)}}{h_2^2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \times \\ & \times \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{y^{(+1, +1_2)} - 2y^{(+1_2)} + y^{(-1, +1_2)}}{h_1^2} - 2 \frac{y^{(+1)} - 2y + y^{(-1)}}{h_1^2} + \frac{y^{(+1, -1_2)} - 2y^{(-1_2)} + y^{(-1, -1_2)}}{h_1^2} \right) = -\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{3} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) (y^{(+1)} + y^{(-1)}) + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) (y^{(+1_2)} + y^{(-1_2)}) + \\ & + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) (y^{(+1, +1_2)} + y^{(-1, +1_2)} + y^{(+1, -1_2)} + y^{(-1, -1_2)}) + \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, условие неотрицательности коэффициентов приводит к ограничениям

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}. \quad (1.24)$$

При выполнении этого ограничения может быть доказано утверждение, аналогичное *Теореме 2*, и говорящее о том, что разностная схема (1.23) имеет четвертый порядок точности, если $u \in C^{6,6}(\bar{G})$ и $f \in C^{4,4}(\bar{G})$.

Упражнение. Доказать сформулированное выше утверждение.

§ 2. Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами

Как уже отмечалось ранее, важной характеристикой разностных схем является их консервативность, а одним из известных способов построения разностных схем, сохраняющим консервативность исходной задачи, является интегро-интерполяционный метод (метод баланса), основную идеологию которого мы рассматривали выше.

Формально такой подход ничем не отличается от аналогичного подхода в одномерном случае. Однако проиллюстрируем его более детально на примере задачи Дирихле в прямоугольнике \bar{G} следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = -f(x), & x \in G, \\ u|_{\Gamma} = \mu(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (2.1)$$

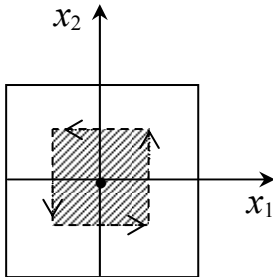
Найдем выражение для закона сохранения, соответствующего данному уравнению. С этой целью проинтегрируем уравнение (2.1) по произвольной области $D \subseteq \bar{G}$:

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f(x) \right] dx_1 dx_2 = 0.$$

Переходя от двойного интеграла к контурному по формуле Грина, будем иметь:

$$\oint_{\partial D} \left[k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 \right] + \iint_D f(x) dx_1 dx_2 = 0 \quad (2.2)$$

(здесь ∂D – положительно ориентированная граница области D).



Для построения разностной схемы зададим в \bar{G} сетку $\bar{\omega}_h$ и запишем уравнение баланса, выбрав в качестве D элементарную ячейку

$$\Delta_{i_1 i_2} = \{ (x_1, x_2) : x_{1,i_1-0.5} \leq x_1 \leq x_{1,i_1+0.5}; \quad x_{2,i_2-0.5} \leq x_2 \leq x_{2,i_2+0.5} \}.$$

Тогда в формуле (2.2) интеграл по контуру (направление обхода указано на рисунке) трансформируется следующим образом:

$$\int_{\partial \Delta_{i_1 i_2}} \left[k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 \right] = - \int_{x_{1,i_1-0.5}}^{x_{1,i_1+0.5}} k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2,i_2-0.5}} dx_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_{1,j_1+0.5}} dx_2 + \int_{x_{1,j_1-0.5}}^{x_{1,j_1+0.5}} k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2,j_2+0.5}} dx_1 - \int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_{1,j_1-0.5}} dx_2 = \\
& = h_1 \left[\int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_{1,j_1-0.5}} dx_2 \right]_{x_1} + h_2 \left[\int_{x_{1,j_1-0.5}}^{x_{1,j_1+0.5}} k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2,j_2-0.5}} dx_1 \right]_{x_2}.
\end{aligned}$$

Поэтому уравнение баланса примет вид

$$h_1 \left[\int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_{1,j_1-0.5}} dx_2 \right]_{x_1} + h_2 \left[\int_{x_{1,j_1-0.5}}^{x_{1,j_1+0.5}} k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_{2,j_2-0.5}} dx_1 \right]_{x_2} + \int_{x_{1,j_1-0.5}}^{x_{1,j_1+0.5}} \int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} f(x) dx_1 dx_2 = 0. (2.3)$$

Аппроксимируем последнее выражение путем интерполяции подынтегральных функций.

Обозначая $L_\alpha u = k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$, получаем: $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{L_\alpha u}{k_\alpha(x)}$. Отсюда, интегрируя последнее соотношение по переменной x_α в пределах от $x_{\alpha,j_\alpha-1}$ до x_{α,j_α} , имеем:

$$\frac{u - u^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \int_{x_{\alpha,j_\alpha-1}}^{x_{\alpha,j_\alpha}} \frac{L_\alpha u}{k_\alpha(x)} dx_\alpha.$$

Интерполируя функцию $L_\alpha u$ под знаком интеграла по ее значению в середине отрезка интегрирования, т.е. полагая $L_\alpha u \approx L_\alpha u(x_{\alpha,j_\alpha-0.5})$, получаем:

$$L_1 u(x_{1,j_1-0.5}, x_2) \approx (u(x_{1,j_1}, x_2))_{\bar{x}_1} \cdot \left[\frac{1}{h_1} \int_{x_{1,j_1-1}}^{x_{1,j_1}} \frac{dx_1}{k_1(x)} \right]^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} L_1 u \Big|_{x_1=x_{1,j_1-0.5}} dx_2 & \approx \int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} (u(x_{1,j_1}, x_2))_{\bar{x}_1} \left[\frac{1}{h_1} \int_{x_{1,j_1-1}}^{x_{1,j_1}} \frac{dx_1}{k_1(x)} \right]^{-1} dx_2 \approx \\
& \approx (u(x_{1,j_1}, x_2))_{\bar{x}_1} \int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} \left[\frac{1}{h_1} \int_{x_{1,j_1-1}}^{x_{1,j_1}} \frac{dx_1}{k_1(x)} \right]^{-1} dx_2 = h_2 a_1 u_{\bar{x}_1},
\end{aligned}$$

где

$$a_1 = \frac{1}{h_2} \int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} \left[\frac{1}{h_1} \int_{x_{1,j_1-1}}^{x_{1,j_1}} \frac{dx_1}{k_1(x)} \right]^{-1} dx_2.$$

Аналогично

$$\int_{x_{1,j_1-0.5}}^{x_{1,j_1+0.5}} L_2 u \Big|_{x_2=x_{2,j_2-0.5}} dx_1 \approx h_1 a_{21} u_{\bar{x}_2},$$

где

$$a_2 = \frac{1}{h_1} \int_{x_{1,j_1-0.5}}^{x_{1,j_1+0.5}} \left[\frac{1}{h_2} \int_{x_{2,j_2-1}}^{x_{2,j_2}} \frac{dx_2}{k_2(x)} \right]^{-1} dx_1.$$

Используя эти приближения в уравнении баланса (2.3) и поделив последнее на $h_1 h_2$, получим разностную схему

$$\begin{cases} \Lambda y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -\varphi, & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{h_2} \int_{x_{2,j_2-0.5}}^{x_{2,j_2+0.5}} \left[\frac{1}{h_1} \int_{x_{1,i_1-1}}^{x_{1,i_1}} \frac{dx_1}{k_1(x)} \right]^{-1} dx_2, \quad a_2 = \frac{1}{h_1} \int_{x_{1,i_1-0.5}}^{x_{1,i_1+0.5}} \left[\frac{1}{h_2} \int_{x_{2,j_2-1}}^{x_{2,j_2}} \frac{dx_2}{k_2(x)} \right]^{-1} dx_1, \quad (2.5)$$

$$\varphi = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Delta_{1,1,2}} f(x) dx_1 dx_2.$$

Как и в одномерном случае, можно показать, что разностная схема (2.4) с коэффициентами (2.5) имеет второй порядок аппроксимации как в случае гладких коэффициентов k_α и f , так и в случае кусочно-гладких.

«Обработку» формул (2.5) для коэффициентов можно вести также по аналогии с одномерным случаем, применяя (в случае гладких коэффициентов) соответствующие приближенные формулы для замены интегралов.

§ 3. Методы решения сеточных уравнений

В этом параграфе мы будем вести речь о способах реализации построенных выше разностных схем. В отличие от разностных схем для уравнений переноса, в которых расчеты можно было вести послойно при помощи явных рекуррентных формул, либо схем для уравнений теплопроводности, либо колебаний, в которых расчеты также ведутся послойно либо по явным рекуррентным формулам, либо путем решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей на каждом слое, в данном случае разностная задача представляет собой «полновесную» систему линейных алгебраических уравнений. С чисто формальной точки зрения эта задача больших проблем не представляет. Однако, учитывая, что матрица полученной системы также имеет определенную специфику (а именно: каждое уравнение имеет лишь небольшое число коэффициентов, отличных от нуля: для шаблона «крест» пять, для шаблона «ящик» – девять), можно попытаться получить алгоритмы более экономичные, нежели общие алгоритмы решения линейных систем. Естественно, при этом возможность применения того или иного алгоритма или сложность его адаптации будут существенно зависеть от вида разностной задачи (в частности, постоянны или переменны коэффициенты исходного дифференциального оператора), а также от формы области. Чаще всего далее мы будем вести изложение на примере разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

3.1. Прямые методы

Итак, рассмотрим разностную задачу Дирихле в прямоугольнике

$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi, & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (3.1)$$

Сведем ее к задаче с однородными граничными условиями путем изменения правой части уравнения в приграничных узлах. Стандартный прием такого преобразования

состоит в перенесении известных величин в правую часть уравнения, записанного в приграничных узлах. Например, если $x = (h_1, h_2)$, то уравнение Пуассона в этом узле записывается в виде

$$\frac{1}{h_1^2}(y(0, h_2) - 2y(h_1, h_2) + y(2h_1, h_2)) + \frac{1}{h_2^2}(y(h_1, 0) - 2y(h_1, h_2) + y(h_1, 2h_2)) = -\varphi(h_1, h_2).$$

Так как $y(0, h_2) = \mu(0, h_2)$, $y(h_1, 0) = \mu(h_1, 0)$, то, перенося эти величины в правую часть, будем иметь:

$$\frac{1}{h_1^2}(-2y(h_1, h_2) + y(2h_1, h_2)) + \frac{1}{h_2^2}(-2y(h_1, h_2) + y(h_1, 2h_2)) = -\left[\varphi(h_1, h_2) + \frac{1}{h_1^2}\mu(0, h_2) + \frac{1}{h_2^2}\mu(h_1, 0)\right].$$

Проводя аналогичные преобразования для каждой приграничной точки, получим разностные уравнения, не содержащие значений $y(x)$ на границе в левой части уравнений. Правые части уравнений для приграничных узлов отличаются от правой части $\varphi(x)$. Если обозначить построенную правую часть через $f(x)$, то она будет определяться формулами

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{h_1^2}\varphi_1(x) + \frac{1}{h_2^2}\varphi_2(x), \quad (3.2)$$

где

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \mu(0, x_2), & x_1 = h_1, \\ 0, & 2h_1 \leq x_1 \leq l_1 - 2h_1, \\ \mu(l_1, x_2), & x_1 = l_1 - h_1, \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} \mu(x_1, 0), & x_2 = h_2, \\ 0, & 2h_2 \leq x_2 \leq l_2 - 2h_2, \\ \mu(x_1, l_2), & x_2 = l_2 - h_2. \end{cases}$$

Левая часть преобразованных уравнений отличается от записи разностного оператора Лапласа для приграничных узлов. Однако, если положить $u(x) = \begin{cases} y(x), & x \in \omega_h, \\ 0, & x \in \gamma_h, \end{cases}$ то уравнения во всех узлах сетки будут записываться одинаково (переобозначая искомую функцию вновь через $y(x)$):

$$\begin{cases} \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = -f, & x \in \omega_h, \\ y(x) = 0, & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1.1. Метод разделения переменных

Пусть $\mu_k(x_2)$ и λ_k – собственные функции и собственные значения оператора Λ_2 , т.е. решения задачи

$$\begin{cases} \Lambda_2 \mu_k + \lambda_k \mu_k = 0, & h_2 \leq x_2 \leq l_2 - h_2, \\ \mu_k(0) = \mu_k(l_2) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ранее мы показали, что $\mu_k(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{k\pi x_2}{l_2}$, $\lambda_k = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k\pi h_2}{2l_2}$, $k = \overline{1, N_2 - 1}$. Будем искать решение задачи (3.3) в виде

$$y_{i_1 i_2} = \sum_{k=1}^{N_2-1} C_k(i_1 h_1) \mu_k(i_2 h_2), \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}; \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \quad (3.5)$$

где $C_k(i_1 h_1)$ – коэффициенты Фурье.

Подставив (3.5) в (3.3), получим:

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = \sum_{k=1}^{N_2-1} [\mu_k(i_2 h_2) \Lambda_1 C_k(i_1 h_1) + C_k(i_1 h_1) \Lambda_2 \mu_k(i_2 h_2)] = - \sum_{k=1}^{N_2-1} \varphi_k(i_1 h_1) \mu_k(i_2 h_2). \quad (3.6)$$

Здесь $\varphi_k(i_1 h_1)$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$:

$$\varphi_k(i_1 h_1) = (\varphi, \mu_k) = \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_2 \varphi(i_1 h_1, i_2 h_2) \mu_k(i_2 h_2).$$

Учитывая (3.4), а также ортогональность системы $\{\mu_k\}$, из (3.6) получаем задачу для определения $C_k(i_1 h_1)$:

$$\begin{cases} \Lambda_1 C_k - \lambda_k C_k = -\varphi_k, & h_1 \leq x_1 \leq l_1 - h_1, \\ C_k(0) = C_k(l_1) = 0, \end{cases} \quad k = \overline{1, N_2 - 1}. \quad (3.7)$$

Отсюда видно, что функция $C_k(i_1 h_1)$ как функция $x_1 = i h_1$ для каждого k может быть найдена методом прогонки, т.е. всего алгоритм прогонки необходимо использовать $N_2 - 1$ раз.

Зная $C_k(i_1 h_1)$, по формуле (3.5) найдем решение задачи (3.3). Вычисление коэффициентов Фурье φ_k и нахождение решения $y_{i_1 i_2}$ может быть выполнено по одним и тем же формулам. Здесь общим является вычисление сумм вида

$$v_j = \sum_{k=1}^{N-1} z_k \sin \frac{k \pi j}{N}, \quad j = \overline{1, M-1}.$$

Для этого используется специальный алгоритм **быстрого преобразования Фурье**, идея которого состоит в том, что в указанной сумме подобные члены группируются прежде, чем выполняется умножение (таковыми будут, учитывая свойства функции $\sin x$, например, $\sin \frac{k \pi j}{N} = (-1)^k \sin \frac{k \pi (N-j)}{N}$). Давать подробное описание соответствующего алгоритма мы не будем. Отметим лишь, что с его помощью решение разностной задачи Дирихле в прямоугольнике может быть вычислено за $O(N_1 N_2 \log_2 N_2)$ арифметических операций (поэтому часто полагают $N_2 = 2^n$).

3.1.2. Метод декомпозиции

Сведем задачу (3.1) к системе векторных уравнений

$$\begin{cases} -Y_{j-1} + C Y_j - Y_{j+1} = F_j, & j = \overline{1, N_2 - 1}, \\ Y_0 = F_0, \quad Y_{N_2} = F_{N_2}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{N_1-1,j})$, $j = \overline{0, N_2}$ – вектор, компонентами которого являются значения сеточной функции y_{ij} на j -й строке сетки,

$$F_j = \left(h_2^2 f_{1j} + \frac{h_2^2}{h_1^2} \mu_{1j}, h_2^2 f_{2j}, \dots, h_2^2 f_{N_1-2,j}, h_2^2 f_{N_1-1,j} + \frac{h_2^2}{h_1^2} \mu_{N_1j} \right), \quad j = \overline{1, N_2-1},$$

$$F_j = (\mu_{1j}, \dots, \mu_{N_1-1,j}), \quad j = 0, N_2.$$

Квадратная матрица C соответствует разностному оператору Λ , где

$$\begin{cases} \Lambda y = 2y - h_2^2 y_{\bar{x}_1 x_1}, & h_1 \leq x_1 \leq l_1 - h_1, \\ y(0) = y(l_1) = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$CY_j = (\Lambda y_{1j}, \dots, \Lambda y_{N_1-1,j}).$$

Перейдем к описанию метода декомпозиции, предполагая, что $N_2 = 2^n$. Его идея состоит в последовательном исключении из уравнений (3.8) векторов Y_j сначала с нечетными номерами, затем – с номерами, кратными двум, но не кратными четырем, затем – кратными четырем, но не кратными восьмью, и т.д.

Запишем для $j = 2, 4, 6, \dots, N_2 - 2$ следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} -Y_{j-2} + CY_{j-1} - Y_j &= F_{j-1}, \\ -Y_{j-1} + CY_j - Y_{j+1} &= F_j, \\ -Y_j + CY_{j+1} - Y_{j+2} &= F_{j+1}. \end{aligned}$$

Применяя к среднему уравнению оператор C и складывая все три уравнения, получим «укороченную» систему:

$$\begin{cases} -Y_{j-2} + C^{(1)}Y_j - Y_{j+2} = -F_j^{(1)}, & j = 2, 4, 6, \dots, N_2 - 2, \\ Y_0 = F_0, \quad Y_{N_2} = F_{N_2}, \end{cases} \quad (3.9)$$

которая содержит неизвестные только с четными номерами и

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= [C^{(0)}]^2 - 2E, \\ F_j^{(1)} &= F_{j-1}^{(0)} + C^{(0)}F_j^{(0)} + F_{j+1}^{(0)}, \quad C^{(0)} = C, \quad F_j^{(0)} = F_j. \end{aligned}$$

Если из (3.9) найдены Y_j с четными номерами, то неизвестные с нечетными номерами можно определить из уравнений

$$C^{(0)}Y_j = F_j^{(0)} + Y_{j+1} + Y_{j-1}, \quad j = 1, 3, \dots, N_2 - 1.$$

Действуя так же, как и при исключении из (3.8) векторов с нечетными номерами, исключим из (3.9) неизвестные с номерами j , кратными двум, но не кратными четырем и т.д. В результате получим систему уравнений для последовательного нахождения всех неизвестных путем решения уравнений

$$\begin{cases} C^{(k-1)}Y_j = F_j^{(k-1)} + Y_{j+2^{k-1}} + Y_{j-2^{k-1}}, & j = 2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-1}, \dots, N_2 - 2^{k-1}, \quad k = n, n-1, \dots, 1, \\ Y_0 = F_0, \quad Y_{N_2} = F_{N_2}, \end{cases} \quad (3.10)$$

где $C^{(k)}$ и $F_j^{(k)}$ определяются по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} C^{(k)} = [C^{(k-1)}]^2 - 2E, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad C^{(0)} = C, \\ F_j^{(k)} = F_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + C^{(k-1)}F_j^{(k-1)} + F_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}, \quad j = 2^k, 2 \cdot 2^k, \dots, N_2 - 2^k, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Чтобы указать экономичный способ решения системы (3.10), заметим, что

$$C^{(k)} = 2T_{2^k}\left(\frac{C}{2}\right), \quad (3.12)$$

где $T_{2^k}(x)$ – полином Чебышева первого рода. Действительно, $C^{(0)} = 2 \cdot \frac{C}{2} = 2T_1\left(\frac{C}{2}\right)$ и так как $T_{2^k}(x) = 2T_{2^{k-1}}^2(x) - 1$, то гипотеза (3.12) оправдывается по методу математической индукции. Поскольку корни полинома $T_{2^k}(x)$ суть $x_l = \cos \frac{(2l-1)\pi}{2^{k+1}}$, $l = 1, 2, \dots, 2^k$, то $C^{(k)}$ можно разложить на множители:

$$C^{(k)} = \prod_{l=1}^{2^k} (C - 2\mu_l E), \quad \text{где } \mu_l = \cos \frac{(2l-1)\pi}{2^{k+1}}. \quad (3.13)$$

Это позволяет свести обращение оператора $C^{(k)}$ к последовательному обращению методом прогонки трехточечных разностных операторов. Действительно, пусть требуется решить уравнение

$$C^{(k)}v = \varphi.$$

Учитывая (3.13), имеем:

$$(C - 2\mu_1 E)(C - 2\mu_2 E) \dots (C - 2\mu_{2^k} E)v = \varphi.$$

Отсюда получаем цепочку разностных уравнений

$$\begin{aligned} (C - 2\mu_1 E)v^{(1)} &= \varphi, \\ (C - 2\mu_2 E)v^{(2)} &= v^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ (C - 2\mu_{2^k} E)v^{(2^k)} &= v^{(2^k-1)}. \end{aligned}$$

Первое из них позволяет найти $v^{(1)}$, второе – $v^{(2)}$ и так далее. Из последнего находим $v^{(2^k)} = v$. При этом каждое из уравнений есть трехточечное уравнение вида

$$\begin{cases} 2v^{(l)} - h_2^2 v_{\bar{x}_l x_l}^{(l)} - 2\mu_l v^{(l)} = v^{(l-1)}, \quad h_1 \leq x_1 \leq l_1 - h_1, \\ v^{(l)}(0) = v^{(l)}(l_1) = 0 \end{cases}$$

и может быть решено методом разностной прогонки.

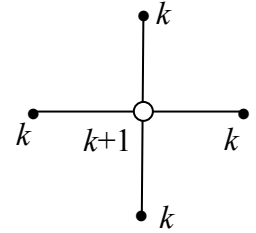
На схеме компактной организации вычислений мы подробно останавливаться не будем.

3.2. Итерационные методы

Прежде всего отметим, что итерационные методы (по крайней мере, по формальной схеме их применения) являются более универсальными по сравнению с изложенными выше прямыми методами. Рассмотрим сейчас простейшие (и достаточно широко применяемые) из таких методов.

3.2.1. Метод простой итерации

Применительно к задаче (1.3) (заметим, что область \bar{G} здесь уже не обязана быть прямоугольником и тогда речь должна идти о задачах (1.6) или (1.7)) схема метода простой итерации может быть формально изображена с помощью рисунка, на котором k обозначает номер итерационного приближения. В индексной форме соответствующий алгоритм примет вид



$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_{i_1 i_2}^{k+1} = \frac{1}{h_1^2} \left(y_{i_1+1, i_2}^k + y_{i_1-1, i_2}^k \right) + \frac{1}{h_2^2} \left(y_{i_1, i_2+1}^k + y_{i_1, i_2-1}^k \right) + \varphi_{i_1 i_2}, \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Для сетки $\bar{\omega}_h^*$ уравнение, определяющее $(k+1)$ -е приближение, записывается аналогично, путем разрешения соответствующего разностного уравнения относительно значения в центральном узле шаблона «крест» (как и для принципа максимума), например (случай, подробно расписанный нами ранее)

$$\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 h_1^-} + \frac{1}{h_2 h_2^+} + \frac{1}{h_2^2} \right) y_{i_1 i_2}^{k+1} = \frac{1}{h_1^2} y_{i_1+1, i_2}^k + \frac{1}{h_1 h_1^-} y_{i_1-1, i_2}^k + \frac{1}{h_2 h_2^+} y_{i_1, i_2+1}^k + \frac{1}{h_2^2} y_{i_1, i_2-1}^k + \varphi_{i_1 i_2}.$$

Для граничных узлов соответствующее уравнение примет вид

$$y_{i_1 i_2}^{k+1} = \mu_{i_1 i_2}.$$

В качестве начального приближения может быть выбран любой (например, нулевой) вектор.

Покажем, что записанный итерационный процесс сходится. Для этого вспомним, что для сходимости одношагового стационарного итерационного процесса

$$B \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + A y^k = \varphi$$

достаточно выполнение условий $A = A^* > 0$ и $B > \frac{\tau}{2} A$. В нашем случае (для простоты полагаем, что \bar{G} – прямоугольник), очевидно, получим:

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) (y_{i_1 i_2}^{k+1} - y_{i_1 i_2}^k) = \Lambda y_{i_1 i_2}^k + \varphi,$$

т.е. процесс имеет канонический вид, в котором

$$B = E, \quad A = -\Lambda, \quad \tau = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}}.$$

Так как оператор A – положительный и самосопряженный, то неравенство $B > \frac{\tau}{2} A$ можно свести к неравенству для собственных значений:

$$1 > \frac{\tau}{2} \lambda_k(A) \text{ для всех значений } k.$$

Но (показать (!))

$$\lambda_k(A) = -\lambda_{k_1}(\Lambda_1) - \lambda_{k_2}(\Lambda_2) = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} < \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}.$$

Поэтому при всех k справедливо неравенство $\frac{\tau}{2} \lambda_k(A) < 1$ и, таким образом, метод простой итерации сходится. Заметим также, что формально выбранное значение итерационного параметра τ является *оптимальным*, т.е. $\tau_{opt.} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}}.$

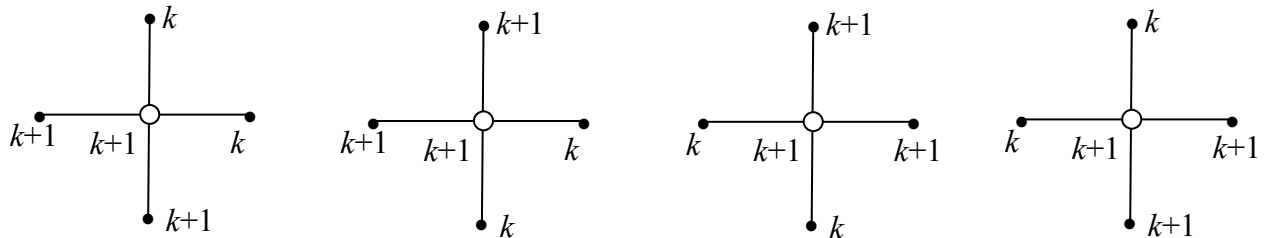
3.2.2. Метод Зейделя

Как мы помним из курса «Вычислительные методы алгебры», формальная схема метода Зейделя выглядит следующим образом:

$$(A^- + D) \bar{y}^{k+1} + A^+ \bar{y}^k = f,$$

где A^- , A^+ и D – нижняя и верхняя треугольные (без диагонали) и диагональная матрицы соответственно. При этом если $A = A^T > 0$, то метод Зейделя сходится при любом начальном приближении.

В случае разностной задачи Дирихле указанное представление матрицы A в виде $A = A^- + D + A^+$ может быть осуществлено по одной из следующих схем:



При этом каждая схема означает свой порядок организации вычислений. Так, в первом случае вычисления должны начинаться с левого нижнего угла расчетной области ($i_1 = i_2 = 1$), во втором – с левого верхнего ($i_1 = 1, i_2 = N_2 - 1$), в третьем – с правого верхнего ($i_1 = N_1 - 1, i_2 = N_2 - 1$), в четвертом – с правого нижнего ($i_1 = N_1 - 1, i_2 = 1$).

Расчетные формулы, например, для первой схемы имеют вид (область \bar{G} – прямоугольник)

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_{i_1 i_2} = \frac{1}{h_1^2} \left(y_{i_1+1, i_2}^k + y_{i_1-1, i_2}^{k+1} \right) + \frac{1}{h_1^2} \left(y_{i_1, i_2+1}^k + y_{i_1, i_2-1}^{k+1} \right) + \varphi_{i_1 i_2}, & x \in \omega_h, \\ y_{i_1 i_2}^{k+1} = \mu_{i_1 i_2}, & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (3.14)$$

3.2.3. Метод релаксации

Данный метод отличается от метода Зейделя наличием итерационного параметра ω (для метода Зейделя $\omega = 1$) и формально выглядит следующим образом:

$$\left(A^- + \frac{1}{\omega} D \right) \left(y^{k+1} - y^k \right) + A y^k = f.$$

Применительно к рассматриваемой задаче формулы (3.14) метода Зейделя модифицируются следующим образом:

$$\begin{cases} y_{i_1 i_2}^{k+1} = (1 - \omega) y_{i_1 i_2}^k + \frac{\omega}{\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right)} \left[\frac{1}{h_1^2} \left(y_{i_1+1, i_2}^k + y_{i_1-1, i_2}^{k+1} \right) + \frac{1}{h_1^2} \left(y_{i_1, i_2+1}^k + y_{i_1, i_2-1}^{k+1} \right) + \varphi_{i_1 i_2} \right], & x \in \omega_h, \\ y_{i_1 i_2}^{k+1} = \mu_{i_1 i_2}, & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (3.15)$$

При этом в случае $A = A^T > 0$ достаточное условие сходимости метода релаксации имеет вид $0 < \omega < 2$. При определенных условиях может быть найдено значение параметра релаксации, оптимизирующее скорость сходимости. Соответствующее утверждение выглядит следующим образом:

Теорема. Если $A = A^* > 0$ и собственные значения μ задачи

$$\left(zA^- + \frac{1}{z} A^+ \right) x - \mu D x = 0$$

не зависят от z , то $\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{\delta(2 - \delta)}}$, где $\delta > 0$ – постоянная из неравенства $A \geq \delta D$.

В случае разностной задачи Дирихле в прямоугольнике имеем: неравенство $A \geq \delta D$ равносильно неравенству $\lambda_k(A) \geq \delta \lambda(D)$ или

$$\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \geq \delta \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) \text{ для всех } k_1 \text{ и } k_2,$$

откуда

$$\delta = \frac{2h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{2h_1^2}{h_1^2 + h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2l_2}.$$

В заключение отметим, что существует большое число других (более сложных и более эффективных) алгоритмов, с которыми можно познакомиться, например, по книге Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений (М.: Наука, 1978).

ГЛАВА V

Экономичные методы решения многомерных нестационарных задач

§ 1. Стандартные разностные схемы и их недостатки

Изложение будем проводить на примере первой краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами, которую, проведя соответствующие нормирующие замены переменных, можно записать в виде

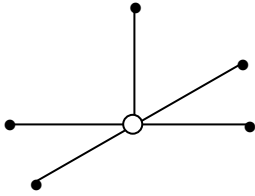
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), & x \in G_0, \quad t \in (0; T], \quad \bar{G}_0 = [0; l_1] \times [0; l_2], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}_0, \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, t), & x \in \Gamma = \partial \bar{G}_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $L = L_1 + L_2$, $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$, $\alpha = 1, 2$.

1.1. Явная разностная схема

В области $\bar{G}_0 \times [0; T]$ построим равномерную по каждому направлению прямоугольную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_h = \bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2}$. На сетке ω_h заменим операторы L_α разностными операторами Λ_α : $L_\alpha u \sim \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha}$ и $Lu \sim \Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y$.

Тогда, по аналогии с одномерным случаем, исходная дифференциальная задача на шаблоне, изображенном на рисунке, может быть заменена явной разностной схемой вида



$$\begin{cases} y_t = y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} + \varphi, & x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x, 0), & x \in \omega_h, \\ y(x, t) = \mu(x, t), & x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau. \end{cases} \quad (1.2)$$

Схема, очевидно, имеет погрешность аппроксимации $O(\tau + h_1^2 + h_2^2) = O(\tau + |h|^2)$, т.е. аппроксимирует исходную задачу с первым порядком по временной переменной и вторым – по каждой из пространственных.

Ее реализация осуществляется, как и в одномерном случае, послойно с помощью явной рекуррентной формулы

$$y^{j+1} = y^j + \tau \left(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1}^j + y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}^j + \varphi \right), \quad x \in \omega_h,$$

т.е. в индексной форме имеет вид:

1⁰. Заполняем нулевой слой:

$$y_{i_1 i_2}^0 = u_0(x_{1, i_1}, x_{2, i_2}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}; \quad i_2 = \overline{0, N_2};$$

2⁰. Для всех $j = 0, 1, \dots$ заполняем $(j+1)$ -й слой:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i_1,0}^{j+1} = \mu(x_{1,i_1}, 0, t_{j+1}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \\ y_{i_1, N_2}^{j+1} = \mu(x_{1,i_1}, l_2, t_{j+1}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \\ y_{0,i_2}^{j+1} = \mu(0, x_{2,i_2}, t_{j+1}), \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \\ y_{N_1,i_2}^{j+1} = \mu(l_1, x_{2,i_2}, t_{j+1}), \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \\ y_{i_1,i_2}^{j+1} = y_{i_1,i_2}^j + \tau \left(\frac{y_{i_1+1,i_2}^j - 2y_{i_1,i_2}^j + y_{i_1-1,i_2}^j}{h_1^2} + \frac{y_{i_1,i_2+1}^j - 2y_{i_1,i_2}^j + y_{i_1,i_2-1}^j}{h_2^2} + \phi_{i_1,i_2}^j \right), \quad i_1 = \overline{1, N_1-1}, \quad i_2 = \overline{1, N_2-1}. \end{array} \right.$$

Таким образом, с организацией расчетов здесь все просто, причем для вычисления решения на каждом временном слое требуется количество операций, пропорциональное количеству узлов на этом слое (т.е. $O(N_1 \cdot N_2)$).

Однако, как мы помним, в одномерном случае явная схема требовала достаточно жестких ограничений на величину шага по временной переменной: $\tau \leq \frac{h^2}{2}$. Посмотрим, как обстоят дела с устойчивостью в нашем случае. Запишем (1.2) в каноническом для двухслойных схем виде

$$By_t + Ay = \varphi,$$

где $B = E$, $A = -\Lambda = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$.

Так как $A = A^* > 0$, то условие устойчивости имеет вид $B \geq \frac{\tau}{2} A$, или, учитывая самосопряженность и перестановочность операторов B и A (что позволяет перейти к неравенствам для собственных значений)

$$1 \geq \frac{\tau}{2} \lambda_k(A), \quad k = (k_1, k_2), \quad k_1 = \overline{1, N_1-1}, \quad k_2 = \overline{1, N_2-1}. \quad (1.3)$$

Ранее мы выписывали собственные значения разностного оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} \lambda_k(A) &= \lambda_{k_1}(-\Lambda_1) + \lambda_{k_2}(-\Lambda_2) = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}, \\ k &= (k_1, k_2), \quad k_1 = \overline{1, N_1-1}, \quad k_2 = \overline{1, N_2-1}. \end{aligned}$$

Поэтому из (1.3), учитывая неравенство $\lambda_k < \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}$, следующее из записанных выше соотношений, имеем:

$$\tau \leq \frac{2}{\frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}}. \quad (1.4)$$

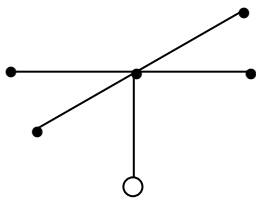
Неравенство (1.4) в случае квадратной сетки ω_h примет несколько более простой вид

$$\tau \leq \frac{h^2}{4}$$

и является в два раза ($2 - \text{размерность задачи по пространству}$) более жестким, чем в одномерном случае.

Следовательно, для полного расчета задачи потребуется большое количество временных слоев и общее количество арифметических операций, необходимых для этого, на квадратной сетке будет величиной $O(N^4)$. Таким образом, явная **схема практически непригодна** для выполнения расчетов при достаточно больших значениях T .

1.2. Схема с опережением (чисто неявная разностная схема)



Аналогично предыдущему случаю на изображенном слева шаблоне запишем разностную схему

$$\begin{cases} y_t = \hat{y}_{\bar{x}_1 x_1} + \hat{y}_{\bar{x}_2 x_2} + \varphi, & x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x, 0), & x \in \omega_h, \\ y(x, t) = \mu(x, t), & x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau. \end{cases} \quad (1.5)$$

Так как $\hat{y} = y + \tau y_t$, то схема (1.5) имеет канонический вид, в котором $B = E + \tau A$, $A = -\Lambda = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$. Учитывая самосопряженность и положительность оператора A , запишем критерий устойчивости:

$$E + \tau A \geq \frac{\tau}{2} A,$$

который в данном случае выполняется для любых значений параметра τ , т.е., как и в одномерном случае, схема с опережением является абсолютно устойчивой.

В то же время, на каждом временном слое разностная схема (1.5) требует при реализации решения системы линейных алгебраических уравнений, по сложности аналогичной разностной задаче Дирихле, что, как мы видели, представляет определенную проблему. Если, например, реализацию осуществлять без учета специфики (большое количество нулей) (например, стандартным методом Гаусса), то количество затрачиваемых операций будет величиной порядка $O(N^6)$ (на квадратной сетке), тогда как применение специальных алгоритмов типа разделения переменных дает для этой же величины оценку $O(N^2 \log_2 N)$. Таким образом, для нахождения разностного решения при больших значениях T потребуется в итоге порядка $O(N^3 \log_2 N)$ операций.

Применение к аппроксимации задачи (1.1) семейства схем с весами (аналогичного рассматривавшемуся нами в одномерном случае) приводит качественно к тем же оценкам необходимого объема работы.

Упражнение. Записать и провести исследование схемы с весами для задачи (1.1).

Таким образом, возникает вопрос: можно ли построить схему, сочетающую в себе лучшие качества явной и неявной схем, т.е.

- 1) безусловно устойчивую (как схема с опережением);
- 2) требующую при переходе со слоя на слой затрат по числу арифметических операций пропорционально числу узлов сетки ω_h , т.е. $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ (как явная схема).

В случае реализации сформулированных требований на один узел сетки будет приходиться количество операций, не зависящее от количества узлов сетки. Такие разностные схемы далее будем называть **экономичными**.

§ 2. Схема переменных направлений (продольно-поперечная схема)

Первая схема требуемого класса впервые была предложена в 1955 году (Реасетан и Rachford) и в литературе носит имя авторов (схема Писмена-Рекфорда) или **продольно-поперечной схемы (схемы переменных направлений)**. Ее основная идея состоит в том, что переход со слоя j на слой $(j+1)$ осуществляется в два этапа с шагами $\frac{\tau}{2}$, т.е. наряду с основными значениями искомой сеточной функции $y(x, t)$, т.е. с $y = y^j$ и $\hat{y} = y^{j+1}$, вводится промежуточное значение $\bar{y} = y^{j+\frac{1}{2}}$, которое можно формально рассматривать как значение y при $t = t_j + \frac{\tau}{2}$.

Соответствующие формулы выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{0.5\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j + \varphi^j, & x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{j+1} + \varphi^j, & x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\quad \quad \quad (2.2)$$

К уравнениям (2.1), (2.2) необходимо добавить начальные условия

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h$$

и разностные краевые условия, например, в виде

$$y^{j+1} = \mu^{j+1} \quad \text{при } i_2 = 0 \quad \text{и } i_2 = N_2,$$

$$y^{j+\frac{1}{2}} = \bar{\mu} \quad \text{при } i_1 = 0 \quad \text{и } i_1 = N_1,$$

где $\bar{\mu}$ мы выберем немного позже.

2.1. Организация расчетов

Для нахождения решений $y^{j+\frac{1}{2}}$ и y^{j+1} мы имеем трехточечные разностные задачи, которые могут быть решены методом разностной прогонки. Поясним это подробнее. Для этого перепишем (2.1), (2.2) в виде

$$\begin{cases} \frac{2}{\tau} y^{j+\frac{1}{2}} - \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} = F^j, & F^j = \frac{2}{\tau} y^j + \Lambda_2 y^j + \varphi^j, \\ y^{j+\frac{1}{2}}|_{\gamma_h} = \bar{\mu} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\tau} y^{j+1} - \Lambda_2 y^{j+1} = F^{j+\frac{1}{2}}, & F^{j+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\tau} y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \varphi^j, \\ y^{j+1}|_{\gamma_h} = \mu^{j+1} \end{cases} \quad (2.4)$$

или в индексной форме

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2} y_{i_1-1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{\tau} \right) y_{i_1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_1^2} y_{i_1+1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} = -F_{i_1, i_2}^j, & i_1 = \overline{1, N_1-1}, \\ y_{0, i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \bar{\mu}_{0, i_2}, \\ y_{N_1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \bar{\mu}_{N_1, i_2}, & i_2 = \overline{1, N_2-1}, \end{cases} \quad (2.3')$$

т.е. для того, чтобы найти решение на полуцелом слое, мы должны решить методом прогонки $(N_2 - 1)$ систем по переменной x_1 ;

$$\begin{cases} \frac{1}{h_2^2} y_{i_1, i_2-1}^{j+1} - \left(\frac{2}{h_2^2} + \frac{2}{\tau} \right) y_{i_1, i_2}^{j+1} + \frac{1}{h_2^2} y_{i_1, i_2+1}^{j+1} = -F_{i_1, i_2}^{j+\frac{1}{2}}, & i_2 = \overline{1, N_2-1}, \\ y_{i_1, 0}^{j+1} = \mu_{i_1, 0}^{j+1}, \\ y_{i_1, N_2}^{j+1} = \mu_{i_1, N_2}^{j+1}, & i_1 = \overline{1, N_1-1}, \end{cases} \quad (2.4')$$

т.е. для нахождения решения \hat{y} необходимо решить $(N_1 - 1)$ систем по переменной x_2 .

Так как прогонка требует на один узел сетки числа действий, не зависящего от шага сетки, то описанный алгоритм будет экономичным.

2.2. Аппроксимация и устойчивость схемы переменных направлений

Для исследования указанных свойств исключим из систем (2.1), (2.2). Вычитая из (2.1) (2.2), получим:

$$y^{j+\frac{1}{2}} = \frac{y^j + y^{j+1}}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (y^{j+1} - y^j). \quad (2.5)$$

Потребуем, чтобы это соотношение выполнялось для всех значений $i_1 = \overline{0, N_1}$ (в том числе и при $i_1 \in \{0, N_1\}$, иначе $\Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}}$ не определен при $i_1 \in \{1, N_1-1\}$). Тогда для определения значения $\bar{\mu}$ имеем соотношение

$$\bar{\mu} = y^{j+\frac{1}{2}}|_{\gamma_h} = \frac{\mu^j + \mu^{j+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 \mu_t^j,$$

которое следует использовать в качестве граничного условия в задаче для нахождения $y^{j+\frac{1}{2}}$.

Перепишав (2.1), (2.2) в виде

$$\begin{cases} \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) y^{j+\frac{1}{2}} = \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) y^j + \frac{\tau}{2} \varphi^j, \\ \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) y^{j+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) y^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \varphi^j, \end{cases} \quad (2.6)$$

применим к первому из уравнений оператор $\left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right)$, а ко второму $-\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right)$, и полученные уравнения сложим. В результате получим:

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y^{j+1} = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y^j + \tau\varphi^j$$

или, формируя в левой части полученного равенства разностную производную по времени,

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \frac{\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y^j - \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y^j + \tau\varphi^j}{\tau},$$

т.е.

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y_t = (\Lambda_1 + \Lambda_2)y + \varphi$$

и, наконец,

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y_t = \Lambda y + \varphi. \quad (2.7)$$

Таким образом, решение задачи (2.1), (2.2) с указанными граничными условиями удовлетворяет разностной схеме (2.7) с граничными условиями

$$y|_{\gamma_h} = \mu, \quad \hat{y}|_{\gamma_h} = \hat{\mu}$$

и начальным условием

$$y(x, 0) = u_0(x).$$

С другой стороны, так как

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y^{j+1} = 2y^{j+\frac{1}{2}} - \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y^j,$$

то второе из уравнений (2.6) примет вид

$$2y^{j+\frac{1}{2}} - \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y^j = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)y^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2}\varphi^j$$

или

$$\frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{0.5\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j + \varphi^j,$$

что совпадает с (2.1).

Следовательно, (2.1), (2.2) с указанными граничными условиями равносильна разностной схеме (2.7) с традиционными граничными условиями.

Теперь для погрешности аппроксимации имеем:

$$\begin{aligned} \psi &= \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda + \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2\right)u_t - \Lambda u - \varphi = \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + O(\tau^2) - \frac{\tau}{2}\Delta\dot{u} - \Delta u + O(|h|^2) - \varphi = \\ &= \left(\dot{u} - \Delta u\right) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{u} - \Delta u\right) + O(\tau^2 + |h|^2) - \varphi = f - \varphi + \frac{\partial f}{\partial t} + O(\tau^2 + |h|^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\psi = O(\tau^2 + |h|^2)$, если выбрать $\varphi = f + \frac{\tau}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + O(\tau^2 + |h|^2) = f\left(t + \frac{\tau}{2}, x\right)$.

Теперь обсудим вопрос об устойчивости, пользуясь энергетическим критерием устойчивости двухслойных разностных схем. Разностная схема (2.7) имеет канонический вид, в котором $B = E - \frac{\tau}{2} \Lambda + \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2$ и $A = -\Lambda$. Так как $A = A^* > 0$, то критерий устойчивости имеет вид

$$B \geq \frac{\tau}{2} A$$

или

$$E - \frac{\tau}{2} \Lambda + \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 \geq -\frac{\tau}{2} \Lambda.$$

Данное неравенство после приведения операторных подобных будет, очевидно, равносильно неравенству

$$E + \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 \geq 0.$$

Последнее же неравенство очевидно, если учесть, что $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1 > 0$.

Таким образом, схема переменных направлений безусловно устойчива в норме $\|\cdot\|_A$.

Замечание 1. Для рассмотренной задачи можно построить схему переменных направлений повышенного порядка точности $\psi = O(\tau^2 + |h|^4)$.

Упражнение 1. Построить и исследовать такую разностную схему.

Замечание 2. Схема переменных направлений может быть обобщена также на случай самосопряженных пространственных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами с сохранением изложенных выше свойств. Однако если количество пространственных переменных превышает 2, то аналоги соответствующие аналогии схемы Писмена-Рекфорда теряют свойство безусловной устойчивости, т.е. перестают быть экономичными.

Упражнение 2. Показать, что аналог схемы Писмена-Рекфорда для трехмерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами условно устойчив.