Теория массового обслуживания

Виктор Васильевич Лепин

- Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из одного или нескольких “приборов”, которые мы будем называть каналами обслуживания.

Системы массового обслуживания

- Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из одного или нескольких “приборов”, которые мы будем называть каналами обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.,

Системы массового обслуживания

- Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из одного или нескольких “приборов”, которые мы будем называть каналами обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.,
- СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

Системы массового обслуживания

- Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из одного или нескольких “приборов”, которые мы будем называть каналами обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.,
- СМО могут быть одноканальными и многоканальными.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или “требований”), которые поступают в случайные моменты времени.

Системы массового обслуживания

- Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из одного или нескольких “приборов”, которые мы будем называть каналами обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.,
- СМО могут быть одноканальными и многоканальными.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или “требований”), которые поступают в случайные моменты времени.
- Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина),

Системы массового обслуживания

- Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из одного или нескольких “приборов”, которые мы будем называть каналами обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.,
- СМО могут быть одноканальными и многоканальными.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или “требований”), которые поступают в случайные моменты времени.
- Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина),
- после чего канал освобождается и готов к обслуживанию следующей заявки.

Потоки событий

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
    - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
    - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
    - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
    - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
    - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
    - появляется новая заявка,
    - или завершается обслуживание некоторой заявки,
    - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются пуассоновскими.

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ называется пуассоновским процессом с параметром (или средним) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется пуассоновским процессом с параметром (или средним) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
  1. $X(0) = 0$;

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется пуассоновским процессом с параметром (или средним) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
  1. $X(0) = 0$;
  2. (отсутствие памяти) приращения $X(\tau_i + t_i) - X(\tau_i)$ на произвольных непересекающихся интервалах $[\tau_i, \tau_i + t_i]$, $i = 1, \ldots, k$, – независимые случайные величины;

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ называется пуассоновским процессом с параметром (или средним) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
  1. $X(0) = 0$;
  2. (отсутствие памяти) приращения $X(\tau_i + t_i) - X(\tau_i)$ на произвольных непересекающихся интервалах $[\tau_i, \tau_i + t_i]$, $i = 1, \ldots, k$, – независимые случайные величины;
  3. (стационарность) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ случайная величина $X(t)$ имеет распределение Пуассона $\pi_{\lambda t}$.

Пуассоновские случайные процессы

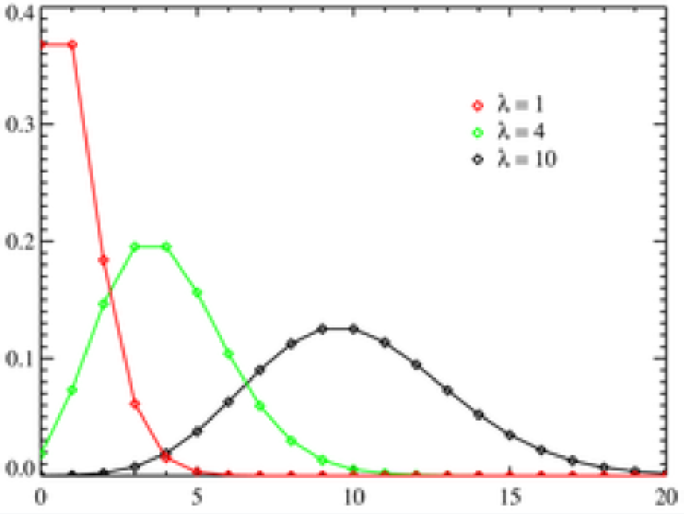
- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ называется пуассоновским процессом с параметром (или средним) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
    1. $X(0) = 0$;
    2. (отсутствие памяти) приращения $X(\tau_i + t_i) - X(\tau_i)$ на произвольных непересекающихся интервалах $[\tau_i, \tau_i + t_i]$, $i = 1, \ldots, k$, – независимые случайные величины;
    3. (стационарность) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ случайная величина $X(t)$ имеет распределение Пуассона $\pi_{\lambda t}$.
- Дискретная случайная величина Y, принимающая неотрицательные целые значения, имеет распределение Пуассона π_α с параметром α, если

$$\mathbb{P}(Y = k) = \pi_\alpha(k) = \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пуассоновские случайные процессы

Распределение Пуассона



Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2 \ldots$, могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого потока событий, каким может быть

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \dots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2 \dots,$ могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого потока событий, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2 \ldots,$ могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого потока событий, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2 \ldots$, могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого потока событий, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,
  - поток вызовов скорой помощи,

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2 \ldots$, могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого потока событий, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,
  - поток вызовов скорой помощи,
  - поток отказов некоторого технического устройства,

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \dots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2 \dots$, могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого потока событий, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,
  - поток вызовов скорой помощи,
  - поток отказов некоторого технического устройства,
  - поток запросов информации с некоторого вебсервера и т. д..

Интерпретация пуассоновского

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.

Интерпретация пуассоновского

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр можно рассматривать как интенсивность потока,

Интерпретация пуассоновского

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр можно рассматривать как интенсивность потока,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.

Интерпретация пуассоновского

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \dots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр можно рассматривать как интенсивность потока,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.
- Обозначим через $N(t)$ количество событий, произошедших в промежутке времени $[0, t]$.

Интерпретация пуассоновского

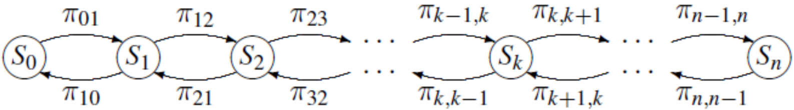
- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр можно рассматривать как интенсивность потока,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.
- Обозначим через $N(t)$ количество событий, произошедших в промежутке времени $[0, t]$.
- Можно доказать, что семейство $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ является пуассоновским процессом с параметром λ.

Интерпретация пуассоновского

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2 \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр можно рассматривать как интенсивность потока,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.
- Обозначим через $N(t)$ количество событий, произошедших в промежутке времени $[0, t]$.
- Можно доказать, что семейство $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ является пуассоновским процессом с параметром λ.
- В частности, $\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \cdots + T_k \leq t) = \pi_{\lambda t}(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

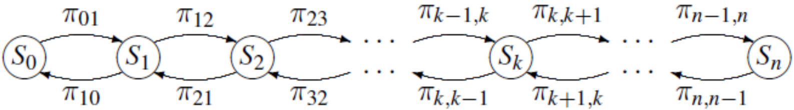
Граф состояний

- Термин “схема гибели и размножения” в биологии описывает изменение численности популяции.



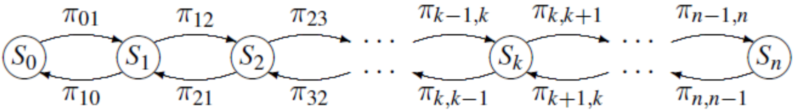
Граф состояний

- Термин "схема гибели и размножения" в биологии описывает изменение численности популяции.
- Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.



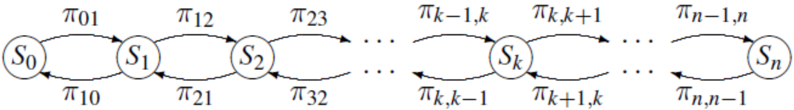
Граф состояний

- Термин “схема гибели и размножения” в биологии описывает изменение численности популяции.
- Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.
- Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет следующий вид,

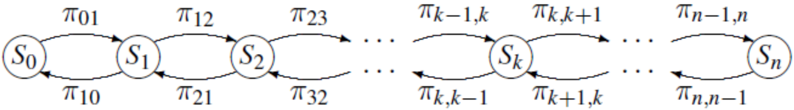


Граф состояний

- Термин “схема гибели и размножения” в биологии описывает изменение численности популяции.
- Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.
- Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет следующий вид,
- где состояние S_k означает, что численность популяции равна k.

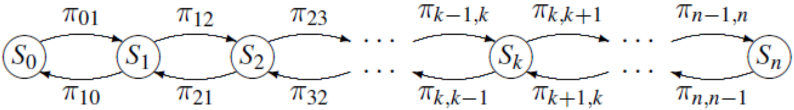


Уравнения Колмогорова



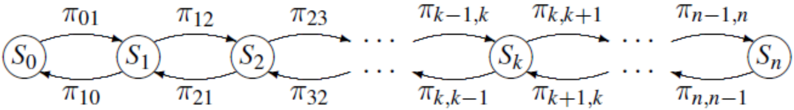
- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.

Уравнения Колмогорова



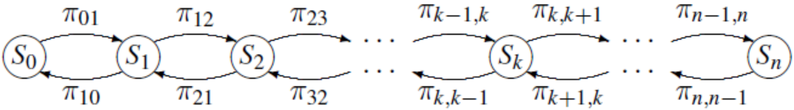
- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью

Уравнения Колмогорова

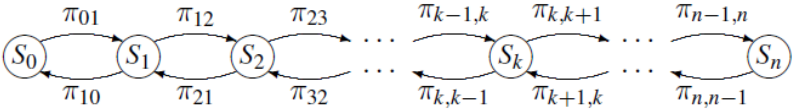


- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};

Уравнения Колмогорова

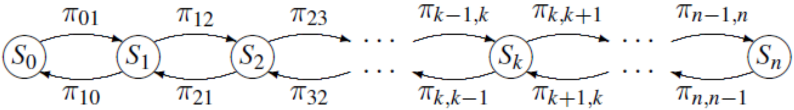


- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
  - $\pi_{k+1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};



- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
  - $\pi_{k+1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};
  - $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k.

Уравнения Колмогорова



- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
  - $\pi_{k+1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};
  - $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k.
- Поэтому справедливо равенство

$$\begin{aligned} p_k(t+\Delta t) &= p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t \\ &\quad + p_k(t)(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t). \end{aligned}$$

- Разделив на Δt обе части равенства

$$\begin{aligned} p_k(t+\Delta t) &= p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t \\ &+ p_k(t)(1-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})\Delta t). \end{aligned}$$

- Разделив на Δt обе части равенства

$$\begin{aligned} p_k(t+\Delta t) &= p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t \\ &+ p_k(t)(1-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})\Delta t). \end{aligned}$$

- получим $\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta} =$ $\pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t).$

- Разделив на Δt обе части равенства

$$\begin{aligned} p_k(t+\Delta t) &= p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t \\ &+ p_k(t)(1-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})\Delta t). \end{aligned}$$

- получим $\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta} =$ $\pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t)$.
- Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dp_k(t)}{dt} = & \quad \pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) \\ & -(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t), \quad k = 1,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Уравнения Колмогорова

- Разделив на Δt обе части равенства

$$\begin{aligned} p_k(t+\Delta t) &= p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t \\ &\quad + p_k(t)(1-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})\Delta t). \end{aligned}$$

- получим $\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta} =$ $\pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t)$.
- Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dp_k(t)}{dt} = &\quad \pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) \\ &-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t), \quad k = 1,\dots,n-1. \end{aligned}$$

- Аналогично получаем уравнения для $k = 0$ и $k = n$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \pi_{10}p_1(t) - \pi_{01}p_0(t),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \pi_{n-1,n}p_{n-1}(t) - \pi_{n,n-1}p_n(t).$$

Стационарный режим

- Если в системе установился стационарный режим, то все вероятности $p_k(t) = p_k$ не зависят от времени.

Стационарный режим

- Если в системе установился стационарный режим, то все вероятности $p_k(t) = p_k$ не зависят от времени.
- Мы можем вычислить финальные вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_n$ состояний системы, где p_i есть доля времени, когда система пребывает в состоянии S_i,

Стационарный режим

- Если в системе установился стационарный режим, то все вероятности $p_k(t) = p_k$ не зависят от времени.
- Мы можем вычислить финальные вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_n$ состояний системы, где p_i есть доля времени, когда система пребывает в состоянии S_i,
- решая систему уравнений Колмогорова, с учетом того, $\frac{dp_k(t)}{dt} = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$

$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0,$$
$$k = 1, \ldots, n-1,$$

$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

Стационарный режим

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0,$$
$$k = 1, \dots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.

Стационарный режим

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0,$$
$$k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.

Стационарный режим

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0,$$
$$k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.
- С учетом равенства $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, последнее равенство приводится к виду $\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$.

Стационарный режим

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0,$$
$$k = 1, \dots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.
- С учетом равенства $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, последнее равенство приводится к виду $\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$.
- Далее, совершенно аналогично получаем равенство $\pi_{23}p_2 = \pi_{32}p_3$.

Стационарный режим

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0,$$
$$k = 1, \dots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.
- С учетом равенства $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, последнее равенство приводится к виду $\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$.
- Далее, совершенно аналогично получаем равенство $\pi_{23}p_2 = \pi_{32}p_3$.
- Для любого $k = 1, \dots, n$ имеем: $\pi_{k-1,k}p_{k-1} = \pi_{k,k-1}p_k$.

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}
\pi_{01}p_0 &= \pi_{10}p_1, \\
\pi_{12}p_1 &= \pi_{21}p_2, \\
&\dots \\
\pi_{k-1,k}p_{k-1} &= \pi_{k,k-1}p_k, \\
&\dots \\
\pi_{n-1,n}p_{n-1} &= \pi_{n,n-1}p_n.
\end{aligned}$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} p_0$.

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}
\pi_{01}p_0 &= \pi_{10}p_1, \\
\pi_{12}p_1 &= \pi_{21}p_2, \\
&\dots \\
\pi_{k-1,k}p_{k-1} &= \pi_{k,k-1}p_k, \\
&\dots \\
\pi_{n-1,n}p_{n-1} &= \pi_{n,n-1}p_n.
\end{aligned}$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}}p_0$.
- Из второго найдем $p_2 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{21}}p_1 = \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}}p_0$.

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$
\begin{array}{rcl}
\pi_{01}p_0 & = & \pi_{10}p_1, \\
\pi_{12}p_1 & = & \pi_{21}p_2, \\
 & \dots & \\
\pi_{k-1,k}p_{k-1} & = & \pi_{k,k-1}p_k, \\
 & \dots & \\
\pi_{n-1,n}p_{n-1} & = & \pi_{n,n-1}p_n.
\end{array}
$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}}p_0$.
- Из второго найдем $p_2 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{21}}p_1 = \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}}p_0$.
- Из третьего получим $p_3 = \frac{\pi_{23}}{\pi_{32}}p_2 = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\pi_{23}}{\pi_{32}\pi_{21}\pi_{10}}p_0$.

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$
\begin{array}{rcl}
\pi_{01} p_0 & = & \pi_{10} p_1, \\
\pi_{12} p_1 & = & \pi_{21} p_2, \\
 & \dots & \\
\pi_{k-1,k} p_{k-1} & = & \pi_{k,k-1} p_k, \\
 & \dots & \\
\pi_{n-1,n} p_{n-1} & = & \pi_{n,n-1} p_n.
\end{array}
$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} p_0$.
- Из второго найдем $p_2 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{21}} p_1 = \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} p_0$.
- Из третьего получим $p_3 = \frac{\pi_{23}}{\pi_{32}} p_2 = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\pi_{23}}{\pi_{32}\pi_{21}\pi_{10}} p_0$.
- В общем случае $p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}} p_0, \quad k = 1, \dots, n.$

Финальные вероятности

- В полученной формуле

$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Финальные вероятности

- В полученной формуле

$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,

- В полученной формуле

$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,
- а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0.

Финальные вероятности

- В полученной формуле
$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1, \dots, n.$$
- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,
- а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0.
- Подставив выражения для $p_1, \dots, p_n$ в равенство $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$,

Финальные вероятности

- В полученной формуле

$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,
- а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0.
- Подставив выражения для $p_1, \ldots, p_n$ в равенство $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$,
- найдем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \cdots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}.$$

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,
- то среднее число заявок, поступаюших в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО,

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,
- то среднее число заявок, поступаюших в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО,
- т. е. оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ .

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ – число заявок, покинувших СМО до момента t.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ – число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ – число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,

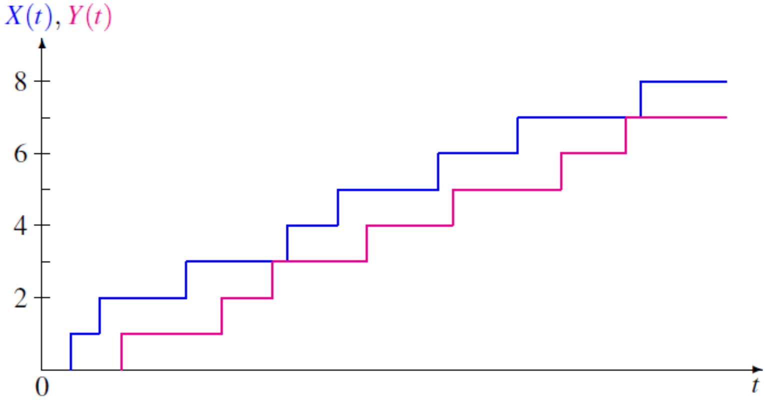
Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ – число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,
  - а $Y(t)$ уменьшается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.

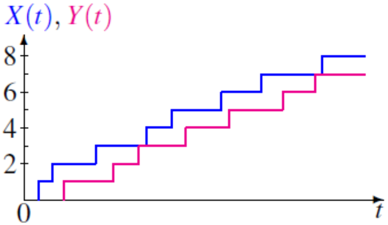
Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ – число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,
  - а $Y(t)$ уменьшается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.
- Для любого момента t разность $Z(t) \stackrel{def}{=} X(t) - Y(t)$ есть число заявок, находящихся в СМО. Когда $Z(t) = 0$, в системе нет заявок.

Поведение функций $X(t)$ и $Y(t)$

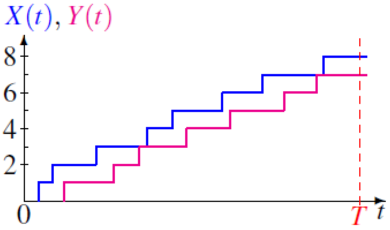


Первая формула Литтла



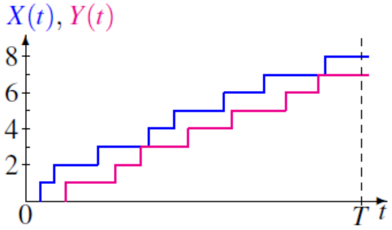
- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Z(t)dt.$
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла



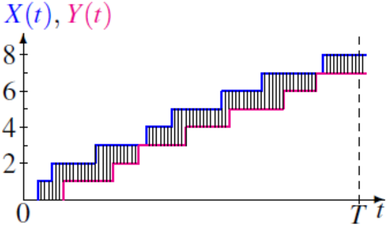
- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Z(t)dt.$
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла



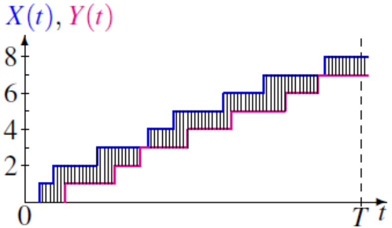
- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Z(t)dt.$
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла



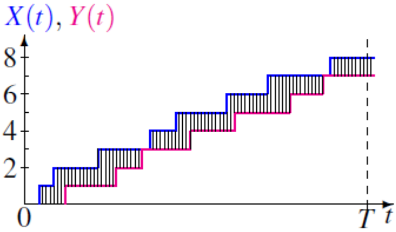
- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt$.
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла



- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Z(t)dt.$
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла

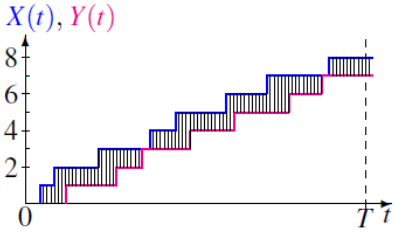


- В конце промежутка $[0, T]$ некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью,
- но при достаточно больших T

$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \approx \sum_{k=1}^{k(T)} t_k,$$

- где $k(T)$ — количество заявок, поступивших в СМО за время T.

Первая формула Литтла

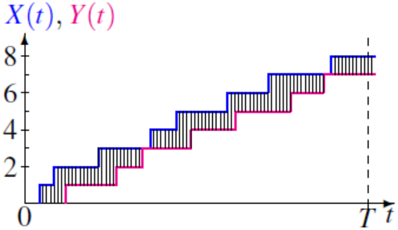


- В конце промежутка $[0, T]$ некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью,
- но при достаточно больших T

$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \approx \sum_{k=1}^{k(T)} t_k,$$

- где $k(T)$ — количество заявок, поступивших в СМО за время T.

Первая формула Литтла



- В конце промежутка $[0, T]$ некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью,
- но при достаточно больших T

$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \approx \sum_{k=1}^{k(T)} t_k,$$

- где $k(T)$ — количество заявок, поступивших в СМО за время T.

Первая формула Литтла

- Среднее число заявок, находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), равно

$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

$$= \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k.$$

- Но величина $T\lambda$ есть среднее число заявок, поступивших за время T.
- Поэтому $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum\limits_{k=1}^{k(T)} t_k$ есть среднее время пребывания заявки в системе, которое обозначаем через $W_{\text{сист}}$.
- Итак $L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}}$.

Первая формула Литтла

- Среднее число заявок, находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), равно

$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

$$= \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k.$$

- Но величина $T\lambda$ есть среднее число заявок, поступивших за время T.
- Поэтому $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda}\sum\limits_{k=1}^{k(T)} t_k$ есть среднее время пребывания заявки в системе, которое обозначаем через $W_{\text{сист}}$.
- Итак $L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}}$.

Первая формула Литтла

- Среднее число заявок, находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), равно
$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$
$$= \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k.$$
- Но величина $T\lambda$ есть среднее число заявок, поступивших за время T.
- Поэтому $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k$ есть среднее время пребывания заявки в системе, которое обозначаем через $W_{\text{сист}}$.
- Итак $L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}}$.

Первая формула Литтла

- Среднее число заявок, находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), равно

$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

$$= \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k.$$

- Но величина $T\lambda$ есть среднее число заявок, поступивших за время T.
- Поэтому $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum\limits_{k=1}^{k(T)} t_k$ есть среднее время пребывания заявки в системе, которое обозначаем через $W_{\text{сист}}$.
- Итак $L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}}$.

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$

- для любой СМО,

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе* ($W_{\text{сист}}$)

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе* ($W_{\text{сист}}$)
- равно *среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок* ($\dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$).

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}$$

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.
- Если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то считаем, что она пробыла в очереди нулевое время.

Многоканальная СМО с отказами

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A – абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A – абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q – относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A – абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q – относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A – абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q – относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
  - $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов.

Граф состояний n-канальной СМО с отказами

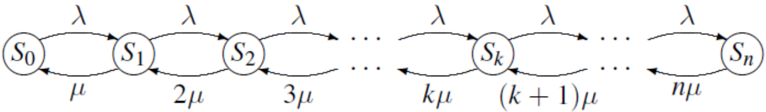
- Состояние СМО определяется числом заявок в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):

Граф состояний n-канальной СМО с отказами

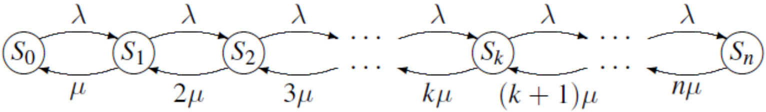
- Состояние СМО определяется числом заявок в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):
- S_k – в СМО находится k заявок ($k = 1, \ldots, n$).

Граф состояний n-канальной СМО с отказами

- Состояние СМО определяется числом заявок в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):
- S_k – в СМО находится k заявок ($k = 1, \ldots, n$).
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения, представленной на рисунке.



Формулы Эрланга

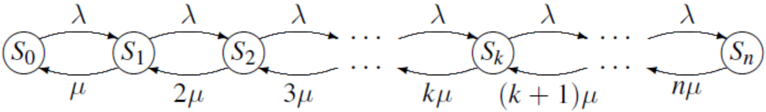


- По формулам

$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \cdots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}.$$

$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}} p_0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Формулы Эрланга



- По формулам

$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \cdots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}.$$

$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}} p_0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

- найдем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} + \cdots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}.$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его приведенной интенсивностью потока заявок.

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его приведенной интенсивностью потока заявок.
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его приведенной интенсивностью потока заявок.
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его приведенной интенсивностью потока заявок.
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \qquad k = 1, \dots, n.$$

- Эти формулы известны как формулы Эрланга.

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- Относительная пропускная способность (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- Относительная пропускная способность (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q :

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- Относительная пропускная способность (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q :

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

- Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок.

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- Относительная пропускная способность (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q :

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

- Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок.

- Следовательно, среднее число занятых каналов $\bar{k} = A/\mu$.

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала $(n = 3)$,

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{ОТК}}$, $\bar{k}$.

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$.
2. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80% заявок?

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$.
2. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80% заявок?
3. Какая доля каналов при этом будет простаивать?

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
$$p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/6} = \frac{1}{1+3+9/2+27/6} = 1/13.$$

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6} = \frac{1}{1 + 3 + 9/2 + 27/6} = 1/13.$$
- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа
$P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6) \cdot (1/13) = 9/26,$

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6} = \frac{1}{1 + 3 + 9/2 + 27/6} = 1/13.$$
- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа $P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6) \cdot (1/13) = 9/26$,
- относительную пропускную способность системы $Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26$,

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
$$p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/6} = \frac{1}{1+3+9/2+27/6} = 1/13.$$
- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа $P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6)\cdot(1/13) = 9/26$,
- относительную пропускную способность системы $Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26$,
- абсолютную пропускную способность системы $A = \lambda Q = (3/2)\cdot(15/26) = 45/52$,

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
  $$p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/6} = \frac{1}{1+3+9/2+27/6} = 1/13.$$
- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа
  $P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6)\cdot(1/13) = 9/26,$
- относительную пропускную способность системы
  $Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26,$
- абсолютную пропускную способность системы
  $A = \lambda Q = (3/2)\cdot(15/26) = 45/52,$
- и среднее число занятых каналов
  $\bar{k} = A/\mu = (45/52)/(1/2) = 45/26.$

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,
- а поток обслуживаний имеет интенсивность μ.

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,
- а поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,
- а поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - $L_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе;

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,
- а поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - $L_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе;
  - $W_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания заявки в системе;

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,
- а поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - $L_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе;
  - $W_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания заявки в системе;
  - $L_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди;

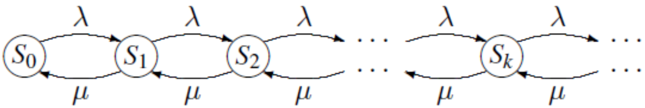
Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,
- а поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - $L_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе;
  - $W_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания заявки в системе;
  - $L_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди;
  - $W_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания заявки в очереди;

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

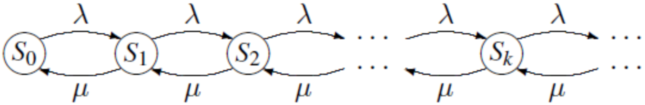
- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,
- а поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - $L_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе;
  - $W_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания заявки в системе;
  - $L_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди;
  - $W_{\text{оч}}$ – среднее время пребывания заявки в очереди;
  - $P_{\text{зан}}$ – вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



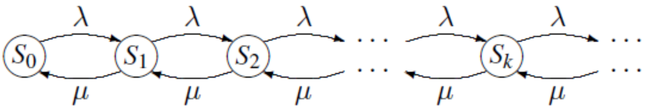
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k – в СМО находится k заявок ($k = 1, 2, \ldots$).

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



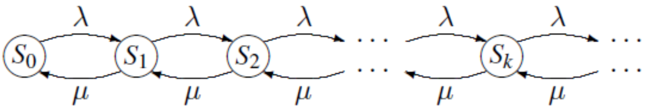
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k – в СМО находится k заявок $(k = 1, 2, \ldots)$.
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



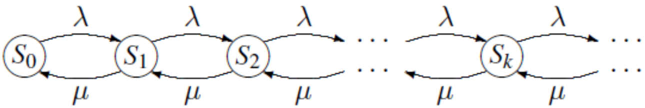
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k – в СМО находится k заявок $(k = 1, 2, \dots)$.
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



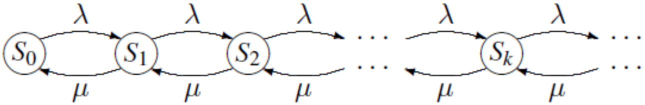
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k – в СМО находится k заявок $(k = 1, 2, \ldots)$.
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k – в СМО находится k заявок $(k = 1, 2, \dots)$.
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.
- Можно доказать, что если $\rho \overset{def}{=} \lambda/\mu < 1$, то финальные вероятности существуют,

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k – в СМО находится k заявок $(k = 1, 2, \ldots)$.
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.
- Можно доказать, что если $\rho \overset{def}{=} \lambda/\mu < 1$, то финальные вероятности существуют,
- а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот – регулярен,

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот – регулярен,
- и время обслуживания – тоже не случайное и равно интервалу между заявками.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот – регулярен,
- и время обслуживания – тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот – регулярен,
- и время обслуживания – тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.

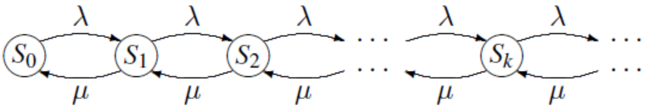
Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот – регулярен,
- и время обслуживания – тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным – и очередь уже будет расти до бесконечности.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

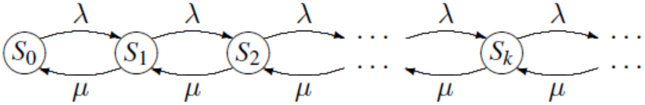
- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот – регулярен,
- и время обслуживания – тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным – и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» – абстракция.

Финальные вероятности



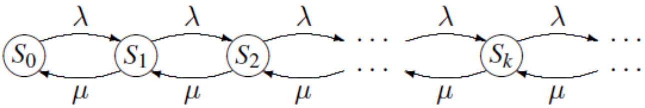
- Формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения были выведены только для случая конечного числа состояний.

Финальные вероятности



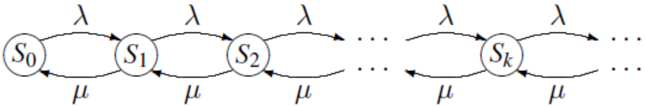
- Формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения были выведены только для случая конечного числа состояний.
- Мы позволим себе вольность и воспользуемся ими и для бесконечного числа состояний:
$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \cdots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \cdots\right)^{-1}$$
$$= (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \cdots)^{-1}.$$

Финальные вероятности



- Формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения были выведены только для случая конечного числа состояний.
- Мы позволим себе вольность и воспользуемся ими и для бесконечного числа состояний:
$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \dots\right)^{-1}$$
$$= (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$
- Ряд в этой формуле представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho \overset{def}{=} \lambda/\mu$.

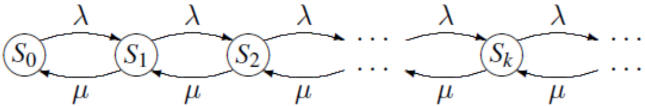
Финальные вероятности



$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \cdots)^{-1}.$$

- При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots$ существуют только при $\rho < 1$.

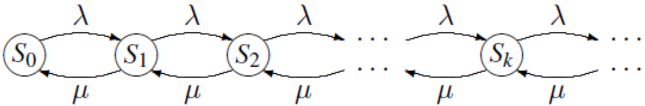
Финальные вероятности



$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \cdots)^{-1}.$$

- При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots$ существуют только при $\rho < 1$.
- При $\rho < 1$ ряд сходится и $p_0 = 1 - \rho$.

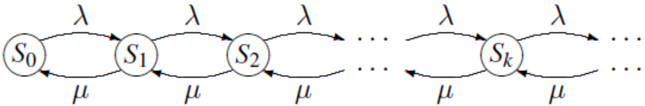
Финальные вероятности



$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \cdots)^{-1}.$$

- При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots$ существуют только при $\rho < 1$.
- При $\rho < 1$ ряд сходится и $p_0 = 1 - \rho$.
- Поскольку $p_k = \rho^k p_0$, то остальные вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ определяются по формулам: $p_1 = \rho(1-\rho), p_2 = \rho^2(1-\rho), \ldots, p_k = \rho^k(1-\rho), \ldots$

Финальные вероятности



$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

- При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ существуют только при $\rho < 1$.
- При $\rho < 1$ ряд сходится и $p_0 = 1 - \rho$.
- Поскольку $p_k = \rho^k p_0$, то остальные вероятности $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ определяются по формулам: $p_1 = \rho(1-\rho), p_2 = \rho^2(1-\rho), \dots, p_k = \rho^k(1-\rho), \dots$
- Как ни странно, но, поскольку максимальная из этих вероятностей есть p_0, то наиболее вероятное число заявок в системе будет 0.

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ – число заявок в системе –

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ – число заявок в системе –
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ – число заявок в системе –
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (1-\rho) = \rho(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k = \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k$$

$$= \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ – число заявок в системе –
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ – вероятности того, что канал занят.

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ – вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1 - \rho) = \rho$.

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ – вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1-\rho) = \rho$.
- Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{\text{об}} = \rho$, откуда

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ – вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1-\rho) = \rho$.
- Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{\text{об}} = \rho$, откуда

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

- По формуле Литтла найдем среднее время пребывания заявки в очереди:

$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Пример: постановка задачи

- Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов.

Пример: постановка задачи

- Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов.
- Менеджеры оценили, что клиенты будут прибывать с интенсивностью 15 клиентов в час.

Пример: постановка задачи

- Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов.
- Менеджеры оценили, что клиенты будут прибывать с интенсивностью 15 клиентов в час.
- Кассир, который будет работать в данном окне, в среднем тратит три минуты на обслуживание одного клиента.

Пример: постановка задачи

- Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов.
- Менеджеры оценили, что клиенты будут прибывать с интенсивностью 15 клиентов в час.
- Кассир, который будет работать в данном окне, в среднем тратит три минуты на обслуживание одного клиента.
- Нужно определить параметры эффектвности данной СМО.

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
  $\lambda = 15$, $\mu = 60/3 = 20$.

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
  $\lambda = 15$, $\mu = 60/3 = 20$.
- Средняя занятость кассира
  $\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75(75\%)$.

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие: $\lambda = 15$, $\mu = 60/3 = 20$.
- Средняя занятость кассира $\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75(75\%)$.
- Среднее число клиентов в системе: $L_{\text{сист}} = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0.75}{1-0.75} = 3$ клиента.

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
  $\lambda = 15$, $\mu = 60/3 = 20$.
- Средняя занятость кассира
  $\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75(75\%)$.
- Среднее число клиентов в системе:
  $L_{\text{сист}} = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0.75}{1-0.75} = 3$ клиента.
- Среднее число клиентов в очереди:
  $L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25$ клиента.

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
  $\lambda = 15$, $\mu = 60/3 = 20$.
- Средняя занятость кассира
  $\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75(75\%)$.
- Среднее число клиентов в системе:
  $L_{\text{сист}} = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0.75}{1-0.75} = 3$ клиента.
- Среднее число клиентов в очереди:
  $L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25$ клиента.
- Среднее время ожидания в системе:
  $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \dfrac{3}{15} = 0.2$ ч. $= 12$ мин.

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
  $\lambda = 15$, $\mu = 60/3 = 20$.
- Средняя занятость кассира
  $\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75(75\%)$.
- Среднее число клиентов в системе:
  $L_{\text{сист}} = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0.75}{1-0.75} = 3$ клиента.
- Среднее число клиентов в очереди:
  $L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25$ клиента.
- Среднее время ожидания в системе:
  $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \dfrac{3}{15} = 0.2$ ч. $= 12$ мин.
- Среднее время ожидания в очереди:
  $W_{\text{оч}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{оч}} = \dfrac{2.25}{15} = 0.15$ ч. $= 9$ мин.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Нумерация состояний теперь следующая:

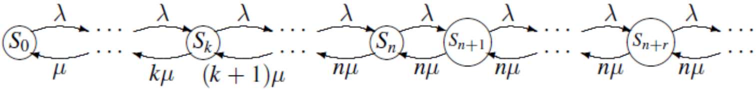
- S_k – занято k каналов, остальные свободны $(k = 0, \ldots, n)$;

Нумерация состояний теперь следующая:

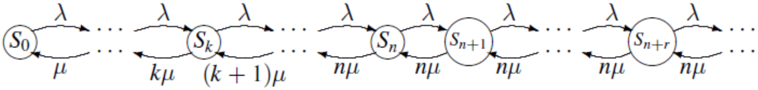
- S_k – занято k каналов, остальные свободны $(k = 0, ..., n)$;
- S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди $(r = 1, 2, ...)$.

Нумерация состояний теперь следующая:

- S_k – занято k каналов, остальные свободны $(k = 0, \ldots, n)$;
- S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди $(r = 1, 2, \ldots)$.
- Граф состояний СМО представляет схему гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний.

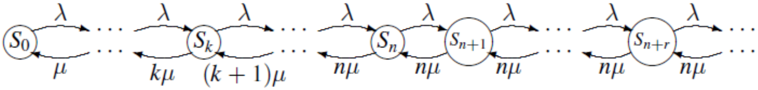


Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.

Финальные вероятности



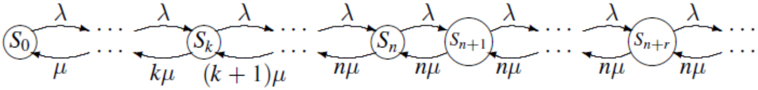
- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Сначала найдем

$$\frac{1}{p_0} = 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \frac{\rho^{n+3}}{n^3 \cdot n!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \cdots\right)$$

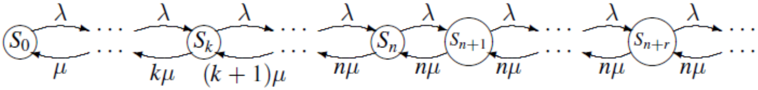
$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}.$$

Финальные вероятности



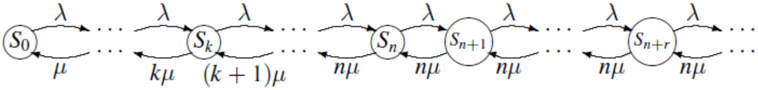
- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.

Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Итак
$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}.$$

Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Итак
$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}.$$
- Теперь найдем остальные вероятности:
$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, \cdots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \cdots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0,$$
$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \cdots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \cdots$$

Характеристики эффективности СМО

- Среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

Характеристики эффективности СМО

- Среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\rho^{r-1}}{n^r}$$
$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$
$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.$$

- Среднее число заявок в системе рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,

- Среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\rho^{r-1}}{n^r}$$
$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$
$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.$$

- Среднее число заявок в системе рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает среднее число занятых каналов,

Характеристики эффективности СМО

- Среднее число заявок в очереди

$$
\begin{aligned}
L_{\text{оч}} &= \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\rho^{r-1}}{n^r} \\
&= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r \\
&= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.
\end{aligned}
$$

- Среднее число заявок в системе рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает среднее число занятых каналов,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.

Характеристики эффективности СМО

- Среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\rho^{r-1}}{n^r}$$
$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$
$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

- Среднее число заявок в системе рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает среднее число занятых каналов,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе: $W_{\text{оч}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}$, $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$.

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
    - одна продает билеты на маршруты направления A,

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая – на маршруты направления B.

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая – на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda A = \lambda B = 0.45$ (пассажира в минуту).

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления А,
  - а другая – на маршруты направления В.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda A = \lambda B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu A = \mu B = 0.5$).

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления А,
  - а другая – на маршруты направления В.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda A = \lambda B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu A = \mu B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая – на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda A = \lambda B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu A = \mu B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).
- Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.
- Вычисляем среднюю длину очереди: $L_{\text{оч}} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.
- Вычисляем среднюю длину очереди: $L_{\text{оч}} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$
- Среднее время ожидания в очереди $W_{\text{оч}} = \dfrac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \dfrac{8.1}{0.45} \approx 18(\text{минут}).$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda A + \lambda B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda A + \lambda B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda A + \lambda B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda A + \lambda B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) - 1 \approx 0.0525.$$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda A + \lambda B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) - 1 \approx 0.0525.$$

- Среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda A + \lambda B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем
$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) - 1 \approx 0.0525.$$
- Среднее число заявок в очереди:
$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$
- Среднее время ожидания в очереди
$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7.68}{0.9} \approx 8.54 \text{ (минуты)}.$$

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления)

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления)
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления)
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления)
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления)
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18$, $W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления)
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.