Управление проектами

Виктор Васильевич Лепин

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.
- Одной из главных целей сетевого планирования является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ проекта,

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.
- Одной из главных целей сетевого планирования является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ проекта,
- что позволяет предвидеть возможные причины задержек.

Сетевой график

- Сетевой график есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи между всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.

Сетевой график

- Сетевой график есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи между всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют работам,

Сетевой график

- Сетевой график есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи между всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют работам,
- а вершины – событиям.

Сетевой график

- Сетевой график есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи между всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют работам,
- а вершины – событиям.
- Событие – это момент времени, когда можно начать выполнение новых работ.

Сетевой график

- Сетевой график есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи между всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют работам,
- а вершины – событиям.
- Событие – это момент времени, когда можно начать выполнение новых работ.
- Для каждой работы (дуги) $(i, j) \in E$ известна ее продолжительность t_{ij}.

Отношения предшествования

- Направления дуг определяются отношениями предшествования между работами.

Отношения предшествования

- Направления дуг определяются отношениями предшествования между работами.
- Помеченное ребро $i \xrightarrow{\text{A}} j$ означает:

Отношения предшествования

- Направления дуг определяются отношениями предшествования между работами.
- Помеченное ребро $i \xrightarrow{\text{A}} j$ означает:
- i-е событие должно наступить до начала работы A, а

Отношения предшествования

- Направления дуг определяются отношениями предшествования между работами.
- Помеченное ребро $i \xrightarrow{\text{A}} j$ означает:
- i-е событие должно наступить до начала работы A, а
- j-е не может наступить до окончания работы A.

Отношения предшествования

- Направления дуг определяются отношениями предшествования между работами.
- Помеченное ребро $i \xrightarrow{\text{A}} j$ означает:
- i-е событие должно наступить до начала работы A, а
- j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.

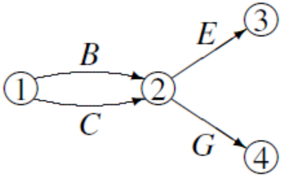
Отношения предшествования

- Направления дуг определяются отношениями предшествования между работами.
- Помеченное ребро $i \xrightarrow{\text{A}} j$ означает:
- i-е событие должно наступить до начала работы A, а
- j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.
- Например, если работа G выполняется за работами B и C, а работа E – за работой B, но не за C.

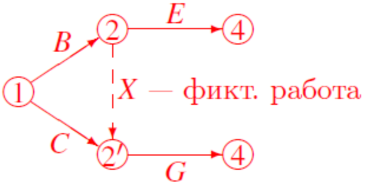
Отношения предшествования

- Направления дуг определяются отношениями предшествования между работами.
- Помеченное ребро $i \xrightarrow{\mathrm{A}} j$ означает:
- i-е событие должно наступить до начала работы A, а
- j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.
- Например, если работа G выполняется за работами B и C, а работа E – за работой B, но не за C.

Неправильное представл.:



Правильное представление:



Пример: описание проекта

- При сборке станка узлы 1 и 2 соединяются в узел 4,

Пример: описание проекта

- При сборке станка узлы 1 и 2 соединяются в узел 4,
- а объединение узлов 3 и 4 дает готовое изделие.

Пример: описание проекта

- При сборке станка узлы 1 и 2 соединяются в узел 4,
- а объединение узлов 3 и 4 дает готовое изделие.
- Так как необходимо согласовать некоторые детали узла 3 с соответствующими деталями узла 2,

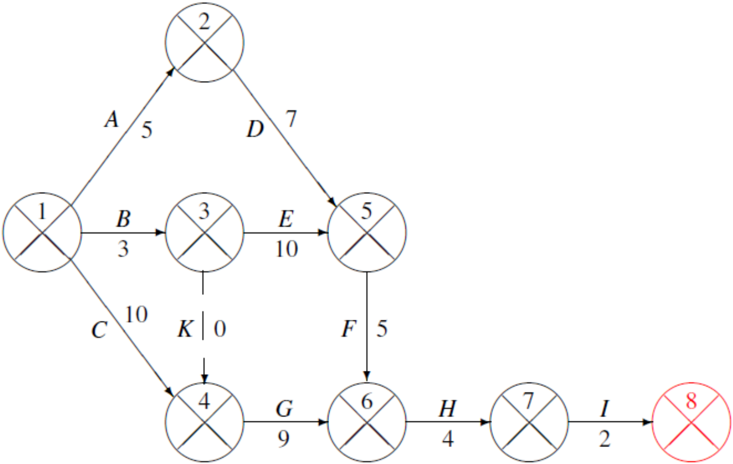
Пример: описание проекта

- При сборке станка узлы 1 и 2 соединяются в узел 4,
- а объединение узлов 3 и 4 дает готовое изделие.
- Так как необходимо согласовать некоторые детали узла 3 с соответствующими деталями узла 2,
- то узел 3 нельзя собрать ранее, чем будут в наличии детали узла 2.

Пример: описание работ

Обозн.	Описание	Прод. (сут.)	Непоср. предш.
A	Закупка деталей узла 1	5	–
B	Закупка деталей узла 2	3	–
C	Закупка деталей узла 3	10	–
D	Изготовление узла 1	7	A
E	Изготовление узла 2	10	B
F	Изготовление узла 4	5	D, E
G	Изготовление узла 3	9	B, C
H	Окончательная сборка	4	F, G
I	Испытания	2	H

Сетевой график процесса изготовления станка



Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)

Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно заключительное событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).

Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно заключительное событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).
- В графике нет циклов.

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно заключительное событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).
- В графике нет циклов.
- Поэтому события можно занумеровать таким образом, что каждая дуга (работа) начинается в вершине с меньшим номером и заканчивается в вершине с большим номером.

Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно заключительное событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).
- В графике нет циклов.
- Поэтому события можно занумеровать таким образом, что каждая дуга (работа) начинается в вершине с меньшим номером и заканчивается в вершине с большим номером.
- В дальнейшем будем считать, что $V = \{1, \ldots, n\}$ и, если $(i, j) \in E$, то $i < j$.

Ранние сроки наступления событий

- Ранний срок T_j^p наступления события j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.

Ранние сроки наступления событий

- Ранний срок T_j^p наступления события j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, T_j^p есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг – это продолжительности работ.

Ранние сроки наступления событий

- Ранний срок T_j^p наступления события j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, T_j^p есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг – это продолжительности работ.
- Параметры T_j^p можно вычислить по формуле:

$$T_1^p = 0; \;\; T_j^p = \max_{ij \in E}(T_i^p + t_{ij}), \;\; j = 2, \ldots, n.$$

Ранние сроки наступления событий

- Ранний срок T_j^p наступления события j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, T_j^p есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг – это продолжительности работ.
- Параметры T_j^p можно вычислить по формуле:

$$T_1^p = 0; \quad T_j^p = \max_{ij \in E}(T_i^p + t_{ij}), \quad j = 2, \ldots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n – это самый ранний срок окончания всего проекта,

Ранние сроки наступления событий

- Ранний срок T_j^p наступления события j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, T_j^p есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг – это продолжительности работ.
- Параметры T_j^p можно вычислить по формуле:

$$T_1^p = 0; \quad T_j^p = \max_{ij \in E}(T_i^p + t_{ij}), \quad j = 2, \ldots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n – это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.

Ранние сроки наступления событий

- Ранний срок T_j^p наступления события j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, T_j^p есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг – это продолжительности работ.
- Параметры T_j^p можно вычислить по формуле:

$$T_1^p = 0; \;\; T_j^p = \max_{ij \in E}(T_i^p + t_{ij}), \;\; j = 2, \ldots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n – это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется критический путем,

Ранние сроки наступления событий

- Ранний срок T_j^p наступления события j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, T_j^p есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг – это продолжительности работ.
- Параметры T_j^p можно вычислить по формуле:

$$T_1^p = 0; \quad T_j^p = \max_{ij \in E}(T_i^p + t_{ij}), \quad j = 2, \ldots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n – это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется критический путем,
- а его длина $T^{\text{кр}} = T_n^p$ – критическим временем.

Поздние сроки наступления событий

- Поздний срок T_j^{Π} наступления события j – это наиболее поздний срок наступления события j,

Поздние сроки наступления событий

- Поздний срок $T_j^{\text{п}}$ наступления события j – это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).

Поздние сроки наступления событий

- Поздний срок $T_j^{\text{п}}$ наступления события j – это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).
- Чтобы не увеличить ранний срок окончания проекта, событие j должно наступить не позже, чем в момент $T_j^{\text{п}} = T^{\text{кр}} - L_{jn}$

Поздние сроки наступления событий

- Поздний срок $T_j^{\text{п}}$ наступления события j – это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).
- Чтобы не увеличить ранний срок окончания проекта, событие j должно наступить не позже, чем в момент $T_j^{\text{п}} = T^{\text{кр}} - L_{jn}$
- где L_{jn} – максимальная длина пути из j в n.

Поздние сроки наступления событий

- Поздний срок $T_j^{\text{п}}$ наступления события j – это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).
- Чтобы не увеличить ранний срок окончания проекта, событие j должно наступить не позже, чем в момент $T_j^{\text{п}} = T^{\text{кр}} - L_{jn}$
- где L_{jn} – максимальная длина пути из j в n.
- Мы можем вычислить параметры $T_j^{\text{п}}$ по следующей рекурентной формуле:
$T^{\text{п}} = T^{\text{кр}}$, $T_j^{\text{п}} = \min_{ji \in E}\{T_i^p - t_{ij}\}$, $j = n-1, \ldots, 1$.

Поздние сроки наступления событий

- Резерв времени R_j события j – это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е. $R_j = T^{\text{п}} - T_j^p$.

Поздние сроки наступления событий

- Резерв времени R_j события j – это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е. $R_j = T^{\text{п}} - T_j^p$.
- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.

Поздние сроки наступления событий

- Резерв времени R_j события j – это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е. $R_j = T^{п} - T_j^p$.
- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.

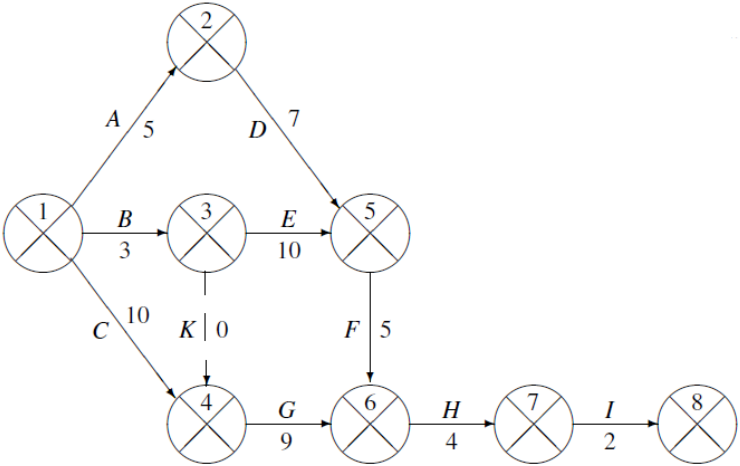
Поздние сроки наступления событий

- Резерв времени R_j события j – это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е. $R_j = T^{\text{п}} - T_j^p$.
- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.
- Наоборот, наступление события j, которое не лежит на критическом пути может быть задержано на R_j единиц времени,

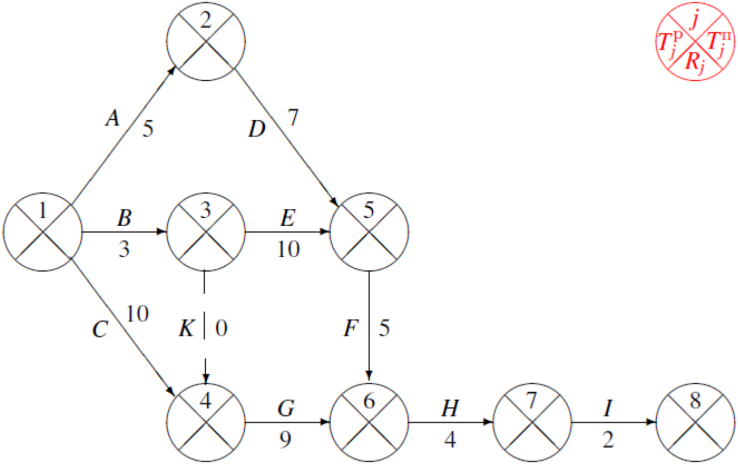
Поздние сроки наступления событий

- Резерв времени R_j события j – это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е. $R_j = T^{п} - T_j^p$.
- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.
- Наоборот, наступление события j, которое не лежит на критическом пути может быть задержано на R_j единиц времени,
- причем, это не приведет к увеличению раннего срока окончания всего проекта.

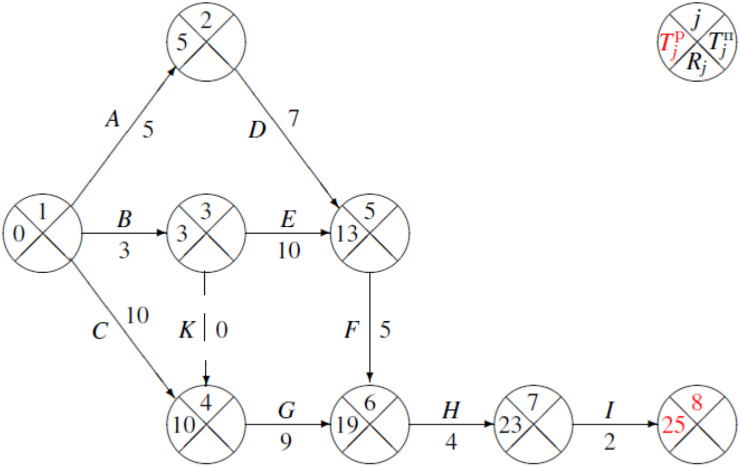
Пример: вычисление параметров сетевого графика



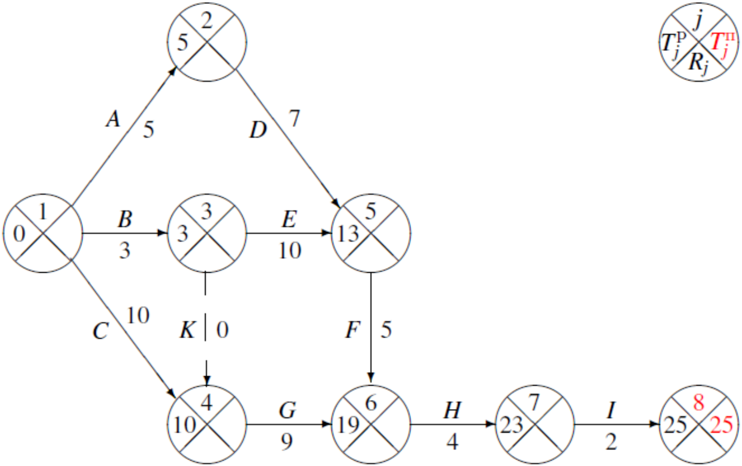
Пример: вычисление параметров сетевого графика



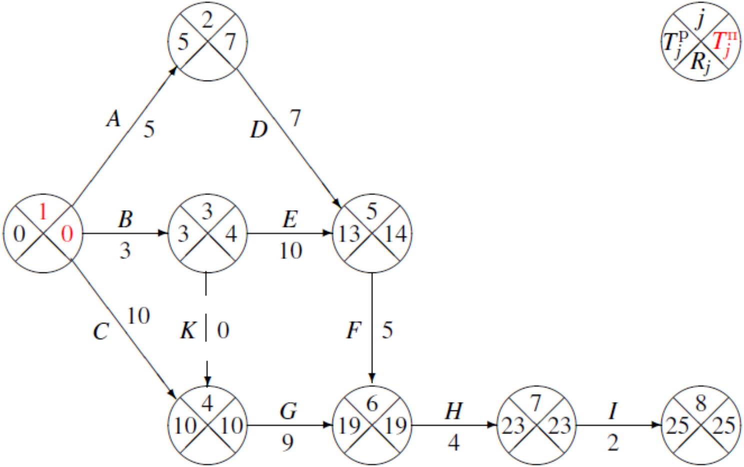
Пример: вычисление параметров сетевого графика



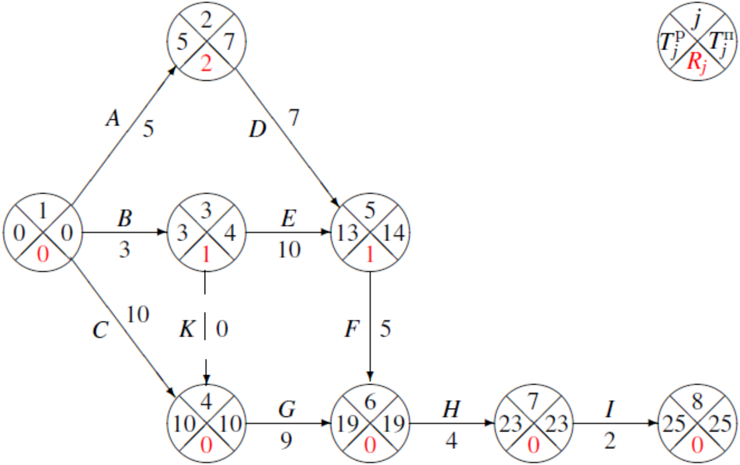
Пример: вычисление параметров сетевого графика



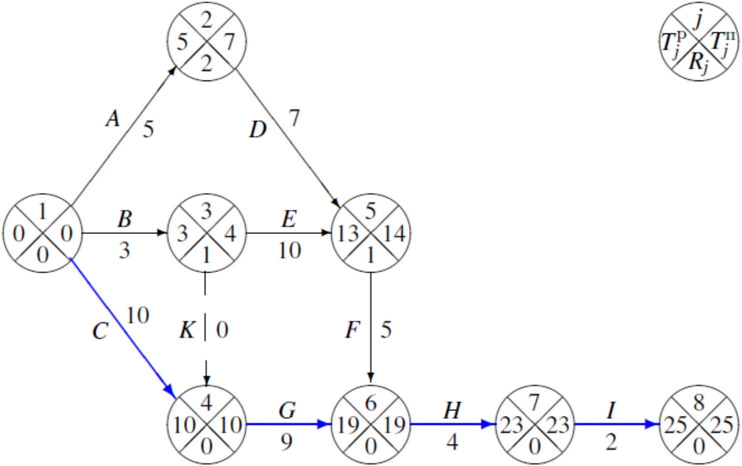
Пример: вычисление параметров сетевого графика



Пример: вычисление параметров сетевого графика



Пример: вычисление параметров сетевого графика



Ранние и поздние сроки начала и окончания работ

- Ранний срок $T^{p}_{\text{н}}(i,j)$ начала работы (i,j) равен раннему сроку T^{p}_{i} наступления события i, поскольку работа (i,j) не может быть начата, пока не наступит событие i.

Ранние и поздние сроки начала и окончания работ

- Ранний срок $T_{\text{н}}^{p}(i,j)$ начала работы (i,j) равен раннему сроку T_i^p наступления события i, поскольку работа (i,j) не может быть начата, пока не наступит событие i.
- Поздний срок $T_{\text{о}}^{\text{п}}(i,j)$ окончания работы (i,j) – это наиболее поздний срок окончания работы (i,j) без задержки срока окончания проекта: $T_{\text{н}}^{p}(i,j) = T_j^{\text{п}}$.

Ранние и поздние сроки начала и окончания работ

- Ранний срок $T_{\text{н}}^{p}(i,j)$ начала работы (i,j) равен раннему сроку T_i^p наступления события i, поскольку работа (i,j) не может быть начата, пока не наступит событие i.
- Поздний срок $T_{\text{о}}^{\text{п}}(i,j)$ окончания работы (i,j) – это наиболее поздний срок окончания работы (i,j) без задержки срока окончания проекта: $T_{\text{н}}^{p}(i,j) = T_j^{\text{п}}$.
- Ранний срок $T_{\text{о}}^{p}(i,j)$ окончания работы (i,j) определяется формулой $T_{\text{о}}^{p}(i,j) = T_j^p + t_{ij}$.

Ранние и поздние сроки начала и окончания работ

- Ранний срок $T_{\text{н}}^{p}(i,j)$ начала работы (i,j) равен раннему сроку T_i^p наступления события i, поскольку работа (i,j) не может быть начата, пока не наступит событие i.
- Поздний срок $T_{\text{о}}^{\text{п}}(i,j)$ окончания работы (i,j) – это наиболее поздний срок окончания работы (i,j) без задержки срока окончания проекта: $T_{\text{н}}^{p}(i,j) = T_j^{\text{п}}$.
- Ранний срок $T_{\text{о}}^{p}(i,j)$ окончания работы (i,j) определяется формулой $T_{\text{о}}^{p}(i,j) = T_j^p + t_{ij}$.
- Поздний срок $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j)$ начала работы (i,j) определяется формулой $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - t_{ij}$.

Четыре резерва времени работы

- Суммарный резерв $R^{\text{сум}}(i,j)$ времени работы (i,j) – это максимальная задержка работы (i,j) без задержки срока выполнения всего проекта:
  $R^{\text{сум}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - T_i^{p} - t_{ij}.$

Четыре резерва времени работы

- Суммарный резерв $R^{\text{сум}}(i,j)$ времени работы (i,j) – это максимальная задержка работы (i,j) без задержки срока выполнения всего проекта: $R^{\text{сум}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - T_i^{p} - t_{ij}$.
- Свободный резерв $R^{\text{св}}(i,j)$ времени работы (i,j) – это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на начала последующих работ: $R^{\text{св}}(i,j) = T_j^{p} - T_i^{p} - t_{ij}$.

Четыре резерва времени работы

- Суммарный резерв $R^{\text{сум}}(i, j)$ времени работы (i, j) – это максимальная задержка работы (i, j) без задержки срока выполнения всего проекта:
$R^{\text{сум}}(i, j) = T_j^{\text{п}} - T_i^p - t_{ij}$.
- Свободный резерв $R^{\text{св}}(i, j)$ времени работы (i, j) – это максимальная задержка работы (i, j), которая не влияет на начала последующих работ: $R^{\text{св}}(i, j) = T_j^p - T_i^p - t_{ij}$.
- Гарантированный резерв $R^{\text{гар}}(i, j)$ времени работы (i, j) – это максимальная задержка работы (i, j), которая не влияет на ранний срок окончания всего проекта, при условии что предшествующие работы выполнялись в свои поздние сроки $R^{\text{гар}}(i, j) = T_j^{\text{п}} - (T_i^{\text{п}} - t_{ij})$.

Четыре резерва времени работы

- Суммарный резерв $R^{\text{сум}}(i,j)$ времени работы (i,j) – это максимальная задержка работы (i,j) без задержки срока выполнения всего проекта:
$R^{\text{сум}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - T_i^{p} - t_{ij}$.
- Свободный резерв $R^{\text{св}}(i,j)$ времени работы (i,j) – это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на начала последующих работ: $R^{\text{св}}(i,j) = T_j^{p} - T_i^{p} - t_{ij}$.
- Гарантированный резерв $R^{\text{гар}}(i,j)$ времени работы (i,j) – это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на ранний срок окончания всего проекта, при условии что предшествующие работы выполнялись в свои поздние сроки $R^{\text{гар}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - (T_i^{\text{п}} - t_{ij})$.
- Независимый резерв $R^{\text{нез}}(i,j)$ времени работы (i,j) – это такая задержка работы (i,j), которая не влияет на начало следующих работ, при условии что все предшествующие работы окончились в свои поздние сроки: $R^{\text{нез}}(i,j) = \max\{0, T_j^{p} - T_j^{\text{п}} - T_i^{\text{п}} - t_{ij}\}$.

Результаты вычисл. по методу критического пути

Раб.	Дуга	Прод.	Сроки нач. и оконч.				Резервы			
			$T_н^р$	$T_о^р$	$T_н^п$	$T_о^п$	$R^{сум}$	$R^{св}$	$R^{гар}$	$R^{нез}$
A	$(1,2)$	5	0	5	2	7	2	0	2	0
B	$(1,3)$	3	0	3	1	4	1	0	1	0
C	$(1,4)$	10	0	10	0	10	0	0	0	0
D	$(1,5)$	7	5	12	7	14	2	1	0	0
E	$(3,5)$	10	3	13	4	14	1	0	0	0
G	$(4,6)$	9	10	19	10	19	0	0	0	0
F	$(5,6)$	5	13	19	14	19	1	1	0	0
H	$(6,7)$	4	19	23	19	23	0	0	0	0
I	$(7,8)$	2	23	25	23	25	0	0	0	0
K	$(3,4)$	0	3	3	10	10	7	7	0	0

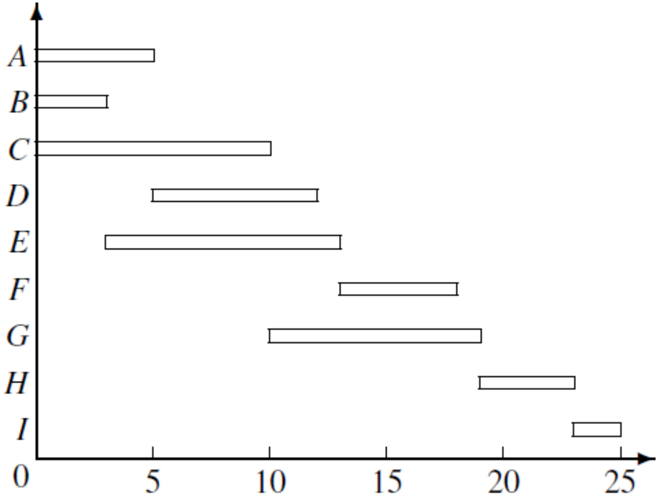
Результаты вычисл. по методу критического пути

Раб.	Дуга	Прод.	Сроки нач. и оконч.				Резервы			
			$T_н^р$	$T_о^р$	$T_н^п$	$T_о^п$	$R^{сум}$	$R^{св}$	$R^{гар}$	$R^{нез}$
A	$(1,2)$	5	0	5	2	7	2	0	2	0
B	$(1,3)$	3	0	3	1	4	1	0	1	0
C	$(1,4)$	10	0	10	0	10	0	0	0	0
D	$(1,5)$	7	5	12	7	14	2	1	0	0
E	$(3,5)$	10	3	13	4	14	1	0	0	0
G	$(4,6)$	9	10	19	10	19	0	0	0	0
F	$(5,6)$	5	13	19	14	19	1	1	0	0
H	$(6,7)$	4	19	23	19	23	0	0	0	0
I	$(7,8)$	2	23	25	23	25	0	0	0	0
K	$(3,4)$	0	3	3	10	10	7	7	0	0

Результаты вычисл. по методу критического пути

Раб.	Дуга	Прод.	Сроки нач. и оконч.				Резервы			
			$T_н^р$	$T_о^р$	$T_н^п$	$T_о^п$	$R^{сум}$	$R^{св}$	$R^{гар}$	$R^{нез}$
A	$(1,2)$	5	0	5	2	7	2	0	2	0
B	$(1,3)$	3	0	3	1	4	1	0	1	0
C	$(1,4)$	10	0	10	0	10	0	0	0	0
D	$(1,5)$	7	5	12	7	14	2	1	0	0
E	$(3,5)$	10	3	13	4	14	1	0	0	0
G	$(4,6)$	9	10	19	10	19	0	0	0	0
F	$(5,6)$	5	13	19	14	19	1	1	0	0
H	$(6,7)$	4	19	23	19	23	0	0	0	0
I	$(7,8)$	2	23	25	23	25	0	0	0	0
K	$(3,4)$	0	3	3	10	10	7	7	0	0

Временная диаграмма проекта



Метод оценки и пересмотра планов (ПЕРТ)

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В методе оценки и пересмотра планов (ПЕРТ) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j) :

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В методе оценки и пересмотра планов (ПЕРТ) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j) :
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В методе оценки и пересмотра планов (ПЕРТ) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j) :
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};
  2. оптимистическая оценка времени выполения a_{ij};

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В методе оценки и пересмотра планов (ПЕРТ) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j) :
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};
  2. оптимистическая оценка времени выполения a_{ij};
  3. пессимистическая оценка времени выполения b_{ij}.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i, j) есть случайная величина с бета-распределением,

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i, j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i, j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i, j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i, j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i, j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

- Продолжительность проекта (критическое время) T есть сумма продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i, j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i, j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

- Продолжительность проекта (критическое время) T есть сумма продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.
- Поэтому T также является случайной величиной.

Математическое ожидание случайной величины T

- В методе ПЕРТ математическое ожидание $E(T)$ случайной величины T вычисляется следующим образом.

Математическое ожидание случайной величины T

- В методе ПЕРТ математическое ожидание $E(T)$ случайной величины T вычисляется следующим образом.
- В качестве продолжительности каждой работы (i, j) берется ее средния продолжительность μ_{ij}.

- В методе ПЕРТ математическое ожидание $E(T)$ случайной величины T вычисляется следующим образом.
- В качестве продолжительности каждой работы (i, j) берется ее средния продолжительность μ_{ij}.
- Для этих продолжительностей определяются критический путь

Математическое ожидание случайной величины T

- В методе ПЕРТ математическое ожидание $E(T)$ случайной величины T вычисляется следующим образом.
- В качестве продолжительности каждой работы (i, j) берется ее средния продолжительность μ_{ij}.
- Для этих продолжительностей определяются критический путь
- и $E(T)$ полагается равным сумме средних продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ, в

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ, в
- силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ, в
- силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ, в
- силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле

$$\mathbb{P}(T \leq \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ, в
- силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле

$$\mathbb{P}(T \leq \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

- мы можем вычислить вероятность завершения проекта к заданному сроку $\bar{T}$.

Пример анализа проекта по методу ПЕРТ

Работа	Непоср. предш. работы	Оценки продолжительности: оптимис-тическая	наиболее вероятная	пессимис-тическая	Средняя продолжит.	Стандартное отклонение	Дисперсия
A	—	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	1/3	1/9
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	C	3	12	21	12	3	9
G	C	4	7	13	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
H	D,E,F	5	7	10	13	2	4
I	D,E,F	6	8	12	$8\frac{1}{3}$	2	4
J	G,H	3	6	9	6	1	1
K	I,J	3	8	11	8	1	1

Работа	Непоср. предш. работы	Оценки продолжительности: оптимистическая	Оценки продолжительности: наиболее вероятная	Оценки продолжительности: пессимистическая	Средняя продолжит.	Стандартное отклонение	Дисперсия
A	—	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	1/3	1/9
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	C	3	12	21	12	3	9
G	C	4	7	13	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
H	D,E,F	5	7	10	13	2	4
I	D,E,F	6	8	12	$8\frac{1}{3}$	2	4
J	G,H	3	6	9	6	1	1
K	I,J	3	8	11	8	1	1

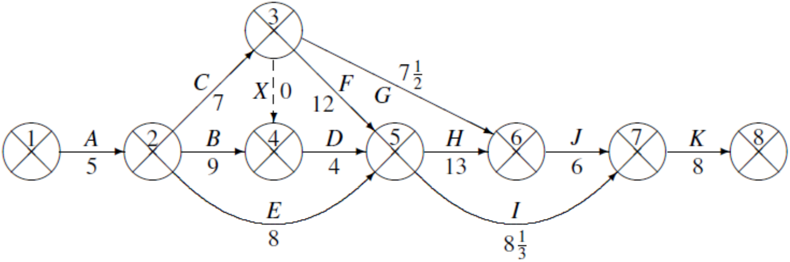
Пример анализа проекта по методу ПЕРТ

Работа	Непоср. предш. работы	Оценки продолжительности: оптимистическая	наиболее вероятная	пессимистическая	Средняя продолжит.	Стандартное отклонение	Дисперсия
A	—	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	1/3	1/9
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	C	3	12	21	12	3	9
G	C	4	7	13	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
H	D,E,F	5	7	10	13	2	4
I	D,E,F	6	8	12	$8\frac{1}{3}$	2	4
J	G,H	3	6	9	6	1	1
K	I,J	3	8	11	8	1	1

Пример анализа проекта по методу ПЕРТ

Работа	Непоср. предш. работы	Оценки продолжительности			Средняя продолжит.	Стандартное отклонение	Дисперсия
		оптимистическая	наиболее вероятная	пессимистическая			
A	—	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	1/3	1/9
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	C	3	12	21	12	3	9
G	C	4	7	13	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
H	D,E,F	5	7	10	13	2	4
I	D,E,F	6	8	12	$8\frac{1}{3}$	2	4
J	G,H	3	6	9	6	1	1
K	I,J	3	8	11	8	1	1

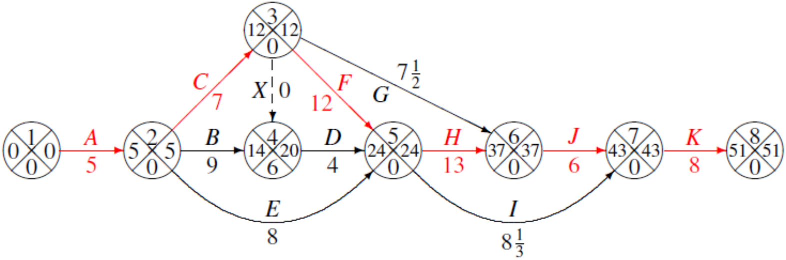
Решение примера методом ПЕРТ



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- Критическое время $T^{\text{кр}} = 51$. Поэтому $\mu = E(T) = 51$
- и $\sigma^2(T) = 1 + 1/9 + 9 + 4 + 1 + 1 = 16\frac{1}{9}$

  а $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)} \approx 4.014$.

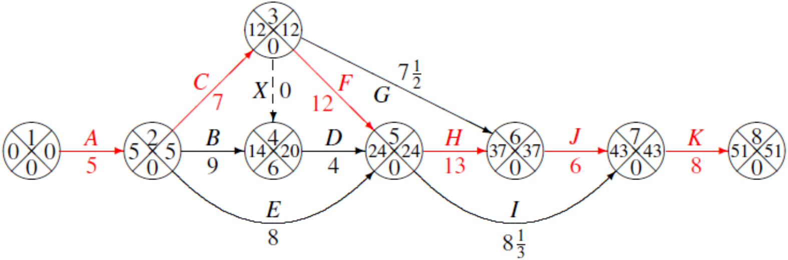
Решение примера методом ПЕРТ



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- Критическое время $T^{\text{кр}} = 51$. Поэтому $\mu = E(T) = 51$
- и $\sigma^2(T) = 1 + 1/9 + 9 + 4 + 1 + 1 = 16\frac{1}{9}$

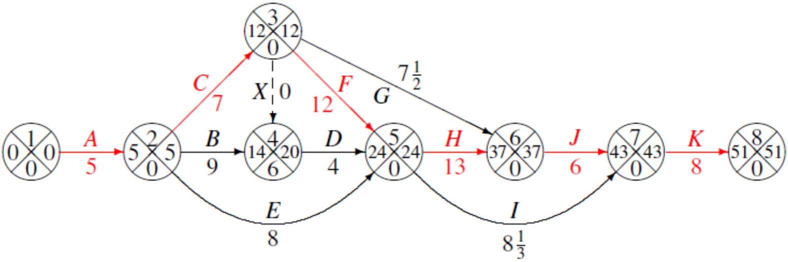
  а $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)} \approx 4.014$.

Решение примера методом ПЕРТ



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- Критическое время $T^{\text{кр}} = 51$. Поэтому $\mu = E(T) = 51$
- и $\sigma^2(T) = 1 + 1/9 + 9 + 4 + 1 + 1 = 16\frac{1}{9}$

  а $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)} \approx 4.014$.



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- $\mu = E(T) = 51, \quad \sigma^2(T) = 16\frac{1}{9}, \quad \sigma \approx 4.014.$
- Вероятность того, что проект будет завершен за 58 дней:

$$\mathbb{P}(T \le 58) = \mathbb{P}\left((T-\mu)/\sigma \le \tfrac{58-51}{4.014}\right)$$
$$= \mathbb{P}((T-\mu)/\sigma \le 1.74) = 0.9591.$$

Критика ПЕРТ

Главное предположние метода ПЕРТ не верно

- Главное предположние метода ПЕРТ, что

Главное предположние метода ПЕРТ не верно

- Главное предположние метода ПЕРТ, что
- математическое ожидание критического времени $E(T)$ равно критическому времени проекта,

Главное предположние метода ПЕРТ не верно

- Главное предположние метода ПЕРТ, что
- математическое ожидание критического времени $E(T)$ равно критическому времени проекта,
- когда продолжительности всех работ равны математическим ожиданиям реальных (случайных) продолжительностей,

Главное предположние метода ПЕРТ не верно

- Главное предположние метода ПЕРТ, что
- математическое ожидание критического времени $E(T)$ равно критическому времени проекта,
- когда продолжительности всех работ равны математическим ожиданиям реальных (случайных) продолжительностей,
- в общем случае не верно.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые
- можно выполнять параллельно. Продолжительность

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые
- можно выполнять параллельно. Продолжительность
- t_A работы A постоянна и равна 5, а

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые
- можно выполнять параллельно. Продолжительность
- t_A работы A постоянна и равна 5, а
- продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые
- можно выполнять параллельно. Продолжительность
- t_A работы A постоянна и равна 5, а
- продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые
- можно выполнять параллельно. Продолжительность
- t_A работы A постоянна и равна 5, а
- продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые
- можно выполнять параллельно. Продолжительность
- t_A работы A постоянна и равна 5, а
- продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые
- можно выполнять параллельно. Продолжительность
- t_A работы A постоянна и равна 5, а
- продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B, которые
- можно выполнять параллельно. Продолжительность
- t_A работы A постоянна и равна 5, а
- продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
    - выполнить множество работ,

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
    - выполнить множество работ,
    - используя требуемые ресурсы,
    - соблюдая отношения предшествования между работами,
    - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель – найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^n$.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j : время выполнения;

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j : время выполнения;
  - ρ_{jk}^r : необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^r\}$;

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j : время выполнения;
  - ρ_{jk}^r : необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^r\}$;
  - ρ_{jk}^n : необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^n\}$;

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r возобновляемых и q^n невозобновляемых ресурсов.
- В любой момент времени доступно R^r_k единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R^n_k единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j : время выполнения;
  - ρ^r_{jk} : необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^r\}$;
  - ρ^n_{jk} : необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^n\}$;
- Ацикл. орграф $G = (J = \{1, \ldots, n\}, E)$ задает отношения предшествования между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа j_1.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t + 1$.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t + 1$.
- Расписание выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \ldots, u_j - p_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- Расписание выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- Расписание выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \ldots, u_j - p_j$, $j = 1, \ldots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j $(j = 1, \ldots, n)$, где

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- Расписание выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j $(j = 1, \dots, n)$, где
- s_j – это время начала выполнения работы j.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- Расписание выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \ldots, u_j - p_j$, $j = 1, \ldots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j $(j = 1, \ldots, n)$, где
- s_j – это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления длины расписания, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

ЦП формулировка

$T \to \min,$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \ldots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \ldots, U;\ k = 1, \ldots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$
$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \ldots, u_j - p_j;\ j = 1, \ldots, n.$$

Минимизируем длину расписания.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho_{jk}^{n} x_{jt} \leq R_k^n, \quad k = 1, \ldots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho_{jk}^{r} x_{j\tau} \leq R_k^r, \quad t = L, \ldots, U; \; k = 1, \ldots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \geq p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \geq p_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \ldots, u_j - p_j; \; j = 1, \ldots, n.$$

Каждая работа должна начинаться только один раз.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

Нельзя превышать лимиты на все невозобновляемые ресурсы.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1,l_j\}}^{\min\{t,u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

В любой момент времени нельзя превышать лимиты на все возобновляемые ресурсы.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

Вычисляем
время начала
каждой работы.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1,\dots,q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1,l_j\}}^{\min\{t,u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L,\dots,U;\ k = 1,\dots,q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1,\dots,n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1,j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1,\dots,n,$$

$$x_{jt} \in \{0,1\}, \quad t = l_j,\dots,u_j - p_j;\ j = 1,\dots,n.$$

Отношения предшествования.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho_{jk}^{n} x_{jt} \leq R_k^n, \quad k = 1, \ldots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho_{jk}^{r} x_{j\tau} \leq R_k^r, \quad t = L, \ldots, U; \; k = 1, \ldots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \geq p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \geq p_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \ldots, u_j - p_j; \; j = 1, \ldots, n.$$

Длина расписания не меньше времени окончания каждой из работ.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$
$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$
$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$
$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

Описываем переменные.