

Преподаватель: к. ф.-м. н., доцент *Цеховая Татьяна Вячеславовна*

**Образовательный портал edufpmi.bsu.by
Самостоятельная запись на курс по ключевому слову:
ММАД2022**

Tsekhavaya@mail.ru

Дисциплина специализации

Математические методы анализа данных

Лекции - 34 часа

Лабораторные занятия - 30 часов

УСР – 4 часа

Отчетность - зачет

18 часов лаб. ауд. + 12 часов лаб. ДО + 4 часа УСР ДО

Мероприятия по текущему контролю знаний:

- **тест по разделу 1 «Случайные процессы»**
- **коллоквиум**
- **лабораторные работы**

РАЗДЕЛ 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов

- [1.1.](#) Определение случайного процесса
- [1.2.](#) Основные характеристики случайного процесса
- [1.3.](#) Некоторые примеры случайных процессов

Тема 2. Стационарные случайные процессы

- [2.1.](#) Виды стационарности
- [2.2.](#) Характеристики стационарных в широком смысле процессов во временной и частотной областях
- [2.3.](#) Семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса
- [2.4.](#) Модели семивариограмм
- [2.5.](#) Поведение семивариограммы на бесконечности
- [2.6.](#) Поведение семивариограммы в окрестности нуля
- [2.7.](#) Классическая оценка вариограммы (оценка Матерона)
- [2.8.](#) Интервальные оценки семивариограммы
- [2.9.](#) Робастные оценки вариограммы
- [2.10.](#) Семивариограмма и стохастический анализ случайных процессов
- [2.11.](#) Спектральное представление внутренне стационарных случайных процессов и их семивариограмм

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВЫ ГЕОСТАТИСТИКИ

Тема 3. Основные этапы геостатистики

- [3.1.](#) Анизотропия вариограмм
- [3.2.](#) Методы подбора моделей семивариограммы
- [3.3.](#) Кригинг
- 3.4. Детерминированные и вероятностные методы интерполяции

РАЗДЕЛ 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов

1.1. Определение случайного процесса

Опр.1.1. Случайным процессом $Y(t) = Y(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, называется семейство случайных величин $\{Y(t, \omega), t \in T\}$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , T – некоторое параметрическое множество.

Случайный процесс (СП) называется *действительным*, если он принимает значения из $R = (-\infty, +\infty)$.

Комплексным случайным процессом $Y(t)$ называется функция, которую можно представить в виде: $Y(t) = Y_1(t) + iY_2(t)$, где $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ – действительные случайные процессы.

Если $T = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ или T – некоторое подмножество из Z , то в этом случае говорят, что $Y(t)$ – *случайный процесс с дискретным временем* (случайная последовательность, временной ряд).

Если $T = R$ или T – некоторый интервал из R , то говорят, что $Y(t)$ – *случайный процесс с непрерывным временем*.

Примеры процессов с дискретным и непрерывным временем

Зафиксируем $\omega = \omega_0$. Тогда функция $Y(t, \omega_0)$, зависящая от t , называется *выборочной функцией, реализацией* или *траекторией* случайного процесса $Y(t)$.

Пусть t_0 – фиксированный момент времени. Случайная величина $Y(t_0, \omega)$ называется *сечением* процесса $Y(t)$ в точке t_0 .

Опр.1.2. $Y^r(t) = \{Y_a(t), a = 1, \dots, r\}, t \in T$, будем называть r -мерным случайным процессом, $r \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Опр.1.3. Если в определении случайного процесса параметр $t = (t_1, \dots, t_d), t_i \in T_i, T_i$ – некоторое параметрическое множество, $i = 1, \dots, d, T = T_1 \times \dots \times T_d, d \in N$, то $Y(t), t \in T$, называется случайным полем размерности d .

Опр.1.4. Для любого $n \in N$, произвольных $t_i \in T, i = \overline{1, n}$, функцию

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{Y(t_1) < x_1, \dots, Y(t_n) < x_n\}, \quad (1.1)$$

$x_i \in R, i = \overline{1, n}$, называют n -мерной функцией распределения случайного процесса $Y(t)$.

Совокупность функций (1.1) для любого $n \in N$ и всех возможных моментов времени $t_i \in T, i = \overline{1, n}$, называется *семейством конечномерных распределений* процесса $Y(t)$.

Пусть существует неотрицательная функция

$$p_n(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n), u_i \in R, t_i \in T, i = \overline{1, n}, n \in N,$$

такая, что справедливо интегральное представление:

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_n(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) du_1 \dots du_n,$$

тогда $p_n(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n)$ называют n -мерной плотностью распределения процесса $Y(t)$.

1.2. Основные характеристики случайного процесса

Пусть $Y(t)$ – действительный случайный процесс.

Опр.1.5. Математическим ожиданием СП $Y(t)$ называется функция вида

$$m(t) = E\{Y(t)\} = \int_{\mathbb{R}} x dF_1(x; t).$$

Если $m(t) = 0$ для всех $t \in T$, то СП $Y(t)$ называется *центрированным*.

Опр.1.6. Неслучайная функция $D(t)$, определяемая соотношением

$$D(t) = D\{Y(t)\} = E\{(Y(t) - m(t))^2\} = \int_{\mathbb{R}} (x - m(t))^2 dF_1(x; t),$$

называется *дисперсией* СП $Y(t)$.

Опр.1.7. Среднеквадратическим отклонением (стандартным отклонением) СП $Y(t)$ называется функция

$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)}.$$

Опр.1.8. Корреляционной функцией СП $Y(t)$ называется функция вида

$$R^0(t, s) = E\{Y(t)Y(s)\} = \iint_{\mathbb{R}^2} xy dF_2(x, y; t, s).$$

Опр.1.9. Ковариационной функцией СП $Y(t)$ называется функция вида

$$R(t, s) = \text{cov}\{Y(t), Y(s)\} = E\{(Y(t) - m(t))(Y(s) - m(s))\} = \int \int_{\mathbb{R}^2} (x - m(t))(y - m(s)) dF_2(x, y; t, s).$$

Теорема 1.1. Ковариационная функция $R(t, s)$ СП $Y(t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $R(t, s) = R(s, t)$;
- 2) $|R(t, s)| \leq \sigma(t)\sigma(s)$;
- 3) $R(t, s)$ является неотрицательно определенной функцией, т.е. для любого $n \geq 1$, произвольных $t_1, \dots, t_n \in T$ и любого ненулевого действительного вектора (z_1, \dots, z_n) имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n z_i z_j R(t_i, t_j) \geq 0.$$

Опр.1.10. Нормированной ковариационной функцией СП $Y(t)$ называется функция

$$\rho(t, s) = \text{corr}\{Y(t), Y(s)\} = \frac{R(t, s)}{\sigma(t)\sigma(s)}.$$

Опр.1.11. Вариограммой СП $Y(t)$ называется функция вида

$$2\gamma(t, s) = D\{Y(t) - Y(s)\} = \iint_{\mathbb{R}^2} \{x - y - (m(t) - m(s))\}^2 dF_2(x, y; t, s),$$

а функция $\gamma(t, s)$ – семивариограммой.

Ж. Матерон функцию $\gamma(t, s)$ называет *собственной функцией*.

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \gamma(t, s) &\geq 0, \quad \gamma(t, t) = 0, \\ 2\gamma(t, s) &= D(t) - 2R(t, s) + D(s). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Теорема 1.2. Семивариограмма $\gamma(t, s)$ СП $Y(t)$ обладает свойствами:

- 1) $\gamma(t, s) = \gamma(s, t)$;
- 2) $\gamma(t, s)$ является *условно* отрицательно определенной функцией, т.е. для любого $n \geq 1$, произвольных моментов времени $t_1, \dots, t_n \in T$ и любого ненулевого действительного векто-

ра (z_1, \dots, z_n) , такого, что $\sum_{i=1}^n z_i = 0$, справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n z_i z_j \gamma(t_i, t_j) \leq 0. \quad (1.3)$$

Упражнение. Найти соотношение, связывающее вариограмму $2\gamma(t, s)$ и нормированную ковариационную функцию $\rho(t, s)$ СП $Y(t)$.

Теорема 1.3. Для того чтобы функция $\gamma(t, s)$ была семивариограммой некоторого СП $Y(t)$ необходимо и достаточно,

чтобы она являлась симметричной и условно отрицательно определенной функцией.

Опр.1.12. Спектральной плотностью СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, называется функция

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{t,s=-\infty}^{+\infty} R(t,s) e^{-i(\lambda_1 t + \lambda_2 s)},$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, $\Pi = [-\pi, \pi]$, при условии, что

$$\sum_{t,s=-\infty}^{+\infty} |R(t,s)| < \infty.$$

Функция $f(\lambda_1, \lambda_2)$ является непрерывной и периодической с периодом 2π по каждому из аргументов.

В силу равенства (1.2) и определения 1.12 нетрудно получить следующее представление спектральной плотности СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, через его дисперсию и семивариограмму

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{t,s=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} D(t) - \gamma(t,s) + \frac{1}{2} D(s) \right) e^{-i(\lambda_1 t + \lambda_2 s)},$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$.

Опр.1.13. Спектральной плотностью СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется функция

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} R(t, s) e^{-i(\lambda_1 t + \lambda_2 s)} dt ds,$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, при условии, что $\iint_{\mathbb{R}^2} |R(t, s)| dt ds < \infty$.

Учитывая соотношение (1.2) и определение 1.13 запишем следующее представление спектральной плотности процесса $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, через его дисперсию и семивариограмму

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} D(t) - \gamma(t, s) + \frac{1}{2} D(s) \right) e^{-i(\lambda_1 t + \lambda_2 s)} dt ds.$$

Опр.1.14. Спектральной функцией СП $Y(t)$, $t \in Z(\mathbb{R})$, называется функция

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\pi(-\infty)}^{\lambda_1} \int_{-\pi(-\infty)}^{\lambda_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Pi(\mathbb{R}).$$

Опр.1.15. Бивариограммой СП $Y(t)$ называется функция вида

$$\begin{aligned} \beta_4(t, h_1, h_2, h_3) &= \\ &= \frac{1}{4} E\{ (Y(t + h_1) - Y(t))^2 (Y(t + h_3) - Y(t + h_2))^2 \}, \end{aligned}$$

$t, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{T}$.

Опр.1.16. Смешанной семивариограммой n -го порядка СП $Y(t)$ называется функция

$$\begin{aligned} \beta_{2n}(t, h_1, \dots, h_{2n-1}) = \\ = \frac{1}{2^n} E\{(Y(t + h_1) - Y(t))^2 (Y(t + h_3) - Y(t + h_2))^2 \times \dots \\ \times (Y(t + h_{2n-1}) - Y(t + h_{2n-2}))^2\}, \end{aligned}$$

$t, h_j \in T, j = \overline{1, 2n-1}$.

Заметим, что смешанная семивариограмма второго порядка есть бивариограмма $\beta_4(t, h_1, h_2, h_3)$ СП процесса $Y(t)$, а если $m(t) = 0$, то $\beta_2(t, h) = \gamma(t, h)$.

1.3. Некоторые примеры случайных процессов

Рассмотрим комплексный случайный процесс $Y(t)$.

Опр.1.17. СП $Y(t)$ называется процессом с некоррелированными приращениями, если

$$E\{|Y(t) - Y(s)|^2\} < \infty, \quad (1.4)$$

и каковы бы ни были значения $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T, t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, справедливо равенство

$$\text{cov}\{Y(t_2) - Y(t_1), \overline{Y(t_4) - Y(t_3)}\} = 0.$$

Опр.1.18. СП $Y(t)$ называется процессом с ортогональными приращениями, если справедливо (1.4) и каковы бы ни были значения $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T, t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, имеет место равенство

$$E\{(Y(t_2) - Y(t_1))(Y(t_4) - Y(t_3))\} = 0.$$

Опр.1.19. СП $Y(t)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для $\forall n \in \mathbb{N}$ и произвольных $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ случайные величины

$$Y(t_1) - Y(t_0), \quad Y(t_2) - Y(t_1), \quad \dots, \quad Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

Справедливо представление:

$$Y(t_n) - Y(t_0) = \sum_{i=1}^n (Y(t_i) - Y(t_{i-1})).$$

Опр.1.20. СП $Y(t)$ называют гауссовским (нормально распределенным), если его любые конечномерные законы распределения являются нормальными.

Теорема 1.4. Для произвольной действительной функции $m(t)$ и любой действительной симметричной неотрицательно определенной функции $R(t, s)$ существует действительный гауссовский СП с математическим ожиданием $m(t)$ и ковариационной функцией $R(t, s)$.

Теорема 1.5. Пусть имеются произвольная действительная функция $m(t) = m$ и симметричная условно отрицательно определенная действительная функция $\gamma(t, s)$. Тогда найдется действительный гауссовский СП $Y(t)$ такой, что $E\{Y(t)\} = m$ и $D\{Y(t) - Y(s)\} = 2\gamma(t, s)$.

Опр. 2.21. Винеровским процессом (процессом броуновского движения) называется СП $w(t)$, $t \in [0, \infty)$, обладающий свойствами:

1) $w(0) = 0$ п.н.;

2) для любых $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины

$$w(t_1) - w(t_0), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$$

независимы в совокупности;

3) случайная величина $w(t) - w(s)$, $0 \leq s \leq t$, имеет распределение $N(0, \sigma^2(t - s))$.

Постоянную σ^2 интерпретируют как коэффициент диффузии.

Опр.1.21'. Гауссовский СП $w(t)$, $t \in [0, \infty)$, $w(0) = 0$, с моментными характеристиками

$$E\{w(t)\} = 0, R_w(t, s) = \sigma^2 \min\{t, s\}, t, s \geq 0,$$

называется процессом броуновского движения.

Опр.1.22. СП $\xi(t)$, $t \in T = [0, \infty)$, называется пуассоновским процессом с параметром λ ($\lambda > 0$), если он обладает следующими свойствами:

1) $\xi(0) = 0$ п.н.;

2) для любых $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины

$$\xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

независимы в совокупности;

3) случайная величина $\xi(t) - \xi(s)$, $0 \leq s \leq t$, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda(t-s)$, т.е.

$$P\{\xi(t) - \xi(s) = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)},$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, λ – интенсивность.

Нетрудно получить, что $E\{\xi(t)\} = \lambda t$, $D\{\xi(t)\} = \lambda t$.

Упражнение. Вычислить вариограмму для:

- процесса броуновского движения;
 - процесса Пуассона.
-

Глава 2. Стационарные случайные процессы

2.1. Виды стационарности

Опр.2.1. Действительный СП $Y(t)$, $t \in T$, называется стационарным в узком смысле, если для любого n , $n \in \mathbb{N}$, произвольных точек $t_j \in T$, $j = \overline{1, n}$, и любого $t \in T$, такого, что $t + t_j \in T$,

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + t, \dots, t_n + t) = F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n),$$

где $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ – n -мерная функция распределения СП $Y(t)$, определенная равенством (1.1).

Стационарные в узком смысле СП часто называют *стационарными первого порядка* или *строго стационарными*.

Используя определение стационарного в узком смысле СП заключаем, что смешанные моменты и смешанные семиинварианты n -ых порядков будут функциями $n - 1$ аргументов.

Опр.2.2. Действительный СП $Y(t)$ называется стационарным в широком смысле, если $E\{Y^2(t)\} < \infty$ и выполняются следующие условия:

$$m(t) = m = \text{const},$$

$$R(t, s) = R(t - s),$$

где $m(t)$ – математическое ожидание, а $R(t, s)$ – ковариационная функция СП $Y(t)$.

Процессы стационарные в широком смысле называют также стационарными второго порядка или слабо стационарными.

Дисперсия стационарного в широком смысле СП

$$D(t) = R(t, t) = R(t - t) = R(0) = D.$$

Далее будем предполагать, что $D > 0$.

Опр.2.3. Действительный СП $Y(t)$ называется внутренне стационарным, если

$$E\{Y(t) - Y(s)\} = 0, \quad (2.1)$$

$$D\{Y(t) - Y(s)\} = 2\gamma(t - s), \quad (2.2)$$

функция $2\gamma(t)$ – вариограмма процесса $Y(t)$.

Из (2.2) следует, что $\gamma(t) \geq 0$, $\gamma(-t) = \gamma(t)$ и $\gamma(0) = 0$.

Из определения 2.3 вытекает, что

$$2\gamma(t - s) = E\{(Y(t) - Y(s))^2\}.$$

Пример. Случайный процесс $Y(t) = X(t) + X$, где $X(t)$, $t \in T$, – стационарный в широком смысле СП, $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, – устойчивая случайная величина с показателем α , $0 < \alpha < 2$, не зависящая от $X(t)$.

Упражнение. Является ли внутренне стационарным случайным процессом:

- процесс броуновского движения;
 - процесс Пуассона.
-

Если СП является стационарным в широком смысле, то он будет и внутренне стационарным.

Из (2.2) легко получить, что

$$\gamma(t) = R(0) - R(t). \quad (2.3)$$

(см. рис. 2.1).

Если СП является стационарным в широком смысле, то семивариограмма будет зеркальным отражением ковариационной функции (рис. 2.2).

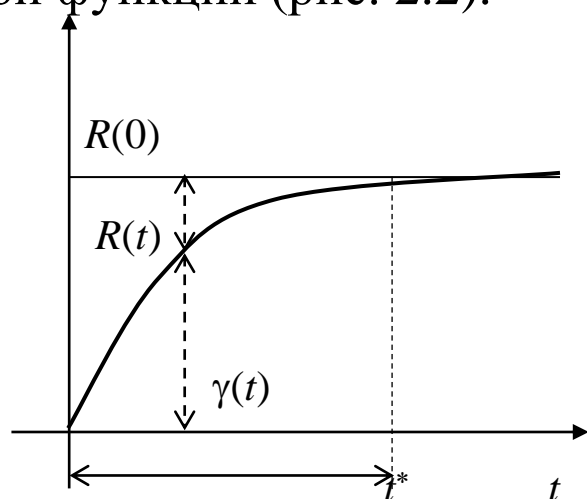


Рис. 2.1 – Соотношение между семивариограммой $\gamma(t)$ и ковариационной функцией $R(t)$.

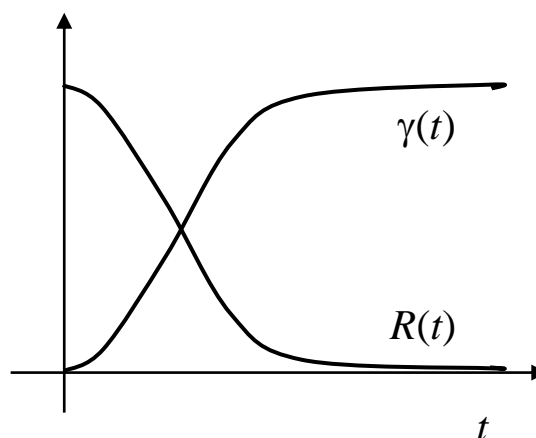


Рис. 2.2 – Соотношение между семивариограммой $\gamma(t)$ и ковариационной функцией $R(t)$ стационарного в широком смысле процесса.

Внутренне стационарный СП не является стационарным в широком смысле, поскольку для него могут не существовать моменты второго порядка.

Для действительного гауссовского СП стационарность в узком смысле, стационарность в широком смысле и внутренняя стационарность эквивалентны.

Упражнение. Указать, при каком условии внутренне стационарный СП является стационарным в широком смысле.

Знание семивариограммы внутренне стационарного СП достаточно для того, чтобы определить все моменты второго порядка приращений этого процесса.

Теорема 2.1. Ковариация приращений $Y(t_2) - Y(t_1)$ и $Y(t_3) - Y(t_2)$, $t_1 < t_2 < t_3$, внутренне стационарного СП $Y(t)$ имеет вид:

$$\text{cov}\{Y(t_2) - Y(t_1), Y(t_3) - Y(t_2)\} = \gamma(t_3 - t_1) - \gamma(t_2 - t_1) - \gamma(t_3 - t_2),$$

где $\gamma(t)$ – семивариограмма процесса $Y(t)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$(Y(t_3) - Y(t_2)) + (Y(t_2) - Y(t_1)) = Y(t_3) - Y(t_1).$$

Найдем дисперсию обеих частей последнего соотношения. Из свойств дисперсии и определения вариограммы получим требуемый результат.

Теорема 2.2. Ковариация приращений $Y(t_2) - Y(t_1)$ и $Y(t_4) - Y(t_3)$, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, внутренне стационарного СП $Y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \text{cov}\{Y(t_2) - Y(t_1), Y(t_4) - Y(t_3)\} = \\ = \gamma(t_4 - t_1) + \gamma(t_3 - t_2) - \gamma(t_3 - t_1) - \gamma(t_4 - t_2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\gamma(t)$ – семивариограмма процесса $Y(t)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

Упражнение. Пусть $Y(t)$, $t \in T$, – внутренне стационарный СП с семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in T$. При фиксированном $s \in T$ рассмотрим процесс $X_s(t) = Y(t + s) - Y(t)$, $t \in T$. Является ли многомерный СП $X_s(t)$ стационарным в широком смысле?

Ответ: Да, т.к. $E\{X_s(t)\} = 0$, $D\{X_s(t)\} = 2\gamma(s) < \infty$,

$$\begin{aligned} \text{cov}\{X_s(t_1), X_\tau(t_2)\} = \\ = \gamma(t_2 + \tau - t_1) + \gamma(t_2 - s - t_1) - \gamma(t_2 - t_1) - \gamma(t_2 + \tau - t_1 - s). \end{aligned}$$

Опр.2.4. Непрерывный в среднем квадратическом СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется процессом со стационарными в широком смысле приращениями, если функции

$$E\{Y(t + h) - Y(t)\} = ch, \quad (2.5)$$

$$\text{cov}\{Y(t + h_1) - Y(t), Y(t + s + h_2) - Y(t + s)\} = K(s, h_1, h_2), \quad (2.6)$$

где $c = \text{const}$, существуют при любых $t, h, s, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ и не зависят от t .

Теорема 2.3. Непрерывный в среднем квадратическом внутренне стационарный СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является процессом со стационарными в широком смысле приращениями.

Доказательство. Равенство (2.5) получается из (2.1) при $c=0$.

В силу равенства (2.4) теоремы 2.2 запишем

$$\begin{aligned} \text{cov}\{Y(t+h_1)-Y(t), Y(t+s+h_2)-Y(t+s)\} = \\ = \gamma(s+h_2) + \gamma(s-h_1) - \gamma(s) - \gamma(s+h_2-h_1). \end{aligned}$$

Очевидно, что правая часть последнего равенства существует и не зависит от t . Теорема доказана.

Теорема 2.4. Непрерывный в среднем квадратическом СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с постоянным математическим ожиданием и стационарными в широком смысле приращениями является внутренне стационарным.

Доказательство. Учитывая тот факт, что $Y(t)$ — СП с постоянным математическим ожиданием, имеем (2.1).

Далее покажем, что дисперсия приращений $Y(t+h)-Y(t)$ является функцией от одной переменной h . Выражение для дисперсии приращений нетрудно получить из (2.6), если положить $s=0$, $h_1=h_2=h$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{cov}\{Y(t+h)-Y(t), Y(t+h)-Y(t)\} = \\ = D\{Y(t+h)-Y(t)\} = K(0, h, h), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Пусть $Y(t)$, $t \in T$, – непрерывный в среднем квадратическом стационарный в широком смысле СП с $E\{Y(t)\} = m$ и семивариограммой $\gamma(t)$. Случайная величина α с моментными характеристиками: $E\{\alpha\} = a \neq 0$, $D\{\alpha\} = D$, не зависит от $Y(t)$. Рассмотрим СП

$$X(t) = \alpha t + Y(t), t \in T.$$

Является ли $X(t)$ процессом со стационарными в широком смысле приращениями, внутренне стационарным процессом?

Ответ: 1) да; 2) нет.

$$E\{X(t+h) - X(t)\} = ah,$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{X(t+h_1) - X(t), X(t+s+h_2) - X(t+s)\} = \\ = h_1 h_2 D + \gamma(s+h_2) + \gamma(s-h_1) - \gamma(s) - \gamma(s+h_2-h_1), \end{aligned}$$

т.е. не зависит от t .

$$D\{X(t+h) - X(t)\} = h^2 D + 2\gamma(h).$$

2.2. Характеристики стационарных в широком смысле процессов во временной и частотной областях

Пусть $Y(t)$ – действительный стационарный в широком смысле СП.

Теорема 2.5. Ковариационная функция $R(t)$ процесса $Y(t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $R(t) = R(-t)$.
- 2) $|R(t)| \leq R(0)$.
- 3) $R(t)$ является неотрицательно определенной функцией, т.е. для любого $n \geq 1$, произвольных t_1, \dots, t_n и любого ненуле-

вого действительного вектора (z_1, \dots, z_n) имеет место неравенство $\sum_{i,j=1}^n z_i z_j R(t_i - t_j) \geq 0$.

Пусть $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, стационарный в широком смысле СП с абсолютно интегрируемой ковариационной функцией, тогда *временем корреляции* СП $Y(t)$ называется величина

$$t_0 = \frac{1}{R(0)} \int_0^{+\infty} |R(t)| dt.$$

Сечения $Y(s + t)$ и $Y(s)$, отстоящие друг от друга на расстоянии $t > t_0$, считают некоррелированными.

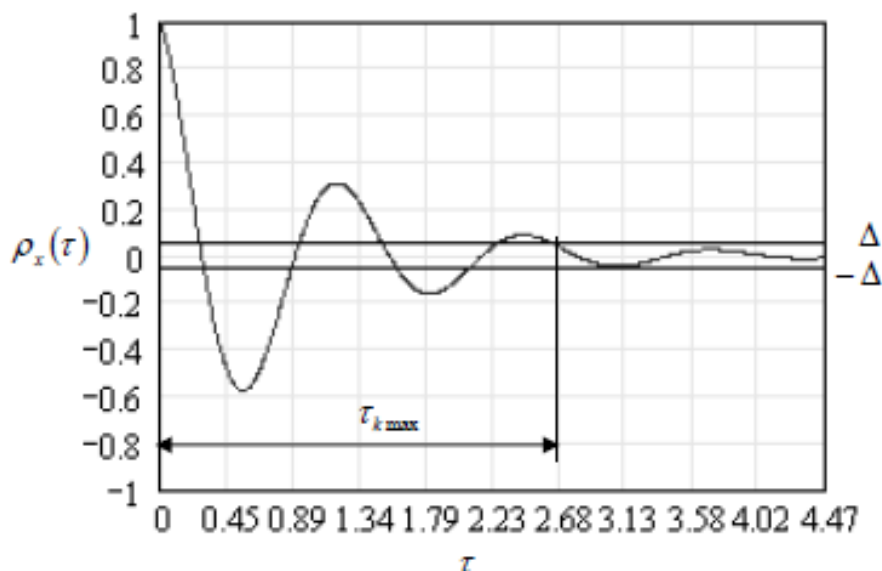


Рис. 2.3 – Максимальный интервал корреляции.

Опр.2.5. *Спектральной плотностью СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, называется функция*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} R(t) e^{-i\lambda t}, \quad (2.7)$$

где $\lambda \in \Pi$, при условии, что $\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |R(t)| < \infty$.

Функция $f(\lambda)$ является периодической с периодом 2π .

В силу равенства (2.3) и определения 2.5 нетрудно получить представление

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} (D - \gamma(t)) e^{-i\lambda t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} (D - \gamma(t)) \cos \lambda t.$$

Опр.2.6. Спектральной плотностью СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется функция

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad (2.8)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, при условии, что $\int_{\mathbb{R}} |R(t)| dt < \infty$.

Учитывая соотношение (2.3) и определение 2.6, запишем

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (D - \gamma(t)) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (D - \gamma(t)) \cos \lambda t dt.$$

Из (2.7) и (2.8) нетрудно видеть, что $f(\lambda) = f(-\lambda)$, $f(\lambda) \geq 0$.

Теорема 2.6. Для ковариационной функции $R(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, и спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, справедливо:

$$R(t) = \int_{\Pi} f(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (2.9)$$

Теорема 2.7. Для ковариационной функции $R(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет место:

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (2.10)$$

Следствие 2.1. Из теорем 2.6 и 2.7 вытекает, что дисперсия СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$, может быть представлена в виде:

$$D = R(0) = \int_{\Pi(\mathbb{R})} f(\lambda) d\lambda.$$

Опр.2.7. Спектральной функцией СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}(\mathbb{R})$, называется функция

$$F(\lambda) = \int_{-\pi(-\infty)}^{\lambda} f(x) dx, \quad \lambda \in \Pi(\mathbb{R}).$$

Замечание. На практике спектральная плотность используется в основном для определения периода:

$$T^* = \frac{2\pi}{\lambda^*}, \quad \lambda^* = \arg \max_{\lambda \in [0, \pi]} f(\lambda).$$

Величина T^* называется **главным периодом** и в некоторых случаях достаточно адекватно характеризует промежуток времени, через который свойства СП «статистически повторяются».

При спектральных преобразованиях СП важное значение имеет *эффективная ширина спектра сигнала* (процесса).

Ширина спектра сигнала – полоса частот, в пределах которой сосредоточена основная энергия сигнала.

Если основная мощность процесса сосредоточена в нуле ($\lambda_0 = 0$), то

$$L = \frac{1}{f(0)} \int_0^{+\infty} f(\lambda) d\lambda = \frac{R(0)}{2f(0)}.$$

Поскольку

$$t_0 = \frac{1}{R(0)} \int_0^{+\infty} |R(t)| dt \geq \frac{\pi f(0)}{R(0)},$$

то справедливо неравенство

$$t_0 L \geq \frac{\pi}{2}.$$

Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты λ_0 , а не в нуле, то выражение для оценки ширины спектра примет вид: $L' = \lambda_0 + L/2$.

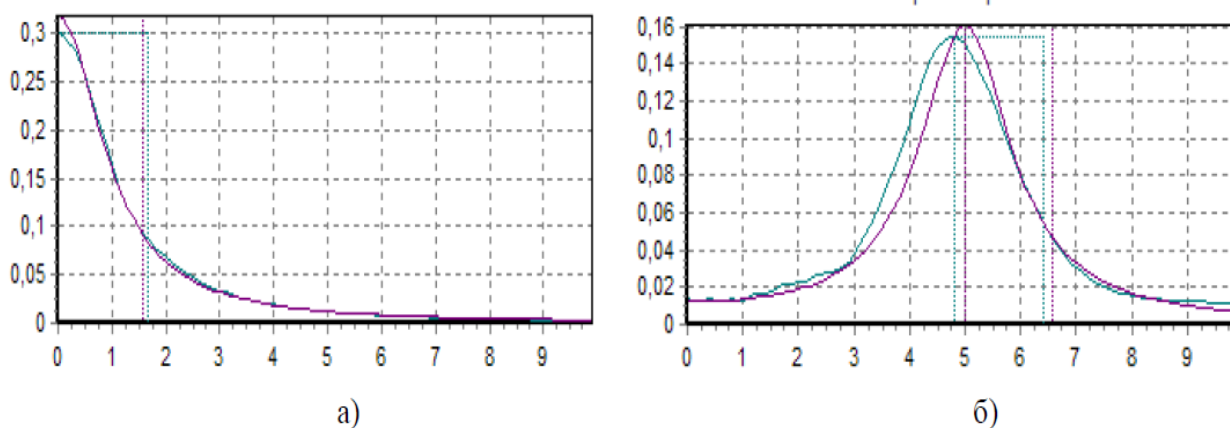


Рис. 2.4 – Эквивалентная ширина спектра: а) $\lambda_0 = 0$; б) $\lambda_0 \neq 0$.

Теорема 2.8. Для семивариограммы $\gamma(t)$ СП $Y(t)$, $t \in Z$, имеют место следующие спектральные представления:

$$\gamma(t) = \int_{\Pi} (1 - e^{i\lambda t}) f(\lambda) d\lambda = \int_{\Pi} (1 - \cos \lambda t) f(\lambda) d\lambda.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из теоремы 2.6 и следствия 2.1.

Теорема 2.9. Для семивариограммы $\gamma(t)$ СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место спектральные представления:

$$\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda t}) f(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos \lambda t) f(\lambda) d\lambda.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из теоремы 2.7 и следствия 2.1.

Следствие 2.2. Для семивариограммы $\gamma(t)$, $t \in Z(\mathbb{R})$, СП $Y(t)$, $t \in Z(\mathbb{R})$, справедливо:

$$\gamma(t) = \int_{\Pi(\mathbb{R})} (1 - e^{i\lambda t}) dF(\lambda) = \int_{\Pi(\mathbb{R})} (1 - \cos \lambda t) dF(\lambda).$$

Опр.2.8. Нормированной семивариограммой стационарного в широком смысле СП $Y(t)$ называется функция

$$\gamma^{nor}(t) = \frac{\gamma(t)}{R(0)}.$$

Справедливы равенства

$$\gamma(t) = R(0)(1 - \rho(t)) = D(1 - \rho(t)),$$

$$\gamma^{nor}(t) = (1 - \rho(t)),$$

где $\rho(t)$ – нормированная ковариационная функция СП $Y(t)$.

Упражнение. Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ – последовательность некоррелированных случайных величин с $E\varepsilon_n = 0$ и дисперсией $D\varepsilon_n = D > 0$. Доказать, что последовательность стационарна в широком смысле, найти ее моментные и спектральные характеристики.

2.3. Семивариограмма внутренне стационарного СП

Рассмотрим действительный внутренне стационарный СП $Y(t)$.

Теорема 2.10. Семивариограмма $\gamma(t)$ СП $Y(t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\gamma(t) = \gamma(-t)$.
- 2) $\gamma(t)$ является условно отрицательно определенной функцией, т.е. для $\forall n \geq 1$, произвольных моментов времени t_1, \dots, t_n и любого ненулевого действительного вектора (z_1, \dots, z_n) ,

такого, что $\sum_{i=1}^n z_i = 0$, справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n z_i z_j \gamma(t_i - t_j) \leq 0. \quad (2.11)$$

Упражнение. Для процесса броуновского движения проверить условие (2.11).

Теорема 2.11. Для того чтобы функция $\gamma(t)$ была семивариограммой некоторого внутренне стационарного СП $Y(t)$ необходимо и достаточно, чтобы она являлась четной и условно отрицательно определенной функцией.

Теорема 2.12. Пусть $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ – семивариограммы некоторых внутренне стационарных СП $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ соответственно. Тогда функция $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ также является семивариограммой некоторого внутренне стационарного СП.

Доказательство. Очевидно, что $\gamma(t) = \gamma(-t)$. Проверим (2.11).

$$\sum_{i,j=1}^n z_i z_j \gamma(t_i - t_j) = -D \left\{ \sum_{i=1}^n z_i Y_1(t_i) \right\} - D \left\{ \sum_{i=1}^n z_i Y_2(t_i) \right\} \leq 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.13. Пусть $\gamma(t)$ – семивариограмма внутренне стационарного СП $Y(t)$. Тогда для любого $b > 0$ функция $b\gamma(t)$ является семивариограммой внутренне стационарного процесса $\sqrt{b} Y(t)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $b\gamma(t) = b\gamma(-t)$ и

$$b \sum_{i,j=1}^n z_i z_j \gamma(t_i - t_j) \leq 0.$$

Упражнение. Пусть $Y(t)$ – внутренне стационарный СП с семивариограммой $\gamma(t)$. Найти выражения для семивариограмм следующих процессов:

1) $X(t) = c \cdot Y(t)$, где $c = const$.

2) $X(t) = Y(t) + f(t)$, где $f(t)$ – неслучайная функция.

2.4. Модели семивариограмм

Иногда на практике семивариограмма может иметь скачок в нуле. Другими словами, предельное соотношение $\lim_{|t| \rightarrow 0} \gamma(t) = C_0 > 0$ указывает на наличие "эффекта самородков" в нуле (C_0 называют константой "эффекта самородков").

Этот эффект можно объяснить, например, присутствием ошибок измерений при получении наблюдений или резким изменением значений рассматриваемого процесса на расстояниях, меньших, чем расстояние между наблюдениями.

Гораздо чаще эффект самородков проявляется не разрывом семивариограммы в нуле, а наличием вблизи $t = 0$ узкой зоны перехода, в пределах которой семивариограмма возрастает очень быстро. Однако при экспериментальных исследованиях и для практических приложений проявление эффекта самородков можно рассматривать как наличие действительного разрыва семивариограммы в нуле.

Главные свойства модели:

- эффект самородка;
- наклон;
- зона влияния (интервал корреляции), ранг (время корреляции);
- порог;
- анизотропия.

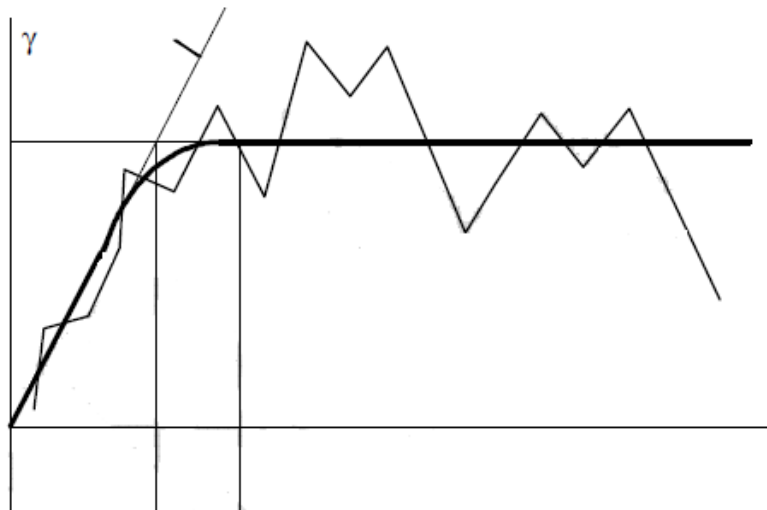


Рис. 2.5 – Визуальный подбор модели семивариограммы

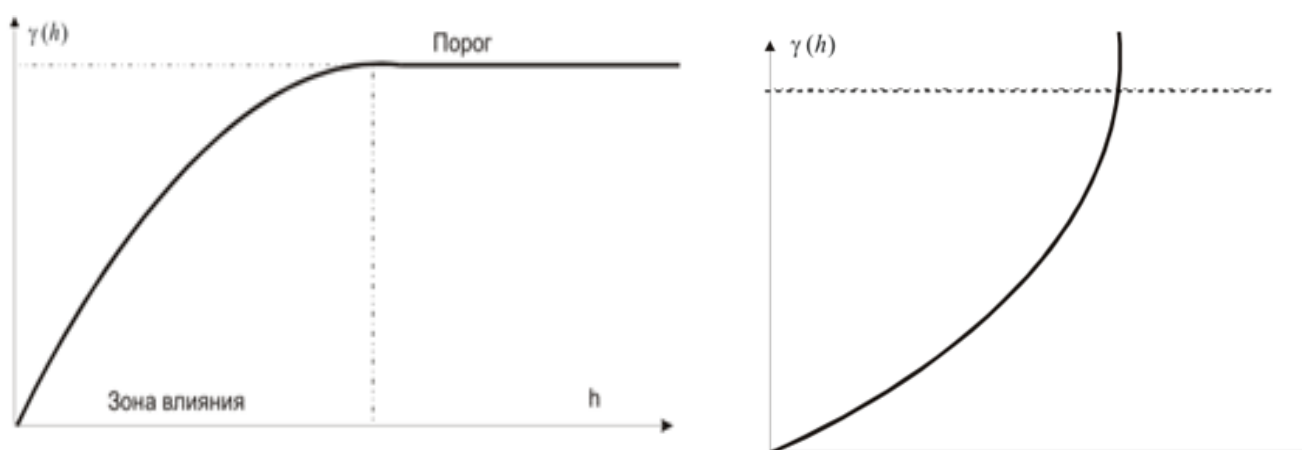


Рис. 2.6 – Пороговая и беспороговая семивариограммы

Приведем наиболее известные типы моделей семивариограмм [12, 17].

1. Модель с эффектом самородков (модель *наггет*):

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0, \\ c, & h \neq 0. \end{cases}$$

Постоянная $c = R(0)$ носит название *наггет* (nugget), что означает самородок.

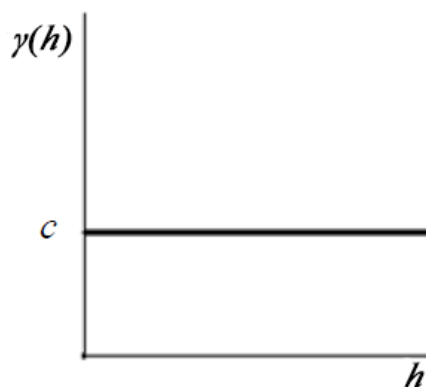


Рис. 2.7 – Модель наггет

2. Сферическая модель:

$$\gamma(h) = \begin{cases} c \left(\frac{3h}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right), & h \leq a, \\ c, & h > a, \end{cases}$$

где a – ранг (время корреляции или радиус);

$\gamma(a) = R(0) = c$ – порог (плато).

Модель ведет себя линейно вблизи нуля.

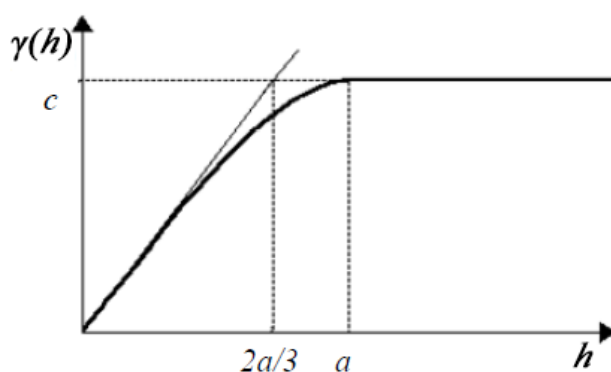


Рис.2.8 – Сферическая модель

3. Экспоненциальная модель:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0, \\ c \left(1 - \exp\left(\frac{-3h}{a}\right) \right), & h \neq 0, \end{cases}$$

где $c = R(0)$ – порог, a – ранг (эффективный радиус корреляции), т.е. расстояние, на котором значение семивариограммы есть 95% от порога. Модель достигает своего порога *асимптотически* и имеет линейное поведение в начале координат.

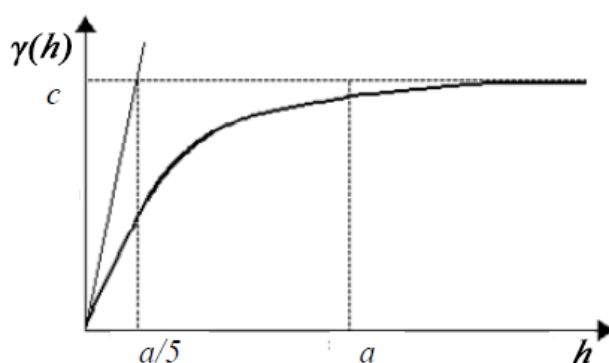


Рис.2.9 – Экспоненциальная модель

4. Гауссова модель:

$$\gamma(h) = c \left(1 - \exp\left(\frac{-3h^2}{a^2}\right) \right),$$

где a – эффективный радиус корреляции. Модель достигает своего порога *асимптотически* и имеет параболическое поведение около начала координат.

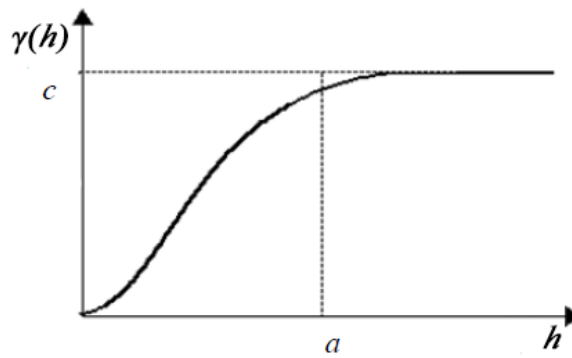


Рис.2.10 – Гауссова модель

5. Модель «эффекта включений» (квазипериодическая) или с эффектом дырок (синусоидальная):

$$\gamma(h) = c \left(1 - \frac{\sin(h/a)}{h/a} \right),$$

где h/a измеряется в радианах. Модель имеет порог и характеризуется параболическим поведением в начале координат.

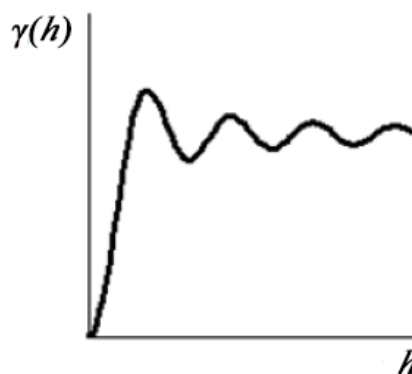


Рис.2.11 – Модель с эффектом дырок

6. Линейная модель с порогом:

$$\gamma(h) = \begin{cases} c \left(\frac{h}{a} \right), & 0 < h \leq a, \\ c, & h > a. \end{cases}$$

Модель имеет линейное поведение около начала координат и достигает порога на расстоянии a .

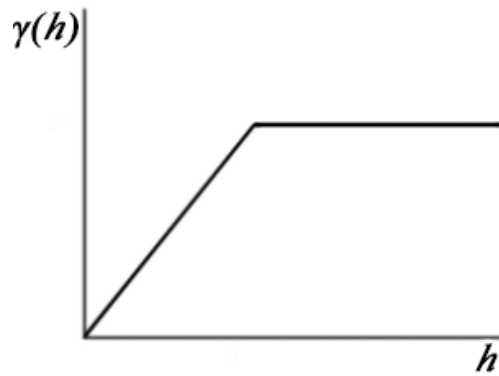


Рис.2.12 – Линейная модель с порогом

7. Степенная модель:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0, \\ ch^\alpha, & h \neq 0, \end{cases}$$

α – степень. Модель при $\alpha = 1$ выделяется в отдельный тип и называется *линейной*.

8. Периодическая модель (hole effect):

$$\gamma(h) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi h}{a}\right),$$

a – период периодической структуры, эквивалентный радиусу корреляции.

9. Затухающая периодическая модель (dampened hole effect model):

$$\gamma(h) = 1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi h}{a}\right).$$

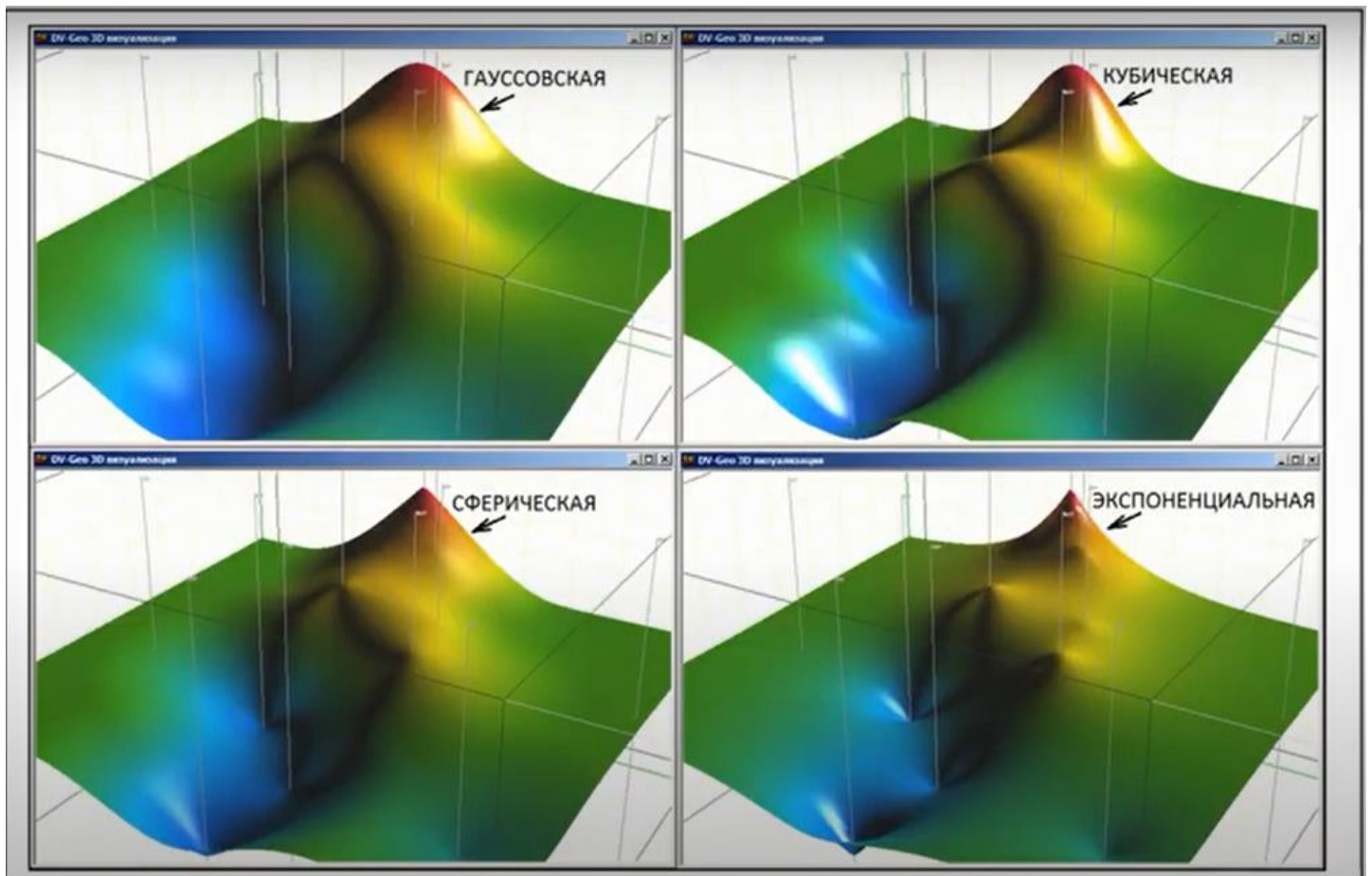


Рис.2.13 – Особенности кригинга, обусловленные моделью вариограмм

2.5. Поведение семивариограммы на бесконечности

Для стационарных в широком смысле СП ковариационная функция $R(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Поэтому семивариограмма $\gamma(t) \rightarrow R(0)$, $|t| \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\gamma(\infty) = R(0).$$

$$R(t) = \gamma(\infty) - \gamma(t).$$

Величина $R(0)$ называется *порогом*. Значение $t = t^*$, при котором $\gamma(t)$ совпадает с $R(0)$, называется *рангом*. В этом случае составляющие процесса, находящиеся на расстоянии $|t| \geq t^*$, становятся некоррелированными.

Для стационарных СП, не обладающих конечным вторым моментом, семивариограмма $\gamma(t) \rightarrow \infty$ при $|t| \rightarrow \infty$, а ковариационная функция не существует.

Исследуем поведение семивариограммы $\gamma(t)$ внутренне стационарного СП $Y(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 2.14. Семивариограмма $\gamma(t)$ внутренне стационарного СП $Y(t)$, не может возрастать на бесконечности быстрее, чем функция At^2 , где A – некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ запишем

$$\begin{aligned} 2\gamma(t) &= E\{(Y(t) - Y(0))^2\} = E\left\{\left(\sum_{i=1}^n \left[Y\left(\frac{it}{n}\right) - Y\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right]\right)^2\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E\left\{\left[Y\left(\frac{it}{n}\right) - Y\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right] \left[Y\left(\frac{jt}{n}\right) - Y\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)\right]\right\} \leq \\ &\leq n^2 \cdot 2\gamma\left(\frac{t}{n}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\gamma(t)}{t^2} \leq \frac{\gamma(t/n)}{(t/n)^2}. \quad (2.12)$$

Обозначим через A максимум функции $\gamma(t)/t^2$ при $t \geq 1$, тогда $\gamma(t) \leq At^2$, $t \geq 1$.

Теорема 2.15. Пусть семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, внутренне стационарного СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является дважды диффе-

ренцируемой функцией в точке $t = 0$. Тогда $\gamma(t)$ не может возрастать на бесконечности быстрее, чем функция $\frac{\gamma''(0)}{2}t^2$, где $\gamma''(0)$ – вторая производная семивариограммы в точке $t = 0$.

Доказательство. Запишем

$$\gamma''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(h) - 2\gamma(0) + \gamma(-h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\gamma(h)}{h^2}.$$

Далее, полагая в (2.12) $n \rightarrow \infty$, имеем

$$2\gamma(t) \leq \gamma''(0)t^2.$$

Теорема 2.16. Для того чтобы непрерывная функция $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, была семивариограммой некоторого внутренне стационарного СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с конечным моментом второго порядка необходимо и достаточно, чтобы для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, являлась неотрицательно определенной.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\gamma(t)$ – семивариограмма внутренне стационарного СП $Y(t)$. Покажем, что для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$ неотрицательно определена.

По теореме 1.5 найдутся вероятностное пространство и заданный на нем действительный гауссовский СП $X(t)$ имеющий $E\{X(t)\} = 0$, $D\{X(t) - X(s)\} = 2\gamma(t - s)$. Заметим, что процесс $X(t)$ внутренне стационарен.

Положим $Z(s) = e^{-i\sqrt{a} X(s)}$ и вычислим корреляционную функцию этого процесса. По определению корреляционной функции комплексного СП имеем

$$R_Z^0(s, s+t) = E\{Z(s)\overline{Z(s+t)}\} = E\{e^{i\sqrt{a}(X(s+t)-X(s))}\}.$$

Принимая во внимание определение характеристической функции СП и свойства процесса $X(t)$, получим

$$\begin{aligned} R_Z^0(s, s+t) &= \Psi_{X(s+t)-X(s)}(\sqrt{a}) = \\ &= e^{-\frac{a}{2}D\{X(s+t)-X(s)\}} = e^{-a\gamma(t)}. \end{aligned}$$

Таким образом, для $\forall a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$ является характеристической. Следовательно, согласно *теор. Бохнера – Хинчина* [16], $e^{-a\gamma(t)}$ – неотрицательно определенная функция.

Достаточность. Пусть $e^{-a\gamma(t)}$, $a > 0$, – неотрицательно определенная функция. Тогда по теореме Бохнера – Хинчина эта функция – характеристическая. Дальнейшее доказательство данной теоремы повторяет доказательство достаточности теоремы 2.11.

Следствие 2.3. Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – семивариограмма внутренне стационарного СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего усло-

вию $E\{Y^2(t)\} < \infty$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Тогда для $\forall a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, есть корреляционная функция некоторого СП.

Теорема 2.17. В случае непрерывности семивариограммы $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, внутренне стационарного СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с конечным моментом второго порядка следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\gamma(t)$ – условно отрицательно определенная функция;
- 2) для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$ неотрицательно определенная.

Лемма. Дважды дифференцируемая функция $f(x)$ одной переменной *выпукла вверх* на интервале тогда и только тогда, когда её вторая производная $f''(x) \leq 0$ на этом интервале.

Упражнение. Проверить, являются ли функции $\gamma(t) = t^\lambda$, где $\lambda \in [0, 2]$, выпуклыми кверху.

2.6. Поведение семивариограммы в окрестности нуля

Рассмотрим некоторые примеры вариограмм $2\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, и исследуем их поведение при $t \rightarrow 0$ для процессов $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Степенная функция $2\gamma(t) = \omega^2 t^\lambda$, $0 \leq \lambda \leq 2$, определяет важный класс вариограмм случайных процессов, для которых $\omega^2 = E\{(Y(t+1) - Y(t))^2\}$ не зависит от t .

Значению $\lambda = 0$ соответствует нормированный процесс "белый шум", значению $\lambda = 1$ – винеровский процесс. Случайному процессу вида $Y(t) = Y_1 t + Y_0$, где Y_1, Y_0 – некоторые случайные величины, отвечает значение $\lambda = 2$.

По поведению вариограммы в окрестности нуля можно судить о свойствах рассматриваемого процесса.

Теорема 2.18. Пусть вариограмма $2\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, внутренне стационарного СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, убывает при $t \rightarrow 0$, как t^λ , $\lambda \geq 0$. Тогда параметр λ определяет характер траекторий процесса:

- 1) при $\lambda = 0$ процесс не является непрерывным в СК-смысле;
- 2) при $0 < \lambda < 2$ процесс непрерывный недифференцируемый в СК-смысле;
- 3) при $\lambda = 2$ процесс непрерывный дифференцируемый в СК-смысле;
- 4) при $\lambda > 2$ процесс не существует.

Доказательство. Рассмотрим приращения $Y(t_2) - Y(t_1)$, $Y(t_3) - Y(t_2)$, $t_1 < t_2 < t_3$. Согласно теореме 2.1 запишем

$$\text{cov}\{Y(t_2) - Y(t_1), Y(t_3) - Y(t_2)\} = \gamma(t_3 - t_1) - \gamma(t_2 - t_1) - \gamma(t_3 - t_2).$$

Найдем нормированную ковариационную функцию приращений процесса:

$$\rho(t_1, t_2, t_3) = \text{corr}\{Y(t_2) - Y(t_1), Y(t_3) - Y(t_2)\} =$$

$$= \frac{\gamma(t_3 - t_1) - \gamma(t_2 - t_1) - \gamma(t_3 - t_2)}{2\sqrt{\gamma(t_2 - t_1)\gamma(t_3 - t_2)}}.$$

Условие $\lim_{t_1, t_3 \rightarrow t_2} \rho(t_1, t_2, t_3) \rightarrow 1$ является необходимым и достаточным для СК-дифференцируемости процесса [11].

Учитывая тот факт, что $2\gamma(t) \sim t^\lambda$ при малых значениях аргумента, т.е. $\lim_{t \rightarrow 0} (2\gamma(t) - t^\lambda) = 0$, необходимое и достаточное условие запишем в виде:

$$\lim_{t_1, t_3 \rightarrow t_2} \frac{(t_3 - t_1)^\lambda - (t_2 - t_1)^\lambda - (t_3 - t_2)^\lambda}{2\sqrt{(t_2 - t_1)^\lambda (t_3 - t_2)^\lambda}} \rightarrow 1.$$

Пусть $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t$, тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2t)^\lambda - t^\lambda - t^\lambda}{2\sqrt{t^{2\lambda}}} = 2^{\lambda-1} - 1.$$

Этот предел будет равен единице при $\lambda = 2$, откуда следует условие дифференцируемости процесса в СК-смысле.

Поскольку модуль нормированной ковариационной функции не превосходит единицы, то $|2^{\lambda-1} - 1| \leq 1$. Оно справедливо при $0 \leq \lambda \leq 2$. Отсюда вытекает невозможность существования СП при $\lambda > 2$.

Далее рассмотрим $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} 2\gamma(t_1 - t_2)$ для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ и параметра λ , $0 \leq \lambda \leq 2$. Этот предел равен нулю при $0 < \lambda \leq 2$, т. е. $Y(t)$ – непрерывный в СК-смысле процесс в силу определения СК-непрерывности (и дальнейшей теоремы 3.1).

Если $\lambda = 0$, то предел больше нуля и процесс $Y(t)$ не является непрерывным в СК-смысле. Теорема доказана.

Следствие 2.4. Невозможность существования СП при $\lambda > 2$ вытекает также из теоремы Марцинкевича.

Теорема Марцинкевича. Если характеристическая функция $\varphi(t)$ имеет вид $\exp(\Re(t))$, где $\Re(t)$ – полином, то степень этого полинома не может быть больше двух.

Упражнение. Проверить, является ли функция $\gamma(t) = t^2$, условно отрицательно определенной.

2.7. Классическая оценка вариограммы (оценка Матерона)

Подходы к построению оценок вариограммы

$$2\gamma(t - s) = D\{Y(t) - Y(s)\} = E\{(Y(t) - Y(s))^2\}$$

основаны на оценивании:

- дисперсии;
- математического ожидания;

- нормированной ковариационной функции стационарного в широком смысле СП, для которой справедливо

$$2\gamma(t) = 2R(0)(1 - \rho(t)) = 2D(1 - \rho(t)).$$

Рассмотрим стационарный в широком смысле СП $Y(t)$ с нулевым математическим ожиданием, неизвестными семивариограммой $\gamma(t)$ и ковариационной функцией $R(t)$.

Пусть $Y(1), \dots, Y(n)$ – n последовательных полученных через равные промежутки времени наблюдений за процессом $Y(t)$.

В качестве оценки вариограммы рассмотрим статистику вида:

$$2\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} (Y(s+h) - Y(s))^2, \quad (2.13)$$

$$h = \overline{0, n-1}.$$

Положим $\tilde{\gamma}(-h) = \tilde{\gamma}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, и $\tilde{\gamma}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Теорема 2.19. Для оценки $2\tilde{\gamma}(h)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} E\{2\tilde{\gamma}(h)\} &= 2\gamma(h), \\ (n-h^-) \text{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} &= \\ &= \sum_{r=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \left(1 + \frac{m(r)}{n-h^+}\right) J_r(h_1, h_2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$(n-h)D2\tilde{\gamma}(h) = \sum_{r=-(n-h-1)}^{n-h-1} \left(1 - \frac{|r|}{n-h}\right) J_r^0(h), \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} J_r(h_1, h_2) = & c_4(r+h_1-h_2, r+h_1-h_2, 0) + \\ & + c_4(r+h_1, r+h_1, 0) - 2c_4(r+h_1, r+h_1, h_2) + \\ & + c_4(r-h_2, r-h_2, 0) + c_4(r, r, 0) - 2c_4(r, r, h_2) - \\ & - 2c_4(r+h_1-h_2, r-h_2, 0) - 2c_4(r+h_1, r, 0) + \\ & + 4c_4(r+h_1, r, h_2) + 2R^2(r+h_1-h_2) + \\ & + 2R^2(r) + 2R^2(r-h_2) + 2R^2(r+h_1) - \\ & - 4R(r+h_1-h_2)R(r+h_1) - \\ & - 4R(r+h_1-h_2)R(r-h_2) - \\ & - 4R(r)R(r-h_2) - 4R(r)R(r+h_1) + \\ & + 4R(r+h_1)R(r-h_2) + 4R(r+h_1-h_2)R(r), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
J_r^0(h) = & 2c_4(r, r, 0) - 2c_4(r + h, r + h, h) + \\
& + c_4(r + h, r + h, 0) - 2c_4(r, r - h, 0) + \\
& + 4c_4(r + h, r, h) - 2c_4(r + h, r, 0) + \\
& + c_4(r - h, r - h, 0) - 2c_4(r, r, h) + \\
& + 8R^2(r) + 2R^2(r + h) + 2R^2(r - h) + \\
& + 4R(r + h)R(r - h) - 8R(r)R(r + h) - \\
& - 8R(r)R(r - h),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$R(t)$ – ковариационная функция, $c_4(t_1, t_2, t_3)$ – смешанный семинвариант четвертого порядка процесса $Y(t)$,

$$m(r) = \begin{cases} m_1(r), & h_2 > h_1, \\ m_2(r), & h_1 > h_2, \end{cases} \tag{2.18}$$

$$m_1(r) = \begin{cases} r, & r = \overline{1-n+h_2, -1}, \\ 0, & r = \overline{0, h_2-h_1}, \\ h_2-h_1-r, & r = \overline{h_2-h_1+1, n-h_1-1}, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$m_2(r) = \begin{cases} r - h_2 + h_1, & r = \overline{1-n+h_2, h_2-h_1-1}, \\ 0, & r = \overline{h_2-h_1, 0}, \\ -r, & r = \overline{1, n-h_1-1}, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$h^+ = \max(h_1, h_2), \quad h^- = \min(h_1, h_2), \quad (2.21)$$

$$h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}.$$

Доказательство. Из определения вариограммы и свойств математического ожидания первое утверждение теоремы вытекает очевидным образом.

Используя определение ковариации, подставляя вместо $2\tilde{\gamma}(h)$ ее выражение в явном виде, запишем

$$\begin{aligned} \text{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} &= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\ &\times \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} [E(Y(s+h_1)-Y(s))^2 (Y(t+h_2)-Y(t))^2 - \\ &- E(Y(s+h_1)-Y(s))^2 E(Y(t+h_2)-Y(t))^2] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} [EY^2(s+h_1)Y^2(t+h_2) - \\
&- 2EY^2(s+h_1)Y(t+h_2)Y(t) + EY^2(s+h_1)Y^2(t) - \\
&- 2EY(s+h_1)Y(s)Y^2(t+h_2) + \\
&+ 4EY(s+h_1)Y(s)Y(t+h_2)Y(t) - \\
&- 2EY(s+h_1)Y(s)Y^2(t) + EY^2(s)Y^2(t+h_2) - \\
&- 2EY^2(s)Y(t+h_2)Y(t) + EY^2(s)Y^2(t) - \\
&- EY^2(s+h_1)EY^2(t+h_2) + \\
&+ 2EY^2(s+h_1)EY(t+h_2)Y(t) - \\
&- EY^2(s+h_1)EY^2(t) + 2EY(s+h_1)Y(s)EY^2(t+h_2) - \\
&- 4EY(s+h_1)Y(s)EY(t+h_2)Y(t) + \\
&+ 2EY(s+h_1)Y(s)EY^2(t) - EY^2(s)EY^2(t+h_2) + \\
&+ 2EY^2(s)EY(t+h_2)Y(t) - EY^2(s)EY^2(t)].
\end{aligned}$$

Из определения смешанных моментов второго и четвертого порядков, учитывая связывающее соотношение смешанных моментов $m_4(r_1, r_2, r_3, r_4)$ со смешанными семиинвариантами $c_4(r_1, r_2, r_3, r_4)$, получим

$$\begin{aligned}
\text{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} &= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\
&\times \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} [c_4(s+h_1, s+h_1, t+h_2, t+h_2) - \\
&- 2c_4(s+h_1, s+h_1, t+h_2, t) + c_4(s+h_1, s+h_1, t, t) - \\
&- 2c_4(s+h_1, s, t+h_2, t+h_2) + 4c_4(s+h_1, s, t+h_2, t) - \\
&- 2c_4(s+h_1, s, t, t) + c_4(s, s, t+h_2, t+h_2) - \\
&- 2c_4(s, s, t+h_2, t) + c_4(s, s, t, t) + 2c_2^2(s+h_1, t+h_2) - \\
&- 4c_2(s+h_1, t+h_2)c_2(s+h_1, t) + 2c_2^2(s+h_1, t) - \\
&- 4c_2(s+h_1, t+h_2)c_2(s, t+h_2) + \\
&+ 4c_2(s+h_1, t+h_2)c_2(s, t) + 4c_2(s+h_1, t)c_2(s, t+h_2) - \\
&- 4c_2(s+h_1, t)c_2(s, t) + 2c_2^2(s, t+h_2) - \\
&- 4c_2(s, t+h_2)c_2(s, t) + 2c_2^2(s, t)].
\end{aligned}$$

Учитывая стационарность рассматриваемого СП, имеем

$$\text{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} = \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} [c_4(s-t+h_1-h_2, s-t+h_1-h_2, 0) - \\ & - 2c_4(s-t+h_1, s-t+h_1, h_2) + \\ & + c_4(s-t+h_1, s-t+h_1, 0) - \\ & - 2c_4(s-t+h_1-h_2, s-t-h_2, 0) + 4c_4(s-t+h_1, s-t, h_2) - \\ & - 2c_4(s-t+h_1, s-t, 0) + c_4(s-t-h_2, s-t-h_2, 0) \\ & - 2c_4(s-t, s-t, h_2) + c_4(s-t, s-t, 0) + \\ & + 2R^2(s-t+h_1-h_2) - 4R(s-t+h_1-h_2)R(s-t+h_1) + \\ & + 2R^2(s-t+h_1) - 4R(s-t+h_1-h_2)R(s-t-h_2) + \\ & + 2R^2(s-t) + 4R(s-t+h_1-h_2)R(s-t) + \\ & + 4R(s-t+h_1)R(s-t-h_2) - 4R(s-t+h_1)R(s-t) + \\ & + 2R^2(s-t-h_2) - 4R(s-t-h_2)R(s-t)]. \end{aligned}$$

Далее сделаем замену переменных суммирования: $s = s$, $s - t = r$. Здесь и в дальнейшем под областью суммирования будем понимать все целочисленные точки рассматриваемой области (см. рисунок 2.14).

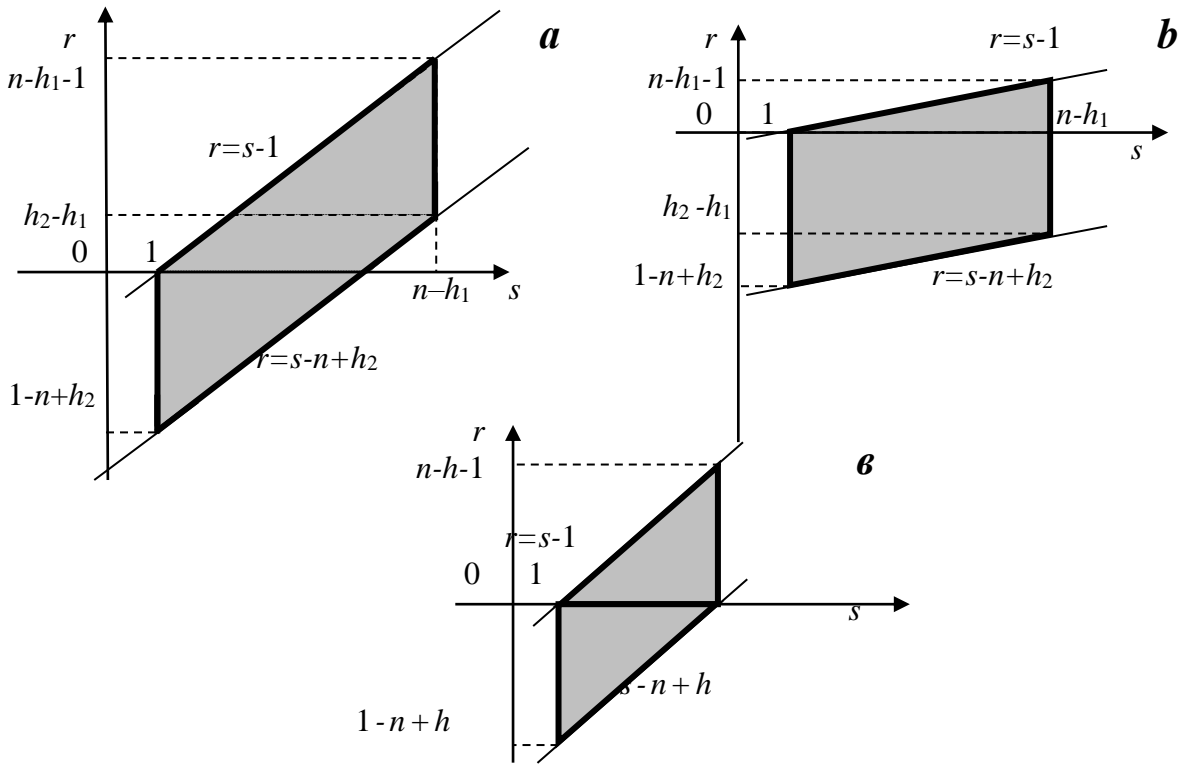


Рис. 2.14 – Область суммирования после замены переменных суммирования:
a – случай $h_1 < h_2$; *б* – случай $h_1 > h_2$; *в* – случай $h_1 = h_2 = h$.

Тогда в случае $h_1 < h_2$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} &= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\ &\times \left[\sum_{r=1-n+h_2}^{-1} \sum_{s=1}^{r+n-h_2} J_r(h_1, h_2) + \right. \\ &\left. + \sum_{r=0}^{h_2-h_1} \sum_{s=r+1}^{r+n-h_2} J_r(h_1, h_2) + \sum_{r=1-h_1+h_2}^{n-h_1-1} \sum_{s=r+1}^{n-h_1} J_r(h_1, h_2) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-h_1)} \left[\sum_{r=1-n+h_2}^{-1} \left(1 + \frac{r}{n-h_2} \right) J_r(h_1, h_2) + \right. \\
&+ \sum_{r=0}^{h_2-h_1} J_r(h_1, h_2) + \sum_{r=1-h_1+h_2}^{n-h_1-1} \left(1 + \frac{h_2-h_1-r}{n-h_2} \right) J_r(h_1, h_2) \left. \right],
\end{aligned}$$

где $J_r(h_1, h_2)$ задается выражением (2.16).

Учитывая соотношения (2.18), (2.19), запишем

$$\begin{aligned}
&\text{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} = \\
&= \frac{1}{(n-h_1)} \sum_{r=1-n+h_2}^{n-h_1-1} \left(1 + \frac{m_1(r)}{n-h_2} \right) J_r(h_1, h_2). \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай $h_1 \geq h_2$.

$$\begin{aligned}
&\text{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} = \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\
&\times \left[\sum_{r=1-n+h_2}^{h_2-h_1-1} \sum_{s=1}^{r+n-h_2} J_r(h_1, h_2) + \right. \\
&+ \sum_{r=h_2-h_1}^0 \sum_{s=1}^{n-h_1} J_r(h_1, h_2) + \sum_{r=1}^{n-h_1-1} \sum_{s=r+1}^{n-h_1} J_r(h_1, h_2) \left. \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-h_2)} \left[\sum_{r=1-n+h_2}^{h_2-h_1-1} \left(1 + \frac{r+h_1-h_2}{n-h_1} \right) J_r(h_1, h_2) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=h_2-h_1}^0 J_r(h_1, h_2) + \sum_{r=1}^{n-h_1-1} \left(1 - \frac{r}{n-h_1} \right) J_r(h_1, h_2) \right].
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения (2.18), (2.20), имеем

$$\begin{aligned}
&\text{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} = \\
&= \frac{1}{(n-h_2)} \sum_{r=1-n+h_2}^{n-h_1-1} \left(1 + \frac{m_2(r)}{n-h_1} \right) J_r(h_1, h_2). \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Объединяя (2.23), (2.24), получим выражение (2.14) для ковариации оценки вариограммы $2\tilde{\gamma}(h)$.

Равенство (2.15) для дисперсии оценки вариограммы (2.13) нетрудно получить из (2.14), если положить $h_1 = h_2 = h$. Теорема доказана.

Теорема 2.20. Если имеют место соотношения

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} |R(r)| < \infty, \quad \sum_{r_1, r_2, r_3=-\infty}^{+\infty} |c_4(r_1, r_2, r_3)| < \infty, \tag{2.25}$$

$R(t)$ — ковариационная функция, $c_4(t_1, t_2, t_3)$ — смешанный семинвариант четвертого порядка процесса $Y(t)$, то

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (n - h^-) \operatorname{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} = \\
= \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(h_1, h_2),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - h) D 2\tilde{\gamma}(h) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r^0(h),$$

где $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$, $h^- = \min(h_1, h_2)$, $J_r(h_1, h_2)$, $J_r^0(h)$ задаются выражениями (2.16), (2.17) соответственно.

Доказательство. Учитывая (2.14), рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
& \left| (n - h^-) \operatorname{cov}\{2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)\} - \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_r(h_1, h_2) \right| = \\
& = \left| \sum_{r=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \left(1 + \frac{m(r)}{n - h^+} \right) J_r(h_1, h_2) - \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_r(h_1, h_2) \right| \leq \\
& \leq \sum_{r=-\infty}^{h_2-n} |J_r(h_1, h_2)| + \sum_{r=n-h_1}^{+\infty} |J_r(h_1, h_2)| + \\
& + \sum_{r=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \left| \frac{m(r)}{n - h^+} \right| |J_r(h_1, h_2)|,
\end{aligned}$$

где $m(r)$ задается равенством (2.18).

Обозначим слагаемые в правой части последнего неравенства соответственно I_1, I_2, I_3 . Поскольку имеет место соот-

ношение (2.25), можно показать, что $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} |J_r(h_1, h_2)| < \infty$. Следовательно, слагаемые I_1, I_2 стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ как остаток сходящегося ряда.

$I_3 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в силу леммы Кронекера [16]. Таким образом, справедливо (2.26).

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично, если положить $h_1 = h_2 = h$.

Следствие 2.5. Из теоремы 2.20 вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D2\tilde{\gamma}(h) = 0, \quad h = \overline{0, n-1}.$$

В силу первого утверждения теоремы 2.19 и следствия 2.5 получаем, что $2\tilde{\gamma}(h)$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для вариограммы $2\gamma(h)$.

Теорема 2.21. Если имеет место соотношение

$$\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{t_{p-1}=-\infty}^{\infty} |c_p(t_1, \dots, t_{p-1})| < \infty, \quad (2.27)$$

где $c_p(t_1, \dots, t_{p-1})$, $p \geq 2$, — смешанный семиинвариант порядка p случайного процесса $Y(t)$. Тогда для оценки $2\tilde{\gamma}(h)$, задаваемой равенством (2.13),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cum}\{2\tilde{\gamma}(h_1), \dots, 2\tilde{\gamma}(h_p)\} = 0, \quad (2.28)$$

$$h_j = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, p}, \quad p > 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство основано на свойствах смешанных семиинвариантов.

Используя семиинвариантный подход, найдем предельное распределение оценки вариограммы $2\tilde{\gamma}(h)$.

Лемма [1, Д4.5] Пусть $Y^{(T)}$, $T = 1, 2, \dots$, будет такой последовательностью случайных векторов с r комплексными компонентами, что все кумулянты величины $\{Y_1^{(T)}, \bar{Y}_1^{(T)}, \dots, Y_r^{(T)}, \bar{Y}_r^{(T)}\}$ существуют и стремятся к кумулянтам величины $\{Y_1, \bar{Y}_1, \dots, Y_r, \bar{Y}_r\}$, которая определяется своими моментами. Тогда $Y^{(T)}$ сходится по распределению к величине, имеющей компоненты Y_1, \dots, Y_r .

Теорема 2.22. При выполнении условия (2.27), оценка $2\tilde{\gamma}(h)$, задаваемая равенством (2.13), имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием, равным $2\gamma(h)$, и предельной ковариационной структурой, удовлетворяющей соотношению (2.26).

Доказательство. Ранее показано, что $E2\tilde{\gamma}(h) = 2\gamma(h)$, и ковариация построенной оценки (2.13) вариограммы удовлетворяет предельному соотношению (2.26). Поскольку справедливо соотношение (2.28), то окончательное доказательство теоремы следует из [1].

Далее рассмотрим *гауссовский* СП $Y(t)$ с нулевым математическим ожиданием, неизвестными семивариограммой $\gamma(t)$ и ковариационной функцией $R(t)$.

В качестве оценки семивариограммы рассмотрим статистику вида

$$\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{s=1}^{n-h} (Y(s+h) - Y(s))^2, \quad h = 0, \dots, n-1, \quad (2.29)$$

построенную по n последовательным полученным через равные промежутки времени наблюдениям $Y(1), \dots, Y(n)$ за процессом $Y(t)$.

Положим $\tilde{\gamma}(-h) = \tilde{\gamma}(h)$, $h = 0, \dots, n-1$, и $\tilde{\gamma}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Нетрудно показать, что статистика (2.29) является несмещенной оценкой для семивариограммы $\gamma(h)$.

Теорема 2.23. Для оценки $\tilde{\gamma}(h)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\tilde{\gamma}(h_1), \tilde{\gamma}(h_2)\} &= \frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)} \times \\ &\times \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \{ \gamma(s+h_1-t) + \gamma(s-t-h_2) - \\ &- \gamma(s+h_1-t-h_2) - \gamma(s-t) \}^2, \end{aligned}$$

$$D\{\tilde{\gamma}(h)\} = \frac{1}{2(n-h)^2} \times \quad (2.30)$$

$$\times \sum_{s,t=1}^{n-h} \{\gamma(s-t+h) + \gamma(s-t-h) - 2\gamma(s-t)\}^2,$$

где $\gamma(h)$ – семивариограмма процесса $Y(t)$, $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$.

Доказательство. Используя определение ковариационной функции, определение и свойства нормированной ковариационной функции, учитывая теорему 2.2, получим требуемый результат.

Теорема 2.24. Если имеет место соотношение

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\gamma(m)| < \infty, \quad (2.31)$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \min\{h_1, h_2\}) \operatorname{cov}\{\tilde{\gamma}(h_1), \tilde{\gamma}(h_2)\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{\gamma(m-h_2) + \gamma(m+h_1) - \\ - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m)\}^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n-h) D\{\tilde{\gamma}(h)\} = \\ = 2(\gamma(h))^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \{\gamma(m-h) + \gamma(m+h) - 2\gamma(m)\}^2, \end{aligned}$$

где $\gamma(h)$ – семивариограмма процесса $Y(t)$, $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$.

Доказательство аналогично доказательству теорем 2.19, 2.20.

Следствие 2.6. Из теоремы 2.24 вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\{\tilde{\gamma}(h)\} = 0, \quad h = 0, 1, \dots, n-1.$$

В силу несмещенности (2.29) и вышеуказанного следствия получаем, что $\tilde{\gamma}(h)$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для семивариограммы $\gamma(h)$.

Теорема 2.25. Пусть справедливо (2.31). Тогда для оценки $\tilde{\gamma}(h)$, задаваемой равенством (2.29), существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cum}\{\tilde{\gamma}(h_1), \dots, \tilde{\gamma}(h_p)\} = 0,$$

$$h_j = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = \overline{1, p}, \quad p > 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.21.

Теорема 2.26. При выполнении условия (2.31) оценка $\tilde{\gamma}(h)$ вида (2.29) имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием, равным $\gamma(h)$, и предельной ковариационной структурой, удовлетворяющей соотношению (2.32).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.22.

2.8. Интервальные оценки семивариограммы

Лемма. Пусть имеется выборка $X = (x_1, \dots, x_n)$ из нормального распределения $N(a, \sigma^2)$. Тогда СВ $\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - a)}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение.

Результат теоремы 2.26 позволяет для достаточно больших n получить центральный доверительный интервал для семивариограммы $\gamma(h)$, применив нормальную аппроксимацию распределения оценки $\tilde{\gamma}(h)$. Действительно, при $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\frac{\tilde{\gamma}(h) - \gamma(h)}{\sqrt{D\{\tilde{\gamma}(h)\}}} < z\right\} \rightarrow \Phi(z), \quad (2.33)$$

$z \in \mathbf{R}$, $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона, $D\{\tilde{\gamma}(h)\}$ определена соотношением (2.30), $h = 0, 1, \dots, n-1$.

Применим метод обратной функции для построения доверительного интервала и воспользуемся асимптотикой (2.33). Тогда при $n \rightarrow \infty$ границы $(1 - \varepsilon)100\%$ центрального доверительного интервала находим из уравнений

$$\frac{\tilde{\gamma}(h) - \gamma(h)}{\sqrt{D\{\tilde{\gamma}(h)\}}} = \pm g_{1-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где $g_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ – квантиль нормального распределения уровня α , $0 < \varepsilon < 0,5$.

Таким образом, с доверительной вероятностью $(1 - \varepsilon)$ центральный доверительный интервал для неизвестной семива-

риограммы $\gamma(h)$ принимает вид:

$$\left(\tilde{\gamma}(h) - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{D\{\tilde{\gamma}(h)\}}, \tilde{\gamma}(h) + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{D\{\tilde{\gamma}(h)\}} \right),$$

$$h = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Рассмотрим подход, основанный на χ^2 -приближении к распределению оценки семивариограммы $\tilde{\gamma}(h)$. СВ χ^2 применяется для приближения СВ, принимающей только положительные значения.

Распределение статистики (2.29) может быть аппроксимировано распределением случайной величины $c \cdot \chi_m^2$, где c — константа, χ_m^2 — СВ, имеющая χ^2 -распределение с m степенями свободы.

Найдем параметры c и m методом моментов. Для этого приравняем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $c \cdot \chi_m^2$ к математическому ожиданию и дисперсии оценки $\tilde{\gamma}(h)$ семивариограммы. Предполагается, что моменты первого и второго порядков оценки семивариограммы известны. Тогда имеем

$$E\{\tilde{\gamma}(h)\} = cm,$$

$$D\{\tilde{\gamma}(h)\} = 2c^2 m.$$

Решая эти уравнения относительно c и m , получим

$$m = \frac{2(E\{\tilde{\gamma}(h)\})^2}{D\{\tilde{\gamma}(h)\}}, \quad c = \frac{E\{\tilde{\gamma}(h)\}}{m}.$$

Принимая во внимание несмещенность оценки (2.29), запишем выражения для параметров аппроксимирующего распределения χ^2 в виде:

$$\hat{m} = \frac{2(\gamma(h))^2}{D\{\tilde{\gamma}(h)\}}, \quad \hat{c} = \frac{\gamma(h)}{\hat{m}}.$$

Таким образом, величина $\hat{m}\tilde{\gamma}(h)/\gamma(h)$ имеет χ^2 -распределение с \hat{m} степенями свободы. Построим для нее $(1 - \varepsilon)100\%$ доверительный интервал, $0 < \varepsilon < 0,5$. Имеем

$$P\left\{\chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} < \chi_{\hat{m}}^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = 1 - \varepsilon,$$

$$P\left\{\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} \leq \chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = P\left\{\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} \geq \chi_{\hat{m}}^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значения $\chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\chi_{\hat{m}}^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ определяются с помощью таблиц распределения χ^2 по числу степеней свободы \hat{m} и доверительной вероятности $(1 - \varepsilon)$.

Отсюда вытекает, что интервал

$$\left(\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\chi_{\hat{m}}^2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}, \frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right)$$

с доверительной вероятностью $(1 - \varepsilon)$ является центральным доверительным интервалом для неизвестной семивариограммы $\gamma(h)$, $h = 0, 1, \dots, n - 1$.

2.9. Робастные оценки вариограммы

1) Оценка Cressie and Hawkins (1980):

$$2\hat{\gamma}(h) = \frac{\left(\frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} |Y(s+h) - Y(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{0,457 + \frac{0,494}{n-h} + \frac{0,045}{(n-h)^2}}, \quad (2.34)$$

$h = 0, 1, \dots, n - 1$.

Причем $\hat{\gamma}(-h) = \hat{\gamma}(h)$, $h = 0, 1, \dots, n - 1$, и $\hat{\gamma}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} |Y(s+h) - Y(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \\ &= 2\gamma(h) \left(0,457 + \frac{0,494}{n-h} + \frac{0,045}{(n-h)^2} \right). \end{aligned}$$

Если число наблюдений n стремится к бесконечности, то корректирующий множитель может быть приближен к **1/0,457**.

2) Оценки Dowd (1984):

$$2\hat{\gamma}_{D1}(h) = \left(\frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} |Y(s+h) - Y(s)| \right)^2,$$

$$2\hat{\gamma}_{D2}(h) = 2,198(\text{median} | Y(s+h) - Y(s) |)^2,$$

$$2\hat{\gamma}_{D3}(h) = 2,198(\text{median} | Y(h) - \overline{Y(h)} |)^2.$$

3) M -оценки (Хьюбера, Тьюки, Хампеля, Эндрюса, ...)

Лемма. Пусть $Y(t)$ гауссовский СП с нулевым математическим ожиданием и семивариограммой $\gamma(t)$. Тогда

$$E \left(|Y(s+h) - Y(s)|^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2^{\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}} (2\gamma(h))^{\frac{1}{4}},$$

$$D \left(|Y(s+h) - Y(s)|^{\frac{1}{2}} \right) = 2^{\frac{1}{2}} \left(\pi^{-\frac{1}{2}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} \right) (2\gamma(h))^{\frac{1}{2}},$$

где $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция, $z > 0$.

Теорема 2.27. Для оценки семивариограммы $\hat{\gamma}(h)$, полученной на основе (2.34), имеют место следующие соотношения:

$$E\{\hat{\gamma}(h)\} = \gamma(h),$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{\gamma}(h_1), \hat{\gamma}(h_2)\} &\approx \frac{10}{(n-h_1)(n-h_2)} \left(\pi^{-\frac{1}{2}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} \right) \frac{\Gamma^6\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi^3} \times \\ &\times \sum_{s,t=1}^{n-h} \frac{(\gamma(s-t-h_2) + \gamma(s-t+h_1) - \gamma(s-t+h_1-h_2) - \gamma(s-t))^2}{\left(0.457 + \frac{0.494}{n-h_1} + \frac{0.045}{(n-h_1)^2}\right) \left(0.457 + \frac{0.494}{n-h_2} + \frac{0.045}{(n-h_2)^2}\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\{\hat{\gamma}(h)\} &\approx \frac{10}{(n-h)^2} \left(\pi^{-\frac{1}{2}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} \right) \frac{\Gamma^6\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi^3} \times \\ &\times \sum_{s,t=1}^{n-h} \frac{(\gamma(s-t+h) + \gamma(s-t-h) - 2\gamma(s-t))^2}{\left(0.457 + \frac{0.494}{n-h} + \frac{0.045}{(n-h)^2}\right)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{10}{(n-h)^2} \frac{1}{\left(0.457 + \frac{0.494}{n-h} + \frac{0.045}{(n-h)^2}\right)^2} \times$$

$$\times \left(\pi^{-\frac{1}{2}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} \right) \frac{\Gamma^6\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi^3} \times$$

$$\times \sum_{s,t=1}^{n-h} (\gamma(s-t+h) + \gamma(s-t-h) - 2\gamma(s-t))^2,$$

где $\gamma(h)$ – семивариограмма центрированного гауссовского процесса $Y(t)$, $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$.

Если имеет место соотношение (2.31), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\{\hat{\gamma}(h)\} = 0, \quad h = 0, 1, \dots, n-1.$$

Принимая это во внимание, и в силу несмещенности статистики $\hat{\gamma}(h)$ получаем, что $\hat{\gamma}(h)$ является состоятельной в сред-неквадратическом смысле оценкой для семивариограммы $\gamma(h)$.

2.10. Семивариограмма и стохастический анализ СП

Рассмотрим действительный внутренне стационарный цен-трированный СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с конечным моментом второго порядка и семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Опр. 2.9. СП $Y(t)$ называется непрерывным в среднем квад-ратическом в точке $t \in \mathbb{R}$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} E\{|Y(t+h) - Y(t)|^2\} = 0. \quad (2.35)$$

Теорема 2.28. Внутренне стационарный СП $Y(t)$ непрерывен в среднем квадратическом на \mathbb{R} тогда и только тогда, когда его семивариограмма $\gamma(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = 0. \quad (2.36)$$

Теорема 2.29. Стационарный в широком смысле СП $Y(t)$ непрерывен в среднем квадратическом на \mathbb{R} тогда и только тогда, когда его семивариограмма $\gamma(t)$ непрерывна в нуле.

Упражнение. Доказать, что винеровский процесс $w(t)$, $t \in T = [0, \infty)$, является СК-непрерывным на T .

Опр. 2.10. СП $Y(t)$ называется дифференцируемым в среднем квадратическом в точке $t \in \mathbb{R}$, если существует случайная величина $Y'(t)$ такая, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left\{ \left| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - Y'(t) \right|^2 \right\} = 0.$$

Теорема 2.30. Для того чтобы внутренне стационарный СП $Y(t)$ был дифференцируем в среднем квадратическом на \mathbb{R} , необходимо и достаточно, чтобы его семивариограмма $\gamma(t)$ удовлетворяла условию

$$\gamma''(0) < +\infty, \quad (2.37)$$

где $\gamma''(0)$ – вторая производная семивариограммы в точке $t = 0$.

Теорема 2.31. Пусть $Y(t)$ – дифференцируемый в среднем квадратическом внутренне стационарный СП с конечным вторым моментом. Тогда его производная в СК-смысле $Y'(t)$ является стационарным в широком смысле СП.

Теорема 2.32. Для того чтобы стационарный в широком смысле СП $Y(t)$ был дифференцируем в среднем квадратическом на \mathbb{R} , необходимо и достаточно, чтобы его семивариограмма $\gamma(t)$ удовлетворяла условию (2.37).

Следствие 2.7. Пусть $Y(t)$ – дифференцируемый на множестве \mathbb{R} стационарный в широком смысле СП с ковариационной функцией $R(t)$. Тогда его производная в среднем квадратическом смысле $Y'(t)$ имеет семивариограмму

$$\gamma_{Y'}(t) = -R''(0) + R''(t). \quad (2.38)$$

Следствие 2.8. Пусть $Y(t)$ – дифференцируемый на множестве \mathbb{R} стационарный в широком смысле СП с семивариограммой $\gamma(t)$. Тогда его производная в среднем квадратическом смысле $Y'(t)$ имеет семивариограмму

$$\gamma_{Y'}(t) = \gamma''(0) - \gamma''(t).$$

Определим далее интеграл вида

$$I = \int_a^b Y(t) dt, \quad (2.39)$$

где $[a, b]$ – конечный или бесконечный интервал.

Предположим сначала, что $-\infty < a < b < \infty$. Построим некоторое разбиение $a < t_0 < t_1 < \dots < t_n < b$, и на каждом из

промежутков этого разбиения выберем произвольную точку $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j)$, $j = \overline{1, n}$.

Опр. 2.11. Если при $n \rightarrow \infty$, $\max_{j=1, n} (t_j - t_{j-1}) \rightarrow 0$ существует

предел

$$\lim E \left\{ \left| \sum_{j=1}^n Y(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - I \right|^2 \right\} = 0,$$

не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек τ_j , то СП $Y(t)$ называется интегрируемым в среднем квадратическом смысле на $[a, b]$, а случайная величина I называется его интегралом в среднем квадратическом на $[a, b]$.

Теорема 2.33. Интеграл в среднем квадратическом (2.39) существует тогда и только тогда, когда

$$(b-a) \int_a^b D(t) dt - 2 \int_0^{b-a} (b-a-t) \gamma(t) dt < \infty,$$

где $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $D(t)$ – дисперсия, а $\gamma(t)$ – семивариограмма внутренне стационарного СП $Y(t)$.

Доказательство. Существование интеграла Римана $\int_a^b \int_a^b R(t, s) dt ds$ является необходимым и достаточным условием существования СК-интеграла (2.39). Из соотношения (2.2)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b R(t, s) dt ds &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b D(t) dt ds + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b D(s) dt ds - \int_a^b \int_a^b \gamma(t, s) dt ds = \\
&= (b-a) \int_a^b D(s) ds - \int_a^b \int_a^b \gamma(t-s) dt ds.
\end{aligned}$$

Во втором интеграле сделаем замену переменных интегрирования: $t = t, t - s = u$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_a^b R(t, s) dt ds = \\
&= (b-a) \int_a^b D(s) ds - \int_{-(b-a)}^0 \gamma(u) du \int_a^{u+b} dt - \int_0^{b-a} \gamma(u) du \int_{u+a}^b dt = \\
&= (b-a) \int_a^b D(s) ds - \int_{-(b-a)}^{b-a} (b-a-|u|) \gamma(u) du = \\
&= (b-a) \int_a^b D(s) ds - 2 \int_0^{b-a} (b-a-u) \gamma(u) du,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.34. Интеграл в среднем квадратическом (2.39) от стационарного в широком смысле СП $Y(t)$ существует тогда и только тогда, когда

$$(b-a)^2 R(0) - 2 \int_0^{b-a} (b-a-t) \gamma(t) dt < \infty.$$

2.11. Спектральное представление внутренне стационарных СП и их семивариограмм

Рассмотрим внутренне стационарные случайные процессы с дискретным и непрерывным временем.

Теорема 2.35. Для внутренне стационарного СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, справедливы соотношения:

$$Y(t) - Y(s) = \int_{\Pi} \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{e^{i\lambda} - 1} dZ_1(\lambda), \quad (2.40)$$

$$2\gamma(t) = \int_{\Pi} \frac{1 - \cos \lambda t}{1 - \cos \lambda} dF_1(\lambda),$$

$t, s \in \mathbb{Z}$, $Z_1(\lambda)$ — комплекснозначный СП с ортогональными приращениями, нулевым математическим ожиданием и такой, что $E\{|dZ_1(\lambda)|^2\} = dF_1(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$.

Доказательство. В упражнениях параграфа 2.1 было показано, что центрированный СП $Y(t)$ является внутренне стационарным тогда и только тогда, когда разность $Y(t+1) - Y(t)$ образует обычный стационарный в широком смысле процесс.

Известно, что любой центрированный стационарный в широком смысле СП с дискретным временем можно представить

$$Y(t+1) - Y(t) = \int_{\Pi} e^{it\lambda} dZ_1(\lambda).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
Y(t) - Y(s) &= \sum_{j=s}^{t-1} (Y(j+1) - Y(j)) = \\
&= \sum_{j=s}^{t-1} \int_{\Pi} e^{ij\lambda} dZ_1(\lambda) = \int_{\Pi} \left(\sum_{j=s}^{t-1} e^{ij\lambda} \right) dZ_1(\lambda).
\end{aligned}$$

Подынтегральное выражение правой части последнего равенства, представляет собой сумму $t - s$ первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $e^{i\lambda}$.

Применяя $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, (2.40) доказано.

Из (2.40) и свойств стохастического интеграла имеем

$$\begin{aligned}
2\gamma(t - s) &= D\{Y(t) - Y(s)\} = \\
&= E \left\{ \int_{\Pi} \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{e^{i\lambda} - 1} dZ_1(\lambda) \overline{\int_{\Pi} \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{e^{i\lambda} - 1} dZ_1(\lambda)} \right\} = \\
&= \int_{\Pi} \left| \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{e^{i\lambda} - 1} \right|^2 dF_1(\lambda) = \int_{\Pi} \frac{1 - \cos \lambda(t - s)}{1 - \cos \lambda} dF_1(\lambda),
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Сформулируем аналогичные результаты и для внутренне стационарного СП с непрерывным временем.

Теорема 2.36. Для внутренне стационарного непрерывного в СК-смысле СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, справедливы соотношения:

$$Y(t) - Y(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{i\lambda} (1 + \lambda^2)^{1/2} dZ(\lambda), \quad (2.41)$$

$$\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos t\lambda}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) dH(\lambda), \quad (2.42)$$

$t, s \in \mathbb{R}$, $Z(\lambda)$ – комплекснозначный СП с ортогональными приращениями, нулевым математическим ожиданием и такой, что $E\{|dZ(\lambda)|^2\} = dH(\lambda)$, $H(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, – ограниченная монотонная функция такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda^2) dH(\lambda) < \infty. \quad (2.43)$$

Теорема 2.37. Случайный процесс

$$Y(t) = \int_0^t X(s) ds, \quad (2.44)$$

где $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – центрированный стационарный в широком смысле непрерывный в СК-смысле СП, является внутренне стационарным с семивариограммой вида

$$\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos t\lambda}{\lambda^2} dF_X(\lambda), \quad (2.45)$$

$F_X(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, – спектральная функция процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Известно, что

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dZ_X(\lambda). \quad (2.46)$$

Тогда

$$Y(t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} dZ_X(\lambda) \right) ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t e^{is\lambda} ds \right) dZ_X(\lambda) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\lambda} - 1}{i\lambda} dZ_X(\lambda). \quad (2.47)$$

Покажем, что процесс вида (2.47) является внутренне стационарным.

$$E\{Y(t) - Y(s)\} = E\left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{i\lambda} dZ_X(\lambda)\right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} D\{Y(t) - Y(s)\} &= E\{(Y(t) - Y(s))\overline{(Y(t) - Y(s))}\} = \\ &= E\left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{i\lambda} dZ_X(\lambda) \overline{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{i\lambda} dZ_X(\lambda)}\right\} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{it\lambda} - e^{is\lambda}}{i\lambda}\right|^2 dF_X(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it\lambda} - e^{is\lambda}|^2}{\lambda^2} dF_X(\lambda) = \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos \lambda(t-s)}{\lambda^2} dF_X(\lambda) = 2\gamma(t-s). \end{aligned}$$

Следствие 2.9. Для внутренне стационарного СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определенного в теореме 2.37, имеют место равенства:

$$dZ_X(\lambda) = (1 + \lambda^2)^{1/2} dZ(\lambda), \quad (2.48)$$

$$dF_X(\lambda) = (1 + \lambda^2) dH(\lambda). \quad (2.49)$$

Теорема 2.38. Если $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – центрированный стационарный в широком смысле непрерывный в СК-смысле СП, то

процесс $Y(t) = Y_0 + X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, Y_0 – произвольная случайная величина, является внутренне стационарным с семивариограммой вида

$$\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos t\lambda) dF_X(\lambda), \quad (2.50)$$

$F_X(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, – спектральная функция процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Воспользуемся определением внутренне стационарного СП.

$$E\{Y(t) - Y(s)\} = E\{X(t) - X(s)\} = 0.$$

В силу спектрального представления (2.46), имеем

$$\begin{aligned} D\{Y(t) - Y(s)\} &= D\{X(t) - X(s)\} = \\ &= E\left\{ \int_{\mathbb{R}} (e^{it\lambda} - e^{is\lambda}) dZ_X(\lambda) \overline{\int_{\mathbb{R}} (e^{it\lambda} - e^{is\lambda}) dZ_X(\lambda)} \right\} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda} - e^{is\lambda}|^2 dF_X(\lambda) = 2 \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos \lambda(t-s)) dF_X(\lambda) = 2\gamma(t-s). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 2.10. Для внутренне стационарного СП $Y(t)$, определенного в теореме 2.38, справедливы соотношения:

$$Z_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{(1 + \mu^2)^{1/2}}{i\mu} dZ(\mu), \quad (2.51)$$

$$dF_X(\lambda) = \frac{(1 + \lambda^2)}{\lambda^2} dH(\lambda).$$

Теорема 2.39. При выполнении условия (2.43) внутренне стационарный непрерывный в СК-смысле СП $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, может быть представлен в виде (2.44).

Пусть существует функция $h(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} h(\mu) d\mu. \quad (2.52)$$

Тогда справедлив результат

$$\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos t\lambda}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) h(\lambda) d\lambda$$

при условии

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda^2) h(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (2.53)$$

Согласно определению внутренне стационарного СП можно утверждать, что $Y(t + s) - Y(t)$, $t, s \in \mathbb{R}$, является стационарным в широком смысле и имеет спектральное представление

$$Y(t + s) - Y(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda} dZ_t(\lambda),$$

где $Z_t(\lambda)$ — комплекснозначный СП с ортогональными приращениями, нулевым математическим ожиданием и такой, что $E\{|dZ_t(\lambda)|^2\} = dF_t(\lambda)$, $F_t(\lambda)$ — ограниченная монотонная функция, $t, \lambda \in \mathbb{R}$, причем

$$2\gamma(t) = D\{Y(t + s) - Y(s)\} = \int_{\mathbb{R}} dF_t(\lambda) < \infty. \quad (2.54)$$

Поскольку $Y(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.36, то из (2.42) учитывая (2.49), имеем

$$2\gamma(t) = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos t\lambda}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) dH(\lambda) = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos t\lambda}{\lambda^2} dF_X(\lambda). \quad (2.55)$$

Приравнявая (2.54) и (2.55), получим

$$dF_t(\lambda) = \frac{2(1 - \cos t\lambda)}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) dH(\lambda) = \frac{2(1 - \cos t\lambda)}{\lambda^2} dF_X(\lambda).$$

Отсюда следует, что

$$F_t(\lambda) = 2 \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1 - \cos t\mu}{\mu^2} (1 + \mu^2) dH(\mu) = 2 \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1 - \cos t\mu}{\mu^2} dF_X(\mu).$$

Обозначим

$$dU(\lambda) = \frac{(1 + \lambda^2)}{\lambda^2} dH(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} dF_X(\lambda).$$

В соответствии с (2.55) запишем

$$\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos t\lambda) dU(\lambda).$$

Пусть существует функция $u(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$U(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} u(\mu) d\mu,$$

тогда

$$\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos t\lambda) u(\lambda) d\lambda.$$

Теорема 2.40. В условиях теоремы 2.36 семивариограмма $\gamma(t)$ внутренне стационарного СП $Y(t)$ не может возрасти на бесконечности быстрее, чем функция

$$t^2 \left(\int_0^1 dF_X(\lambda) + \frac{4}{t^2} \int_1^\infty \frac{dF_X(\lambda)}{\lambda^2} \right), \quad (2.56)$$

где $dF_X(\lambda)$ определена формулой (2.49), $\lambda, t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Воспользуемся неравенствами

$$|1 - \cos t\lambda| < \frac{t^2 \lambda^2}{2}, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

$$|1 - \cos t\lambda| \leq 2, \quad \lambda > 1.$$

Тогда с учетом формулы (2.42) запишем

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 2 \left(\int_0^1 (1 - \cos t\lambda) \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} dH(\lambda) + \int_1^\infty (1 - \cos t\lambda) \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} dH(\lambda) \right) < \\ &< t^2 \int_0^1 (1 + \lambda^2) dH(\lambda) + 4 \int_1^\infty \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} dH(\lambda). \end{aligned}$$

В силу (2.43) правая часть последнего неравенства ограничена. Следовательно, принимая во внимание (2.49), имеем

$$\frac{\gamma(t)}{t^2} < \int_0^1 (1 + \lambda^2) dH(\lambda) + \frac{4}{t^2} \int_1^\infty \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} dH(\lambda) =$$

$$= \int_0^1 dF_X(\lambda) + \frac{4}{t^2} \int_1^\infty \frac{dF_X(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Очевидно, что семивариограмма не может возрастать на бесконечности быстрее, чем функция (2.56). Теорема доказана.

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВЫ ГЕОСТАТИСТИКИ

Тема 3 Основные этапы геостатистики

3.1. Анизотропия вариограмм

Вариограмма — функция, зависящая от расстояния и направления. Она показывает, как *в среднем* различаются наблюдения за процессом в зависимости от расстояния в заданном направлении или в заданной области пространства.

Рассмотрим случай, когда наблюдения расположены вдоль прямой с шагом d (рис. 3.1).

Всего имеется $n - 1$ пара для нахождения $\gamma(d)$; $n - 2$ пары для нахождения $\gamma(2d)$ и т.д.

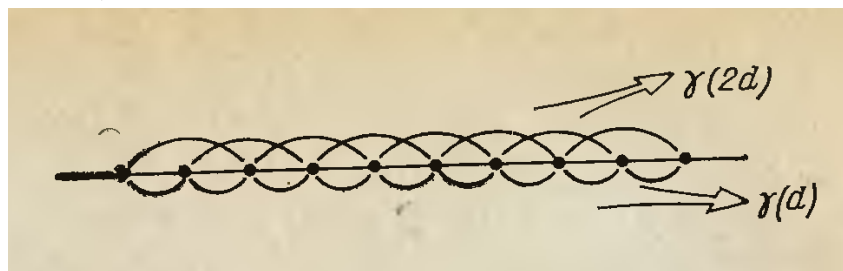


Рис. 3.1 — Схема нахождения вариограммы по наблюдениям, расположенным на заданном расстоянии

До сих пор мы рассматривали модель вариограммы для одного направления (*изотропная* вариограмма), которая зависит только от расстояния между точками. Если вариограмма зави-

сит и от ориентации пары точек в пространстве, то можно говорить о наличии *анизотропии*.

Чтобы охарактеризовать возможную анизотропию, следует построить вариограмму для нескольких направлений – для четырех или восьми. Далее рассмотрим случай, когда наблюдения расположены по регулярной сети, причем некоторые наблюдения пропущены (рис. 3.2).

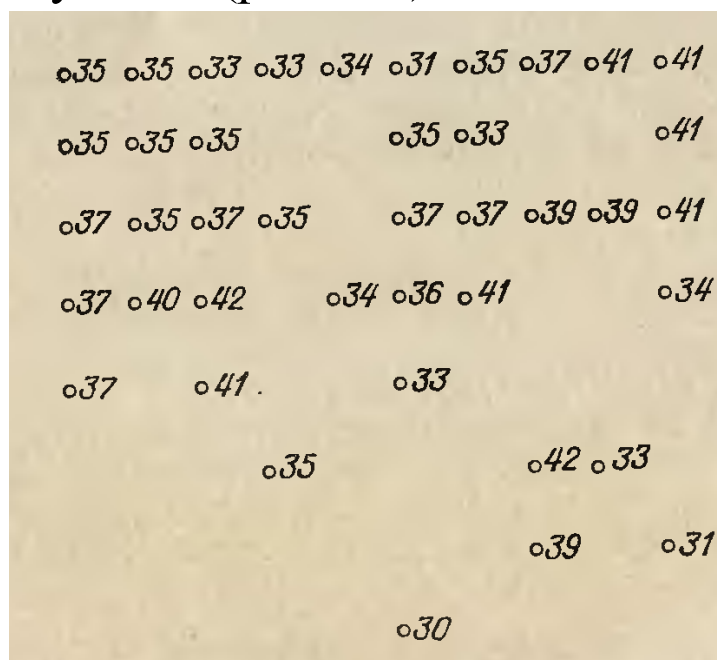


Рис. 3.2 – Карта наблюдений

Будем исследовать четыре направления: *запад-восток*, *север-юг*, *юго-восток – северо-запад*, *северо-восток – юго-запад*, вычисляя соответствующие характеристики для расстояний, равных от одного до трех шагов наблюдения. При построении выборочной семивариограмм необходимо учесть, что для диагональных направлений расстояние между ближайшими наблюдениями составляет $a\sqrt{2}$, если a – шаг сети.

Результаты вычисления выборочной семивариограммы в четырех направлениях представлены в таблице ниже.

Направления	$h=1$		$h=2$		$h=3$	
	$N(1)$	$\gamma(1)$	$N(2)$	$\gamma(2)$	$N(3)$	$\gamma(3)$
Запад—восток	24	4,1	20	8,4	18	12,1
Север—юг	22	4,25	18	8,2	15	10,9
Юго-восток—северо-запад	19	5	16	12	10	17,3
Северо-восток—юго-запад	18	6,5	14	11,3	8	15,4

Сравнение четырех полученных зависимостей (рис. 3.3) показывает, что они практически идентичны. Поэтому можно считать, что это изотропный случай и найти осредненную выборочную семивариограмму.

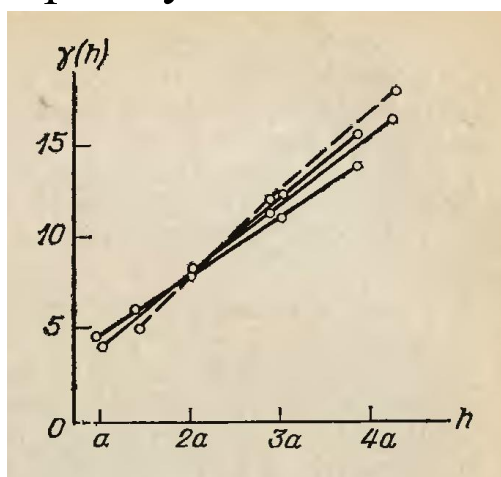


Рис. 3.3 – Выборочные семивариограммы в четырех направлениях

h	$N(h)$	$\gamma(h)$
a	46	4,1
$a\sqrt{2}$	37	5,7
$2a$	38	8,3
$2a\sqrt{2}$	30	11,6
$3a$	33	11,5
$3a\sqrt{2}$	18	16,3

Общая зависимость близка к линейной и вполне приемлемо описывается соотношением

$$\gamma(h) = 4h / a.$$

На практике главный вопрос заключается в выборе направлений исследования и образовании пар для вычисления, чтобы для каждого выбранного направления было количество пар, достаточное для получения статистически достоверной оценки семивариограммы. Т.о., задается вектор h , определяемый *длиной (лагом)* и *направлением*. Количество и размер лагов определяется конкретными данными — важно, чтобы было несколько лагов на росте вариограммы и несколько лагов, когда она достигает некоторого уровня, сравнимого со значением априорной вариации, и перестает расти. Если значение вариограммы не перестает расти, это может означать, что для данных не выполнена гипотеза о стационарности второго порядка.

При подозрении о наличии различий в пространственной структуре в зависимости от направления ϕ рассчитываются экспериментальные вариограммы по направлениям (directional variogram). Число направлений обычно определяется количеством данных. Для получения общего представления о наличии анизотропии достаточно двух взаимно перпендикулярных направлений. Для более точного моделирования анизотропной вариограммы удобно иметь 6-8 направлений. Выбор направления расчета вариограммы чрезвычайно важен для четкого выявления корреляционной структуры.

Исходные данные для анализа обычно произвольным нерегулярным образом распределены по области, поэтому трудно предположить, что удастся набрать достаточное количество пар точек измерений, разделенных точно зафиксированными

расстояниями в заданном направлении. Чтобы преодолеть эту проблему, используют допущение по разбросу значения расстояния лага (lag tolerance) и угла раствора вокруг направления (direction tolerance). Допуск расстояния лага Δh (lag tolerance) определяет отклонение расстояния в парах от значения расстояния лага h . При $\Delta h = h/2$ все данные будут учитываться при расчете вариограммы и каждая точка попадет хотя бы в один лаг. Если $\Delta h < h/2$, то часть точек может не попасть ни в один лаг из-за ограничения размера допуска расстояния в лаге. Если $\Delta h > h/2$, то некоторые данные могут учитываться при расчете значения вариограммы для нескольких лагов. Такое перекрытие лагов бывает полезно при малом количестве данных.

Угол раствора $\Delta\phi$ (direction tolerance) вокруг направления ϕ позволяет выявлять узконаправленные анизотропные корреляции. Ширина полосы b_w (bandwidth) сужает область поиска на больших расстояниях, ограничивая угол раствора $\Delta\phi$. Когда угол раствора равен 90° , вариограмма становится обобщенной по всем направлениям (omnidirectional). Такая вариограмма используется, если никакая анизотропия в данных не обнаружена или если анизотропией решено пренебречь, например из-за малого количества данных измерений.

На рис. 3.4 представлена схема параметров для вычисления вариограммы в рамках одного направления ϕ : h , Δh , $\Delta\phi$, b_w . Можно представить, что такие сектора (как на рис. 3.4) перемещаются по области данных от одной точки к другой для учета всех пар точек, которые ранжируются по расстоянию

между ними и попадают в тот или иной лаг для рассматриваемого направления.

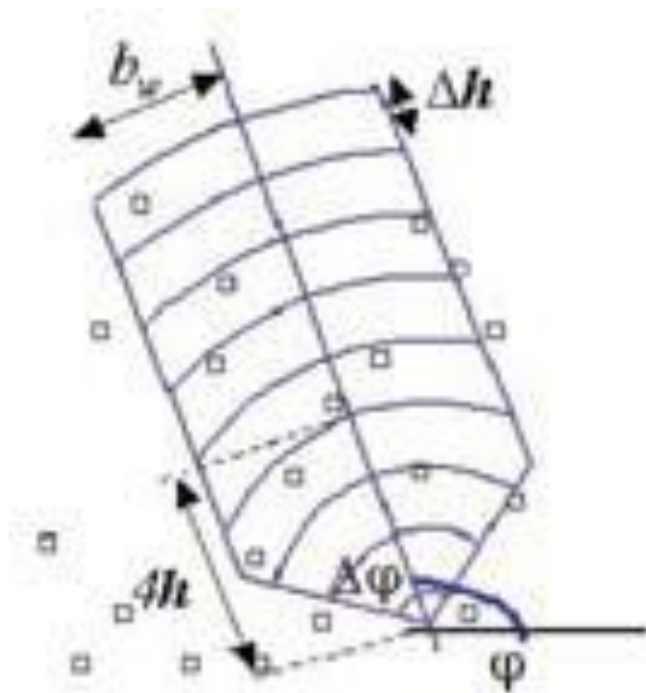
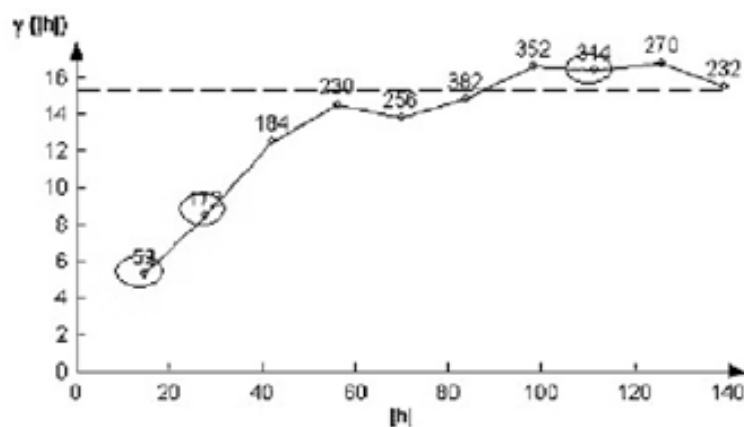


Рис. 3.4 – Параметры для расчета вариограммы:
 ϕ — угол направления вариограммы; $\Delta\phi$ — угол раствора;
 h — лаг; Δh — разброс лага; b_w — (полу)ширина полосы

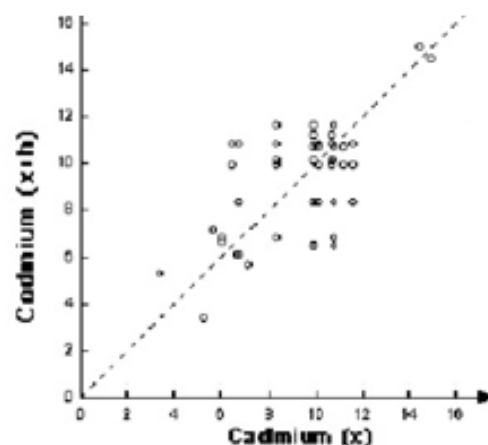
Вариограмма, рассчитанная по схеме, изображенной на рис. 3.4, приведена на рис. 3.5а. На графике вариограммы указано число пар для каждого лага. Возрастание вариограммы с расстоянием лага указывает на наличие корреляции между значениями в парах. Скорость роста вариограммы с расстоянием лага характеризует величины пространственной корреляции. Постоянное значение вариограммы для больших расстояний лага показывает отсутствие корреляции между значениями в парах.

Это можно проиллюстрировать диаграммами разброса для различных лагов. Выберем три лага вариограммы — 1-й, 2-й и 8-й .

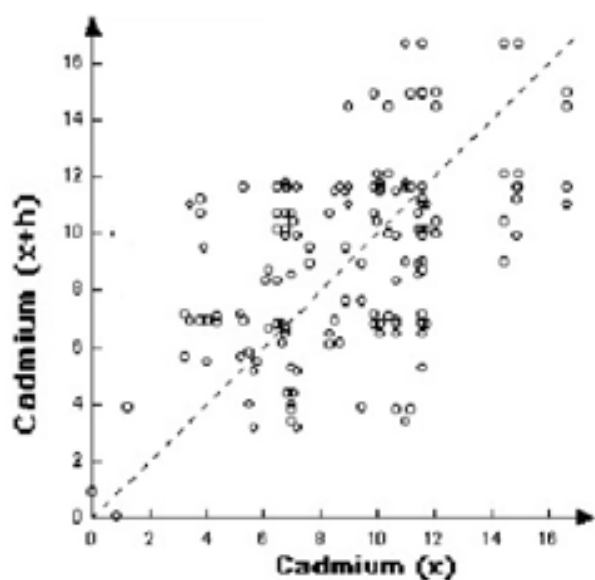
Из рис. 3.5б для 1-го лага видно, что значения в парах сгруппированы вдоль диагонали графика — это означает хорошую корреляцию. Однако из-за малого расстояния между точками 1-го лага количество точек для расчета значения вариограммы мало — 52 пары.



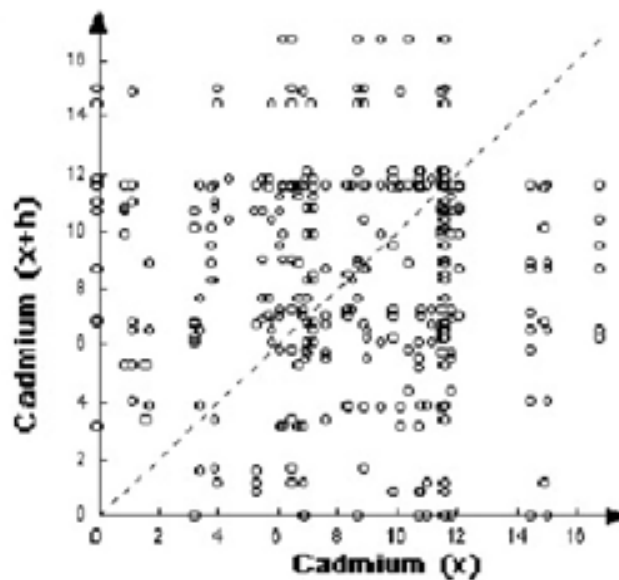
а



б



в



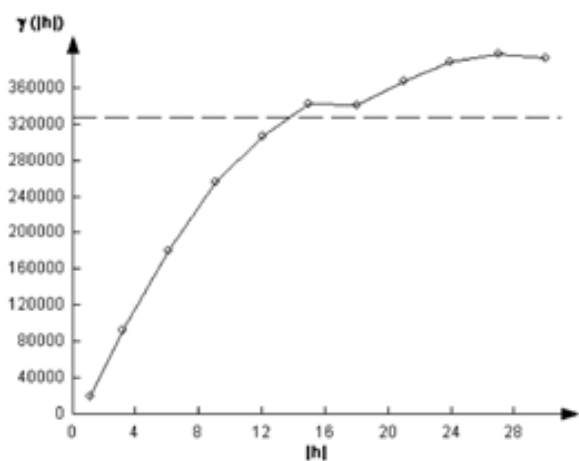
г

Рис. 3.5 – Вариограмма, количество пар в лагах (а) и диаграммы разброса пар для 1-го лага (б), 2-го лага (в) и 8-го лага (г)

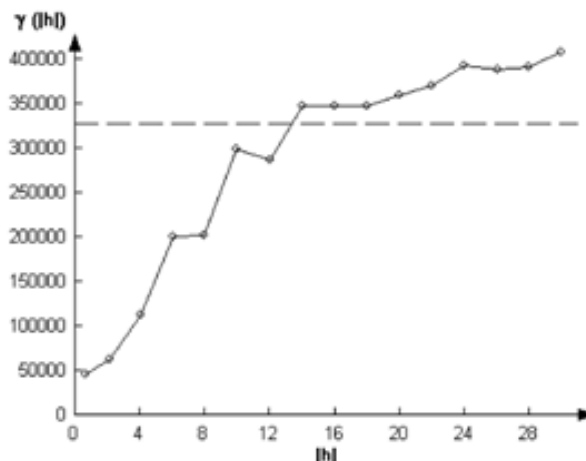
Для 2-го лага с вдвое бо́льшим расстоянием количество пар точек возрастает до 172, что значительно повышает статистическую репрезентативность значения вариограммы. Значения в парах для 2-го лага также имеют высокую корреляцию (рис. 3.5в) в среднем, хотя видно, что разброс значений в парах возрастает.

В 8-й лаг вошли пары точек на большом расстоянии (115). На рис. 3.5г видно, что значения в парах для 8-го лага не коррелированы — точки разбросаны по всему графику и не группируются вдоль диагонали, как для 1-го и 2-го лагов.

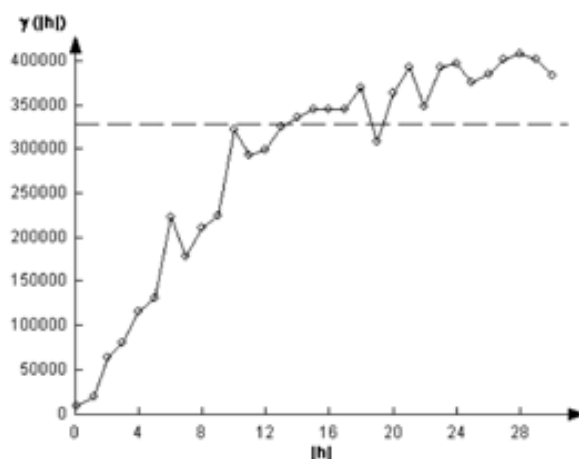
Выбор размера отклонений лага и угла направления зависит от количества данных. Если данных много и они распределены плотно, разбросы могут быть небольшими. Важно только следить, чтобы число пар, попавших в каждый сектор, было достаточным. При малом количестве данных допустимо использование перекрывающихся секторов. Они не нарушают общую структуру вариограммы, а делают ее более гладкой, удобной для последующего моделирования. Пример экспериментальных вариограмм, построенных на основе одних и тех же данных, для различных лагов представлен на рис. 3.6. Можно видеть, что с уменьшением значения лага экспериментальная вариограмма становится менее гладкой.



а



б



в

Рис. 3.6 – Вариограммы, рассчитанные с лагом различной длины:
3 (а), 2 (б), 1 (в)

Обычно используют равные по длине лаги, что ведет к равномерному их распределению. Однако в особых случаях можно использовать и неравномерно распределенные лаги [Flamm et al., 1994]. Поскольку расчет вариограммы весьма чувствителен к выбору длины лага, их значение является принципиальным для дальнейшего моделирования пространственной корреляции. На практике используют интерактивные программы подбора.

Раствор угла направления также сильно влияет на поведение вариограммы. С его помощью можно ограничить разброс направлений пар точек и таким образом выявить узконаправленную корреляцию.

Для визуализации вариограмм можно использовать графики, но для изображения и исследования пространственной анизотропии более удобны двумерные изображения. Одним из них является *вариограммная роза* (рис. 3.7). Роза имеет вид лепестков, представляющих вариограммы по направлениям. Вариограммная роза симметрична относительно центра в силу свойств симметрии моментов второго порядка.

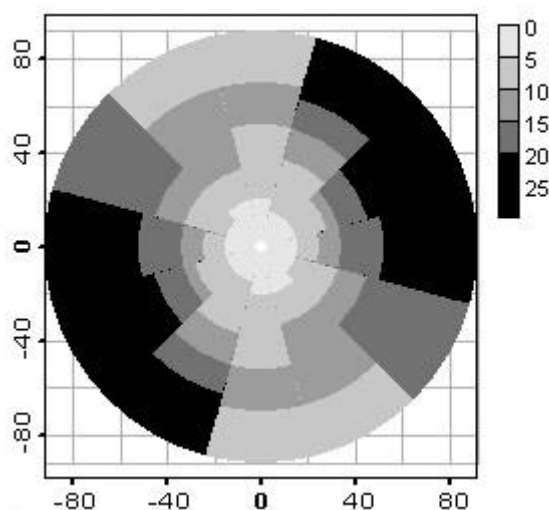


Рис. 3.7 – Вариограммная роза

Другим инструментом, который дает представление о поведении пространственной структуры в целом, является *вариограммная поверхность* (рис. 3.8). Для построения вариограммной поверхности вектор h представляется не в полярном виде, как для вариограммной розы (расстояние и направление), а в виде проекций лага на оси координат Δx и Δy . Вариограммная поверхность представляет собой поверхность значе-

ний, вычисленных на регулярной сетке в пространстве лагов по формуле вариограммы. При вычислении (наборе пар) вариограммные координаты, естественно, тоже берутся с разбросом (lag tolerance). Вариограммная поверхность позволяет сразу увидеть анизотропию и определить приоритетные направления для построения вариограмм.

Следует отметить, что вариограммная поверхность обладает центральной симметрией относительно точки $(0, 0)$.

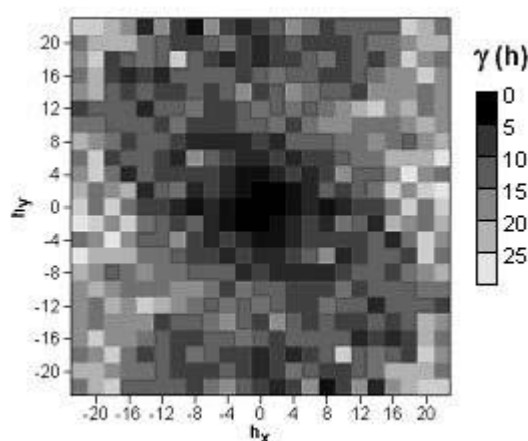


Рис. 3.8 – Вариограммная поверхность

Еще одним инструментом пространственного корреляционного анализа является вариограммное облако (variogram cloud) (рис. 3.9). Это диаграмма разброса квадратов разности значений для всех пар в зависимости от расстояния между точками в паре. Такая диаграмма помогает распознать пары с большим значением квадрата разности значений, поскольку они вносят существенный вклад в значение экспериментальной вариограммы. Присутствие пар, дающих необоснованно большие значения для малых лагов, помогает выявлять крайние экстремальные значения — выбросы (outliers). Вариограммное облако также помогает определить оптимальный лаг для вычисления вариограммы. Вариограммное облако может быть

построено для любого направления и раствора угла. Следует отметить, что вариограммное облако также обладает центральной симметрией относительно точки $(0, 0)$.

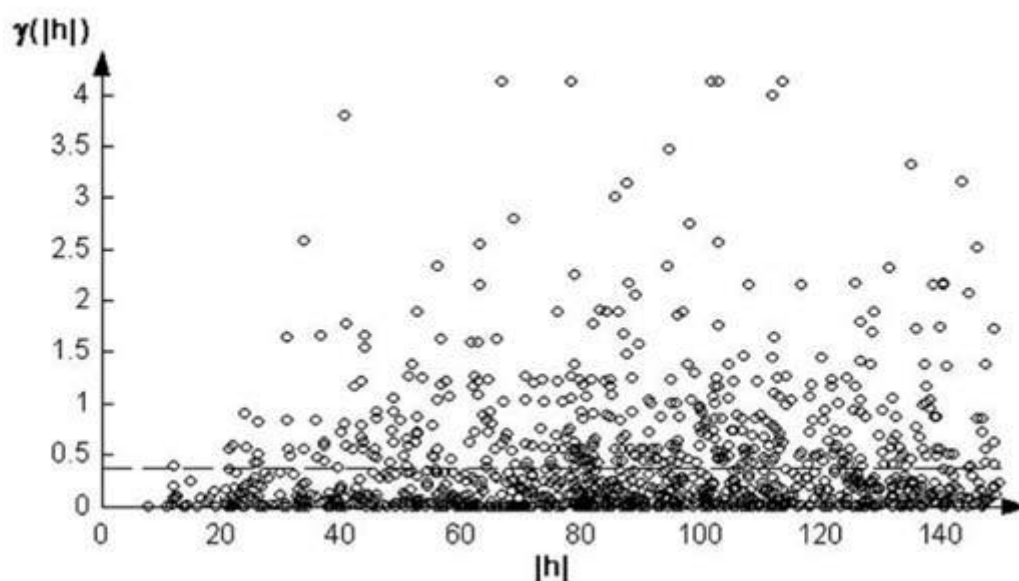


Рис. 3.9 – Вариограммное облако

Упражнение. Для построения анизотропной модели вариограмм производится расчет вариограммы по нескольким направлениям (углам ϕ). Чему равен раствор угла $\Delta\phi$, если вариограммы построены в *шести* направлениях без перекрытия одинаковых секторов (т. е. без повторного учета одних и тех же точек в разных направлениях)?

Ответ: Половина угла раствора $\Delta\phi$ равна 15° .

Решение: Для получения шести направлений для расчета вариограммы 180° делится на шесть с учетом свойства симметрии вариограммы. Таким образом, каждый сектор равен 30° , что дает половину раствора 15° в обе стороны от угла направления каждой вариограммы.

В случае наличия *анизотропии* есть два выхода. Первый выход — построить одну модель изотропной вариограммы и при ее использовании всякий раз производить с вектором h преобразования пространства и только после этого подставлять в качестве аргумента величину $|h|$. Второй выход состоит в полномасштабном моделировании анизотропной структуры вариограммы и использовании ее в вычислениях. Для моделирования сложной анизотропии используют *гнездовую структуру*.

В традиционной геостатистике анизотропию делят на два класса: *геометрическую* и *зонную* (все остальные варианты анизотропии, кроме геометрической). Но с точки зрения подхода к моделированию удобнее подразделять анизотропию вариограмм по основным параметрам, использующимся в моделях: *радиусу* и *плато*. Третий параметр — *наггет* — определяет значение вариограммы в малой окрестности нуля. Если рассматривать такую анизотропию, то это — различное поведение вариограмм вблизи нуля для разных направлений. Оно может быть вызвано только коррелированностью ошибок измерений. Поэтому на практике такая анизотропия не рассматривается, лишь подбирается одинаковое значение наггета для всех направлений.

В случае анизотропии радиуса вариограммы (ковариации) по различным направлениям имеют одинаковые форму и значения плато, но разные эффективные радиусы корреляции, другими словами, значения вариограммы достигают значения плато на различных расстояниях в зависимости от направле-

ния. При этом возможны два случая: *геометрическая анизотропия* и *зонная анизотропия радиуса*.

Геометрическая (geometric) анизотропия. В этом случае изолинии вариограммы на вариограммной поверхности или вариограммной розе имеют форму эллипса (рис. 3.10).

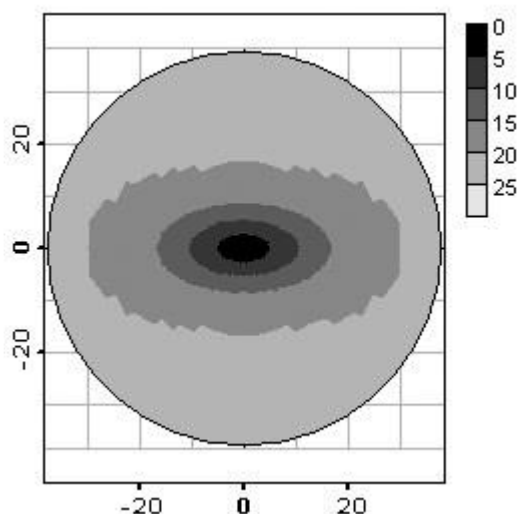


Рис. 3.10 – Геометрическая анизотропия: вариограммная роза

Примеры вариограммы по направлениям для случая геометрической анизотропии в горизонтальном направлении (90°) представлены на рис. 3.11.

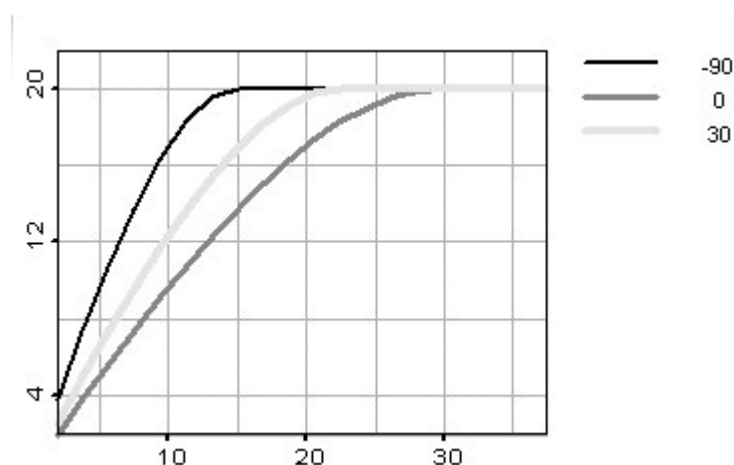


Рис. 3.11 – Геометрическая анизотропия: вариограммы по направлениям

Негеометрическая анизотропия радиуса (non-geometric range anisotropy). В этом случае изолинии на вариограммной

поверхности или вариограммной розе образуют форму, отличную от эллипса (пример на рис. 3.12). При моделировании такого рода вариограмм удобнее пользоваться гнездовыми структурами.

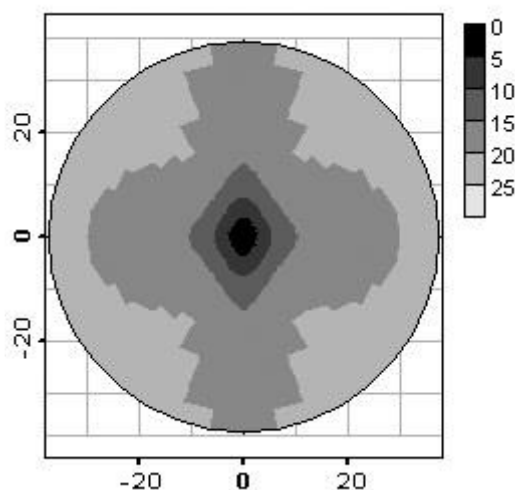


Рис. 3.12 – Негеометрическая (зонная) анизотропия радиуса:
вариограммная роза

Пример, иллюстрирующий негеометрическую анизотропию, представлен на рис. 3.13: вариограммы по четырем направлениям.

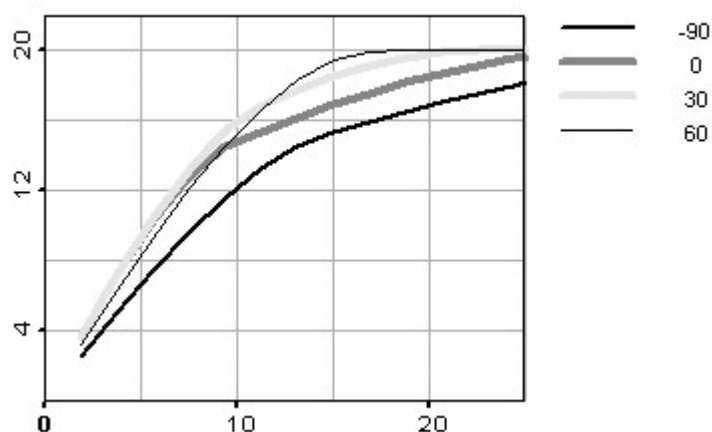


Рис. 3.13 – Негеометрическая (зонная) анизотропия радиуса:
Вариограммы по направлениям

Другой случай зонной анизотропии — анизотропия плато (sill anisotropy). Здесь для различных направлений различаются значения плато (рис. 3.14).

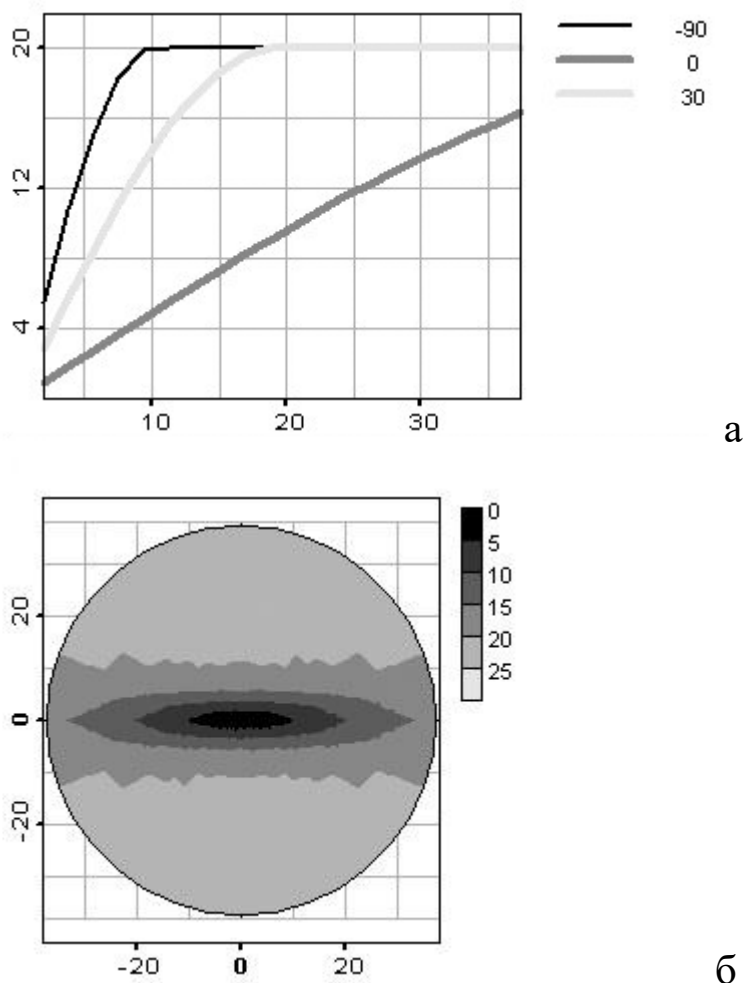


Рис. 3.14 – Пример зонной анизотропии плато:
а — вариограммы по направлениям; б — вариограммная роза

В случае использования гнездовой структуры для моделирования анизотропной вариограммы необходимо строить ее так, чтобы все i -е элементы (для всех направлений) имели одинаковую модель (сферическую, гауссову и т. п.) и одинаковое значение плато, но радиусы могут быть любые, в том числе и такие большие, чтобы скрывать анизотропию плато. В гнездовых структурах по всем направлениям должно быть одинаковое число элементов.

3.2. Методы подбора моделей вариограммы

Рассмотрим методы построения оценок параметров вариограммной модели [17, 18].

Обозначим через $2\gamma(h; \theta)$ модель вариограммы, где θ – вектор неизвестных параметров. Предположим, что в точках $h = 1, \dots, k$, вычислены оценки $2\hat{\gamma}(h)$ вариограммы.

➤ **визуальный метод**

➤ **МНК:** $Q(\theta) = \sum_{h=1}^k (2\hat{\gamma}(h) - 2\gamma(h, \theta))^2 \rightarrow \min_{\theta}$

➤ **обобщенный МНК:** определим матрицу ковариаций

$$\Sigma(\theta) = \begin{pmatrix} D\{2\hat{\gamma}(1)\} & \text{cov}\{2\hat{\gamma}(1), 2\hat{\gamma}(2)\} & \cdots & \text{cov}\{2\hat{\gamma}(1), 2\hat{\gamma}(k)\} \\ \text{cov}\{2\hat{\gamma}(2), 2\hat{\gamma}(1)\} & D\{2\hat{\gamma}(2)\} & \cdots & \text{cov}\{2\hat{\gamma}(2), 2\hat{\gamma}(k)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}\{2\hat{\gamma}(k), 2\hat{\gamma}(1)\} & \text{cov}\{2\hat{\gamma}(k), 2\hat{\gamma}(2)\} & \cdots & D\{2\hat{\gamma}(k)\} \end{pmatrix}$$

$$2\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} 2\hat{\gamma}(1) \\ 2\hat{\gamma}(2) \\ \vdots \\ 2\hat{\gamma}(k) \end{pmatrix} \quad 2\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 2\gamma(1; \theta) \\ 2\gamma(2; \theta) \\ \vdots \\ 2\gamma(k; \theta) \end{pmatrix}$$

$$Q^0(\theta) = (2\hat{\gamma} - 2\gamma(\theta))' \Sigma(\theta)^{-1} (2\hat{\gamma} - 2\gamma(\theta)) \rightarrow \min_{\theta}.$$

➤ **взвешенный МНК:** $Q^*(\theta) = \sum_{h=1}^k \frac{(2\hat{\gamma}(h) - 2\gamma(h, \theta))^2}{D\{2\hat{\gamma}(h)\}} \rightarrow \min_{\theta}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
2. *Буллинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 408 с.
3. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 320 с.
4. *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. – М.: Издательство иностранной литературы, 1956. – 608 с.
5. *Журбенко И.Г.* Анализ стационарных и однородных случайных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 240 с.
6. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 400 с.
7. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972. – 375 с.
8. *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов. – М.: Наука, 1964. – 68с.
9. *Леонов В.П., Ширяев А.Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. // Теория вероятностей и ее применения. – 1960. – Т. 5, № 4. – С. 460-464.
10. *Леонов В.П., Ширяев А.Н.* К технике вычисления семиинвариантов // Теория вероятностей и ее приложения. – 1959. – Т. 4, № 3. – С. 343-355.
11. *Лозв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд. иностр. литературы, 1962. – 719 с.
12. *Матерон Ж.* Основы прикладной геостатистики. – М.: Мир, 1968. – 408 с.
13. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности: В 2 т. – М.: Наука, 1967. – Т.2. – 720 с.
14. *Труш Н.Н.* Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. – Мн.: Белгосуниверситет, 1999. – 218 с.
15. *Цеховая Т.В.* Статистические свойства оценок вариограммы: дис. ... кандидата физико-математических наук : 01.01.05 : защищена 16.05.2003 : утверждена 08.07.2003 / Т.В. Цеховая. – Минск, 2003.
16. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
17. *Cressie N.* Statistics for Spatial Data. – New York. – Wiley, 1991. – 900 p.
18. *Демьянов В.В., Савельева Е.А.* Геостатистика: теория и практика. М.: Наука, 2010. – 327 с.

3.3. Кригинг

Глубокий анализ и моделирование данных требуют применения комплексного подхода и различных методов, характеризующих ту или иную особенность явления.

Приведем ряд задач, для решения которых необходимо применение комплекса исследований с помощью методов геостатистики — статистики пространственно распределенной информации:

- оценить значение в точке, где измерение не проводилось;
- нарисовать карту, построить изолинии;
- оценить ошибку интерполяционной оценки;
- оценить значение переменной, по которой мало измерений, используя значения другой коррелированной с ней переменной, по которой проведено много измерений;
- определить вероятность того, что значения наблюдаемой переменной превысят заданный уровень в интересующей нас области;
- получить набор равновероятных стохастических реализаций распределения наблюдаемой переменной.

Заметим, что две последние задачи относятся к вероятностному анализу и связаны с оценками риска.

Традиционные детерминированные методы, широко используемые для пространственной интерполяции, позволяют решать только первую и вторую задачи из приведенного выше списка. Геостатистическая теория позволяет решать весь

набор задач, в том числе оценить неопределенность оценки и описать ее вариабельность.

К анализу пространственно распределенных данных существует несколько подходов, которые можно условно разделить на три группы:

- **детерминированные модели** (интерполяторы) — линейная интерполяция на основе триангуляции, метод обратных расстояний в степени, мульти-квадратичные уравнения и т. п.;
- **геостатистика** — модели, базирующиеся на статистической интерпретации данных;
- **алгоритмы, основанные на обучении** — искусственные нейронные сети, генетические алгоритмы, статистическая теория обучения машин векторов поддержки.

Это деление до известной степени условно. Так, геостатистические модели можно изложить в детерминированной формулировке, и наоборот, некоторые детерминированные модели имеют близкие статистические аналоги. В свою очередь, статистический подход, на котором базируется геостатистика, включает регрессионные модели пространственных интерполяций (предсказаний) и методы стохастического моделирования, цели и задачи которых различны. Алгоритмы, основанные на обучении (или искусственный интеллект), также имеют статистическую интерпретацию.

Детерминированные методы традиционно широко используются в различных областях прикладной и научной деятельности. Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся

алгоритмы: *линейные модели, полиномиальные модели и модели базисных функций*, и отметим особенности их использования.

Детерминированные методы интерполяции предполагают наличие заданной аналитической зависимости между значениями функции в пространстве. Эти методы популярны из-за простоты вычисления оценки по заданной параметрической формуле. Наиболее широко применяемые «формульные» зависимости: обратная пропорциональность расстоянию (или его степени), сплайны, полиномы различных степеней и пр. Однако детерминированные интерполяции имеют ряд серьезных недостатков: они не дают возможности характеризовать качество оценки, настройка параметров часто не предполагается или производится скрыто от пользователя, многие методы пренебрегают пространственной корреляцией и т. п.

Современная геостатистика — это широкий спектр статистических моделей и инструментов для анализа, обработки и представления пространственно распределенной информации.

Геостатистика возникла в начале 1960-х гг. как теория региональных переменных, сформулированная Ж. Матероном (Matheron) для анализа данных о природных ископаемых (горнорудное дело). Он организовал Центр геостатистики в Фонтенбло. Этот центр внес заметный вклад в теоретические исследования и их практические применения.

Независимо от Ж. Матерона и практически в то же время Л. С. Гандин сформулировал теорию оптимальной интерполяции

для объективного анализа метеополей. В этой теории также приведены основы теории геостатистической. К сожалению, последующие работы российских ученых в этой области не нашли в то время широкой поддержки [Вистелиус, 1984, 1986].

Современная геостатистика — это быстро развивающаяся область прикладной статистики с огромным набором методов, линейных и нелинейных, параметрических и непараметрических моделей для анализа, обработки и представления пространственной информации. Спектр ее применения весьма широк — от традиционного использования в области добычи ископаемых до современных приложений в экономике, финансах, окружающей среде, эпидемиологии.

Одним из важных составляющих традиционной геостатистики является пространственный корреляционный анализ, или *вариография*. Под вариографией понимают анализ и моделирование пространственной корреляционной структуры данных. Несмотря на кажущуюся простоту исходных формул, вариография позволяет сделать глубокие выводы о статистической природе данных и структуре адекватных моделей.

Основные этапы анализа и моделирования пространственных данных:

- ✓ статистический анализ данных;
- ✓ исследование и моделирование пространственной корреляции;
- ✓ моделирование данных (построение оценок);

Для получения наилучшей в статистическом смысле пространственной оценки используются модели из семейства кригинга (kriging) — наилучшего линейного несмещенного оценителя (best linear unbiased estimator — BLUE).

Кригинг является «наилучшим» оценителем в статистическом смысле в классе линейных интерполяторов — его оценка обладает минимальной вариацией ошибки. Важное свойство кригинга — точное воспроизведение значений измерений в имеющихся точках (точный оценитель).

В отличие от многочисленных детерминированных методов, оценка кригинга сопровождается оценкой ошибки интерполяции в каждой точке. Полученная ошибка позволяет охарактеризовать неопределенность полученной оценки данных при помощи доверительных интервалов или «толстых» изолиний.

Присутствие пространственного тренда приводит к невозможности использовать гипотезу о стационарности в каком-либо виде (второго порядка и др.). Следовательно, традиционные геостатистические модели кригинга не могут быть использованы напрямую для интерполяции данных.

Однако существуют методы учета пространственного тренда, которые позволяют адаптировать и все-таки получать оценку кригингом. Для этого следует выделить составляющую пространственного тренда при помощи отдельной модели. В качестве моделей тренда широко используются полиномы, сплайны либо более сложные нелинейные модели.

Приведем список геостатистических моделей, позволяющих оценивать данные в присутствии пространственного тренда:

1. *Кригинг с трендом* (или универсальный — universal — кригинг) использует модель тренда как линейную комбинацию набора базисных функций. Универсальный кригинг прост в применении, не требует дополнительных настроек параметров, если правильно выбраны базисные функции. Их выбор и представляет наибольшую трудность. Чаще всего используется полиномиальная модель (линейная комбинация полиномов). Но такая жесткая модель не всегда может адекватно описать сложную многомасштабную пространственную структуру тренда.

2. *Кригинг с внешним дрейфом* (external drift) использует дополнительные данные измерений коррелированной переменной в качестве модели тренда. Он позволяет достаточно точно оценить тренд при наличии данных дополнительной тренд-переменной во всех точках оценивания. Кригинг с внешним дрейфом часто используется в климатических приложениях, где пространственный тренд наблюдаемой переменной (например, температуры) часто связан с высотой. В этом случае в качестве модели тренда используется модель высот.

3. *Локально меняющееся среднее* (locally varying mean) использует в качестве модели тренда локальное среднее значение, которое может быть получено при помощи метода движущегося окна.

4. *Кригинг невязок с движущимся окном* (moving window residual kriging) похож на модель с локально меняющимся средним. Но он вычислительно гораздо более сложен, поскольку предполагает подбор модели тренда и модели вариограммы в каждой локальной окрестности (окне).

5. *Внутренняя случайная функция порядка k* (intrinsic random function of order k — IRF k) использует моменты более высокого порядка, чем второй, вместе с вариограммой для моделирования трендов.

6. *Моделирование нелинейного тренда на разных масштабах при помощи искусственной нейронной сети (ИНС)*. Кригинг невязок искусственной нейронной сети (neural network residual kriging — NNRK) был предложен в 1996 г. [Kanevski et al.]. На его основе было разработано целое семейство методов с применением различных типов ИНС.

Дальнейший материал посвящен семейству моделей кригинга для анализа одной пространственной переменной.

Кригинг — базовая интерполяционная модель геостатистики. Он является основой всех методов, связанных с геостатистикой, — интерполяции, вероятностного картирования, стохастического моделирования. Термин «кригинг» служит для обозначения семейства алгоритмов линейной пространственной регрессии. Он происходит от фамилии инженера Д. Крига, который первым применил интерполятор на основе модели пространственной корреляции данных для анализа золотых месторождений Южной Африки. Л. С. Гандин независимо от

Д. Крига применил аналогичный метод для объективного анализа метеополей.

Выделяют несколько вариантов моделей кригинга (*простой, обычный, универсальный, логнормальный, невязок* и др.), которые различаются принятыми предположениями и используемой информацией о моделируемой переменной.

Пусть дан случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, значения которого известны в точках t_1, \dots, t_n и $X^*(t_0)$ — оценка случайного процесса $X(t)$ в точке t_0 .

Основной геостатистической моделью, которая в том или ином виде используется во всех методах геостатистики, является кригинг (kriging) — линейный интерполятор, использующий для получения оценки значения функции в некоторой точке пространства t_0 экспериментально измеренные значения этой функции в других точках:

$$X^*(t_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t_0) X(t_i). \quad (3.1)$$

Для определения весов $\lambda_i(t_0)$ могут быть использованы различные детерминистические методы, например веса могут браться обратно пропорциональными расстоянию от измеренной точки до оцениваемой или в соответствии с каким-либо другим предположением о природе связей в данных.

Однако все эти методы пренебрегают использованием информации о структуре внутренней корреляции пространственных данных.

Следующим критерием при построении модели является условие несмещенности оценки, что эквивалентно условию

$$E \{ X^*(t_0) - X(t_0) \} = 0, \quad (3.2)$$

где $X(t_0)$ — истинное (неизвестное) значение оцениваемой функции в точке t_0 . Иными словами, ошибки интерполяции должны иметь в каждой точке среднее, равное нулю.

Еще одно условие, которое мы хотим наложить, — оптимальность интерполяции в смысле минимизации вариации ошибки оценки, т. е. веса λ_i линейной регрессии в уравнении (3.1) должны быть выбраны так, чтобы минимизировать значение вариации ошибки оценки:

$$D\{X^*(t_0) - X(t_0)\} = E\{X^*(t_0) - X(t_0)\}^2. \quad (3.3)$$

Таким образом, кригинг является наилучшим (в смысле минимума вариации оценки) линейным и несмещенным оценщиком (the best linear unbiased estimator — BLUE). В процессе поиска минимума вариации (3.3) ключевую роль играет использование модели вариограммы исходных данных. В результате поиска весовых коэффициентов для получения оценки, удовлетворяющей всем перечисленным условиям, удастся оценить и значение вариации (3.3), которое может интерпретироваться как описание точности кригинговой оценки.

Тип оценки зависит от модели $X(t)$. Предположим, что $X(t)$ можно разложить на две компоненты — детерминированный тренд $l(t)$ и случайную невязку $Y(t)$:

$$X(t) = l(t) + Y(t). \quad (3.4)$$

Компонента $Y(t)$ представляет собой стационарный в широком смысле СП с нулевым математическим ожиданием $m_Y(t)$ и ковариационной функцией $R_Y(t)$.

Математическое ожидание $X(t)$, таким образом, будет равно значению тренда: $E\{X(t)\} = l(t)$.

Далее рассмотрим разновидности кригинга для моделирования одной переменной, которые определяются предположением о виде тренда.

Все методы семейства кригинга используют одну и ту же целевую функцию для минимизации, а именно вариацию ошибки оценки $\sigma_E^2(t)$ при дополнительном условии несмещенности оценки, иными словами, вариация

$$\sigma_E^2(t) = D\{X^*(t) - X(t)\} \quad (3.5)$$

минимизируется при ограничении

$$E\{X^*(t) - X(t)\} = 0. \quad (3.6)$$

3.3.1. Простой кригинг

Простой кригинг (simple kriging — SK) работает в предположении о стационарности в широком смысле СП $X(t)$. Кроме того, предполагается, что детерминированная компонента $l(t)$ в (3.4) известна и постоянна:

$$l(t) = l = \text{const}, \quad \forall t \in T.$$

Знание среднего значения l дает возможность сделать простое преобразование путем вычета постоянного тренда

$$Y(t) = X(t) - l \quad (3.7)$$

тогда оценка для случайного процесса $Y(t)$ будет иметь вид:

$$Y^*(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) Y(t_i), \quad (3.8)$$

автоматически получая несмещенность оценки. Так как $E\{Y(t)\} = 0$, то

$$E\{X^*(t) - X(t)\} = E\{Y^*(t) - Y(t)\} = E\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) Y(t_i) - Y(t)\right\} = 0.$$

Окончательная оценка простого кригинга из (3.7) и (3.8) имеет вид

$$X^*(t) = m + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) Y(t_i). \quad (3.9)$$

Теперь рассмотрим вариацию ошибки $\sigma_{SK}^2(t)$ для оценки функции $Y(t)$.

$$\begin{aligned} \sigma_{SK}^2(t) &= D\{Y^*(t) - Y(t)\} = E\{Y^*(t) - Y(t)\}^2 = \\ &= D\{Y^*(t)\} - 2 \operatorname{cov}\{Y^*(t), Y(t)\} + D\{Y(t)\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как $X(t)$ удовлетворяет стационарности в широком смысле, то этому условию удовлетворяет и $Y(t)$. Тогда все ко-вариации и дисперсии, входящие в (3.10) существуют.

$$\begin{aligned} D\{Y^*(t)\} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i(t) \lambda_j(t) \operatorname{cov}\{Y(t_i), Y(t_j)\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i(t) \lambda_j(t) R_Y(t_i, t_j), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$2 \operatorname{cov}\{Y^*(t), Y(t)\} = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) R_Y(t_i, t). \quad (3.12)$$

$$D\{Y(t)\} = D\{X(t)\} = \sigma_X^2. \quad (3.13)$$

В итоге получим значение дисперсии ошибки $\sigma_{SK}^2(t)$ для оценки $Y(t)$ как сумму (3.11), (3.12) и (3.13):

$$\begin{aligned} \sigma_{SK}^2(t) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i(t) \lambda_j(t) R_Y(t_i, t_j) - \\ & - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) R_Y(t_i, t) + \sigma_X^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Кригинг как наилучший метод оценивания должен иметь минимальную вариацию ошибки. Весовые коэффициенты $\lambda_i(t)$ в (3.8) подбираются так, чтобы они минимизировали дисперсию ошибки (3.14), т.е. чтобы производная от вариации по всем весам равнялась нулю. В результате дифференцирования получается система уравнений простого кригинга – линейная система из n уравнений с n неизвестными:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j(t) R_Y(t_i, t_j) = R_Y(t_i, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Система уравнений простого кригинга (3.15) имеет единственное решение, если матрица ковариаций несингулярна. Это условие выполнено при неотрицательной определенности матрицы ковариации и отсутствии среди набора исходных точек t_1, \dots, t_n пространственно совпадающих или очень близко

расположенных. Совпадающие или близкие точки формируют линейно зависимые строки матрицы ковариаций.

Система уравнений простого кригинга легко может быть переписана в терминах семивариограмм:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j(t)(\sigma_Y^2 - \gamma_Y(t_i, t_j)) = \sigma_Y^2 - \gamma_Y(t_i, t), \quad (3.16)$$

где $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2$, $i = 1, \dots, n$,

или

$$\sigma_X^2 \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) - \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \gamma_Y(t_i, t_j) = \sigma_X^2 - \gamma_Y(t_i, t),$$

$i = 1, \dots, n$.

Дисперсия ошибки (дисперсия *простого кригинга*) получается подстановкой (3.15) в формулу (3.14).

$$\begin{aligned} \sigma_{SK}^2(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i(t) \lambda_j(t) R_Y(t_i, t_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) R_Y(t_i, t) + \sigma_X^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j(t) R_Y(t_i, t_j) - 2 R_Y(t_i, t) \right) + \sigma_X^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) (R_Y(t_i, t) - 2 R_Y(t_i, t)) + \sigma_X^2 = \\ &= \sigma_X^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) R_Y(t_i, t) = \sigma_Y^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) R_Y(t_i, t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Дисперсия ошибки также может быть представлена в терминах семивариограмм:

$$\begin{aligned}\sigma_{SK}^2(t) &= \sigma_Y^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) R_Y(t_i, t) = \sigma_Y^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) (\sigma_Y^2 - \gamma_Y(t_i, t)) = \\ &= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \gamma_Y(t_i, t).\end{aligned}$$

Простой кригинг обладает рядом свойств.

- Оценка простого кригинга является точной. Это означает, что если координата оцениваемой точки t_0 совпадает с какой-то координатой из исходного набора данных t_1, \dots, t_n , то полученная оценка будет также совпадать с исходным значением: $X^*(t_0) = X(t_k)$. Это легко доказать, пользуясь единственностью решения системы уравнений простого кригинга.

- Веса простого кригинга не зависят от значений исходного набора данных, а зависят только от пространственной корреляции поля, построенного на основе данных. Таким образом, если есть несколько наборов исходных данных, измеренных в одних и тех же точках и описывающихся одинаковыми (или мультипликативно связанными) функциями ковариации, то для вычисления оценки простого кригинга в общей точке t_0 систему уравнений простого кригинга достаточно решить один раз, а потом использовать полученные веса для всех переменных.

- Оценка простого кригинга является сглаженной по сравнению с распределением исходных данных. Как видно из (3.17), вариация оценки простого кригинга $\sigma_{SK}^2(t)$ меньше значения дисперсии исходных данных σ_X^2 .

Основным недостатком простого кригинга является предположение о знании среднего. Использование в качестве среднего его статистической оценки (математического ожидания) делает веса зависимыми от значений исходного набора данных. Кроме того, оценка математического ожидания может оказаться искаженной, смещенной и т. п., например при высокой кластерности исходной сети мониторинга. Поэтому простой кригинг редко применяется как самостоятельный метод оценивания, обычно его использование связано с искусственными комбинациями, где среднее известно вследствие предварительных манипуляций с исходными данными.