

ТЕОРИЯ РАСПИСАНИЙ

Виктор Васильевич Лепин

ТЕОРИЯ РАСПИСАНИЙ

- Теория расписаний является одним из разделов исследования операций.

ТЕОРИЯ РАСПИСАНИЙ

- Теория расписаний является одним из разделов исследования операций.
- Данное направление в науке, берет свое начало с известной работы Генри Гантта 1903 г., предложившего то, что сегодня называют диаграммами Гантта, которые встречаются во многих работах по теории расписаний. Термин “теория расписаний” предложил Р. Беллман в 1956 году.

ТЕОРИЯ РАСПИСАНИЙ

- Теория расписаний является одним из разделов исследования операций.
- Данное направление в науке, берет свое начало с известной работы Генри Гантта 1903 г., предложившего то, что сегодня называют диаграммами Гантта, которые встречаются во многих работах по теории расписаний. Термин “теория расписаний” предложил Р. Беллман в 1956 году.
- Подавляющее большинство исследованных задач теории расписаний являются NP-трудными. Несмотря на это, практика требует решения таких задач.

ТЕОРИЯ РАСПИСАНИЙ

- Теория расписаний является одним из разделов исследования операций.
- Данное направление в науке, берет свое начало с известной работы Генри Гантта 1903 г., предложившего то, что сегодня называют диаграммами Гантта, которые встречаются во многих работах по теории расписаний. Термин “теория расписаний” предложил Р. Беллман в 1956 году.
- Подавляющее большинство исследованных задач теории расписаний являются NP-трудными. Несмотря на это, практика требует решения таких задач.
- *Теория расписаний* — это раздел исследования операций, в котором строятся и анализируются математические модели календарного планирования (т.е. упорядочивания во времени) различных целенаправленных действий с учетом целевой функции и различных ограничений.

Задачи составления расписаний возникают в частности:

- На производстве, когда нужно упорядочить отдельные операции по исполнителям (цеха, станки) и по времени;

Задачи составления расписаний возникают в частности:

- На производстве, когда нужно упорядочить отдельные операции по исполнителям (цеха, станки) и по времени;
- на транспорте при составлении расписания движения поездов, самолетов, общественного городского транспорта; при планировании занятий в учебных заведениях;

Задачи составления расписаний возникают в частности:

- На производстве, когда нужно упорядочить отдельные операции по исполнителям (цеха, станки) и по времени;
- на транспорте при составлении расписания движения поездов, самолетов, общественного городского транспорта; при планировании занятий в учебных заведениях;
- при планировании занятости персонала, например, дежурства врачей;

Задачи составления расписаний возникают в частности:

- На производстве, когда нужно упорядочить отдельные операции по исполнителям (цеха, станки) и по времени;
- на транспорте при составлении расписания движения поездов, самолетов, общественного городского транспорта; при планировании занятий в учебных заведениях;
- при планировании занятости персонала, например, дежурства врачей;
- при выполнении сложных продолжительных проектов строительства зданий, кораблей и т.п.;

Задачи составления расписаний возникают в частности:

- На производстве, когда нужно упорядочить отдельные операции по исполнителям (цеха, станки) и по времени;
- на транспорте при составлении расписания движения поездов, самолетов, общественного городского транспорта; при планировании занятий в учебных заведениях;
- при планировании занятости персонала, например, дежурства врачей;
- при выполнении сложных продолжительных проектов строительства зданий, кораблей и т.п.;
- при планировании проведения спортивных мероприятий;

Задачи составления расписаний возникают в частности:

- На производстве, когда нужно упорядочить отдельные операции по исполнителям (цеха, станки) и по времени;
- на транспорте при составлении расписания движения поездов, самолетов, общественного городского транспорта; при планировании занятий в учебных заведениях;
- при планировании занятости персонала, например, дежурства врачей;
- при выполнении сложных продолжительных проектов строительства зданий, кораблей и т.п.;
- при планировании проведения спортивных мероприятий;
- в компьютерных сетях при планировании очередности передачи пакетов информации и т.д.

Задачи ТР являются оптимизационными

Содержательно многие задачи ТР являются оптимизационными, т.е. состоят в выборе (нахождении) среди множества допустимых расписаний (расписаний, допускаемых условиями задачи) тех решений, на которых достигается “оптимальное” значение целевой функции.

По типу искомого решения:

- *Задачи упорядочивания.* В этих задачах уже задано распределение работ по исполнителям, а также определены все параметры работ (продолжительность выполнения, время поступления и т.д.). Необходимо составить расписание (или порядок) выполнения работ каждым исполнителем;

По типу искомого решения:

- *Задачи упорядочивания.* В этих задачах уже задано распределение работ по исполнителям, а также определены все параметры работ (продолжительность выполнения, время поступления и т.д.). Необходимо составить расписание (или порядок) выполнения работ каждым исполнителем;
- *Задачи согласования.* Основное внимание в этих задачах уделяется выбору продолжительности выполнения работ, времени поступления и другим параметрам;

По типу искомого решения:

- *Задачи упорядочивания.* В этих задачах уже задано распределение работ по исполнителям, а также определены все параметры работ (продолжительность выполнения, время поступления и т.д.). Необходимо составить расписание (или порядок) выполнения работ каждым исполнителем;
- *Задачи согласования.* Основное внимание в этих задачах уделяется выбору продолжительности выполнения работ, времени поступления и другим параметрам;
- *Задачи распределения* подразумевают поиск оптимального распределения работ по исполнителям.

По типу целевой функции:

- *Задачи с суммарными критериями оптимизации.*
Например, необходимо минимизировать суммарное значение моментов окончания обслуживания работ $\sum_{i=1}^n C_i$.

По типу целевой функции:

- *Задачи с суммарными критериями оптимизации.*
Например, необходимо минимизировать суммарное значение моментов окончания обслуживания работ $\sum_{i=1}^n C_i$.
- *Задачи с $\min\max$ (минимаксными) критериями оптимизации.* Отличие этих задач от задач с суммарными критериями заключается в том, что нужно минимизировать не сумму некоторых значений, а лишь максимальное из них. Например, если в упомянутой задаче необходимо минимизировать максимальное значение C_{\max} , где $C_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_j C_j$, то мы получим одну из тривиальных задач этого класса;

По типу целевой функции:

- *Задачи с суммарными критериями оптимизации.*
Например, необходимо минимизировать суммарное значение моментов окончания обслуживания работ $\sum_{i=1}^n C_i$.
- *Задачи с $\min\max$ (минимаксными) критериями оптимизации.* Отличие этих задач от задач с суммарными критериями заключается в том, что нужно минимизировать не сумму некоторых значений, а лишь максимальное из них. Например, если в упомянутой задаче необходимо минимизировать максимальное значение C_{\max} , где $C_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_j C_j$, то мы получим одну из тривиальных задач этого класса;
- *Многокритериальные задачи оптимизации.*

По типу целевой функции:

- *Задачи с суммарными критериями оптимизации.*
Например, необходимо минимизировать суммарное значение моментов окончания обслуживания работ $\sum_{i=1}^n C_i$.
- *Задачи с $\min\max$ (минимаксными) критериями оптимизации.* Отличие этих задач от задач с суммарными критериями заключается в том, что нужно минимизировать не сумму некоторых значений, а лишь максимальное из них. Например, если в упомянутой задаче необходимо минимизировать максимальное значение C_{\max} , где $C_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_j C_j$, то мы получим одну из тривиальных задач этого класса;
- *Многокритериальные задачи оптимизации.*
- *Задачи на построение допустимого расписания.*

По способу задания входной информации:

- *Детерминированные задачи (off-line)*. Для таких задач характерно, что все входные данные задачи точно известны, т.е. даны значения всех параметров до начала ее решения;

По способу задания входной информации:

- *Детерминированные задачи (off-line)*. Для таких задач характерно, что все входные данные задачи точно известны, т.е. даны значения всех параметров до начала ее решения;
- *Динамические задачи (on-line)*. Для данных задач расписания строятся в режиме реального времени, т.е. перед началом решения задачи мы не знаем значения всех параметров. Расписание строится по частям по мере поступления новой информации. При этом в любой момент может быть понадобится ответ о качестве построенного “частичного” расписания.

По разделу ТР.

В рамках ТР принято выделять следующие разделы:

- Сетевое планирование или построение расписания для проекта, Project scheduling (PS);

По разделу ТР.

В рамках ТР принято выделять следующие разделы:

- Сетевое планирование или построение расписания для проекта, Project scheduling (PS);
- Календарное планирование или построение расписания для приборов, Machine scheduling (MS);

СПОСОБЫ КЛАССИФИКАЦИИ ЗАДАЧ ТР

По разделу ТР.

В рамках ТР принято выделять следующие разделы:

- Сетевое планирование или построение расписания для проекта, Project scheduling (PS);
- Календарное планирование или построение расписания для приборов, Machine scheduling (MS);
- Составление временных таблиц (Time Tabling);

По разделу ТР.

В рамках ТР принято выделять следующие разделы:

- Сетевое планирование или построение расписания для проекта, Project scheduling (PS);
- Календарное планирование или построение расписания для приборов, Machine scheduling (MS);
- Составление временных таблиц (Time Tabling);
- Доставка товаров в магазины (Shop-Floor Scheduling);

По разделу ТР.

В рамка ТР принято выделять следующие разделы:

- Сетевое планирование или построение расписания для проекта, Project scheduling (PS);
- Календарное планирование или построение расписания для приборов, Machine scheduling (MS);
- Составление временных таблиц (Time Tabling);
- Доставка товаров в магазины (Shop-Floor Scheduling);
- Составление расписаний движения транспортных средств (Transport Scheduling), Циклические расписания для транспортных средств (Vehicle Routing);

По разделу ТР.

В рамка ТР принято выделять следующие разделы:

- Сетевое планирование или построение расписания для проекта, Project scheduling (PS);
- Календарное планирование или построение расписания для приборов, Machine scheduling (MS);
- Составление временных таблиц (Time Tabling);
- Доставка товаров в магазины (Shop-Floor Scheduling);
- Составление расписаний движения транспортных средств (Transport Scheduling), Циклические расписания для транспортных средств (Vehicle Routing);
- Составление расписаний спортивных мероприятий (Sports scheduling).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТР

Параметры требований обозначаются следующим образом:

- r_j — *момент поступления требования на обслуживание.*
Данный параметр определяет момент времени, начиная с которого требование может быть поставлено на обслуживание, но не обязательно его обслуживание начнется в этот момент;

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТР

Параметры требований обозначаются следующим образом:

- r_j — *момент поступления требования на обслуживание.*
Данный параметр определяет момент времени, начиная с которого требование может быть поставлено на обслуживание, но не обязательно его обслуживание начнется в этот момент;
- p_j — *продолжительность обслуживания требования.*
Параметр определяет время, которое необходимо для обслуживания требования;

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТР

Параметры требований обозначаются следующим образом:

- r_j — *момент поступления требования на обслуживание.*
Данный параметр определяет момент времени, начиная с которого требование может быть поставлено на обслуживание, но не обязательно его обслуживание начнется в этот момент;
- p_j — *продолжительность обслуживания требования.*
Параметр определяет время, которое необходимо для обслуживания требования;
- d_j — *директивный срок завершения обслуживания.* Данный параметр определяет момент времени, к которому желательно завершить обслуживание требования. Необходимо различать желательный и предельный моменты завершения обслуживания (англ. – due date d_j и deadline D_j , соответственно). Желательный момент завершения обслуживания можно нарушать, хотя при этом накладывается штраф, который влияет на значение целевой функции задачи;

- D_j — *предельный срок завершения обслуживания.*

Предельный срок завершения нарушать нельзя, и любое расписание, в котором есть завершающееся после своего предельного момента требование, является недопустимым. Примером директивных сроков d_j (due date) и D_j (deadline) могут служить: момент окончания ужина (который можно и нарушить) и день проведения экзамена (который нарушать крайне нежелательно);

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТР

- D_j — *предельный срок завершения обслуживания*.
Предельный срок завершения нарушать нельзя, и любое расписание, в котором есть завершающееся после своего предельного момента требование, является недопустимым. Примером директивных сроков d_j (due date) и D_j (deadline) могут служить: момент окончания ужина (который можно и нарушить) и день проведения экзамена (который нарушать крайне нежелательно);
- w_j — *вес требования*. Данный параметр характеризует “важность”, “значимость” требования и учитывается в целевой функции задачи при подсчете штрафа, который накладывается на обслуживание требования.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТР

В системе кодирования задач ТР можно встретить следующие обозначения:

- `pmtn` — данная запись означает, что допустимы прерывания в обслуживании требований. То есть можно прервать обслуживание требования, обслужить другое требование и после продолжить обслуживание прерванного;

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТР

В системе кодирования задач ТР можно встретить следующие обозначения:

- `pmtn` — данная запись означает, что допустимы прерывания в обслуживании требований. То есть можно прервать обслуживание требования, обслужить другое требование и после продолжить обслуживание прерванного;
- `rges` — означает, что между требованиями заданы отношения предшествования. Эта же запись может выглядеть как `tree`, `out-tree`, `in-tree`, `chain`, которые означают, что граф отношений предшествования имеет вид дерева или цепочки;

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТР

В системе кодирования задач ТР можно встретить следующие обозначения:

- `pmtn` — данная запись означает, что допустимы прерывания в обслуживании требований. То есть можно прервать обслуживание требования, обслужить другое требование и после продолжить обслуживание прерванного;
- `pres` — означает, что между требованиями заданы отношения предшествования. Эта же запись может выглядеть как `tree`, `out-tree`, `in-tree`, `chain`, которые означают, что граф отношений предшествования имеет вид дерева или цепочки;
- `batch` — свидетельствует о том, что рассматривается задача `batching`, когда требования объединены в группы.

ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТР

В теории расписаний различают следующие основные типы штрафных функций:

- C_j — *момент завершения*, равный моменту окончания обслуживания требования j ;

ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТР

В теории расписаний различают следующие основные типы штрафных функций:

- C_j — *момент завершения*, равный моменту окончания обслуживания требования j ;
- L_j — *временное смещение*, равное величине $C_j - d_j$;

ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТР

В теории расписаний различают следующие основные типы штрафных функций:

- C_j — *момент завершения*, равный моменту окончания обслуживания требования j ;
- L_j — *временное смещение*, равное величине $C_j - d_j$;
- T_j — *запаздывание*, равное величине $\max\{0, C_j - d_j\}$;

ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТР

В теории расписаний различают следующие основные типы штрафных функций:

- C_j — *момент завершения*, равный моменту окончания обслуживания требования j ;
- L_j — *временное смещение*, равное величине $C_j - d_j$;
- T_j — *запаздывание*, равное величине $\max\{0, C_j - d_j\}$;
- E_j — *опережение*, равное величине $\max\{0, d_j - C_j\}$;

ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТР

В теории расписаний различают следующие основные типы штрафных функций:

- C_j — *момент завершения*, равный моменту окончания обслуживания требования j ;
- L_j — *временное смещение*, равное величине $C_j - d_j$;
- T_j — *запаздывание*, равное величине $\max\{0, C_j - d_j\}$;
- E_j — *опережение*, равное величине $\max\{0, d_j - C_j\}$;
- U_j — *требование запаздывает*, равно 0, если $C_j \leq d_j$, и 1, — в противном случае.

ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТР

В теории расписаний различают следующие основные типы штрафных функций:

- C_j — *момент завершения*, равный моменту окончания обслуживания требования j ;
- L_j — *временное смещение*, равное величине $C_j - d_j$;
- T_j — *запаздывание*, равное величине $\max\{0, C_j - d_j\}$;
- E_j — *опережение*, равное величине $\max\{0, d_j - C_j\}$;
- U_j — *требование запаздывает*, равно 0, если $C_j \leq d_j$, и 1, — в противном случае.

ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТР

В теории расписаний различают следующие основные типы штрафных функций:

- C_j — *момент завершения*, равный моменту окончания обслуживания требования j ;
- L_j — *временное смещение*, равное величине $C_j - d_j$;
- T_j — *запаздывание*, равное величине $\max\{0, C_j - d_j\}$;
- E_j — *опережение*, равное величине $\max\{0, d_j - C_j\}$;
- U_j — *требование запаздывает*, равно 0, если $C_j \leq d_j$, и 1, — в противном случае.

В задачах, когда задан *вес* требования w_j , указанные выше критерии называются *взвешенными*, а их значение вычисляется путем умножения исходного значения на коэффициент w_j . Например, *взвешенное временное запаздывание* $w_j T_j$ вычисляется как $w_j \cdot \max\{0, C_j - d_j\}$.

Можно выделить следующие критерии оптимальности:

Можно выделить следующие критерии оптимальности:

1. *минимаксные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой функцию максимума от значений штрафов требований.

Можно выделить следующие критерии оптимальности:

1. *минимаксные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой функцию максимума от значений штрафов требований.

Примеры, минимаксных критериев:

Можно выделить следующие критерии оптимальности:

1. *минимаксные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой функцию максимума от значений штрафов требований.

Примеры, минимаксных критериев:

- $C_{\max} \rightarrow \min$ — критерий минимизации максимального момента завершения требований, $C_{\max} = \max_{j \in N} C_j$.
Задачи с такой целевой функцией называют задачами на *быстродействие*, (makespan — в англоязычной литературе);

Можно выделить следующие критерии оптимальности:

1. *минимаксные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой функцию максимума от значений штрафов требований.

Примеры, минимаксных критериев:

- $C_{\max} \rightarrow \min$ — критерий минимизации максимального момента завершения требований, $C_{\max} = \max_{j \in N} C_j$.
Задачи с такой целевой функцией называют задачами на *быстродействие*, (makespan — в англоязычной литературе);
- $L_{\max} \rightarrow \min$ — критерий минимизации максимального временного смещения $L_{\max} = \max_{j \in N} L_j$.

2. *суммарные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой сумму значений штрафов требований.

2. *суммарные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой сумму значений штрафов требований.

Примеры суммарных критериев:

2. *суммарные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой сумму значений штрафов требований.

Примеры суммарных критериев:

- $\sum_{j \in N} C_j \rightarrow \min$ — критерий минимизации суммарного времени окончания обслуживания требований;

2. *суммарные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой сумму значений штрафов требований.

Примеры суммарных критериев:

- $\sum_{j \in N} C_j \rightarrow \min$ — критерий минимизации суммарного времени окончания обслуживания требований;
- $\sum_{j \in N} T_j \rightarrow \min$ — критерий минимизации суммарного запаздывания требований;

2. *суммарные критерии* — в задачах с такими критериями целевая функция представляет собой сумму значений штрафов требований.

Примеры суммарных критериев:

- $\sum_{j \in N} C_j \rightarrow \min$ — критерий минимизации суммарного времени окончания обслуживания требований;
- $\sum_{j \in N} T_j \rightarrow \min$ — критерий минимизации суммарного запаздывания требований;
- $\sum_{j \in N} U_j \rightarrow \min$ — критерий минимизации количества запаздывающих требований.

Построение расписания для проекта. Project scheduling (PS)

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ ПРОЕКТА С УЧЕТОМ ОТНОШЕНИЙ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА РЕСУРСЫ (RESOURCE-CONSTRAINED PROJECT SCHEDULING PROBLEM. RCPSP)

В задаче RCPSP необходимо построить оптимальное расписание проекта (выполнения работ проекта) с учетом сетевого графика (отношений предшествования между работами) и с учетом необходимых/доступных ресурсов, при котором будет оптимизирована некоторая целевая функция.

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ ПРОЕКТА С УЧЕТОМ ОТНОШЕНИЙ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА РЕСУРСЫ (RESOURCE-CONSTRAINED PROJECT SCHEDULING PROBLEM. RCPSP)

В задаче RCPSP необходимо построить оптимальное расписание проекта (выполнения работ проекта) с учетом сетевого графика (отношений предшествования между работами) и с учетом необходимых/доступных ресурсов, при котором будет оптимизирована некоторая целевая функция.

Самая популярная целевая функция — общее время выполнения проекта (makespan или C_{\max}).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ RCPSP

- Дано множество требований $N = \{1, \dots, n\}$ и K возобновляемых ресурсов $k = 1, \dots, K$. В каждый момент времени t доступно Q_k единиц ресурса k . Заданы продолжительности обслуживания $p_i \geq 0$ для каждого требования $i = 1, \dots, n$. Во время обслуживания требования i требуется $q_{ik} \leq Q_k$ единиц ресурса $k = 1, \dots, K$. После завершения обслуживания требования, освобожденные ресурсы в полном объеме могут быть мгновенно назначены на обслуживание других требований.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ RCPSP

- Дано множество требований $N = \{1, \dots, n\}$ и K возобновляемых ресурсов $k = 1, \dots, K$. В каждый момент времени t доступно Q_k единиц ресурса k . Заданы продолжительности обслуживания $p_i \geq 0$ для каждого требования $i = 1, \dots, n$. Во время обслуживания требования i требуется $q_{ik} \leq Q_k$ единиц ресурса $k = 1, \dots, K$. После завершения обслуживания требования, освобожденные ресурсы в полном объеме могут быть мгновенно назначены на обслуживание других требований.
- Между некоторыми парами требований заданы ограничения предшествования: $i \rightarrow j$ означает, что обслуживание требования j начинается не раньше окончания обслуживания требования i .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ RCPSP

- Дано множество требований $N = \{1, \dots, n\}$ и K возобновляемых ресурсов $k = 1, \dots, K$. В каждый момент времени t доступно Q_k единиц ресурса k . Заданы продолжительности обслуживания $p_i \geq 0$ для каждого требования $i = 1, \dots, n$. Во время обслуживания требования i требуется $q_{ik} \leq Q_k$ единиц ресурса $k = 1, \dots, K$. После завершения обслуживания требования, освобожденные ресурсы в полном объеме могут быть мгновенно назначены на обслуживание других требований.
- Между некоторыми парами требований заданы ограничения предшествования: $i \rightarrow j$ означает, что обслуживание требования j начинается не раньше окончания обслуживания требования i .
- Обслуживание требований начинается в момент времени $t = 0$. Прерывание при обслуживании требований запрещены.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ RCPSP

- Необходимо определить моменты времени начала обслуживания требований S_i , $i = 1, \dots, n$, так, чтобы минимизировать время выполнения всего проекта, т.е. минимизировать значение

$$C_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, n} \{C_i\},$$

где $C_i = S_i + p_i$. При этом должны быть соблюдены следующие ограничения:

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ RCPSP

- Необходимо определить моменты времени начала обслуживания требований S_i , $i = 1, \dots, n$, так, чтобы минимизировать время выполнения всего проекта, т.е. минимизировать значение

$$C_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, n} \{C_i\},$$

где $C_i = S_i + p_i$. При этом должны быть соблюдены следующие ограничения:

- 1 в каждый момент времени $t \in [0, C_{\max})$ должно выполняться $\sum_{i=1}^n q_{ik} \phi_i(t) \leq Q_k$, $k=1, \dots, K$, где $\phi_i(t) = 1$, если требование i обслуживается в момент времени t и $\phi_i(t) = 0$, в противном случае. То есть требования в процессе своего обслуживания должны быть полностью обеспечены ресурсами;

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ RCPSP

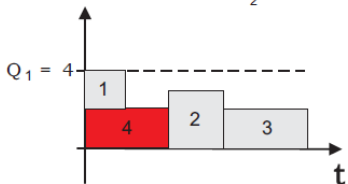
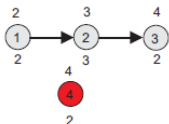
- Необходимо определить моменты времени начала обслуживания требований S_i , $i = 1, \dots, n$, так, чтобы минимизировать время выполнения всего проекта, т.е. минимизировать значение

$$C_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, n} \{C_i\},$$

где $C_i = S_i + p_i$. При этом должны быть соблюдены следующие ограничения:

- 1 в каждый момент времени $t \in [0, C_{\max})$ должно выполняться $\sum_{i=1}^n q_{ik} \phi_i(t) \leq Q_k$, $k=1, \dots, K$, где $\phi_i(t) = 1$, если требование i обслуживается в момент времени t и $\phi_i(t) = 0$, в противном случае. То есть требования в процессе своего обслуживания должны быть полностью обеспечены ресурсами;
- 2 не нарушаются отношения предшествования между требованиями, т.е. $S_i + p_i \leq S_j$, если $i \rightarrow j$ для $i, j \in N$.

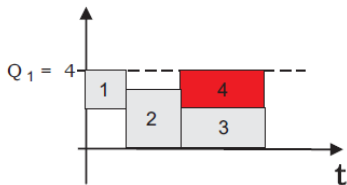
ПРИМЕР ЗАДАЧИ RCPSP



Допустимое расписание

$$C_{\max} = 4 + 3 + 4 = 11$$

p_i
①
 q_{i1}



Оптимальное расписание

$$C_{\max} = 2 + 3 + 4 = 9$$

- Значение C_{\max} в англоязычной литературе называется makespan. К сожалению, нам неизвестен адекватный перевод этого термина на русский язык.

ЗАМЕЧАНИЯ К ЗАДАЧЕ RCPSP

- Значение C_{\max} в англоязычной литературе называется makespan. К сожалению, нам неизвестен адекватный перевод этого термина на русский язык.
- Требования (работы) в такой задаче могут быть, например, такими: “выемка грунта”, “укладка фундамента” и т.п. В качестве необходимых ресурсов могут выступать: экскаваторы, разнорабочие, каменщики и т.д. Поэтому для выполнения работы “выемка грунта” может потребоваться одновременное участие 3-х экскаваторов, прораба и 7-ми разнорабочих.

ЗАМЕЧАНИЯ К ЗАДАЧЕ RCPSP

- Значение C_{\max} в англоязычной литературе называется makespan. К сожалению, нам неизвестен адекватный перевод этого термина на русский язык.
- Требования (работы) в такой задаче могут быть, например, такими: “выемка грунта”, “укладка фундамента” и т.п. В качестве необходимых ресурсов могут выступать: экскаваторы, разнорабочие, каменщики и т.д. Поэтому для выполнения работы “выемка грунта” может потребоваться одновременное участие 3-х экскаваторов, прораба и 7-ми разнорабочих.
- Необходимо заметить, что существует класс задач RCPSP с невозобновимыми ресурсами, например, деньги, горюче-смазочные материалы и т.п.

Построение расписания для приборов. Machine scheduling (MS)

MACHINE SCHEDULING (MS)

В отличие от Project Scheduling, где для выполнения одной работы требуется одновременное участие нескольких исполнителей, в задачах для приборов каждое требование обычно выполняется (обслуживается) единовременно только на одном приборе (машине).

MACHINE SCHEDULING (MS)

В отличие от Project Scheduling, где для выполнения одной работы требуется одновременное участие нескольких исполнителей, в задачах для приборов каждое требование обычно выполняется (обслуживается) единовременно только на одном приборе (машине).

Для задач MS исполнителями являются *Приборы, Машины* или *Процессоры*. Если не приводятся уточнения, эти три термина считаются эквивалентными.

MACHINE SCHEDULING (MS). Задачи для ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

- Для этих задач вместо одного прибора доступно m приборов M_1, M_2, \dots, M_m .

MACHINE SCHEDULING (MS). Задачи для ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

- Для этих задач вместо одного прибора доступно m приборов M_1, M_2, \dots, M_m .
- Между требованиями могут быть заданы отношения предшествования.

МACHINE SCHEDULING (MS). Задачи для ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

- Для этих задач вместо одного прибора доступно m приборов M_1, M_2, \dots, M_m .
- Между требованиями могут быть заданы отношения предшествования.
- Каждое требование может выполняться на любом приборе.

МАШИНЕ SCHEDULING (MS). Задачи для ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

- Для этих задач вместо одного прибора доступно m приборов M_1, M_2, \dots, M_m .
- Между требованиями могут быть заданы отношения предшествования.
- Каждое требование может выполняться на любом приборе.
- Если приборы идентичны, то время обслуживания p_j требования j не зависит от выбора машины, на которой требование будет обслужено.

МАШИНЕ SCHEDULING (MS). Задачи для ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

- Для этих задач вместо одного прибора доступно m приборов M_1, M_2, \dots, M_m .
- Между требованиями могут быть заданы отношения предшествования.
- Каждое требование может выполняться на любом приборе.
- Если приборы идентичны, то время обслуживания p_j требования j не зависит от выбора машины, на которой требование будет обслужено.

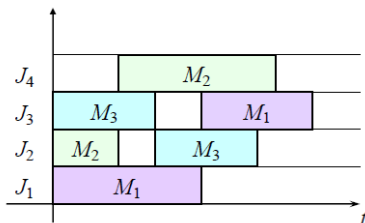
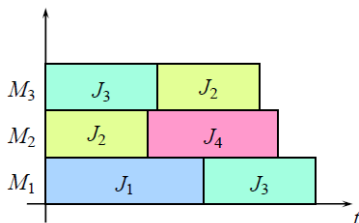
МАШИНЕ SCHEDULING (MS). Задачи для ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

- Для этих задач вместо одного прибора доступно m приборов M_1, M_2, \dots, M_m .
- Между требованиями могут быть заданы отношения предшествования.
- Каждое требование может выполняться на любом приборе.
- Если приборы идентичны, то время обслуживания p_j требования j не зависит от выбора машины, на которой требование будет обслужено.

Эта задача соответствует частному случаю задачи RCPSP, где $K = 1$, $Q_1 = m$ и необходимое количество ресурса $q_{j1} = 1$, для всех требований $j \in N$.

ДВА ТИПА ДИАГРАММ ГАНТТА

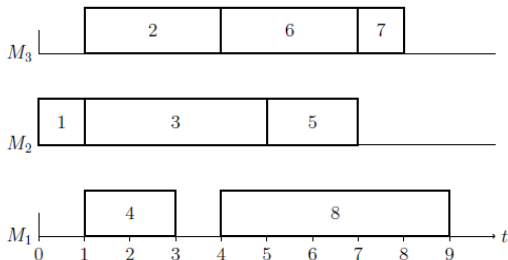
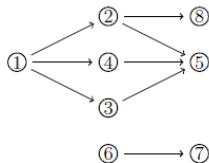
Одно решение, представленное на двух диаграммах



MACHINE SCHEDULING (MS). Задачи для ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ. ПРИМЕР

Дано $n = 8$ требований и $m = 3$ приборов, времена обслуживания $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 4, p_4 = 2, p_5 = 2, p_6 = 3, p_7 = 1, p_8 = 5$.

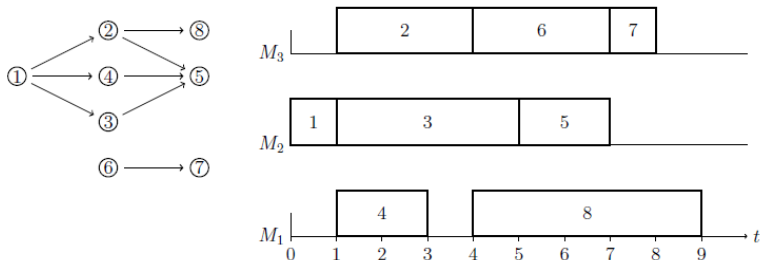
Допустимое расписание, для которого $C_{\max} = 9$, представлено на рисунке.



МАШИНЕ SCHEDULING (MS). ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ. ПРИМЕР

Дано $n = 8$ требований и $m = 3$ приборов, времена обслуживания $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 4, p_4 = 2, p_5 = 2, p_6 = 3, p_7 = 1, p_8 = 5$.

Допустимое расписание, для которого $C_{\max} = 9$, представлено на рисунке.



Отметим, что помимо идентичных приборов, могут рассматриваться приборы с разной производительностью. Для каждой работы j и прибора k может быть задано свое время p_{jk} обслуживания требования j на приборе k .

Задачи Цеха (Shop Scheduling)

Задачи Цеха (SHOP SCHEDULING)

- В этих задачах каждое требование состоит из операций, выполнение которых может назначаться только на определенные приборы (машины).

Задачи Цеха (SHOP SCHEDULING)

- В этих задачах каждое требование состоит из операций, выполнение которых может назначаться только на определенные приборы (машины).
- В общем случае дано m приборов M_1, M_2, \dots, M_m и каждое требование j содержит операции O_{1j}, \dots, O_{n_jj} .

Задачи Цеха (SHOP SCHEDULING)

- В этих задачах каждое требование состоит из операций, выполнение которых может назначаться только на определенные приборы (машины).
- В общем случае дано m приборов M_1, M_2, \dots, M_m и каждое требование j содержит операции $O_{1j}, \dots, O_{n_j j}$.
- Между операциями могут быть заданы отношения предшествования (маршрут обработки детали).

Задачи Цеха (SHOP SCHEDULING)

- В этих задачах каждое требование состоит из операций, выполнение которых может назначаться только на определенные приборы (машины).
- В общем случае дано m приборов M_1, M_2, \dots, M_m и каждое требование j содержит операции $O_{1j}, \dots, O_{n_j j}$.
- Между операциями могут быть заданы отношения предшествования (маршрут обработки детали).
- Две операции одного и того же требования не могут выполняться одновременно, и каждый прибор может выполнять одновременно только одну операцию.

Задачи Цеха (SHOP SCHEDULING)

- В этих задачах каждое требование состоит из операций, выполнение которых может назначаться только на определенные приборы (машины).
- В общем случае дано m приборов M_1, M_2, \dots, M_m и каждое требование j содержит операции $O_{1j}, \dots, O_{n_j j}$.
- Между операциями могут быть заданы отношения предшествования (маршрут обработки детали).
- Две операции одного и того же требования не могут выполняться одновременно, и каждый прибор может выполнять одновременно только одну операцию.
- Время выполнения операции O_{ij} равно p_{ij} , и она может выполняться на машине $\mu_{ij} \in \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$.

Задачи Цеха (SHOP SCHEDULING)

- В этих задачах каждое требование состоит из операций, выполнение которых может назначаться только на определенные приборы (машины).
- В общем случае дано m приборов M_1, M_2, \dots, M_m и каждое требование j содержит операции O_{1j}, \dots, O_{n_jj} .
- Между операциями могут быть заданы отношения предшествования (маршрут обработки детали).
- Две операции одного и того же требования не могут выполняться одновременно, и каждый прибор может выполнять одновременно только одну операцию.
- Время выполнения операции O_{ij} равно p_{ij} , и она может выполняться на машине $\mu_{ij} \in \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$.
- Данная задача также может быть преобразована (сведена) в задачу RCPSP.

- Для данного случая заданы отношения предшествования между операциями вида $O_{1j} \rightarrow O_{2j} \rightarrow \dots \rightarrow O_{n_j j}$.

- Для данного случая заданы отношения предшествования между операциями вида $O_{1j} \rightarrow O_{2j} \rightarrow \dots \rightarrow O_{n_j j}$.
- При этом нет отношений предшествования между отдельными требованиями.

- Для данного случая заданы отношения предшествования между операциями вида $O_{1j} \rightarrow O_{2j} \rightarrow \dots \rightarrow O_{n_j j}$.
- При этом нет отношений предшествования между отдельными требованиями.
- Количество операций у разных требований может быть различным.

- Для данного частного случая задачи цеха каждая работа состоит из одних и тех же операций, т.е. $n_j = m$, $\forall j \in N$, а также задана машина, на которой обслуживаются операции, т.е. $\mu_{ij} = M_i$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

- Для данного частного случая задачи цеха каждая работа состоит из одних и тех же операций, т.е. $n_j = m$, $\forall j \in N$, а также задана машина, на которой обслуживаются операции, т.е. $\mu_{ij} = M_i$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.
- Тогда расписание для каждого прибора задается вектором — порядком обслуживания операций, относящихся к разным работам.

- Для данного частного случая задачи цеха каждая работа состоит из одних и тех же операций, т.е. $n_j = m$, $\forall j \in N$, а также задана машина, на которой обслуживаются операции, т.е. $\mu_{ij} = M_i$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.
- Тогда расписание для каждого прибора задается вектором — порядком обслуживания операций, относящихся к разным работам.
- В русскоязычной литературе данные задачи порой называют задачами конвейерного типа.

- Задачи этого типа имеют такую же постановку, как и Flow-shop задачи.

- Задачи этого типа имеют такую же постановку, как и Flow-shop задачи.
- Единственное отличие — отсутствие отношений предшествования между операциями.

- Задачи этого типа имеют такую же постановку, как и Flow-shop задачи.
- Единственное отличие — отсутствие отношений предшествования между операциями.
- То есть количество операций у каждого требования равно m , но порядок их выполнения может отличаться для разных требований.

- Особняком стоят задачи, в которых на приборы налагаются специальные ограничения.

ПРОЧИЕ ЗАДАЧИ MACHINE SCHEDULING

- Особняком стоят задачи, в которых на приборы налагаются специальные ограничения.
- Например, в задачах batching (“группирования” или “партий”) один прибор может обслуживать одновременно несколько требований.

- Особняком стоят задачи, в которых на приборы налагаются специальные ограничения.
- Например, в задачах batching (“группирования” или “партий”) один прибор может обслуживать одновременно несколько требований.
- При этом все требования из одной и той же “партии” имеют одно и тоже время начала обслуживания и одно и тоже время окончания.

ПРОЧИЕ ЗАДАЧИ MACHINE SCHEDULING

- Особняком стоят задачи, в которых на приборы налагаются специальные ограничения.
- Например, в задачах batching (“группирования” или “партий”) один прибор может обслуживать одновременно несколько требований.
- При этом все требования из одной и той же “партии” имеют одно и тоже время начала обслуживания и одно и тоже время окончания.
- В мультипроцессорных задачах обслуживание требования (операции) может производиться одновременно несколькими процессорами (приборами).

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- Грэхем, Лаулер, Ленстра и Ринной Кан в 1979-м году для задач Machine Scheduling предложили трехпозиционную систему обозначений вида $\alpha|\beta|\gamma$, общепринятую на данный момент.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- Грэхем, Лаулер, Ленстра и Ринной Кан в 1979-м году для задач Machine Scheduling предложили трехпозиционную систему обозначений вида $\alpha|\beta|\gamma$, общепринятую на данный момент.
- Поле α описывает характеристики задачи, связанные с приборами, и содержит всего одну запись.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- Грэхем, Лаулер, Ленстра и Ринной Кан в 1979-м году для задач Machine Scheduling предложили трехпозиционную систему обозначений вида $\alpha|\beta|\gamma$, общепринятую на данный момент.
- Поле α описывает характеристики задачи, связанные с приборами, и содержит всего одну запись.
- Значения в поле β уточняют характеристики обслуживания и ограничения, накладываемые на процесс обслуживания требований.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- Грэхем, Лаулер, Ленстра и Ринной Кан в 1979-м году для задач Machine Scheduling предложили трехпозиционную систему обозначений вида $\alpha|\beta|\gamma$, общепринятую на данный момент.
- Поле α описывает характеристики задачи, связанные с приборами, и содержит всего одну запись.
- Значения в поле β уточняют характеристики обслуживания и ограничения, накладываемые на процесс обслуживания требований.
- Количество записей в данном поле может быть произвольным (пустое значение, одна запись, несколько записей).

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- Грэхем, Лаулер, Ленстра и Ринной Кан в 1979-м году для задач Machine Scheduling предложили трехпозиционную систему обозначений вида $\alpha|\beta|\gamma$, общепринятую на данный момент.
- Поле α описывает характеристики задачи, связанные с приборами, и содержит всего одну запись.
- Значения в поле β уточняют характеристики обслуживания и ограничения, накладываемые на процесс обслуживания требований.
- Количество записей в данном поле может быть произвольным (пустое значение, одна запись, несколько записей).
- Поле γ описывает целевую функцию задачи, значение которой необходимо минимизировать (или максимизировать), и обычно содержит всего одну запись.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

В поле α допустимы следующие значения:

- 1 — задача для одного прибора;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

В поле α допустимы следующие значения:

- 1 — задача для одного прибора;
- P_m — идентичные параллельные приборы. Количество идентичных приборов равно m , а P расшифровывается как parallel, то есть параллельные или идентичные приборы;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

В поле α допустимы следующие значения:

- 1 — задача для одного прибора;
- P_m — идентичные параллельные приборы. Количество идентичных приборов равно m , а P расшифровывается как parallel, то есть параллельные или идентичные приборы;
- Q_m — параллельные приборы с различной производительностью;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

В поле α допустимы следующие значения:

- 1 — задача для одного прибора;
- P_m — идентичные параллельные приборы. Количество идентичных приборов равно m , а P расшифровывается как parallel, то есть параллельные или идентичные приборы;
- Q_m — параллельные приборы с различной производительностью;
- F_m — системы типа Flow-Shop;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

В поле α допустимы следующие значения:

- 1 — задача для одного прибора;
- P_m — идентичные параллельные приборы. Количество идентичных приборов равно m , а P расшифровывается как parallel, то есть параллельные или идентичные приборы;
- Q_m — параллельные приборы с различной производительностью;
- F_m — системы типа Flow-Shop;
- O_m — системы типа Open-Shop;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

В поле α допустимы следующие значения:

- 1 — задача для одного прибора;
- P_m — идентичные параллельные приборы. Количество идентичных приборов равно m , а P расшифровывается как parallel, то есть параллельные или идентичные приборы;
- Q_m — параллельные приборы с различной производительностью;
- F_m — системы типа Flow-Shop;
- O_m — системы типа Open-Shop;
- J_m — системы типа Job-Shop.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

В поле α допустимы следующие значения:

- 1 — задача для одного прибора;
- P_m — идентичные параллельные приборы. Количество идентичных приборов равно m , а P расшифровывается как parallel, то есть параллельные или идентичные приборы;
- Q_m — параллельные приборы с различной производительностью;
- F_m — системы типа Flow-Shop;
- O_m — системы типа Open-Shop;
- J_m — системы типа Job-Shop.
- В этом поле могут быть указаны также другие записи, например (sa) или (nd) , поясняющие характер обслуживания требований, о которых будет рассказано позже.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

Ограничения и условия, накладываемые на обслуживание требований, перечисляются в поле β с помощью перечисления одной или нескольких записей:

- r_j — моменты поступления (release dates). Если данное значение указано в поле β , то обслуживание требования j не может быть начато ранее его момента поступления r_j . Если r_j отсутствует в поле β , то предполагается, что все требования поступают на обслуживание одновременно в момент времени $t = 0$;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

Ограничения и условия, накладываемые на обслуживание требований, перечисляются в поле β с помощью перечисления одной или нескольких записей:

- r_j — моменты поступления (release dates). Если данное значение указано в поле β , то обслуживание требования j не может быть начато ранее его момента поступления r_j . Если r_j отсутствует в поле β , то предполагается, что все требования поступают на обслуживание одновременно в момент времени $t = 0$;
- D_j — предельные сроки завершения обслуживания требований;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

Ограничения и условия, накладываемые на обслуживание требований, перечисляются в поле β с помощью перечисления одной или нескольких записей:

- r_j — моменты поступления (release dates). Если данное значение указано в поле β , то обслуживание требования j не может быть начато ранее его момента поступления r_j . Если r_j отсутствует в поле β , то предполагается, что все требования поступают на обслуживание одновременно в момент времени $t = 0$;
- D_j — предельные сроки завершения обслуживания требований;
- pmnt — допустимы прерывания (preemption). Если этот параметр опущен, то прерывания обслуживания требований запрещены;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- **prec** — отношения предшествования (precedence relations). Вместо этой записи в обозначениях задач можно встретить записи **tree**, **in-tree**, **out-tree** или **chain**. То есть отношения предшествования заданы в виде: дерева; входящего, выходящего дерева; цепочек;

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- **prec** — отношения предшествования (precedence relations). Вместо этой записи в обозначениях задач можно встретить записи *tree*, *in-tree*, *out-tree* или *chain*. То есть отношения предшествования заданы в виде: дерева; входящего, выходящего дерева; цепочек;
- **batch(b)** — эта запись означает, что рассматривается задача, где требования обслуживаются партиями. То есть речь идет о задачах типа *batching*.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- prec — отношения предшествования (precedence relations). Вместо этой записи в обозначениях задач можно встретить записи tree , in-tree , out-tree или chain . То есть отношения предшествования заданы в виде: дерева; входящего, выходящего дерева; цепочек;
- $\text{batch}(b)$ — эта запись означает, что рассматривается задача, где требования обслуживаются партиями. То есть речь идет о задачах типа batching .
- В поле β могут быть указаны и другие понятные значения. Например, запись $p_j = p$ означает, что для всех требований задана одна и та же продолжительность обслуживания (константа p).

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- В поле γ указывается целевая функция. Классические целевые функции были перечислены выше.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

- В поле γ указывается целевая функция. Классические целевые функции были перечислены выше.
- Согласно этой системе обозначений запись $F_2|r_j|C_{\max}$, например, означает задачу “Минимизация общего времени обслуживания требований для системы Flow-shop с двумя приборами при неодновременном поступлении требований”.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ MACHINE SCHEDULING

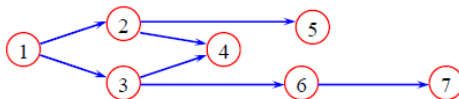
- В поле γ указывается целевая функция. Классические целевые функции были перечислены выше.
- Согласно этой системе обозначений запись $F_2|r_j|C_{\max}$, например, означает задачу “Минимизация общего времени обслуживания требований для системы Flow-shop с двумя приборами при одновременном поступлении требований”.
- Какие задачи обозначают следующие записи:
 $1|p_j = p, r_j| \sum w_j T_j$ или $P_m|r_j, pmtn| \sum C_j$?

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

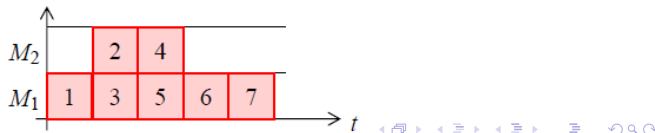
Пример 1. $P_m | prec, p_i = 1 | C_{\max}$

Задача поиска расписания с минимальным временем окончания всех работ на m параллельных машинах с длительностями работ $p_i = 1$ и условиями предшествования, то есть предполагается известным ориентированный граф без циклов, вершинами которого являются работы, а дуги задают частичный порядок выполнения работ.

Если $n = 7$, $m = 2$ и условия предшествования заданы графом:



то одно из допустимых решений имеет вид



ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

Пример 2. $1|r_i, pmtn|L_{\max}$ Задача на одной машине с возможностью прерывания работ, директивными сроками окончания работ и произвольными временами появления работы.

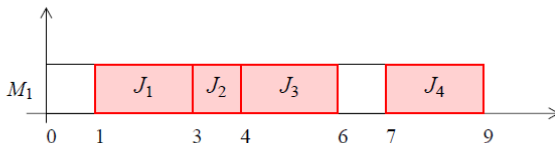
Требуется найти расписание $\{c_i\}_{i=1}^n$, минимизирующее максимальное запаздывание, то есть

$$L_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} (c_i - d_i) \rightarrow \min$$

Для $n=4$ и

i	1	2	3	4
p_i	2	1	2	2
r_i	1	2	2	7
d_i	2	3	4	8

Одно из допустимых решений имеет вид:



$$L_{\max} = \max \{3 - 2; 4 - 3; 6 - 4; 9 - 8\} = 2.$$

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

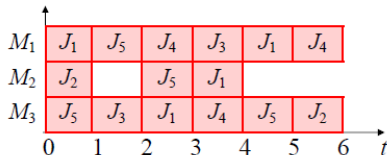
Пример 3. $J3|p_{ij} = 1|C_{\max}$

Задача поиска расписания с минимальным временем окончания всех работ на трех машинах, образующих систему job shop — рабочий цех; длительности всех операций равны 1; у каждой работы свое множество операций; для каждой операции указана машина для ее выполнения.

При $n = 5$, $m = 3$ и матрице

	Машины				
J_1	M_1	M_3	M_2	M_1	
J_2	M_2	M_3	—	—	
J_3	M_3	M_1	—	—	
J_4	M_1	M_3	M_1	—	
J_5	M_3	M_1	M_2	M_3	

Одно из допустимых решений задачи имеет вид:



Заметим, что машина M_1 обязана работать не менее 6 единиц времени (2 для J_1 , 1 для J_3 , 2 для J_4 , 1 для J_5), то есть нашли оптимум!

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

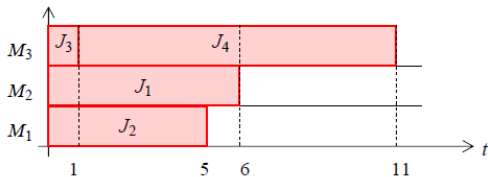
Пример 4. $R3|d_i = 1|D_{\max}$

Задача поиска расписания, минимизирующего максимальное отклонение времен завершения работ от директивных сроков на трех параллельных машинах.

При $n = 4$, $m = 3$ и матрице длительностей выполнения работ p_{ij}

	M_1	M_2	M_3	d_i
J_1	10	6	1	5
J_2	5	20	3	5
J_3	9	30	1	6
J_4	6	5	10	7

Одно из допустимых решений задачи имеет вид



$$D_{\max} = \max \{ |5-6|; |5-5|; |6-1|; |7-11| \} = 5$$

$J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad J_4$

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

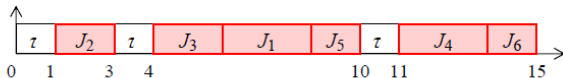
Пример 5. $1|s - batch| \sum w_i c_i$

Задача собрать работы в группы для обработки на одной машине так, чтобы минимизировать взвешенную сумму окончания всех работ. В каждой группе время окончания работ равно времени окончания последней работы в группе. Длительность выполнения всей группы работ равна сумме длительностей работ. При переходе от одной группы к другой машина требует переналадки τ (простой.)

При $n = 6, m = 1, \tau = 1$ и

i	1	2	3	4	5	6
p_i	3	2	2	3	1	1
w_i	1	2	1	1	4	4

Одно из допустимых решений при разбиении на 3 группы: $\{J_2\}$, $\{J_3, J_1, J_5\}$, $\{J_4, J_6\}$ имеет вид



$$\sum_{i=1}^6 w_i c_i = w_2 \cdot 3 + (w_3 + w_1 + w_5) \cdot 10 + (w_4 + w_6) \cdot 15.$$