Модели смешанно-целочисленного программирования

Виктор Васильевич Лепин

Размещение центров обслуживания

Постановка задачи

- Для обслуживания n клиентов отобраны m возможных мест (пунктов)
- для размещения не более q $(1 \leq q \leq m)$ центров обслуживания (предприятий, складов, станций скорой помощи и т. д.).
- Для каждого пункта $i = 1, \dots, m$ заданы
  - фиксированная стоимость f_i размещения центра обслуживания
  - и его емкость (сколько клиентов он может обслужить) b_i.
- Известна также стоимость c_{ij} обслуживания клиента j из пункта i, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$.
- Нужно выбрать места для размещения центров обслуживания и прикрепить клиентов к центрам обслуживания таким образом, чтобы минимизировать общую стоимость размещения центров и обслуживания клиентов.

Суть задачи

- Часто величины c_{ij} представляют собой транспортные расходы.
- Если $q = n$ и не брать в расчет фиксированные затраты на размещение объектов,
- то оптимальным решением было бы размещение центров во всех возможных местах.
- С другой стороны, если не учитывать затраты на транспортировку и предположить, что все $b_i = n$,
- то оптимальное решение состояло бы в том, чтобы разместить только один центр в пункте, где фиксированные затраты минимальны.
- Можно считать, что суть задачи размещения центров обслуживания в том,
- чтобы оптимально соотнести фиксированные и транспортные расходы.

Переменные

Введем два семейства бинарных переменных:

- $y_i = 1$, если центр размещается в пункте i, и $y_i = 0$ в противном случае;
- $x_{ij} = 1$, если потребитель j обслуживается из пункта i, и $x_{ij} = 0$ в противном случае.

Формулировка

- Цель — минимизировать издержки на размещение центров и на обслуживание клиентов.
- Должно быть не больше q центров.
- Каждый клиент должен быть прикреплен к одному центру.
- Если в пункте i размещен центр, то к нему прикреплено не более b_i клиентов.
- Все переменные бинарные.

$$\sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \leq q,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1\ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq b_i y_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$j = 1\ldots, n.$$

Формулировка

- Практика показала, что приведенная формулировка слабая.
- Известны примеры, когда хорошие коммерческие программы не могли решить конкретные примеры этой з-чи ЦП.
- Но после добавления неравенств
- $x_{ij} \le y_i$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1 \dots, n$.
- те же примеры решались за несколько минут.

$$\sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \le q,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1 \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i y_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1 \dots, n.$$

Менеджмент портфеля: индексный фонд

- *Менеджмент портфеля* — это проблема инвестирования заданного капитала в ценные бумаги с целью максимизации «возврата» при ограниченном «риске».
- Имеются две ортогональные стратегии менеджмента портфеля: активная и пассивная.
- *Активная стратегия* предполагает использование методов анализа и прогноза для достижения требуемого уровня эффективности.
- В противоположность, *пассивная стратегия* советует не полагаться на прогнозы, а диверсифицировать инвестиции для минимизации риска.
- Цель состоит в том, чтобы создать и поддерживать портфель, который отражает изменения широкой рыночной популяции или рыночного индекса.
- Такой портфель называется *индексным фондом*.

Имитация рыночного индекса

- Формирование индексного фонда начинается с выбора широкого рыночного индекса в качестве аппроксимации всего рынка.
- В чистом виде индексный подход состоит в покупке всех активов в тех же пропорциях, в каких они присутствуют в индексе.
- На практике это трудноосуществимо или даже невозможно.
- Поэтому рыночный индекс агрегируется сравнительно небольшим *индексным фондом* из акций не более чем q типов, где q существенно меньше числа всех типов акций индекса.
- Такой подход необязательно приводит к формированию оптимального портфеля относительно отношения доход/риск.

- Входными данными для модели является $n \times n$-матрица $[\rho_{ij}]$, элемент ρ_{ij}, которой оценивает «похожесть» между акциями i и j (ρ_{ij} меньше для более похожих акций).
- Например, мы можем оценить коэффициенты ρ_{ij} по известным возвратам акций за T предшествующих периодов.
- Пусть $R_i(t)$ есть возврат (на один вложенный доллар) акции i в период t.
- Тогда можно вычислить $\rho_{ij} = \sum_{t=1}^{T} p^{T-t}(R_i(t) - R_j(t))^2$, где $0 < p < 1$ есть дисконтный множитель, который призван повысить значимость недавних периодов по сравнению с ранними периодами.
- Нужно определить, какие акции и в какой пропорции должны присутствовать в портфеле.

Переменные

Введем два семейства бинарных переменных:

- $y_i = 1$, если акция i находится в индексном фонде, и $y_i = 0$ в противном случае;
- $x_{ij} = 1$, если акция i в индексном фонде заменяет акцию j, и $x_{ij} = 0$ в противном случае.

Формулировка

- Цель — построить индекс. фонд, который наиболее точно представляет рыночный индекс.
- Индексный фонд содержит не более q различных акций.
- Каждая акция из рыночного индекса заменяется в индексном фонде точно одной акцией.
- Акции не из индексного фонда не могут заменять другие акции.
- Все переменные бинарные.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le q,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1\ldots,n,$$

$$x_{ij} \le y_i, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},$$
$$i,j = 1,\ldots,n,$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Краткосрочный финансовый менеджмент

- Финансовый менеджмент в краткосрочной перспективе есть одна из задач бухгалтерии большой фирмы.
- При неудачном управлении финансами доходы получат банки, в которых хранятся денежные средства, а не их владелец.
- Свободные деньги также должны работать.
- Прибыль можно существенно увеличить, если работать активно на рынке ценных бумаг.

Постановка задачи

- Плановый горизонт разделен на T периодов различной продолжит.; период $T+1$ представляет конец горизонта.
- На рынке имеется n типов ценных бумаг.
- $s = (s_1, \ldots, s_n)^T$ — портфель фирмы в начале планового горизонта, где $s_i \geq 0$ есть число ценных бумаг типа i.
- Стоимости продажи и покупки одной ценной бумаги типа i в период t равны c_{it}^s и c_{it}^b.
- Открыты k кредитные линии.
- Max объем заимствований по линии l равен u_l.
- Заемы можно получать в начале каждого периода, а возвращать — после завершения планового горизонта.
- Вычислены издержки f_{lt} использования единицы заема по линии l, полученной в период $t : f_{lt} =$ месячному проценту, умноженному на время (в месяцах), оставшееся до конца планового горизонта.

- Экзогенные (внешние) денежные потоки заданы величинами d_t, $t = 1, \ldots, T$.
- Если $d_t > 0$ (соответственно $d_t < 0$), то фирма должна получить сумму d_t (заплатить $-d_t$) в начале периода t.
- Считаем, что запас наличности в начале планового горизонта учтен при вычислении d_1.
- Для каждого периода $t = 1, \ldots, T$ задана также минимальная потребность в наличности q_t.
- Нужно сбалансировать бюджет наличности таким образом,
- чтобы максимизировать «богатство» (наличность плюс продажная стоимость всех ценных бумаг минус сумма всех займов с учетом процентов) фирмы в конце планового горизонта.

Переменные

Определим следующие переменные:

- x_{it} — число ценных бумаг типа i в конце периода t;
- x_{it}^s — число ценных бумаг типа i, проданных в период t;
- x_{it}^b — число ценных бумаг типа i, купленных в период t;
- y_t — наличность в период t;
- z_{lt} — заем, полученный по кредитной линии l в период t.

Целевая функция

$$y_T + \sum_{i=1}^{n} c^s_{i,T+1} x_{i,T} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{l=1}^{k} (1 + f_{lt}) z_{lt} \to \max .$$

Наша цель — максимизировать «богатство» фирмы в конце планового горизонта, которое составляют

- наличность в конце планового горизонта,
- плюс стоимость ценных бумаг после завершения планового горизонта,
- минус стоимость заемных средств с учетом «набежавших» процентов.

Балансовые равенства для наличности

$$d_1 + \sum_{i=1}^{n} c_{i1}^s x_{i1}^s + \sum_{l=1}^{k} z_{l1} = y_1 + \sum_{i=1}^{n} c_{i1}^b x_{i1}^b,$$

$$y_{t-1} + d_t + \sum_{i=1}^{n} c_{it}^s x_{it}^s + \sum_{l=1}^{k} z_{lt} = y_1 + \sum_{i=1}^{n} c_{it}^b x_{it}^b, \quad t = 2, \ldots, T,$$

- В любой период, начиная со второго, выполняется балансовое равенство:
- сумма поступивших средств, которая включает
  - наличность в конце предыдущего периода
  - сумму внешних поступлений
  - сумму, полученную от продажи ценных бумаг,
  - сумму займов по всем кредитным линиям,
- равняется сумме выплат, которая включает
  - наличность в конце текущего периода
  - и сумму, потраченную на покупку ценных бумаг.
- Аналогичное балансовое равенство верно и для периода 1.

Балансовые равенства для ценных бумаг

$$s_i + x_{i1}^b - x_{i1}^s = x_{i1}, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$x_{i,t-1} + x_{it}^b - x_{it}^s = x_{it}, \ i = 1, \ldots, n, \ t = 2, \ldots, T.$$

- В любой период, начиная со второго, для каждой ценной бумаги выполняется балансовое равенство:
- количество бумаг в конце периода равно
- количеству бумаг в конце предыдущего периода
- плюс количество купленных бумаг
- минус количество проданных бумаг.
- Аналогичные балансовые равенства верны и для периода 1.

Другие ограничения

$$\sum_{t=1}^{T} z_{lt} \le u_l, \quad l = 1, \dots, k,$$

$$y_t \ge q_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

- По любой кредитной линии суммарный заем не должен превышать лимита.
- В любой период имеется в наличии требуемый минимум наличности.

Формулировка

$$y_T + \sum_{i=1}^{n} c^s_{i,T+1} x_{i,T} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{k}(1+f_{lt}) z_{lt} \to \max,$$

$$d_1 + \sum_{i=1}^{n} c^s_{i1} x^s_{i1} + \sum_{l=1}^{k} z_{l1} = y_1 + \sum_{i=1}^{n} c^b_{i1} x^b_{i1},$$

$$d_t + y_{t-1} + \sum_{i=1}^{n} c^s_{it} x^s_{it} + \sum_{l=1}^{k} z_{lt} = y_t + \sum_{i=1}^{n} c^b_{it} x^b_{it}, \quad t = 2, \ldots, T,$$

$$s_i + x^b_{i1} - x^s_{i1} = x_{i1}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{i,t-1} + x^b_{it} - x^s_{it} = x_{it}, \quad i = 1, \ldots, n; \;\; t = 2, \ldots, T,$$

$$\sum_{t=1}^{T} z_{lt} \le u_l, \quad l = 1, \ldots, k,$$

$$y_t \ge q_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

$$x_{it},\; x^s_{it},\; x^b_{it} \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \ldots, n; \;\; t = 1, \ldots, T,$$

$$y_t \in \mathbb{R}_+, \quad t = 1, \ldots, T,$$

$$z_{lt} \in \mathbb{R}_+, \quad l = 1, \ldots, k; \;\; t = 1, \ldots, T.$$

Размер партии: однопродуктовая модель

Постановка задачи

- Плановый горизонт состоит из T периодов.
- Для каждого периода $t = 1, \dots, T$ заданы:
  - d_t — потребность в некотором продукте;
  - f_t — фиксированная стоимость организации производства;
  - c_t — стоимость производства единицы продукта;
  - h_t — стоимость хранения единицы продукта.
  - u_t — емкость (в единицах продукта) производства.
- Запасы продукта на складе перед началом планового горизонта равны s_0.
- Нужно определить,
  - сколько единиц продукта производить в каждом из периодов,
  - чтобы полностью удовлетворить спрос
  - и суммарные затраты на производство и хранение продукта были минимальны.

Переменные

Для $t = 1, \ldots, T$ введем переменные:

- x_t — количество произведенного продукта за период t;
- s_t — количество продукта, хранимого на складе в конце периода t;
- $y_t = 1$, если в период t организуется производство продукта, и $y_t = 0$ в противном случае.

- Цель — минимизировать издержки по всем периодам.
- Каждое балансовое равенство связывает два соседних периода:
  - то, что было на складе в конце периода $t-1$,
  - плюс произведенное в период t
  - равняется спросу плюс
  - то, что будет храниться на складе в конце периода t.
- Продукта нельзя произвести больше, чем позволяют производственные мощности.

$$\sum_{t=1}^{T}(f_t y_t + c_t x_t + h_t s_t) \to \min,$$

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$0 \le x_t \le u_t y_t, \quad t = 1 \dots, T,$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Свойства формулировки

- Если все фиксированные стоимости f_t положительны,
- то для оптимального решения (x^*, y^*) релаксационной задачи ЛП

$$\sum_{t=1}^{T}(f_t y_t + c_t x_t + h_t s_t) \to \min,$$

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

$$0 \le x_t \le u_t y_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

$$0 \le y_t \le 1, \quad t = 1, \ldots, T.$$

должны выполняться рав-ва: $y_t^* = x_t^*/u_t, \quad t = 1, \ldots, T.$

- Если $d_t < u_t$, то $y_t^* = x_t^*/u_t \le d_t/u_t < 1 \Rightarrow y_t \notin \mathbb{Z}$.
- Много дробных значений среди целочисленных компонент у оптимального решения релакс. задачи ЛП — признак того, что формулировка з-чи ЦП слабая.

Дизагрегация переменных

- Представим x_t в виде: $x_t = \sum_{\tau=t}^{T} x_{t\tau}$,
- где $x_{t\tau}$ — количество продукта, произведенного в период $t = 1, \ldots, T$ для потребления в период $\tau = t, \ldots, T$.
- В конце периода $t = 1, \ldots, T$ на складе хранится

$$s_t = s_0 + \sum_{k=1}^{t} x_k - \sum_{k=1}^{t} d_k$$

единиц продукта.
- Перепишем целевую функцию следующим образом

$$\sum_{t=1}^{T} (f_t y_t + c_t x_t + h_t \left(s_0 + \sum_{k=1}^{t} x_k - \sum_{k=1}^{t} d_k \right) =$$

$$\sum_{t=1}^{T} (f_t y_t + w_t x_t) + K = \sum_{t=1}^{T} f_t y_t + \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{T} w_t x_{t\tau} + K,$$

- где $w_t = c_t + h_t + \cdots + h_T$ и $K = \sum_{t=1}^{T} h_t(s_0 - \sum_{k=1}^{t} d_k)$.

Альтернативная формулировка

В новых переменных $x_{t\tau}$ задачу о размере партии можно переформулировать следующим образом:

$$\sum_{t=1}^{T} f_t y_t + \sum_{t=1}^{T}\sum_{\tau=t}^{T} w_t x_{t\tau} \to \min,$$

$$\sum_{t=1}^{\tau} x_{t\tau} = d_\tau, \quad \tau = 1,\dots,T,$$

$$\sum_{\tau=t}^{T} x_{t\tau} \le u_t, \quad t = 1,\dots,T,$$

$$0 \le x_{t\tau} \le d_\tau y_t, \quad t = 1,\dots,T; \;\; \tau = t,\dots,T,$$

$$y_t \in \{0,1\}, \quad t = 1,\dots,T.$$

Эта новая формулировка является идеальной: решение релаксационной задачи ЛП всегда является целочисленным.

Размер партии: многопродуктовая модель

Постановка задачи

- Нужно разработать план производства n различных продуктов на m машинах в течение временного горизонта, разделенного на T периодов.
- Пусть M_j обозначает множество машин, способных производить продукт j.

Исходные данные

- d_{jt} — потребность в продукте j в период t;
- s_{j0} — запас продукта j в начале планового горизонта.
- f_{it} — фиксированная стоимость организации производства на машине i в период t;
- c_{ijt} — стоимость производства единицы продукта j на машине i в период t;
- h_{jt} — стоимость хранения единицы продукта j в период t;
- $T_{it}^{\min}$, $T_{it}^{\max}$ — минимальное и максимальное время работы машины i в период t;
- ρ_{ijk} — количество единиц продукта j, используемого для производства единицы продукта k на машине $i \in M_k$;
- τ_{ij} — время произв. ед. продукта j на машине $i \in M_j$;
- Нужно определить, сколько производить каждого из продуктов и в какие периоды, чтобы удовлетворить потребности во всех продуктах
- при минимальных суммарных затратах на производство и хранение продукции.

Переменные

Для $j = 1, \ldots, n$, $i \in M_j$ и $t = 1, \ldots, T$ введем переменные:

- x_{ijt} — количество продукта j, производимого в период t на машине i;
- s_{jt} — количество продукта j, хранимого на складе в конце периода t;
- $y_{it} = 1$, если машина i работает в период t, и $y_{it} = 0$ в противном случае.

Формулировка

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\,s_{jt}+\sum_{i\in M_j}c_{ijt}\,x_{ijt}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}f_{it}\,y_{it}\to\min,$$

$$s_{j,t-1}+\sum_{i\in M_j}x_{ijt}=d_{jt}+s_{jt}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k}\rho_{ijk}\,x_{ikt},$$

$$j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min}y_{it}\le\sum_{j:i\in M_j}\tau_{ij}\,x_{ijt}\le T_{it}^{\max}y_{it},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$s_{jt}\ge 0,\qquad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$y_{it}\in\{0,1\},\qquad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$x_{ijt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ i\in M_j;\ t=1,\dots,T.$$

Цель — минимизировать суммарные издержки производства и хранения продуктов.

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\,s_{jt}+\sum_{i\in M_j}c_{ijt}\,x_{ijt}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}f_{it}\,y_{it}\to\min,$$

$$s_{j,t-1}+\sum_{i\in M_j}x_{ijt}=d_{jt}+s_{jt}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k}\rho_{ijk}\,x_{ikt},\qquad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min}y_{it}\le\sum_{j:i\in M_j}\tau_{ij}\,x_{ijt}\le T_{it}^{\max}y_{it},\qquad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$s_{jt}\ge 0,\qquad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$y_{it}\in\{0,1\},\qquad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$x_{ijt}\ge 0,\qquad j=1,\dots,n;\ i\in M_j;\ t=1,\dots,T.$$

Балансовые равенства: кол-во продукта на складе в период $t-1$ плюс то, что произведено в период t, равно потребности в период t плюс то, что исп. для произв. других продуктов, и то, что будет храниться на складе в конце периода t.

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\,s_{jt}+\sum_{i\in M_j}c_{ijt}\,x_{ijt}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}f_{it}\,y_{it}\to\min,$$

$$s_{j,t-1}+\sum_{i\in M_j}x_{ijt}=d_{jt}+s_{jt}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k}\rho_{ijk}\,x_{ikt},\quad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min}y_{it}\le\sum_{j:i\in M_j}\tau_{ij}\,x_{ijt}\le T_{it}^{\max}y_{it},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$s_{jt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$y_{it}\in\{0,1\},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$x_{ijt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ i\in M_j;\ t=1,\dots,T.$$

Балансовые равенства: кол-во продукта на складе в период $t-1$ плюс то, что произведено в период t, равно потребности в период t плюс то, что исп. для произв. других продуктов, и то, что будет храниться на складе в конце периода t.

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\, s_{jt} + \sum_{i\in M_j} c_{ijt}\, x_{ijt}\right) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} f_{it}\, y_{it} \to \min,$$

$$s_{j,t-1} + \sum_{i\in M_j} x_{ijt} = d_{jt} + s_{jt} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k} \rho_{ijk}\, x_{ikt},$$
$$j = 1,\ldots,n;\ t = 1,\ldots,T,$$

$$T_{it}^{\min} y_{it} \le \sum_{j:i\in M_j} \tau_{ij}\, x_{ijt} \le T_{it}^{\max} y_{it}, \quad i = 1,\ldots,m;\ t = 1,\ldots,T,$$

$$s_{jt} \ge 0, \qquad j = 1,\ldots,n;\ t = 1,\ldots,T,$$
$$y_{it} \in \{0,1\}, \qquad i = 1,\ldots,m;\ t = 1,\ldots,T,$$
$$x_{ijt} \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n;\ i \in M_j;\ t = 1,\ldots,T.$$

Балансовые равенства: кол-во продукта на складе в период $t-1$ плюс то, что произведено в период t, равно потребности в период t плюс то, что исп. для произв. других продуктов, и то, что будет храниться на складе в конце периода t.

Формулировка

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\, s_{jt} + \sum_{i\in M_j} c_{ijt}\, x_{ijt}\right) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} f_{it}\, y_{it} \to \min,$$

$$s_{j,t-1} + \sum_{i\in M_j} x_{ijt} = d_{jt} + s_{jt} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k} \rho_{ijk}\, x_{ikt},$$

$$j = 1,\dots,n;\ t = 1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min} y_{it} \le \sum_{j:i\in M_j} \tau_{ij}\, x_{ijt} \le T_{it}^{\max} y_{it}, \quad i = 1,\dots,m;\ t = 1,\dots,T,$$

$$s_{jt} \ge 0, \quad j = 1,\dots,n;\ t = 1,\dots,T,$$

$$y_{it} \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,m;\ t = 1,\dots,T,$$

$$x_{ijt} \ge 0, \quad j = 1,\dots,n;\ i \in M_j;\ t = 1,\dots,T.$$

Балансовые равенства: кол-во продукта на складе в период $t-1$ плюс то, что произведено в период t, равно потребности в период t плюс то, что исп. для произв. других продуктов, и то, что будет храниться на складе в конце периода t.

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\,s_{jt}+\sum_{i\in M_j}c_{ijt}\,x_{ijt}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}f_{it}\,y_{it}\to\min,$$

$$s_{j,t-1}+\sum_{i\in M_j}x_{ijt}=d_{jt}+s_{jt}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k}\rho_{ijk}\,x_{ikt},$$

$$j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min}y_{it}\le\sum_{j:i\in M_j}\tau_{ij}\,x_{ijt}\le T_{it}^{\max}y_{it},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$s_{jt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$y_{it}\in\{0,1\},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$x_{ijt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ i\in M_j;\ t=1,\dots,T.$$

Балансовые равенства: кол-во продукта на складе в период $t-1$ плюс то, что произведено в период t, равно потребности в период t плюс то, что исп. для произв. других продуктов, и то, что будет храниться на складе в конце периода t.

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\,s_{jt}+\sum_{i\in M_j}c_{ijt}\,x_{ijt}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}f_{it}\,y_{it}\to\min,$$

$$s_{j,t-1}+\sum_{i\in M_j}x_{ijt}=d_{jt}+s_{jt}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k}\rho_{ijk}\,x_{ikt},$$
$$j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min}y_{it}\le\sum_{j:i\in M_j}\tau_{ij}\,x_{ijt}\le T_{it}^{\max}y_{it},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$s_{jt}\ge 0,\qquad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$
$$y_{it}\in\{0,1\},\qquad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$
$$x_{ijt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ i\in M_j;\ t=1,\dots,T.$$

Балансовые равенства: кол-во продукта на складе в период $t-1$ плюс то, что произведено в период t, равно потребности в период t плюс то, что исп. для произв. других продуктов, и то, что будет храниться на складе в конце периода t.

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\, s_{jt} + \sum_{i\in M_j} c_{ijt}\, x_{ijt}\right) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} f_{it}\, y_{it} \to \min,$$

$$s_{j,t-1} + \sum_{i\in M_j} x_{ijt} = d_{jt} + s_{jt} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k} \rho_{ijk}\, x_{ikt},$$

$$j = 1,\dots,n;\ t = 1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min} y_{it} \le \sum_{j:i\in M_j} \tau_{ij}\, x_{ijt} \le T_{it}^{\max} y_{it}, \quad i = 1,\dots,m;\ t = 1,\dots,T,$$

$$s_{jt} \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n;\ t = 1,\dots,T,$$

$$y_{it} \in \{0,1\}, \qquad i = 1,\dots,m;\ t = 1,\dots,T,$$

$$x_{ijt} \ge 0, \quad j = 1,\dots,n;\ i \in M_j;\ t = 1,\dots,T.$$

Эта группа неравенств требуют, чтобы время работы машин в каждом из периодов было в пределах заданных лимитов, причем если машина i не работает в период t ($y_{it} = 0$), то она не может ничего производить (все x_{ijt} равны нулю).

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\,s_{jt}+\sum_{i\in M_j}c_{ijt}\,x_{ijt}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}f_{it}\,y_{it}\to\min,$$

$$s_{j,t-1}+\sum_{i\in M_j}x_{ijt}=d_{jt}+s_{jt}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k}\rho_{ijk}\,x_{ikt},$$

$$j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min}y_{it}\le\sum_{j:i\in M_j}\tau_{ij}\,x_{ijt}\le T_{it}^{\max}y_{it},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$s_{jt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$y_{it}\in\{0,1\},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$x_{ijt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ i\in M_j;\ t=1,\dots,T.$$

Эта группа неравенств требуют, чтобы время работы машин в каждом из периодов было в пределах заданных лимитов, причем если машина i не работает в период t ($y_{it}=0$), то она не может ничего производить (все x_{ijt} равны нулю).

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jt}\,s_{jt}+\sum_{i\in M_j}c_{ijt}\,x_{ijt}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}f_{it}\,y_{it}\to\min,$$

$$s_{j,t-1}+\sum_{i\in M_j}x_{ijt}=d_{jt}+s_{jt}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in M_k}\rho_{ijk}\,x_{ikt},$$

$$j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$T_{it}^{\min}y_{it}\le\sum_{j:i\in M_j}\tau_{ij}\,x_{ijt}\le T_{it}^{\max}y_{it},\quad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$s_{jt}\ge 0,\qquad j=1,\dots,n;\ t=1,\dots,T,$$

$$y_{it}\in\{0,1\},\qquad i=1,\dots,m;\ t=1,\dots,T,$$

$$x_{ijt}\ge 0,\quad j=1,\dots,n;\ i\in M_j;\ t=1,\dots,T.$$

Ограничения на переменные.