

**МЕТОДЫ**  
**ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА**

**V семестр**

**РЕПНИКОВ В.И.**

**2009**

# РАЗДЕЛ I

## Решение численных уравнений

### *Дополнительная литература:*

1. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир. – 1975.
2. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир. – 1988.

## ГЛАВА I

### Приближенное решение одного численного уравнения

С подобной задачей мы уже столкнулись в курсе «Вычислительные методы алгебры» при рассмотрении вопроса о нахождении собственных значений (см. «Прямые методы решения полной проблемы собственных значений»), причем тогда мы вели речь о построении характеристического многочлена матрицы, а нахождение его корней отложили до лучших времен. И вот теперь эти времена пришли.

Естественно, мы будем заниматься решением не только алгебраических уравнений, а вообще уравнений вида

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где  $f$  – некоторая заданная функция, а  $x$  – неизвестная численная величина.

При решении численных таких численных уравнений приходится решать две задачи:

1. Отделение корней, т.е. отыскание таких достаточно малых (смысл этого термина станет ясным по ходу изложения материала) интервалов, в которых находится один и только один корень уравнения (1);
2. Вычисление корней с требуемой точностью.

Простейший аналитический признак отделенности корня дает следующая теорема из анализа.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на некотором конечном отрезке  $[a, b]$  и на концах этого отрезка принимает значения противоположных знаков, а в любой внутренней точке промежутка  $(a, b)$  функция  $f(x)$  имеет производную  $f'(x)$ , которая сохраняет знак, то внутри отрезка  $[a, b]$  существует корень уравнения (1) и этот корень единственный.

Естественно, речь в данной теореме идет об отделении вещественных корней уравнения (1).

Часто при практическом решении задачи отделения корня пользуются графическими методами. При этом каким-либо способом строят график функции  $y = f(x)$  (либо с привлечением средств анализа, либо просто по точкам на достаточно густой сетке) и визуально определяют точки его пересечения с осью абсцисс. Конечно, необходимо помнить, что так называемые «реальные» прикладные задачи чаще всего бывают «плохими» или «очень плохими», нежели «хорошими» или «очень хорошими» (на лабораторных занятиях вы будете иметь дело все-таки с *модельными* примерами). К числу первых, например, следует отнести случай, когда  $f(x)$  два очень близко ( $\sim 10^{-10}$ ) расположенных корни. В этом плане прекрасный пример построил Уилкинсон. Это трехдиагональная матрица  $W_{21}$ , определяемая соотношениями  $w_{ii} = 11 - i$ ,  $i = \overline{1, 21}$ ;  $w_{i+1i} = w_{ii+1} = 1$ ;  $i = \overline{1, 20}$ . Наибольшее собствен-

ное значение  $\lambda_{21} \approx 10.74...$  совпадает с наибольшим собственным значением главной подматрицы порядка 20 в первых 15 десятичных разрядах. График  $P_{21}(\lambda)$  близок к  $-20$  на всем интервале  $(10, 11)$ , за исключением подынтервала с центром в точке  $\lambda_{21}$  с шириной, меньшей, чем  $10^{-13}$  (!).

Иногда при графическом решении задачи об отделении корней оказывается более удобным представить исходное уравнение (1) в виде  $\varphi(x) = \psi(x)$ , а затем построить графики функций  $y = \varphi(x)$  и  $y = \psi(x)$  (конечно, предполагается, что это сделать проще, чем построить график исходной функции  $y = f(x)$ ) и найти визуально точки их пересечения (естественно, найденные промежутки следует проверить, например, с помощью сформулированной выше теоремы).

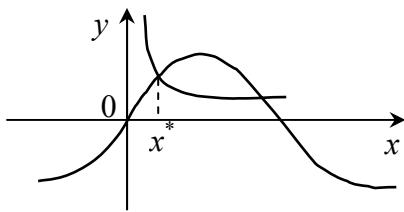
Приведем пример решения задачи об отделении корня. Пусть исходное уравнение имеет вид

$$x \sin x = 1. \quad (2)$$

Здесь  $f(x) = x \sin x - 1$ . Так как строить график такой функции относительно сложно, то представим уравнение (2) в виде (заметим,  $x = 0$  не является корнем)

$$\sin x = \frac{1}{x}$$

и построим графики функций  $y = \sin x$  и  $y = \frac{1}{x}$  (это уже «штатные» школьные графики).



Отсюда видим, что ближайшая к нулю положительная точка пересечения графиков  $x^* \in \left[1; \frac{\pi}{2}\right]$ . Покажем, что на

отрезке  $\Delta = \left[1; \frac{\pi}{2}\right]$  содержится единственный корень рассматриваемого уравнения, подтвердив «графические» со-

ображения аналитическими выкладками. Имеем:  $a = 1$ ;  $b = \frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$f(a) = \sin 1 - 1 < 0, \quad f(b) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0,$$

т.е.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ;

$$f'(x) = \sin x + x \cos x > 0 \text{ для любого } x \in [a; b].$$

Поэтому в силу приведенной выше теоремы уравнение (2) на найденном отрезке имеет единственный корень.

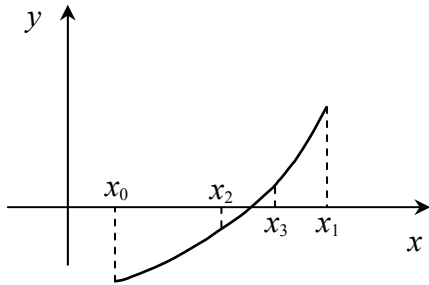
При решении задачи об отделении корней, конечно же, нужно стремиться использовать конкретные свойства конкретной функции, задающей данное уравнение. Так, например, для алгебраических уравнений существуют аналитические методы, позволяющие установить количество вещественных корней того или иного знака, а также их границы (теоремы Штурма, Бюдана-Фурье, Декарта и т.п.).

Простым способом отделения корней, не связанным напрямую с построением графиков, является вычисление таблицы значений функции  $f(x)$  на заданной сетке точек  $x_k \in [a; b]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и, таким образом, вычислительный поиск точки перемены знака.

После того как точка перемены знака функции, задающей уравнение, найдена, дальнейшее отделение корня, т.е. уменьшение длины отрезка  $\Delta$ , на котором находится корень,

может быть осуществлено с помощью *метода половинного деления (дихотомии, биссекций)*, который, по сути, является и простейшей итерационной процедурой решения задачи о вычислении корней с требуемой точностью. Опишем его.

Итак, пусть мы нашли такие точки  $x_0$  и  $x_1$ , что  $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ . Найдем середину отрезка  $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$  и вычислим  $f(x_2)$ . Из двух половин отрезка выберем ту, для которой



$f(x_2) \cdot f(x_{\text{гран}}) < 0$ . Затем новый отрезок опять делим пополам и выбираем ту половину, на концах которой функция принимает значения разных знаков, и т.д.

Если требуется найти корень с точностью  $\varepsilon$ , то продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше  $2\varepsilon$ . Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

Дихотомия проста и очень надежна: к простому корню она сходится для любых непрерывных функций  $f(x)$ , в том числе недифференцируемых; при этом она устойчива к ошибкам округления. Скорость сходимости невелика: за одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое. Зато точность ответа гарантируется. Учитывая сказанное, можно сделать вывод: дихотомию следует применять тогда, когда требуется высокая надежность счета, а скорость сходимости малосущественна (либо как «прелюдию» к другим итерационным алгоритмам, к рассмотрению которых мы сейчас и переходим).

## § 1. Метод итерации решения численных уравнений

Итак, вновь рассмотрим уравнение (1). Для применения метода итерации уравнение обычно приводят к виду

$$x = \varphi(x) \quad (1.1)$$

(будем говорить: к виду, удобному для итерации). Тогда решению этого уравнения можно придать следующий смысл: это неподвижная точка преобразования  $y = \varphi(x)$ . Способов приведения к виду (1.1) существует много. Часто для этих целей используют линейное преобразование вида  $\varphi(x) = x + \psi(x)f(x)$ , где  $\psi(x)$  — некоторая известная непрерывная функция (по крайней мере, в окрестности отыскиваемого корня уравнения (1)) и не обращающаяся там в нуль. Можно также пытаться каким-либо образом выразить  $x$  из исходного уравнения; например, для уравнения

$$x^7 - 3x^2 + 1 = 0$$

это можно сделать так:

$$x = \sqrt[7]{3x^2 - 1},$$

т.е.

$$\varphi(x) = \sqrt[7]{3x^2 - 1}.$$

Будем считать, что корень  $x^*$  отделен и, таким образом, указано некоторое начальное приближение  $x_0$  (вообще говоря, произвольное значение из отрезка отделенности). Тогда уточнение этого значения производят по правилу

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

Такой алгоритм обладает свойством самоисправляемости; действительно, здесь любое приближение номера  $n$  можно рассматривать как исходное приближение, поэтому отдельные сбои, допускаемые при вычислениях (естественно, это касается «ручного» счета), если они не выводят за пределы интервала сходимости, не отражаются на результатах, а влияют лишь на объем работы.

Очевидно, что успех применения алгоритма зависит не только от выбора  $x_0$ , но и от выбора преобразования  $\varphi(x)$ . Исследуем грубое поведение ошибки приближенного решения в итерационном процессе (1.2). Это позволит нам предугадать ответы на два основных вопроса:

1. когда последовательность может быть построена;
2. сходимость последовательности приближений (условия и скорость сходимости).

Пусть мы построили приближение  $x_n$  к корню и его погрешность  $\varepsilon_n = x^* - x_n$  достаточно мала по модулю. Выясним, как будет связана погрешность  $\varepsilon_n$  с погрешностью  $\varepsilon_{n+1} = x^* - x_{n+1}$ . Подставим  $x_n$  и  $x_{n+1}$  в (1.2):

$$x^* - \varepsilon_{n+1} = \varphi(x^* - \varepsilon_n).$$

Предполагая, что  $\varphi(x)$  имеет непрерывную производную в окрестности точек  $x_n$  и  $x_{n+1}$ , разложим правую часть последнего равенства в ряд Тейлора, ограничившись двумя членами и взяв остаток в форме Пеано:

$$x^* - \varepsilon_{n+1} = \varphi(x^*) - \varphi'(x^*)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n).$$

Так как  $x^* = \varphi(x^*)$ , то отсюда получим:

$$\varepsilon_{n+1} = \varphi'(x^*)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n).$$

Если  $\varepsilon_n$  мало, то величиной  $o(\varepsilon_n)$  в пределах принятой точности можно пренебречь. Тогда

$$\varepsilon_{n+1} \approx \varphi'(x^*)\varepsilon_n. \quad (1.3)$$

Пусть  $\varphi'(x^*) \neq 0$ .

Тогда очевидно, что если  $|\varphi'(x^*)| > 1$ , то  $|\varepsilon_{n+1}| > |\varepsilon_n|$ . В таком случае рассчитывать на успех итераций не приходится, т.е. точка  $x^*$  будет точкой отталкивания для данного процесса. Если же  $|\varphi'(x^*)| < 1$ , то  $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$  и можно ожидать сходимости процесса со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $\varphi'(x^*)$ . Если  $|\varphi'(x^*)| \ll 1$ , то сходимость будет быстрой. Случай  $|\varphi'(x^*)| = 1$  рассматривать не стоит, так как равенство (1.3) носит приближенный характер.

Если  $0 < \varphi'(x^*) < 1$ , то  $\varphi'(x) > 0$  в некоторой окрестности корня и процесс будет носить монотонный характер. Если же  $\varphi'(x^*) < 0$ , то значения  $\varepsilon_n$  на соседних шагах итераций будут иметь противоположные знаки. Такой характер поведения  $\varepsilon_n$  особенно благоприятен для вычислений, так как позволяет высказать апостериорные суждения о точности результата (соседние приближения находятся по разные стороны от корня).

Пусть теперь  $\varphi'(x^*) = 0$ . Тогда  $\varepsilon_{n+1} = o(\varepsilon_n)$ . В этом случае можно рассчитывать на очень быструю сходимость (более быструю, чем сходимость геометрической прогрессии

со сколь угодно малым знаменателем). Этот факт можно использовать для улучшения метода итерации.

Выясним, как будут связаны между собой  $\varepsilon_{n+1}$  и  $\varepsilon_n$ , если  $\varphi'(x^*) = 0$ . Эта связь существенно зависит от кратности корня  $x^*$ , с которой он удовлетворяет уравнению  $\varphi'(x^*) = 0$ .

Пусть эта кратность равна  $k-1$ , т.е.

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad \varphi^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Итерации такого вида будем называть итерациями порядка  $k$ . В этом случае имеем:

$$x_{n+1} = x^* - \varepsilon_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(x^* - \varepsilon_n) = \varphi(x^*) + (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x^*)}{k!} \varepsilon_n^k + o(\varepsilon_n^k),$$

т.е.

$$\varepsilon_{n+1} \approx (-1)^{k+1} \frac{\varphi^{(k)}(x^*)}{k!} \varepsilon_n^k.$$

Отсюда

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^k} \approx \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}^k}$$

или

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \approx \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right)^k.$$

Таким образом, вблизи корня количество верных значащих цифр результата на каждой итерации возрастает в  $k$  раз.

Проведенные рассуждения наглядны, но, вообще говоря, не являются абсолютно строгими. Кроме того, они ничего не говорят о том, каким должен быть выбор  $x_0$ .

Приведем сейчас утверждение, свободное от указанных недостатков.

**Теорема (о сходимости метода итерации).** Если:

1.  $\varphi(x)$  определена и непрерывна в области  $\Delta = \{x : |x - x_0| \leq \delta\}$ ;
2. в этой области  $\varphi(x)$  удовлетворяет условию Липшица  $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq q|x' - x''|$  для любых  $x', x'' \in \Delta$  с константой  $q < 1$ ;
3. справедливо неравенство  $\frac{m}{1-q} \leq \delta$ , где  $|x_0 - \varphi(x_0)| \leq m$ ,

то:

1. последовательность приближений  $\{x_n\}$  по методу итераций с исходным приближением  $x_0$  может быть построена;
2. в указанной области уравнение  $x = \varphi(x)$  имеет решение и притом единственное;
3. построенная последовательность приближений  $\{x_n\}$  с ростом  $n$  сходится к этому решению;
4. скорость сходимости характеризуется неравенством

$$|x^* - x_n| \leq \frac{m}{1-q} q^n. \quad (1.4)$$

*Доказательство.*

Проверим сначала возможность построения последовательности приближений, используя метод математической индукции.

Так как  $x_0$  попадает в исходную область, то  $x_1 = \varphi(x_0)$  определено. Кроме того, по условию

$$|x_1 - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0| \leq m \leq \frac{m}{1-q} \leq \delta.$$

Следовательно,  $x_1 \in \Delta$  и  $x_2 = \varphi(x_1)$  определено. Поскольку

$$|x_2 - x_1| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq q|x_1 - x_0| \leq qm,$$

то, используя неравенство треугольника, получим:

$$|x_2 - x_0| = |x_2 - x_1 + x_1 - x_0| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| \leq qm + m = m(1+q) < m(1+q+q^2+\dots) = \frac{m}{1-q} \leq \delta.$$

Следовательно, мы получили:

1.  $x_2 \in \Delta$ ;
2.  $|x_2 - x_1| \leq qm$ .

Пусть при любом  $n = \overline{1, k}$  полученные свойства также имеют место, т.е.

$$|x_n - x_0| \leq \delta \text{ и } |x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1}m \text{ при } n = \overline{1, k}.$$

Покажем, что эти соотношения выполняются и при  $n = k+1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq q|x_k - x_{k-1}| \leq q^k m; \\ |x_{k+1} - x_0| &\leq |x_{k+1} - x_k| + |x_k - x_{k-1}| + \dots + |x_1 - x_0| \leq q^k m + q^{k-1}m + \dots + qm + m < \\ &< m(1+q+q^2+\dots) = \frac{m}{1-q} \leq \delta. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x_{k+1} \in \Delta$ , а значит, искомую последовательность можно построить.

Покажем, что эта последовательность сходится. Пользуясь критерием Больцано-Коши, достаточно убедиться в фундаментальности построенной последовательности. Имеем:

$$|x_{n+p} - x_p| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq q^{n+p-1}m + \dots + q^n m < m(1+q+q^2+\dots) = \frac{mq^n}{1-q} \leq \delta q^n;$$

отсюда, поскольку  $q < 1$ , следует, что указанная разность может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом  $n$ . Таким образом, последовательность  $\{x_n\}$  является фундаментальной и, следовательно, сходится, т.е. существует

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Убедимся, что  $x^*$  является решением уравнения  $x = \varphi(x)$ . Для этого перейдем к пределу в равенстве (1.2). Так как  $\varphi(x)$  непрерывна, то переход к пределу под знаком функции дает:

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \varphi(x^*),$$

т.е.  $x^*$  – корень нашего уравнения.

Установим скорость сходимости. Для этого в неравенстве  $|x_{n+p} - x_n| \leq m q^n \frac{1}{1-q}$ , полученном выше, перейдем к пределу при  $p \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |x_{n+p} - x_n| = |x^* - x_n| \leq \frac{m}{1-q} q^n.$$

Остается проверить единственность корня. Предположим противное: существуют два корня рассматриваемого уравнения –  $x'$  и  $x''$ . Тогда

$$|x' - x''| = |\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq q |x' - x''|.$$

Следовательно,  $|x' - x''|(1-q) \leq 0$ , а поскольку  $q < 1$ , то отсюда получаем, что  $|x' - x''| \leq 0$ , т.е.  $x' = x''$ , что и завершает доказательство теоремы. ☒

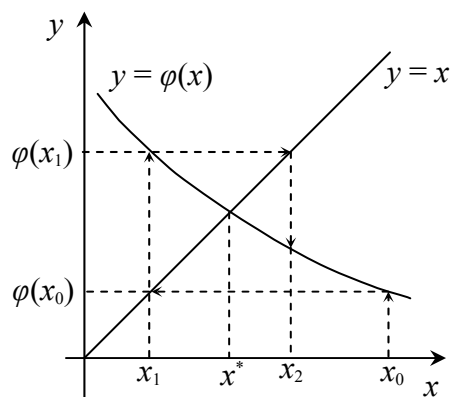
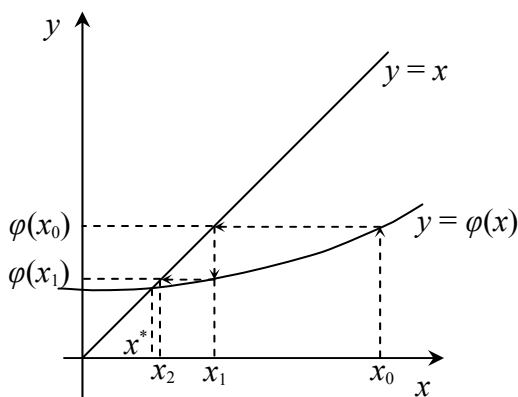
#### Замечания:

1. При доказательстве единственности не использовалось третье условие теоремы;
2. Второе условие теоремы можно заменить более строгим, но практически легче проверяемым:  
 2'. В области  $\Delta$  функция  $\varphi(x)$  имеет непрерывную первую производную  $\varphi'(x)$  такую, что  $|\varphi'(x)| < 1$  для любого  $x \in \Delta$ .

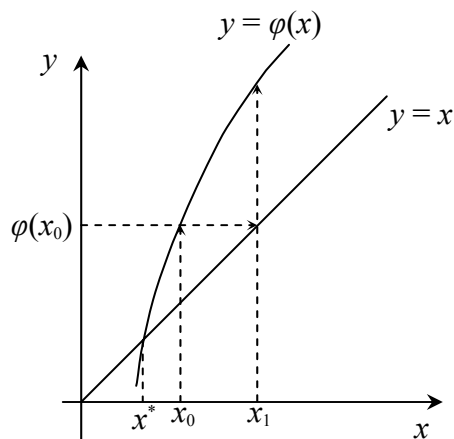
Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода итерации. Считаем, что  $x$  и  $\varphi(x)$  действительны. Пусть также  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ . Тогда возможны два случая:

а)  $0 \leq \varphi'(x) < 1$ ;

б)  $-1 < \varphi'(x) \leq 0$ .



Условие  $|\varphi'(x)| < 1$  существенно. В противном случае (например, при  $\varphi'(x) > 1$ ) картинка будет выглядеть следующим образом:





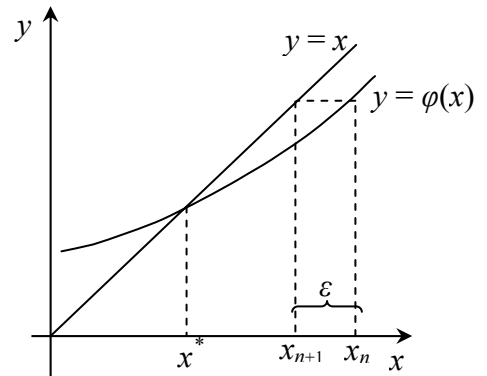
Будем считать, что процесс итерации является сходящимся. Тогда важен вопрос, когда его можно прервать, т.е. когда достигается заданная точность приближенного решения.

Конечно, зная все параметры из теоремы о сходимости и пользуясь оценкой (1.4), легко найти априорную (гарантированную (!)) оценку числа итераций:

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{m}}{\ln q}. \quad (1.5)$$

С другой стороны, для тех же целей чаще пользуются результатами вычислений: процесс прерывается, если в пределах принятой точности два соседних итерационных приближения совпадают, т.е. если выполняется неравенство  $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$  (часто рассматривается также аналог относительной погрешности  $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leq \varepsilon$ ).

Однако этим правилом с достоверностью можно пользоваться лишь в случае отрицательной производной. Если же  $0 \leq \varphi'(x^*) < 1$ , то правилом с уверенностью пользоваться можно лишь при  $q \leq \frac{1}{2}$ . В случае же  $\frac{1}{2} < q < 1$  оно будет давать сбои (как это показано, в частности, на рисунке).



Обоснуем указанные наблюдения. Справедлива **Лемма**.

$$|x^* - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (1.6)$$

*Доказательство.*

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$|x^* - x_n| = |\varphi(x^*) - \varphi(x_{n-1})| \leq q |x^* - x_{n-1}| = q |x^* - x_n + x_n - x_{n-1}| \leq q (|x^* - x_n| + |x_n - x_{n-1}|).$$

Отсюда, решая получившееся неравенство относительно  $|x^* - x_n|$ , получим (1.6). ⊠

Из леммы следует, что для достоверности предложенного выше апостериорного способа оценки погрешности (как модуля разности двух соседних приближений) необходимо требовать выполнения неравенства

$$\left| \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \right| \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

откуда непосредственно получаем: оценка достоверна, если  $q \leq \frac{1}{2}$ .

Заметим также, что оценка (1.6) неулучшаема, поскольку она достигается, например, при  $\varphi_1(x) = q(x - x^*) + \varphi(x^*)$ .

## § 2. О задаче улучшения метода итерации

Как мы уже отмечали ранее, скорость сходимости метода итерации – это скорость сходимости геометрической прогрессии со знаменателем  $q$  (или  $\varphi'(x^*)$ ). Таким образом,

при приведении уравнения к каноническому виду желательно действовать таким образом, чтобы  $\varphi'(x^*)$  имело по возможности меньшее по абсолютной величине значение. Чуть позже мы остановимся более подробно на некоторых способах, позволяющих достичь определенных успехов в данном направлении.

Сейчас же заметим пока, что если в общей схеме приведения к каноническому виду положить  $\psi(x) = C$ , то получим:

$$\varphi(x) = x + Cf(x),$$

откуда

$$\varphi'(x) = 1 + Cf'(x).$$

Если  $x^*$  не является кратным корнем исходного уравнения, то  $f'(x^*) \neq 0$  и поэтому в окрестности точки  $x^*$  производная  $f'(x)$  сохраняет знак. Тогда для выбора константы  $C$  получаем условие

$$-1 < 1 + Cf'(x) < 1$$

или

$$-2 < Cf'(x) < 0.$$

Отсюда следует, что если при всех  $x \in \Delta$  ( $\Delta$  – отрезок отделенности корня) выполняется неравенство  $0 < f'(x) < M$ , то при любом  $C \in \left(-\frac{2}{M}; 0\right)$  метод простой итерации будет сходиться.

Аналогичный результат будет иметь место и в случае  $M < f'(x) < 0$  с той лишь разницей, что  $C \in \left(0; -\frac{2}{M}\right)$ .

## 2.1. Метод Стеффенсена

Тот факт, что последовательность приближений метода простой итерации близка к геометрической прогрессии, позволяет применить для ускорения ее сходимости преобразование Эйткена. Опишем эту процедуру подробнее.

Пользуясь правилом (1.2), по приближению  $x_0$  построим приближения  $x_1 = \varphi(x_0)$  и  $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(\varphi(x_0))$ . Применив к трем числам  $x_0, x_1, x_2$  преобразование Эйткена, получим:

$$x'_1 = \frac{x_2 x_0 - x_1^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = \frac{x_0 \varphi(\varphi(x_0)) - \varphi^2(x_0)}{\varphi(\varphi(x_0)) - 2\varphi(x_0) + x_0}.$$

Заменив соответствующим образом индексы, получим итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{x_n \varphi(\varphi(x_n)) - \varphi^2(x_n)}{\varphi(\varphi(x_n)) - 2\varphi(x_n) + x_n}, \quad (2.1)$$

который в литературе носит название метода Стеффенсена.

С формальной точки зрения метод Стеффенсена эквивалентен методу простой итерации

$$x_{n+1} = \Phi(x_n),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}.$$

При этом условия сходимости такого итерационного процесса оказываются значительно более благоприятными, нежели условия сходимости процесса, на основе которого он построен. Справедлива

**Лемма 1.** Если для функции  $\varphi(x)$  вблизи точки  $x^*$  справедливо представление

$$\varphi(x) = x^* + \alpha(x - x^*) + o(x - x^*), \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1, \quad (2.2)$$

то

$$\Phi(x) = x^* + o(x - x^*). \quad (2.3)$$

*Доказательство.*

Пользуясь условием (2.2), имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(x)) &= \varphi(x^* + \alpha(x - x^*) + o(x - x^*)) = x^* + \alpha(\alpha(x - x^*) + o(x - x^*)) + o(x - x^*) = \\ &= x^* + \alpha^2(x - x^*) + o(x - x^*). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(x) - x^* &= \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} - x^* = \frac{(x - x^*)\varphi(\varphi(x)) - \varphi(x)(\varphi(x) - 2x^*) - xx^*}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} = \\ &= \frac{(x - x^*)(x^* + \alpha^2(x - x^*) + o(x - x^*)) - (x^* + \alpha(x - x^*) + o(x - x^*))(x^* + \alpha(x - x^*) + o(x - x^*)) - xx^*}{x^* + \alpha^2(x - x^*) + o(x - x^*) - 2x^* - 2\alpha(x - x^*) + o(x - x^*) + x} = \\ &= \frac{o(x - x^*)^2}{(x - x^*)(\alpha - 1)^2 + o(x - x^*)} = o(x - x^*). \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует формула (2.3). □

Из доказанной леммы следует, что функция  $\Phi(x)$  непрерывна в окрестности точки  $x^*$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \Phi(x) = x^*.$$

Если теперь доопределить ее, положив  $\Phi(x^*) = x^*$ , то  $\Phi(x)$  будет непрерывна в точке  $x^*$  и, кроме того,

$$\Phi'(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\Phi(x) - \Phi(x^*)}{x - x^*} = 0.$$

Полученный результат позволяет надеяться на то, что сходимость метода Стеффенсена в условиях леммы 1 будет квадратичной (это будет иметь место в случае, если существует непрерывная производная  $\Phi'(x)$  в окрестности точки  $x^*$ ).

**Упражнения.**

1. Доказать, что в условиях леммы 1 в окрестности точки  $x^*$  существует непрерывная производная  $\Phi'(x)$ .
2. Доказать, что в условиях леммы 1 метод Стеффенсена будет сходиться и в случае  $\alpha = 1$ .
3. Доказать, что если исходный итерационный процесс с функцией  $\varphi(x)$  имеет порядок  $k > 1$ , то метод Стеффенсена будет иметь порядок не менее  $2k - 1$ .

## 2.2. Улучшение итерационного процесса при помощи преобразования заданного уравнения

Рассмотрим сейчас вопрос о том, как практически можно реализовать идею построения итерационного процесса (выбора  $\varphi(x)$ ) таким образом, чтобы обеспечить обращение в 0 производных от функции  $\varphi(x)$  в точке  $x^*$ .

Вновь вернемся к описанному ранее способу приведения к каноническому виду:

$$\varphi(x) = x + \psi(x)f(x). \quad (2.4)$$

Подберем сейчас функцию  $\psi(x)$  таким образом, чтобы удовлетворить условию

$$\varphi'(x^*) = \varphi'(x)|_{f(x)=0} = 0.$$

Имеем:

$$\varphi'(x)|_{f(x)=0} = 1 + \psi'(x)f(x) + \psi(x)f'(x)|_{f(x)=0} = 1 + \psi(x)f'(x) = 0.$$

Отсюда следует (при условии  $f'(x^*) \neq 0$ ), что  $\psi(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ .

Соответствующий итерационный процесс имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

Он имеет второй порядок и носит название метода Ньютона (чуть позже мы разберем его более подробно).

Чтобы обеспечить более чем двукратное увеличение порядка итераций, линейным преобразованием уже не обойтись. Естественным обобщением (2.4) служит формула

$$\varphi(x) = x + \psi_1(x)f(x) + \psi_2(x)f^2(x) + \dots + \psi_{k-1}(x)f^{k-1}(x). \quad (2.6)$$

Здесь коэффициенты  $\psi_i(x)$  можно трактовать как коэффициенты разложения функции  $\Psi(x) = \Phi(x, f(x))$  в ряд Маклорена по второму аргументу при ограничении  $\psi_0(x) = x$ . Задача состоит в выборе этих коэффициентов. Будем требовать, чтобы выполнялись условия

$$\varphi^{(i)}(x)|_{f(x)=0} = 0, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (2.7)$$

Эти условия приводят к системе равенств, из которых коэффициенты  $\psi_i(x)$  могут быть найдены последовательно:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x)\Big|_{f(x)=0} &= 1 + \psi_1'(x)f(x) + \psi_1(x)f'(x) + \psi_2'(x)f^2(x) + 2\psi_2(x)f(x)f'(x) + \dots \Big|_{f(x)=0} = \\
&= 1 + \psi_1(x)f'(x) = 0, \\
\varphi''(x)\Big|_{f(x)=0} &= \psi_1''(x)f(x) + 2\psi_1'(x)f'(x) + \psi_1(x)f''(x) + 2\psi_2'(x)(f'(x))^2 + \dots \Big|_{f(x)=0} = \\
&= 2\psi_1'(x)f'(x) + \psi_1(x)f''(x) + 2\psi_2(x)(f'(x))^2 = 0, \\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

Многоточиями в каждой из формул заменены те слагаемые, которые содержат в качестве сомножителя  $f(x)$  либо какую-то из степеней последней.

Из данной системы непосредственно находим:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= -\frac{1}{f'(x)}; \\
\psi_2(x) &= -\frac{\psi_1'(x)f'(x)}{(f'(x))^2} - \frac{\psi_1(x)f''(x)}{2(f'(x))^2} = \left[ \psi_1'(x) = \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} \right] = -\frac{f''(x)f'(x)}{(f'(x))^4} + \frac{f''(x)}{2(f'(x))^3} = -\frac{f''(x)}{2(f'(x))^3}.
\end{aligned}$$

Таким образом, итерационный процесс третьего порядка будет иметь вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3}. \quad (2.8)$$

В литературе описанный способ построения итерационных процессов высших порядков носит название *метода Чебышева*. Существуют и другие способы решения рассмотренной задачи.

**Упражнение.** Построить примеры итерационных процессов чебышевского типа выше третьего порядка.

### § 3. Метод Ньютона

Вновь возвращаемся к уравнению в исходной форме (1). Предположим, что каким-либо способом получено приближение  $x_n$  к корню  $x^*$  ( $n \geq 0$ ). Погрешность данного приближения, как и ранее, обозначим через  $\varepsilon_n$ :  $\varepsilon_n = x^* - x_n$ . Очевидно, при известном  $x_n$  отыскание корня равносильно отысканию погрешности. Имеем:

$$f(x_n + \varepsilon_n) = 0.$$

$\varepsilon_n$  обычно в сравнении с  $x^*$  есть величина малая по модулю. Это делает последнее уравнение более благоприятным с точки зрения вычислений. Разложив левую его часть в ряд Тейлора, получим:

$$0 = f(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{1!} f'(x_n) + \dots + \frac{\varepsilon_n^k}{k!} f^{(k)}(x_n) + O(\varepsilon_n^{k+1}).$$

Если теперь отбросить остаточный член  $O(\varepsilon_n^{k+1})$ , получим приближенное алгебраическое уравнение

$$f(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{1!} f'(x_n) + \dots + \frac{\varepsilon_n^k}{k!} f^{(k)}(x_n) \approx 0 \quad (3.1)$$

(здесь мы вновь четко видим ситуацию: замена исходной задачи другой, в каком-то смысле более простой).

Решив это уравнение (если мы умеем это делать), мы, вообще говоря, не найдем само значение  $\varepsilon_n$ , а получим лишь некоторое приближенное значение (поправку)  $\Delta x_n$ . Прибавив эту поправку к  $x_n$ , получим новое приближение:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n.$$

Можно ожидать, что оно будет более близким к  $x^*$ , чем  $x_n$ . Далее описанную процедуру можно повторить.

При удачном выборе  $x_0$  и  $k$  можно рассчитывать на достаточно быструю сходимость.

Недостаток этого подхода состоит, вообще говоря, в необходимости на каждом шаге решать алгебраическое уравнение степени  $k$ , что само по себе представляет вовсе не простую задачу. Поэтому чаще всего данный подход используют при  $k = 1$ .

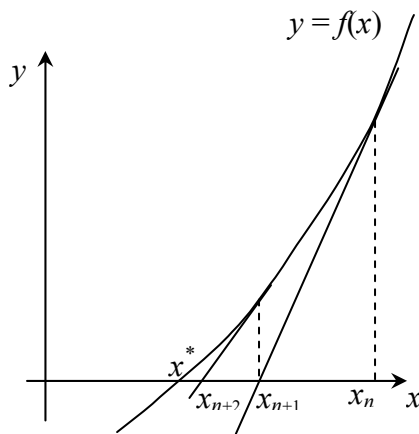
В этом случае из (3.1) имеем:

$$f(x_n) + f'(x_n)\Delta x_n = 0,$$

откуда  $\Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Получили алгоритм метода Ньютона (в § 2 мы получили его из других соображений). Так как поправка  $\Delta x_n$  находится из линейного уравнения, то метод Ньютона называют также методом линеаризации.



Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода. Для этого к кривой  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_n$  проведем касательную. Ее уравнение имеет вид

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n). \quad (3.3)$$

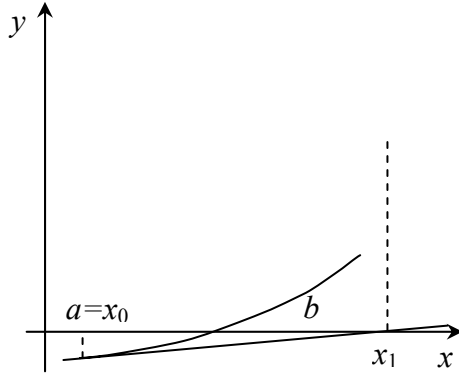
Найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью  $Ox$ . Полагая в уравнении (3.3)  $y = 0$ , получим:

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Таким образом, в методе Ньютона мы вместо приближения к корню по кривой приближаемся к нему по последовательности касательных прямых (отсюда – еще одно название: метод касательных).

Проведем исследование метода Ньютона по той же схеме, которой мы пользовались для метода (простой) итерации.

Вначале обсудим вопрос о выборе  $x_0$ , а именно: если корень отделен, то что следует



брать в качестве начального приближения? Ответ на этот вопрос может быть получен из геометрических соображений: начальное приближение  $x_0$  целесообразно выбирать так, чтобы выполнялось неравенство

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \quad (3.4)$$

В противном случае, как это видно из рисунка, может возникнуть ситуация, при которой уже первое приближение «вылетает» за пределы отрезка отделенности.

Что касается вопроса о прекращении итерационного процесса по совпадению двух соседних приближений с требуемой точностью, то это правило, как и в случае метода итераций, не является абсолютно строгим (привести соответствующий пример(!)).

С чисто формальной точки зрения метод Ньютона можно трактовать как метод простой итерации с выбором функции  $\varphi(x)$  в виде

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

и поэтому формально все результаты § 1 могут быть перенесены на этот случай (так, например, формальное достаточное условие сходимости метода Ньютона может выглядеть

следующим образом:  $|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$  при  $x \in \Delta$ ).

Мы, однако, вновь проведем исследование поведения погрешности вблизи корня. Легко видеть, что некоторые «неприятности» могут возникнуть в случае  $f'(x^*) = 0$  (ведь значение  $f'(x_n)$  стоит в знаменателе формулы (3.2)). Посмотрим, что в этом случае будет происходить. Для погрешности  $\varepsilon_n = x^* - x_n$  из (3.2) получим уравнение

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(x^* - \varepsilon_n)}{f'(x^* - \varepsilon_n)}. \quad (3.5)$$

Если  $x^*$  – корень исходного уравнения кратности  $m$ , то

$$f(x) = (x - x^*)^m a_m + (x - x^*)^{m+1} a_{m+1} + \dots,$$

$$f'(x) = m(x - x^*)^{m-1} a_m + (m+1)(x - x^*)^m a_{m+1} + \dots,$$

где  $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x^*)$ ,  $k = m, m+1, \dots$ .

Тогда

$$f(x^* - \varepsilon_n) \approx (-1)^m \varepsilon_n^m a_m \left( 1 - \varepsilon_n \frac{a_{m+1}}{a_m} \right),$$

$$f'(x^* - \varepsilon_n) \approx (-1)^{m-1} m \varepsilon_n^{m-1} a_m \left( 1 - \varepsilon_n \frac{m+1}{m} \frac{a_{m+1}}{a_m} \right),$$

$$\frac{1}{f'(x^* - \varepsilon_n)} \approx \frac{(-1)^{m-1}}{m \varepsilon_n^{m-1} a_m} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon_n \frac{m+1}{m} \frac{a_{m+1}}{a_m}} \approx \frac{(-1)^{m-1}}{m \varepsilon_n^{m-1} a_m} \left( 1 + \varepsilon_n \frac{m+1}{m} \frac{a_{m+1}}{a_m} \right).$$

Подставляя полученные разложения в (3.5), будем иметь:

$$\frac{f(x^* - \varepsilon_n)}{f'(x^* - \varepsilon_n)} \approx -\frac{\varepsilon_n}{m} \left( 1 - \varepsilon_n \frac{a_{m+1}}{a_m} \right) \left( 1 + \varepsilon_n \frac{m+1}{m} \frac{a_{m+1}}{a_m} \right) \approx -\frac{\varepsilon_n}{m} \left( 1 + \frac{\varepsilon_n}{m} \frac{a_{m+1}}{a_m} \right)$$

и

$$\varepsilon_{n+1} \approx \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n}{m} \left( 1 + \frac{\varepsilon_n}{m} \frac{a_{m+1}}{a_m} \right) = \varepsilon_n \left( 1 - \frac{1}{m} \right) - \varepsilon_n^2 \cdot \frac{1}{m^2} \frac{a_{m+1}}{a_m}.$$

Отсюда, если  $m = 1$ , то

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\varepsilon_n^2 \frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \varepsilon_n^2,$$

т.е.  $\varepsilon_{n+1} = O(\varepsilon_n^2)$  и следует ожидать квадратичной сходимости.

Если же  $m > 1$ , то  $\varepsilon_{n+1} \approx -\varepsilon_n \left( 1 - \frac{1}{m} \right)$ , т.е. между  $\varepsilon_{n+1}$  и  $\varepsilon_n$  теперь существует линей-

ная связь. Чем больше  $m$ , тем ближе  $q = 1 - \frac{1}{m}$  к 1 и, следовательно, тем медленнее сходимость метода.

Докажем теперь строгое утверждение о сходимости метода Ньютона.

**Теорема 1.** Если:

1. функция  $f(x)$  определена и дважды непрерывно дифференцируема на отрезке  $S_0$  вещественной оси с концами в точках  $x_0$  и  $x_0 + 2h_0$ , где  $h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ , при этом на концах отрезка  $S_0$   $f(x)f'(x) \neq 0$ ;
2. выполняется неравенство  $2|h_0|M \leq |f'(x_0)|$ , где  $M = \max_{x \in S_0} |f''(x)|$ ,

то:

1. внутри отрезка  $S_0$  уравнение  $f(x) = 0$  имеет корень  $x^*$  и при этом единственный;
2. последовательность приближений  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  к корню  $x^*$  этого уравнения может быть построена по методу Ньютона с начальным приближением  $x_0$ ;
3. последовательность приближений сходится к этому корню;
4. скорость сходимости характеризуется неравенством



$$|x^* - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{M}{2|f'(x_n)|} |x_n - x_{n-1}|^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

*Доказательство.*

Рассмотрим вначале возможность построения последовательности  $\{x_n\}$ . Для этого вновь, как и при доказательстве теоремы о сходимости метода итерации, воспользуемся методом математической индукции.

Первый член последовательности можно построить:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

причем  $f'(x_0) \neq 0$ , что оговорено условием 1).

Чтобы говорить о возможности построения  $x_2$ , необходимо проверить, что  $x_1 \in S_0$  и что  $f'(x_1) \neq 0$ .

Так как  $x_1 = x_0 + h_0$ , то  $x_1$  лежит ровно посередине отрезка  $S_0$ . Далее, поскольку

$$|f'(x_1) - f'(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f''(x) dx \right| \leq M |x_1 - x_0| = M |h_0| \leq M \cdot \frac{|f'(x_0)|}{2M} = \frac{|f'(x_0)|}{2},$$

то

$$|f'(x_1)| = |f'(x_0) - [f'(x_0) - f'(x_1)]| \geq |f'(x_0)| - |f'(x_1) - f'(x_0)| \geq |f'(x_0)| - \frac{|f'(x_0)|}{2} = \frac{|f'(x_0)|}{2},$$

откуда следует, что  $f'(x_1) \neq 0$ .

Поэтому величина  $x_2 = x_1 + h_1$ , где  $h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ , определена.

Наряду с отрезком  $S_0$  рассмотрим теперь отрезок  $S_1$  с концами  $x_1$  и  $x_1 + 2h_1$ , серединой которого будет  $x_2$ , и покажем, что  $S_1 \subset S_0$ . Для этого оценим величину  $|h_1|$ . По формуле Тейлора получим:

$$|f(x_1)| = \left| f(x_0) + h_0 f'(x_0) + \frac{h_0^2}{2} f''(x_0 + \theta h_0) \right| = \left| \frac{h_0^2}{2} f''(x_0 + \theta h_0) \right| \leq \frac{h_0^2}{2} M.$$

Отсюда

$$|h_1| \leq \frac{h_0^2 M}{2|f'(x_1)|} \leq \frac{h_0^2 M \cdot 2}{2|f'(x_0)|} = \frac{h_0^2 \cdot M}{|f'(x_0)|} \leq \frac{|h_0|}{2}.$$

Тогда длина отрезка  $S_1$  равна  $2|h_1| \leq |h_0|$ , т.е.  $x_1 + 2h_1 = x_0 + h_0 + 2h_1 \leq x_0 + 2h_0 \in S_0$ . Таким образом,  $S_1 \subset S_0$ .

Кроме того, заметим, что выполняется неравенство  $2|h_1|M \leq |f'(x_1)|$ . Действительно, умножив обе части неравенства  $|h_1| \leq \frac{|h_0|}{2}$  на  $\frac{2M}{|f'(x_1)|}$ , получим:

$$\frac{2|h_1|M}{|f'(x_1)|} \leq \frac{2|h_0|M}{2 \cdot |f'(x_1)|} \leq \frac{|f'(x_0)|}{|f'(x_0)|} = 1,$$

т.е.  $2|h_1|M \leq |f'(x_1)|$ .

Таким образом, на отрезке  $S_1$  функция  $f(x)$  обладает всеми теми свойствами, что и на  $S_0$ . Теперь по индукции очевидна возможность построения последовательности  $\{x_{n+1}\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  по правилу

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

При этом точка  $x_{n+1}$  будет серединой отрезка  $S_n$  с концами  $x_n$  и  $x_n + 2h_n$ , принадлежащего отрезку  $S_{n-1}$ , определяемому аналогично, и не превосходящего половины длины последнего. Кроме того, будет выполняться неравенство

$$|h_n| \leq \frac{h_{n-1}^2 M}{2|f'(x_n)|}. \quad (*)$$

Таким образом, мы построили последовательность вложенных отрезков  $S_0 \supset S_1 \supset \dots$ , длины которых с ростом  $n$  стремятся к нулю. Поэтому эти отрезки должны стягиваться к точке, а значит, последовательность  $\{x_{n+1}\}$ , элементы которой являются серединами отрезков  $S_n$ , должна сходиться к некоторому значению  $x^*$ .

Покажем, что  $x^*$  – корень уравнения  $f(x) = 0$ . Перейдем к пределу в алгоритме Ньютона при  $n \rightarrow \infty$  и учтем непрерывность  $f(x)$  при условии  $f'(x_n) \neq 0$  для всех значений  $n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x^*) = 0.$$

Проверим теперь единственность корня  $x^*$ . Для этого можно предположить, что  $M > 0$  (если  $M = 0$ , то  $f(x)$  – линейная функция и метод Ньютона сразу приведет к корню). Кроме того,  $f'(x_0) \neq 0$  и  $f'(x_0 + 2h_0) \neq 0$ . Отсюда следует, что  $f'(x) \neq 0$  для любой точки  $x$  из отрезка  $S_0$ . Действительно,

$$|f'(x) - f'(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f''(t) dt \right| \leq M|x - x_0| < 2|h_0|M \leq |f'(x_0)|.$$

Отсюда

$$|f'(x)| = |f'(x) - [f'(x_0) - f'(x)]| \geq |f'(x_0)| - |f'(x) - f'(x_0)| > |f'(x_0)| - |f'(x_0)| = 0,$$

т.е.  $f'(x) \neq 0$  для любого  $x$  из  $S_0$ .

Это означает, что  $f(x)$  на  $S_0$  строго монотонна, а следовательно, уравнение  $f(x) = 0$  имеет не более одного корня.

Проверим, наконец, справедливость оценки (3.6). Точка  $x_{n+1}$  – середина отрезка  $S_n$  длины  $2|h_n|$ . Кроме того,  $x^* \in S_n$ . Поэтому

$$|x^* - x_{n+1}| \leq |h_n| \leq \frac{h_{n-1}^2 M}{2|f'(x_n)|}, \quad n = 0, 1, \dots$$



Отметим теперь, что оценка (3.6) как раз и означает квадратичную сходимость, причем, как видим, практически точность вычислений обеспечивается за счет сравнения двух соседних приближений.

Из оценки (3.6) можно получить следующую априорную оценку:

$$\begin{aligned} |x^* - x_{n+1}| &\leq |x_{n+1} - x_n| \leq \alpha |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \alpha \alpha^2 |x_{n-1} - x_{n-2}|^{2^2} \leq \dots \leq \\ &\leq \alpha \alpha^2 \alpha^{2^2} \dots \alpha^{2^{n-1}} |x_1 - x_0|^{2^n} = \alpha^{2^n - 1} |x_1 - x_0|^{2^n} = \frac{1}{\alpha} (\alpha |x_1 - x_0|)^{2^n}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\alpha = \max_{x \in S_0} \left| \frac{f''(x)}{2f'(x)} \right|$ . О таком максимуме можно говорить, так как  $|f'(x)| > 0$ .

Отсюда количество итераций, необходимое для достижения требуемой точности, удовлетворяет неравенству

$$n \geq \log_2 \frac{\ln(\alpha \varepsilon)}{\ln(\alpha |x_1 - x_0|)} \quad (3.8)$$

(сравните с (1.6)).

Отметим также, что (3.7) очень похожа на ту оценку, которая получается из приближенного равенства, связывающего погрешности на двух соседних шагах.

При определенных условиях метод Ньютона дает возможность построить монотонную последовательность приближений. Эти условия дает следующая

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) \in C^2[a; b]$ , и на  $[a; b]$  уравнение  $f(x) = 0$  имеет единственный корень. Если для любого  $x \in [a; b]$  выполняется неравенство  $f'(x)f''(x) > 0$ , причем  $f'(x)$  и  $f''(x)$  сохраняют знак, то последовательность  $\{x_n\}$ , построенная по методу Ньютона при  $x_0 = b$ , монотонно убывает и сходится к  $x^*$ .

*Доказательство.*

Пусть для определенности  $f'(x) > 0$  и  $f''(x) > 0$  для любого  $x \in [a; b]$ . Монотонность последовательности  $\{x_n\}$  докажем по индукции. По условию  $x_0 = b > x^*$ . Так как  $f'(x) > 0$ , то  $f(b) > 0$  и  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$ .

Пусть для некоторого  $k \geq 0$  выполняются неравенства  $x^* < x_k \leq b$ . Докажем, что тогда  $x^* < x_{k+1} < x_k$ .

Имеем:

$$x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{f'(x_k)} = \frac{(x_k - x^*)f'(\xi_k)}{f'(x_k)},$$

где  $\xi_k \in (x^*; x_k)$  (формула конечных приращений Лагранжа). При сделанных предположениях  $f'(\xi_k) > 0$ ,  $f'(x_k) > 0$  и  $f'(x)$  монотонно возрастает на отрезке  $[a; b]$ . Поэтому

$f'(x_k) > f'(\xi_k)$ , а значит,  $0 < \frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)} < 1$  и, следовательно,  $0 < x_k - x_{k+1} < x_k - x^*$ . Таким образом,  $\{x_n\}$  монотонно убывает и ограничена снизу числом  $x^*$ . Поэтому она имеет предел, который в силу непрерывности  $f(x)$  и условия  $f'(x) \neq 0$  на  $[a; b]$  совпадает с корнем  $x^*$ . □

**Замечания:**

1. Аналогичное утверждение имеет место и в случае  $f'(x)f''(x) < 0$ ,  $x_0 = a$  при сохранении всех остальных условий теоремы 2, только  $\{x_n\}$  в этом случае будет монотонно возрастающей.
2. Метод Ньютона может применяться и для отыскания комплексных корней уравнения  $f(z) = 0$  с сохранением обозначенных свойств алгоритма.

### 3.1. Видоизменения метода Ньютона

**1<sup>0</sup>. Случай кратных корней.**

Анализируя формулу, связывающую погрешность двух соседних приближений метода Ньютона в случае корня кратности  $m$ , легко получить алгоритм, который будет обладать квадратичной сходимостью и в этом случае. Действительно, рассматривая алгоритм

$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.9)$$

где  $k$  – параметр, подлежащий определению, для погрешностей получим:

$$\varepsilon_{n+1} \approx \left(1 - \frac{k}{m}\right) \varepsilon_n - \varepsilon_n^2 \frac{k}{m^2} \frac{a_{m+1}}{a_m}.$$

Если теперь положить  $k = m$ , то

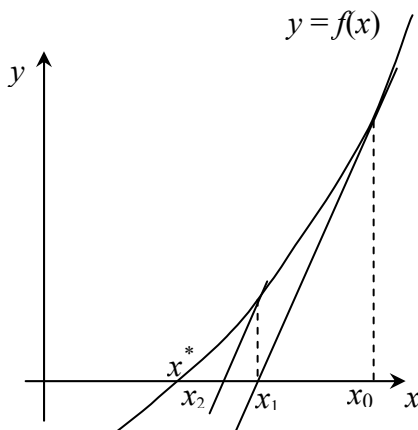
$$\varepsilon_{n+1} \approx -\varepsilon_n^2 \frac{1}{m} \frac{a_{m+1}}{a_m}$$

и сходимость снова будет квадратичной.

**2<sup>0</sup>. Упрощение вычислений.**

Заманчиво отказаться от вычисления последовательности  $f'(x_n)$  с тем, чтобы уменьшить объем работы. Вычислим только одно значение –  $f'(x_0)$ . Такое видоизменение называется методом Ньютона с постоянной производной (касательной) и имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.10)$$



Его геометрическая интерпретация приведена на рисунке (смысл ее состоит в том, что приближение к корню осуществляется по семейству прямых, параллельных касательной в точке, абсцисса которой есть начальное приближение к корню).

Исследование поведения погрешности вблизи корня дает

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(x^* - \varepsilon_n)}{f'(x_0)},$$

откуда  $\varepsilon_{n+1} \approx \left(1 - \frac{f(x^*)}{f'(x_0)}\right) \varepsilon_n$ .

Скорость сходимости определяется, как видим, числом  $q = 1 - \frac{f(x^*)}{f'(x_0)}$ . Обычно  $\frac{f(x^*)}{f'(x_0)}$  близко к единице и  $q$  мало. Тем не менее, скорость сходимости – линейная.

### 3<sup>0</sup>. Видоизменение с разностными отношениями

#### а) Дискретный вариант метода Ньютона.

В случае, если аналитическое вычисление производной  $f'(x_n)$  по каким-либо причинам является нежелательным, используют ее замену с помощью разностного отношения. При этом, выбрав некоторое приращение  $h_n \approx macheps$  (в случае использования данных типа *real*  $macheps \approx 1 \cdot 10^{-7}$ ), можем записать

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n} + O(h_n).$$

Таким образом, вместо (3.2) получим формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)h_n}{f(x_n + h_n) - f(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.11)$$

(3.11) – дискретный вариант метода Ньютона. Можно показать, что сходимость в этом случае остается квадратичной. Заметим также, что приращение  $h_n$  можно брать не зависящим от номера итерации. Платой за не вычисление производной (аналитически) является увеличение объема работы примерно в два раза.

#### б) Метод секущих.

В этом случае в качестве приращения  $h_n$  из дискретного варианта метода Ньютона используется разность двух предыдущих итерационных приближений, т.е. производная вычисляется по формуле

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и, следовательно, алгоритм метода принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

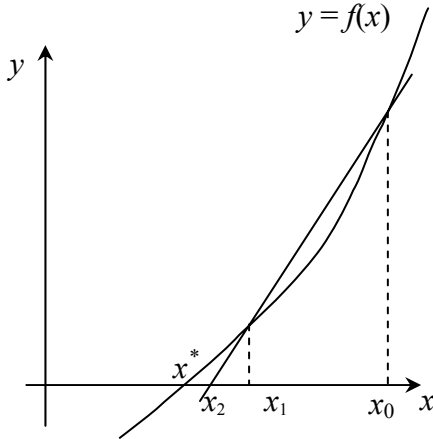
Этот алгоритм требует предварительного вычисления двух значений –  $x_1$  и  $x_0$ , и только после этого можно продолжать вычисления. Подобные алгоритмы, как мы уже отмечали ранее, называют двухшаговыми (по аналогии можно рассматривать и  $k$ -шаговые алгоритмы). При выборе начальных приближений также необходимо придерживаться условий типа Фурье (см. неравенство (3.4)).

Заметим, что формулу (3.12) можно переписать и в другом, математически эквивалентном, виде:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Однако эта запись менее привлекательна, чем (3.12) ввиду того, что мы ведем вычисления с округлением: если  $x_{n-1}$  и  $x_n$  близки между собой, то неизбежны потери значащих цифр при вычислениях, поэтому всегда следует отдавать предпочтение алгоритмам, работающим с поправками.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода (3.12). Запишем уравнение прямой, проходящей через точки  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  и  $(x_n, f(x_n))$



$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad (*)$$

и найдем точку ее пересечения с осью  $Ox$ . Полагая в (\*)  $y = 0$ , получим:

$$x = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Таким образом, здесь к корню мы приближаемся по секущей, проходящей через точки двух предыдущих приближений. В силу этого метод (3.12) называют еще методом секущих.

Выясним картину поведения погрешности при таком видоизменении метода Ньютона. Для этого установим связь между погрешностями  $\varepsilon_{n+1}$ ,  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_{n-1}$ . Имеем следующее уравнение, их связывающее:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - f(x^* - \varepsilon_n) \cdot \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{f(x^* - \varepsilon_n) - f(x^* - \varepsilon_{n-1})}. \quad (**)$$

Разложим  $f(x_n)$  и  $f(x_{n-1})$  в ряд Тейлора (предполагая, что  $x^*$  – простой корень):

$$f(x^* - \varepsilon_n) \approx -\varepsilon_n f'(x^*) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(x^*),$$

$$f(x^* - \varepsilon_{n-1}) \approx -\varepsilon_{n-1} f'(x^*) + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{2} f''(x^*).$$

Подставляя эти выражения в (\*\*), получим:

$$\varepsilon_{n+1} \approx \varepsilon_n - \frac{(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \varepsilon_n \left[ f'(x^*) - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(x^*) \right]}{(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) f'(x^*) - \frac{1}{2} (\varepsilon_n^2 - \varepsilon_{n-1}^2) f''(x^*)} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n \left[ f'(x^*) - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(x^*) \right]}{f'(x^*) - \frac{1}{2} (\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}) f''(x^*)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}f''(x^*)}{f'(x^*)-\frac{1}{2}(\varepsilon_n+\varepsilon_{n-1})f''(x^*)} \approx [f'(x^*) \neq 0] \approx -\frac{1}{2}\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}.$$

Отсюда видно, что этот алгоритм ближе к методу Ньютона, чем алгоритм с постоянной производной. Заметим, что если бы корень  $x^*$  был кратным, то  $\varepsilon_{n+1}$  была бы только порядка  $\varepsilon_n$ .

Итак, имеем:  
для метода Ньютона:

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \varepsilon_n^2; \quad (3.13)$$

для метода секущих:

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \varepsilon_n \varepsilon_{n-1}. \quad (3.14)$$

Соотношения (3.13), (3.14) представляют собой нелинейные разностные уравнения. Если соотношения типа (3.13) мы как-то исследовали ранее, то (3.14) встречается впервые.

Исследуем сейчас эти соотношения более подробно с единых позиций.

Пусть  $E_n \approx |\varepsilon_n|$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right|$ . Тогда вместо (3.14) получим соотношение

$$E_{n+1} = \alpha E_n E_{n-1}. \quad (***)$$

Специальный вид нелинейности позволяет легко перейти к линейному разностному уравнению. Прологарифмировав (\*\*\*) и введя обозначения  $a = \ln \alpha$ ,  $\xi_n = \ln E_n$ , получим:

$$\xi_{n+1} - \xi_n - \xi_{n-1} = a.$$

Найдем его общее решение: частное решение, очевидно, имеет вид  $\xi_n^* = -a$ , а корни соот-

ветствующего характеристического уравнения  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$  равны  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Тогда общее решение определяется формулой

$$\xi_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n - a, \quad n = 0, 1, \dots$$

(здесь  $C_i$  – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий).

Возвращаясь к первоначальным переменным, получим:

$$|\varepsilon_n| \approx E_n = \frac{1}{\alpha} e^{C_1 \lambda_1^n} \cdot e^{C_2 \lambda_2^n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.15)$$

Формула (3.15) показывает, что сходимость метода секущих определяется условием  $C_1 < 0$  (учитывая численные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ). Найдем  $C_1$ . Записывая формулу общего решения при  $n = 0$  и  $n = 1$ , получим:

$$\begin{cases} C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = a + \xi_1, \\ C_1 + C_2 = a + \xi_0. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } C_1 = \frac{a + \xi_1 - (a + \xi_0) \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{a + \xi_1 - (a + \xi_0) \lambda_2}{\sqrt{5}}.$$

Тогда условие  $C_1 < 0$  дает

$$a + \xi_1 - (a + \xi_0) \lambda_2 < 0$$

или, учитывая, что  $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ ,

$$(a + \xi_1) \lambda_1 + (a + \xi_0) < 0.$$

Отсюда следует:

$$\xi_0 + \xi_1 \lambda_1 + a(1 + \lambda_1) < 0.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$\ln E_0 + \lambda_1 \ln E_1 + (1 + \lambda_1) \ln \alpha < 0$$

или

$$\ln(E_0 \cdot E_1^{\lambda_1} \cdot \alpha^{1+\lambda_1}) < 0$$

и, наконец,

$$|\varepsilon_0| |\varepsilon_1|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \left| \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < 1.$$

Полученное неравенство представляет собой условие сходимости метода секущих.

Проделав аналогичные выкладки для уравнения (3.13), получим:

$$E_{n+1} = \alpha E_n^2; \quad \xi_{n+1} - 2\xi_n = a; \quad \lambda - 2 = 0; \quad \lambda_1 = 2; \quad \xi_n = C_1 \lambda_1^n - a;$$

Отсюда

$$|\varepsilon_n| \approx E_n = \frac{1}{\alpha} e^{C_1 2^n}. \quad (3.16)$$

Наконец,  $\xi_0 = C_1 - a$  и, следовательно,  $C_1 = a + \xi_0 = \ln(|\varepsilon_0| \cdot \alpha)$ .



Таким образом, сходимость метода Ньютона определяется условием ( $C_1 < 0$ ):

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right| \cdot |\varepsilon_0| < 1.$$

При этом на каждом шаге метода погрешность возводится в квадрат ( $\lambda_1 = 2$ ), а в методе секущих – в степень  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ , т.е. метод секущих сходится медленнее.

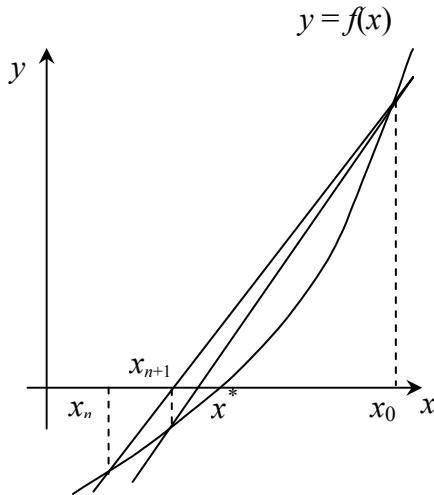
**Замечание:**

Разностное уравнение (3.14) можно было бы исследовать и напрямую, без сведения его к линейному, а именно: будем искать решение в виде  $\varepsilon_{n+1} = a^\alpha \varepsilon_n^\beta$ , где  $a = -\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$ . Тогда, поскольку записанное соотношение предполагается выполняющимся при любых значениях  $n$ ,  $\varepsilon_n = a^\alpha \varepsilon_{n-1}^\beta$ . Поэтому с одной стороны  $\varepsilon_{n+1} = a^\alpha (a^\alpha \varepsilon_{n-1}^\beta)^\beta$ , а с другой, в силу (3.14), –  $\varepsilon_{n+1} = a \cdot a^\alpha \varepsilon_{n-1}^\beta \cdot \varepsilon_{n-1}$ . Сравнивая параметры правых частей двух последних равенств, приходим к системе уравнений для определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\begin{cases} \alpha\beta + \alpha = \alpha + 1, \\ \beta^2 = \beta + 1, \end{cases}$  решая которую, приходим к полученным выше результатам.

#### 4<sup>0</sup>. Метод хорд и комбинированные методы.

Очередной модификацией метода Ньютона является метод хорд. Аналитически его алгоритм выглядит следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$



Геометрически очередным приближением будет абсцисса точки пересечения хорды, проходящей через точки  $(x_0, f(x_0))$  и  $(x_n, f(x_n))$ .

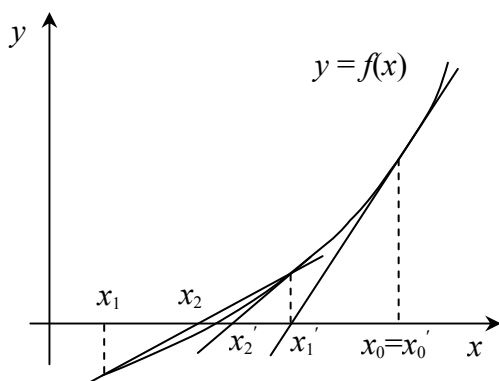
Приближения  $x_0$  и  $x_1$  считаются заданными. Несмотря на то, что в вычислениях участвуют два значения –  $x_n$  и  $x_0$ , метод хорд является одношаговым. По скорости сходимости он заметно уступает методу Ньютона и методу секущих. Действительно, аналогично методу секущих можно записать:

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \varepsilon_0 \varepsilon_n.$$

Отсюда следует, что скорость сходимости будет равна скорости сходимости геометрической прогрессии со знаменателем  $q = -\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \varepsilon_0$ .

Сам по себе метод хорд применяется редко, но он может быть полезным в комбинации с другими методами, так как позволяет при соответствующем выборе начальных данных получить двусторонние приближения к корню. Так, например, произойдет, если выбрать  $f(x_1) \cdot f(x_0) < 0$ , а затем комбинировать метод хорд и метод Ньютона: в качестве

начального значения для метода хорд ( $x_0$ ) брать новое значение, вычисленное по методу Ньютона.



Геометрическую картинку можно видеть на рисунке.

Аналитически описанный алгоритм выглядит следующим образом:

$$x'_n = x'_{n-1} - \frac{f(x'_{n-1})}{f'(x'_{n-1})}, \quad (3.18)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x'_n}{f(x_n) - f(x'_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим еще раз, что все рассмотренные одношаговые методы можно рассматривать как частные случаи метода итерации. Действительно, ранее мы отмечали преобразование  $x + \psi(x)f(x) \equiv \varphi(x)$ , приводящее уравнение  $f(x) = 0$  к виду, удобному для итерации. С этой точки зрения имеем:

если  $\psi(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}$ , то получается видоизменение метода Ньютона с постоянной производной;

если  $\psi(x) = -\frac{k}{f'(x)}$ , то получаем видоизменение метода Ньютона на случай кратных корней;

если  $\psi(x) = -\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ , то получим метод хорд.

Эта связь полезна тем, что, как мы уже не раз отмечали, позволяет применять результаты по сходимости метода итерации к этим методам, хотя это и приводит, как правило, к несколько завышенным результатам.

## § 4. Методы отыскания корней алгебраических уравнений

### 4.1. Метод Лобачевского

Идея рассматриваемого ниже метода принадлежит Н.И. Лобачевскому и предложена им в 1834 г. Метод не требует предварительного отделения корней и позволяет найти сразу все корни.

Итак, рассмотрим алгебраическое уравнение

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0. \quad (4.1)$$

Для определенности считаем коэффициенты  $a_i$  вещественными. Предположим также, что все корни вещественны и удовлетворяют соотношению

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \dots \gg |x_n|, \quad \text{т.е.} \quad \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \ll 1, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

Запишем соотношения Виета, связывающие корни уравнения (4.1) с его коэффициентами  $a_i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

В случае выполнения условий (4.2) (говорят, что в этом случае корни сильно разделены в смысле отношений) в левых частях соотношений Виета (4.3) главными членами будут первые слагаемые; тогда вместо точных можно записать приближенные соотношения (причем здесь уже можно уточнить смысл понятия «сильно разделены»: когда остальными слагаемыми в пределах принятой точности можно пренебречь):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \approx -\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1 x_2 \approx \frac{a_2}{a_0}, \\ x_1 x_2 x_3 \approx -\frac{a_3}{a_0}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \end{array} \right.$$

Отсюда можно найти приближенные значения корней:

$$x_i \approx -\frac{a_i}{a_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Если же требования сильной разделенности корней не выполняются, то и соотношения (4.4) также не будут справедливы. В то же время, если построить новое уравнение, корни которого будут высокими степенями соответствующих корней заданного уравнения, то можно надеяться получить уравнение с сильно разделенными корнями. Лобачевским был предложен способ построения уравнения, корни которого являются квадратами корней исходного.

Запишем исходное уравнение в виде

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0.$$

Параллельно рассмотрим многочлен

$$P^*(x) = a_0(x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n),$$

корни которого отличаются от корней исходного лишь знаками.

Многочлен  $P^*(x)$  можно записать в развернутом виде, не имея сведений о его корнях:

$$P^*(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0.$$

По многочленам  $P(x)$  и  $P^*(x)$  легко построить многочлен  $P_1(y)$ , корнями которого являются  $x_i^2$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Для этого достаточно перемножить многочлены  $P(x)$  и  $P^*(x)$  и произвести замену  $y = x^2$ :

$$P(x)P^*(x) = a_0^2(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots (x^2 - x_n^2).$$

Вычислим коэффициенты многочлена  $P_1(y)$ . Для этого перемножим многочлены  $P(x)$  и  $P^*(x)$  почленно:

$$P(x)P^*(x) = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n)(a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n).$$

Отсюда находим (коэффициенты  $P_1(y)$  будем обозначать  $a_i^{(1)}$ ):

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = a_0^2, \\ a_1^{(1)} = 2a_0 a_1 - a_1^2, \\ a_2^{(1)} = 2a_0 a_2 - 2a_1 a_3 + a_2^2, \\ a_3^{(1)} = 2a_0 a_3 - 2a_1 a_4 + 2a_2 a_5 - a_3^2, \\ \dots\dots\dots \\ a_n^{(1)} = (-1)^n a_n^2. \end{cases} \quad (4.5)$$

На основании этих соотношений можно построить последовательность многочленов

$$P_k(x) = a_0^{(k)} x^n + a_1^{(k)} x^{n-1} + \dots + a_n^{(k)},$$

корнями которых будут  $x_i^{2^k}$ . На некотором шаге мы получим сильную разделенность корней, и тогда для их нахождения можно будет воспользоваться формулами типа (4.4), которые будут теперь иметь вид

$$x_i^{2^k} \approx -\frac{a_i^{(k)}}{a_{i-1}^{(k)}}.$$

Отсюда, извлекая корни степени  $2^k$ , найдем модули корней, а их знаки определим подстановкой в многочлен.

Исследуем вопрос о том, сколько шагов описанного процесса (в литературе он носит название процесса квадрирования) нужно произвести, чтобы получить «сильную разделенность». Напомним, что пока мы предполагаем корни простыми.

Пусть процесс квадрирования проведен  $k$  раз и построен многочлен  $P_k(x)$  такой, что его корни достаточно разделены. Тогда имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{2^k} \approx -\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^{2^k} x_2^{2^k} \approx \frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^{2^k} x_2^{2^k} x_3^{2^k} \approx -\frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{2^k} x_2^{2^k} \dots x_n^{2^k} = (-1)^n \frac{a_n^{(k)}}{a_0^{(k)}}. \end{array} \right. \quad (*)$$

Сделаем еще один шаг квадрирования. От этого разделенность корней может лишь уси-  
литься. Поэтому

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{2^{k+1}} \approx -\frac{a_1^{(k+1)}}{a_0^{(k+1)}}, \\ x_1^{2^{k+1}} x_2^{2^{k+1}} \approx \frac{a_2^{(k+1)}}{a_0^{(k+1)}}, \\ x_1^{2^{k+1}} x_2^{2^{k+1}} x_3^{2^{k+1}} \approx -\frac{a_3^{(k+1)}}{a_0^{(k+1)}}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{2^{k+1}} x_2^{2^{k+1}} \dots x_n^{2^{k+1}} = (-1)^n \frac{a_n^{(k+1)}}{a_0^{(k+1)}}. \end{array} \right. \quad (**)$$

Так как  $a_0^{(k+1)} = [a_0^{(k)}]^2$ , то из (\*) и (\*\*) имеем:

$$x_1^{2^{k+1}} = (x_1^{2^k})^2,$$

что равносильно равенству

$$-\frac{a_1^{(k+1)}}{a_0^{(k+1)}} \approx \left[ -\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}} \right]^2 = \frac{[a_1^{(k)}]^2}{[a_0^{(k)}]^2},$$

откуда следует, что  $a_1^{(k+1)} \approx -[a_1^{(k)}]^2$ . Аналогично получаем:  $a_2^{(k+1)} \approx -[a_2^{(k)}]^2, \dots$

Таким образом, условием того, что достигнута требуемая степень разделенности  
корней, является следующая связь между коэффициентами многочленов  $P_k(x)$  и  $P_{k+1}(x)$ :

$$a_i^{(k+1)} \approx (-1)^i [a_i^{(k)}]^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.6)$$

Тогда модули корней могут быть найдены по формулам

$$|x_i| \approx \sqrt[n]{-\frac{a_i^{(k+1)}}{a_{i-1}^{(k+1)}}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

В случае, если между корнями имеются более сложные связи (например, кратные корни, комплексно-сопряженные пары и т.п.), требуется и более сложный анализ по их определению.

Так, например, если  $|x_1| > |x_2| = |x_3| > |x_4| > \dots > |x_n|$  ( $x_2$  и  $x_3$  – вещественные), то вместо (\*) получим равенства

$$\begin{cases} x_1^{2^k} \approx -\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ 2x_1^{2^k} x_2^{2^k} \approx \frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^{2^k} x_2^{2^k} x_3^{2^k} \approx -\frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{2^k} x_2^{2^k} \dots x_n^{2^k} = (-1)^n \frac{a_n^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \end{cases}$$

откуда следует, что формулы (4.6) сохраняются за исключением  $i = 2$ , вместо которого будет равенство

$$a_2^{(k+1)} \approx \frac{1}{2} [a_2^{(k)}]^2.$$

Аналогичный анализ можно провести и в случае комплексно-сопряженной пары, хотя здесь более удобно разделить эту пару при помощи сдвига, а именно: рассмотрев многочлен  $R(x) = P(x - \xi)$ , где  $\xi$  – случайно выбранное комплексное число. Для  $R(x)$  соответствующая пара корней уже будет иметь различные модули.

Отметим также, что в ходе вычислений после нескольких квадрирования обычно возникают большие числа, что может привести к переполнению, от которого следует страховаться введением масштабирующих множителей.

**Замечания:**

1. Метод в общем случае обладает квадратичной сходимостью;
2. Существуют видоизменения метода Лобачевского, более удобные с точки зрения практического использования.

#### 4.2. Метод Лина разложения многочлена на множители

В литературе рассматриваемый ниже метод носит также название «метод предпоследнего остатка».

Изложим вначале общую его схему. Пусть нужно решить уравнение

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \text{ и } a_i \in R.$$

Чем выше степень уравнения, тем труднее его решать. Если бы удалось представить  $P(x)$  в виде  $P(x) = Q(x)R(x)$ , где степени многочленов  $Q(x)$  и  $R(x)$  меньше  $n$ , то это было бы существенным шагом вперед в решении исходного уравнения. Из алгебры известно, что алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами может быть разложено на множители первой и второй степени (а значит, и в произведение пары сомножителей, сумма степеней которых равна  $n$ ).

Попробуем выделить в качестве множителя многочлен  $Q(x)$  произвольной степени  $m < n$ :

$$Q(x) = x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_m.$$

Поиск такого множителя будем проводить методом последовательных приближений (итераций). Для этого построим начальное приближение

$$Q_0(x) = x^m + q_1^{(0)} x^{m-1} + \dots + q_m^{(0)}.$$

Это можно сделать достаточно просто, если удалось отделить  $m$  корней исходного уравнения. Выбрав  $Q_0(x)$ , делим  $P(x)$  на  $Q_0(x)$  до предпоследнего остатка (степень которого, вообще говоря, равна  $m$ ):

$$P(x) = B_0(x)Q_0(x) + C_0(x).$$

Пусть старший коэффициент многочлена – остатка  $C_0(x)$  отличен от нуля ( $c_0 \neq 0$ ) (ибо в противном случае метод неприменим). По остатку составляем многочлен  $Q_1(x) = \frac{1}{c_0} C_0(x)$ , т.е.

$$P(x) = B_0(x)Q_0(x) + c_0 Q_1(x).$$

На следующем шаге принимаем  $Q_1(x)$  за исходное приближение и повторяем процесс:

$$P(x) = B_1(x)Q_1(x) + c_1 Q_2(x), \quad c_1 \neq 0,$$

.....

$$P(x) = B_k(x)Q_k(x) + c_k Q_{k+1}(x), \quad c_k \neq 0.$$

В результате мы получим две последовательности полиномов ( $B_k(x)$  и  $Q_k(x)$ ) и числовую последовательность  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Если эти последовательности окажутся сходящимися, то, переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим:

$$P(x) = B(x)Q(x) + cQ(x).$$

Тем самым имеем:  $P(x) = Q(x)R(x)$ , где  $R(x) = Q(x) + c$ .

На практике следует выполнять итерации до тех пор, пока в пределах принятой точности не станут выполняться равенства  $q_i^{(k)} = q_i^{(k+1)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

#### 4.2.1. метод Лина выделения линейного множителя

Пусть  $P(x)$  имеет по крайней мере один вещественный корень  $x^*$  (иначе вещественный множитель первой степени выделить нельзя). Тогда  $Q(x) = x - x^*$ .

Будем считать, что корень  $x^*$  отделен и указано начальное приближение  $x_0$ . Тогда

$$Q_0(x) = x - x_0,$$

$$P(x) = B_0(x)Q_0(x) + C_0(x),$$

Где

$$B_0(x) = b_0^{(0)}x^{n-1} + b_1^{(0)}x^{n-2} + \dots + b_{n-2}^{(0)}x,$$

$$C_0(x) = b_{n-1}^{(0)}(x - x_0) + b_n^{(0)}.$$

Пусть  $b_{n-1}^{(0)} \neq 0$ . Тогда

$$Q_1(x) = x - x_0 + \frac{b_n^{(0)}}{b_{n-1}^{(0)}} = x - x_1,$$

Где

$$x_1 = x_0 - \frac{b_n^{(0)}}{b_{n-1}^{(0)}}.$$

Аналогично получим:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b_n^{(k)}}{b_{n-1}^{(k)}}, \quad b_{n-1}^{(k)} \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

причем  $Q_k(x) = x - x_k$ .

В итоге имеем:

$$P(x) = (b_0^{(k)}x^{n-1} + b_1^{(k)}x^{n-2} + \dots + b_{n-2}^{(k)}x + b_{n-1}^{(k)})(x - x_k) + b_n^{(k)}.$$

Сравнивая это выражение с первоначальным, получим следующие формулы для вычисления коэффициентов  $b_i^{(k)}$ :

$$\begin{cases} a_0 = b_0^{(k)}, \\ a_1 = b_1^{(k)} - b_0^{(k)}x_k, \\ a_2 = b_2^{(k)} - b_1^{(k)}x_k, \\ \dots\dots\dots \\ a_n = b_n^{(k)} - b_{n-1}^{(k)}x_k. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases} b_0^{(k)} = a_0, \\ b_1^{(k)} = a_1 + a_0x_k, \\ b_2^{(k)} = a_2 + a_1x_k + a_0x_k^2, \\ \dots\dots\dots \\ b_{n-1}^{(k)} = a_{n-1} + a_{n-2}x_k + \dots + a_1x_k^{n-2} + a_0x_k^{n-1}, \\ b_n^{(k)} = a_n + a_{n-1}x_k + \dots + a_1x_k^{n-1} + a_0x_k^n. \end{cases}$$



Легко видеть, что последние два равенства можно переписать в виде

$$b_n^{(k)} = P(x_k),$$

$$b_{n-1}^{(k)} = \frac{P(x_k) - a_n}{x_k}.$$

Следовательно, имеем алгоритм для определения последовательности  $\{x_k\}$ :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b_n^{(k)}}{b_{n-1}^{(k)}} = x_k - \frac{x_k P(x_k)}{P(x_k) - a_n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

или

$$x_{k+1} = -\frac{a_n}{a_0 x_k^n + \dots + a_{n-1}}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.8)$$

Если  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ , то  $x^*$  – корень исходного уравнения.

**Упражнение.**

Определить связь алгоритма (4.8) с методом итерации. Отсюда дать условие сходимости.

**Замечание:**

Описанный выше алгоритм Лина достаточно часто применяют для выделения квадратичного множителя.

## ГЛАВА II

### Приближенное решение систем численных уравнений

Мы переходим к изучению методов численного решения систем нелинейных уравнений. В общем виде такую систему можно записать следующим образом:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

или

$$f(x) = 0, \quad \text{где } f = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T. \quad (1)$$

Частные случаи этой задачи (1)  $n = 1$ ,  $f$  – произвольная «хорошая» функция и 2)  $n$  – произвольное,  $f$  – линейная) мы уже достаточно подробно рассматривали. Поэтому естественно, что здесь будут иметь место те же основные этапы решения, что и в рассмотренных ранее частных случаях:

1. отделение корня и выбор начального приближения  $x_0$ ;
2. построение последовательности приближений;
3. контроль сходимости.

Практически тем же самым будет и набор алгоритмов, которые могут быть применены для решения обозначенной задачи (как, впрочем, и теоремы о сходимости). Правда, при этом уровень технической сложности исполнения будет намного выше.

Так, например, проблема отделения корня и удачного выбора начального приближения  $x_0$  превращается в самостоятельную и очень сложную проблему, не имеющую в общем случае сколько-нибудь удовлетворительного решения, что приводит к повышению роли исследования.

Мы ниже рассмотрим лишь методы уточнения этого приближения.

### § 1. Метод простой итерации и его видоизменения.

Как и во всех разобранных ранее частных случаях, метод состоит в следующем: система (1) преобразуется к виду, удобному для итераций (каноническому виду)

$$x = \varphi(x) \quad (1.1)$$

или в скалярном виде

$$x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

Сделать это принципиально возможно теми же способами, что и ранее, например, с помощью тождественного преобразования  $x = x + \psi(x)f(x)$ .

После этого приближение к решению  $x^{(*)}$  (или, что то же, к неподвижной точке отображения  $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ ) осуществляется по правилу

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

или в координатной форме

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad i = \overline{1, n}; \quad k = 0, 1, \dots$$

Выясним приближенную картинку поведения вектора ошибки вблизи корня.

Пусть, как и ранее,  $\varepsilon^{(k)} = x^{(*)} - x^{(k)}$ . Тогда, согласно (1.2),

$$x^{(*)} - \varepsilon^{(k+1)} = \varphi(x^{(*)} - \varepsilon^{(k)}).$$

Разлагая в ряд Тейлора в окрестности корня, имеем:

$$x^{(*)} - \varepsilon^{(k+1)} = \varphi(x^{(*)}) - \frac{\partial \varphi^{(*)}}{\partial x} \varepsilon^{(k)} + o(\|\varepsilon^{(k)}\|)$$

Или

$$\varepsilon^{(k+1)} \approx \frac{\partial \varphi(x^{(*)})}{\partial x} \varepsilon^{(k)}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$  – матрица Якоби отображения  $\varphi$ .

Естественно, выполняя соответствующие операции, мы предполагаем возможность их осуществления.

Формула (1.3) указывает, какие изменения претерпевает вектор ошибки на одном шаге итерации. Напомним, что аналогичные формулы мы имели и в случае метода простой итерации для систем линейных алгебраических уравнений (там  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = B$ ), и в случае

метода простой итерации для одного нелинейного уравнения. Эта аналогия позволяет утверждать, что если все собственные значения матрицы Якоби по модулю или какая-либо

ее норма будут меньше единицы, то при удачном выборе начального приближения метод простой итерации будет сходиться, причем со скоростью геометрической прогрессии.

Сформулируем сейчас строгое утверждение о сходимости метода простой итерации для систем, аналогичное соответствующей теореме из § 1 предыдущей главы. Предварительно напомним, что

**Определение.**

Отображение  $y = \varphi(x)$  называется сжимающим в области  $\Omega \subset R^n$ , если для любых  $x_1, x_2 \in \Omega$  выполняется неравенство  $\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq q\rho(x_1, x_2)$  при некотором  $q < 1$  (здесь  $\rho(x_1, x_2)$  – расстояние между  $x_1$  и  $x_2$ ). (По сути, приведенное определение является условием Липшица).

**Теорема.** Если:

1.  $\varphi(x)$  определена и непрерывна в области  $\Omega(x^{(0)}, \delta) = \{x : \rho(x^{(0)}, x) \leq \delta\}$ ;
2. Отображение  $\varphi(x)$  является сжимающим в этой области;
3. Справедливо неравенство  $\frac{m}{1-q} \leq \delta$ , где  $\rho(\varphi(x^{(0)}), x^{(0)}) \leq m$ ,

то:

1. Последовательность приближений (1.2) с начальным приближением  $x^{(0)}$  может быть построено;
2. В  $\Omega(x^{(0)}, \delta)$  уравнение (1.1) имеет решение и притом единственное;
3. Последовательность  $\{x^{(n)}\}$  сходится к этому решению;
4. Скорость сходимости определяется неравенством  $\rho(x^{(*)}, x^{(n)}) \leq \frac{m}{1-q} q^n$ .

*Доказательство* дословно повторяет соответствующее доказательство из § 1 предыдущей главы с заменой знака  $|\cdot|$  на  $\rho(\cdot, \cdot)$  (учитывая, что модуль – один из частных способов задания расстояния, причем для расстояния справедливо то же неравенство треугольника).

### 1.1. Методы Зейделя и Гаусса-Зейделя

По аналогии с методом Зейделя для систем линейных алгебраических уравнений на основе метода простой итерации можем записать итерационный алгоритм

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

или

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad i = \overline{1, n}; \quad k = 0, 1, \dots$$

(1.4) – метод Зейделя для системы (1.1). Скорость его сходимости, как и скорость сходимости метода простой итерации (если, конечно, она имеет место), линейна, т.е. равна скорости сходимости некоторой геометрической прогрессии. Достаточное условие сходимости выглядит аналогично линейному случаю:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\| < 1 \text{ для всех } x \in \Omega(x^{(0)}, \delta).$$

В практике вычислений достаточно часто рассматривают и другую разновидность метода Зейделя, которую в литературе называют методом Гаусса-Зейделя. В отличие от (1.4) она не требует предварительного преобразования системы (1) к каноническому виду и имеет вид

$$f_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad k = 0, 1, \dots$$

или

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) = 0, \\ f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k)}) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}) = 0, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

Нахождение каждого нового значения  $x_i^{(k+1)}$  требует решения, вообще говоря, нелинейного уравнения:

$$f_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь  $x_j^{(k)}$  ( $j > i$ ) известны как значения, найденные на предыдущей итерации, а  $x_j^{(k+1)}$  ( $j < i$ ) – как значения, найденные уже в ходе вычисления текущего приближения.

Для решения уравнения (1.6) (поскольку это одно уравнение с одним неизвестным) можно применять любой из известных итерационных методов (например, из числа описанных нами ранее).

Таким образом, имеем два вложенных итерационных процесса: один – внешний – задается формулами (1.5), а другой – внутренний – формулами соответствующего итерационного метода решения уравнения (1.6).

Например, в случае, если для решения уравнения (1.6) применяется метод Ньютона, то соответствующие формулы внутреннего итерационного процесса имеют вид

$$x_i^{s+1} = x_i^{(k)} - \frac{f_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (1.7)$$

Внутренний итерационный процесс проводят до сходимости последовательно для всех компонент (т.е. для  $i = 1, \dots, n$ ) и только вычислив все  $x_i^{(k+1)}$ , переходят к следующему шагу внешних итераций. В качестве начального приближения можно брать значение соответствующей компоненты, полученное на предыдущей внешней итерации:  $x_i^{0(k+1)} = x_i^{(k)}$ .

## § 2. Метод Ньютона и его видоизменения

Другой версией решения нелинейных систем, не требующей предварительного преобразования к виду, удобному для итерации, как и в случае одного нелинейного уравнения, является метод Ньютона. Его основная идея, как это уже отмечалось, – линеаризация. Изложим ее подробнее.

Как и в случае одного уравнения, введем вектор ошибки  $\varepsilon^{(k)} = x^{(*)} - x^{(k)}$ . Тогда для его определения имеем задачу

$$f(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) = 0.$$

Разлагая левую часть по формуле Тейлора и ограничиваясь лишь линейными членами, будем иметь

$$f(x^{(k)}) + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x} \varepsilon^{(k)} \approx 0.$$

Если теперь, как и ранее, ввести обозначение  $\Delta x^{(k)} \approx \varepsilon^{(k)}$ , то в итоге получим систему линейных алгебраических уравнений для определения поправок:

$$\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x} \Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}). \quad (2.1)$$

Если матрица Якоби  $\frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x}$  окажется невырожденной, то из (2.1) можно единственным образом найти вектор поправок  $\Delta x^{(k)}$  и, следовательно, построить следующее приближение:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}. \quad (2.2)$$

Отметим, что решение системы (2.1) можно искать с помощью любого (вообще говоря, наиболее подходящего) метода решения систем линейных алгебраических уравнений, как прямого, так и итерационного. В последнем случае вновь, как и в методе Гаусса-Зейделя, получаем вложенные итерационные процессы.

Рассмотрим приближенную картину поведения вектора ошибки, считая его координаты малыми по модулю.

Так как

$$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = \varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k+1)},$$

$$f(x^{(k)}) = f(x^{(*)} - \varepsilon^{(k)}) = f(x^{(*)}) - \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} \varepsilon^{(k)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(k)} \right) + \dots \approx$$

$$\approx -\frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} \varepsilon^{(k)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(k)} \right),$$

$$\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x} = \frac{\partial f(x^{(*)} - \varepsilon^{(k)})}{\partial x} = \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} - \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)} + \dots \approx$$

$$\approx \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} - \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)},$$

то, подставив эти выражения в (2.1), будем иметь:

$$\left( \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} - \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)} \right) (\varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k+1)}) \approx \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} \varepsilon^{(k)} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(k)} \right)$$

или

$$\left( \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} - \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)} \right) \varepsilon^{(k+1)} \approx -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(k)} \right).$$

Домножая обе части последнего равенства на  $\frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} + \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)}$ , получим:

$$\left( \left( \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)} \right)^2 \right) \varepsilon^{(k+1)} \approx -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} + \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)} \right) \left( \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(k)} \right).$$

Наконец, отбрасывая члены порядка  $o(\|\varepsilon^{(k)}\|^2)$  и домножая обе части слева на  $\left( \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} \right)^{-2}$ , приходим к приближенному равенству

$$\varepsilon^{(k+1)} \approx -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f(x^{(*)})}{\partial x} \right]^{-1} \left( \frac{\partial^2 f(x^{(*)})}{\partial x^2} \varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(k)} \right),$$

из которого следует, что ошибка на  $(k+1)$ -м шаге квадратично зависит от ошибки на  $k$ -м шаге, что означает возможную квадратичную сходимость.

Строгий теорем о сходимости метода Ньютона существует несколько. Сформулируем одну из них.

**Теорема.**

Пусть в шаре  $\Omega(x^{(*)}, \delta)$  выполнены условия

$$1. \left\| \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]^{-1} \right\| \leq a_1 \text{ для всех } x \in \Omega(x^{(*)}, \delta); \quad (2.3)$$

$$2. \left\| f(x_1) - f(x_2) - \frac{\partial f(x_2)}{\partial x} (x_1 - x_2) \right\| \leq a_2 \|x_1 - x_2\|^2 \text{ для любых } x_1, x_2 \in \Omega(x^{(*)}, \delta); \quad (2.4)$$

$$3. x^{(0)} \in \Omega(x^{(*)}, b), \text{ где } b = \min\{\delta, c^{-1}\}, \text{ а } c = a_1 a_2,$$

Тогда метод Ньютона (2.1) сходится в  $\Omega(x^{(*)}, b)$  и имеет место оценка погрешности

$$\|x^{(k)} - x^{(*)}\| \leq c^{-1} (c \|x^{(0)} - x^{(*)}\|)^k.$$

В отличие от рассматривавшейся нами ранее одномерной теоремы здесь существование решения  $x^{(*)}$  предполагается.

*Доказательство.*

Индукцией по  $k$  покажем, что все  $x^{(k)}$  принадлежат шару  $\Omega(x^{(*)}, b)$ . По условию  $x^{(0)} \in \Omega(x^{(*)}, b)$ . Пусть при некотором  $k = n$  это также справедливо. Тогда, так как  $b \leq \delta$ , то  $x^{(n)} \in \Omega(x^{(*)}, \delta)$ . Тогда, подставив в (2.4)  $x_1 = x^{(*)}$ ,  $x_2 = x^{(n)}$ , получим:

$$\left\| f(x^{(*)}) - f(x^{(n)}) - \frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x} (x^{(*)} - x^{(n)}) \right\| \leq a_2 \|x^{(*)} - x^{(n)}\|^2.$$

Поскольку  $f(x^{(n)}) = -\frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x} (x^{(n+1)} - x^{(n)})$ , а  $f(x^{(*)}) = 0$ , то отсюда имеем:

$$\left\| \frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x} (x^{(n+1)} - x^{(*)}) \right\| \leq a_2 \|x^{(n)} - x^{(*)}\|^2.$$

Тогда, воспользовавшись условием (2.3), получим:

$$\begin{aligned}\|x^{(n+1)} - x^{(*)}\| &= \left\| \left[ \frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x} (x^{(n+1)} - x^{(*)}) \right] \right\| \leq \\ &\leq \left\| \left[ \frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x} \right]^{-1} \right\| \left\| \left[ \frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x} (x^{(n+1)} - x^{(*)}) \right] \right\| \leq a_1 a_2 \|x^{(n)} - x^{(*)}\|^2,\end{aligned}$$

т.е.

$$\|x^{(n+1)} - x^{(*)}\| \leq c \|x^{(n)} - x^{(*)}\|^2 < cb^2 = (cb)b \leq b$$

и, таким образом,  $x^{(n+1)} \in \Omega(x^{(*)}, b)$ . Следовательно, по индукции все  $x^{(k)} \in \Omega(x^{(*)}, b)$  и для них выполняется неравенство

$$\|x^{(k+1)} - x^{(*)}\| \leq c \|x^{(k)} - x^{(*)}\|^2,$$

из которого получаем (см. рассуждения по этому поводу в § 3 предыдущей главы):

$$c \|x^{(k)} - x^{(*)}\| \leq (c \|x^{(0)} - x^{(*)}\|)^{2^k},$$

а поскольку  $c \|x^{(0)} - x^{(*)}\| < cb \leq 1$ , то отсюда следует сходимость последовательности приближений. □

**Замечание.**

Если  $f \in C^2(\Omega(x^{(*)}, \delta))$ , то соотношение (2.4) автоматически выполняется.

Как и в случае одного нелинейного уравнения, можно говорить о видоизменениях метода Ньютона.

Так, например, метод Ньютона с постоянной матрицей Якоби

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x} \Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}), \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

Применяют с целью уменьшения объема вычислений на одном шаге. При этом для каждого значения  $k$  необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений с одной

и той же матрицей. Поэтому может оказаться целесообразным нахождение  $\left[ \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x} \right]^{-1}$  (и

нахождение поправки вместо (2.5) по формуле  $\Delta x^{(k)} = - \left[ \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x} \right]^{-1} f(x^{(k)})$ ), либо нахождение соответствующих компонент  $LU$ -разложения.

Конечно же, мы должны помнить, что видоизменение (2.5) обладает более медленной сходимостью по сравнению с базовым методом (2.1).

Помимо рассмотренной выше модификации в настоящее время достаточно широкое применение находят методы, основное предназначение которых – избежать явного вычисления производных. Среди последних различают:

### 1<sup>0</sup>. Дискретный метод Ньютона:

Задаем некоторый векторный параметр  $h^{(k)} \in R^n$  (вообще говоря, свой для каждого значения  $k$ ). Тогда частные производные можно заменить, например, следующим образом:

$$\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j - h_j^{(k)}, \dots, x_n)}{h_j^{(k)}} \quad (2.6)$$

(чаще всего  $h_j$  выбирают порядка *macheps*) и, следовательно, матрица Якоби заменяется некоторой матрицей  $J(x^{(k)}, h^{(k)})$ . Тогда вместо (2.1) в алгоритме дискретного метода Ньютона для каждого  $k$  решается система

$$J(x^{(k)}, h^{(k)}) \Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}). \quad (2.7)$$

### 2<sup>0</sup>. Метод секущих.

В этом случае в качестве  $h^{(k)}$  берут  $h^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$ . Как следствие, формулы для аппроксимации производных будут иметь вид

$$\frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_j^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_j^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k)})}{x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.8)$$

При этом на каждом шаге метода секущих решается система типа (2.7).

Другое направление совершенствования метода Ньютона связано с тем, чтобы обойти трудности, возникающие при обращении матриц. Это привело к появлению алгоритмов, в которых аппроксимации матриц, обратных к матрицам Якоби, на каждом шаге пересчитываются с минимизацией вычислительных затрат по некоторым рекуррентным формулам (например, с помощью специально подобранных матриц единичного ранга). В литературе такие алгоритмы получили название квазиньютоновских.

## § 3. Другие подходы к решению нелинейных систем

### 3.1. Методы вариационного типа

Подобно случаю систем линейных алгебраических уравнений для решения нелинейных систем могут применяться методы типа рассмотренных ранее методов спуска, которые мы получали исходя из замены задачи решения системы задачей вариационного типа: минимизации некоторого функционала.

Итак, в этом случае строится некоторый вещественный функционал, который обращается в нуль на любом решении системы (1) и положителен во всех остальных случаях, например,

$$Q(x) = \|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, \dots, x_n). \quad (3.1)$$

Затем каким-либо образом отыскиваются точки, доставляющие минимум этому функционалу. Приведем примеры соответствующих алгоритмов.

Пусть известно некоторое приближение  $x^{(k)}$  к точке минимума, а направление поиска минимума задается с помощью некоторого вектора  $g^{(k)}$ , т.е.

$$x = x^{(k)} + t g^{(k)}, \quad (3.2)$$



где  $t > 0$  – некоторый числовой параметр, который выбирают таким образом, чтобы выполнялось условие

$$Q(x) < Q(x^{(k)}). \quad (3.3)$$

Найдя каким-либо образом параметр  $t = t_k$ , следующее приближение строят по правилу

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k g^{(k)}.$$

В качестве  $t_k$  можно, например, взять

$$t_k = \arg \min_t Q(x^{(k)} + t g^{(k)}),$$

решив для этого задачу минимизации функции одной независимой переменной.

Если шаг (3.2) разбить на  $n$  подшагов, на каждом из которых направление поиска задавать вектором  $e_i$  – ортом  $i$ -й координатной оси, то получим алгоритм метода покоординатного спуска, который может быть сформулирован следующим образом: при известном значении  $x^{(k)}$  для  $i = \overline{1, n}$  находим:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_i^{(k)} e_i,$$

где

$$t_i^{(k)} = \arg \min_t Q(x^{(k)} + t e_i),$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)}; \quad x^{(k+1)} = x^{(k+1)}.$$

Таким образом, один шаг метода покоординатного спуска состоит в последовательной минимизации функционала  $Q(x)$  вдоль каждой из координатных осей.

Если же в качестве  $g^{(k)}$  в (3.2) выбрать вектор, скорость изменения  $Q(x)$  вдоль которого максимальна (это приводит к равенству  $g^{(k)} = -\text{grad } Q(x^{(k)})$ ), то в итоге получим метод наискорейшего (градиентного) спуска:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - t_k \text{grad } Q(x^{(k)}), \quad (3.4)$$

где  $t_k$  определяется из условия

$$t_k = \arg \min_t Q(x^{(k)} - t \text{grad } Q(x^{(k)})).$$

### 3.2. Методы продолжения по параметру

Как мы уже отмечали ранее, большинство рассмотренных методов обеспечивает сходимость к решению только лишь в том случае, если начальное приближение достаточно близко к  $x^{(*)}$ . Поэтому методы, о которых пойдет речь ниже, можно рассматривать, как попытку расширить область сходимости, или иначе, как способ получения достаточно близких начальных приближений.

Их сущность заключается в замене задачи нахождения решения системы  $f(x) = 0$  специально построенной последовательностью задач, каждая из которых незначительно отличается от предыдущей. Последовательность строится таким образом, что первая система имеет известное решение  $x^{(0)}$ , а последняя совпадает с исходной системой.

Поскольку соседние системы последовательности отличаются незначительно, то решение предыдущей окажется хорошим начальным приближением к решению последующей, и, таким образом, можно ожидать, что выбранный итерационный процесс окажется сходящимся. Тогда, переходя от одной задачи последовательности к другой, в конце процесса находим решение исходной системы.

Таким образом, вместо системы  $f(x) = 0$  рассмотрим семейство систем

$$H(x, t) = 0, \quad t \in [0; 1], \quad (3.5)$$

зависящее от параметра  $t$ .

При этом решение системы  $H(x, 0) = 0$  известно ( $x^{(0)}$ ), а решение системы  $H(x, 1) = 0$  совпадает с решением системы  $f(x) = 0$ .

Простейшим примером (3.5) может служить семейство

$$H(x, t) = tf(x) + (1-t)f_0(x),$$

где система  $f_0(x) = 0$  имеет известное решение.

Тогда рассматриваем разбиение отрезка  $[0; 1]$  точками  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  и последовательно решаем системы

$$H(x, t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

применив какой-либо итерационный метод, использующий в качестве начального приближения  $i$ -го уравнения решение  $(i-1)$ -го уравнения:  $x^{(k+1)}(t_i) = x(t_{i-1})$ . Если разность  $t_{i+1} - t_i$  достаточно мала, можно надеяться на сходимость (либо регулировать последнюю за счет выбора указанной величины).

## РАЗДЕЛ II

### Приближение функций

#### Дополнительная литература:

1. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошников В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.

На практике часто бывает необходимо многократно вычислять значение некоторой функции  $f(x)$  скалярного либо векторного аргумента, например, значения элементарных функций  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  и других (особенно это касается работы на компьютере). Запоминать и хранить таблицы значений таких функций, а затем тратить время на выборку нужного значения из таблицы нецелесообразно. Поэтому часто для нахождения значений функции  $f(x)$  с заданной точностью  $\varepsilon$  ее заменяют другой, легко вычисляемой функцией  $\varphi(x, a) \in \Phi(x, a)$  – некоторому подмножеству пространства, которому принадлежит  $f(x)$ . Здесь  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  – векторный параметр, а значения  $\varphi(x, a)$  вычисляются проще.

В зависимости от способа оценки близости  $f(x)$  и  $\varphi(x, a)$  получаются различные способы приближения (наилучшие либо интерполяционные). Кроме того, аппроксимационные задачи можно естественным образом классифицировать исходя из того, как класс приближающих функций  $\Phi(x, a)$  зависит от параметров  $a_k$  и как он зависит от переменных  $x_i$ .

**Определение.** Аппроксимационная задача называется линейной, если множество  $\Phi$  линейно относительно параметров  $a_k$  (например, является линейным подпространством, натянутым на заданные базисные функции  $\varphi_k(x)$ ,  $k = \overline{0, n}$ ); в противном случае задача называется нелинейной.

По зависимости от аргументов  $x_i$  наиболее часто употребляются следующие частные случаи:

- 1<sup>0</sup>.** Полиномиальное приближение многочленами одной или нескольких независимых переменных.

В случае двух независимых переменных  $x, y$  класс  $\Phi$  может, например, состоять из функций

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j.$$

(Вообще говоря, степени многочленов по каждой из переменных могут быть различными).

- 2<sup>0</sup>.** Экспоненциальное приближение.

В этом случае  $\Phi$  состоит из функций вида

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} e^{b_{ij} x_j}.$$

Если  $b_{ij}$  – фиксированные постоянные, то имеем линейное приближение, в противном случае – нелинейное;  $a_{ij}$  – либо постоянные, подлежащие определению, либо многочлены заданной степени (также подлежащие определению).

### 3<sup>0</sup>. Тригонометрическое приближение.

В этом случае используются функции

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (x_j - c_{ij}).$$

### 4<sup>0</sup>. Дробно-рациональное приближение.

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i u_i(x)}{\sum_{i=0}^m b_i v_i(x)},$$

Где  $a_i$  и  $b_i$  – свободные параметры, а  $u_i(x)$  и  $v_i(x)$  – фиксированные функции.

## ГЛАВА III

### Наилучшие приближения функций

Приведем общую постановку задачи. При этом будем оставаться в рамках линейных приближений.

Пусть  $R$  – линейное нормированное пространство и  $f \in R$  – элемент, который требуется приблизить. Возьмем в  $R$   $n+1$  линейно независимых элементов  $\varphi_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) и образуем  $(n+1)$ -мерное линейное подпространство  $\Phi_n$  всевозможных линейных комбинаций (обобщенных многочленов)

$$\varphi = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i \quad (1)$$

с действительными коэффициентами  $c_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Рассмотрим числовое множество

$$\Delta(f, \varphi) = \|f - \varphi\|, \quad (2)$$

где  $f$  – фиксированный, а  $\varphi$  – произвольный элементы из  $R$  и  $\Phi_n$  соответственно. Это числовое множество ограничено снизу (нулем по свойствам нормы) и, следовательно, имеет нижнюю грань, т.е. существует такое число  $\Delta(f)$ , что

$$\Delta(f) = \inf_{\varphi \in \Phi_n} \Delta(f, \varphi). \quad (3)$$

**Определение 1.** Величина  $\Delta(f)$  называется наилучшим приближением элемента  $f$  на множестве  $\Phi_n$ .

Соответственно, возникает вопрос: существует ли в множестве  $\Phi_n$  элемент  $\varphi_0$ , для которого выполняется соотношение (3) и если да, то как его найти.

**Определение 2.** Элемент  $\varphi_0 \in \Phi_n$ , для которого выполняется равенство (3), называется элементом наилучшего приближения для  $f$  на  $\Phi_n$  (или проекцией  $f$  на  $\Phi_n$ ).

Справедлива

**Теорема 1.** Для любого  $f \in R$  в  $\Phi_n$  существует элемент наилучшего приближения, причем множество всех элементов наилучшего приближения выпукло.

*Доказательство.*

Ключевым моментом доказательства существования является использованием того факта, что любая непрерывная на компакте функция достигает на нем своих граней (теорема Вейерштрасса), причем нижняя грань на специально подобранном компакте даст искомое наилучшее приближение.

Итак, поскольку в силу неравенства треугольника

$$\left\| f - \sum_{i=0}^n c_i^1 \varphi_i \right\| - \left\| f - \sum_{i=0}^n c_i^2 \varphi_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^n (c_i^1 - c_i^2) \varphi_i \right\| \leq \sum_{i=0}^n |c_i^1 - c_i^2| \|\varphi_i\|,$$

то функция

$$F(c_0, c_1, \dots, c_n) = \Delta(f, \varphi) = \|f - \varphi\| = \left\| f - \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i \right\|$$

является непрерывной функцией своих аргументов  $c_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  при любом  $f \in R$ .

Пусть  $|c|$  – евклидова норма вектора  $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ .

Функция  $F_0(c_0, c_1, \dots, c_n) = \|c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n\|$  непрерывна на единичной сфере  $|c| = 1$  и, поскольку в конечномерном пространстве единичная сфера – компакт, то, по теореме Вейерштрасса, в некоторой ее точке  $(c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*)$  достигает своей нижней грани  $F^*$  по сфере, причем  $F^* \neq 0$ , так как равенство  $F^* = \|c_0^* \varphi_0 + c_1^* \varphi_1 + \dots + c_n^* \varphi_n\| = 0$  противоречит линейной независимости элементов  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Тогда для любого  $c \neq 0$  справедлива оценка

$$\|c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n\| = F_0(c_0, c_1, \dots, c_n) = |c| F_0\left(\frac{c_0}{|c|}, \frac{c_1}{|c|}, \dots, \frac{c_n}{|c|}\right) \geq |c| \cdot F^*.$$

Далее, функция  $F(c_0, c_1, \dots, c_n)$  непрерывна в замкнутом шаре  $|c| \leq \gamma$ , а следовательно, в некоторой его точке достигает своей нижней грани по шару  $F^0$ . При этом  $F^0 \leq F(0, 0, \dots, 0) = \|f\|$ .

Вне этого шара выполняются соотношения

$$F(c_0, c_1, \dots, c_n) \geq \|c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n\| - \|f\| \geq |c| \cdot F^* - \|f\| > \gamma F^* - \|f\|.$$

Если теперь выбрать  $\gamma > \frac{2\|f\|}{F^*}$ , то из записанного выше неравенства будет следовать, что

$$F(c_0, c_1, \dots, c_n) > \frac{2\|f\|}{F^*} F^* - \|f\| = \|f\| \geq F^0 = F(c_0^0, c_1^0, \dots, c_n^0).$$

Таким образом,  $F(c_0, c_1, \dots, c_n) \geq F^0 = F(c_0^0, c_1^0, \dots, c_n^0)$  при всех возможных значениях  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , т.е. существует, по крайней мере, один элемент  $\Phi_0$ , для которого выполнено соотношение (4).

Если теперь  $\Phi_0 = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i$ ,  $\Phi_0^* = \sum_{i=0}^n c_i^* \varphi_i$  — два элемента наилучшего приближения,

то

$$\|f - \Phi_0\| = \|f - \Phi_0^*\| = \Delta(f).$$

В случае, если  $\Delta(f) = 0$ , имеем:  $f = \Phi_0 = \Phi_0^*$ . Поэтому рассмотрим случай  $\Delta(f) > 0$ . Пусть  $m$  — точка отрезка, соединяющего  $\Phi_0$  с  $\Phi_0^*$ , т.е.

$$m = a\Phi_0 + b\Phi_0^*, \quad a, b \geq 0, \quad a + b = 1.$$

Тогда

$$\Delta(f) \leq \|f - m\| = \|a(f - \Phi_0) + b(f - \Phi_0^*)\| \leq a\|f - \Phi_0\| + b\|f - \Phi_0^*\| = \Delta(f).$$

Следовательно,  $\|f - m\| = \Delta(f)$ , а значит,  $m$  также является элементом наилучшего приближения и множество всех элементов наилучшего приближения выпукло.  $\square$

**Определение 3.** Нормированное пространство  $R$  называется строго нормированным, если в нем равенство  $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$  возможно только при условии  $f = \lambda g$ ,  $\lambda > 0$ .

Справедлива

**Теорема 2.** В строго нормированном пространстве  $R$  элемент наилучшего приближения единственен.

*Доказательство.*

Пусть существует два элемента наилучшего приближения  $\Phi_0$  и  $\Phi_0^*$ , т.е.

$$\|f - \Phi_0\| = \|f - \Phi_0^*\| = \Delta(f),$$

и пусть  $\Delta(f) > 0$ , ибо в противном случае  $f = \Phi_0 = \Phi_0^*$ . В силу выпуклости множества всех элементов наилучшего приближения имеем:  $\frac{\Phi_0 + \Phi_0^*}{2}$  — элемент наилучшего при-

ближения, т.е.  $\left\|f - \frac{\Phi_0 + \Phi_0^*}{2}\right\| = \Delta(f)$ . Но тогда

$$\|(f - \Phi_0) + (f - \Phi_0^*)\| = \|f - \Phi_0\| + \|f - \Phi_0^*\| > 0.$$

Так как  $R$  строго нормировано, то существует  $\lambda$  такое, что  $f - \Phi_0 = \lambda(f - \Phi_0^*)$ . Если  $\lambda \neq 1$ , то отсюда  $f = \frac{\Phi_0^* - \lambda\Phi_0}{1 - \lambda}$ , т.е.  $f$  – элемент пространства, натянутого на  $\Phi_0, \Phi_0^*$ , что невозможно в силу того, что  $\Delta(f) > 0$ . Следовательно,  $\lambda = 1$  и  $\Phi_0 = \Phi_0^*$ .  $\square$

### Упражнения.

1. Доказать, что пространство  $L_p(a; b)$  является строго нормированным при  $1 < p < \infty$ .
2. Доказать, что пространство  $C(a; b)$  не является строго нормированным.

## § 1. Наилучшие приближения в гильбертовом пространстве

Пусть  $R$  – гильбертово пространство,  $H$  – его линейное подпространство,  $f \in R$ .

Так как гильбертово пространство является строго нормированным, то, согласно общей теории, изложенной выше, в  $H$  существует единственный элемент наилучшего приближения. Обозначив его  $h_0$ , поставим задачу: найти  $h_0$ .

Справедлива

**Теорема 3.** Для того чтобы  $h_0$  был элементом наилучшего приближения к  $f$  в подпространстве  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение  $f - h_0 \perp H$ , т.е.  $(f - h_0, h) = 0$  для всех  $h \in H$ .

*Доказательство.*

Пусть  $h_0$  – элемент наилучшего приближения и пусть также существует элемент  $h_1 \in H$  такой что  $(f - h_0, h_1) = \alpha \neq 0$ . Можно считать, что  $\|h_1\| = 1$ , так как в противном случае можно было бы вместо  $h_1$  взять  $\frac{h_1}{\|h_1\|}$ . Рассмотрим элемент  $h_2 = h_0 + \alpha h_1$ . Для этого элемента имеем:

$$\begin{aligned} \|f - h_2\|^2 &= (f - h_2, f - h_2) = (f - h_0 - \alpha h_1, f - h_0 - \alpha h_1) = (f - h_0, f - h_0) - \\ &- \alpha(h_1, f - h_0) - \bar{\alpha}(f - h_0, h_1) + \alpha\bar{\alpha}(h_1, h_1) = \|f - h_0\|^2 - \alpha\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\alpha + \alpha\bar{\alpha} = \|f - h_0\|^2 - |\alpha|^2, \end{aligned}$$

т.е.  $\|f - h_2\|^2 < \|f - h_0\|^2$ , что невозможно, так как по предположению  $h_0$  – элемент наилучшего приближения.

Пусть теперь  $h$  – произвольный элемент пространства  $H$  и для него выполняется условие  $(f - h_0, h) = 0$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \|f - h, f - h\|^2 &= (f - h_0 + h_0 - h, f - h_0 + h_0 - h) = (f - h_0, f - h_0) + \\ &+ (h_0 - h, f - h_0) + (f - h_0, h_0 - h) + (h_0 - h, h_0 - h). \end{aligned}$$

Поскольку  $h_0 - h \in H$ , то второе и третье слагаемые обращаются в нуль. Следовательно,

$$\|f - h\|^2 = \|f - h_0\|^2 + \|h - h_0\|^2$$

и, значит,  $\|f - h\|^2 > \|f - h_0\|^2$  при всех  $h \neq h_0$ , т.е.  $h_0$  – элемент наилучшего приближения.  $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о построении элемента наилучшего приближения.

Пусть подпространство  $\Phi_n$  порождено элементами  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , а  $\Phi_0$  – элемент наилучшего приближения к  $f \in R$  в  $\Phi_n$ . Так как

$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i,$$

То в силу теоремы 3 задача равносильна отысканию коэффициентов  $c_0, c_1, \dots, c_n$  таких, чтобы выполнялось равенство

$$(f - \Phi_0, \varphi) = 0 \text{ для всех } \varphi \in \Phi_n.$$

Последнее же условие равносильно системе из  $(n+1)$  условий вида

$$(f - \Phi_0, \varphi_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Последние равенства представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, которые в развернутом виде можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} c_0(\varphi_0, \varphi_0) + c_1(\varphi_1, \varphi_0) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_0) = (f, \varphi_0), \\ c_0(\varphi_0, \varphi_1) + c_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_1) = (f, \varphi_1), \\ \dots \\ c_0(\varphi_0, \varphi_n) + c_1(\varphi_1, \varphi_n) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n). \end{cases} \quad (1.1)$$

Матрица системы (1.1)  $G_{n+1} = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  называется матрицей Грамма системы элементов  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Так как  $(\varphi_i, \varphi_j) = \overline{(\varphi_j, \varphi_i)}$ , то матрица Грамма является эрмитовой.

**Лемма.** Если система элементов  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно независима, то матрица  $G_{n+1}$  положительно определена.

*Доказательство.*

Пусть  $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)^T$  – произвольный вектор с вещественными коэффициентами. Тогда

$$\left\| \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i \right\|^2 = \left( \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i, \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i \right) = \sum_{i,j=0}^n c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j) = (G_{n+1} c, c) \geq 0.$$

С другой стороны, если  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно независимы, то равенство  $\left\| \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i \right\| = 0$  возможно только в том случае, когда все  $c_i = 0, i = 0, 1, \dots, n$ .

Таким образом,  $(G_{n+1} c, c) > 0$  для всех  $c \neq 0$  и, согласно определению,  $G_{n+1}$  положительно определена.  $\square$



Так как  $G_{n+1}$  положительно определена, то ее определитель отличен от нуля и, следовательно, система (1.1) имеет единственное решение (по сути, мы получили еще одно доказательство существования и единственности элемента наилучшего приближения).

Заметим, что в рассматриваемом случае достаточно несложно получить и формулу для величины наилучшего приближения. Действительно, имеем:

$$\Delta^2(f) = \|f - \Phi_0\|^2 = (f - \Phi_0, f - \Phi_0) = (f - \Phi_0, f) - (f - \Phi_0, \Phi_0).$$

Последнее слагаемое здесь равно нулю в силу теоремы 3. Поэтому

$$\Delta^2(f) = (f - \Phi_0, f) = (f, f) - (\Phi_0, f) = (f, f) - c_0(\varphi_0, f) - c_1(\varphi_1, f) - \dots - c_n(\varphi_n, f).$$

Рассматривая полученное уравнение совместно с системой (1.1), можем записать:

$$\begin{cases} c_0(\varphi_0, \varphi_0) + c_1(\varphi_1, \varphi_0) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_0) - 1 \cdot (f, \varphi_0) = 0, \\ c_0(\varphi_0, \varphi_1) + c_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_1) - 1 \cdot (f, \varphi_1) = 0, \\ \dots \\ c_0(\varphi_0, \varphi_n) + c_1(\varphi_1, \varphi_n) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_n) - 1 \cdot (f, \varphi_n) = 0, \\ c_0(\varphi_0, f) + c_1(\varphi_1, f) + \dots + c_n(\varphi_n, f) - 1 \cdot ((f, f) - \Delta^2(f)) = 0. \end{cases}$$

Полученную систему соотношений можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $c_0, c_1, \dots, c_n$  и  $-1$ . Так как эта система имеет ненулевое решение, то ее матрица вырождена, т.е.

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_n, \varphi_0) & (f, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) & (f, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) & (f, \varphi_n) \\ (\varphi_0, f) & (\varphi_1, f) & \dots & (\varphi_n, f) & -\Delta^2(f) + (f, f) \end{vmatrix} = 0.$$

Представляя элементы последнего столбца в виде суммы  $(f, \varphi_i) = (f, \varphi_i) + 0$ , перепишем полученное равенство в виде суммы

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_n, \varphi_0) & 0 \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) & 0 \\ (\varphi_0, f) & (\varphi_1, f) & \dots & (\varphi_n, f) & -\Delta^2(f) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_n, \varphi_0) & (f, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) & (f, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) & (f, \varphi_n) \\ (\varphi_0, f) & (\varphi_1, f) & \dots & (\varphi_n, f) & (f, f) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, разлагая первый из определителей по последнему столбцу, найдем:

$$\Delta^2(f)G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, f)$$

и, следовательно,

$$\Delta^2(f) = \frac{G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, f)}{G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)}. \quad (1.2)$$

Таким образом, для построения наилучшего приближения в гильбертовом пространстве необходимо:

1. выбрать систему  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  базисных элементов подпространства  $\Phi_n$ ;
2. составить и решить систему (1.1). Ее решения будут коэффициентами линейной комбинации функций  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , задающей элемент наилучшего приближения.

При практическом построении наилучшего приближения нужно проявлять известную осторожность при выполнении первого пункта сформулированного выше алгоритма, поскольку при неудачном выборе матрица Грамма может оказаться плохо обусловленной со всеми вытекающими отсюда последствиями. Это, в конечном итоге, определяет и выбор параметра  $n$ , поскольку вместо ожидаемой сходимости при  $n \rightarrow \infty$  с ростом  $n$  можно получать все более плохие результаты.

Впрочем, построение элемента наилучшего приближения заметно упрощается, если  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  – ортонормированная система элементов, так как в этом случае система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} c_0 = (f, \varphi_0), \\ c_1 = (f, \varphi_1), \\ \dots \\ c_n = (f, \varphi_n). \end{cases} \quad (1.3)$$

Соответствующая величина  $\Delta(f)$  также вычисляется проще:

$$\begin{aligned} \Delta^2(f) &= (f, f) - c_0(\varphi_0, f) - c_1(\varphi_1, f) - \dots - c_n(\varphi_n, f) = \\ &= (f, f) - c_0 \overline{c_0} - c_1 \overline{c_1} - \dots - c_n \overline{c_n} = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^n |c_i|^2, \end{aligned}$$

т.е.

$$\Delta(f) = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=0}^n |c_i|^2}. \quad (1.4)$$

В общем случае ортонормированный базис можно построить, используя известную процедуру ортогонализации Грамма-Шмидта. Напомним, в чем ее смысл.

Пусть имеется система линейно независимых элементов  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  гильбертова пространства  $R$ . Тогда можно построить такую ортонормированную систему  $g_0, g_1, \dots, g_n$ , что элементы ее будут линейными комбинациями элементов  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Будем строить систему  $g_0, g_1, \dots, g_n$  последовательно.

Положим  $g_0 = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$  (деление возможно, так как линейно независимая система не содержит нулевого элемента).

Рассмотрим далее элемент  $\psi_1 = \varphi_1 - \alpha_{10}g_0$  и подберем его так, чтобы выполнялось равенство  $(\psi_1, g_0) = 0$ . Получим:

$$0 = (\psi_1, g_0) = (\varphi_1, g_0) - \alpha_{10}(g_0, g_0) = (\varphi_1, g_0) - \alpha_{10}.$$

Отсюда следует, что  $\alpha_{10} = (\varphi_1, g_0)$ . Очевидно,  $\|\psi_1\| \neq 0$ , так как в противном случае выполнялось бы соотношение  $\varphi_1 + \alpha g_0 = \varphi_1 + \alpha \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|} = 0$ , что невозможно в силу линейной независимости элементов  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ .

Положим  $g_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}$ . Тогда  $\|g_1\| = 1$  и  $(g_0, g_1) = 0$ .

Пусть уже построены элементы  $g_0, g_1, \dots, g_k$  такие, что  $\|g_0\| = \|g_1\| = \dots = \|g_k\| = 1$ ,  $(g_i, g_j) = 0$  при  $i \neq j$  и элемент  $g_i$  является линейной комбинацией элементов  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_i$ .

Построим элемент

$$\psi_{k+1} = \varphi_{k+1} - \alpha_{k+1,0}g_0 - \alpha_{k+1,1}g_1 - \dots - \alpha_{k+1,k}g_k$$

и подберем числа  $\alpha_{k+1,i}$  так, чтобы выполнялись равенства  $(\psi_{k+1}, g_i) = 0$ ,  $i = \overline{0, k}$ .

Получим:

$$0 = (\psi_{k+1}, g_i) = (\varphi_{k+1}, g_i) - \alpha_{k+1,i}(g_i, g_i) = (\varphi_{k+1}, g_i) - \alpha_{k+1,i},$$

т.е.

$$\alpha_{k+1,i} = (\varphi_{k+1}, g_i), \quad i = \overline{0, k}.$$

Так как  $\psi_{k+1}$  есть линейная комбинация  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}$ , то  $\psi_{k+1} \neq 0$ . Поэтому можно положить  $g_{k+1} = \frac{\psi_{k+1}}{\|\psi_{k+1}\|}$ .

По индукции искомая последовательность может быть построена при любых  $n$ .

**Замечание.** Коэффициенты  $c_i$  в случае использования для построения элемента наилучшего приближения обобщенного многочлена по ортогональной системе являются коэффициентами Фурье элемента  $f$  по системе  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

### 1.1. Наилучшее среднеквадратичное приближение функций алгебраическими многочленами

Возьмем сейчас в качестве  $R$  пространство вещественнозначных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке  $[a; b]$  по весу  $p(x)$  (которое будем обозначать  $L_2(p)[a; b]$ ). Функция  $p(x)$  удовлетворяет условиям:

1.  $p(x) \geq 0$  на  $[a; b]$ ;
2.  $p(x)$  обращается в нуль на  $[a; b]$  не более чем на множестве меры нуль.

Скалярное произведение в таком пространстве можно задать формулой

$$(f, g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx. \quad (1.5)$$

В качестве системы функций  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  выберем систему  $\varphi_i(x) = x^i, i = \overline{0, n}$ .  
Обобщенный многочлен  $\varphi = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i$  в этом случае превратится в обычный алгебраический  
многочлен

$$\varphi = P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i. \quad (1.6)$$

Согласно общей теории, изложенной выше, существует (и притом единственный) многочлен (1.6), который дает наилучшее приближение функции  $f(x) \in L_2(p)[a; b]$  в смысле метрики этого пространства, т.е. такой многочлен  $P_n^*(x)$ , для которого

$$\Delta^2(f) = \|f(x) - P_n(x)\|^2 = \int_a^b p(x) [f(x) - P_n(x)]^2 dx = \inf_{P_n(x)} \int_a^b p(x) [f(x) - P_n(x)]^2 dx.$$

Такой многочлен называют многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения.  
Если ввести обозначения

$$s_i = \int_a^b p(x) x^i dx, \quad m_i = \int_a^b p(x) f(x) x^i dx, \quad (*)$$

То коэффициенты многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения могут быть найдены как решение системы (1.1), которая в этом случае примет вид

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = m_0, \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \dots + c_n s_{n+1} = m_1, \\ \dots \\ c_0 s_n + c_1 s_{n+1} + \dots + c_n s_{2n} = m_n, \end{cases} \quad (1.7)$$

которая имеет (в соответствии с общей теорией) единственное решение.

Заметим, однако, что уже частный случай  $p(x) \equiv 1, [a; b] = [0; 1]$  приводит к следующим числовым значениям:  $s_i = \int_0^1 x^i dx = \frac{1}{i+1}$ .

Тогда матрица системы (1.7) будет иметь вид

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \dots & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}$$

и представляет собой знаменитую матрицу Гильберта, известную среди вычислителей своей плохой обусловленностью (при  $n = 11 \quad \nu(G_n) \sim 10^{16}$ ). Так что большие значения  $n$  в описанном алгоритме категорически противопоказаны (при работе в режиме данных *float* уже при  $n = 7$  результаты становятся неузнаваемыми).

Как мы уже отмечали выше, система (1.7) значительно упростится, если в качестве системы  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  выбрать ортонормированную в смысле скалярного произведения (1.5) систему, которую можно построить в соответствии с описанным выше алгоритмом Грамма-Шмидта, примененным к системе  $\varphi_i(x) = x^i, i = \overline{0, n}$ . Однако в рассматриваемом случае процедура ортогонализации является, вообще говоря, трехэлементной, т.е. ортогональные многочлены удовлетворяют простым трехчленным рекуррентным соотношениям, которые и можно использовать для построения соответствующих систем.

Обозначим ортогональные многочлены  $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$ . Тогда многочлен  $xQ_n(x)$  имеет степень  $n+1$  и его можно представить в виде

$$xQ_n(x) = \alpha_0 Q_0(x) + \alpha_1 Q_1(x) + \dots + \alpha_{n+1} Q_{n+1}(x). \quad (1.8)$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на  $Q_i(x), i = \overline{0, n+1}$  (т.е. умножим обе части на произведение  $p(x)Q_i(x)$  и проинтегрируем по отрезку  $[a; b]$ ). Получим:

$$\int_a^b p(x)Q_n(x)[xQ_i(x)]dx = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j \int_a^b p(x)Q_i(x)Q_j(x)dx. \quad (*)$$

В правой части записанного равенства в силу ортогональности функций  $Q(x)$  останется только одно слагаемое, соответствующее значению индекса суммирования, равному  $i$ . В левой же части при любом значении  $i \leq n-2$  интеграл будет равен нулю по той же причине ( $Q_n(x)$  ортогонален к **любому** (!) многочлену меньшей степени). Поэтому имеем:

$$0 = \alpha_i \int_a^b p(x)Q_i^2(x)dx, \quad i = \overline{0, n-2},$$

откуда  $\alpha_i = 0, i = \overline{0, n-2}$ . Следовательно, (1.8) примет вид

$$\alpha_{n+1}Q_{n+1}(x) + (\alpha_n - x)Q_n(x) + \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x) = 0. \quad (1.9)$$

Коэффициенты в (1.9) находим, полагая в (\*)  $i = n-1, n, n+1$ . Тогда

$$\alpha_{n-1} = \frac{\int_a^b p(x)xQ_{n-1}(x)Q_n(x)dx}{\int_a^b p(x)Q_{n-1}^2(x)dx}, \quad \alpha_n = \frac{\int_a^b p(x)xQ_n^2(x)dx}{\int_a^b p(x)Q_n^2(x)dx}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\int_a^b p(x)xQ_n(x)Q_{n+1}(x)dx}{\int_a^b p(x)Q_{n+1}^2(x)dx}.$$

Если система  $Q_i(x)$  нормирована, т.е.  $\int_a^b p(x)Q_i^2(x)dx = 1, i = 0, 1, \dots$ , то выражения для  $\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  упростятся:

$$\alpha_{n-1} = \int_a^b p(x)Q_{n-1}(x)Q_n(x)dx, \quad \alpha_n = \int_a^b p(x)Q_n^2(x)dx, \quad \alpha_{n+1} = \int_a^b p(x)Q_n(x)Q_{n+1}(x)dx. \quad (1.10)$$

Если обозначить  $a_{i,k} = \int_a^b p(x) Q_i(x) Q_k(x) dx$ , то рекуррентная формула (1.9) для нормированных многочленов будут иметь вид

$$a_{n,n+1} Q_{n+1}(x) + (a_{n,n} - x) Q_n(x) + a_{n-1,n} Q_{n-1}(x) = 0. \quad (1.11)$$

Она имеет смысл при  $n \geq 1$ , но если формально положить  $Q_{-1}(x) \equiv 0$ , то она будет иметь смысл и при  $n = 0$ .

Таким образом, зная два начальных члена последовательности  $\{Q_n(x)\}$ , можно по трехчленным рекуррентным формулам построить всю последовательность.

Приведем сейчас соответствующий пример. Пусть  $p(x) \equiv 1$ ,  $[a; b] = [-1; 1]$ . Тогда  $Q_{-1}(x) \equiv 0$ ;  $Q_0(x) = c$ . Так как  $\|Q_0\|^2 = \int_{-1}^1 Q_0^2(x) dx = 2c^2 = 1$ , то  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , т.е.  $Q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Полагая в (1.11)  $n = 0$ , получим:

$$a_{01} Q_1(x) + (a_{00} - x) Q_0(x) = 0.$$

Так как в соответствии с (1.10)  $a_{00} = \int_{-1}^1 x Q_0^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0$ , то отсюда следует, что

$a_{01} Q_1(x) = x Q_0(x)$ , или  $Q_1(x) = \frac{x}{a_{01} \sqrt{2}}$ . Используя условие нормировки, имеем:

$$\|Q_1\|^2 = \int_{-1}^1 Q_1^2(x) dx = \frac{1}{2a_{01}^2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3a_{01}^2} = 1.$$

Тогда  $a_{01} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $Q_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x$ .

Аналогично, полагая в (1.11)  $n = 1$  и учитывая, что  $a_{11} = \int_{-1}^1 x Q_1^2(x) dx = 0$ , найдем:

$$a_{12} Q_2(x) = x Q_1(x) - a_{01} Q_0(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x^2 - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{6}},$$

т.е.

$$Q_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{a_{12} \sqrt{6}}.$$

Еще раз учитывая условие нормировки, получим:

$$\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^1 Q_2^2(x) dx = \frac{1}{6a_{12}^2} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1)^2 dx = \frac{1}{3a_{12}^2} \int_0^1 (3x^2 - 1)^2 dx = \frac{4}{15a_{12}^2} = 1,$$

откуда  $a_{12} = \frac{2}{\sqrt{15}}$  и  $Q_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{3x^2 - 1}{2}$ .

Процесс, очевидно, легко продолжить, получая при этом любое необходимое количество членов последовательности.

В то же время следует отметить, что в специальной литературе, посвященной ортогональным многочленам, известны аналитические представления соответствующих систем (так, например, для разобранного примера соответствующая система – система многочленов Лежандра).

### 1.1.1. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим сейчас вкратце вопрос о построении наилучшего среднеквадратичного приближения для таблично заданной функции (соответствующий алгоритм в литературе называют методом наименьших квадратов).

Прежде всего, заметим, что вместо формулы (1.5) скалярное произведение задать и в виде

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x), \quad (1.5')$$

где  $\alpha(x)$  – неубывающая функция и интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса. Тогда, если  $\alpha(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция, то (1.5') и (1.5) эквивалентны. Если же  $\alpha(x)$  кусочно постоянна и имеет скачки  $p_i$  в точках  $x_i \in [a; b]$ , то скалярное произведение (1.5') сводится к сумме

$$(f, g) = \sum_{i=0}^N p_i f(x_i)g(x_i),$$

которая задает скалярное произведение функций дискретного аргумента. Именно этот вариант следует использовать для поиска наилучшего среднеквадратичного приближения таблично заданных функций. Естественно при этом, что все основные расчетные формулы остаются теми же, что и выше. Таким образом, алгоритм метода наименьших квадратов состоит в построении системы (1.7) и нахождении ее решения, которое и даст коэффициенты искомого приближения. При этом вместо формул (\*) для определения элементов расширенной матрицы системы (1.7) необходимо использовать формулы

$$s_i = \sum_{j=0}^N p_j x_j^i, \quad m_i = \sum_{j=0}^N p_i f(x_j) x_j^i.$$

## § 2. Наилучшее равномерное приближение

Если норма в линейном нормированном пространстве определена не через скалярное произведение, то нахождение элемента наилучшего приближения существенно усложняется.

Пусть  $R$  – пространство непрерывных вещественных функций, определенных на отрезке  $[a; b]$  вещественной оси, с нормой  $\|f\| = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$ . На основании результатов, из-

ложенных ранее, мы можем утверждать, что элемент наилучшего приближения всегда существует. Но полученное там же достаточное условие единственности элемента наилучшего приближения здесь неприменимо, поскольку (см. Упражнение 2) пространство  $C[a; b]$  не является строго нормированным. По литературе известны результаты, касающиеся единственности элемента наилучшего равномерного приближения на подпространстве обобщенных многочленов. Мы же здесь более подробно исследуем лишь случай, со-

ответствующий выбору базисных функций  $\varphi_i(x) = x^i$ , когда обобщенный многочлен превращается в обычный алгебраический многочлен степени  $n$ :

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i.$$

Элемент  $Q_n^0(x)$  в этом случае будем называть **многочленом наилучшего равномерного приближения**.

Поставим себе задачу, аналогичную решенной ранее для гильбертовых пространств: выяснить отличительные признаки многочлена наилучшего равномерного приближения.

Вначале получим оценку снизу для величины  $\Delta_n(f)$  наилучшего равномерного приближения на подпространстве многочленов степени  $n$ .

Справедлива

**Теорема 1 (Валле-Пуссен).** Пусть существуют  $n+2$  точек  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  отрезка  $[a; b]$  такие, что

$$\text{sign}((f(x_i) - Q_n(x_i))(-1)^i) = \text{Const},$$

что означает: при переходе от точки  $x_i$  к следующей точке  $x_{i+1}$  величина  $f(x_i) - Q_n(x_i)$  меняет знак. Тогда

$$\Delta_n(f) \geq \mu = \min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x_i) - Q_n(x_i)|.$$

*Доказательство.*

В случае  $\mu = 0$  утверждение теоремы очевидно, поскольку  $\Delta_n(f) = \|f - Q_n^0\| \geq 0$ .

Пусть теперь  $\mu > 0$ . Предположим противное: для многочлена наилучшего равномерного приближения  $Q_n^0(x)$  выполняется неравенство  $\|Q_n^0 - f\| = \Delta_n(f) < \mu$ . Имеем:

$$\text{sign}(Q_n(x) - Q_n^0(x)) = \text{sign}((Q_n(x) - f(x)) - (Q_n^0(x) - f(x))).$$

Тогда силу предположения в точках  $x_i$  первое слагаемое превосходит по модулю второе, ибо  $\Delta_n(f) = \|f - Q_n^0\| = \sup_{x \in [a; b]} |f(x) - Q_n^0(x)| < \mu = \min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x_i) - Q_n(x_i)|$ . Поэтому

⊠

$$\text{sign}(Q_n(x_i) - Q_n^0(x_i)) = \text{sign}(Q_n(x_i) - f(x_i))$$

и, следовательно, многочлен  $Q_n(x) - Q_n^0(x)$  степени  $n$  меняет знак  $n+1$  раз, чего быть не может.

Теперь сформулируем и докажем «отличительный признак» многочлена наилучшего равномерного приближения.

**Теорема 2 (Чебышев).** Для того чтобы многочлен  $Q_n(x)$  был многочленом наилучшего равномерного приближения непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно существование на этом отрезке по крайней мере  $n+2$  точек  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  таких, что для них выполняются соотношения

$$f(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha(-1)^i \|f - Q_n\|, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad (*)$$



причем  $\alpha = 1$  (или  $\alpha = -1$ ) одновременно для все  $i$ .

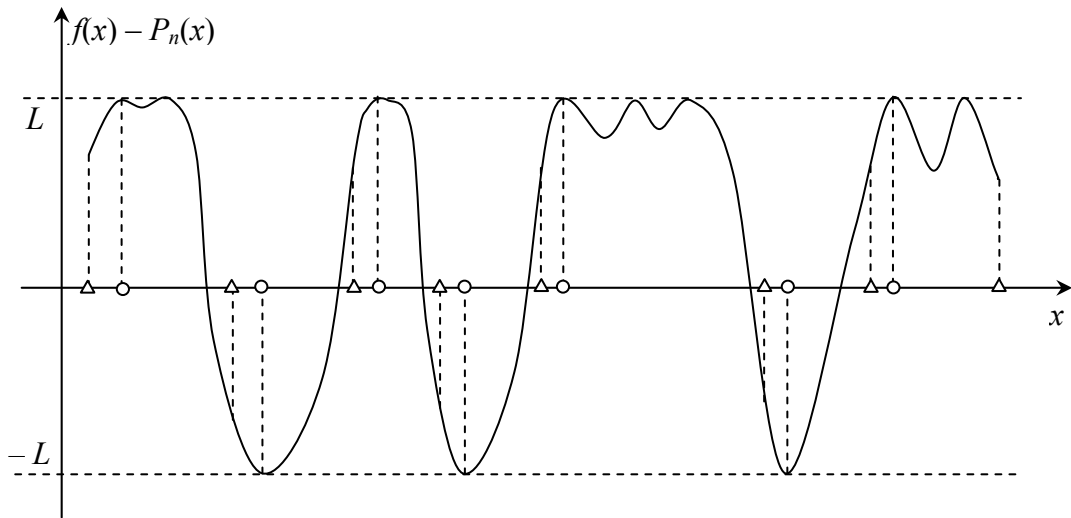
*Доказательство.*

Вначале докажем достаточность.

Итак, пусть на отрезке  $[a; b]$  существует система точек  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ , для которых выполняются условия (\*). Обозначим через  $L$  величину:  $L = \|f - Q_n\|$ . Тогда в силу **теоремы 1** имеем:  $L = \mu \leq \Delta_n(f)$ . С другой же стороны в силу самого определения величины  $\Delta_n(f)$  следует, что  $\Delta_n(f) \leq \|f - Q_n\| = L$ . Сопоставляя оба этих неравенства, получаем, что  $\Delta_n(f) = L$  и, таким образом, многочлен  $Q_n(x)$  является многочленом наилучшего равномерного приближения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

Необходимость.

Пусть теперь многочлен  $Q_n(x)$  является многочленом наилучшего равномерного приближения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , т.е.  $L = \|f - Q_n\| = \inf_{Q_n} \|f - Q_n^*\|$ . Обозначим через  $y_1$



нижнюю грань точек  $x \in [a; b]$ , в которых  $|f(x) - Q_n(x)| = L$ . Из определения величины  $L$  и непрерывности нормы следует существование таких точек, причем  $|f(y_1) - Q_n(y_1)| = L$ . Для определенности далее рассматриваем случай  $f(y_1) - Q_n(y_1) = +L$ .

Обозначим через  $y_2$  нижнюю грань всех точек  $x \in (y_1; b]$ , в которых  $f(x) - Q_n(x) = -L$ ; последовательно через  $y_{k+1}$  обозначим нижнюю грань всех точек  $x \in (y_k; b]$ , в которых  $f(x) - Q_n(x) = (-1)^k L$  (на рисунке указанные точки отмечены кружком).

Вследствие непрерывности разности  $f(x) - Q_n(x)$  при всех  $k$  имеем:

$$f(y_{k+1}) - Q_n(y_{k+1}) = (-1)^k L.$$

Продолжим этот процесс до значения  $y_m = b$  или значение  $y_m$  таково, что при  $y_m < x \leq b$  нет точек  $x$  таких, что  $f(x) - Q_n(x) = (-1)^m L$  (но могут быть точки, в которых  $f(x) - Q_n(x) = (-1)^{m-1} L$ ).

Если в результате указанного процесса получилось, что  $m \geq n + 2$ , то утверждение теоремы выполнено. Поэтому предположим противное, т.е. что  $m < n + 2$ . Вследствие не-

прерывности функции  $f(x) - Q_n(x)$  при любом  $k$  ( $1 < k \leq m$ ) можно указать точку  $z_{k-1}$  такую, что  $|f(x) - Q_n(x)| < L$  при  $z_{k-1} \leq x < y_k$ . Положим  $z_0 = a$ ,  $z_m = b$  (на рисунке указанные точки отмечены треугольниками). Согласно проведенным построениям на отрезках  $[z_{i-1}; z_i]$ ,  $i = \overline{1, m}$  имеются точки (в частности, точки  $y_i$ ), в которых  $f(x) - Q_n(x) = (-1)^{i-1} L$ , и нет точек, в которых  $f(x) - Q_n(x) = (-1)^i L$ .

Положим

$$v(x) = \prod_{j=1}^{m-1} (z_j - x), \quad Q_n^d(x) = Q_n(x) + dv(x),$$

где  $d > 0$ , и рассмотрим поведение разности

$$f(x) - Q_n^d(x) = f(x) - Q_n(x) - dv(x)$$

на отрезках  $[z_{i-1}; z_i]$ .

Для отрезка  $[z_0; z_1]$  имеем: на  $[z_0; z_1)$   $v(x) > 0$ , поэтому

$$f(x) - Q_n^d(x) \leq L - dv(x) < L.$$

В то же время на этом отрезке выполняется неравенство  $f(x) - Q_n(x) > -L$ , поэтому при достаточно малых  $d$  (например, при  $d < d_1 = \frac{\min_{x \in [z_0; z_1]} |f(x) - Q_n(x) + L|}{\max_{x \in [z_0; z_1]} |v(x)|}$ ) на  $[z_0; z_1)$  имеем:

$$f(x) - Q_n^d(x) > -L.$$

Кроме того,

$$|f(z_1) - Q_n^d(z_1)| = |f(z_1) - Q_n(z_1)| < L.$$

Таким образом,  $|f(x) - Q_n^d(x)| < L$  на этом отрезке при достаточно малом  $d$ . После проведения аналогичных рассуждений относительно остальных отрезков  $[z_{i-1}; z_i]$  мы сможем указать малое  $d_0$  такое, что на всех отрезках выполняется неравенство  $|f(x) - Q_n^d(x)| < L$ . ☒

Получено противоречие с тем, что  $Q_n(x)$  – многочлен наилучшего равномерного приближения, а  $m < n + 2$ .

**Замечание.** Точки  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$  называют точками чебышевского альтернанса, а **теорему 2 – теоремой о чебышевском альтернансе.**

**Теорема 3.** Многочлен наилучшего равномерного приближения непрерывной функции единственен.

*Доказательство.*

Предположим, что существуют два многочлена наилучшего равномерного приближения:

$$Q_n^1(x) \neq Q_n^2(x), \quad \|f - Q_n^1\| = \|f - Q_n^2\| = \Delta_n(f).$$

Так как множество элементов наилучшего приближения выпукло, то многочлен  $\frac{1}{2}[Q_n^1(x) + Q_n^2(x)]$  также является многочленом наилучшего равномерного приближения. Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$  – соответствующие этому многочлену точки чебышевского альтернанса. Тогда

$$\left| \frac{1}{2}[Q_n^1(x_i) + Q_n^2(x_i)] - f(x_i) \right| = \Delta_n(f), \quad i = 0, 1, \dots, n+1$$

или

$$[Q_n^1(x_i) - f(x_i)] + [Q_n^2(x_i) - f(x_i)] = 2\Delta_n(f). \quad (**)$$

Так как

$$|Q_n^k(x_i) - f(x_i)| \leq \Delta_n(f), \quad k = 1, 2$$

(в силу того что  $|Q_n^k(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [a; b]} |Q_n^k(x) - f(x)| = \Delta_n(f)$ ,  $k = 1, 2$ ),

то соотношение (\*\*) возможно лишь в том случае, когда

$$Q_n^1(x_i) - f(x_i) = Q_n^2(x_i) - f(x_i).$$

Отсюда следует, что два различных многочлена  $Q_n^1(x)$  и  $Q_n^2(x)$  степени  $n$  совпадают в  $n+2$  различных точках, чего не может быть. Полученное противоречие доказывает теорему. □

## 2.1. Примеры наилучшего равномерного приближения

Рассмотрим сейчас некоторые простейшие случаи построения многочленов наилучшего равномерного приближения.

**1<sup>0</sup>.** Непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  приближается многочленом нулевой степени.

Пусть

$$\sup_{x \in [a; b]} f(x) = f(x_1) = M; \quad \inf_{x \in [a; b]} f(x) = f(x_2) = m.$$

Тогда многочлен  $Q_0(x) = \frac{m+M}{2}$  является многочленом наилучшего равномерного приближения, а  $x_1$  и  $x_2$  – точками чебышевского альтернанса.

Действительно,

$$f(x_1) - Q_0(x_1) = M - \frac{m+M}{2} = \frac{M-m}{2};$$

$$f(x_2) - Q_0(x_2) = m - \frac{m+M}{2} = -\frac{M-m}{2}.$$

Таким образом,  $\Delta_0(f) = \frac{M-m}{2}$ .

2<sup>0</sup>. Выпуклая на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  приближается многочленом первой степени  $Q_1(x) = c_0 + c_1x$ .

Вследствие выпуклости функции  $f(x)$  разность  $f(x) - (c_0 + c_1x)$  может иметь только одну внутреннюю точку экстремума, поэтому точки  $a$  и  $b$  являются точками чебышевского альтернанса. Пусть  $d$  – третья точка альтернанса. Согласно теореме Чебышева имеем равенства

$$\begin{cases} f(a) - (c_0 + c_1a) = \alpha L, \\ f(d) - (c_0 + c_1d) = -\alpha L, \\ f(b) - (c_0 + c_1b) = \alpha L. \end{cases} \quad (***)$$

Вычитая из третьего уравнения первое, получим:

$$f(b) - f(a) = c_1(b - a),$$

откуда

$$c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Для определения неизвестных  $d, L, c_0, c_1$  и  $\alpha \in \{-1, 1\}$  получено всего три уравнения. Однако следует вспомнить, что точка  $d$  является точкой экстремума разности  $f(x) - (c_0 + c_1x)$ . Если  $f(x)$  – дифференцируемая функция, то для определения  $d$  имеем уравнение (четвертое вместе с системой (\*\*\*))

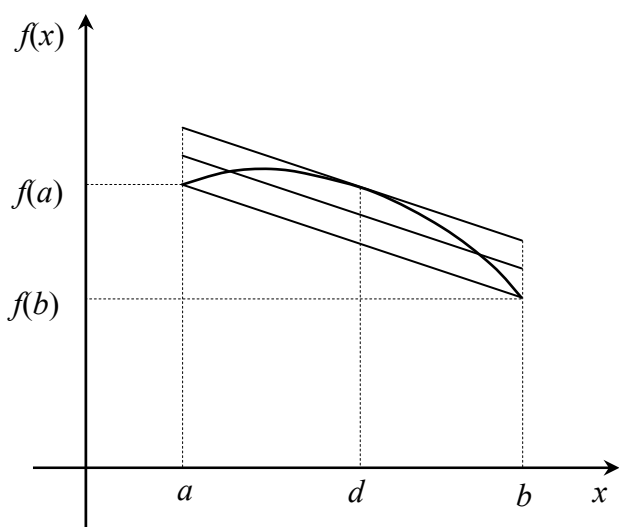
$$f'(d) - c_1 = 0.$$

Найдя отсюда  $d$ , можно определить  $c_0$ , сложив первое и второе уравнения (\*\*\*):

$$f(a) + f(d) = 2c_0 + c_1(a + d),$$

откуда

$$c_0 = \frac{1}{2}[f(a) + f(d) - c_1(a + d)].$$



Геометрически описанная процедура решения системы (\*\*\*) выглядит следующим образом:

- 1) проводим секущую через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ . Для нее тангенс угла наклона равен  $c_1$ ;
- 2) проводим касательную к кривой  $y = f(x)$ , параллельную секущей, построенной на предыдущем шаге (это равносильно нахождению точки  $d$ );
- 3) проводим прямую, равноудаленную от построенных секущей и касательной, которая и будет искомой.

3<sup>0</sup>. Пусть  $[a; b] = [-1; 1]$  и  $f(x)$  – нечетная функция (в случае отрезка  $[a; b]$  общего вида  $f(x)$  должна быть нечетной относительно середины отрезка). Тогда многочлен наилучшего равномерного приближения любой степени нечетен (нечетен относительно середины отрезка).

Действительно, пусть  $Q_n(x)$  – многочлен наилучшего приближения для  $f(x)$ . Тогда

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \Delta_n(f) \text{ для всех } x \in [-1; 1].$$

Заменяя  $x$  на  $(-x)$ , получаем:

$$|f(-x) - Q_n(-x)| \leq \Delta_n(f)$$

или (поскольку  $f(-x) = -f(x)$ )

$$|-f(x) - Q_n(-x)| \leq \Delta_n(f) \text{ для всех } x \in [-1; 1],$$

откуда

$$|f(x) - (-Q_n(-x))| \leq \Delta_n(f).$$

Поэтому  $-Q_n(-x)$  также является многочленом наилучшего равномерного приближения. В силу единственности  $Q_n(x) = -Q_n(-x)$ , т.е. многочлен  $Q_n(x)$  является нечетной функцией.

В заключение отметим, что справедлива теорема, дающая оценку скорости сходимости последовательности многочленов наилучшего равномерного приближения к  $f(x)$ .

**Теорема 4.** Если  $f(x) \in C^p[a; b]$ , причем производная  $f^{(p)}(x)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $C_p$ , то  $\Delta_n(f) < \frac{C_p}{n^{p+1}}$ .

Оценка, приведенная в теореме, говорит о том, что  $\Delta_n(f)$  при достаточно гладкой функции  $f(x)$  стремится к нулю очень быстро.

**Замечание.** Для построения многочленов наилучшего равномерного приближения используются специальные итерационные алгоритмы (например, алгоритм Ремеза [6]).

## ГЛАВА IV

### Интерполирование

Ранее мы отмечали, что в зависимости от способа оценки близости приближаемой  $f(x)$  и приближающей  $\varphi(x, a)$  функций получаются различные способы приближения, и в предыдущей главе рассмотрели вопрос о построении наилучших приближений, когда приближающий элемент обеспечивает оптимальную оценку на всем классе функций и на всем пространстве, т.е. мерой близости была та или иная норма.

Сейчас же мы в качестве «меры близости» рассмотрим совпадение на заданном множестве точек значений приближающей и приближаемой функций, а также некоторых величин, связанных с ними.

Такой подход к приближению будем называть *интерполированием*. Значения приближаемой функции и другие величины, связанные с ней и используемые при построении интерполяционного приближения, будем называть исходными данными интер-

полирования. Наиболее часто в этом качестве используются значения функции и (или) значения ее производных до некоторого порядка включительно.

Дадим общую постановку задачи такого интерполирования:

Пусть

в  $k_0$  различных точках  $x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_{k_0-1}^{(0)}$  известны значения функции:  $f(x_i^{(0)})$ ,  $i = \overline{0, k_0-1}$ ;

в  $k_1$  различных точках  $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_{k_1-1}^{(1)}$  известны значения функции:  $f'(x_i^{(1)})$ ,  $i = \overline{0, k_1-1}$

и т.д.

в  $k_m$  различных точках  $x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \dots, x_{k_m-1}^{(m)}$  известны значения функции:  $f^{(m)}(x_i^{(m)})$ ,  $i = \overline{0, k_m-1}$ .

Общее число исходных данных равно  $k_0 + k_1 + \dots + k_m \stackrel{\text{def}}{=} n + 1$ . Требуется построить такую функцию  $F(x)$  что

$$F^{(j)}(x_i^{(j)}) = f^{(j)}(x_i^{(j)}), \quad j = \overline{0, m}; \quad i = \overline{0, k_j-1}. \quad (1)$$

Эту функцию  $F(x)$  называют интерполирующей. Таким образом, система (1) задает условия, определяющие интерполирующую функцию.

Помимо сформулированной выше постановки задачи интерполирования достаточно часто в приложениях рассматривается и случай, когда сетки узлов, в которых задаются производные различных порядков, совпадают. Таким образом, указанная задача выглядит так:

в точке  $x_0$  известны значения производных функции  $f(x)$  до некоторого порядка  $k_0 - 1$  включительно:  $f^{(j)}(x_0)$ ,  $j = \overline{0, k_0-1}$ ;

в точке  $x_1$  известны значения производных функции  $f(x)$  до некоторого порядка  $k_1 - 1$  включительно:  $f^{(j)}(x_1)$ ,  $j = \overline{0, k_1-1}$  и т.д.

в точке  $x_m$  известны значения производных функции  $f(x)$  до некоторого порядка  $k_m - 1$  включительно:  $f^{(j)}(x_m)$ ,  $j = \overline{0, k_m-1}$ .

Общее число исходных данных, как и выше, равно  $k_0 + k_1 + \dots + k_m \stackrel{\text{def}}{=} n + 1$ . Требуется построить такую функцию  $F(x)$  что

$$F^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = \overline{0, m}; \quad j = \overline{0, k_i-1}. \quad (2)$$

Указанную постановку мы далее будем рассматривать более подробно. В литературе она носит название интерполирования Эрмита. Частным случаем его является случай, когда для всех  $i$   $k_i = 1$ , т.е. случай, когда среди входных данных отсутствуют значения производных функции  $f(x)$ . Такое интерполирование называют интерполированием по значениям функции или простым интерполированием.

## § 1. Задача интерполирования по значениям функции

Согласно данной выше общей постановке задачи в этом случае нам известны значения  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Необходимо построить новую функцию  $\varphi(x)$  такую, что

$$\varphi(x_k) = f(x_k), \quad k = \overline{0, n}, \quad (1.1)$$

т.е. функцию, график которой проходил бы через  $(n+1)$  заданную точку  $(x_k, y_k)$ , и которая была бы, кроме того, более удобной с вычислительной точки зрения.

Как мы уже отмечали в общей постановке задачи о приближении функций, часто в качестве  $\varphi(x)$  берут известную функцию, зависящую от  $(n+1)$  числового параметра, т.е.  $\varphi(x) = g(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Тогда для построения функции  $g$  на основании условий (1.1) получаем систему из  $(n+1)$  нелинейного уравнения с  $(n+1)$  неизвестным, решив которую, можно определить значения параметров  $a_i$ :

$$g(x_k, a_0, a_1, \dots, a_n) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Вид функции  $g$  обычно выбирают из некоторых дополнительных соображений (например, с целью добиться максимального качественного соответствия в свойствах). Если же никакой дополнительной информации о функции  $f$  не имеется, то  $g$  можно выбирать таким образом, чтобы система (1.2) решалась по возможности проще, например, была линейной. Последнее требование можно удовлетворить, если в качестве  $g$  взять обобщенный многочлен по заданной системе координатных функций  $\varphi_k(x)$ :

$$g(x, a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) := Q_n(x).$$

Система для определения параметров  $a_0, a_1, \dots, a_n$  в этом случае будет линейной и примет вид

$$\begin{cases} a_0 \varphi_0(x_0) + a_1 \varphi_1(x_0) + \dots + a_n \varphi_n(x_0) = f(x_0), \\ a_0 \varphi_0(x_1) + a_1 \varphi_1(x_1) + \dots + a_n \varphi_n(x_1) = f(x_1), \\ \dots \dots \dots \\ a_0 \varphi_0(x_n) + a_1 \varphi_1(x_n) + \dots + a_n \varphi_n(x_n) = f(x_n). \end{cases} \quad (1.3)$$

Определитель этой системы  $\Delta$  имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то при любых значениях  $f(x_j)$  система (1.3) будет иметь решение, и притом единственное. Тогда выражение для коэффициентов  $a_i$  можно, используя правило Крамера, записать в виде  $a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ , где  $\Delta_i$  – определитель, получающийся из  $\Delta$  путем замены  $i$ -го столбца столбцом свободных членов  $f(x_j)$ . Следовательно, обобщенный многочлен  $Q_n(x)$ , интерполирующий функцию  $(x)$  по ее значениям, будет иметь вид

$$Q_n(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} \varphi_0(x) + \frac{\Delta_1}{\Delta} \varphi_1(x) + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta} \varphi_n(x). \quad (1.4)$$

Функцию  $Q_n(x)$  можно представить и в другой форме. Для этого разложим определитель  $\Delta_i$  по элементам  $i$ -го столбца:

$$\Delta_i = \sum_{j=0}^n f(x_j) \Delta_{ij},$$

где  $\Delta_{ij}$  — соответствующие алгебраические дополнения.

Подставляя последнее выражение в (1.4) и собирая вместе члены с одинаковыми  $f(x_j)$ , будем иметь:

$$Q_n(x) = \Phi_0(x)f(x_0) + \Phi_1(x)f(x_1) + \dots + \Phi_n(x)f(x_n). \quad (1.5)$$

Здесь функции  $\Phi_i(x)$  являются, очевидно, линейными комбинациями координатных функций  $\varphi_k(x)$ . Они не зависят от интерполируемой функции  $f(x)$  и целиком определяются функциями  $\varphi_i(x)$  и сеткой узлов интерполирования (в силу чего  $\Phi_i(x)$  называют **функцией влияния  $i$ -го узла**).

Заметим, что при любой системе значений  $f(x_i)$  должны выполняться равенства

$$f(x_j) = \Phi_0(x_j)f(x_0) + \Phi_1(x_j)f(x_1) + \dots + \Phi_n(x_j)f(x_n), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что функции  $\Phi_i(x)$  удовлетворяют условиям

$$\Phi_i(x_j) = \delta_i^j. \quad (1.6)$$

Обсудим теперь вопрос о том, какие условия нужно наложить на систему  $\{\varphi_i(x)\}$  для того, чтобы определитель  $\Delta$  не обращался в нуль. Для целей интерполирования важно использовать одну и ту же систему  $\{\varphi_i(x)\}$  при различных совокупностях точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (узлов интерполирования). Поэтому следует отыскивать условия того, что  $\Delta \neq 0$  ни при какой системе точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $x_i \in [a; b]$ . Свойства линейной независимости функций  $\varphi_i(x)$  уже становится недостаточно, хотя это условие и является необходимым. Так, например, функции 1 и  $\sin x$  линейно независимы, но, если выбрать  $x_2 = \pi - x_1$ , то

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin x_1 \\ 1 & \sin x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если  $\Delta = 0$  для какой-то системы чисел  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , то это означает, что существуют такие постоянные  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , не все равные нулю, для которых линейная комбинация  $c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$  обращается в нуль в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , т.е. эти точки являются корнями соответствующего обобщенного многочлена, который, таким образом, на отрезке  $[a; b]$  имеет  $(n+1)$  различных корней. Поэтому к системе функций  $\{\varphi_i(x)\}$  необходимо предъявить требование, запрещающее подобное.

**Определение 1.** Система функций  $\{\varphi_i(x)\}$ , обобщенный многочлен степени  $n$  по которой имеет на отрезке  $[a; b]$  не более  $n$  различных корней, называется *системой функций Чебышева*.



**Определение 2.** Систему функций  $\{\varphi_i(x)\}$  будем называть полным в классе  $F$  функций  $f(x)$ , если для любой функции  $f(x) \in F$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $N$  такое, что при любом  $n > N$  найдется набор параметров  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – коэффициентов обобщенного многочлена степени  $Q_n(x)$  по системе  $\{\varphi_i(x)\}$  такой, что при всех  $x \in [a; b]$  выполняется неравенство  $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$ .

Таким образом, система  $\{\varphi_i(x)\}$  должна удовлетворять следующим требованиям:

1. Она должна быть системой Чебышева;
2. Она должна быть полной в рассматриваемом классе функций (например,  $C$ -полной).

Первое из этих требований позволяет построить интерполяционное приближение при любом расположении узлов интерполирования на отрезке  $[a; b]$ , а второе оставляет, по крайней мере, теоретическую возможность построения интерполяционного приближения, обеспечивающего любую наперед заданную точность.

Простейшим примером системы функций, удовлетворяющих сформулированным требованиям, является система  $\varphi_i(x) = x^i$ , обобщенным многочленом по которой будет обычный алгебраический многочлен. Первое из свойств для такой системы следует из основной теоремы алгебры, а второе (для класса функций  $C[a; b]$  – из теоремы Вейерштрасса). Аналогично, система  $\{1, \sin x, \sin 2x, \dots\}$  является полной в классе непрерывных  $2\pi$ -периодических функций и системой Чебышева на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

## § 2. Основные представления алгебраического интерполяционного многочлена

Сейчас мы более подробно займемся изучением проблемы алгебраического интерполирования по значениям функции. В этом случае в качестве системы координатных функций рассматривается система  $\varphi_i(x) = x^i$ . Как следует из приведенных выше рассуждений, задача такого интерполирования всегда разрешима, причем единственным образом, хотя этот факт можно доказать и непосредственно, поскольку определитель  $\Delta$  в этом случае имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

И представляет из себя хорошо известный определитель Вандермонда, и поэтому отличен от нуля, так как  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ .

**Упражнение.** Вычислить определитель Вандермонда.

### 2.1. Представление алгебраического интерполяционного многочлена в форме Лагранжа

Как мы видели выше для построения алгебраического интерполяционного многочлена  $P_n(x)$  достаточно решить систему (1.3), в которой  $\varphi_i(x) = x^i$ . Однако сейчас мы дадим более простое решение этой задачи не требующее решения указанной системы. Согласно (1.5) искомый интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  может быть представлен в виде

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \Phi_i(x) f(x_i), \quad (2.1)$$

где функции влияния  $\Phi_i(x)$  удовлетворяют условиям (1.6) и являются в нашем случае алгебраическими многочленами степени  $n$  (как линейные комбинации функций  $x^i$ ,  $i = \overline{0, n}$ ). В силу условий (1.6) имеем: узлы  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  являются корнями многочлена  $\Phi_i(x)$ . А поскольку это многочлен степени  $n$ , то это все его корни. Поэтому

$$\Phi_i(x) = c_i (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n),$$

где  $c_i$  – некоторая неизвестная постоянная, которую мы можем определить, воспользовавшись оставшимися из условий (1.6):  $\Phi_i(x_i) = 1$ , откуда

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_i)},$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Следовательно,

$$\Phi_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

и

$$P_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} L_n(x) = \sum_{i=0}^n \Phi_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i). \quad (2.2)$$

(2.2) – интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

Очевидно, в его помощь удобно интерполировать различные функции по одной и той же таблице узлов, так как коэффициенты влияния в этом случае могут быть вычислены заранее и не требуют пересчета.

## 2.2. Разделенные разности и их свойства

Из курса математического анализа известен такой способ замены функции  $f(x)$  как разложение ее в ряд Тейлора. Сейчас мы получим интерполяционный аналог этой формулы. Для этого нам понадобятся объекты, которые являются дискретным аналогом производной. Таким обобщением является понятие разделенной разности.

По определению разделенные разности нулевого порядка функции  $f(x)$  совпадают со значениями  $f(x_i)$ ; разности первого порядка определяются равенствами

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i},$$

разности второго порядка – равенствами

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}$$

и вообще, разности  $(k+1)$ -го порядка определяются через разности  $k$ -го порядка по формуле

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_0}.$$

Получим сейчас представление разделенных разностей через значения функции, для которой они строятся. Имеет место

**Лемма.**

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)}. \quad (2.3)$$

*Доказательство.*

Будем проводить его методом математической индукции. При  $k=0$  (2.3) превращается в равенство  $f(x_0) = f(x_0)$ ;

при  $k=1$  имеем:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

и

$$\sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

т.е. (2.3) также справедлива.

Пусть равенство (2.3) доказано при всех  $k \leq l$ . Тогда по определению разделенной разности и в соответствии с индуктивным предположением имеем:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{l+1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{l+1}) - f(x_0, \dots, x_l)}{x_{l+1} - x_0} = \frac{1}{x_{l+1} - x_0} \left( \sum_{j=1}^{l+1} \frac{f(x_j)}{\omega'_{l+1,1}(x_j)} - \sum_{j=0}^l \frac{f(x_j)}{\omega'_{l+1,0}(x_j)} \right).$$

Приводя подобные, соберем коэффициенты при  $f(x_j)$  для всех значений  $j$ . Получим: для  $j=0$ :

$$-\frac{1}{x_{l+1} - x_0} \cdot \frac{1}{\omega'_{l+1,0}(x_0)} = -\frac{1}{x_{l+1} - x_0} \cdot \frac{1}{(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_l)} = \frac{1}{\omega'_{l+2}(x_0)};$$

для  $j=l+1$ :

$$\frac{1}{x_{l+1} - x_0} \cdot \frac{1}{\omega'_{l+1,1}(x_{l+1})} = \frac{1}{x_{l+1} - x_0} \cdot \frac{1}{(x_{l+1} - x_1) \cdots (x_{l+1} - x_l)} = \frac{1}{\omega'_{l+2}(x_{l+1})};$$

для  $1 \leq j \leq l$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x_{l+1} - x_0} \cdot \left[ \frac{1}{\omega'_{l+1,1}(x_j)} - \frac{1}{\omega'_{l+1,0}(x_j)} \right] = \\
& = \frac{1}{x_{l+1} - x_0} \cdot \left[ \frac{1}{(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{l+1})} - \frac{1}{(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{l+1})} \right] = \\
& = \frac{1}{x_{l+1} - x_0} \cdot \frac{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{l+1})}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{l+1})} = \frac{1}{\omega'_{l+2}(x_0)}.
\end{aligned}$$

Полученные равенства завершают доказательство.  $\square$

Обсудим сейчас основные свойства разделенных разностей:

- 1<sup>0</sup>. Разделенная разность любого порядка есть линейный функционал своего аргумента  $f$ , т.е. если  $g(x) = \alpha f(x) + \beta h(x)$ , то  $g(x_0, x_1, \dots, x_k) = \alpha f(x_0, x_1, \dots, x_k) + \beta h(x_0, x_1, \dots, x_k)$ .
- 2<sup>0</sup>. Разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов  $x_0, \dots, x_k$  (т.е. не меняется при любой их перестановке).

Оба этих свойства непосредственно следуют из формулы (2.3).

- 3<sup>0</sup>. Разделенная разность первого порядка от алгебраического многочлена степени  $n$  есть алгебраический многочлен степени  $n-1$  от тех значений аргумента, по которым эта разность составляется.

В силу линейности последнее свойство достаточно установить для функции  $P_n(x) = x^n$ . В этом случае имеем:

$$f(x_i, x_j) = \frac{x_j^n - x_i^n}{x_j - x_i} = x_j^{n-1} + x_j^{n-2}x_i + \dots + x_jx_i^{n-2} + x_i^{n-1}$$

(т.е. 3<sup>0</sup> справедливо).

Из свойства 3<sup>0</sup> непосредственно вытекает, что разделенная разность порядка  $n$  от алгебраического многочлена степени  $n$  есть постоянная, а все разделенные разности более высокого порядка равны нулю.

Вычисление разделенных разностей обычно оформляют в виде таблицы (в компьютерном варианте это матрица), которая при ручном счете имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
& & f(x_0, x_1) & & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f(x_0, x_1, x_2) & & & \\
& & f(x_1, x_2) & \dots & \ddots & & \\
x_2 & f(x_2) & & & & f(x_0, x_1, \dots, x_n) & \\
\dots & & \dots & & \ddots & & \\
& & & f(x_{n-1}, x_n) & & & \\
x_n & f(x_n) & & & & & 
\end{array}$$

### 2.3. Представление алгебраического интерполяционного многочлена в форме Ньютона

Используя разделенные разности, можно получить другую форму записи интерполяционного многочлена. Прделаем это.

Пусть  $P_k(x)$  – алгебраический многочлен степени  $k$ , интерполирующий функцию  $f(x)$  по узлам  $x_0, x_1, \dots, x_k$ . Запишем тождественное равенство

$$P_n(x) = P_0(x) + [P_1(x) - P_0(x)] + [P_2(x) - P_1(x)] + \dots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)]. \quad (2.4)$$

Очевидно, разность  $P_k(x) - P_{k-1}(x)$  есть многочлен степени  $k$ , причем он обращается в нуль в узлах интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ , общих для  $P_k(x)$  и  $P_{k-1}(x)$ . Следовательно,

$$P_k(x) - P_{k-1}(x) = A_k(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = A_k \omega_k(x).$$

Подставляя в последнее равенство значение  $x = x_k$  и учитывая, что  $P_k(x_k) = f(x_k)$ , получим:

$$f(x_k) - P_{k-1}(x_k) = A_k(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) = A_k \omega_k(x_k) = A_k \omega'_k(x_k).$$

Отсюда

$$A_k = \frac{f(x_k)}{\omega'_k(x_k)} - \frac{P_{k-1}(x_k)}{\omega_k(x_k)}.$$

Заменяя здесь  $P_{k-1}(x_k)$  его значением, вычисленным по формуле Лагранжа (2.2) и учитывая, что  $(x_k - x_j) \omega'_k(x_j) = -\omega'_{k+1}(x_j)$ , а также формулу (2.3), найдем:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{f(x_k)}{\omega'_{k+1}(x_k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\omega_k(x_k)}{(x_k - x_j) \omega'_k(x_j) \omega_k(x_k)} f(x_j) = \frac{f(x_k)}{\omega'_{k+1}(x_k)} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)} = \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)} = f(x_0, x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P_k(x) - P_{k-1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_k).$$

Подставляя это соотношение в (2.4), окончательно получим:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (2.5)$$

(2.5) – интерполяционный многочлен в форме Ньютона. В отличие от представления Лагранжа (2.2) здесь при добавлении нового узла в таблицу (при интерполировании одной и той же функции) не нужно пересчитывать все слагаемые.

### § 3. Остаток интерполирования

Под остатком интерполирования будем понимать разность

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Очевидно, таким образом определенный остаток интерполирования (его величина) зависит от следующих факторов:

- а) свойств интерполируемой функции  $f$ ;
- б) выбора узлов интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ;
- с) выбора точки интерполирования  $x$ .

Получим сейчас представления остатков интерполирования для многочленов в форме Лагранжа и Ньютона (*напомним здесь, что в силу единственности решения задачи алгебраического интерполирования по значениям функции это всего лишь различные представления одного и того же многочлена*).

**1<sup>0</sup>.** Остаточный член в форме Ньютона.

Рассмотрим разделенную разность  $f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Применив к ней формулу (2.3), можем записать:

$$\begin{aligned} f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) &= \frac{f(x)}{(x-x_0) \cdots (x-x_n)} + \frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1) \cdots (x_0-x_n)} + \cdots + \\ &+ \frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_0) \cdots (x_n-x_{n-1})} = \frac{f(x)}{\omega_{n+1}(x)} + \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x_j-x)\omega'_{n+1}(x_j)}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)} f(x_j) + \omega_{n+1}(x) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$$

и, согласно определению (учитывая, что в последнем соотношении первое слагаемое есть не что иное, как интерполяционный многочлен в форме Лагранжа),

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) = \omega_{n+1}(x) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (3.1)$$

(3.1) – представление остатка интерполирования в форме Ньютона.

**2<sup>0</sup>.** Остаточный член в форме Лагранжа.

При выводе формулы (3.1) мы практически не использовали никаких дифференциальных свойств функции  $f(x)$ . Поэтому получили выражение для остаточного члена, практическое использование которого затруднительно.

Пусть теперь  $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ . Получим выражение для остатка интерполирования в этом случае. Для этого введем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - K\omega_{n+1}(t),$$

где  $K$  – некоторая постоянная.

Очевидно,  $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = 0$ . Подберем  $K$  таким образом, чтобы  $\varphi(x)$ , где  $x$  – та точка, в которой мы получаем выражение для остатка, также обращалась в нуль, т.е.

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x) - K\omega_{n+1}(x) = r_n(x) - K\omega_{n+1}(x) = 0.$$

Отсюда

$$K = \frac{r_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}, \quad (3.2)$$

причем знаменатель здесь отличен от нуля, поскольку точка интерполирования  $x$  предполагается отличной от узлов интерполирования, т.е.  $x \neq x_i, \quad i = \overline{0, n}$ .

Таким образом, функция  $\varphi(t) \in C^{n+1}[a; b]$  обращается в нуль на отрезке  $[a; b]$  по крайней мере в  $n+2$  различных точках:  $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ . Следовательно, на основании теоремы Ролля (между двумя нулями функции лежит по крайней мере один нуль производной) производная  $\varphi'(t)$  обращается в нуль по крайней мере в  $(n+1)$  точке интервала  $(a; b)$ . Применяя теорему Ролля к  $\varphi'(t)$ , получим, что существует, по крайней мере,  $n$  точек на  $(a; b)$ , в которых обращается в нуль функция  $\varphi''(t)$  и т.д., существует, по крайней мере, одна точка  $\xi$  на промежутке  $(a; b)$  такая, что  $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ . Но

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n(t) - K\omega_{n+1}^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(n+1)!.$$

Положив здесь  $t = \xi$ , получим:

$$f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0, \quad \xi \in [a; b]$$

или

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Отсюда, используя (3.2), окончательно имеем:

$$r_n(x) = \omega_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in [a; b]. \quad (3.3)$$

(3.3) – остаточный член в форме Лагранжа.

Очевидно, для корректности применения теоремы Ролля достаточно положить

$$a = \min\{x, x_0, \dots, x_n\}; \quad b = \max\{x, x_0, \dots, x_n\}.$$

Формула (3.3) позволяет решить задачу об оценке величины погрешности интерполирования в любой точке рассматриваемого отрезка:

$$|r_n(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| \frac{\max_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}.$$

Кроме того, сравнивая выражения (3.1) и (3.3), получим для  $f(x) \in C^n[a; b]$  связь между разделенной разностью порядка  $n$  от функции  $f(x)$  и ее производной  $n$ -го порядка:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a; b],$$

где  $a$  и  $b$  определены выше.

### 3.1. Минимизация остатка интерполирования

Функцию  $f(x)$  будем полагать  $(n+1)$  раз непрерывно дифференцируемой и  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$  для всех  $x \in [a; b]$ . Пусть также все узлы интерполирования расположены на отрезке  $[a; b]$ , т.е.  $x_i \in [a; b]$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

Очевидно, за меру погрешности в данной точке можно взять величину  $|r_n(x)|$ . Если рассматривать  $x$  на всем отрезке  $[a; b]$ , то величина погрешности будет  $\max_{x \in [a; b]} |r_n(x)|$ . Если же рассматривать и произвольные функции  $f(x) \in C^{n+1}[a; b]$ , для которых  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$  при всех  $x \in [a; b]$ , то мерой погрешности будет величина  $\sup_f \max_{x \in [a; b]} |r_n(x)|$ .

Каждая из этих величин зависит от выбора узлов интерполирования. Задача минимизации остатка интерполирования на отрезке  $[a; b]$  для рассматриваемого класса сводится к следующему вопросу: как сделать, чтобы величина  $\sup_f \max_{x \in [a; b]} |r_n(x)|$  была минимальной.

На основании представления остатка интерполирования в форме Лагранжа (3.3) имеем:

$$|r_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Поэтому

$$\max_{a \leq x \leq b} |r_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Обе эти оценки точные в том смысле, что в рассматриваемом классе функций существуют  $f(x)$ , для которых они достигаются, например,  $f(x) = \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1} + c_1 x^n + \dots + c_{n+1}$ , где  $c_i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$  – произвольные постоянные.

Следовательно,

$$\sup_f \max_{a \leq x \leq b} |r_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Таким образом, мы решим задачу о минимизации остатка интерполирования на заданном классе функций, если среди всего множества приведенных алгебраических многочленов степени  $(n+1)$ , имеющих различные действительные корни из отрезка  $[a; b]$ , мы выберем такой, максимум модуля которого будет минимальным, т.е. задача свелась к построению приведенного алгебраического многочлена степени  $(n+1)$ , наименее уклоняющегося от нуля на отрезке  $[a; b]$ , корни которого вещественны, различны и все принадлежат  $[a; b]$ .

Приведем сейчас решение этой задачи для отрезка  $[-1; 1]$ .

Итак, нужно построить многочлен  $P_n(x)$  вида

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (3.4)$$

удовлетворяющий условию



$$\Delta_n = \Delta_n(P_n) = \min_{P_n'(x) \in (3.4)} \max_{x \in [-1; 1]} |0 - P_n^*(x)|.$$

Очевидно, с учетом вида (3.4) многочлена  $P_n(x)$  задача эквивалентна построению многочлена наилучшего равномерного приближения степени  $(n-1)$  к функции  $f(x) = x^n$  на отрезке  $[-1; 1]$ .

В соответствии с теоремой о чебышевском альтернансе для того чтобы многочлен  $P_n(x)$  был решением поставленной задачи, необходимо и достаточно существование по меньшей мере  $(n+1)$  точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$  на отрезке  $[-1; 1]$ , в которых  $P_n(x)$  принимает с чередующимися знаками значение  $\Delta_n$ .

Покажем сначала, что таких точек должно быть ровно  $(n+1)$ . Действительно, для того чтобы непрерывная функция более чем в  $(n+1)$  последовательных точках отрезка  $[-1; 1]$  могла принимать отличные от нуля значения  $\Delta_n$  с чередующимися знаками, она должна обратиться в нуль на этом отрезке более чем в  $n$  точках. А поскольку полином  $P_n(x)$  отличен от тождественно нулевого, то на отрезке  $[-1; 1]$  он может обратиться в нуль не более чем в  $n$  точках. Поэтому искомый многочлен  $P_n(x)$  на  $[-1; 1]$  значение  $\Delta_n$  принимает ровно  $(n+1)$  раз.

Охарактеризуем эти точки. Если  $P_n(x)$  во внутренней точке отрезка  $[-1; 1]$  принимает экстремальное значение, то производная  $P_n'(x)$  в этой точке обращается в нуль. Но степень многочлена  $P_n'(x)$  равна  $(n-1)$  и, следовательно, производная искомого многочлена может обратиться в нуль лишь в  $(n-1)$  точках. Поэтому искомый многочлен имеет  $(n-1)$  внутренних экстремальных точек на  $[-1; 1]$  и, следовательно, два крайних экстремума, т.е.

$$|P_n(-1)| = |P_n(1)| = \Delta_n.$$

Обозначив через  $\omega_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  корни многочлена  $P_n(x)$  и через  $x_j$ ,  $j = \overline{0, n}$  его точки экстремума, можем записать:

$$P_n(\omega_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (3.5)$$

$$|P_n(x_j)| = \Delta_n, \quad j = \overline{0, n}.$$

При этом легко видеть, что указанные множества точек связаны следующими соотношениями:

$$-1 = x_n < \omega_n < x_{n-1} < \omega_{n-1} < \dots < \omega_1 < x_0 = 1. \quad (3.6)$$

Кроме того, так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$  и все корни  $P_n(x)$  лежат на отрезке  $[-1; 1]$ , то  $P_n(1) = \Delta_n$  и, следовательно, справедливы равенства

$$P_n(x_j) = (-1)^j \Delta_n, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.7)$$

Изложенные выше соображения позволяют установить функциональное соотношение, которому удовлетворяет искомый полином  $P_n(x)$ , а именно: справедлива

**Лемма.** Полином  $P_n(x)$  вида (3.4), наименее уклоняющийся от нуля на отрезке  $[-1; 1]$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)(P'_n(x))^2 = n^2(\Delta_n^2 - P_n^2(x)). \quad (3.8)$$

*Доказательство.*

Ранее мы доказали, что точки  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  – простые нули полинома  $P'_n(x)$ . С другой стороны, эти же точки являются двукратными нулями полинома  $\Delta_n^2 - P_n^2(x)$ . Действительно, возводя в квадрат равенства (3.7), получим:  $P_n^2(x) - \Delta_n^2 = 0$  при  $x = x_j$ ,  $j = \overline{0, n}$ , а поскольку  $(P_n^2(x) - \Delta_n^2)' = 2P_n(x) \cdot P'_n(x)$ , то, подставляя в это соотношение  $x = x_j$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , найдем, что эти точки являются и нулями производной полинома  $\Delta_n^2 - P_n^2(x)$ .

Кроме того, точки  $x_0 = 1$  и  $x_n = -1$  – простые нули этого же полинома. Поэтому полиномы  $(1-x^2)(P'_n(x))^2$  и  $\Delta_n^2 - P_n^2(x)$  степени  $2n$  имеют одни и те же нули и, следовательно, отличаются только постоянным множителем, т.е. имеет место равенство

$$(1-x^2)(P'_n(x))^2 = C(\Delta_n^2 - P_n^2(x)).$$

Приравнявая коэффициенты при старших степенях  $x$  у обоих полиномов, находим:  $C = n^2$ . □

Построим теперь  $P_n(x)$ , проинтегрировав уравнение (3.8). Это уравнение, помимо неизвестной функции  $P_n(x)$ , содержит еще неизвестный параметр  $\Delta_n$ . Поэтому при построении будем использовать всю известную информацию о  $P_n(x)$ .

Рассмотрим сначала уравнение (3.8) на отрезке  $[-1; 1]$ . В этом случае  $|P_n(x)| \leq \Delta_n$  и, следовательно, из левой и правой частей (3.8) можно извлечь корень, переписав уравнение в виде

$$\pm \frac{dP_n}{\sqrt{\Delta_n^2 - P_n^2}} = n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (3.9)$$

Исследуем левую часть (3.9) на каждом из отрезков, концами которых являются соседние точки экстремума. Если  $P_n(x_{j+1}) = \Delta_n$ , то при изменении  $x$  от  $x_{j+1}$  до  $x_j$  функция  $P_n(x)$  убывает от  $\Delta_n$  до  $-\Delta_n$ . При этом дифференциал  $dP_n$  отрицателен и в левой части (3.9) следует взять знак «-». Аналогично, если  $P_n(x_{j+1}) = -\Delta_n$ , то следует взять знак «+». Учитывая (3.7), получим, что на отрезке  $[x_{j+1}; x_j]$  уравнение (3.9) должно быть записано в виде

$$(-1)^j \frac{dP_n}{\sqrt{\Delta_n^2 - P_n^2}} = n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [x_{j+1}; x_j], \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.10)$$

Получим теперь явное выражение для  $P_n(x)$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Пусть  $x$  – любая точка отрезка  $[-1; 1]$  и для определенности пусть, например,  $x$  принадлежит отрезку  $[x_{k+1}; x_k]$  для некоторого значения  $k$ , удовлетворяющего неравенству  $0 \leq k \leq n-1$ .

Проинтегрируем правую часть уравнения (3.10) по  $x$  в пределах от  $x$  до 1. Получим:

$$n \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = n \arcsin x \Big|_x^1 = n \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) = n \arccos x .$$

Проинтегрируем теперь левую часть (3.10). Когда  $x$  меняется от  $x_{j+1}$  до  $x_j$ , функция  $P_n(x)$  меняется от  $P_n(x_{j+1}) = (-1)^{j+1} \Delta_n$  до  $P_n(x_j) = (-1)^j \Delta_n$ . Поэтому, выполняя замену переменной интегрирования  $x$  на  $(-1)^j x$ , будем иметь:

$$(-1)^j \int_{P_n(x_{j+1})}^{P_n(x_j)} \frac{dP_n}{\sqrt{\Delta_n^2 - P_n^2}} = \int_{-\Delta_n}^{\Delta_n} \frac{dP_n}{\sqrt{\Delta_n^2 - P_n^2}} = \arcsin \frac{P_n}{\Delta_n} \Big|_{-\Delta_n}^{\Delta_n} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi .$$

Далее, при интегрировании левой части (3.10) от  $P_n(x)$  до  $P_n(x_k)$  получим:

$$(-1)^k \int_{P_n(x)}^{P_n(x_k)} \frac{dP_n}{\sqrt{\Delta_n^2 - P_n^2}} = \int_{(-1)^k P_n(x)}^{\Delta_n} \frac{dP_n}{\sqrt{\Delta_n^2 - P_n^2}} = \arcsin \frac{P_n}{\Delta_n} \Big|_{(-1)^k P_n(x)}^{\Delta_n} = \arccos(-1)^k \frac{P_n(x)}{\Delta_n} .$$

Так как  $\int_x^1 = \int_x^{x_k} + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x_{j+1}}^{x_j}$ , то окончательно будем иметь:

$$n \arccos x = k\pi + \arccos(-1)^k \frac{P_n(x)}{\Delta_n} . \quad (3.11)$$

Отсюда найдем:

$$P_n(x) = \Delta_n \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1 . \quad (3.12)$$

Полагая в (3.12)  $x = \omega_k \in [x_{k+1}; x_k]$ , найдем корни полинома  $P_n(x)$ :

$$\omega_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Формула (3.12) определяет  $P_n(x)$  для всех  $x \in [-1; 1]$ . Найдем вид  $P_n(x)$  для  $|x| \geq 1$  и определим  $\Delta_n$ . Для этого заметим, что

$$\omega_{n-k-1} = \cos \left( \pi - \frac{2k+1}{2n} \pi \right) = -\omega_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Отсюда следует, что четность многочлена  $P_n(x)$  совпадает с четностью его степени  $n$ . Таким образом, выполняется равенство  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  и, следовательно, достаточно определить  $P_n(x)$  для  $x \geq 1$ .

Исследуем уравнение (3.8) при  $x \geq 1$ . В этом случае его необходимо переписать следующим образом:

$$(x^2 - 1)(P'_n(x))^2 = n^2(P_n^2(x) - \Delta_n^2), \quad x \geq 1 .$$

Так как  $x \geq 1$ , то  $P_n(x) \geq \Delta_n$  и функция возрастает. Поэтому, извлекая корень, получим:

$$\frac{dP_n}{\sqrt{P_n^2 - \Delta_n^2}} = n \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

При интегрировании правой части этого уравнения от 1 до  $x$  левая часть будет интегрироваться от  $\Delta_n$  до  $P_n(x)$ . Поэтому имеем:

$$\int_{\Delta_n}^{P_n(x)} \frac{dP_n}{\sqrt{P_n^2 - \Delta_n^2}} = \ln \left( \frac{P_n(x)}{\Delta_n} + \sqrt{\frac{P_n^2(x)}{\Delta_n^2} - 1} \right) = \operatorname{arch} \frac{P_n(x)}{\Delta_n} = n \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = n \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = n \operatorname{arch} x.$$

Отсюда

$$P_n(x) = \Delta_n \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} x), \quad x \geq 1.$$

При  $x \leq -1$ , воспользовавшись свойством четности, можем записать:

$$P_n(x) = (-1)^n \Delta_n \operatorname{ch}(n \operatorname{arch}(-x)), \quad x \leq -1.$$

Таким образом, осталось найти  $\Delta_n$ . Заметив, что старший коэффициент многочлена  $\cos(n \arccos x)$  равен  $2^{n-1}$ , а у  $P_n(x) - 1$ , получим:  $\Delta_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ . Поэтому окончательно имеем:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

где

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{при } |x| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} x) & \text{при } x \geq 1, \\ (-1)^n \operatorname{ch}(n \operatorname{arch}(-x)) & \text{при } x \leq -1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Полином  $T_n(x)$  называется полиномом Чебышева первого рода степени  $n$ .

Отметим, что на основании тождества

$$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2 \cos \alpha \cos n\alpha,$$

Полагая в последнем  $\alpha = \arccos x$ , получим рекуррентную формулу, связывающую три последовательных многочлена Чебышева (учитывая, что  $T_0(x) = \cos(\arccos(0 \cdot x)) = 1$ ;  $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$ )

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad |x| \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

(естественно, полином  $T_n(x)$  как полином имеет единое выражение на всей области определения, (3.13) дают лишь его различные функциональные представления на различных частях области определения). Из (3.14) имеем:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ &\dots\dots\dots \\ T_n(x) &= 2^{n-1}x^n - \dots \end{aligned}$$

### Упражнения

1. Доказать, что многочлены Чебышева первого рода образуют ортогональную по весу  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на отрезке  $[-1; 1]$  систему.
2. Получить явное представление для многочленов Чебышева при любом значении  $n$ .

Таким образом, для отрезка  $[-1; 1]$  поставленная нами задача минимизации остатка интерполирования полностью решена. Искомым многочленом  $\omega_{n+1}(x)$  будет многочлен  $\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$ , а искомыми узлами интерполирования – его корни:

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0, n};$$

при этом  $\sup_f \max_{-1 \leq x \leq 1} |r_n(x)| = \frac{M}{(n+1)! \cdot 2^n}$ .

Если интерполирование производится на произвольном отрезке  $[a; b]$ , то линейной заменой  $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$  его можно перевести в отрезок  $[-1; 1]$ . Тогда узлами интерполирования будут

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0, n},$$

а сам многочлен будет иметь вид (здесь мы используем обратное преобразование из  $[-1; 1]$  в  $[a; b]$ , которое имеет вид  $t = \frac{2}{b-a}(2x - b - a)$ )

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} T_{n+1}\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right).$$

Соответственно, для оценки погрешности получим оценку

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{2n+1}}.$$

**Замечание.** Возможна и другая постановка задачи о минимизации остатка интерполирования, а именно: таблица узлов предполагается фиксированной. Будем считать, что  $f(x)$  – функция из рассматриваемого класса и задана таблично. Как выбрать узлы интерполирования (из заданной таблицы), чтобы результат интерполирования в точке  $x$ , отличной от узлов таблицы, был наилучшим?

Решение этой задачи основано на отыскании таких узлов, при которых достигает минимума выражение

$$\sup_f |r_n(x)| = \frac{M}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad x \in [a; b].$$

В качестве узлов, очевидно, необходимо выбирать те табличные значения аргумента, которые расположены ближе всего к точке интерполирования (предполагается, что используется не вся таблица, а интерполирование производится с помощью многочлена наименьшей возможной степени).

#### § 4. Интерполирование при равноотстоящих узлах

Естественно ожидать, что если промежутки между последовательными узлами интерполирования равны, то полученные ранее представления интерполяционного многочлена упростятся. Так оно и есть на самом деле.

**Упражнение.** Получить представление интерполяционного многочлена в форме Лагранжа для случая равноотстоящих узлов.

Мы сейчас основное внимание уделим преобразованию многочлена Ньютона. Для этих целей нам понадобится специальный математический аппарат.

##### 4.1. Конечные разности

Объекты, вынесенные в подзаголовок, являются нужным для наших целей рабочим инструментом и играют роль, сходную с ролью дифференциала при табличном задании функций.

Итак, пусть  $f(x)$  задана таблично в точках, отстоящих друг от друга на равных расстояниях:

$$y_k = f(x_0 + kh), \text{ где } h > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(Правыми) конечными разностями первого порядка назовем числа

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

По конечным разностям первого порядка рекурсивно строятся конечные разности второго порядка, по разностям второго порядка – разности третьего порядка и т.д.:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \quad \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2},$$

.....

$$\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j.$$

Свойства конечных разностей вполне аналогичны (за исключением симметрии) свойствам соответствующих разделенных разностей.

1<sup>0</sup>. Линейность: если  $g(x) = \alpha f(x) + \beta h(x)$ , то  $\Delta^k g(x) = \alpha \Delta^k f(x) + \beta \Delta^k h(x)$ .

2<sup>0</sup>. Конечная разность первого порядка от произвольного алгебраического многочлена степени  $n$  есть алгебраический многочлен степени  $n-1$ .

Первое свойство представляется достаточно очевидным и может быть легко доказано по индукции.

Свойство 2<sup>0</sup>, в силу 1<sup>0</sup>, достаточно проверить лишь для многочлена  $P_n(x) = x^n$ . В этом же случае имеем:

$$\Delta P_n(x_0) = (x_0 + h)^n - (x_0)^n = P_{n-1}(x_0).$$

Очевидным следствием свойства  $2^0$  будет такое утверждение: конечная разность порядка  $n$  от произвольного алгебраического многочлена степени  $n$  есть величина постоянная, а все конечные разности более высокого порядка равны нулю.

Выше мы дали рекурсивное определение (правых) конечных разностей всех порядков. Установим сейчас их связь со значениями исходной функции  $f(x)$ . Пусть  $E$  – оператор сдвига аргумента на шаг, т.е.  $Ey_i = y_{i+1}$  или  $Ef(x) = f(x+h)$ . Тогда произвольная степень оператора  $E$  может быть определена равенством  $E^\alpha f(x) = f(x+\alpha h)$ . Поэтому можем записать:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = Ey_0 - y_0 = (E - I)y_0,$$

где  $Iy_0 = y_0$ , т.е.  $I$  – тождественный оператор.

Далее:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (E - I)y_1 - (E - I)y_0 = (E - I)(y_1 - y_0) = (E - I)^2 y_0.$$

По индукции легко видеть, что

$$\Delta^k y_0 = (E - I)^k y_0. \quad (4.1)$$

(4.1) представляет собой формулу, выражающую конечную разность произвольного порядка непосредственно через значения функции, например,

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^3 y_0 &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Столь же просто может быть найдено выражение любого значения  $y_k$  функции через начальное ее значение  $y_0$  и начальные значения конечных разностей  $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots$ .

В самом деле, по определению имеем:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = (I + \Delta)y_0,$$

где  $\Delta$  – оператор конечной разности;

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (I + \Delta)y_1 = (I + \Delta)^2 y_0$$

и т.д., по индукции получим:

$$y_k = (I + \Delta)^k y_0. \quad (4.2)$$

В частных случаях можем записать:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0, \\ y_3 &= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Наконец, установим связь между конечными и разделенными разностями:

$$f(x_0, x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1! \cdot h},$$

$$f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) = \frac{f(x_0 + h, x_0 + 2h) - f(x_0, x_0 + h)}{2h} = \frac{\frac{\Delta y_1}{1! \cdot h} - \frac{\Delta y_0}{1! \cdot h}}{2h} = \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}.$$

Очевидно, по индукции получим:

$$f(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + kh) = \frac{\Delta^k y_0}{k! \cdot h^k}. \quad (4.3)$$

Так как ранее мы получили формулу  $f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ , связывающую разделенные разности с производными, то с ее помощью из (4.3) будем иметь:

$$\Delta^k y_0 = h^k f^{(k)}(\xi), \quad \xi \in [x_0; x_0 + kh],$$

т.е. если  $f^{(k)}(\xi) \neq 0$ , то  $\Delta^k y_0 = O(h^k)$ ; если же  $f^{(k)}(\xi) = 0$ , то  $\Delta^k y_0 = o(h^k)$ .

И первое, и второе означает, что для достаточно гладкой функции ее конечные разности уже не очень высокого порядка оказываются достаточно малыми величинами, если вычисления проводятся без погрешностей и шаг  $h$  не очень велик (например, меньше единицы).

Предположим теперь, что табличные значения  $y_i$  вычислены приближенно, т.е.  $y_i = \tilde{y}_i + \delta_i$ , где для всех значений  $i$  справедливы неравенства  $|\delta_i| \leq \delta$ . Посмотрим, как отразятся эти ошибки на состоянии конечной разности  $k$ -го порядка:

$$\Delta^k y_0 = (E - I)^k y_0 = (E - I)^k (\tilde{y}_0 + \delta_0) = (E - I)^k \tilde{y}_0 + (E - I)^k \delta_0.$$

Таким образом, видим, что погрешность конечной разности  $k$ -го порядка есть величина

$$(E - I)^k \delta_0 = \delta_k - C_k^1 \delta_{k-1} + C_k^2 \delta_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \delta_1 + (-1)^k C_k^k \delta_0.$$

Отсюда следует, что

$$|(E - I)^k \delta_0| \leq \delta(1 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^{k-1} + C_k^k) = \delta(1 + 1)^k = 2^k \delta.$$

Окончательно имеем: в наихудшем варианте погрешность может изменяться по закону геометрической прогрессии со знаменателем 2 и, следовательно, быстро возрастать.

Все это, с учетом убывания точных значений конечных разностей, приводит к тому, что при некотором  $k_0$  точные значения конечных разностей становятся сопоставимыми по величине с погрешностями, им соответствующими:

$$\Delta^{k_0} y_i \approx 2^{k_0} \delta,$$



а с дальнейшим ростом  $k$  погрешности становятся доминирующими, т.е. при  $k > k_0$  таблица конечных разностей уже не несет никакой полезной информации и, следовательно, не должна использоваться в вычислениях (в частности, при построении интерполяционных многочленов). (Таблицу конечных разностей, свободную от указанного недостатка, называют *правильной*).

#### 4.2. Некоторые правила интерполирования при равноотстоящих узлах

Исходя из соображений минимизации остатка интерполирования и поведения вычислительной погрешности в таблице конечных разностей естественно придерживаться следующих принципов:

- 1) в качестве узлов интерполирования нужно брать узлы, ближайšie к точке интерполирования;
- 2) значения функции  $f$  в узлах, ближайших к точке интерполирования, должны привлекаться через разности по возможности более низкого порядка.

Таким образом, если рассматриваемая таблица будет таблицей конечных размеров, то можно указать следующие три типа правил:

- 1) Если точка интерполирования  $x$  лежит в начале таблицы, то естественно привлекать узлы правее ее, включая  $x_0$ ;
- 2) Если точка интерполирования  $x$  лежит в конце таблицы, то естественно привлекать узлы левее ее, включая  $x_n$ ;
- 3) Если точка интерполирования  $x$  лежит внутри таблицы, то:
  - а) если она лежит вблизи одного из узлов, то естественно привлекать узлы по одному справа и слева, начиная от этого узла;
  - б) если она лежит посередине между двумя соседними узлами, то число узлов естественно брать четным.

Рассмотрим эти случаи более подробно.

##### 1<sup>0</sup>. Интерполирование в начале таблицы.

Считая, что для достижения целей достаточно интерполирования с помощью многочлена  $k$ -й степени, привлекаем узлы  $x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + kh$ . Запишем интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$P_k(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0 + h) + (x - x_0)(x - x_0 - h)f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) + \dots + \\ + (x - x_0)(x - x_0 - h) \cdots (x - x_0 - kh + h)f(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + kh).$$

Произведем замену переменной по формуле  $t = \frac{x - x_0}{h}$ . Так как по предположению  $x \in [x_0; x_0 + h]$ , то  $t \in [0; 1]$ . Тогда, учитывая формулу (4.3), после несложных преобразований получим:

$$P_k(x) = P_k(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \cdots (t-k+1)}{k!} \Delta^k y_0. \quad (4.4)$$

(4.4) – интерполяционный многочлен Ньютона для начала таблицы.

Рассмотрим сейчас остаток интерполирования. Если  $f(x) \in C^{k+1}[a; b]$ , то, согласно (3.3),

$$r_k(x) = \omega_{k+1}(x) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}.$$

Отсюда, учитывая замену переменных, имеем:

$$r_k(x) = r_k(x_0 + th) = h^{k+1} \frac{t(t-1)\cdots(t-k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi).$$

## 2<sup>0</sup>. Интерполирование в конце таблицы.

В этом случае в качестве узлов интерполирования берем  $x_n, x_n - h, \dots, x_n - kh$ . Тогда

$$P_k(x) = f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_n - h) + (x - x_n)(x - x_n + h)f(x_n, x_n - h, x_n - 2h) + \dots + \\ + (x - x_n)(x - x_n + h)\cdots(x - x_n + kh - h)f(x_n, x_n - h, \dots, x_n - kh).$$

Произведем замену переменной по формуле  $t = \frac{x - x_n}{h}$ . Так как по предположению  $x \in [x_n - h; x_n]$ , то  $t \in [-1; 0]$ . Тогда, учитывая, что  $f(x_n, x_n - h, \dots, x_n - ih) = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! \cdot h^i}$  в силу формулы (4.3), после несложных преобразований получим:

$$P_k(x) = P_k(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\cdots(t+k-1)}{k!} \Delta^k y_{n-k}. \quad (4.5)$$

В этом случае

$$r_k(x) = r_k(x_n + th) = h^{k+1} \frac{t(t+1)\cdots(t+k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi).$$

(4.5) – интерполяционный многочлен Ньютона для конца таблицы.

## 3<sup>0</sup>. Интерполирование внутри таблицы.

а) Пусть  $x_n$  – внутренний узел таблицы. Предположим, что точка интерполирования  $x$  лежит вблизи  $x_n$  с той или другой стороны. Табличные узлы для интерполирования здесь разумно привлекать в следующем порядке: сначала взять  $x_n$ , а затем брать пары точек  $(x_n + h, x_n - h), (x_n + 2h, x_n - 2h), \dots, (x_n + kh, x_n - kh)$ . Число привлекаемых для интерполирования узлов будет нечетным и равным  $2k + 1$ .

Интерполяционный многочлен Ньютона при таком порядке узлов запишется следующим образом:

$$P_{2k}(x) = f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_n + h) + (x - x_n)(x - x_n - h)f(x_n, x_n + h, x_n - h) + \\ + (x - x_n)(x - x_n - h)(x - x_n + h)f(x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h) + \dots + \\ + (x - x_n)(x - x_n - h)\cdots(x - x_n + kh - h)f(x_n, x_n + h, x_n - h, \dots, x_n - kh + h, x_n + kh) + \\ + (x - x_n)(x - x_n - h)\cdots(x - x_n + kh - h)(x - x_n - kh)f(x_n, x_n + h, x_n - h, \dots, x_n + kh, x_n - kh).$$

Вводя замену переменной  $t = \frac{x - x_n}{h}$  и учитывая, что  $f(x_n) = y_n$ ,  $f(x_n, x_n + h) = \frac{\Delta y_n}{1! \cdot h}$ ,

$f(x_n, x_n + h, x_n - h) = \frac{\Delta^2 y_{n-1}}{2! \cdot h^2}$ ,  $f(x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h) = \frac{\Delta^3 y_{n-1}}{3! \cdot h^3}, \dots$ , получим:

$$\begin{aligned} P_{2k}(x) = P_{2k}(x_n + th) = & y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_n + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{n-1} + \\ & + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!} \Delta^4 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t-1)(t+1) \dots (t-k+1)(t+k-1)}{(2k-1)!} \Delta^{2k-1} y_{n-k+1} + \\ & + \frac{t(t-1)(t+1) \dots (t-k+1)(t+k-1)(t-k)}{(2k)!} \Delta^{2k} y_{n-k}. \end{aligned}$$

Чтобы придать членам правой части симметричный вид, приведем сначала равенство к виду

$$\begin{aligned} P_{2k}(x) = P_{2k}(x_n + th) = & y_n + \frac{t}{1!} \left( \Delta y_n - \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-1} \right) + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} \left( \Delta^3 y_{n-1} - \frac{1}{2} \Delta^4 y_{n-2} \right) + \\ & + \frac{t^2(t^2-1^2)}{4!} \Delta^4 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t^2-1^2) \dots (t^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!} \left( \Delta^{2k-1} y_{n-k+1} - \frac{1}{2} \Delta^{2k} y_{n-k} \right) + \\ & + \frac{t^2(t^2-1) \dots (t^2-(k-1)^2)}{(2k)!} \Delta^{2k} y_{n-k}. \end{aligned} \quad (*)$$

Преобразуем теперь разности в скобках, исключив конечные разности четного порядка:

$$\begin{aligned} \Delta y_n - \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-1} &= \Delta y_n - \frac{\Delta y_n - \Delta y_{n-1}}{2} = \frac{\Delta y_n + \Delta y_{n-1}}{2}; \\ \Delta^3 y_{n-1} - \frac{1}{2} \Delta^4 y_{n-2} &= \Delta^3 y_{n-1} - \frac{\Delta^3 y_{n-1} - \Delta^3 y_{n-2}}{2} = \frac{\Delta^3 y_{n-1} + \Delta^3 y_{n-2}}{2}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (\*), окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} P_{2k}(x) = P_{2k}(x_n + th) = & y_n + \frac{t}{1!} \cdot \frac{\Delta y_n + \Delta y_{n-1}}{2} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{n-1} + \Delta^3 y_{n-2}}{2} + \\ & + \frac{t^2(t^2-1^2)}{4!} \Delta^4 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t^2-1^2) \dots (t^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!} \cdot \frac{\Delta^{2k-1} y_{n-k+1} + \Delta^{2k-1} y_{n-k}}{2} + \\ & + \frac{t^2(t^2-1) \dots (t^2-(k-1)^2)}{(2k)!} \Delta^{2k} y_{n-k}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.6) – интерполяционная формула Ньютона – Стирлинга для интерполирования внутри таблицы.

По аналогии со случаями  $1^0, 2^0$  получим представление остатка интерполирования:

$$r_{2k}(x) = r_{2k}(x_n + th) = h^{2k+1} \frac{t(t^2 - 1^2) \cdots (t^2 - k^2)}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(\xi).$$

б) Наконец, рассмотрим еще одно правило, предназначенное для использования в том случае, когда точка  $x$  лежит вблизи середины отрезка между двумя соседними табличными значениями. Пусть это будут значения  $x_n$  и  $x_n + h$ .

Соображения симметрии побуждают строить интерполяционное правило со следующим порядком привлечения узлов: сначала привлекается пара  $(x_n, x_n + h)$ , затем последовательно  $(x_n - h, x_n + 2h)$ ,  $(x_n - 2h, x_n + 3h), \dots, (x_n - kh + h, x_n + kh)$ . Число узлов будет четным. Интерполяционный многочлен Ньютона при таком расположении узлов примет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_{2k-1}(x) = & f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_n + h) + (x - x_n)(x - x_n - h)f(x_n, x_n + h, x_n - h) + \\ & + (x - x_n)(x - x_n - h)(x - x_n + h)f(x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h) + \dots + \\ & + (x - x_n)(x - x_n - h) \cdots (x - x_n - kh + h)f(x_n, x_n + h, x_n - h, \dots, x_n + kh - h, x_n - kh + h) + \\ & + (x - x_n)(x - x_n - h) \cdots (x - x_n - kh + h)(x - x_n + kh - h)f(x_n, x_n + h, \dots, x_n - kh + h, x_n + kh). \end{aligned}$$

После замены переменной  $t = \frac{x - x_n}{h}$  и учитывая, что  $f(x_n) = y_n$ ,  $f(x_n, x_n + h) = \frac{\Delta y_n}{1! \cdot h}$ ,

$f(x_n, x_n + h, x_n - h) = \frac{\Delta^2 y_{n-1}}{2! \cdot h^2}$ ,  $f(x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h) = \frac{\Delta^3 y_{n-1}}{3! \cdot h^3}, \dots$ , получим:

$$\begin{aligned} P_{2k-1}(x) = P_{2k-1}(x_n + th) = & y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_n + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{n-1} + \\ & + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!} \Delta^4 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t-1)(t+1) \cdots (t+k-2)(t-k+1)}{(2k-2)!} \Delta^{2k-2} y_{n-k+1} + \\ & + \frac{t(t-1)(t+1) \cdots (t-k+1)(t+k-1)}{(2k-1)!} \Delta^{2k-1} y_{n-k+1}. \end{aligned}$$

Для приведения членов правой части к виду, симметричному относительно точки  $x_n + \frac{1}{2}h$  отделим от четных разностей половины их значений  $\frac{1}{2}y_n$ ,  $\frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-1}$ ,  $\frac{1}{2}\Delta^4 y_{n-2}, \dots$  и заменим эти значения при помощи тождеств

$$\frac{1}{2}y_n = \frac{1}{2}(y_{n+1} - \Delta y_n), \quad \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-1} = \frac{1}{2}(\Delta^2 y_n - \Delta^3 y_{n-1}), \dots$$

После приведения подобных членов получим:

$$\begin{aligned} P_{2k-1}(x_n + th) = & \frac{y_n + y_{n+1}}{2} + \frac{t - \frac{1}{2}}{1!} \Delta y_n + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_n + \Delta^2 y_{n-1}}{2} + \frac{t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{3!} \Delta^3 y_{n-1} + \\ & + \frac{t(t^2 - 1^2)(t-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{n-1} + \Delta^4 y_{n-2}}{2} + \frac{t(t^2 - 1^2)(t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{5!} \Delta^5 y_{n-2} + \dots + \\ & + \frac{t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-2)^2)(t-k+1)}{(2k-2)!} \cdot \frac{\Delta^{2k-2} y_{n-k+1} + \Delta^{2k-2} y_{n-k+2}}{2} + \\ & + \frac{t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-2)^2)(t-k+1)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{(2k)!} \Delta^{2k} y_{n-k}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.7) – интерполяционная формула Ньютона – Бесселя для интерполирования внутри таблицы.

Остаток интерполирования будет выглядеть следующим образом:

$$r_{2k-1}(x) = r_{2k-1}(x_n + th) = h^{2k} \frac{t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-1)^2)(t-k)}{(2k)!} f^{(2k)}(\xi).$$

## § 5. Интерполирование с кратными узлами

Ранее мы уже формулировали постановку задачи интерполирования с кратными узлами. Напомним ее. Пусть на отрезке  $[a; b]$  заданы  $(m+1)$  различных узлов интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . Рассмотрим функцию  $f(x)$  и будем считать, что в точке  $x_0$  известны значения как самой функции  $f(x_0)$ , так и ее производные  $f'(x_0), \dots, f^{(\alpha_0-1)}(x_0)$ ; в точке  $x_1$  заданы значения  $f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(\alpha_1-1)}(x_1)$  и т.д. Числа  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  называются кратностями соответствующих узлов. Общее число всех исходных данных о функции  $f(x)$  обозначим через  $n+1$ :  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n+1$ .

Поставим задачей найти многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

степени не выше  $n$ , удовлетворяющий условиям

$$P_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k), \quad i = \overline{0, \alpha_k - 1}; \quad k = \overline{0, m}. \quad (5.1)$$

Эти условия, как и в случае простого интерполирования (по значениям функции), дадут для определения коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  искомого многочлена  $P_n(x)$  систему

линейных алгебраических уравнений. Чтобы убедиться в существовании и единственности ее решения, достаточно доказать, что соответствующая ей однородная система

$$P_n^{(i)}(x_k) = 0, \quad i = \overline{0, \alpha_k - 1}; \quad k = \overline{0, m} \quad (5.2)$$

имеет только нулевое решение.

Но система (5.2) для многочлена  $P_n(x)$  говорит о том, что узлы  $x_0, x_1, \dots, x_m$  должны быть корнями  $P_n(x)$  кратностей не меньше, чем  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  соответственно. Сумма кратностей должна быть больше или равна  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n + 1$ . Но степень  $P_n(x)$  – не выше  $n$ . Поэтому иметь сумму кратностей корней, большую  $n$ , многочлен  $P_n(x)$  может только в том случае, когда он тождественно равен нулю. Тогда все его коэффициенты равны нулю и однородная система (5.2) имеет только нулевое решение.

Таким образом, рассматриваемая интерполяционная задача с кратными узлами разрешима и имеет только одно решение, каковы бы ни были значения  $f^{(i)}(x_k)$  в (5.1).

Как и в случае алгебраического интерполирования по значениям функции, для  $P_n(x)$  легко выписать явное выражение через определители. Но из тех же соображений, что и ранее, получим явное представление для него. Для этих целей воспользуемся конструкцией типа (1.5) (т.е. представлением через функции влияния). Построим многочлены  $H_{ij}(x)$  степени не выше  $n$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} H_{ij}(x_k) = H'_{ij}(x_k) = \dots = H_{ij}^{(\alpha_k-1)}(x_k) = 0, & k \neq i, \\ H_{ij}(x_i) = H'_{ij}(x_i) = \dots = H_{ij}^{(j-1)}(x_i) = H_{ij}^{(j+1)}(x_i) = \dots = H_{ij}^{(\alpha_i-1)}(x_i) = 0, \\ H_{ij}^{(j)}(x_i) = 1, & i = \overline{0, m}; \quad j = \overline{0, \alpha_i - 1}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Тогда по аналогии с (1.5) можно будет записать следующее представление для интерполяционного многочлена:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} H_{ij}(x) f^{(j)}(x_i). \quad (5.4)$$

Так как  $H_{ij}(x)$  обладает в точках  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$  нулями кратностей  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$  соответственно, а в точке  $x_i$  – нулем кратности  $j$ , то

$$H_{ij}(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_{i-1})^{\alpha_{i-1}} (x - x_i)^j (x - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \dots (x - x_m)^{\alpha_m} \bar{H}_{ij}(x), \quad (5.5)$$

где  $\bar{H}_{ij}(x)$  – многочлен степени  $\alpha_i - j - 1$ , не обращающийся в нуль при  $x = x_i$ . Запишем его по степеням двучлена  $(x - x_i)$ :

$$\bar{H}_{ij}(x) = A_{ij}^{(0)} + A_{ij}^{(1)}(x - x_i) + \dots + A_{ij}^{(\alpha_i-j-1)}(x - x_i)^{\alpha_i-j-1}. \quad (5.6)$$

Вводя в рассмотрение многочлен  $\Omega(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_m)^{\alpha_m}$ , равенство (5.5) можем переписать в виде

$$H_{ij}(x) = \frac{\Omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i}} \cdot (x - x_i)^j \cdot \bar{H}_{ij}(x),$$

откуда, учитывая представление (5.6), получим равенство

$$\overline{H}_{ij}(x) = A_{ij}^{(0)} + A_{ij}^{(1)}(x - x_i) + \dots + A_{ij}^{(\alpha_i - j - 1)}(x - x_i)^{\alpha_i - j - 1} = \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{(x - x_i)^j}{H_{ij}(x)}.$$

Подставляя сюда  $x = x_i$ , получим:

$$A_{ij}^{(0)} = \lim_{x \rightarrow x_i} \left[ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right].$$

Первое отношение непрерывно при  $x = x_i$ . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} = \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \Big|_{x = x_i}.$$

Предел второго отношения найдем по правилу Лопиталя (хотя оно так же, как и первое, является непрерывным при  $x = x_i$ , воспользоваться равенством, аналогичным предыдущему, мы не можем, поскольку пока не знаем явного представления для  $H_{ij}(x)$ ):

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{H_{ij}^{(j)}(x)}{j!}.$$

Таким образом, в силу последнего из условий (5.3) данный предел равен  $\frac{1}{j!}$ .

Следовательно,

$$A_{ij}^{(0)} = \frac{1}{j!} \cdot \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \Big|_{x = x_i}. \quad (5.7)$$

Аналогично для всех оставшихся коэффициентов представления (5.6) имеем:

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{d^k}{dx^k} \left[ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]. \quad (5.8)$$

Применим правило Лейбница для дифференцирования произведения:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left[ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right] = \sum_{p=0}^k C_k^p \left[ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(p)} \cdot \left[ \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-p)}. \quad (5.9)$$

Как и выше, производные  $\left[ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(p)}$  непрерывны в точке  $x = x_i$ . Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left[ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(p)} = \left[ \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(p)} \Big|_{x = x_i}.$$

Для отыскания  $\lim_{x \rightarrow x_i} \left[ \frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j} \right]^{(k-p)}$  воспользуемся тем же приемом, что и для отыскания коэффициентов  $A_{ij}^{(k)}$ . Записывая разложение многочлена  $H_{ij}(x)$  по степеням двучлена  $(x-x_i)$ , получим:

$$H_{ij}(x) = B_{ij}^{(0)}(x-x_i)^j + B_{ij}^{(1)}(x-x_i)^{j+1} + \dots + B_{ij}^{(n-j)}(x-x_i)^n.$$

Учитывая вторую и третью строки соотношений (5.3), имеем:

$$B_{ij}^{(0)} = \frac{1}{j!} \cdot H_{ij}^{(j)}(x_i) = \frac{1}{j!}, \quad B_{ij}^{(s)} = \frac{1}{(j+s)!} \cdot H_{ij}^{(j+s)}(x_i) = 0, \quad s = 1, \dots, \alpha_i - j - 1.$$

Поэтому

$$\frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j} = B_{ij}^{(0)} + B_{ij}^{(\alpha_i-j)}(x-x_i)^{\alpha_i-j} + \dots + B_{ij}^{(n-j)}(x-x_i)^{n-j}$$

и, поскольку  $k-p \leq k \leq \alpha_i - j - 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left[ \frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j} \right]^{(k-p)} = \begin{cases} B_{ij}^{(0)} = \frac{1}{j!}, & \text{если } k-p = 0, \\ 0, & \text{если } k-p \neq 0. \end{cases}$$

Тогда из (5.8), (5.9) находим:

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!} \cdot \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{d^k}{dx^k} \left[ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j} \right] = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{j!} \cdot \left[ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(k)} \Big|_{x=x_i}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (5.6), получим явное выражение для  $\bar{H}_{ij}(x)$ :

$$\bar{H}_{ij}(x) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1} \frac{1}{k!} \cdot \left[ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(k)} \Big|_{x=x_i} \cdot (x-x_i)^k.$$

Следовательно,

$$H_{ij}(x) = \frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j}} \bar{H}_{ij}(x) = \frac{1}{j!} \cdot \frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j}} \cdot \sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1} \frac{1}{k!} \cdot \left[ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(k)} \Big|_{x=x_i} \cdot (x-x_i)^k.$$

Наконец, формула (5.4) дает искомое явное представление интерполяционного многочлена:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1} \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j}} \cdot \left[ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(k)} \Big|_{x=x_i} \cdot (x-x_i)^k \cdot f^{(j)}(x_i). \quad (5.10)$$

(5.10) – интерполяционный многочлен Эрмита.

**Замечание.** Введем понятие разделенных разностей с кратными узлами:



$$f\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{j+1}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_{00}^\varepsilon, x_{01}^\varepsilon, \dots, x_{0j}^\varepsilon),$$

где все узлы  $x_{0i}^\varepsilon$  различны и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{0i}^\varepsilon = x_0$  для всех  $i = \overline{0, j}$ ;

$$f\left(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{j_0}; \dots; \underbrace{x_p, \dots, x_p}_{j_p}\right) = \frac{f\left(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{j_0-1}; \dots; \underbrace{x_p, \dots, x_p}_{j_p}\right) - f\left(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{j_0}; \dots; \underbrace{x_p, \dots, x_p}_{j_p-1}\right)}{x_p - x_0}.$$

Тогда, записав по узлам  $x_{00}^\varepsilon, \dots, x_{0\alpha_0-1}^\varepsilon; x_{10}^\varepsilon, \dots, x_{1\alpha_1-1}^\varepsilon; \dots; x_{m0}^\varepsilon, \dots, x_{m\alpha_m-1}^\varepsilon$  обычный интерполяционный многочлен в форме Ньютона (*все узлы различны!*) и переходя в нем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , можем получить другое представление многочлена Эрмита:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0) + \dots + (x - x_0)^{\alpha_0-1}f(x_0, \dots, x_0) + (x - x_0)^{\alpha_0}f(x_0, \dots, x_0; x_1) + \\ & + (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)f(x_0, \dots, x_0; x_1, x_1) + \dots + (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1-1}f(x_0, \dots, x_0; x_1, \dots, x_1) + \dots + (*) \\ & + (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_m)^{\alpha_m-1}f(x_0, \dots, x_0; x_1, \dots, x_1; \dots; x_m, \dots, x_m). \end{aligned}$$

### Упражнения.

1. Доказать, что  $f\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{j+1}\right) = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$ ;
2. Доказать формулу (\*).

## 5.1. Остаточный член интерполяционной формулы Эрмита

Пусть как и в случае интерполирования по значениям функции  $f(x) \in C^{n+1}[a; b]$ . По аналогии с выводом остатка интерполирования в форме Лагранжа рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - K\Omega(t),$$

где  $K$  — некоторая постоянная. Функция  $\varphi(t)$  имеет нуль  $x_0$  кратности  $\alpha_0$ , нуль  $x_1$  кратности  $\alpha_1$  и т.д. нуль  $x_m$  кратности  $\alpha_m$ . Подберем постоянную  $K$  так, чтобы  $\varphi(t)$  обратилась в нуль в точке  $x$ , для которой мы проводим интерполирование. Тогда

$$K = \frac{f(x) - P_n(x)}{\Omega(x)} = \frac{r_n(x)}{\Omega(x)}.$$

В таком случае функция  $\varphi(t)$  будет иметь на отрезке  $[a; b]$  в общей сложности не менее  $(n+2)$  нулей (каждый считаем столько раз, какова его кратность). На основании теоремы Ролля производная  $\varphi'(t)$  обратится в нуль в  $(m+1)$  различных точках в интервалах между

$x, x_0, \dots, x_m$  и, кроме того, будет иметь нули кратностей  $\alpha_0 - 1, \dots, \alpha_m - 1$  в точках  $x_0, \dots, x_m$ , т.е. всего  $(n+1)$  нулей на отрезке  $[a; b]$ .

Рассуждая аналогично, получим, что вторая производная  $\varphi''(t)$  будет иметь по крайней мере  $n$  нулей и т.д., производная порядка  $(n+1)$  на отрезке  $[a; b]$  будет иметь по крайней мере один нуль, т.е. на отрезке  $[a; b]$  найдется по крайней мере одна точка  $\xi$  такая что  $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ , а так как

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K \cdot (n+1)!,$$

то отсюда  $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$  и окончательно, приравнивая два различных представления для  $K$ , получим:

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) = \Omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (5.11)$$

## 5.2. Частные случаи интерполирования Эрмита

**1<sup>0</sup>.** Пусть  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 2$ , т.е. кратность всех узлов интерполирования равна двум. Тогда, очевидно,  $\Omega(x) = \omega_{m+1}^2(x)$  и формула (5.10) примет вид

$$\begin{aligned} P_n(x) = & \sum_{i=0}^m \left[ \frac{\omega_{m+1}^2(x)}{(x-x_i)^2} \cdot \left[ \frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} \right]^2 \right] \Big|_{x=x_i} + \frac{\omega_{m+1}^2(x)}{x-x_i} \cdot \left[ \left( \frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} \right)^2 \right]' \Big|_{x=x_i} \cdot f(x_i) + \\ & + \sum_{i=0}^m \frac{\omega_{m+1}^2(x)}{x-x_i} \cdot \left[ \frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} \right]^2 \Big|_{x=x_i} \cdot f'(x_i). \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} \Big|_{x=x_i} = \frac{1}{\omega'_{m+1}(x_i)},$$

а

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} \right)^2 \right]' \Big|_{x=x_i} &= 2 \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\omega_{m+1}(x) - (x-x_i)\omega'_{m+1}(x)}{\omega_{m+1}^2(x)} = \\ &= [\text{второй сомножитель раскрываем по правилу Лопиталя}] = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\omega'_{m+1}(x_i)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\omega'_{m+1}(x) - \omega'_{m+1}(x) - (x-x_i)\omega''_{m+1}(x)}{2\omega_{m+1}(x)\omega'_{m+1}(x)} = \\ &= \frac{1}{\omega'_{m+1}(x_i)} \cdot \frac{-\omega''_{m+1}(x_i)}{\omega'_{m+1}(x_i)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} = -\frac{\omega''_{m+1}(x_i)}{[\omega'_{m+1}(x_i)]^3}, \end{aligned}$$

то

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^m \left[ \frac{\omega_{m+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{m+1}(x_i)} \right]^2 \left\{ \left[ 1 - (x-x_i) \frac{\omega''_{m+1}(x_i)}{\omega'_{m+1}(x_i)} \right] f(x_i) + (x-x_i) f'(x_i) \right\}. \quad (5.12)$$

Из (5.11) получаем соответствующее представление для остатка:

$$r_n(x) = \omega_{m+1}^2(x) \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}. \quad (5.13)$$

**2<sup>0</sup>.** Другой интересный частный случай имеет место, если рассмотреть один  $(n+1)$ -кратный узел.

В этом случае  $\Omega(x) = (x-x_0)^{n+1}$ ;  $n=0$ ,  $\alpha_0 = n+1$ ;  $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{\Omega(x)} = 1$ . Таким образом, (5.10), учитывая также, что  $\left[ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{\Omega(x)} \right]^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0, \\ 0 & \text{при } k>0 \end{cases}$  будет иметь вид

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \cdot (x-x_0)^j f^{(j)}(x_0), \quad (5.14)$$

т.е. представляет собой всем хорошо знакомый отрезок ряда Тейлора.

Остаток, как и положено, будет

$$r_n(x) = (x-x_0)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (5.15)$$

т.е. является стандартным остатком ряда Тейлора в форме Лагранжа.

## § 6. Сходимость интерполяционного процесса

Пусть на отрезке  $[a; b]$  рассматривается функция  $f(x)$  с конечными значениями (ограничимся случаем простого алгебраического интерполирования по значениям функции).

Рассмотрим таблицу узлов интерполирования (причем все  $x_i^{(k)} \in [a; b]$ )

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \\ & \dots & \dots & \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \\ & \dots & \dots & \end{array} \right\}.$$

По каждой строке этой таблицы будем строить интерполяционный многочлен. Такой процесс называется интерполяционным. Если последовательность интерполяционных многочленов сходится к  $f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ ), то говорят, что интерполяционный процесс сходится. Сходимость, очевидно, зависит от свойств функции  $f(x)$  и от свойств таблицы узлов  $X$ .

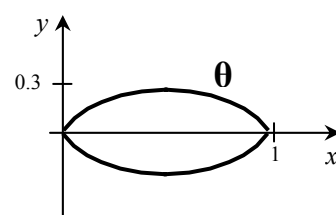
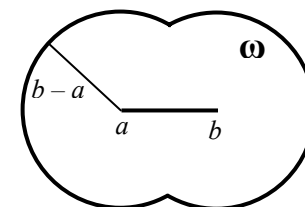
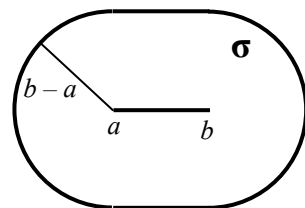
Приведем без доказательства сводку основных результатов, касающихся сходимости интерполяционных процессов.

Естественно ожидать, что в случае произвольной таблицы  $X$  требования к функции  $f(x)$  должны быть самыми жесткими. Оказывается, что в этом случае она должна быть **регулярной** в некоторой области комплексной плоскости (вид ее указан на рисунке справа). Справедлива

**Теорема 1.** Если  $f(x)$  регулярна в замкнутой области  $\sigma$ , то для любой таблицы  $X$  узлов интерполирования из отрезка  $[a; b]$  соответствующий интерполяционный процесс будет сходиться равномерно по  $x$  на этом отрезке.

При этом минимальной областью, регулярность в которой достаточна для сходимости, будет область  $\omega$ , изображенная на правом среднем рисунке.

Если таблица  $X$  узлов интерполирования становится равномерной, то это приводит к уменьшению размеров области, в которой требуется регулярность функции  $f(x)$ . Пусть отрезок  $[a; b]$  приведен линейной заменой к отрезку  $[0; 1]$ . Тогда границей соответствующей области должен быть контур, задаваемый уравнением  $\int_0^1 \ln \frac{1}{|t-z|} dt = 0$ . Его вид указан на правом нижнем рисунке.



**Теорема 2.** Если  $f(x)$  регулярна в замкнутой области  $\theta$ , то соответствующий интерполяционный процесс будет сходиться равномерно относительно  $x$  на отрезке  $[0; 1]$  в случае таблицы узлов, равномерно расположенных на  $[0; 1]$ .

Самые слабые условия накладываются на функцию  $f(x)$  в случае, если таблица  $X$  узлов составлена по корням многочленов Чебышева:  $x_k^{(n)} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Тогда справедлива

**Теорема 3.** В случае таблицы  $X$  узлов Чебышева рассматриваемый интерполяционный процесс сходится равномерно относительно  $x$  на отрезке  $[-1; 1]$  для любой абсолютно непрерывной функции  $f(x)$ .

**Замечание.** Функция  $f(x)$  называется абсолютно непрерывной, если она представима в виде  $f(x) = \int_{-1}^x \varphi(t) dt$ , где  $\varphi(t)$  – абсолютно интегрируемая функция.

В то же время, если функция  $f(x)$  только непрерывна на отрезке  $[-1; 1]$ , то Бернштейн показал, что существует пример функции, для которой интерполяционный процесс по равномерной таблице узлов не сходится почти ни в одной точке из отрезка  $[-1; 1]$  (так, для функции  $f(x) = |x|$  сходимость имеет место лишь в точках  $-1, 0, 1$ ). Более того, справедлива

**Теорема 4 (Фабер).** Не существует такой таблицы узлов  $X$  из отрезка  $[a; b]$ , для которой соответствующий интерполяционный процесс был бы равномерно сходящимся по  $x$  на отрезке  $[a; b]$  для любой непрерывной функции  $f(x)$ .

С другой стороны, для каждой конкретной непрерывной на  $[a; b]$  функции  $f(x)$  задача о выборе соответствующей таблицы узлов разрешима, о чем говорит

**Теорема 5 (Марцинкевич).** Для каждой непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f(x)$  можно указать такую таблицу узлов  $X$  из этого отрезка, чтобы соответствующий интерполяционный процесс сходиллся равномерно по  $x$  на отрезке  $[a; b]$ .

Причем последнее утверждение связано со сходимостью последовательности полиномов наилучшего равномерного приближения к функции  $f(x)$ .

Приведенные выше результаты говорят о том, что практическое использование интерполяционных многочленов высокой степени представляется не слишком целесообразным.

## § 7. Некоторые приложения интерполирования

### 7.1. Приближенное вычисление производных

К приближенному вычислению производных (или к **численному дифференцированию**) приходится прибегать в том случае, когда функция  $f(x)$ , для которой нужно найти производную, задана таблично или же функциональная зависимость  $x$  и  $f(x)$  имеет очень сложное аналитическое выражение. В первом случае методы дифференциального исчисления вообще не применимы, а во втором случае их использование вызывает значительные трудности.

В этих случаях вместо функции  $f(x)$  используют интерполирующую функцию  $\varphi(x)$  и считают производную от  $f(x)$  приближенно равной производной от  $\varphi(x)$ . При этом производная от  $f(x)$  будет найдена с некоторой погрешностью. Поэтому наряду с установлением правил вычисления производных одной из основных задач является оценка погрешности, допускаемой при этих вычислениях.

Итак, пусть для  $f(x) \in C^{n+1}[a; b]$  известны ее значения в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . По этим данным нужно найти значение производной порядка  $m$  в любой точке  $x \in [a; b]$ .

Для решения поставленной задачи в соответствии с изложенной выше идеей прибегнем к алгебраическому интерполированию. Пусть  $P_n(x)$  – соответствующий интерполяционный многочлен. Тогда

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x).$$

Вычисляя производные порядка  $m$  от обеих частей равенства, получим:

$$f^{(m)}(x) = P_n^{(m)}(x) + r_n^{(m)}(x).$$

Если пренебречь здесь величиной  $r_n^{(m)}(x)$ , получим численное выражение для нахождения нужной производной:

$$f^{(m)}(x) \approx P_n^{(m)}(x),$$

погрешность которого равна  $r_n^{(m)}(x)$ . При применении правила мы должны, очевидно, считать  $m \leq n$ , так как все производные от  $P_n(x)$  порядка выше  $n$  равны нулю тождественно.

В общем случае существенно упростить выражение для остатка не удастся, но если  $x \in (\alpha; \beta)$  – наименьшему отрезку, на котором находятся узлы  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , то справедливо представление

$$r_n^{(m)}(x) = \omega_{n+1}^{(m)}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (7.1)$$

Для доказательства этого соотношения, как и ранее, введем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - K\omega_{n+1}(t).$$

По построению  $\varphi(t)$  имеет на отрезке  $[\alpha; \beta]$  по крайней мере  $(n+1)$  корень. Тогда по теореме Ролля производная  $\varphi^{(m)}(t)$  внутри отрезка  $[\alpha; \beta]$  имеет по крайней мере  $n-m+1$  корень. Выберем теперь постоянную  $K$  так, чтобы при  $t=x$  производная  $\varphi^{(m)}(t)$  также обращалась в нуль, т.е.

$$f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x) - K\omega_{n+1}^{(m)}(x) = 0.$$

Убедимся, что такой выбор возможен, т.е. что  $\omega_{n+1}^{(m)}(x) \neq 0$ . Так как  $\omega_{n+1}(t)$  на  $[\alpha; \beta]$  имеет ровно  $(n+1)$  корень, то все корни  $\omega_{n+1}^{(m)}(t)$  при  $m > 0$  будут лежать внутри  $(\alpha; \beta)$ , а поскольку  $x \in (\alpha; \beta)$ , то  $\omega_{n+1}^{(m)}(x) \neq 0$ . Следовательно,

$$K = \frac{r_n^{(m)}(x)}{\omega_{n+1}^{(m)}(x)}.$$

Тогда  $\varphi^{(m)}(t)$  имеет, по крайней мере,  $n-m+2$  корня и по теореме Ролля существует точка  $\xi \in (\alpha; \beta)$ , в которой выполняется равенство  $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ , откуда и следует доказываемое равенство (7.1).

Приведем примеры конкретных правил для вычисления производных. При этом будем исходить из интерполяционной формулы Ньютона для неравных промежутков:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x-x_0) \dots (x-x_1) f(x_0, \dots, x_n).$$

Для сокращения записи обозначим  $\alpha_i = x - x_i$ . Тогда, дифференцируя обе части последнего равенства, получим:

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx f(x_0, x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_0, x_1, x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots, \\ f''(x) &\approx 2!f(x_0, x_1, x_2) + 2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots, \\ f'''(x) &\approx 3!f(x_0, x_1, x_2, x_3) + 3!(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots, \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(k)}(x) &\approx k! [f(x_0, x_1, \dots, x_k) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k)f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) + \dots]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Формулы (7.2) несколько упрощаются, если в качестве точки  $x$  брать один из узлов интерполирования.

Совершенно аналогично могут быть получены выражения производных через конечные разности в случае равноотстоящих узлов.

Если, например, исходить из правил Ньютона для начала таблицы

$$y(x_0 + th) \approx y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots,$$

то получим следующие выражения для производных:

$$hy'(x_0 + th) \approx \Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots,$$

$$h^2 y''(x_0 + th) \approx \Delta^2 y_0 + \frac{6(t-1)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots,$$

.....

При  $x = x_0$  переменная  $t$  примет значение, равное нулю, и тогда

$$hy'(x_0) \approx \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \dots,$$

$$h^2 y''(x_0) \approx \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \dots,$$

.....

Выражая конечные разности через значения функции и приводя подобные, получим:

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad (\text{два узла})$$

$$y'(x_0) \approx \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad (\text{три узла})$$

.....

Аналогичные выражения могут быть получены и для производных более высокого порядка.

**Упражнение.** Получить всевозможные аппроксимации производных первого, второго и третьего порядков на множествах, содержащих и четыре узла.

## 7.2. Применение интерполирования к решению уравнений

Вначале заметим, что описанные ранее алгоритмы методов хорд и секущих могут быть интерпретированы следующим образом: решая уравнение  $f(x) = 0$ , мы заменяем функцию  $f(x)$  интерполяционным многочленом первой степени  $P_1(x)$  по двум узлам:  $x_0$  и  $x_n$  для первого и  $x_{n-1}$ ,  $x_n$  для второго. После этого решается уравнение  $P_1(x) = 0$  и его корень принимается за следующее приближение к корню.

Применение аналогичного приема к трем последним приближениям  $(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$  приводит к методу парабол. Записывая интерполяционный многочлен Ньютона по указанным узлам, получим:

$$f(x_n) + (x - x_n)f(x_{n-1}, x_n) + (x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = 0. \quad (7.3)$$

Корень этого квадратного уравнения, наиболее близкий к  $x_n$ , принимается за следующее приближение.

**Упражнение.** Определить скорость сходимости метода парабол.

Увеличение степени аппроксимирующего многочлена приводит, однако, не только к увеличению скорости сходимости, но и к необходимости решать алгебраические уравнения все более высокой степени, что представляется весьма существенным недостатком.

От него можно избавиться, используя интерполирование обратной функции. Поясним это. Наряду с функцией  $y = f(x)$  рассмотрим обратную функцию  $x = F(y)$ , определенную в окрестности, содержащей единственный корень  $x^*$  уравнения  $f(x) = 0$ . Тогда, очевидно, этот корень можно вычислить по формуле  $x^* = F(0)$ . При этом таблицу пар чисел  $(x_{n-i}, y_{n-i} = f(x_{n-i}))$ ,  $i = \overline{0, k}$ , можно рассматривать и как таблицу значений функции  $y = f(x)$ , так и как таблицу значений функции  $x = F(y)$ , т.е. как таблицу пар  $(y_{n-i}, x_{n-i} = F(y_{n-i}))$ ,  $i = \overline{0, k}$ .

Проинтерполируем функцию  $F(y)$  по значениям  $x_{n-i}$  в точках  $y_{n-i}$ :

$$F(y) \approx P_k(y) = \sum_{i=0}^k \frac{\omega_{k+1}(y)}{(y - y_{n-i})\omega'_{k+1}(y_{n-i})} x_{n-i}, \quad \omega_{k+1}(y) = (y - y_n) \dots (y - y_{n-k}).$$

Полагая здесь  $y = 0$ , найдем очередное приближение  $x_{n+1}$ :

$$x_{n+1} = P_k(0) = - \sum_{i=0}^k \frac{\omega_{k+1}(0)}{y_{n-i}\omega'_{k+1}(y_{n-i})} x_{n-i}. \quad (7.4)$$

В частности, при  $k = 1$  это приводит к методу секущих:

$$x_{n+1} = - \left( \frac{y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} x_n + \frac{y_n}{y_{n-1} - y_n} x_{n-1} \right) = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

**Замечание.** Интерполяционный подход к решению уравнений может быть обобщен и в сторону привлечения интерполирования с кратными узлами (в частности, один двукратный узел приводит к алгоритму метода Ньютона).

**Упражнение.** Исследовать поведение погрешности вблизи корня для метода (7.4).

## § 8. Многомерная алгебраическая интерполяция

Интерполирование функций многих переменных значительно сложнее, чем функций одной переменной. Это вызвано не только тем, что рассуждения становятся более громоздкими в силу наличия большого числа переменных, но и рядом принципиальных трудностей.

Ограничимся сейчас случаем двух переменных (в том числе и потому, что двумерный случай наиболее широко распространен в практике), хотя принципиальных трудностей при обобщении на большее число измерений не существует.

Итак, пусть на плоскости  $(x, y)$  заданы  $n + 1$  точек  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ . Будем разыскивать многочлен  $P(x, y)$  относительно  $x$  и  $y$  возможно низшей степени, который бы в этих точках принимал, соответственно, значения  $z_0, z_1, \dots, z_n$ .



Если многочлен записать в виде

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{m0}x^m + \dots + a_{0m}y^m = \sum_{i+j=0}^m a_{ij}x^i y^j, \quad (8.1)$$

то, подставляя данные координаты точек и приравнивая левую часть соответствующему значению  $z_i$ , получим систему из  $(n+1)$  линейных уравнений относительно  $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$  неизвестных  $a_{ij}$ :

$$\sum_{i+j=0}^m a_{ij}x_k^i y_k^j = z_k, \quad k = \overline{0, n}. \quad (8.2)$$

В общем случае уравнения (8.2) независимы. Поэтому, если не накладывать на  $P(x, y)$  никаких дополнительных условий, то должно выполняться соотношение, связывающее число узлов и степень многочлена (матрица системы (8.2) должна быть квадратной)

$$n+1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \quad (8.3)$$

Это – первое принципиальное затруднение, состоящее в том, что **мы уже не можем решать поставленную задачу при произвольном количестве узлов интерполирования** (возможные значения для  $n$  (в скобках указана степень многочлена): 0 (0), 2 (1), 5 (2), 9 (3) и т.д.). Конечно, если число узлов не соответствует условию (8.3), то можно часть коэффициентов многочлена  $P(x, y)$  задавать принудительно (в частности, нулями). Однако для выбора этих коэффициентов редко можно дать разумное обоснование.

Далее, рассмотрим определитель системы (8.2) (при выполнении условия (8.3)). При  $m = 1$  ( $n = 2$ ) этот определитель принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, он будет обращаться в нуль, если три узловые точки лежат на одной прямой. Аналогично, при  $m > 1$  соответствующий определитель будет обращаться в нуль, если все узлы лежат на одной кривой  $m$ -го порядка.

Это – второе принципиальное затруднение: **узлы интерполирования не могут быть расположены произвольно**. При этом проверка того, что определители не обращаются в нуль, чрезвычайно затруднительна.

Третье принципиальное затруднение возникает **при оценке остаточных членов**. Теорема Ролля, которой мы пользовались ранее, для ныне рассматриваемого нами случая действовать не будет.

Рассмотрим некоторые частные случаи двумерной интерполяции.

### 8.1. Интерполяционный многочлен первой степени

Пусть даны три узла:  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ . Таким образом, требование на количество входных данных выполнено. Будем, как и в случае интерполирования функций

одной переменной, многочлен  $P_1(x, y)$  искать в виде линейной комбинации значений в узлах, коэффициентами которой являются функции влияния узлов (см. Глава IV, §1):

$$P_1(x, y) = z_0 \cdot P_{10}(x, y) + z_1 \cdot P_{11}(x, y) + z_2 \cdot P_{12}(x, y), \quad (8.4)$$

где  $P_{li}(x, y)$  – многочлены первой степени, равные единице в точке  $Q_i(x_i, y_i)$  и обращающиеся в нуль в остальных двух точках.

Введем в рассмотрение векторы

$$\begin{cases} r_k = (x - x_k)\bar{i} + (y - y_k)\bar{j}, \\ r_{kl} = (x_k - x_l)\bar{i} + (y_k - y_l)\bar{j}, \\ r_{kl}^* = (y_k - y_l)\bar{i} - (x_k - x_l)\bar{j}. \end{cases} \quad (8.5)$$

Тогда скалярное произведение  $(r_1, r_{12}^*)$  будет многочленом первой степени. Этот многочлен обращается в нуль в точке  $Q_1(x_1, y_1)$ , так как при этом первый множитель обращается в нуль. Он обращается в нуль также и в точке  $Q_2(x_2, y_2)$ , так как векторы  $r_{21}$  и  $r_{12}^*$  ортогональны. В точке  $Q_0(x_0, y_0)$  рассматриваемое скалярное произведение будет равно нулю в том и только в том случае, когда точки лежат на одной прямой. Таким образом, за многочлен  $P_{10}(x, y)$  можно принять выражение  $P_{10}(x, y) = \frac{(r_1, r_{12}^*)}{(r_{01}, r_{12}^*)}$ . Аналогично полу-

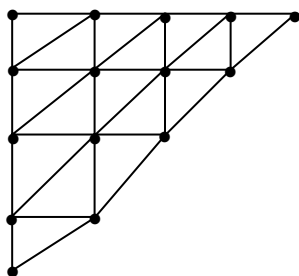
$$\text{чим: } P_{11}(x, y) = \frac{(r_2, r_{20}^*)}{(r_{12}, r_{20}^*)}, \quad P_{12}(x, y) = \frac{(r_0, r_{01}^*)}{(r_{20}, r_{01}^*)}.$$

Следовательно, искомый интерполяционный многочлен, учитывая (8.4), может быть записан в виде

$$P_1(x, y) = z_0 \frac{(r_1, r_{12}^*)}{(r_{01}, r_{12}^*)} + z_1 \frac{(r_2, r_{20}^*)}{(r_{12}, r_{20}^*)} + z_2 \frac{(r_0, r_{01}^*)}{(r_{20}, r_{01}^*)}. \quad (8.6)$$

## 8.2. Обобщение интерполяционных формул Ньютона на случай функций многих переменных

Легко видеть, что увеличение числа произвольным образом расположенных узлов ведет к усложнению вида интерполяционного многочлена. Поэтому рассмотрим  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  узлов, расположенных специальным образом:



$$\begin{aligned} & (x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_0), (x_n, y_0) \\ & (x_0, y_1), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_1), \\ & \dots\dots\dots \\ & (x_0, y_{n-1}), (x_1, y_{n-1}), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), \\ & (x_0, y_n) \end{aligned} \quad x_i \neq x_j, \quad y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j$$

Значения  $x_i$  и  $y_j$  могут быть произвольными, так что взаимное расположение узлов может быть достаточно общим. Проверим, что нет кривой  $n$ -го порядка, проходящей через все эти узлы. В самом деле, если бы такая кривая имелась, то она содержала бы точ-

ки, расположенные в первой строке таблицы. Таких точек  $(n+1)$  и все они лежат на одной прямой. Следовательно, вся прямая также принадлежала бы кривой порядка  $n$ . В этом случае вся кривая порядка  $n$  распадается на прямую и кривую порядка  $(n-1)$ , через остальные  $\frac{n(n+1)}{2}$  точек. Для нее можно было бы провести аналогичные рассуждения.

Продолжая этот процесс, мы в конце концов пришли бы к заключению, что три точки  $(x_0, y_{n-1})$ ,  $(x_1, y_{n-1})$ ,  $(x_0, y_n)$  лежат на одной прямой. Этого заведомо нет; следовательно, выбранные нами узлы не могут лежать на одной кривой порядка  $n$ .

Построим теперь интерполяционный многочлен по нашим узлам. Обозначим его через  $P_n(x, y)$ , а  $P_n(x_i, y_i)$  через  $z_{ij}$ . Если рассмотреть только те из выбранных нами узлов, для которых  $i+j < n$ , то на тех же основаниях мы можем построить интерполяционный многочлен  $P_{n-1}(x, y)$  степени  $(n-1)$ , принимающий в точках  $(x_i, y_j)$ ,  $i+j < n$ , значения  $z_{ij}$ . Образует разность  $P_n(x, y) - P_{n-1}(x, y)$ . Она будет являться многочленом степени не выше  $n$ , обращающимся в нуль в точках  $(x_i, y_j)$ ,  $i+j < n$ . Будем разыскивать ее в виде

$$\begin{aligned} P_n(x, y) - P_{n-1}(x, y) = & A_{n0}(x-x_0) \cdots (x-x_{n-1}) + A_{n-1,1}(x-x_0) \cdots (x-x_{n-2})(y-y_0) + \cdots + \\ & + A_{0n}(y-y_0) \cdots (y-y_{n-1}). \end{aligned} \quad (8.7)$$

При этом постоянные  $A_{n-i,j}$  определяются однозначно, поскольку

$$P_n(x_i, y_{n-i}) - P_{n-1}(x_i, y_{n-i}) = A_{i,n-i}(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(y_{n-i} - y_0) \cdots (y_{n-i} - y_{n-i-1}).$$

В силу единственности представления интерполяционного многочлена по выбранным нами узлам это будет единственным значением разности. Тогда из (8.7) получим:

$$P_n(x, y) = P_{n-1}(x, y) + \sum_{i=0}^n A_{n-i,i}(x-x_0) \cdots (x-x_{n-i-1})(y-y_0) \cdots (y-y_{i-1}).$$

Поступая точно так же с  $P_{n-1}(x, y)$ , затем с  $P_{n-2}(x, y)$  и т.д., получим:

$$\begin{aligned} P_n(x, y) = & A_{00} + A_{10}(x-x_0) + A_{01}(y-y_0) + A_{20}(x-x_0)(x-x_1) + A_{11}(x-x_0)(y-y_0) + \\ & + A_{02}(y-y_0)(y-y_1) + A_{n0}(x-x_0) \cdots (x-x_{n-1}) + \cdots + A_{0n}(y-y_0) \cdots (y-y_{n-1}). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Выразим теперь коэффициенты  $A_{ij}$  через значения функции  $z_{kl} = f(x_k, y_l)$ . Полагая в (8.8)  $y = y_0$ , будем иметь:

$$P_n(x, y_0) = A_{00} + A_{10}(x-x_0) + A_{20}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + A_{n0}(x-x_0) \cdots (x-x_{n-1}).$$

Это – интерполяционный многочлен относительно  $x$ , принимающий в точках  $(x_i, y_0)$  значения  $f(x_i, y_0)$ . Следовательно, в силу единственности представления интерполяционного многочлена для функций одной независимой переменной  $A_{i0} = f(x_0, x_1, \dots, x_i; y_0)$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

При  $y = y_1$  наш интерполяционный многочлен примет вид

$$P_n(x, y_1) = [A_{00} + A_{01}(y_1 - y_0)] + [A_{10} + A_{11}(y_1 - y_0)](x - x_0) + [A_{20} + A_{21}(y_1 - y_0)](x - x_0)(x - x_1) + \dots + [A_{n-1,0} + A_{n-1,1}(y_1 - y_0)](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + A_{n0}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Этот интерполяционный многочлен относительно  $x$  должен в точках  $(x_i, y_1)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , принимать значения  $f(x_i, y_1)$ . Последнее слагаемое при этих значениях  $x$  обращается в нуль. Следовательно, все члены правой части, кроме последнего, дают интерполяционный многочлен Ньютона степени  $(n-1)$ , принимающий в точках  $(x_i, y_1)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  значения  $f(x_i, y_1)$ . Таким образом,

$$A_{k0} + A_{k1}(y_1 - y_0) = f(x_0, \dots, x_k; y_1), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Отсюда

$$A_{k1} = \frac{f(x_0, \dots, x_k; y_1) - f(x_0, \dots, x_k; y_0)}{y_1 - y_0} = f(x_0, \dots, x_k; y_0, y_1), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Вообще, если мы уже знаем, что  $A_{ki} = f(x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_i)$  для всех  $i < m$ , то, рассматривая  $P_n(x, y_m)$ , получим:

$$\begin{aligned} P_n(x, y_m) = & [A_{00} + A_{01}(y_m - y_0) + \dots + A_{0m}(y_m - y_0) \cdots (y_m - y_{m-1})] + \\ & + [A_{10} + A_{11}(y_m - y_0) + \dots + A_{1m}(y_m - y_0) \cdots (y_m - y_{m-1})](x - x_0) + \dots + \\ & + [A_{n-m,0} + A_{n-m,1}(y_m - y_0) + \dots + A_{n-m,m}(y_m - y_0) \cdots (y_m - y_{m-1})](x - x_0) \cdots (x - x_{n-m-1}) + \\ & + [A_{n-m+1,0} + A_{n-m+1,1}(y_m - y_0) + \dots + A_{n-m+1,m-1}(y_m - y_0) \cdots (y_m - y_{m-2})](x - x_0) \cdots (x - x_{n-m}) + \\ & + \dots + [A_{n-1,0} + A_{n-1,1}(y_m - y_0)](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + A_{n0}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Этот интерполяционный многочлен относительно  $x$  должен в точках  $(x_i, y_m)$ ,  $i = \overline{0, n-m}$ , принимать значения  $f(x_i, y_m)$ . Последние  $m$  слагаемых при этих значениях  $x$  обращаются в нуль. Следовательно, все члены правой части, кроме них, дают интерполяционный многочлен Ньютона степени  $(n-m)$ , принимающий в точках  $(x_i, y_m)$ ,  $i = \overline{0, n-m}$  значения  $f(x_i, y_m)$ . Таким образом,

$$A_{k0} + A_{k1}(y_m - y_0) + \dots + A_{km}(y_m - y_0) \cdots (y_m - y_{m-1}) = f(x_0, \dots, x_k; y_m), \quad k = \overline{0, n-m}.$$

Рассматривая это выражение как функцию переменной  $y_m$ , получаем: левая часть равенства есть многочлен степени  $m$  относительно переменной  $y_m$ , принимающий в узлах  $y_0, \dots, y_{m-1}$  те же значения, что и функция  $f(x_0, \dots, x_k; y_m)$ . Следовательно,

$$A_{km} = f(x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_m), \quad k = \overline{0, n-m}.$$

Таким образом, интерполяционную формулу мы можем записать в виде

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} (x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(y-y_0) \cdots (y-y_{j-1}) f(x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j). \quad (8.9)$$

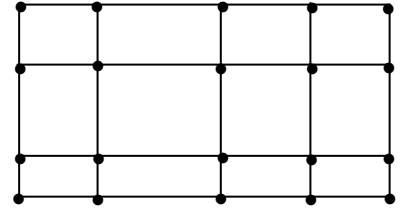
(8.9) – обобщение интерполяционной формулы Ньютона для неравноотстоящих промежутков на случай двух независимых переменных.

### 8.3. Последовательная интерполяция на прямоугольной сетке

Рассмотрим еще один вариант расположения узлов двумерной интерполяции, в котором построение интерполяционного многочлена особенно просто.

Итак, пусть задана прямоугольная таблица узлов:

$$\begin{aligned} &(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_0), \\ &\quad \dots \\ &(x_0, y_m), \dots, (x_n, y_m). \end{aligned}$$



Предполагаются также известными значения функции  $f(x, y)$  в этих узлах.

Возможен следующий способ приближенного определения значения функции  $f$  в некоторой точке  $(x, y)$ , не совпадающей с узлами интерполирования. Сначала интерполируем нашу функцию как функцию одной переменной  $x$  при фиксированных значениях  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ). При этом мы каждый раз используем одну строку заданной таблицы узлов. Таким образом, мы можем найти приближенное значение  $f(x, y_i)$ . Затем по найденным значениям  $f(x, y_i)$  путем интерполирования по переменной  $y$  находим значение  $f(x, y)$ . Посмотрим, как будет выглядеть интерполяционная формула при таком способе интерполирования.

Применяя интерполяционную формулу Ньютона для неравных промежутков, можем записать:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(x, y_0) + (y - y_0)f(x; y_0, y_1) + (y - y_0)(y - y_1)f(x; y_0, y_1, y_2) + \dots + \\ & + (y - y_0) \cdots (y - y_{m-1})f(x; y_0, y_1, \dots, y_m). \end{aligned}$$

Снова применим интерполяционную формулу Ньютона для неравных промежутков для приближения каждого из сомножителей вида  $f(x; y_0, y_1, \dots, y_k)$ ; рассматривая эту разделенную разность как функцию переменной  $x$ , имеем:

$$\begin{aligned} f(x; y_0, y_1, \dots, y_k) \approx & f(x_0; y_0, y_1, \dots, y_k) + (x - x_0)f(x_0, x_1; y_0, y_1, \dots, y_k) + \dots + \\ & + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})f(x_0, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, получим:

$$f(x, y) \approx P_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(y-y_0) \cdots (y-y_{j-1}) f(x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j). \quad (8.10)$$

**Замечание.** В формулах (8.9), (8.10) при  $i = 0$  и  $j = 0$  множители будут иметь вид  $x - x_{-1}$  и  $y - y_{-1}$ . Будем считать их равными единице.

Очевидно, столь же просто может быть получена результирующая формула и в случае, если на каждом этапе использовать многочлен Лагранжа. Она будет иметь вид

$$P_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\omega_{n+1}(x)\omega_{m+1}(y)}{(x-x_i)(y-y_j)\omega'_{n+1}(x_i)\omega'_{m+1}(y_j)} f(x_i, y_j). \quad (8.11)$$

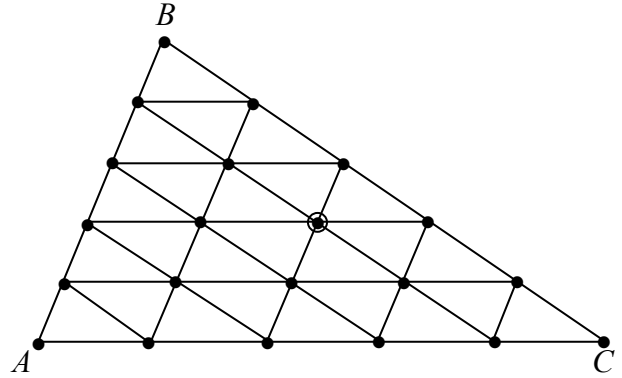
**Упражнение.** Получить представления для остаточных членов интерполяционных формул (8.10), (8.11).

Напоследок заметим, что по рассмотренной таблице узлов интерполяционный многочлен, вообще говоря, определяется неоднозначно в силу невыполнения условия типа (8.3). Однозначность формулам (8.10), (8.11) сама процедура интерполирования.

#### 8.4. Общий случай интерполирования на треугольнике

Очень часто в приложениях возникает задача интерполирования функции в области треугольной формы (частный случай ее мы рассмотрели выше).

В этом случае сетку естественно задавать следующим образом: каждую сторону треугольника разобьем на  $n$  равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам треугольника (сами стороны треугольника также включаем в это множество прямых). Тогда множество узлов – это точки пересечения соответствующих прямых. Очевидно, число узлов в этом случае будет равно



$$m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

и мы можем построить единственный интерполяционный многочлен степени  $n$ , принимающий в указанных узлах заданные значения.

Возьмем некоторую фиксированную точку  $Q(x_i, y_j)$ . Тогда среди прямых, с помощью которых мы построили сетку, имеется ровно  $n$  прямых, удовлетворяющих условию: существует не более одной вершины треугольника такой, что  $Q(x_i, y_j) = Q_k$  и эта вершина лежит по одну сторону от такой прямой. На рисунке (точка  $Q_k$  выделена кружком): для вершины  $B$  – это прямые, параллельные стороне  $AC$ , с номерами  $0, 1, \dots, j-1$  (всего –  $j$  штук); для вершины  $C$  – это прямые, параллельные стороне  $AB$ , с номерами  $0, 1, \dots, i-1$  (всего –  $i$  штук); для вершины  $A$  – это прямые, параллельные стороне  $BC$ , с номерами  $j+i+1, \dots, n$  (всего –  $n - (j+i)$  штук). При этом каждая точка из множества узлов, отличная от узла  $Q_k$ , лежит на одной из таких прямых.

Пусть  $L_{k,i}(x) = 0$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – уравнения этих прямых. Тогда функция

$$\Phi_k(x, y) = \prod_{i=1}^n \frac{L_{k,i}(x, y)}{L_{k,i}(Q_k)} \quad (8.12)$$

является многочленом степени  $n$  и принимает значение, равное единице в точке  $Q_k$ , и нулю во всех остальных узлах.

Таким образом, она является функцией влияния и поэтому многочлен степени  $n$

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^m \Phi_k(x, y) f(Q_k) \quad (8.13)$$

будет искомым.

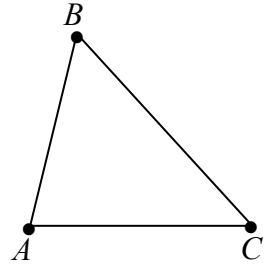
В качестве примера рассмотрим сейчас более подробно случай  $n = 1$ .

Тогда для точки  $A$  означенной выше прямой будет прямая, на которой лежит сторона  $BC$ . Ее уравнение имеет вид

$$L_A(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$\Phi_A(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix}}.$$



Аналогично для точки  $B$  это будет прямая, на которой лежит сторона  $AC$ , с уравнением

$$L_B(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C \\ x_A - x_C & y_A - y_C \end{vmatrix}$$

и

$$\Phi_B(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C \\ x_A - x_C & y_A - y_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B - x_C & y_B - y_C \\ x_A - x_C & y_A - y_C \end{vmatrix}},$$

а для точки  $C$  – прямая, на которой лежит сторона  $AB$ , с уравнением

$$L_C(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{vmatrix}$$

и

$$\Phi_C(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_C - x_B & y_C - y_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{vmatrix}}.$$

Следовательно, сам интерполяционный многочлен первой степени примет вид

$$P_1(x, y) = \Phi_A(x, y)f(A) + \Phi_B(x, y)f(B) + \Phi_C(x, y)f(C). \quad (8.14)$$

**Замечание.** Если сравнить (8.14) и (8.6), то, очевидно, с точностью до обозначений они совпадают. Это и естественно, поскольку три точки, не лежащие на одной прямой, всегда определяют единственную плоскость.

**Упражнение.** Построить формулы, аналогичные (8.14), для случая  $n = 2$ .

## ГЛАВА V

### Приближение сплайнами

#### § 1. Общее определение сплайна. Простейшие примеры

Ранее мы отмечали неудовлетворительное состояние дел со сходимостью интерполяционного процесса, и, в частности, приводили пример Бернштейна, показывающий, что последовательность интерполяционных многочленов по равноотстоящим узлам на отрезке  $[-1; 1]$  не сходится для непрерывной функции  $f(x) = |x|$ . Еще более любопытен пример, восходящий к Рунге и состоящий в том, что указанный интерполяционный процесс не сходится на отрезке  $[-1; 1]$  даже для сколь угодно раз дифференцируемой функции  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ .

Поэтому на практике для того, чтобы достаточно хорошо приблизить функцию, вместо построения интерполяционного многочлена высокой степени сейчас значительно чаще используют кусочно-функциональные приближения (как правило, в случае, когда речь идет о многочленных приближениях, то эти многочлены оказываются не очень высокой степени).

Перейдем к описанию предмета исследования.

Разобьем отрезок  $[a; b]$ , на котором ищется приближение к функции  $f(x)$ , на  $N$  частей точками  $x_j: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ .

По определению положим:  $x_j - x_{j-1} = h_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Соответствующее разбиение далее будем обозначать  $\Delta$ .

**Определение.** Назовем *полиномиальным сплайном порядка  $m$  дефекта  $k$*  на разбиении  $\Delta$  (обозначение  $S_\Delta^m(x)$ ) функцию, которая:

- 1) на каждом из отрезков  $[x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, N}$  является алгебраическим многочленом степени  $m$ , т.е.

$$S_\Delta^m(x) = P_{im}(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{im}x^m, \quad x \in [x_{i-1}; x_i], \quad i = \overline{1, N}; \quad (1.1)$$

- 2) является функцией класса  $C^{m-k}[a; b]$ , т.е. во всех внутренних узлах разбиения  $\Delta$   $S_\Delta^m(x)$  удовлетворяет условию непрерывности производных до порядка  $m - k$  включительно:

$$(S_\Delta^m(x_i + 0))^{(j)} = (S_\Delta^m(x_i - 0))^{(j)}, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad j = \overline{0, m-k}. \quad (1.2)$$

В случае  $k = 1$  вместо слов «*полиномиальный сплайн дефекта 1*» говорят «*полиномиальный сплайн*» или просто «*сплайн*». В дальнейшем мы будем иметь дело именно с такими объектами.

Таким образом, для того чтобы задать сплайн, необходимо указать значения коэффициентов  $a_{ij}$  (всего их  $- N \times (m+1)$  штук). При этом требования (1.2) предоставляют для этих целей  $(N-1) \times m$  условий. Следовательно, если использовать для построения сплайна только его определение, то в итоге останется  $N + m$  свободных параметров.





**Упражнение.** Показать, что сплайны образуют линейное пространство размерности  $N + m$  и найти какой-либо базис данного пространства.

Однако данное выше определение пока никаким образом не связывает сплайн и функцию  $f$ , которую мы собираемся приближать.

Поэтому естественно оставшиеся  $N + m$  параметров использовать для выполнения соответствующей привязки (ее наличие далее будем подчеркивать, добавляя в число аргументов сплайна, помимо независимой переменной, еще и функцию  $f: S_{\Delta}^m(f; x)$ ). Способы такой привязки могут быть различными. И один из них – интерполяционный. В этом случае в дополнение к условиям (1.1), (1.2) требуют также совпадения значений сплайна и приближаемой функции  $f(x)$  в узлах разбиения  $\Delta$ , т.е.

$$S_{\Delta}^m(f; x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (1.3)$$

Такие сплайны мы будем называть **интерполяционными**. При этом, однако, необходимо иметь в виду, что все равно  $m - 1$  параметр остается свободным. Как распорядиться остающейся свободой, мы рассмотрим далее в конкретных случаях.

### 1.1. Интерполяционный сплайн первой степени

В качестве примера проведем построение интерполяционного сплайна первой степени.

Тогда, очевидно, условие (1.1) примет вид

$$S_{\Delta}^1(f; x) = a_{i0} + a_{i1}x, \quad x \in [x_{i-1}; x_i], \quad i = \overline{1, N},$$

а условия (1.2) и (1.3) можно записать следующим образом

$$\begin{cases} P_{i1}(x_i) = f(x_i), \\ P_{i1}(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.4)$$

Обратим внимание на то, что здесь реализованы и условия непрерывности, и условия интерполяционные.

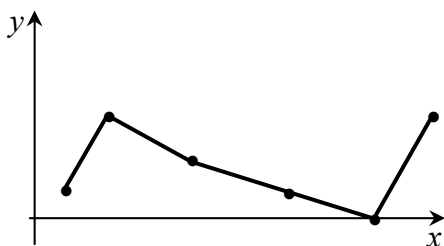
Так как  $m = 1$ , то свободных параметров в этом случае не будет. Распишем (1.4) подробнее:

$$\begin{cases} P_{i1}(x_i) = a_{i0} + a_{i1}x_i = f(x_i), \\ P_{i1}(x_{i-1}) = a_{i0} + a_{i1}x_{i-1} = f(x_{i-1}). \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$a_{i1} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(x_{i-1}, x_i); \quad a_{i0} = f(x_{i-1}) - a_{i1}x_{i-1}, \quad i = \overline{1, N},$$

т.е.



$$S_{\Delta}^1(f; x) = f(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})f(x_{i-1}, x_i), \quad x \in [x_{i-1}; x_i]. \quad (1.5)$$

Таким образом, на каждом из отрезков разбиения  $\Delta$  сплайн является хорошо нам известным интерполяционным многочленом с узлами интерполирования  $x_{i-1}$  и  $x_i$ .

## § 2. Интерполяционный кубический сплайн

В течение многих лет чертежники использовали длинные гибкие рейки из дерева или какого-либо другого материала в качестве лекала, проводя с их помощью плавные кривые через заданные точки. Эти рейки (англ. *spline*) закрепляют на месте, привешивая к ним в некоторых точках свинцовые грузила. Изменяя положения сплайна и грузил, при достаточном количестве грузил можно добиться того, чтобы сплайн проходил через заданные точки.

Если рассматривать рейку как тонкую балку, то для нее справедлив закон Бернулли-Эйлера:

$$M(x) = EI \cdot \left( \frac{1}{R(x)} \right),$$

где  $M$  – изгибающий момент,  $E$  – модуль Юнга,  $I$  – геометрический момент инерции и  $R$  – радиус кривизны кривой, совпадающей с деформированной осью балки. При незначительных изгибах справедливо соотношение  $R(x) \approx \frac{1}{y''(x)}$ . Отсюда имеем уравнение

$$y''(x) = \frac{1}{EI} M(x).$$

При этом изгибающий момент  $M(x)$  изменяется линейно между точками закрепления грузил. Проинтегрировав записанное уравнение, получим пример интерполяционного кубического сплайна.

Этот исторический экскурс поясняет происхождение термина «сплайн», а также некоторые моменты, которые можно использовать при построении одного из математических алгоритмов нахождения интерполяционного кубического сплайна. Опишем этот алгоритм подробнее.

Пусть

$$M_j = \frac{d^2}{dx^2} S_{\Delta}^3(f; x_j), \quad j = \overline{0, N}.$$

В силу линейности второй производной кубического сплайна на каждом из отрезков  $[x_{j-1}; x_j]$  можно записать для нее следующее представление:

$$\frac{d^2}{dx^2} S_{\Delta}^3(f; x) = P_{i3}''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = \overline{1, N}. \quad (2.1)$$

Этим соотношением мы учитываем два факта (по аналогии с п. 1.1 предыдущего параграфа): непрерывность второй производной во всех внутренних узлах разбиения  $\Delta$ , а также принятие второй производной в узлах разбиения значений  $M_j$ .

Проинтегрируем соотношение (2.1) дважды (при этом константы интегрирования будем брать в специальном виде, обеспечивающем простоту их нахождения; в частности, при первом интегрировании вводим сразу обе произвольные постоянные):

$$\frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x) = -M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{A_j - B_j}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = \overline{1, N}; \quad (2.2)$$

$$S_{\Delta}^3(f; x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + A_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} + B_j \frac{x_j - x}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = \overline{1, N}.$$

Постоянные  $A_j$  и  $B_j$  найдем, используя условия интерполирования (1.3) и непрерывности сплайна в узлах, которые вновь можно объединить в условия вида (1.4):

$$\begin{cases} S_{\Delta}^3(f; x_j) = f(x_j), \\ S_{\Delta}^3(f; x_{j-1}) = f(x_{j-1}), \end{cases} \quad j = \overline{1, N}.$$

Подставляя во второе из соотношений (2.2) соответствующие значения аргумента, найдем:

$$\begin{cases} f(x_j) = M_j \frac{h_j^2}{6} + A_j, \\ f(x_{j-1}) = M_{j-1} \frac{h_j^2}{6} + B_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, N}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} A_j = f(x_j) - M_j \frac{h_j^2}{6}, \\ B_j = f(x_{j-1}) - M_{j-1} \frac{h_j^2}{6}, \end{cases} \quad j = \overline{1, N}.$$

Подставляя найденные значения  $A_j$ ,  $B_j$  в (2.2), можем записать:

$$\frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x) = -M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_j; \quad (2.3)$$

$$S_{\Delta}^3(f; x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left( f_j - M_j \frac{h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} + \left( f_{j-1} - M_{j-1} \frac{h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j}.$$

Эти соотношения имеют место для  $x \in [x_{j-1}; x_j]$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Используем теперь оставшееся из условий, определяющих сплайн – непрерывность первой производной в узлах разбиения  $\Delta$ . Так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x_j + 0) &= P'_{j+1,3}(x_j) = -M_j \frac{h_{j+1}}{2} + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_{j+1} = \\ &= -M_j \frac{h_{j+1}}{3} - M_{j+1} \frac{h_{j+1}}{6} + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}}, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x_j - 0) &= P'_{j,3}(x_j) = M_j \frac{h_j}{2} + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_j = \\ &= M_j \frac{h_j}{3} + M_{j-1} \frac{h_j}{6} + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}, \end{aligned}$$

то из условия их равенства получаем:

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}, \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (2.4)$$

Как и следует из общей теории, в соотношениях (2.4) не хватает двух уравнений, связывающих  $M_j$  между собой, для взаимно однозначного соответствия. Чаше всего различают следующие способы задания дополнительных (граничных) условий:

- а)  $M_0 = M_N = 0$  (так называемые естественные граничные условия);
- б)  $M_0 = f''(x_0) = f''(a)$ ;  $M_N = f''(x_N) = f''(b)$  (если известны соответствующие значения  $f''(a)$  и  $f''(b)$ );
- в) если известны значения  $f'(a)$  и  $f'(b)$ , то, используя первое из равенств (2.3), получим:

$$\frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; a) = -M_0 \frac{h_1}{2} + \frac{f_1 - f_0}{h_1} - \frac{M_1 - M_0}{6} h_1 = f'(a)$$

или

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left( \frac{f_1 - f_0}{h_1} - f'(a) \right) = 6f(x_0, x_0, x_1).$$

Аналогично для точки  $x = b$  условие  $\frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; b) = f'(b)$  приводит к уравнению

$$M_{N-1} + 2M_N = \frac{6}{h_N} \left( f'(b) - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} \right) = 6f(x_{N-1}, x_N, x_N).$$

При любом из рассмотренных типов граничных условий (заметим, что существуют и другие) задача ((2.4) + условия) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, имеющую, в силу строгого диагонального доминирования последней, единственное решение.

Таким образом, интерполяционный кубический сплайн всегда может быть построен, и при том единственным образом (с точностью до задания дополнительных условий). Решение указанной выше системы (2.4) с дополнительными условиями может быть найдено, например, с помощью экономичного алгоритма разностной прогонки, который в данном случае будет устойчив. После нахождения величин  $M_j$  сплайн и его производные определяются формулами (2.1), (2.3).

**Упражнение.** Построить интерполяционный кубический сплайн, используя в качестве определяющей систему для нахождения «наклонов» в узлах разбиения  $\Delta$  (значений  $m_j = \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x_j)$ ,  $j = \overline{0, N}$ ).

## 2.1. Сходимость процесса интерполирования кубическими сплайнами

Как уже указывалось выше, одним из мотивов перехода к использованию кусочных приближений явилась плохая сходимость процесса интерполирования с помощью обычных алгебраических многочленов. Изучим сейчас вопрос о сходимости процесса интерполяционного приближения с помощью рассматриваемых нами ныне объектов. Конкретные исследования проведем на примере изучения сходимости процесса интерполирования кубическими сплайнами, алгоритм построения которых изложен выше.

Вначале установим вспомогательный результат, касающийся оценки нормы обратной матрицы. Везде далее будем рассматривать кубическую (или первую) норму матрицы. Напомним, что она является починенной по отношению к привычной нам  $\max$ -норме вектора.

Справедлива

**Лемма.** Пусть матрица  $A$  имеет диагональное доминирование. Тогда имеет место неравенство

$$\|A^{-1}\| \leq \left( \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} \right)^{-1}.$$

*Доказательство.*

Пусть  $x \neq 0$  – произвольный вектор. Для него выберем номер координаты  $k$  такой, что  $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_k|$  (т.е. зафиксируем компоненту, на которой достигается  $\max$ -норма). Рассмотрим теперь вектор  $y = Ax$ . Тогда для него справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|y\| = \|Ax\| &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right| \geq |a_{kk} x_k| - \left| \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j \right| \geq |a_{kk}| |x_k| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| |x_k| = \\ &= |x_k| \left( |a_{kk}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right) = \|x\| \left( |a_{kk}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right) \geq \|x\| \min_{1 \leq i \leq n} \left( |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right). \end{aligned}$$

Так как в силу диагонального доминирования матрицы  $A$  матрица  $A^{-1}$  существует и, следовательно,  $x = A^{-1}y$ , то для нормы матрицы  $A^{-1}$  получаем:

$$\|A^{-1}\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|x\|}{\|y\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\| \min_{1 \leq i \leq n} \left( |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right)} = \left( \min_{1 \leq i \leq n} \left( |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) \right)^{-1}.$$

□

Перейдем теперь к исследованию процесса интерполирования с помощью кубических сплайнов. Будем рассматривать наиболее общий из трех типов дополнительных условий – условия типа в).

Вначале несколько преобразуем полученную нами ранее систему уравнений. Для этого разделим каждое из уравнений (2.4) на  $\frac{h_j + h_{j+1}}{6}$  и введем обозначения

$$\mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}, \quad \lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} = 1 - \mu_j.$$

С учетом этих обозначений система для определения «моментов»  $M_j$  при граничных условиях типа в) примет вид

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = 6f(x_0, x_0, x_1), \\ \mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = 6f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}), \quad j = \overline{1, N-1}, \\ M_{N-1} + 2M_N = 6f(x_{N-1}, x_N, x_N). \end{cases}$$

или в матричной форме

$$AM = d, \quad (2.5)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} d_0 = 6f(x_0, x_0, x_1), \\ d_j = 6f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}), \quad j = \overline{1, N-1}, \\ d_N = 6f(x_{N-1}, x_N, x_N). \end{cases} \quad (2.6)$$

Пусть также  $h = \max_{1 \leq j \leq N} \{h_j\}$ , а  $\omega(h; f)$  – модуль непрерывности функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , т.е.

$$\omega(h; f) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq h \\ x_1, x_2 \in [a; b]}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Нас будет интересовать степень близости функции  $f(x)$  (и ее производных) к сплайну (и его производным) на отрезке  $[a; b]$ . Естественно при этом, что эта величина будет зависеть от свойств гладкости функции  $f(x)$ . Сформулируем и докажем один из результатов. Справедлива

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in C^2[a; b]$  и интерполирующий ее сплайн  $S_\Delta^3(f; x)$  определяется системой (2.5), (2.6) и формулами (2.1), (2.3). Тогда имеют место соотношения

$$f^{(p)}(x) - \frac{d^p}{dx^p} S_\Delta^3(f; x) = O(h^{2-p}) \omega(h; f''), \quad p = 0, 1, 2. \quad (2.7)$$

*Доказательство.*

Заметив, что в силу свойств разделенных разностей справедливы равенства

$$\begin{cases} \frac{1}{3} d_0 = 2f(x_0, x_0, x_1) = f''(\xi_0), \quad \xi_0 \in [x_0; x_1], \\ \frac{1}{3} d_j = 2f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = f''(\xi_j), \quad \xi_j \in [x_{j-1}; x_{j+1}], \quad j = \overline{1, N-1}, \\ \frac{1}{3} d_N = 2f(x_{N-1}, x_N, x_N) = f''(\xi_N), \quad \xi_N \in [x_{N-1}; x_N], \end{cases} \quad (2.8)$$

преобразуем систему (2.5), вычитая из обеих ее частей вектор  $\frac{1}{3} Ad$ , к виду

$$A \left( M - \frac{1}{3} d \right) = \left( E - \frac{1}{3} A \right) d. \quad (2.9)$$

При этом, очевидно, координаты вектора  $M - \frac{1}{3} d$  (в силу (2.8)) представляют собой разности между значениями второй производной сплайна в узлах разбиения  $\Delta$  и второй производной приближаемой функции в некоторых промежуточных точках. Правые же части системы (2.9) будут иметь вид

$$\begin{cases} c_0 = d_0 - \frac{1}{3}(Ad)_0 = d_0 - \frac{1}{3}(2d_0 + d_1) = \frac{1}{3}(d_0 - d_1); \\ c_j = d_j - \frac{1}{3}(Ad)_j = d_j - \frac{1}{3}(\mu_j d_{j-1} + 2d_j + \lambda_{j+1}) = \frac{1}{3}(d_j - \mu_j d_{j-1} - \lambda_j d_{j+1}) = \\ = \frac{1}{3}[\mu_j(d_j - d_{j-1}) - \lambda_j(d_{j+1} - d_j)], \quad j = \overline{1, N-1}, \\ c_N = d_N - \frac{1}{3}(Ad)_N = d_N - \frac{1}{3}(d_{N-1} + 2d_N) = \frac{1}{3}(d_N - d_{N-1}). \end{cases}$$

При выводе этих формул мы учли, что  $\mu_j + \lambda_j = 1$ .

Оценим сейчас компоненты вектора  $c$ . Учитывая (2.8), имеем:

$$|c_0| = \frac{1}{3}|d_0 - d_1| = |f''(\xi_0) - f''(\xi_1)| \leq 2\omega(h; f'')$$

(последнее неравенство можно получить, например, так: поскольку  $x_0 \leq \xi_0 \leq x_1$ ,  $x_0 \leq \xi_1 \leq x_2$ ,

то  $|f''(\xi_0) - f''(\xi_1)| \leq \left| f''(\xi_0) - f''\left(\frac{\xi_0 + \xi_1}{2}\right) \right| + \left| f''\left(\frac{\xi_0 + \xi_1}{2}\right) - f''(\xi_1) \right| \leq \omega(h; f'') + \omega(h; f'')$  в силу

того что  $|\xi_1 - \xi_0| \leq 2h$  и, следовательно,  $\left| \xi_0 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right| \leq h$  и  $\left| \xi_1 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right| \leq h$ );

аналогично,

$$|c_j| = |\mu_j[f''(\xi_j) - f''(\xi_{j-1})] - \lambda_j[f''(\xi_{j+1}) - f''(\xi_j)]| \leq \mu_j|f''(\xi_j) - f''(\xi_{j-1})| +$$

$$+ \lambda_j|f''(\xi_j) - f''(\xi_{j+1})| \leq \mu_j \cdot 3\omega(h; f'') + \lambda_j \cdot 3\omega(h; f''), \quad j = \overline{1, N-1},$$

поскольку  $x_{j-2} \leq \xi_{j-1} \leq x_j$ ,  $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_{j+1}$ ,  $x_j \leq \xi_{j+1} \leq x_{j+2}$ , т.е.  $|\xi_j - \xi_{j-1}| \leq 3h$ ,  $|\xi_{j+1} - \xi_j| \leq 3h$ ;

$$|c_N| = \frac{1}{3}|d_N - d_{N-1}| = |f''(\xi_N) - f''(\xi_{N-1})| \leq 2\omega(h; f'').$$

Следовательно, объединяя эти оценки, получим:

$$\|c\| \leq 3\omega(h; f''),$$

а поскольку из системы (2.9) следует, что  $M - \frac{1}{3}d = A^{-1}c$  и в силу леммы  $\|A^{-1}\| \leq 1$ , то отсюда

$$\left\| M - \frac{1}{3}d \right\| = \|A^{-1}c\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|c\| \leq \|c\| \leq 3\omega(h; f''). \quad (2.10)$$

Далее, учитывая вид второй производной сплайна (формула (2.1)), получаем:

$$\left| f''(x) - \frac{d^2}{dx^2} S_{\Delta}^3(f; x) \right| = \left| f''(x) - M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} - M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right| = \quad (2.11)$$

$$= \left| \frac{x_j - x}{h_j} (f''(x) - M_{j-1}) + \frac{x - x_{j-1}}{h_j} (f''(x) - M_j) \right| \leq \frac{x_j - x}{h_j} |f''(x) - M_{j-1}| + \frac{x - x_{j-1}}{h_j} |f''(x) - M_j|$$

для всех  $x \in [x_{j-1}; x_j]$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Оценим теперь последовательно величины  $|f''(x) - M_j|$  и  $|f''(x) - M_{j-1}|$ . Имеем:

$$|f''(x) - M_j| = \left| f''(x) - \frac{1}{3}d_j + \frac{1}{3}d_j - M_j \right| \leq \left| f''(x) - \frac{1}{3}d_j \right| + \left| \frac{1}{3}d_j - M_j \right|.$$

Для первого слагаемого получаем:

$$\left| f''(x) - \frac{1}{3}d_j \right| = |f''(x) - f''(\xi_j)| \leq 2\omega(h; f'')$$

так как  $|x - \xi_j| \leq 2h$ , а для второго имеем оценку (2.10).

Поэтому

$$|f''(x) - M_j| \leq 2\omega(h; f'') + 3\omega(h; f'') = 5\omega(h; f''), \quad x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = \overline{1, N}.$$

Отсюда непосредственно следует, что  $\|f''(x) - M\| \leq 5\omega(h; f'')$  и, следовательно, из (2.11) имеем:

$$\left| f''(x) - \frac{d^2}{dx^2} S_{\Delta}^3(f; x) \right| \leq \left( \frac{x_j - x}{h_j} + \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right) \cdot 5\omega(h; f'') = 5\omega(h; f''). \quad (2.12)$$

Таким образом, оценка для вторых производных установлена. Так как по условию сплайн интерполяционный, то выполняются условия

$$\begin{cases} S_{\Delta}^3(f; x_j) = f(x_j), \\ S_{\Delta}^3(f; x_{j-1}) = f(x_{j-1}), \end{cases} \quad j = \overline{1, N}.$$

Поэтому в силу теоремы Ролля на отрезке  $[x_{j-1}; x_j]$  существует точка  $\xi_j^*$ , в которой совпадают значения производных функции  $f(x)$  и сплайна  $S_{\Delta}^3(f; x)$ , т.е. выполняется равенство  $f'(\xi_j^*) = \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; \xi_j^*)$ . Следовательно

$$\begin{aligned} \left| f'(x) - \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x) \right| &= \left| [f'(x) - f'(\xi_j^*)] - \left[ \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x) - \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; \xi_j^*) \right] \right| = \\ &= \left| \int_{\xi_j^*}^x \left[ f''(x) - \frac{d^2}{dx^2} S_{\Delta}^3(f; x) \right] dx \right| \leq \left| \int_{\xi_j^*}^x \left| f''(x) - \frac{d^2}{dx^2} S_{\Delta}^3(f; x) \right| dx \right| \leq 5\omega(h; f'') \cdot |x - \xi_j^*| \leq 5h\omega(h; f''). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} |f(x) - S_{\Delta}^3(f; x)| &= \left| [f(x) - f(x_{j-1})] - \left[ S_{\Delta}^3(f; x) - \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x_{j-1}) \right] \right| = \\ &= \left| \int_{x_{j-1}}^x \left[ f'(x) - \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x) \right] dx \right| \leq \left| \int_{x_{j-1}}^x \left| f'(x) - \frac{d}{dx} S_{\Delta}^3(f; x) \right| dx \right| \leq 5\omega(h; f'') \cdot \left| \int_{x_{j-1}}^x (x - \xi_j^*) dx \right| = \end{aligned}$$



$$= 5\omega(h; f'') \cdot \frac{|\xi_j^* - x_{j-1}|^2}{2} \leq \frac{5}{2} h^2 \omega(h; f'').$$

Полученные неравенства завершают доказательство.  $\square$

Из установленных оценок, в частности, следует равномерная сходимость при  $h \rightarrow 0$  сплайна и его первой и второй производных к  $f(x)$  и ее первой и второй производной.

**Замечания.**

1. Если  $f''(x)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $K$ , то, очевидно,

$$\omega(h; f) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq h \\ x_1, x_2 \in [a; b]}} |f(x_1) - f(x_2)| \leq \sup_{|x_1 - x_2| \leq h} K|x_1 - x_2| \leq Kh.$$

Следовательно, оценки (2.7) примут вид

$$\left| f^{(p)}(x) - \frac{d^p}{dx^p} S_{\Delta}^3(f; x) \right| = O(h^{3-p}), \quad p = 0, 1, 2.$$

2. Если  $f(x) \in C^4[a; b]$ , то путем несколько более сложных рассуждений можно установить оценки

$$\left| f^{(p)}(x) - \frac{d^p}{dx^p} S_{\Delta}^3(f; x) \right| = O(h^{4-p}), \quad p = 0, 1, 2, 3.$$

## 2.2. Экстремальное свойство интерполяционных кубических сплайнов

Кубические сплайн-функции обладают очень важным свойством, которое, по сути, и обеспечивает высокую эффективность сплайн-интерполирования. А именно: рассмотрим на отрезке  $[a; b]$  класс  $W_2^2[a; b]$ , состоящий из функций, имеющих интегрируемые с квадратом вторые производные. Поставим задачу отыскания интерполяционной функции  $u \in W_2^2[a; b]$ ,  $u(x_k) = f_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , которая минимизирует функционал

$$\Phi(u) = \int_a^b [u''(x)]^2 dx \quad (2.13)$$

на классе  $W_2^2[a; b]$ . Утверждается, что минимум такого функционала достигается на кусочно-кубической сплайн-функции  $S_{\Delta}^3(f; x)$  с крайевыми условиями типов а) либо в).

В самом деле, рассмотрим величину

$$\Phi(u - S_{\Delta}^3) = \int_a^b \left( u'' - \frac{d^2}{dx^2} S_{\Delta}^3 \right)^2 dx.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
\Phi(u - S_\Delta^3) &= \int_a^b \left\{ \left[ (u'')^2 - \left( \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \right)^2 \right] - 2 \left[ u'' - \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \right] \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \right\} dx = \\
&= \Phi(u) - \Phi(S_\Delta^3) - 2 \int_a^b \left( u'' - \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \right) \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 dx.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Преобразуем последнее слагаемое правой части (2.14), интегрируя по частям:

$$\int_a^b \left( u'' - \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \right) \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 dx = \left( u' - \frac{d}{dx} S_\Delta^3 \right) \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \Big|_a^b - \int_a^b \left( u' - \frac{d}{dx} S_\Delta^3 \right) \frac{d^3}{dx^3} S_\Delta^3 dx.$$

Так как третья производная кубического сплайна есть кусочно-постоянная функция (т.е.  $\frac{d^3}{dx^3} S_\Delta^3(f; x) = C_j$  при  $x \in [x_{j-1}; x_j]$ ,  $j = \overline{1, N}$ ), а двойная подстановка обращается в нуль на граничных условиях типа а) или в), то далее последнее соотношение далее преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left( u'' - \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \right) \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 dx &= \left( u' - \frac{d}{dx} S_\Delta^3 \right) \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \Big|_a^b - \int_a^b \left( u' - \frac{d}{dx} S_\Delta^3 \right) \frac{d^3}{dx^3} S_\Delta^3 dx = \\
&= - \sum_{j=1}^N \int_a^b \left( u' - \frac{d}{dx} S_\Delta^3 \right) C_j dx = - \sum_{j=1}^N C_j [u(x) - S_\Delta^3(f; x)]_{x_{j-1}}^{x_j} = 0.
\end{aligned}$$

Поэтому из (2.14) имеем:

$$\Phi(u - S_\Delta^3) = \Phi(u) - \Phi(S_\Delta^3).$$

Следовательно,

$$\Phi(S_\Delta^3) = \Phi(u) - \Phi(u - S_\Delta^3) \leq \Phi(u)$$

для всех функций  $u$ , удовлетворяющих поставленным условиям:  $u \in W_2^2[a; b]$ ,  $u(x_k) = f_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ .

Таким образом, на кусочно-кубической функции  $S_\Delta^3(f; x)$  реализуется минимум функционала (2.13).

Заметим, что минимизирующая функция единственна, так как если  $g(x)$  – другая минимизирующая функция, то  $\Phi(g - S_\Delta^3) = 0$  и, следовательно,  $g''(x) = \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3(x)$  почти всюду на отрезке  $[a; b]$ . Отсюда следует, что  $g(x)$  и  $S_\Delta^3(f; x)$  отличаются только лишь на линейную функцию, т.е.  $g(x) = S_\Delta^3(f; x) + \alpha x + \beta$ . Поскольку же  $g(x_k) = S_\Delta^3(f; x_k) + \alpha x_k + \beta$ ,  $k = \overline{0, N}$ , то  $\alpha = \beta = 0$ .

Иногда установленное экстремальное свойство берется в качестве определения интерполяционного кубического сплайна как функции, минимизирующей функционал (2.13). Однако при этом сужается множество рассматриваемых сплайнов, так как при этом учитываются не все типы граничных условий.

### § 3. Кусочно-кубическая интерполяция со сглаживанием

На практике часто приходится иметь дело со случаем, когда значения  $f_k$  в узлах разбиения  $\Delta$  заданы с некоторой погрешностью (например, они могут быть результатами некоторых измерений и тогда означенная погрешность есть погрешность измерительного инструмента). Если погрешность исходных данных относительно велика, то это крайне неблагоприятно влияет на поведение интерполяционного сплайна и особенно его производных. В частности, график сплайна обычно в этом случае приобретает ярко выраженные осцилляции. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли построить сплайн, проходящий вблизи заданных значений, но более «гладкий», чем интерполяционный. Такие сплайны будем называть сглаживающими.

Итак, рассмотрим вопрос о построении таких функций. Потребуем, чтобы искомая функция  $g(x)$  минимизировала на классе  $W_2^2[a; b]$  функционал

$$\Phi_1(u) = \int_a^b (u''(x))^2 dx + \sum_{j=0}^N p_j [u(x_j) - f_j]^2, \quad (3.1)$$

где  $p_j$  – некоторые положительные числа.

В функционале  $\Phi_1(u)$  скомбинированы интерполяционные условия прохождения кривой вблизи заданных значений и условия минимальности «изгибания» функции. Чем больше весовые коэффициенты  $p_j$ , тем больший вклад в  $\Phi_1(u)$  вносят интерполяционные условия, тем ближе к заданным значениям проходит сглаживающая функция.

Покажем, что решением вариационной задачи (3.1) является кубический сплайн, т.е. функция, удовлетворяющая определению из § 1 ( $m=3$ ) и краевым условиям  $\frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3(f; a) = \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3(f; b) = 0$ . Действительно, пусть  $u_0 \in W_2^2[a; b]$  – решение задачи. Построим сплайн  $S_\Delta^3(f; x)$  такой, что  $S_\Delta^3(f; x_j) = u_0(x_j)$ ,  $j = \overline{0, N}$ . Тогда второе слагаемое в (3.1) будет одинаковым для  $S_\Delta^3(f; x)$  и для  $u_0(x)$ . Поэтому

$$\int_a^b (u_0'')^2 dx = \int_a^b \left( \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3 \right)^2 dx.$$

Но как показано в § 2,  $S_\Delta^3(f; x)$  – единственная функция, дающая при интерполировании  $u_0(x)$  минимум функционалу  $\Phi(u)$ . Поэтому  $u_0(x) \equiv S_\Delta^3(f; x)$ .

Итак, минимум функционала (3.1) достаточно искать в классе кубических сплайнов. А поскольку кубический сплайн однозначно определяется множеством его значений  $\mu_j$ ,  $j = \overline{0, N}$  в узлах разбиения  $\Delta$ , то минимизация функционала  $\Phi_1(u)$  сводится к нахождению минимума некоторой функции от переменных  $\mu_0, \dots, \mu_N$ .

Так как в силу (2.1)

$$\frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3(f; x) = P_{i3}''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = \overline{1, N},$$

то

$$\Phi_1(S_\Delta^3) = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right)^2 dx + \sum_{j=0}^N p_j (\mu_j - \tilde{f}_j)^2. \quad (3.2)$$

Производя в (3.2) интегрирование, получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right)^2 dx = \\
& = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[ M_{j-1}^2 \frac{(x_j - x)^2}{h_j^2} + 2M_{j-1}M_j \frac{(x_j - x)(x - x_{j-1})}{h_j^2} + M_j^2 \frac{(x - x_{j-1})^2}{h_j^2} \right] dx = \quad (*) \\
& = \sum_{j=1}^N \left( M_{j-1}^2 \frac{h_j}{3} + M_{j-1}M_j \frac{h_j}{3} + M_j^2 \frac{h_j}{3} \right).
\end{aligned}$$

Так как  $M_0 = M_N = 0$ , то, выполняя замены индексов, имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N M_{j-1}^2 \frac{h_j}{3} = \sum_{j=1}^{N-1} M_j^2 \frac{h_{j+1}}{3}, \\
& \sum_{j=1}^N \left( M_{j-1}^2 \frac{h_j}{3} + M_j^2 \frac{h_j}{3} \right) = \sum_{j=1}^{N-1} M_j^2 \frac{h_j + h_{j+1}}{3}, \\
& \sum_{j=1}^N M_{j-1}M_j \frac{h_j}{3} = \sum_{j=1}^{N-1} M_{j-1}M_j \frac{h_j}{6} + \sum_{j=1}^{N-1} M_jM_{j+1} \frac{h_j}{6}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (\*), получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right)^2 dx = \sum_{j=1}^{N-1} \left( M_j^2 \frac{h_j}{3} + M_{j-1}M_j \frac{h_j}{3} + M_j^2 \frac{h_j}{3} \right) = \\
& = \sum_{j=1}^{N-1} \left( \frac{h_j}{6} M_{j-1}M_j + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j^2 + \frac{h_{j+1}}{6} M_jM_{j+1} \right) = \sum_{j=1}^{N-1} M_j \left( \frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что систему (2.4) с естественными граничными условиями типа а) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{h_1 + h_2}{3} M_1 + \frac{h_2}{6} M_2 = \frac{1}{h_1} f_0 - \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) f_1 + \frac{1}{h_2} f_2, \\ \frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{1}{h_j} f_{j-1} - \left( \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \right) f_j + \frac{1}{h_{j+1}} f_{j+1}, \quad j = \overline{2, N-2}; \\ \frac{h_{N-1}}{6} M_{N-1} + \frac{h_{N-1} + h_N}{3} M_N = \frac{1}{h_{N-1}} f_{N-2} - \left( \frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_N} \right) f_{N-1} + \frac{1}{h_N} f_N \end{cases}$$

или в матричной форме

$$BM = Hf, \quad (3.3)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & & \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & & \\ & & \dots & & \\ & & \frac{h_{N-2}}{6} & \frac{h_{N-2}+h_{N-1}}{3} & \frac{h_{N-1}}{6} \\ & & & \frac{h_{N-1}}{6} & \frac{h_{N-1}+h_N}{3} \end{pmatrix} - (N-1) \times (N-1)\text{-матрица};$$

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_N \end{pmatrix} - (N+1) \times 1\text{-матрица (вектор-столбец)};$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & & \\ & \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & \\ & & & \dots & \\ & & & \frac{1}{h_{N-1}} & -\left(\frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_N}\right) & \frac{1}{h_N} \end{pmatrix} - (N-1) \times (N+1)\text{-матрица}.$$

Учитывая (3.3), результаты интегрирования запишем в виде

$$\sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right)^2 dx = (BM, M).$$

Поэтому соотношение (3.2) примет вид

$$\Phi_1(S_\Delta^3) = (BM, M) + \sum_{j=0}^N p_j (\mu_j - f_j)^2. \quad (3.4)$$

Поскольку наш сплайн в узлах разбиения  $\Delta$  принимает значения  $\mu_j$ , система (3.3) для него примет вид

$$BM = H\mu \quad (3.5)$$

(что означает, что  $M$  линейно выражается через  $\mu$ ). Поэтому  $\Phi_1(S_\Delta^3)$  – положительная форма от  $\mu$ . Ее экстремумом может быть только минимум, необходимым условием которого является

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} (BM, M) + 2p_i (\mu_i - f_i) = 0, \quad i = \overline{0, N}.$$

Но матрица  $B$  не зависит от  $\mu$ . Поэтому в силу (3.5) имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mu_i}(BM, M) &= 2\left(\frac{\partial(BM)}{\partial \mu_i}, M\right) = 2\left(\frac{\partial(H\mu)}{\partial \mu_i}, M\right) = 2\left(H \frac{\partial \mu}{\partial \mu_i}, M\right) = \\ &= 2\left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_i}, H^T M\right) = 2(H^T M)_i.\end{aligned}$$

Таким образом, в векторной форме условие минимума имеет вид

$$H^T M + P\mu = Pf, \quad (3.6)$$

где  $P = \text{diag}\{p_0, \dots, p_N\}$ .

Умножив равенство (3.6) слева на  $HP^{-1}$ , получим:

$$HP^{-1}H^T M + H\mu = Hf$$

или (с учетом (3.5))

$$(B + HP^{-1}H^T)M = Hf. \quad (3.7)$$

Матрица системы (3.7) пятидиагональна, симметрична и положительно определена (как сумма положительной и неотрицательной). Ее можно решать каким-либо известным методом (например, методом Гаусса или пятидиагональной прогонки, хотя, вероятно, наиболее разумным выбором будет метод квадратного корня). После того как вектор  $M$  определен, необходимо найти вектор  $\mu$  сеточных значений сплайна по формуле, которая легко следует из (3.6):

$$\mu = f - P^{-1}H^T M, \quad (3.8)$$

а затем по формулам (2.1), (2.3) восстановить сплайн (и его производные).

По сравнению с интерполяционным сплайном построение сглаживающего сплайна требует значительно большего объема работы. Поэтому при решении вопроса о том, каким сплайном пользоваться, нужно учитывать в первую очередь погрешность исходных данных, а также те требования, которые предъявляются к сплайну (так, например, практически бесполезно применение сглаживающих сплайнов, когда исходная информация задана с точностью порядка *macheps*).

#### § 4. Интерполяционный бикубический сплайн

Возможны различные обобщения сплайн-функций на случай многих независимых переменных. При этом важное значение имеет форма области, в которой осуществляется приближение, а также то, каким образом производится ее разбиение на подобласти.

Рассмотрим сейчас наиболее простой случай, когда (для двух независимых переменных) областью задания является прямоугольник, а разбиение также осуществляется на прямоугольники.

Итак, пусть в прямоугольной области  $\Omega = [a; b] \times [c; d]$  введена сетка линий  $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$ , где

$$\Delta_x = \{x = x_i, j = \overline{1, N}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\};$$

$$\Delta_y = \{y = y_j, j = \overline{1, M}, c = y_0 < y_1 < \dots < y_M = d\},$$

делящая область на прямоугольные ячейки  $\Omega_{ij} = \{(x, y) : x \in [x_{i-1}; x_i], y \in [y_{j-1}; y_j]\}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $j = \overline{1, M}$ .

Тогда по аналогии со случаем одной независимой переменной можно дать следующее

**Определение.** Назовем функцию  $S_{\Delta}^{n,m}(x, y)$  *полиномиальным сплайном степени  $n$  по переменной  $x$  и степени  $m$  по переменной  $y$  с линиями склейки на сетке  $\Delta$* , если:

- 1) на каждой ячейке  $\Omega_{ij}$   $S_{\Delta}^{n,m}(x, y)$  является многочленом степени  $n$  по переменной  $x$  и степени  $m$  по переменной  $y$ , т.е.

$$S_{\Delta}^{n,m}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_{kl}^{ij} (x - x_i)^k (y - y_j)^l, \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, M}; \quad (4.1)$$

$$2) \quad S_{\Delta}^{n,m}(x, y) \in C^{n-1, m-1}(\Omega). \quad (4.2)$$

Если к отмеченным двум условиям добавить требование, чтобы в узлах разбиения  $\Delta$  значения сплайна  $S_{\Delta}^{n,m}(x, y)$  совпадали со значениями приближаемой функции (в этом случае к аргументам сплайна будем добавлять еще и  $f$  и писать  $S_{\Delta}^{n,m}(f; x, y)$ ), т.е.

$$S_{\Delta}^{n,m}(f; x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \stackrel{\text{def}}{=} f_{ij}, \quad i = \overline{0, N}; \quad j = \overline{0, M}, \quad (4.3)$$

то мы получим **интерполяционный сплайн** степени  $n$  по переменной  $x$  и степени  $m$  по переменной  $y$ .

Рассмотрим сейчас более подробно алгоритм построения интерполяционного бикубического сплайна ( $n = m = 3$ ).

Очевидно, что, как и в случае одной независимой переменной условий (4.2), (4.3) недостаточно для однозначного определения сплайна  $S_{\Delta}^{3,3}(f; x, y)$ . Поэтому в качестве дополнительных условий будем брать условия типа а) (точнее, их двумерный аналог):

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} S_{\Delta}^{3,3} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4.4)$$

где  $\nu$  – внешняя нормаль к границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Принципиально построение ничем не отличается от одномерного случая. Вспомним, что для вычисления одномерной сплайн-функции в любой точке по формулам типа (2.3) необходимо знать значения самой функции и ее производных второго порядка в узловых точках, а для того чтобы найти эти вторые производные, нужно один раз решить линейную алгебраическую систему с трехдиагональной матрицей (типа (2.4) с дополнительными условиями). Какие же предварительные вычисления нужно проделать, чтобы потом по явным формулам вычислять функцию в любой точке в двумерном случае?

Чтобы ответить на этот вопрос, прибегнем к уже известной нам технологии повторного интерполирования. Запишем, считая  $y$  параметром, интерполяционный кубический сплайн по переменной  $x$  (верхние индексы в обозначении  $S_{\Delta}^{3,3}(f; x, y)$  сплайна далее будем опускать), пользуясь для этих целей формулами типа (2.3):

$$S_{\Delta}(f; x, y) = \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_{i-1}, y)}{\partial x^2} \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y)}{\partial x^2} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} +$$

$$+ \left( S_{\Delta}(f; x_i, y) - \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y)}{\partial x^2} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \left( S_{\Delta}(f; x_{i-1}, y) - \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_{i-1}, y)}{\partial x^2} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i}, \quad (4.5)$$

$$x \in [x_{i-1}; x_i], \quad i = \overline{1, N}.$$

Чтобы пользоваться этой формулой, мы должны, очевидно, уметь вычислять значения  $S_{\Delta}(f; x_i, y)$  и  $\frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y)}{\partial x^2}$  для всех значений  $i = \overline{0, N}$ .

Поскольку эти выражения являются функциями только одной переменной, то для их нахождения можно воспользоваться интерполяционными кубическими сплайнами по переменной  $y$ , а именно:

$$S_{\Delta}(f; x_i, y) = \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_{j-1})}{\partial y^2} \frac{(y - y_{j-1})^3}{6\tau_j} + \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial y^2} \frac{(y - y_j)^3}{6\tau_j} +$$

$$+ \left( S_{\Delta}(f; x_i, y_j) - \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial y^2} \frac{\tau_j^2}{6} \right) \frac{y - y_{j-1}}{\tau_j} + \left( S_{\Delta}(f; x_i, y_{j-1}) - \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_{j-1})}{\partial y^2} \frac{\tau_j^2}{6} \right) \frac{y_j - y}{\tau_j}, \quad (4.6)$$

$$y \in [y_{j-1}; y_j], \quad j = \overline{1, M}.$$

Учитывая, что здесь  $S_{\Delta}(f; x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = f_{ij}$ , для определения величин  $L_{ij} := \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial y^2}$  имеем набор систем типа (2.5) (всего их будет  $(N+1)$ ):

$$\begin{cases} \mu_j^* L_{i,j-1} + 2L_{i,j} + \lambda_j^* L_{i,j+1} = 6f(x_i; y_{j-1}, y_j, y_{j+1}), & j = \overline{1, M-1}, \\ L_{i,0} = L_{i,M} = 0, & i = \overline{0, N}, \\ \mu_j^* = \frac{\tau_j}{\tau_j + \tau_{j+1}}; \quad \lambda_j^* = \frac{\tau_{j+1}}{\tau_j + \tau_{j+1}}, \end{cases} \quad (4.7)$$

Сплайн, аналогичный (4.6), построим для функции  $\frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y)}{\partial x^2}$ :

$$\frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 S_{\Delta}(f; x_i, y_{j-1})}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{(y - y_{j-1})^3}{6\tau_j} + \frac{\partial^4 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{(y - y_j)^3}{6\tau_j} +$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial y^2} \frac{\tau_j^2}{6} \right) \frac{y - y_{j-1}}{\tau_j} + \left( \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_{j-1})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_{j-1})}{\partial y^2} \frac{\tau_j^2}{6} \right) \frac{y_j - y}{\tau_j},$$

$$y \in [y_{j-1}; y_j], \quad j = \overline{1, M}.$$



При этом для нахождения величин  $K_{i,j} := \frac{\partial^4 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2}$  необходимо решить системы

$$\begin{cases} \mu_j^* K_{i,j-1} + 2K_{i,j} + \lambda_j^* K_{i,j+1} = 6 \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i; y_{j-1}, y_j, y_{j+1})}{\partial x^2}, & j = \overline{1, M-1}, \\ K_{i,0} = K_{i,M} = 0, \\ i = \overline{0, N} \end{cases} \quad (4.9)$$

общим числом  $(N+1)$ , правыми частями которых являются разделенные разности второго порядка от второй производной по переменной  $x$  сплайна в узлах разбиения  $\Delta$ . Чтобы их найти, достаточно решить системы  $\left( \text{здесь } M_{i,j} := \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial x^2} \right)$

$$\begin{cases} \mu_i M_{i-1,j} + 2M_{i,j} + \lambda_i M_{i+1,j} = 6f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; y_j), & i = \overline{1, N-1}, \\ M_{0,j} = M_{N,j} = 0, \\ \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}; \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \end{cases} \quad j = \overline{0, M}. \quad (4.10)$$

общим числом  $(M+1)$ , построив тем самым интерполяционный кубический сплайн  $S_{\Delta}(f; x, y_j)$ .

Произведя упорядочивание работ, получим следующий алгоритм построения интерполяционного бикубического сплайна на прямоугольной сетке:

1. Решаем  $(M+1)$  линейную систему (4.10), из которых находим величины  $M_{i,j} = \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial x^2}$ ,  $i = \overline{0, N}$ ;  $j = \overline{0, M}$ ;
2. Решаем  $(N+1)$  линейную систему (4.9), из которых находим величины  $K_{i,j} = \frac{\partial^4 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2}$ ,  $i = \overline{0, N}$ ;  $j = \overline{0, M}$ ;

В результате выполнения этих двух этапов построен сплайн (4.8).

3. Решаем  $(N+1)$  линейную систему (4.7), из которых находим величины  $L_{i,j} = \frac{\partial^2 S_{\Delta}(f; x_i, y_j)}{\partial y^2}$ ,  $i = \overline{0, N}$ ;  $j = \overline{0, M}$ ;

После этого построен сплайн (4.6).

4. Значение интерполяционного бикубического сплайна в точке  $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  вычисляем по формуле (4.5) с использованием формул (4.6) и (4.8).

Таким образом, прежде чем приступить к расчету функции  $S_{\Delta}(f; x, y)$  в интересующих нас точках необходимо решить один раз  $(M+1) + (N+1) + (N+1) = 2N + M + 3$  линейных систем, а для расчета  $S_{\Delta}^{3,3}(f; x, y)$  в одной точке области нужно пять раз выполнить расчеты по формулам, определяющим сплайн: дважды – по формулам (4.6) (при  $x = x_i$  и  $x = x_{i-1}$ ), дважды – по формулам (4.8) (при  $x = x_i$  и  $x = x_{i-1}$ ) и один раз – по формулам (4.5).

**Замечание 1.** Подставив (4.6) и (4.8) в (4.5), можно получить явное полиномиальное выражение для  $S_{\Delta}^{3,3}(f; x, y)$  в каждой ячейке разбиения, но для хранения коэффициентов многочлена потребуется в четыре раза больше памяти (хотя при описанном выше способе организации работы мы примерно в четыре раза больше вычисляем).

**Замечание 2.** При построении бикубического сплайна можно поменять порядок приближения по независимым переменным местами. Тогда нужно будет решить  $N + 2M + 3$  систем, но итоговый результат не изменится.

Описанный алгоритм может быть обобщен на многомерные области типа параллелепипеда.

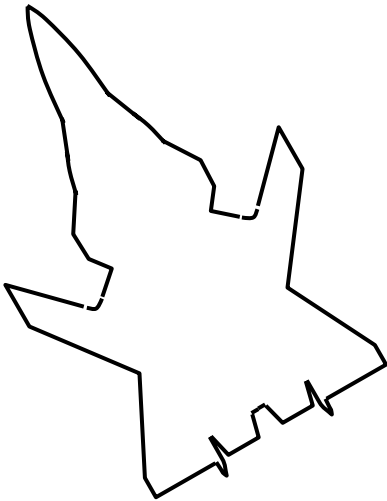
**Упражнение.** Построить интерполяционный билинейный сплайн на треугольной сетке.

Распространение алгоритма на другие типы краевых областей производится очевидным образом. Кроме того, для интерполяционных бикубических сплайнов оказывается справедливым экстремальное свойство, аналогичное рассмотренному нами в одномерном случае, а также имеет место оценка погрешности (в случае, если  $f(x, y) \in C^{4,4}(\Omega)$ )

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} - \frac{\partial^{\alpha+\beta} S_{\Delta}^{3,3}(f; x, y)}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = O(h^{4-\alpha} + \tau^{4-\beta}), \quad \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

## § 5. Приближение кривых и поверхностей

С помощью рассмотренных ранее сплайнов одной переменной можно приближать лишь такие плоские кривые, которые в выбранной системе координат (не обязательно прямоугольной декартовой) описываются функциональной зависимостью вида  $y = f(x)$ . Однако не все кривые могут быть представлены подобным образом (например, изображенные на рисунке контуры некоторого летательного аппарата). Более универсальным способом является параметрическое задание их координат в виде двух функций  $x = x(u)$  и  $y = y(u)$  некоторого параметра  $u$ .



При интерполяции кривой, заданной параметрически, естественно ввести разбиение на промежутке изменения параметра  $u$ :  $u_0 < u_1 < \dots < u_N$ , затем вычислить соответствующие значения координат точек на кривой ( $x_i = x(u_i)$ ,  $y_i = y(u_i)$ ), и построить для функций  $x(u)$  и  $y(u)$  интерполяционные сплайны  $S(x; u)$ ,  $S(y; u)$ . Совокупность этих двух сплайнов называется интерполяционным параметрическим сплайном. В зависимости от вида функций  $S(x; u)$ ,  $S(y; u)$  будем говорить о параметрических линейных, кубических и т.п. сплайнах. В качестве меры погрешности приближения проще всего взять величину

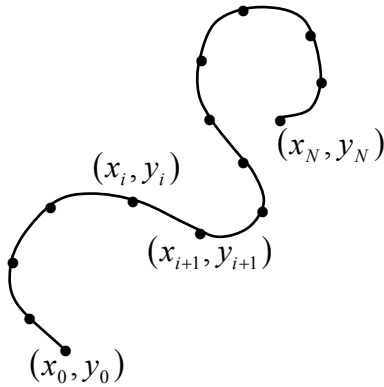
$$R(u) = \sqrt{(S(x; u) - x(u))^2 + (S(y; u) - y(u))^2}.$$

Главной особенностью практических задач о приближении кривых является то, что заданы бывают только упорядоченные массивы точек на них, а информация о способе параметризации, которая необходима для построения сплайнов, отсутствует.

Аналогичные проблемы, только технически еще более сложные, возникают и при приближении поверхностей.

## 5.1. Интерполяция кривых сплайнами

Пусть на некоторой кривой  $L$  задана последовательность точек  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{0, N}$ .



Как уже отмечалось ранее, основной проблемой является отсутствие параметризации. В то же время в анализе известен способ введения параметра, называемый естественной параметризацией (в качестве параметра принимается длина дуги кривой). Поэтому в данном случае мы рассмотрим аналог естественной параметризации: введем ее по суммарной длине хорд  $d_i$ , соединяющих точки  $P_{i-1}$  и  $P_i$  ( $d_i = |P_{i-1}P_i|$ ).

Если обозначить новый параметр через  $\mathfrak{s}$ , то сетка узлов интерполирования будет такой:

$$\tilde{\Delta}: 0 = \mathfrak{s}_0 < \mathfrak{s}_1 < \dots < \mathfrak{s}_N,$$

где

$$\mathfrak{s}_i = \sum_{k=0}^{i-1} d_k, \quad d_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}.$$

При этом параметр  $\mathfrak{s}$  пробегает отрезок  $[0; \mathfrak{s}_N]$ .

**1<sup>0</sup>.** Рассмотрим *интерполяционный параметрический сплайн первой степени*. Согласно полученным ранее формулам на промежутке между точками  $P_{i-1}$  и  $P_i$  он задается соотношениями

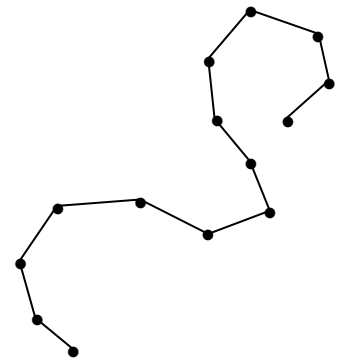
$$\begin{cases} S_1(x; \mathfrak{s}) = x_i \frac{\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_{i-1}}{d_{i-1}} + x_{i-1} \frac{\mathfrak{s}_i - \mathfrak{s}}{d_{i-1}}, \\ S_1(y; \mathfrak{s}) = y_i \frac{\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_{i-1}}{d_{i-1}} + y_{i-1} \frac{\mathfrak{s}_i - \mathfrak{s}}{d_{i-1}}, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}. \quad (5.1)$$

Из (5.1) следует равенство

$$\frac{S'_1(y; \mathfrak{s})}{S'_1(x; \mathfrak{s})} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x_i \neq x_{i-1}, \quad (5.2)$$

которое используется для приближенного вычисления наклона касательной к кривой  $L$  между точками  $P_{i-1}$  и  $P_i$ . Если  $x_i = x_{i+1}$ , то это означает, что данное звено сплайна параллельно оси  $Oy$ .

Геометрически параметрический сплайн первой степени представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых, соединяющих точки  $P_i$ .



**2<sup>0</sup>.** *Интерполяционный параметрический сплайн третьей степени*

Вновь в качестве параметра берем суммарную длину хорд  $\mathfrak{s}$ . В этом случае, в соответствии с формулами, полученными ранее (см. § 2), можем записать:

$$S(x; \bar{s}) = \tilde{M}_i \frac{(\bar{s} - \bar{s}_{i-1})^3}{6d_{i-1}} + \tilde{M}_{i-1} \frac{(\bar{s}_i - \bar{s})^3}{6d_{i-1}} + \left( x_i - \frac{d_{i-1}^2}{6} \tilde{M}_i \right) \frac{\bar{s} - \bar{s}_{i-1}}{d_{i-1}} + \left( x_{i-1} - \frac{d_{i-1}^2}{6} \tilde{M}_{i-1} \right) \frac{\bar{s}_i - \bar{s}}{d_{i-1}}, \quad (5.3)$$

$$s \in [\bar{s}_{i-1}; \bar{s}_i], \quad i = \overline{1, N},$$

где величины  $\tilde{M}_i$  определяются из системы

$$\begin{cases} \mu_i \tilde{M}_{i-1} + 2\tilde{M}_i + \tilde{\lambda}_i \tilde{M}_{i+1} = \frac{6}{d_{i-1} + d_i} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{d_i} - \frac{x_i - x_{i-1}}{d_{i-1}} \right), \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \tilde{M}_0 = \tilde{M}_N = 0, \end{cases}$$

и аналогично

$$S(y; \bar{s}) = \tilde{L}_i \frac{(\bar{s} - \bar{s}_{i-1})^3}{6d_{i-1}} + \tilde{L}_{i-1} \frac{(\bar{s}_i - \bar{s})^3}{6d_{i-1}} + \left( y_i - \frac{d_{i-1}^2}{6} \tilde{L}_i \right) \frac{\bar{s} - \bar{s}_{i-1}}{d_{i-1}} + \left( y_{i-1} - \frac{d_{i-1}^2}{6} \tilde{L}_{i-1} \right) \frac{\bar{s}_i - \bar{s}}{d_{i-1}},$$

$$s \in [\bar{s}_{i-1}; \bar{s}_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} \mu_i \tilde{L}_{i-1} + 2\tilde{L}_i + \tilde{\lambda}_i \tilde{L}_{i+1} = \frac{6}{d_{i-1} + d_i} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{d_{i-1}} \right), \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \tilde{L}_0 = \tilde{L}_N = 0. \end{cases}$$

В обеих системах  $\mu_i = \frac{d_{i-1}}{d_{i-1} + d_i}$ ,  $\tilde{\lambda} = 1 - \mu_i$ .

При определенных требованиях к функциям  $x(s)$  и  $y(s)$  ( $s$  – естественный параметр – длина дуги), а также к кривой  $L$  можно получить оценки скорости сходимости, аналогичные полученным ранее. Можно заметить также (проверьте!), что параметрический сплайн не изменяется при переходе к новому параметру  $\bar{s} = \gamma \bar{s}$ , где  $\gamma > 0$  – произвольный числовой параметр. Поэтому в некоторых случаях удобно полагать  $\gamma = \bar{s}_N^{-1}$ . Таковую параметризацию называют нормированной по суммарной длине хорд.

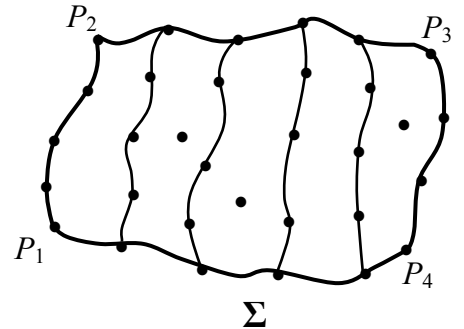
## 5.2. Приближение поверхностей

Рассмотрим алгоритм решения такой задачи на примере изображенной ниже поверхности  $\Sigma$ . Разобьем границу поверхности  $\Sigma$  точками  $P_1, P_2, P_3, P_4$  на четыре части и введем на  $\Sigma$  семейство линий, обладающих следующими свойствами:

1. никакие две линии не имеют общих точек;
2. начало и конец каждой линии находятся в точках, расположенных на противоположных участках границы; два других участка включаются в число координатных линий.

Такие линии будем называть координатными.

Рассматриваемое семейство координатных линий  $L_k$ ,  $k = 0, \dots, N_0$  вводим таким образом, чтобы каждая из линий проходила через некоторые из заданных точек (при этом не обязательно, чтобы каждая из заданных точек принадлежала какой-либо линии).



Как и при аппроксимации линий, основной проблемой является задание параметризации. Решение этой задачи с последующим построением аппроксимирующей поверхности сплайна распадается на три основных этапа.

**1<sup>0</sup>.** Для каждой линии  $L_k$  строим интерполирующий ее параметрический сплайн с использованием нормированной параметризации по суммарной длине хорд:  $S_k(x; \bar{s})$ ,  $S_k(y; \bar{s})$ ,  $S_k(z; \bar{s})$ . При этом необходимо позаботиться о том, чтобы построенные сплайны обладали свойством координатных линий, т.е. нужно стремиться к тому, чтобы линии  $L_k$  были «плавными», и на них было достаточно точек, не слишком близких друг к другу.

На отрезке  $[0;1]$  изменения параметра  $\bar{s}$  введем сетку  $\Delta_v := \{0 = v_0 < v_1 < \dots < v_M = 1\}$  и вычислим координаты точек

$$P_{kj}^{(1)} \{S_k(x; v_j), S_k(y; v_j), S_k(z; v_j)\}, \quad j = \overline{0, M}, \quad k = \overline{0, N_0}.$$

**2<sup>0</sup>.** Для каждого значения  $j \in \{0, \dots, M\}$  строим параметрические сплайны  $\bar{S}_j(x; \bar{s})$ ,  $\bar{S}_j(y; \bar{s})$ ,  $\bar{S}_j(z; \bar{s})$ , интерполирующие точки  $P_{0j}^{(1)}, \dots, P_{N_0j}^{(1)}$ . Необходимо, чтобы, как и на первом этапе, позаботиться о том, чтобы линии, соответствующие этим сплайнам, вновь были координатными.

Далее вводим сетку  $\Delta_u := \{0 = u_0 < u_1 < \dots < u_N = 1\}$  и определим координаты точек  $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ :

$$x_{ij} = \bar{S}_j(x; u_i), \quad \bar{S}_j(y; u_i), \quad \bar{S}_j(z; u_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M}.$$

**3<sup>0</sup>.** В области  $[0;1] \times [0;1]$  образуем сетку  $\Delta = \Delta_v \times \Delta_u$ . В качестве декартовых координат поверхности в ее узлах  $(u_i, v_j)$  принимаем значения  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$ . Интерполируем эти значения на сетке  $\Delta$ . В итоге получаем для координат аппроксимируемой поверхности формулы

$$x = S(x; u, v), \quad y = S(y; u, v), \quad z = S(z; u, v).$$

Построение данных интерполяционных сплайнов двух независимых переменных можно осуществлять, например, способом, аналогичным описанному выше способу построения интерполяционного бикубического сплайна в декартовой прямоугольной системе координат.