Бесконалиционные игры

Виктор Васильевич Лепин

Стратегическая форма бесколиционной игры

- *Бескоалиционной игрой* (в стратегической форме) n игроков называется тройка $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$,

Стратегическая форма бесконалиционной игры

- *Бескоалиционной игрой* (в стратегической форме) n игроков называется тройка
$\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$,
где
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ есть множество игроков,

Стратегическая форма бескоалиционной игры

- *Бескоалиционной игрой* (в стратегической форме) n игроков называется тройка
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$,
  где
    - $N = \{1, \ldots, n\}$ есть множество игроков,
    - S_i — множество стратегий игрока i,

Стратегическая форма бесконфликтной игры

- *Бескоалиционной игрой* (в стратегической форме) n игроков называется тройка
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$,
  где
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ есть множество игроков,
  - S_i — множество стратегий игрока i,
  - а ϕ_i — функция выигрышей i-го игрока.

Стратегическая форма бескоалиционной игры

- *Бескоалиционной игрой* (в стратегической форме) n игроков называется тройка
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N})$,
  где
    - $N = \{1, \ldots, n\}$ есть множество игроков,
    - S_i — множество стратегий игрока i,
    - а ϕ_i — функция выигрышей i-го игрока.
- Набор стратегий игроков $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$, называется ситуацией или партией.

Стратегическая форма бесколиционной игры

- *Бескоалиционной игрой* (в стратегической форме) n игроков называется тройка
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$,
  где
  - $N = \{1, \dots, n\}$ есть множество игроков,
  - S_i — множество стратегий игрока i,
  - а ϕ_i — функция выигрышей i-го игрока.
- Набор стратегий игроков $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n$, называется ситуацией или партией.
- Функции ϕ_i выигрышей игроков определены на множестве ситуаций $S = S_1 \times \dots \times S_n$.

Стратегическая форма бескоалиционной игры

- *Бескоалиционной игрой* (в стратегической форме) n игроков называется тройка
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$,
  где
  - $N = \{1, \dots, n\}$ есть множество игроков,
  - S_i — множество стратегий игрока i,
  - а ϕ_i — функция выигрышей i-го игрока.
- Набор стратегий игроков $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n$, называется ситуацией или партией.
- Функции ϕ_i выигрышей игроков определены на множестве ситуаций $S = S_1 \times \dots \times S_n$.
- Игроки одновременно объявляют свои стратегии $s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n$,

Стратегическая форма бесконалиционной игры

- *Бескоалиционной игрой* (в стратегической форме) n игроков называется тройка
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$,
  где
  - $N = \{1, \dots, n\}$ есть множество игроков,
  - S_i — множество стратегий игрока i,
  - а ϕ_i — функция выигрышей i-го игрока.
- Набор стратегий игроков $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n$, называется ситуацией или партией.
- Функции ϕ_i выигрышей игроков определены на множестве ситуаций $S = S_1 \times \dots \times S_n$.
- Игроки одновременно объявляют свои стратегии $s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n$,
- и в сложившейся ситуации $s = (s_1, \dots, s_n)$ игрок i выиграет $\phi_i(s)$, $i = 1, \dots, n$.

- Рассмотрим ситуацию $s = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.

Полезные обозначения

- Рассмотрим ситуацию $s = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.
- Набор $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ стратегий оппонентов игрока i обозначают через s_{-i}.

Полезные обозначения

- Рассмотрим ситуацию $s = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S$.
- Набор $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ стратегий оппонентов игрока i обозначают через s_{-i}.
- Ситуация $(s_1, \ldots, s_{i-1}, \bar{s}_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, которая получается из ситуации s заменой стратегии s_i игрока i на стратегию $\bar{s}_i$, обозначается через $(\bar{s}_i, s_{-i})$.

Определение

Ситуация s называется *ситуацией равновесия (Нэша)* в бескоалиционной игре γ, если выполняется следующее условие:

$$\phi_i(s) \geq \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \text{ для всех } \bar{s}_i \in S_i, i \in N. \tag{1}$$

Содержательно, неравенства (1) означают, что

в ситуации равновесия ни одному игроку в отдельности не выгодно менять свою стратегию.

- Переписав условие

$$\phi_i(s) \geq \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \text{ для всех } \bar{s}_i \in S_i, i \in N. \qquad (1)$$

- Переписав условие
$$\phi_i(s) \geq \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \text{ для всех } \bar{s}_i \in S_i, i \in N. \tag{1}$$
- в следующем эквивалентном виде
$$s_i \in \arg\max_{\bar{s}_i \in S_i} \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \text{ для всех } i \in N. \tag{2}$$

Ситуации равновесия

- Переписав условие
$$\phi_i(s) \geq \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \text{ для всех } \bar{s}_i \in S_i, i \in N. \qquad (1)$$
- в следующем эквивалентном виде
$$s_i \in \arg\max_{\bar{s}_i \in S_i} \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \text{ для всех } i \in N. \qquad (2)$$
- мы можем сказать, что

в ситуации равновесия стратегия каждого игрока является его оптимальным ответом на стратегии других игроков.

Примеры бесколиционных игр

Пример 1: конечная бескоалиционная игра

Каждый из трех игроков имеет две стратегии, а платежи определяются по правилу:

Игрок 1 выбирает стратегию 1:

Игрок 3

Игрок 2		1	2
	1	$(1,6,3)$	$(2,0,5)$
	2	$(1,8,1)$	$(3,6,2)$

Игрок 1 выбирает стратегию 2:

Игрок 3

Игрок 2		1	2
	1	$(1,5,5)$	$(2,1,0)$
	2	$(2,0,1)$	$(4,1,1)$

Здесь $N = \{1,2,3\}$,
$S_1 = S_2 = S_3 = \{1,2\}$.
В ситуации $s = (2,1,2)$,
игрок 1 выбирает табл. 2,
игрок 2 — строку 1,
а игрок 3 — столбец 2.
Выигрыши игроков:
$\phi_1(2,1,2) = 2$,
$\phi_2(2,1,2) = 1$,
$\phi_3(2,1,2) = 0$.

Пример 1: ситуации равновесия

Игрок 1 выбирает стратегию 1:

Игрок 3

Игрок 2		1	2
	1	$(1,6,3)$	$(2,0,5)$
	2	$(1,8,1)$	$(3,6,2)$

Игрок 1 выбирает стратегию 2:

Игрок 3

Игрок 2		1	2
	1	$(1,5,5)$	$(2,1,0)$
	2	$(2,0,1)$	$(4,1,1)$

Ситуация	Игрок, которому выгодно менять стратегию
$(1,1,1)$	3
$(1,1,2)$	2
$(1,2,1)$	1
$(1,2,2)$	1
$(2,1,1)$	—
$(2,1,2)$	3
$(2,2,1)$	2
$(2,2,2)$	—

Ответ: две ситуации равновесия $s^1 = (2,1,1)$ и $s^2 = (2,2,2)$.

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная игра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная игра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.
- Игрок 1 хочет получить долю x, $(0 \le x \le d)$,

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная игра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.
- Игрок 1 хочет получить долю x, $(0 \leq x \leq d)$,
- а игрок 2 — долю y, $(0 \leq y \leq d)$,

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная пгра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.
- Игрок 1 хочет получить долю x, $(0 \leq x \leq d)$,
- а игрок 2 — долю y, $(0 \leq y \leq d)$,
- Если $x + y \leq d$, то игрок 1 получит x, а игрок 2 — y.

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная игра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.
- Игрок 1 хочет получить долю x, $(0 \leq x \leq d)$,
- а игрок 2 — долю y, $(0 \leq y \leq d)$,
- Если $x + y \leq d$, то игрок 1 получит x, а игрок 2 — y.
- Когда $x + y > d$, оба игрока ничего не получат.

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная игра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.
- Игрок 1 хочет получить долю x, $(0 \leq x \leq d)$,
- а игрок 2 — долю y, $(0 \leq y \leq d)$,
- Если $x + y \leq d$, то игрок 1 получит x, а игрок 2 — y.
- Когда $x + y > d$, оба игрока ничего не получат.
- Нужно записать стратегическую форму для данной бескоалиционной игры и найти все ситуации равновесия.

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная пгра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.
- Игрок 1 хочет получить долю x, $(0 \leq x \leq d)$,
- а игрок 2 — долю y, $(0 \leq y \leq d)$,
- Если $x + y \leq d$, то игрок 1 получит x, а игрок 2 — y.
- Когда $x + y > d$, оба игрока ничего не получат.
- Нужно записать стратегическую форму для данной бескоалиционной игры и найти все ситуации равновесия.

Здесь $N = 1, 2$ и $S_1 = S_2 = [0, d]$.

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная пгра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.
- Игрок 1 хочет получить долю x, $(0 \leq x \leq d)$,
- а игрок 2 — долю y, $(0 \leq y \leq d)$,
- Если $x + y \leq d$, то игрок 1 получит x, а игрок 2 — y.
- Когда $x + y > d$, оба игрока ничего не получат.
- Нужно записать стратегическую форму для данной бескоалиционной игры и найти все ситуации равновесия.

Здесь $N = 1, 2$ и $S_1 = S_2 = [0, d]$.
В ситуации $(x, y) \in [0, d]^2$ выигрыши игроков определяются по формулам:

Пример 2: бесконечное число ситуаций равновесия

Азартная игра Нэша

- Два игрока делят сумму денег d.
- Игрок 1 хочет получить долю x, $(0 \leq x \leq d)$,
- а игрок 2 — долю y, $(0 \leq y \leq d)$,
- Если $x + y \leq d$, то игрок 1 получит x, а игрок 2 — y.
- Когда $x + y > d$, оба игрока ничего не получат.
- Нужно записать стратегическую форму для данной бескоалиционной игры и найти все ситуации равновесия.

Здесь $N = 1, 2$ и $S_1 = S_2 = [0, d]$.
В ситуации $(x, y) \in [0, d]^2$ выигрыши игроков определяются по формулам:

$$\phi_1(x, y) = \begin{cases} x, \text{ если } x + y \leq d, \\ 0, \text{ если, } x + y > d, \end{cases} \qquad \phi_2(x, y) = \begin{cases} y, \text{ если } x + y \leq d, \\ 0, \text{ если, } x + y > d, \end{cases}$$

Пример 2: ситуации равновесия в азартной игре Нэша

$N = 1, 2,\ S_1 = S_2 = [0, d].$

$\phi_1(x, y) = \begin{cases} x, \text{ если } x + y \le d, \\ 0, \text{ если, } x + y > d, \end{cases} \quad \phi_2(x, y) = \begin{cases} y, \text{ если } x + y \le d, \\ 0, \text{ если, } x + y > d, \end{cases}$

Пример 2: ситуации равновесия в азартной игре Нэша

$N = 1, 2,\ S_1 = S_2 = [0, d]$.

$$\phi_1(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } x + y \le d, \\ 0, & \text{если, } x + y > d, \end{cases} \qquad \phi_2(x,y) = \begin{cases} y, & \text{если } x + y \le d, \\ 0, & \text{если, } x + y > d, \end{cases}$$

В данной игре — много ситуаций равновесия.

Пример 2: ситуации равновесия в азартной игре Нэша

$N = 1, 2,\ S_1 = S_2 = [0, d]$.

$$\phi_1(x,y) = \begin{cases} x, \text{ если } x + y \le d, \\ 0, \text{ если}, x + y > d, \end{cases} \qquad \phi_2(x,y) = \begin{cases} y, \text{ если } x + y \le d, \\ 0, \text{ если}, x + y > d, \end{cases}$$

В данной игре — много ситуаций равновесия.

1. Все ситуации (x, y), такие, что $x + y = d$. Если любой из игроков увеличит свою долю, то оба игрока ничего не получат. Если кто-то из игроков уменьшит свою долю, то его выигрыш уменьшится.

Пример 2: ситуации равновесия в азартной игре Нэша

$N = 1, 2,\ S_1 = S_2 = [0, d]$.

$\phi_1(x,y) = \begin{cases} x, \text{ если } x+y \le d, \\ 0, \text{ если}, x+y > d, \end{cases} \quad \phi_2(x,y) = \begin{cases} y, \text{ если } x+y \le d, \\ 0, \text{ если}, x+y > d, \end{cases}$

В данной игре — много ситуаций равновесия.

1. Все ситуации (x, y), такие, что $x + y = d$. Если любой из игроков увеличит свою долю, то оба игрока ничего не получат. Если кто-то из игроков уменьшит свою долю, то его выигрыш уменьшится.
2. Ситуация (d, d), когда каждый из игроков хочет получить всю сумму денег. В этой ситуации выигрыши игроков равны нулю. Если один из игроков требует всю сумму денег, то его оппонент ничего не получит.

Пример 2: ситуации равновесия в азартной игре Нэша

$N = 1, 2$, $S_1 = S_2 = [0, d]$.

$$\phi_1(x, y) = \begin{cases} x, \text{ если } x + y \le d, \\ 0, \text{ если}, x + y > d, \end{cases} \qquad \phi_2(x, y) = \begin{cases} y, \text{ если } x + y \le d, \\ 0, \text{ если}, x + y > d, \end{cases}$$

В данной игре — много ситуаций равновесия.

1. Все ситуации (x, y), такие, что $x + y = d$. Если любой из игроков увеличит свою долю, то оба игрока ничего не получат. Если кто-то из игроков уменьшит свою долю, то его выигрыш уменьшится.
2. Ситуация (d, d), когда каждый из игроков хочет получить всю сумму денег. В этой ситуации выигрыши игроков равны нулю. Если один из игроков требует всю сумму денег, то его оппонент ничего не получит.
3. Докажите, что в данной игре нет других ситуаций равновесия.

- Имеется 2 продавца одинак. продукта и 3 покупателя.

- Имеется 2 продавца одинак. продукта и 3 покупателя.
- Покупатель 1 знаком только с продавцом 1, покупатель 2 — только с продавцом 2, а покупатель 3 знает обоих продавцов.

Пример 3: “игра цен” (без ситуаций равновесия)

- Имеется 2 продавца одинак. продукта и 3 покупателя.
- Покупатель 1 знаком только с продавцом 1, покупатель 2 — только с продавцом 2, а покупатель 3 знает обоих продавцов.
- Каждому покупателю нужна только одна единица продукта, за которую он готов заплатить максимум 1.

Пример 3: "игра цен" (без ситуаций равновесия)

- Имеется 2 продавца одинак. продукта и 3 покупателя.
- Покупатель 1 знаком только с продавцом 1, покупатель 2 — только с продавцом 2, а покупатель 3 знает обоих продавцов.
- Каждому покупателю нужна только одна единица продукта, за которую он готов заплатить максимум 1.
- Продавец $i \in \{1, 2\}$ назначает цену $p_i \in [0, 1]$.

Пример 3: "игра цен" (без ситуаций равновесия)

- Имеется 2 продавца одинак. продукта и 3 покупателя.
- Покупатель 1 знаком только с продавцом 1, покупатель 2 — только с продавцом 2, а покупатель 3 знает обоих продавцов.
- Каждому покупателю нужна только одна единица продукта, за которую он готов заплатить максимум 1.
- Продавец $i \in \{1, 2\}$ назначает цену $p_i \in [0, 1]$.
- После этого покупатель 1 покупает единицу продукта продавца 1, покупатель 2 — у продавца 2, а покупатель 3 покупает единицу продукта у того продавца, у которого цена наименьшая. В случае равенства цен, покупатель 3 покупает у продавца 1.

Пример 3: "игра цен" (без ситуаций равновесия)

- Имеется 2 продавца одинак. продукта и 3 покупателя.
- Покупатель 1 знаком только с продавцом 1, покупатель 2 — только с продавцом 2, а покупатель 3 знает обоих продавцов.
- Каждому покупателю нужна только одна единица продукта, за которую он готов заплатить максимум 1.
- Продавец $i \in \{1, 2\}$ назначает цену $p_i \in [0, 1]$.
- После этого покупатель 1 покупает единицу продукта продавца 1, покупатель 2 — у продавца 2, а покупатель 3 покупает единицу продукта у того продавца, у которого цена наименьшая. В случае равенства цен, покупатель 3 покупает у продавца 1.
- Прибыль (выигрыш) продавца равен сумме, полученной от продажи продукта.

- Имеется 2 продавца одинак. продукта и 3 покупателя.
- Покупатель 1 знаком только с продавцом 1, покупатель 2 — только с продавцом 2, а покупатель 3 знает обоих продавцов.
- Каждому покупателю нужна только одна единица продукта, за которую он готов заплатить максимум 1.
- Продавец $i \in \{1, 2\}$ назначает цену $p_i \in [0, 1]$.
- После этого покупатель 1 покупает единицу продукта продавца 1, покупатель 2 — у продавца 2, а покупатель 3 покупает единицу продукта у того продавца, у которого цена наименьшая. В случае равенства цен, покупатель 3 покупает у продавца 1.
- Прибыль (выигрыш) продавца равен сумме, полученной от продажи продукта.
- Нужно доказать, что в бескоалиционной игре двух лиц (продавцов) нет ситуаций равновесия.

Пример 3: анализ "игры цен"

- Здесь $N = 1, 2$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$.

Пример 3: анализ "игры цен"

- Здесь $N = 1, 2$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$.
- В ситуации $p = (p_1, p_2) \in [0, 1]^2$ выигрыши игроков определяются по правилу:

Пример 3: анализ "игры цен"

- Здесь $N = 1, 2$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$.
- В ситуации $p = (p_1, p_2) \in [0, 1]^2$ выигрыши игроков определяются по правилу:
  $$\phi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_1, & \text{если } p_1 \le p_2, \\ p_1, & \text{если } p_1 > p_2, \end{cases}$$

Пример 3: анализ "игры цен"

- Здесь $N = 1, 2$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$.
- В ситуации $p = (p_1, p_2) \in [0, 1]^2$ выигрыши игроков определяются по правилу:

$$\phi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_1, & \text{если } p_1 \leq p_2, \\ p_1, & \text{если } p_1 > p_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_2, & \text{если } p_1 > p_2, \\ p_2, & \text{если, } p_1 \leq p_2. \end{cases}$$

Пример 3: анализ “игры цен”

- Здесь $N = 1, 2$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$.
- В ситуации $p = (p_1, p_2) \in [0, 1]^2$ выигрыши игроков определяются по правилу:
$$\phi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_1, & \text{если } p_1 \le p_2, \\ p_1, & \text{если } p_1 > p_2, \end{cases}$$
$$\phi_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_2, & \text{если } p_1 > p_2, \\ p_2, & \text{если, } p_1 \le p_2. \end{cases}$$
- Если $p_1 \le 1/2$, то наилучшим ответом игрока 2 будет цена $p_2 = 1$. Тогда игроку 1 также нужно назначить цену 1, чтобы увеличить свой выигрыш с $2p_1 \le 1$ до 2.

Пример 3: анализ "игры цен"

- Здесь $N = 1, 2$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$.
- В ситуации $p = (p_1, p_2) \in [0, 1]^2$ выигрыши игроков определяются по правилу:
$$\phi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_1, & \text{если } p_1 \le p_2, \\ p_1, & \text{если } p_1 > p_2, \end{cases}$$
$$\phi_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_2, & \text{если } p_1 > p_2, \\ p_2, & \text{если, } p_1 \le p_2. \end{cases}$$
- Если $p_1 \le 1/2$, то наилучшим ответом игрока 2 будет цена $p_2 = 1$. Тогда игроку 1 также нужно назначить цену 1, чтобы увеличить свой выигрыш с $2p_1 \le 1$ до 2.
- Если же $p_1 > 1/2$, то игрок 2 должен назначит цену p_2, "чуть меньшую" p_1, т. е. $1/2 < p_2 < p_1$. Но тогда игрок 1, назначая цену $\bar{p}_1 = p_2$, увеличит свой выигрыш: $\phi_1(\bar{p}_1, p_2) = 2\bar{p}_1 = 2p_2 > 1 \ge p_1 = \phi_1(p_1, p_2)$.

Доминирование

Доминирующие стратегии

- Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ *доминирует* стратегию $\hat{s}_i \in S_i$ игрока i, если
$\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \phi_i(\hat{s}_i, s{-}i)$ для всех $s_{-i} \in S_{-i}$,

Доминирующие стратегии

- Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ *доминирует* стратегию $\hat{s}_i \in S_i$ игрока i, если
  $\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \phi_i(\hat{s}_i, s-i)$ для всех $s_{-i} \in S_{-i}$,
- Стратегия $\hat{s}_i \in S_i$ называется *доминируемой*, если существует стратегия $\bar{s}_i \in S_i$, которая доминирует $\hat{s}_i$.

Доминирующие стратегии

- Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ *доминирует* стратегию $\hat{s}_i \in S_i$ игрока i, если
$\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \phi_i(\hat{s}_i, s-i)$ для всех $s_{-i} \in S_{-i}$,
- Стратегия $\hat{s}_i \in S_i$ называется *доминируемой*, если существует стратегия $\bar{s}_i \in S_i$, которая доминирует $\hat{s}_i$.
- Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ является *доминирующей стратегией игрока* i, если она доминирует все его стратегии:
$\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \phi_i(\hat{s}_i, s_{-i})$ для всех $\hat{s}_i \in S_i$, $s_{-i} \in S_{-i}$.

Доминирующие стратегии

- Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ *доминирует* стратегию $\hat{s}_i \in S_i$ игрока i, если
  $\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \phi_i(\hat{s}_i, s{-}i)$ для всех $s_{-i} \in S_{-i}$,
- Стратегия $\hat{s}_i \in S_i$ называется *доминируемой*, если существует стратегия $\bar{s}_i \in S_i$, которая доминирует $\hat{s}_i$.
- Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ является *доминирующей стратегией игрока* i, если она доминирует все его стратегии:
  $\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \phi_i(\hat{s}_i, s_{-i})$ для всех $\hat{s}_i \in S_i$, $s_{-i} \in S_{-i}$.
- Если в игре у каждого игрока есть доминирующая стратегия, то ситуация, составленная из этих доминирующих стратегий, называется доминирующим равновесием.

Доминирующие стратегии

- Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ *доминирует* стратегию $\hat{s}_i \in S_i$ игрока i, если
  $\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \phi_i(\hat{s}_i, s-i)$ для всех $s_{-i} \in S_{-i}$,
- Стратегия $\hat{s}_i \in S_i$ называется *доминируемой*, если существует стратегия $\bar{s}_i \in S_i$, которая доминирует $\hat{s}_i$.
- Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ является *доминирующей стратегией игрока* i, если она доминирует все его стратегии:
  $\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \phi_i(\hat{s}_i, s_{-i})$ для всех $\hat{s}_i \in S_i$, $s_{-i} \in S_{-i}$.
- Если в игре у каждого игрока есть доминирующая стратегия, то ситуация, составленная из этих доминирующих стратегий, называется доминирующим равновесием.
- По определению, доминирующее равновесие является ситуацией равновесия Нэша, но обратное в общем случае не верно.

Удаление доминируемых стратегий

- Игры, в которых имеется доминирующее равновесие, встречаются не часто.

- Игры, в которых имеется доминирующее равновесие, встречаются не часто.
- Но концепцию доминирования можно также использовать для упрощения решаемой игры.

Удаление доминируемых стратегий

- Игры, в которых имеется доминирующее равновесие, встречаются не часто.
- Но концепцию доминирования можно также использовать для упрощения решаемой игры.
- В любой ситуации s игрок i ничего не потеряет (а может даже и выиграет), переходя от доминируемой стратегии s_i к стратегии $\bar{s}_i$, доминируюшей s_i.

Удаление доминируемых стратегий

- Игры, в которых имеется доминирующее равновесие, встречаются не часто.
- Но концепцию доминирования можно также использовать для упрощения решаемой игры.
- В любой ситуации s игрок i ничего не потеряет (а может даже и выиграет), переходя от доминируемой стратегии s_i к стратегии $\bar{s}_i$, доминируюшей s_i.
- Поэтому если каждый игрок удалит из своего множества стратегий все доминируемые стратегие, то в результате получится эквивалентная *усеченная игра*.

Удаление доминируемых стратегий

- Игры, в которых имеется доминирующее равновесие, встречаются не часто.
- Но концепцию доминирования можно также использовать для упрощения решаемой игры.
- В любой ситуации s игрок i ничего не потеряет (а может даже и выиграет), переходя от доминируемой стратегии s_i к стратегии $\bar{s}_i$, доминируюшей s_i.
- Поэтому если каждый игрок удалит из своего множества стратегий все доминируемые стратегие, то в результате получится эквивалентная *усеченная игра*.
- Для этой усеченной игры снова можно построить новую усеченную игру.

Удаление доминируемых стратегий

- Игры, в которых имеется доминирующее равновесие, встречаются не часто.
- Но концепцию доминирования можно также использовать для упрощения решаемой игры.
- В любой ситуации s игрок i ничего не потеряет (а может даже и выиграет), переходя от доминируемой стратегии s_i к стратегии $\bar{s}_i$, доминируюшей s_i.
- Поэтому если каждый игрок удалит из своего множества стратегий все доминируемые стратегие, то в результате получится эквивалентная *усеченная игра*.
- Для этой усеченной игры снова можно построить новую усеченную игру.
- И этот итерационный процесс можно продолжать до тех пор, пока ни у одного из игроков не будет доминируемых стратегий.

Пример 1: продолжение

Игрок 1 выбирает стратегию 1:

Игрок 3

		1	2
Игрок 2	1	$(1,6,3)$	$(2,0,5)$
	2	$(1,8,1)$	$(3,6,2)$

Игрок 1 выбирает стратегию 2:

Игрок 3

		1	2
Игрок 2	1	$(1,5,5)$	$(2,1,0)$
	2	$(2,0,1)$	$(4,1,1)$

- В каждой тройке чисел табл. 1 первое число не превосходит первого числа в соотв. тройке чисел табл. 2.
- Стратегия 2 игрока 1 доминирует его стратегию 1.
- После удаления страт. 1 игрока 1 мы получим усеченную игру

Пример 1: продолжение

	Игрок 3	
	1	2
Игрок 2 1	$(5,5)$	$(1,0)$
Игрок 2 2	$(0,1)$	$(1,1)$

- В каждой тройке чисел табл. 1 первое число не превосходит первого числа в соотв. тройке чисел табл. 2.
- Стратегия 2 игрока 1 доминирует его стратегию 1.
- После удаления страт. 1 игрока 1 мы получим усеченную игру игроков 2 и 3.

Пример 1: продолжение

	Игрок 3		
		1	2
Игрок 2	1	$(5,5)$	$(1,0)$
	2	$(0,1)$	$(1,1)$

- В усеченной игре, стратегия 1 у каждого из игроков доминирует его стратегию 2.
- Поэтому $(1,1)$ есть доминирующая ситуация равновесия для усеченной игры.
- Следовательно, $(2,1,1)$ есть ситуация равновесия в исходной игре.

Пример 1: продолжение

	Игрок 3	
Игрок 2	1	2
1	$(5, 5)$	$(1, 0)$
2	$(0, 1)$	$(1, 1)$

- В усеченной игре, стратегия 1 у каждого из игроков доминирует его стратегию 2.
- Поэтому $(1, 1)$ есть доминирующая ситуация равновесия для усеченной игры.
- Следовательно, $(2, 1, 1)$ есть ситуация равновесия в исходной игре.

Игрок 3

Игрок 2		1	2
	1	$(5,5)$	$(1,0)$
	2	$(0,1)$	$(1,1)$

- В усеченной игре, стратегия 1 у каждого из игроков доминирует его стратегию 2.
- Поэтому $(1,1)$ есть доминирующая ситуация равновесия для усеченной игры.
- Следовательно, $(2,1,1)$ есть ситуация равновесия в исходной игре.

Пример 1: продолжение

Игрок 1 выбирает стратегию 1:

Игрок 3

Игрок 2		1	2
	1	$(1, 6, 3)$	$(2, 0, 5)$
	2	$(1, 8, 1)$	$(3, 6, 2)$

Игрок 1 выбирает стратегию 2:

Игрок 3

Игрок 2		1	2
	1	$(1, 5, 5)$	$(2, 1, 0)$
	2	$(2, 0, 1)$	$(4, 1, 1)$

- Заметим, что ситуация $(2, 1, 1)$ не является доминирующим равновесием в исходной игре,
- поскольку стратегия 1 не является доминирующей для игрока 2.

Пример 1: продолжение

Игрок 1 выбирает стратегию 1:

Игрок 3

		1	2
Игрок 2	1	$(1, 6, 3)$	$(2, 0, 5)$
	2	$(1, 8, 1)$	$(3, 6, 2)$

Игрок 1 выбирает стратегию 2:

Игрок 3

		1	2
Игрок 2	1	$(1, 5, 5)$	$(2, 1, 0)$
	2	$(2, 0, 1)$	$(4, 1, 1)$

- Заметим, что ситуация $(2, 1, 1)$ не является доминирующим равновесием в исходной игре,
- поскольку стратегия 1 не является доминирующей для игрока 2.

Определение

Бесколиционная игра $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$ называется *выпуклой игрой*, если для всех $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выполняются условия:

Определение

Бескоалиционная игра $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$ называется *выпуклой игрой*, если для всех $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выполняются условия:

1. S_i — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{n_i}$;

Выпуклые игры

Определение

Бескоалиционная игра $\gamma = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N})$ называется *выпуклой игрой*, если для всех $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выполняются условия:

1. S_i — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{n_i}$;
2. $\phi_i(s)$ — непрерывная на $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ функция;

Определение

Бескоалиционная игра $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$ называется *выпуклой игрой*, если для всех $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выполняются условия:

1. S_i — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{n_i}$;
2. $\phi_i(s)$ — непрерывная на $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ функция;
3. для всех фиксированных $s_{-i} \in S_{-i}$ функция $\phi_i(s_i, s_{-i})$ — квазивогнута по переменной s_i.

Теорема Нэша

Теорема (Нэша)

Любая выпуклая игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия.

Пример

- Предположим, что n $(n > 4)$ интернет провайдеров (в дальнейшем игроков) безконтрольно делят общий внешний канал выхода в интернет емкости 1.

Пример

- Предположим, что n $(n > 4)$ интернет провайдеров (в дальнейшем игроков) безконтрольно делят общий внешний канал выхода в интернет емкости 1.
- Игрок $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выбирает свою стратегию $x_i \in S_i = [0, 1]$,

Пример

- Предположим, что n $(n > 4)$ интернет провайдеров (в дальнейшем игроков) безконтрольно делят общий внешний канал выхода в интернет емкости 1.
- Игрок $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выбирает свою стратегию $x_i \in S_i = [0, 1]$,
- и в ситуации $x = (x_1, \ldots, x_n)$ игрок i выигрывает $\phi_i(x) = x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$.

Пример

- Предположим, что n $(n > 4)$ интернет провайдеров (в дальнейшем игроков) безконтрольно делят общий внешний канал выхода в интернет емкости 1.
- Игрок $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выбирает свою стратегию $x_i \in S_i = [0, 1]$,
- и в ситуации $x = (x_1, \ldots, x_n)$ игрок i выигрывает $\phi_i(x) = x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$.
- Нужно найти ситуацию равновесия

Пример

- Предположим, что n $(n > 4)$ интернет провайдеров (в дальнейшем игроков) безконтрольно делят общий внешний канал выхода в интернет емкости 1.
- Игрок $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выбирает свою стратегию $x_i \in S_i = [0, 1]$,
- и в ситуации $x = (x_1, \ldots, x_n)$ игрок i выигрывает $\phi_i(x) = x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$.
- Нужно найти ситуацию равновесия
- и сравнить выигрыши игроков в ситуации равновесия с теми, которые игроки могут получить, если договорятся пропорционально разделить половину емкости канала.

- Мы видим, что выигрыш $\phi_i(x) = x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$ игрока i увеличивается с ростом его доли x_i

“Проклятие общего”: анариз игры

- Мы видим, что выигрыш $\phi_i(x) = x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$ игрока i увеличивается с ростом его доли x_i
- и убывает с ростом общей загрузки канала $\sum_{j=1}^{n} x_j$.

- Мы видим, что выигрыш $\phi_i(x) = x_i \left(1 - \sum_{j=1}^n x_j\right)$ игрока i увеличивается с ростом его доли x_i
- и убывает с ростом общей загрузки канала $\sum_{j=1}^n x_j$.
- Представив $\phi_i(x)$ в следующем виде $\phi_i(x) = -x_i^2 + x_i \left(1 - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_j\right)$,

- Мы видим, что выигрыш $\phi_i(x) = x_i\left(1 - \sum_{j=1}^n x_j\right)$ игрока i увеличивается с ростом его доли x_i
- и убывает с ростом общей загрузки канала $\sum_{j=1}^n x_j$.
- Представив $\phi_i(x)$ в следующем виде
$\phi_i(x) = -x_i^2 + x_i\left(1 - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_j\right)$,
- мы видим, что функция $\phi_i(x)$ вогнута по x_i при фиксированных значения x_j, $j \in N\setminus\{i\}$.

- Мы видим, что выигрыш $\phi_i(x) = x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$ игрока i увеличивается с ростом его доли x_i
- и убывает с ростом общей загрузки канала $\sum_{j=1}^{n} x_j$.
- Представив $\phi_i(x)$ в следующем виде $\phi_i(x) = -x_i^2 + x_i \left(1 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j\right)$,
- мы видим, что функция $\phi_i(x)$ вогнута по x_i при фиксированных значения x_j, $j \in N \setminus \{i\}$.
- Поэтому игра $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$ выпуклая, и по теореме Нэша она имеет ситуацию равновесия.

"Проклятие общего": поиск равновесия

- При известных стратегиях x_j, $j \in N \setminus \{i\}$, игрок $i \in N$ найдет свою стратегию x_i, решая задачу
$\max \left\{ \phi_i(x) = -x_i^2 + x_i \left(1 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \right) : \; x_i \in [0,1] \right\}. \quad (*)$

"Проклятие общего": поиск равновесия

- При известных стратегиях x_j, $j \in N \setminus \{i\}$, игрок $i \in N$ найдет свою стратегию x_i, решая задачу
$$\max\left\{\phi_i(x) = -x_i^2 + x_i\left(1 - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_j\right) : \ x_i \in [0,1]\right\}. \quad (*)$$
- При граничных значениях $x_i = 0$ или $x_i = 1$ выигрыш игрока i неположителен.

- При известных стратегиях x_j, $j \in N \setminus \{i\}$, игрок $i \in N$ найдет свою стратегию x_i, решая задачу
$$\max\left\{\phi_i(x) = -x_i^2 + x_i\left(1 - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_j\right) : \ x_i \in [0,1]\right\}. \quad (*)$$
- При граничных значениях $x_i = 0$ или $x_i = 1$ выигрыш игрока i неположителен.
- Поэтому предположим, что все игроки не используют свои граничные стратегии.

- При известных стратегиях x_j, $j \in N \setminus \{i\}$, игрок $i \in N$ найдет свою стратегию x_i, решая задачу
$$\max \left\{ \phi_i(x) = -x_i^2 + x_i \left(1 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \right) : \; x_i \in [0,1] \right\}. \quad (*)$$
- При граничных значениях $x_i = 0$ или $x_i = 1$ выигрыш игрока i неположителен.
- Поэтому предположим, что все игроки не используют свои граничные стратегии.
- Тогда решение задачи (*) должно удовлетворять условию оптимальности первого порядка:
$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(x) = -2x_i + 1 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 0.$$

- При известных стратегиях x_j, $j \in N \setminus \{i\}$, игрок $i \in N$ найдет свою стратегию x_i, решая задачу
$\max \left\{ \phi_i(x) = -x_i^2 + x_i \left(1 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j\right) : \; x_i \in [0,1] \right\}. \quad (*)$
- При граничных значениях $x_i = 0$ или $x_i = 1$ выигрыш игрока i неположителен.
- Поэтому предположим, что все игроки не используют свои граничные стратегии.
- Тогда решение задачи (*) должно удовлетворять условию оптимальности первого порядка:
$\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(x) = -2x_i + 1 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 0.$
- Решая систему линейных уравнений
$2x_i + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1, \quad i = 1, \ldots, n,$

- При известных стратегиях x_j, $j \in N \setminus \{i\}$, игрок $i \in N$ найдет свою стратегию x_i, решая задачу
$\max\left\{\phi_i(x) = -x_i^2 + x_i\left(1 - \sum_{j \in N\setminus\{i\}} x_j\right) : \ x_i \in [0,1]\right\}. \quad (*)$
- При граничных значениях $x_i = 0$ или $x_i = 1$ выигрыш игрока i неположителен.
- Поэтому предположим, что все игроки не используют свои граничные стратегии.
- Тогда решение задачи (*) должно удовлетворять условию оптимальности первого порядка:
$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(x) = -2x_i + 1 - \sum_{j \in N\setminus\{i\}} x_j = 0.$
- Решая систему линейных уравнений
$2x_i + \sum_{j \in N\setminus\{i\}} x_j = 1, \quad i = 1, \dots, n,$
- найдем единственную ситуацию равновесия
$x^0 = (1/(n+1), \dots, 1/(n+1)).$

"Проклятие общего": анализ ситуации равновесия

- В ситуацию равновесия $x_0 = (1/(n+1), \ldots, 1/(n+1))$ выигрыш каждого игрока равен $\phi_i(x^0) = \dfrac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

“Проклятие общего”: анализ ситуации равновесия

- В ситуацию равновесия $x_0 = (1/(n+1), \ldots, 1/(n+1))$ выигрыш каждого игрока равен $\phi_i(x^0) = \dfrac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
- При этом, общая загрузка канала равна $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 = n/(n+1)$ и при больших n близка к стопроцентной;

"Проклятие общего": анализ ситуации равновесия

- В ситуацию равновесия $x_0 = (1/(n+1), \ldots, 1/(n+1))$ выигрыш каждого игрока равен $\phi_i(x^0) = \dfrac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
- При этом, общая загрузка канала равна $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 = n/(n+1)$ и при больших n близка к стопроцентной;
- С точки зрения клиентов "интернет работает медленно", поэтому выигрыши игроков мизерные.

“Проклятие общего”: анализ ситуации равновесия

- В ситуацию равновесия $x_0 = (1/(n+1), \ldots, 1/(n+1))$ выигрыш каждого игрока равен $\phi_i(x^0) = \dfrac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
- При этом, общая загрузка канала равна $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 = n/(n+1)$ и при больших n близка к стопроцентной;
- С точки зрения клиентов “интернет работает медленно”, поэтому выигрыши игроков мизерные.
- Если бы игроки смогли договориться пропорционально разделить половину емкости канала,

“Проклятие общего”: анализ ситуации равновесия

- В ситуацию равновесия $x_0 = (1/(n+1), \ldots, 1/(n+1))$ выигрыш каждого игрока равен $\phi_i(x^0) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.
- При этом, общая загрузка канала равна $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 = n/(n+1)$ и при больших n близка к стопроцентной;
- С точки зрения клиентов “интернет работает медленно”, поэтому выигрыши игроков мизерные.
- Если бы игроки смогли договориться пропорционально разделить половину емкости канала,
- то в ситуации $x^1 = (1/2n, \ldots, 1/2n)$ выигрыш каждого игрока $i \in N$ составил бы $\phi_i(x^1) = 1/4n$,

"Проклятие общего": анализ ситуации равновесия

- В ситуацию равновесия $x_0 = (1/(n+1), \dots, 1/(n+1))$ выигрыш каждого игрока равен $\phi_i(x^0) = \dfrac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
- При этом, общая загрузка канала равна $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 = n/(n+1)$ и при больших n близка к стопроцентной;
- С точки зрения клиентов "интернет работает медленно", поэтому выигрыши игроков мизерные.
- Если бы игроки смогли договориться пропорционально разделить половину емкости канала,
- то в ситуации $x^1 = (1/2n, \dots, 1/2n)$ выигрыш каждого игрока $i \in N$ составил бы $\phi_i(x^1) = 1/4n$,
- что более чем в $n/4$ раза превышает выигрыш в ситуации равновесия.

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

- Теорема Нэша гарантирует существование решения для выпуклых игр, но не указывает способа их решения.

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

- Теорема Нэша гарантирует существование решения для выпуклых игр, но не указывает способа их решения.
- Рассмотрим теперь итерационный алгоритм решения выпуклой игры $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\} i \in N)$, где $N = \{1, \ldots, n\}$.

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

- Теорема Нэша гарантирует существование решения для выпуклых игр, но не указывает способа их решения.
- Рассмотрим теперь итерационный алгоритм решения выпуклой игры $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\} i \in N)$, где $N = \{1, \ldots, n\}$.
- Итерации процесса естественно интерпретировать как последовательность партий, разыгрываемых игроками.

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

- Игроки начинают с некот. начальной ситуации $s^0 \in S$.

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

- Игроки начинают с некот. начальной ситуации $s^0 \in S$.
- На шаге $k = 1, 2, \ldots$ разыгрывается партия $s^k \in S$

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

- Игроки начинают с некот. начальной ситуации $s^0 \in S$.
- На шаге $k = 1, 2, \dots$ разыгрывается партия $s^k \in S$
- как результат одновременного предъявления всеми игроками своих стратегий s^k, т. е. $s^k = (s_1^k, \dots, s_n^k)$.

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

- Игроки начинают с некот. начальной ситуации $s^0 \in S$.
- На шаге $k = 1, 2, \dots$ разыгрывается партия $s^k \in S$
- как результат одновременного предъявления всеми игроками своих стратегий s^k, т. е. $s^k = (s_1^k, \dots, s_n^k)$.
- Игроки анализируют сложившуюся после партии $k-1$ ситуацию s^{k-1} и находят свои оптимальные ответы (стратегии) $\bar{s}_i^{k-1}$, которые им нужно было применять, если бы они предвидели заранее ситуацию s^{k-1}, т. е.
  $$\bar{s}_i^{k-1} \in \arg\max_{s_i \in S_i} \phi_i(s_i, s_{-i}^{k-1}),\ i = 1, \dots, n.$$

Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

- Игроки начинают с некот. начальной ситуации $s^0 \in S$.
- На шаге $k = 1, 2, \ldots$ разыгрывается партия $s^k \in S$
- как результат одновременного предъявления всеми игроками своих стратегий s^k, т. е. $s^k = (s_1^k, \ldots, s_n^k)$.
- Игроки анализируют сложившуюся после партии $k-1$ ситуацию s^{k-1} и находят свои оптимальные ответы (стратегии) $\bar{s}_i^{k-1}$, которые им нужно было применять, если бы они предвидели заранее ситуацию s^{k-1}, т. е.
  $$\bar{s}_i^{k-1} \in \arg\max_{s_i \in S_i} \phi_i(s_i, s_{-i}^{k-1}),\ i = 1, \ldots, n.$$
- Игроки корректируют использованные в предыдушей партии стратегии, вычисляя свои новые стратегии s_i^k для применения в k-й партии:
  $$s_i^k = (1-\lambda_k)s_i^{k-1} + \lambda_k \bar{s}_i^{k-1},\ i = 1, \ldots, n.$$

Сходимость итерационного процесса

- Параметр λ_k в формуле $s_i^k = (1-\lambda_k)s_i^{k-1} + \lambda_k \bar{s}_i^{k-1}$ интерпрет. как степень доверия новой информации после опыта, накопленного в ранее сыгранных партиях.

Сходимость итерационного процесса

- Параметр λ_k в формуле $s_i^k = (1-\lambda_k)s_i^{k-1} + \lambda_k \bar{s}_i^{k-1}$ интерпрет. как степень доверия новой информации после опыта, накопленного в ранее сыгранных партиях.
- Сходится ли послед. $s^0, s^1, \ldots, s^k, \ldots$ и, если сходится, то является ли $s^* = \lim_{k\to\infty} s^k$ ситуацией равновесия?

Сходимость итерационного процесса

- Параметр λ_k в формуле $s_i^k = (1-\lambda_k)s_i^{k-1} + \lambda_k \bar{s}_i^{k-1}$ интерпрет. как степень доверия новой информации после опыта, накопленного в ранее сыгранных партиях.
- Сходится ли послед. $s^0, s^1, \ldots, s^k, \ldots$ и, если сходится, то является ли $s^* = \lim_{k\to\infty} s^k$ ситуацией равновесия?
- Если придерживаться слишком консервативной политики, когда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < \infty$, то процес сойдется, но он может и не дойти до ситуации равновесия s^*.

Сходимость итерационного процесса

- Параметр λ_k в формуле $s_i^k = (1-\lambda_k)s_i^{k-1} + \lambda_k \bar{s}_i^{k-1}$ интерпрет. как степень доверия новой информации после опыта, накопленного в ранее сыгранных партиях.
- Сходится ли послед. $s^0, s^1, \ldots, s^k, \ldots$ и, если сходится, то является ли $s^* = \lim_{k\to\infty} s^k$ ситуацией равновесия?
- Если придерживаться слишком консервативной политики, когда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < \infty$, то процес сойдется, но он может и не дойти до ситуации равновесия s^*.
- Если проявлять чрезмерную склонность к переменам, когда λ_k не стремится к нулю, то это может привести к тому, что устойчивое состояние так и не будет найдено.

Сходимость итерационного процесса

- Параметр λ_k в формуле $s_i^k = (1-\lambda_k)s_i^{k-1} + \lambda_k \bar{s}_i^{k-1}$ интерпрет. как степень доверия новой информации после опыта, накопленного в ранее сыгранных партиях.
- Сходится ли послед. $s^0, s^1, \ldots, s^k, \ldots$ и, если сходится, то является ли $s^* = \lim_{k\to\infty} s^k$ ситуацией равновесия?
- Если придерживаться слишком консервативной политики, когда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < \infty$, то процес сойдется, но он может и не дойти до ситуации равновесия s^*.
- Если проявлять чрезмерную склонность к переменам, когда λ_k не стремится к нулю, то это может привести к тому, что устойчивое состояние так и не будет найдено.
- Наиболее простой и естественной политикой при выборе шагов λ_k является политика равного доверия ко всем возникающим в процессе игры оптимальным ответам:

$$\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{1}{k+1}.$$

Конечные бескоалиционные игры

Что делать, когда в игре нет равновесий?

- Пусть в бескоалиционной игре n лиц
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$

Что делать, когда в игре нет равновесий?

- Пусть в бескоалиционной игре n лиц
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$
- каждый игрок i имеет конечное число стратегий n_i.

- Пусть в бескоалиционной игре n лиц
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$
- каждый игрок i имеет конечное число стратегий n_i.
- Для простоты представления будем считать, что $S_i = \{1, \ldots, n_i\}$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.

Что делать, когда в игре нет равновесий?

- Пусть в бескоалиционной игре n лиц
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$
- каждый игрок i имеет конечное число стратегий n_i.
- Для простоты представления будем считать, что $S_i = \{1, \ldots, n_i\}$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.
- Решениями бескоалиционной игры являются ситуации равновесия.

Что делать, когда в игре нет равновесий?

- Пусть в бескоалиционной игре n лиц
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$
- каждый игрок i имеет конечное число стратегий n_i.
- Для простоты представления будем считать, что $S_i = \{1, \ldots, n_i\}$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.
- Решениями бескоалиционной игры являются ситуации равновесия.
- Многие бескоалиционные игры не имеют ситуаций равновесия.

Что делать, когда в игре нет равновесий?

- Пусть в бескоалиционной игре n лиц
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$
- каждый игрок i имеет конечное число стратегий n_i.
- Для простоты представления будем считать, что $S_i = \{1, \ldots, n_i\}$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.
- Решениями бескоалиционной игры являются ситуации равновесия.
- Многие бескоалиционные игры не имеют ситуаций равновесия.
- Чтобы это исправить, нам нужно некоторым образом расширить понятие стратегии с целью получить игру, которая имела бы решение.

Что делать, когда в игре нет равновесий?

- Пусть в бескоалиционной игре n лиц
  $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$
- каждый игрок i имеет конечное число стратегий n_i.
- Для простоты представления будем считать, что $S_i = \{1, \ldots, n_i\}$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.
- Решениями бескоалиционной игры являются ситуации равновесия.
- Многие бескоалиционные игры не имеют ситуаций равновесия.
- Чтобы это исправить, нам нужно некоторым образом расширить понятие стратегии с целью получить игру, которая имела бы решение.
- Существует несколько способов сделать это.

- Наиболее известный способ расширить понятие стратегии базируется на следующих рассуждениях.

Смешанные стратегии: мотивация

- Наиболее известный способ расширить понятие стратегии базируется на следующих рассуждениях.
- Предполагается, что игра будет повторяться многократно.

- Наиболее известный способ расширить понятие стратегии базируется на следующих рассуждениях.
- Предполагается, что игра будет повторяться многократно.
- В силу допущения о разумности игроков, принятого в теории игр, нужно допустить, что

Смешанные стратегии: мотивация

- Наиболее известный способ расширить понятие стратегии базируется на следующих рассуждениях.
- Предполагается, что игра будет повторяться многократно.
- В силу допущения о разумности игроков, принятого в теории игр, нужно допустить, что
- если игрок использует свои стратегии с некоторой детерминированной закономерностью,

Смешанные стратегии: мотивация

- Наиболее известный способ расширить понятие стратегии базируется на следующих рассуждениях.
- Предполагается, что игра будет повторяться многократно.
- В силу допущения о разумности игроков, принятого в теории игр, нужно допустить, что
- если игрок использует свои стратегии с некоторой детерминированной закономерностью,
- то его оппоненты разгадают эту стратегию.

Смешанные стратегии: мотивация

- Наиболее известный способ расширить понятие стратегии базируется на следующих рассуждениях.
- Предполагается, что игра будет повторяться многократно.
- В силу допущения о разумности игроков, принятого в теории игр, нужно допустить, что
- если игрок использует свои стратегии с некоторой детерминированной закономерностью,
- то его оппоненты разгадают эту стратегию.
- Остается использовать свои стратегии случайным образом, но с определенной закономерностью,

Смешанные стратегии: мотивация

- Наиболее известный способ расширить понятие стратегии базируется на следующих рассуждениях.
- Предполагается, что игра будет повторяться многократно.
- В силу допущения о разумности игроков, принятого в теории игр, нужно допустить, что
- если игрок использует свои стратегии с некоторой детерминированной закономерностью,
- то его оппоненты разгадают эту стратегию.
- Остается использовать свои стратегии случайным образом, но с определенной закономерностью,
- поскольку иначе игра превратится в случайный процесс.

Смешанные стратегии

В дальнейшем стратегии игроков будем называть чистыми стратегиями, чтобы отличать их от смешанных стратегий, к рассмотрению которых мы приступаем.

Определение

Смешанной стратегией p_i игрока i $(i = 1, \ldots, n)$ в конечной бескоалиционной игре называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий, т. е. $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{i,n_i})$, $\sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1$, $p_{ij} \geq 0$, $j = 1, \ldots, n_i$.

- Множество смешанных стратегий S_i игрока i есть симплекс $\sum_{n_i}$.

Смешанные стратегии

В дальнейшем стратегии игроков будем называть чистыми стратегиями, чтобы отличать их от смешанных стратегий, к рассмотрению которых мы приступаем.

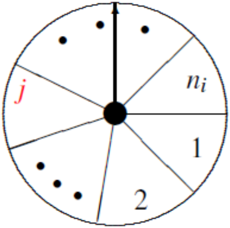
Определение

Смешанной стратегией p_i игрока i $(i = 1, \ldots, n)$ в конечной бескоалиционной игре называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий, т. е. $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{i,n_i})$, $\sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1$, $p_{ij} \geq 0$, $j = 1, \ldots, n_i$.

- Множество смешанных стратегий S_i игрока i есть симплекс $\sum_{n_i}$.
- Смешанная стратегия $e_j \in S_i$ игрока i соответствует его j-й чистой стратегии.

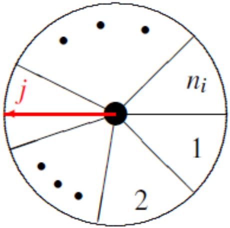
Один из способов реализации смешанных стратегий

- Свою смешанную стратегию $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{i,n_i})$ игрок i может реализовать,
- например, сделав рулетку, в которой n_i секторов,
- j-й сектор размера $p_{ij} \cdot 360^o$.
- Перед началом очередной партии игрок крутит колесо рулетки и, после того, как оно остановится,
- номер сектора j, на который указывает стрелка рулетки, опрелеляет стратегию, которую игрок применит в этой партии.



Один из способов реализации смешанных стратегий

- Свою смешанную стратегию $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{i,n_i})$ игрок i может реализовать,
- например, сделав рулетку, в которой n_i секторов,
- j-й сектор размера $p_{ij} \cdot 360^o$.
- Перед началом очередной партии игрок крутит колесо рулетки и, после того, как оно остановится,
- номер сектора j, на который указывает стрелка рулетки, опрелеляет стратегию, которую игрок применит в этой партии.



Выигрыши игроков в смешанной ситуации

- В бескоалиционной игре каждый игрок использует свои чистые стратегии независимо от всех остальных игроков,

- В бескоалиционной игре каждый игрок использует свои чистые стратегии независимо от всех остальных игроков,
- поэтому в смешанной ситуации $p = (p_1, \ldots, p_n)$ вероятность $p(s)$ появления (чистой) ситуации $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S = \prod_{j=1}^{n} S_j$

Выигрыши игроков в смешанной ситуации

- В бескоалиционной игре каждый игрок использует свои чистые стратегии независимо от всех остальных игроков,
- поэтому в смешанной ситуации $p = (p_1, \dots, p_n)$ вероятность $p(s)$ появления (чистой) ситуации $s = (s_1, \dots, s_n) \in S = \prod_{j=1}^{n} S_j$
- равна произведению вероятностей использования игроками своих чистых стратегий, т. е. $p(s) = p(s_1, \dots, s_n) = p_{1,s_1} \cdot p_{2,s_2} \cdot \ldots \cdot p_{n,s_n}$.

Выигрыши игроков в смешанной ситуации

- В бескоалиционной игре каждый игрок использует свои чистые стратегии независимо от всех остальных игроков,
- поэтому в смешанной ситуации $p = (p_1, \ldots, p_n)$ вероятность $p(s)$ появления (чистой) ситуации $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S = \prod_{j=1}^n S_j$
- равна произведению вероятностей использования игроками своих чистых стратегий, т. е. $p(s) = p(s_1, \ldots, s_n) = p_{1,s_1} \cdot p_{2,s_2} \cdot \ldots \cdot p_{n,s_n}$.
- Математическое ожидание $\phi_i(p)$ выигрыша игрока i $(i = 1, \ldots, n)$ в смешанной ситуации $p = (p_1, \ldots, p_n)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_i(p) &= \bar{\phi}_i(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{s \in S} \phi_i(s) p(s) \\ &= \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} \phi_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) p_{1,s_1} \ldots p_{n,s_n}.\end{aligned}$$

Смешанное расширение конечной бескоал. игры

Определение

- *Смешанным расширением* конечной бескоалиционной игры γ называется бескоалиционная игра

$$\gamma^* = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\bar{\phi}_i\}_{i \in N}).$$

Смешанное расширение конечной бескоал. игры

Определение

- *Смешанным расширением* конечной бескоалиционной игры γ называется бескоалиционная игра
$$\gamma^* = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\bar{\phi}_i\}_{i \in N}).$$
- *Ситуацией равновесия (Нэша) в смешанных стратегиях* игры γ называется ситуация равновесия ее смешанного расширения γ^*.

- Мы определили выигрыши игроков в смешанной ситуации равными их ожидаемым выигрышам.

Смешанные стратерии и риск

- Мы определили выигрыши игроков в смешанной ситуации равными их ожидаемым выигрышам.
- Это неявным образом предполагает, что все игроки являются нейтральными к риску.

- Мы определили выигрыши игроков в смешанной ситуации равными их ожидаемым выигрышам.
- Это неявным образом предполагает, что все игроки являются нейтральными к риску.
- Для примера рассмотрим две ситуации,
  - в первой из которых игрок может выиграть с равной вероятностью 2 или 0,

- Мы определили выигрыши игроков в смешанной ситуации равными их ожидаемым выигрышам.
- Это неявным образом предполагает, что все игроки являются нейтральными к риску.
- Для примера рассмотрим две ситуации,
  - в первой из которых игрок может выиграть с равной вероятностью 2 или 0,
  - а во второй — 1 с вероятностью 1.

Смешанные стратерии и риск

- Мы определили выигрыши игроков в смешанной ситуации равными их ожидаемым выигрышам.
- Это неявным образом предполагает, что все игроки являются нейтральными к риску.
- Для примера рассмотрим две ситуации,
  - в первой из которых игрок может выиграть с равной вероятностью 2 или 0,
  - а во второй — 1 с вероятностью 1.
- В обоих ситуациях ожидаемый выигрыш игрока равен 1.

- Мы определили выигрыши игроков в смешанной ситуации равными их ожидаемым выигрышам.
- Это неявным образом предполагает, что все игроки являются нейтральными к риску.
- Для примера рассмотрим две ситуации,
  - в первой из которых игрок может выиграть с равной вероятностью 2 или 0,
  - а во второй — 1 с вероятностью 1.
- В обоих ситуациях ожидаемый выигрыш игрока равен 1.
- Для *нейтрального к риску игрока* обе ситуации равноценны,

- Мы определили выигрыши игроков в смешанной ситуации равными их ожидаемым выигрышам.
- Это неявным образом предполагает, что все игроки являются нейтральными к риску.
- Для примера рассмотрим две ситуации,
  - в первой из которых игрок может выиграть с равной вероятностью 2 или 0,
  - а во второй — 1 с вероятностью 1.
- В обоих ситуациях ожидаемый выигрыш игрока равен 1.
- Для *нейтрального к риску игрока* обе ситуации равноценны,
- а *неприемлющий риск игрок* предпочтет вторую ситуацию первой.

Равновесие в смешанных стратегиях

Равновесие в смешанных стратегиях

- Рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$.

- Рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$.
- и ее смешанное расширение $\gamma^* = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\bar{\phi}_i\}_{i \in N})$.

Равновесие в смешанных стратегиях

- Рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$.
- и ее смешанное расширение $\gamma^* = (N, \{\bar{S}_i\}_{i \in N}, \{\bar{\phi}_i\}_{i \in N})$.
- Так как $\bar{S}_i$ есть симплекс, то $\bar{S}_i$ — выпуклое множество.

Равновесие в смешанных стратегиях

- Рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$.
- и ее смешанное расширение $\gamma^* = (N, \{\bar{S}_i\}_{i \in N}, \{\bar{\phi}_i\}_{i \in N})$.
- Так как $\bar{S}_i$ есть симплекс, то $\bar{S}_i$ — выпуклое множество.
- Каждая функция $\bar{\phi}_i$ линейна по p_i при фиксированых остальных аргументах p_{-i}.

Равновесие в смешанных стратегиях

- Рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$.
- и ее смешанное расширение $\gamma^* = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\bar{\phi}_i\}_{i \in N})$.
- Так как S_i есть симплекс, то S_i — выпуклое множество.
- Каждая функция $\bar{\phi}_i$ линейна по p_i при фиксированых остальных аргументах p_{-i}.
- Поэтому γ^* — выпуклая игра, которая имеет ситуацию равновесия.

Теорема (Нэша)

Каждая конечная бескоалиционная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Является ли смешанная ситуация равновесием

Теорема

Чтобы смешанная ситуация $p \in S = S_1 \times \cdots \times S_n$ была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях в конечной бескоалиционной игре $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\bar{\phi}_i(p) \geq \bar{\phi}_i(e_j, p_{-i}), \quad e_j \in \sum\nolimits_{n_i}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Является ли смешанная ситуация равновесием

Теорема

Чтобы смешанная ситуация $p \in S = S_1 \times \cdots \times S_n$ была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях в конечной бескоалиционной игре $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\bar{\phi}_i(p) \geq \bar{\phi}_i(e_j, p_{-i}), \quad e_j \in \sum\nolimits_{n_i}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Эта теорема утверждает, что

ситуация является равновесием в смешанных стратегиях, если ни одному игроку в отдельности не выгодно переходить от своей смешанной стратегии к какой-либо чистой стратегии.