

100 个著名初等数学问题

第 01 题 阿基米德分牛问题 Archimedes' Problema Bovinum

太阳神有一牛群，由白、黑、花、棕四种颜色的公、母牛组成。

在公牛中，白牛数多于棕牛数，多出之数相当于黑牛数的 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ；黑牛数多于棕牛数，多出之数相当于花牛数的 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ ；花牛数多于棕牛数，多出之数相当于白牛数的 $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ 。

在母牛中，白牛数是全体黑牛数的 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ；黑牛数是全体花牛数 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ ；花牛数是全体棕牛数的 $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ ；棕牛数是全体白牛数的 $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ 。

问这牛群是怎样组成的？

第 02 题 德·梅齐里亚克的砝码问题 The Weight Problem of Bachet de Meziriac

一位商人有一个 40 磅的砝码，由于跌落在地而碎成 4 块。后来，称得每块碎片的重量都是整磅数，而且可以用这 4 块来称从 1 至 40 磅之间的任意整数磅的重物。

问这 4 块砝码碎片各重多少？

第 03 题 牛顿的草地与母牛问题 Newton's Problem of the Fields and Cows

a 头母牛将 b 块地上的牧草在 c 天内吃完了；

a' 头母牛将 b' 块地上的牧草在 c' 天内吃完了；

a'' 头母牛将 b'' 块地上的牧草在 c'' 天内吃完了；

求出从 a 到 c'' 9 个数量之间的关系？

第 04 题 贝韦克的七个 7 的问题 Berwick's Problem of the Seven Sevens

在下面除法例题中，被除数被除数除尽：

```

* * 7 * * * * * ÷ * * * * 7 * = * * 7 * *
* * * * *
* * * * * 7 *
* * * * *
    * 7 * * * *
    * 7 * * * *
    * * * * *
    * * * * 7 *
    * * * * *
    * * * * *
```

用星号 (*) 标出的那些数位上的数字偶然被擦掉了，那些不见了的是些什么数字呢？

第 05 题 柯克曼的女学生问题 Kirkman's Schoolgirl Problem

某寄宿学校有十五名女生，她们经常每天三人一行地散步，问要怎样安排才能使每个女生同其他每个女生同一行中散步，并恰好每周一次？

第 06 题 伯努利-欧拉关于装错信封的问题

The Bernoulli-Euler Problem of the Misaddressed letters

求 n 个元素的排列，要求在排列中没有元素处于它应当占有的位置。

第 07 题 欧拉关于多边形的剖分问题 Euler's Problem of Polygon Division

可以有多少种方法用对角线把一个 n 边多边形（平面凸多边形）剖分成三角形？

第 08 题 鲁卡斯的配偶夫妇问题 Lucas' Problem of the Married Couples

n 对夫妇围圆桌而坐，其座次是两个妇人之间坐一个男人，而没有一个男人和自己的妻子并坐，问有多少种坐法？

第 09 题 卡亚姆的二项展开式 Omar Khayyam's Binomial Expansion

当 n 是任意正整数时，求以 a 和 b 的幂表示的二项式 $a+b$ 的 n 次幂.

第 10 题 柯西的平均值定理 Cauchy's Mean Theorem

求证 n 个正数的几何平均值不大于这些数的算术平均值.

第 11 题 伯努利幂之和的问题 Bernoulli's Power Sum Problem

确定指数 p 为正整数时最初 n 个自然数的 p 次幂的和 $S=1^p+2^p+3^p+\dots+np$.

第 12 题 欧拉数 The Euler Number

求函数 $\varphi(x)=(1+1/x)^x$ 及 $\Phi(x)=(1+1/x)^{x+1}$ 当 x 无限增大时的极限值.

第 13 题 牛顿指数级数 Newton's Exponential Series

将指数函数 e^x 变换成各项为 x 的幂的级数.

第 14 题 麦凯特尔对数级数 Nicolaus Mercator's Logarithmic Series

不用对数表，计算一个给定数的对数.

第 15 题 牛顿正弦及余弦级数 Newton's Sine and Cosine Series

不用查表计算已知角的正弦及余弦三角函数.

第 16 题 正割与正切级数的安德烈推导法

Andre's Derivation of the Secant and Tangent Series

在 n 个数 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个排列 c_1, c_2, \dots, c_n 中，如果没有一个元素 c_i 的值介于两个邻近的值 c_{i-1} 和 c_{i+1} 之间，则称 c_1, c_2, \dots, c_n 为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个屈折排列.

试利用屈折排列推导正割与正切的级数.

第 17 题 格雷戈里的反正切级数 Gregory's Arc Tangent Series

已知三条边，不用查表求三角形的各角.

第 18 题 德布封的针问题 Buffon's Needle Problem

在台面上画出一组间距为 d 的平行线，把长度为 l （小于 d ）的一根针任意投掷在台面上，问针触及两平行线之一的概率如何？

第 19 题 费马-欧拉素数定理 The Fermat-Euler Prime Number Theorem

每个可表示为 $4n+1$ 形式的素数，只能用一种两数平方和的形式来表示.

第 20 题 费马方程 The Fermat Equation

求方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 的整数解，其中 d 为非二次正整数.

第 21 题 费马-高斯不可能性定理 The Fermat-Gauss Impossibility Theorem

证明两个立方数的和不可能为一立方数.

第 22 题 二次互反律 The Quadratic Reciprocity Law

(欧拉-勒让德-高斯定理) 奇素数 p 与 q 的勒让德互反符号取决于公式
 $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{[(p-1)/2] \cdot [(q-1)/2]}.$

第 23 题 高斯的代数基本定理 Gauss' Fundamental Theorem of Algebra

每一个 n 次的方程 $z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n = 0$ 具有 n 个根.

第 24 题 斯图谟的根的个数问题 Sturm's Problem of the Number of Roots

求实系数代数方程在已知区间上的实根的个数.

第 25 题 阿贝尔不可能性定理 Abel's Impossibility Theorem

高于四次的方程一般不可能有代数解法.

第 26 题 赫米特-林德曼超越性定理 The Hermite-Lindemann Transcendence Theorem

系数 A 不等于零，指数 α 为互不相等的代数数的表达式 $A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + A_3 e^{\alpha_3} + \dots$ 不可能等于零.

第 27 题 欧拉直线 Euler's Straight Line

在所有三角形中，外接圆的圆心，各中线的交点和各高的交点在一直线——欧拉线上，而且三点的分隔为：各高线的交点（垂心）至各中线的交点（重心）的距离两倍于外接圆的圆心至各中线的交点的距离.

第 28 题 费尔巴哈圆 The Feuerbach Circle

三角形中三边的三个中点、三个高的垂足和高的交点到各顶点的线段的三个中点在一个圆上.

第 29 题 卡斯蒂朗问题 Castillon's Problem

将各边通过三个已知点的一个三角形内接于一个已知圆.

第 30 题 马尔法蒂问题 Malfatti's Problem

在一个已知三角形内画三个圆，每个圆与其他两个圆以及三角形的两边相切.

第 31 题 蒙日问题 Monge's Problem

画一个圆，使其与三已知圆正交.

第 32 题 阿波洛尼斯相切问题 The Tangency Problem of Apollonius.

画一个与三个已知圆相切的圆.

第 33 题 马索若尼圆规问题 Macheroni's Compass Problem.

证明任何可用圆规和直尺所作的图均可只用圆规作出.

第 34 题 斯坦纳直尺问题 Steiner's Straight-edge Problem

证明任何一个可以用圆规和直尺作出的图, 如果在平面内给出一个定圆, 只用直尺便可作出.

第 35 题 德里安倍立方问题 The Deliaii Cube-doubling Problem

画出体积为一已知立方体两倍的立方体的一边.

第 36 题 三等分一个角 Trisection of an Angle

把一个角分成三个相等的角.

第 37 题 正十七边形 The Regular Heptadecagon

画一正十七边形.

第 38 题 阿基米德 π 值确定法 Archimedes' Determination of the Number Pi

设圆的外切和内接正 2^n 边形的周长分别为 a_n 和 b_n , 便依次得到多边形周长的阿基米德数列: $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ 其中 a_{n+1} 是 a_n, b_n 的调和中项, b_{n+1} 是 b_n, a_{n+1} 的等比中项. 假如已知初始两项, 利用这个规则便能计算出数列的所有项. 这个方法叫作阿基米德算法.

第 39 题 富斯弦切四边形问题 Fuss' Problem of the Chord-Tangent Quadrilateral

找出半径与双心四边形的外接圆和内切圆连心线之间的关系. (注: 一个双心或弦切四边形的定义是既内接于一个圆而同时又外切于另一个圆的四边形)

第 40 题 测量附题 Annex to a Survey

利用已知点的方位来确定地球表面未知但可到达的点的位置.

第 41 题 阿尔哈森弹子问题 Alhazen's Billiard Problem

在一个已知圆内, 作出一个其两腰通过圆内两个已知点的等腰三角形.

第 42 题 由共轭半径作椭圆 An Ellipse from Conjugate Radii

已知两个共轭半径的大小和位置, 作椭圆.

第 43 题 在平行四边形内作椭圆 An Ellipse in a Parallelogram,

在规定的平行四边形内作一内切椭圆, 它与该平行四边形切于一边界点.

第 44 题 由四条切线作抛物线 A Parabola from Four Tangents

已知抛物线的四条切线, 作抛物线.

第 45 题 由四点作抛物线 A Parabola from Four Points.

过四个已知点作抛物线.

第 46 题 由四点作双曲线 A Hyperbola from Four Points.

已知直角（等轴）双曲线上四点，作出这条双曲线。

第 47 题 范·施古登轨迹题 Van Schooten's Locus Problem

平面上的固定三角形的两个顶点沿平面上一个角的两个边滑动，第三个顶点的轨迹是什么？

第 48 题 卡丹旋轮问题 Cardan's Spur Wheel Problem.

一个圆盘沿着半径为其两倍的另一个圆盘的内缘滚动时，这个圆盘上标定的一点所描出的轨迹是什么？

第 49 题 牛顿椭圆问题 Newton's Ellipse Problem.

确定内切于一个已知（凸）四边形的所有椭圆的中心的轨迹。

第 50 题 彭赛列-布里昂匈双曲线问题 The Poncelet-Brianchon Hyperbola Problem

确定内接于直角（等边）双曲线的所有三角形的顶垂线交点的轨迹。

第 51 题 作为包络的抛物线 A Parabola as Envelope

从角的顶点，在角的一条边上连续 n 次截取任意线段 e ，在另一条边上连续 n 次截取线段 f ，并将线段的端点注以数字，从顶点开始，分别为 $0, 1, 2, \dots, n$ 和 $n, n-1, \dots, 2, 1, 0$ 。

求证具有相同数字的点的连线的包络为一条抛物线。

第 52 题 星形线 The Astroid

直线上两个标定的点沿着两条固定的互相垂直的轴滑动，求这条直线的包络。

第 53 题 斯坦纳的三点内摆线 Steiner's Three-pointed Hypocycloid

确定一个三角形的华莱士（Wallace）线的包络。

第 54 题 一个四边形的最接近圆的外接椭圆

The Most Nearly Circular Ellipse Circumscribing a Quadrilateral

一个已知四边形的所有外接椭圆中，哪一个与圆的偏差最小？

第 55 题 圆锥曲线的曲率 The Curvature of Conic Sections

确定一个圆锥曲线的曲率。

第 56 题 阿基米德对抛物线面积的推算 Archimedes' Squaring of a Parabola

确定包含在抛物线内的面积。

第 57 题 推算双曲线的面积 Squaring a Hyperbola

确定双曲线被截得的部分所含的面积。

第 58 题 求抛物线的长 Rectification of a Parabola

确定抛物线弧的长度.

第 59 题 笛沙格同调定理 (同调三角形定理)

Desargues' Homology Theorem (Theorem of Homologous Triangles)

如果两个三角形的对应顶点连线通过一点, 则这两个三角形的对应边交点位于一条直线上.

反之, 如果两个三角形的对应边交点位于一条直线上, 则这两个三角形的对应顶点连线通过一点.

第 60 题 斯坦纳的二重元素作图法 Steiner's Double Element Construction

由三对对应元素所给定的重迭射影形, 作出它的二重元素.

第 61 题 帕斯卡六边形定理 Pascal's Hexagon Theorem

求证内接于圆锥曲线的六边形中, 三双对边的交点在一直线上.

第 62 题 布里昂匈六线形定理 Brianchon's Hexagram Theorem

求证外切于圆锥曲线的六线形中, 三条对顶线通过一点.

第 63 题 笛沙格对合定理 Desargues' Involution Theorem

一条直线与一个完全四点形*的三双对边的交点与外接于该四点形的圆锥曲线构成一个对合的四个点偶. 一个点与一个完全四线形*的三双对顶点的连线和从该点向内切于该四线形的圆锥曲线所引的切线构成一个对合的四个射线偶.

*一个完全四点形 (四线形) 实际上含有四点 (线) 1, 2, 3, 4 和它们的六条连线交点 23, 14, 31, 24, 12, 34; 其中 23 与 14、31 与 24、12 与 34 称为对边 (对顶点).

第 64 题 由五个元素得到的圆锥曲线 A Conic Section from Five Elements

求作一个圆锥曲线, 它的五个元素——点和切线——是已知的.

第 65 题 一条圆锥曲线和一条直线 A Conic Section and a Straight Line

一条已知直线与一条具有五个已知元素——点和切线——的圆锥曲线相交, 求作它们的交点.

第 66 题 一条圆锥曲线和一定点 A Conic Section and a Point

已知一点及一条具有五个已知元素——点和切线——的圆锥曲线, 作出从该点列到该曲线的切线.

第 67 题 斯坦纳的用平面分割空间 Steiner's Division of Space by Planes

n 个平面最多可将整个空间分割成多少份?

第 68 题 欧拉四面体问题 Euler's Tetrahedron Problem

以六条棱表示四面体的体积.

第 69 题 偏斜直线之间的最短距离 The Shortest Distance Between Skew Lines

计算两条已知偏斜直线之间的角和距离.

第 70 题 四面体的外接球 The Sphere Circumscribing a Tetrahedron

确定一个已知所有六条棱的四面体的外接球的半径.

第 71 题 五种正则体 The Five Regular Solids

将一个球面分成全等的球面正多边形.

第 72 题 正方形作为四边形的一个映象 The Square as an Image of a Quadrilateral

证明每个四边形都可以看作是一个正方形的透视映象.

第 73 题 波尔凯-许瓦尔兹定理 The Pohlke-Schwartz Theorem

一个平面上不全在同一条直线上的四个任意点, 可认为是与一个已知四面体相似的四面体的各隅角的斜映射.

第 74 题 高斯轴测法基本定理 Gauss' Fundamental Theorem of Axonometry

正轴测法的高斯基本定理: 如果在一个三面角的正投影中, 把映象平面作为复平面, 三面角顶点的投影作为零点, 边的各端点的投影作为平面的复数, 那么这些数的平方和等于零.

第 75 题 希帕查斯球极平面射影 Hipparchus' Stereographic Projection

试举出一种把地球上的圆转换为地图上圆的保形地图射影法.

第 76 题 麦卡托投影 The Mercator Projection

画一个保形地理地图, 其坐标方格是由直角方格组成的.

第 77 题 航海斜驶线问题 The Problem of the Loxodrome

确定地球表面两点间斜驶线的经度.

第 78 题 海上船位置的确定 Determining the Position of a Ship at Sea

利用天文经线推算法确定船在海上的位置.

第 79 题 高斯双高度问题 Gauss' Two-Altitude Problem

根据已知两星球的高度以确定时间及位置.

第 80 题 高斯三高度问题 Gauss' Three-Altitude Problem

从在已知三星球获得同高度瞬间的时间间隔, 确定观察瞬间, 观察点的纬度及星球的高度.

第 81 题 刻卜勒方程 The Kepler Equation

根据行星的平均近点角, 计算偏心及真近点角.

第 82 题 星落 Star Setting

对给定地点和日期，计算一已知星落的时间和方位角.

第 83 题 日晷问题 The Problem of the Sundial

制作一个日晷.

第 84 题 日影曲线 The Shadow Curve

当直杆置于纬度 φ 的地点及该日太阳的赤纬有 δ 值时，确定在一天过程中由杆的一点投影所描绘的曲线.

第 85 题 日食和月食 Solar and Lunar Eclipses

如果对于充分接近日食时间的两个瞬间太阳和月亮的赤经、赤纬以及其半径均为已知，确定日食的开始和结束，以及太阳表面被隐蔽部分的最大值.

第 86 题 恒星及会合运转周期 Sidereal and Synodic Revolution Periods

确定已知恒星运转周期的两共面旋转射线的会合运转周期.

第 87 题 行星的顺向和逆向运动 Progressive and Retrograde Motion of Planets

行星什么时候从顺向转为逆向运动（或反过来，从逆向转为顺向运动）？

第 88 题 兰伯特彗星问题 Lambert's Comet Problem

借助焦半径及连接弧端点的弦，来表示彗星描绘抛物线轨道的一段弧所需的时间.

第 89 题 与欧拉数有关的斯坦纳问题 Steiner's Problem Concerning the Euler Number

如果 x 为正变数， x 取何值时， x 的 x 次方根为最大？

第 90 题 法格乃诺关于高的基点的问题 Fagnano's Altitude Base Point Problem

在已知锐角三角形中，作周长最小的内接三角形.

第 91 题 费马对托里拆利提出的问题 Fermat's Problem for Torricelli

试求一点，使它到已知三角形的三个顶点距离之和为最小.

第 92 题 逆风变换航向 Tacking Under a Headwind

帆船如何能顶着北风以最快的速度向正北航行？

第 93 题 蜂巢（雷阿乌姆尔问题）The Honeybee Cell (Problem by Reaumur)

试采用由三个全等的菱形作成的顶盖来封闭一个正六棱柱，使所得的这一个立体有预定的容积，而其表面积为最小.

第 94 题 雷奇奥莫塔努斯的极大值问题 Regiomontanus' Maximum Problem

在地球表面的什么部位，一根垂直的悬杆呈现最长？（即在什么部位，可见角为最大？）

第 95 题 金星的最大亮度 The Maximum Brightness of Venus

在什么位置金星有最大亮度？

第 96 题 地球轨道内的彗星 A Comet Inside the Earth's Orbit

彗星在地球的轨道内最多能停留多少天？

第 97 题 最短晨昏蒙影问题 The Problem of the Shortest Twilight

在已知纬度的地方，一年之中的哪一天晨昏蒙影最短？

第 98 题 斯坦纳的椭圆问题 Steiner's Ellipse Problem

在所有能外接（内切）于一个已知三角形的椭圆中，哪一个椭圆有最小（最大）的面积？

第 99 题 斯坦纳的圆问题 Steiner's Circle Problem

在所有等周的（即有相等周长的）平面图形中，圆有最大的面积.

反之：在有相等面积的所有平面图形中，圆有最小的周长.

第 100 题 斯坦纳的球问题 Steiner's Sphere Problem

在表面积相等的所有立体中，球具有最大体积.

在体积相等的所有立体中，球具有最小的表面.