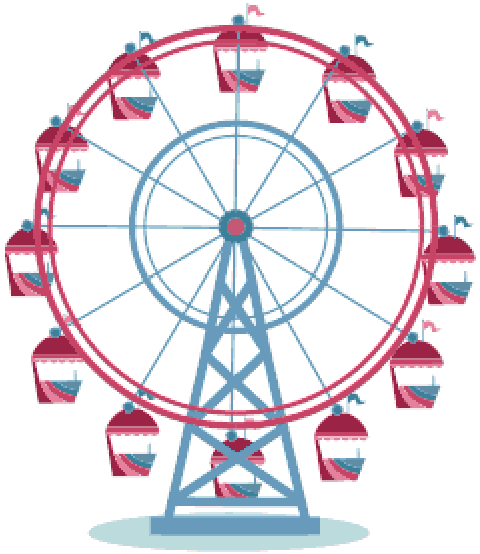
Facultad de Ingeniería
Ingeniería en Informática
Cátedra de Física General

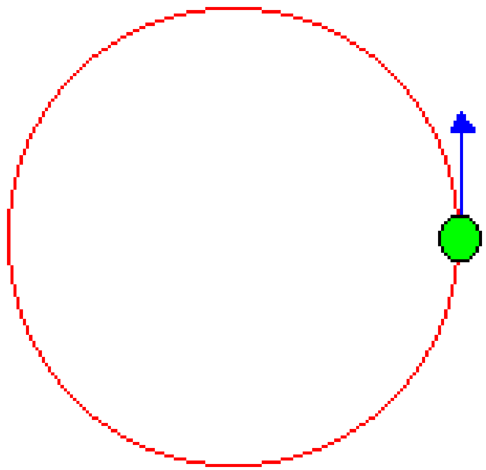
# Movimiento Circular

Prof. Dra. Ruth Leiton – Prof. Ma

Ocurre cuando el cuerpo que se mueve describe una circunferencia o un arco de ella.

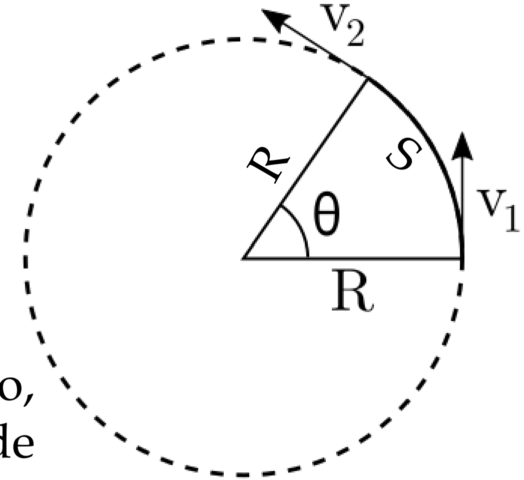


La velocidad, tangente a la curva punto a punto, debe cambar su dirección constantemente para que la trayectoria sea una curva.



Acelerar es cambiar le velocidad; es decir, alguno de los tres elementos que componen el vector velocidad (módulo, dirección y sentido) debe cambiar para que exista aceleración, Como la velocidad está obligada a cambiar de dirección y sentido punto a punto, el movimiento circular (y en general todo movimiento de trayectoria curva), tiene aceleración.

**El movimiento circular es acelerado**




## Elementos del movimiento circular

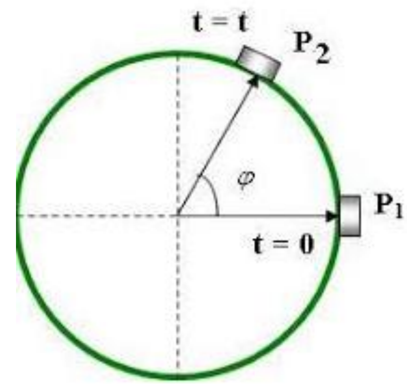
1. Al ser la trayectoria una circunferencia, o un arco de ella, la posición que ocupa el objeto que se mueve, se define en función del ángulo central barrido por éste a medida que cambia de posición.

Para medir el ángulo central barrido, θ, se utiliza el sistema circular de medición de ángulos

$$\theta = \frac{longitud\ de\ arco\ entre\ dos\ posiciones}{radio\ de\ la\ circunferencia} = \frac{s}{R}$$

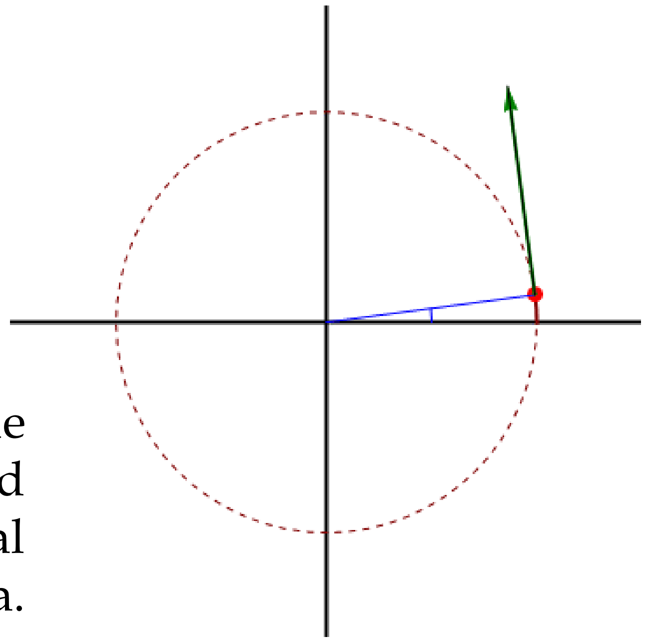
Ejemplo: Longitud del arco = 16 cm ; radio = 8 cm

Ángulo central barrido, ϕ, entre $P_1$ y P2 = $\frac{s}{R} = \frac{16\ cm}{8\ cm} = 2$ radianes




Note que el radián <u>NO ES UNA UNIDAD</u>. Al realizar el cociente arco sobre radio, el resultado <u>no tiene unidades</u>. Como un ángulo no puede ser igual a un número, se le agrega la "palabra" radián para indicar que se está utilizando el sistema circular de medición de ángulos.

## Equivalencia entre sistemas de medición angular



Si observa la animación, la partícula que gira, describe una circunferencia completa, abriendo un ángulo central de 360°.

Cuando esto sucede, cuando el ángulo central θ es de 360°, la partícula volvió a la posición inicial y la longitud de su trayectoria, es decir, el arco descripto, es igual al perímetro de la circunferencia.

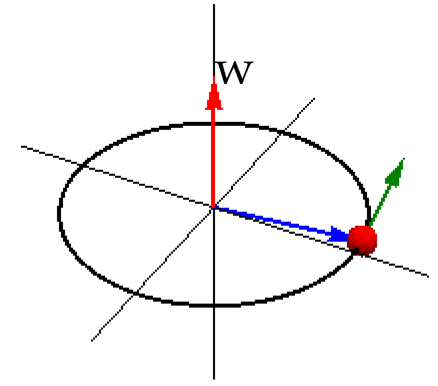
$$S = 2\,\pi\,r$$

En el sistema circular de medición de ángulos, será: $\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes

Entonces: 360° = 2π radianes = 1 vuelta completa

## Elementos del movimiento circular

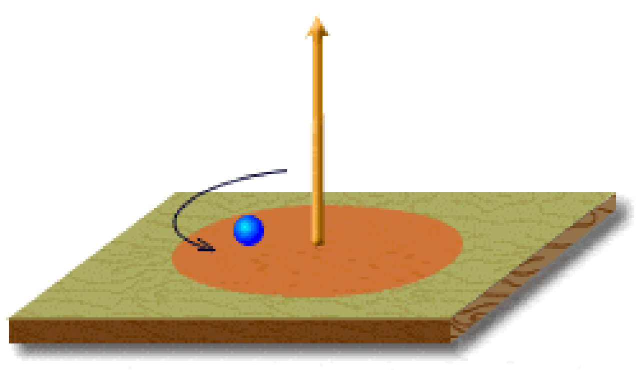
2. Velocidad angular w

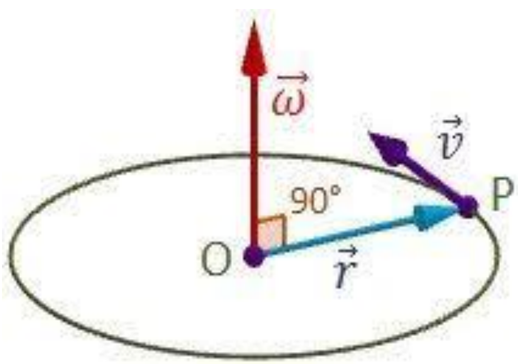



Se define la velocidad angular w como la evolución de la posición angular en el tiempo.

$$w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{radianes}{segundos} \qquad w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\,\pi}{T}$$

La velocidad angular w, es un vector perpendicular al plano de giro y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha o del tornillo de rosca derecha.



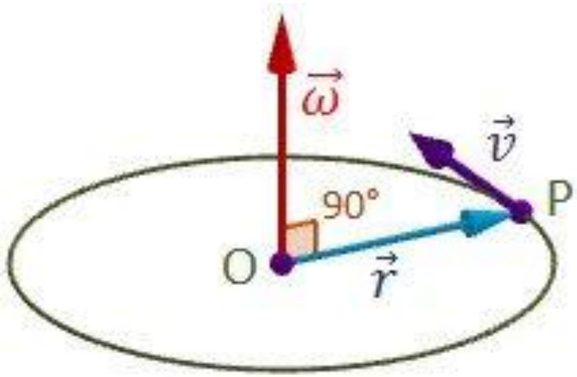



Como v es tangente a la curva punto a punto, resulta perpendicular al vector posición r y a w

$$v \perp r; \;\; v \perp w$$

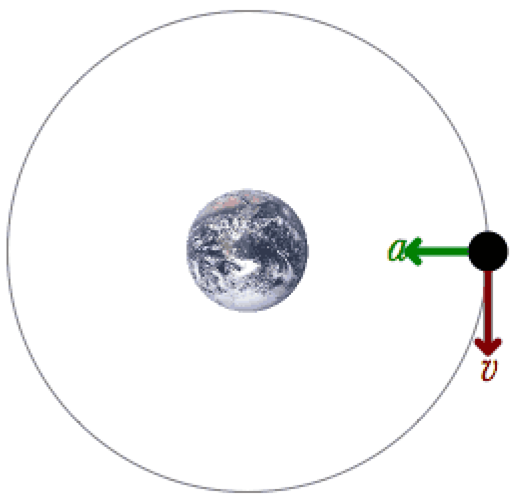
## 3. Relación entre velocidad tangencial y velocidad angular

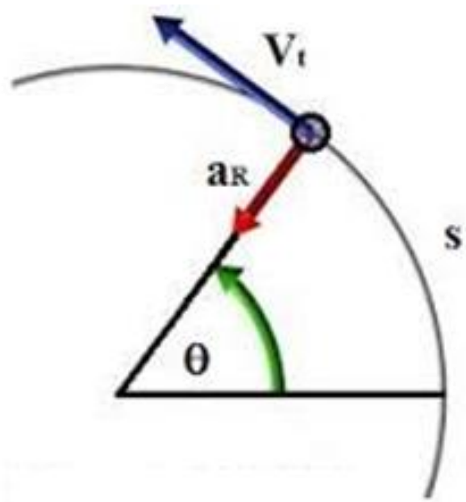
La velocidad tangencial es un vector, que resulta del producto vectorial entre el vector velocidad angular (ω) y el vector posición ($r$) .




$$v = w\, r\, sen\, 90° \Rightarrow v = w\, r$$

El valor de v es directamente proporcional al radio de giro y al valor de w

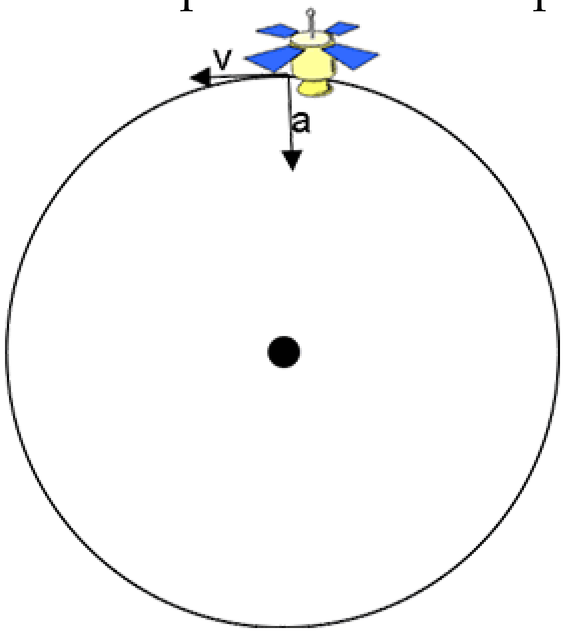


## Elementos del movimiento circular

### 4. Aceleración centrípeta

La segunda ley de Newton afirma que la resultante de las fuerzas *F* que actúan sobre un cuerpo de masa *m* le provoca una aceleración en su misma dirección y **sentido.**




F =m a

La aceleración centrípeta, ac, es la que provoca el cambio en la dirección de la velocidad v (tangente a la curva punto a punto) y está SIEMPRE dirigida hacia la concavidad de la curva. En el caso de un movimiento circular, la ac tiene la dirección del radio y resulta entonces perpendicular a v .

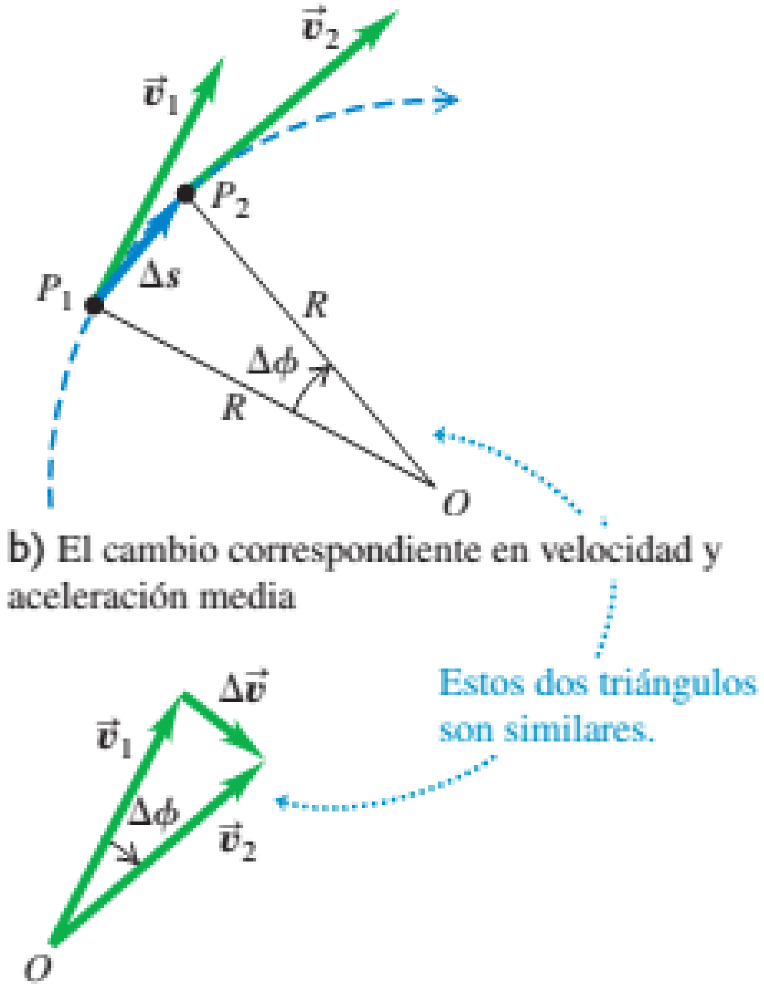
En un movimiento de trayectoria curva, el **cambio en la dirección de V** es producido por la aceleración centrípeta, ac que apunta hacia la concavidad de la curva.

Por la segunda Ley de Newton, es Fc = m $a_c$

$$ac = \frac{v^2}{r}$$

## Deducción

a) Un punto se mueve una distancia $\Delta s$ a rapidez constante en una trayectoria circular




$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{o} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

$$a_{med} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\boxed{a_{rad} = \frac{v^2}{R}}$$

## 5. La fuerza centrípeta

Es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que está girando.

Dirigida siempre hacia la concavidad de la curva.

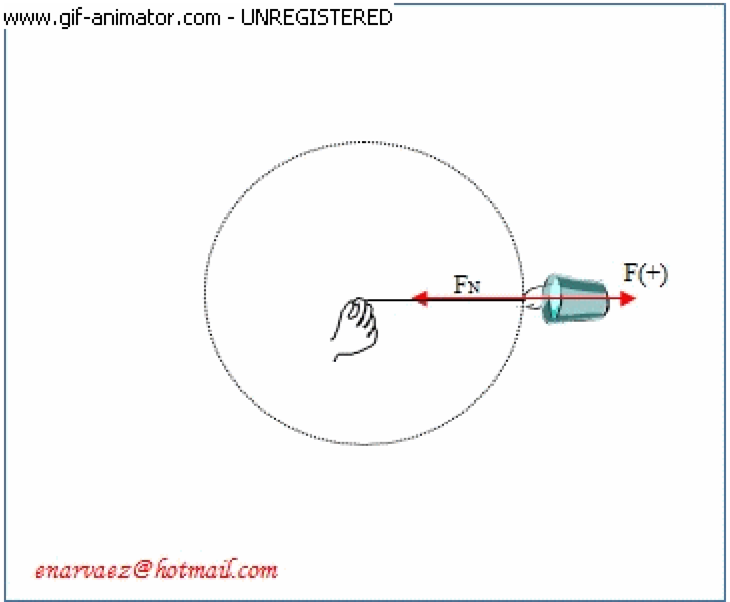
En el MC la Fc está dirigida sobre el radio hacia el centro de la circunferencia.


Por la Segunda Ley de Newton se tiene: F = m a

Si se aplica esa Ley al movimiento circular, tenemos que: Fc = m ac

Y como $ac = \frac{v^2}{r}$

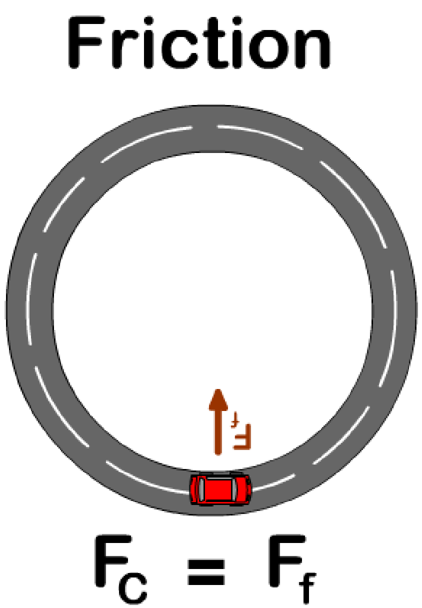
$$Fc = m\,\frac{v^2}{r}$$

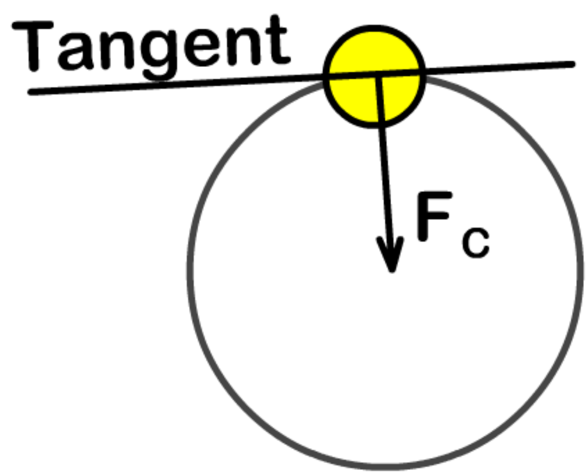


## 5. La fuerza centrípeta

Resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en rotación. Si por alguna razón la Fc dejara de actuar, se cumpliría el principio de inercia y el cuerpo seguiría una trayectoria recta, tangente a la curva en el punto donde Fc ya no actúa.

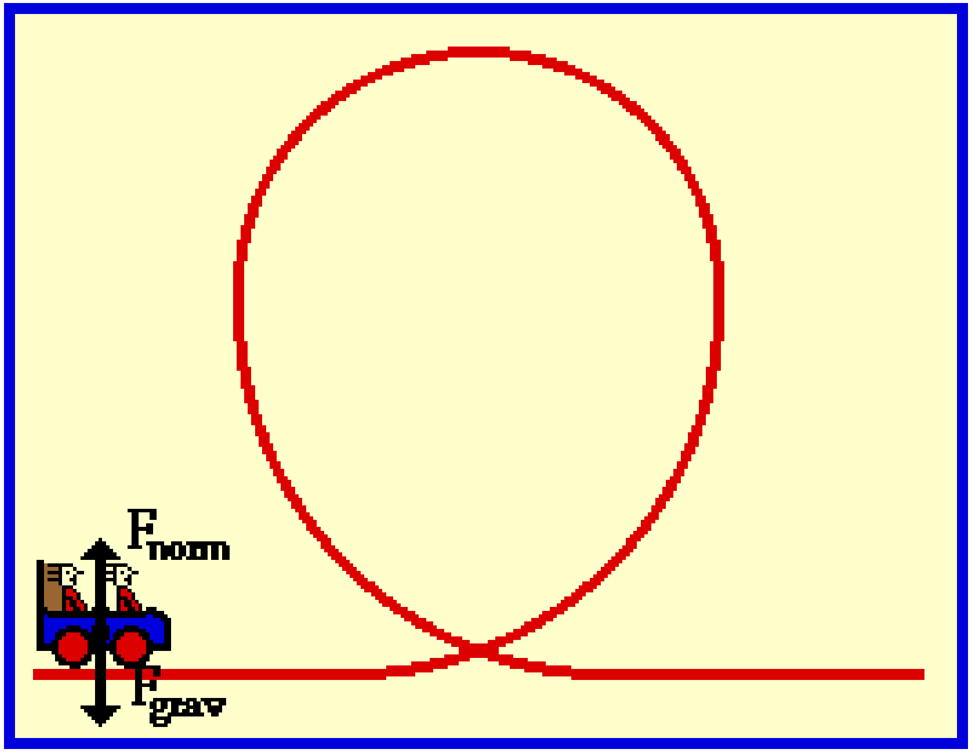
$$F_c = \frac{m v^2}{r}$$




Motion With Centripetal Force

## 5. La fuerza centrípeta



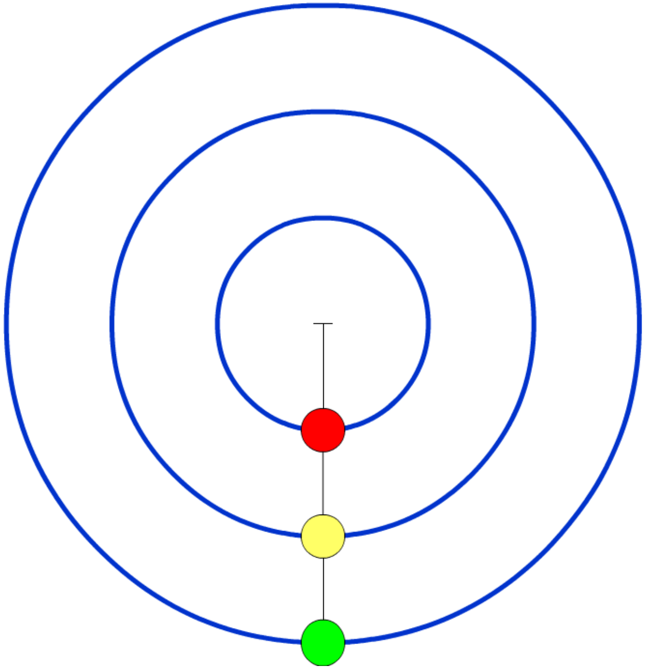
## Movimiento Circular Uniforme M.C.U

1. El vector w permanece constante.
Se describen iguales ángulos centrales en iguales tiempos.
2. El módulo de la velocidad tangencial permanece constante
3. El valor de la aceleración centrípeta permanece constante.
4. El valor de la fuerza centrípeta permanece constante.
5. Se llama periodo (T) al tiempo que tarda el objeto que gira en dar una vuelta entera.

$$\vec{w} = \text{constante};\ v = \text{constante};\ ac = \frac{v^2}{r} = \text{constante};\ Fc = m\ ac = \text{constante}$$

$$\left.\begin{array}{l} w = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{T} \\ \\ v = w\,r \end{array}\right\} \quad V = \frac{2\pi r}{T}$$

Greater the Radius



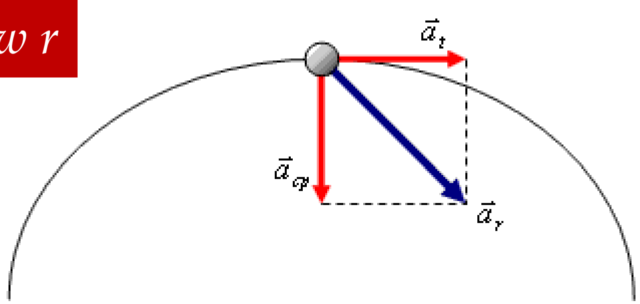
## Movimiento Circular Uniforme M.C.U.V

1. El vector w permanece constante en dirección y sentido pero no en módulo.
2. Aparece una aceleración angular, α, en la misma línea en la que se encuentra w. Su sentido es el mismo que w si w aumenta de valor y contrario a w si w disminuye su valor.
2. El módulo de la velocidad tangencial no permanece constante
3. El valor de la aceleración centrípeta no permanece constante.
4. El valor de la fuerza centrípeta no permanece constante.

Si el valor de w aumenta o disminuye, aumenta o disminuyeel valor de v, ya que $v = w\, r$

Si el valor de v cambia, sobre la línea en la que se encuentra v (tangente a la curva punto a punto) aparece una aceleración tangencial que es la que permite el aumento o disminución en el valor de v.

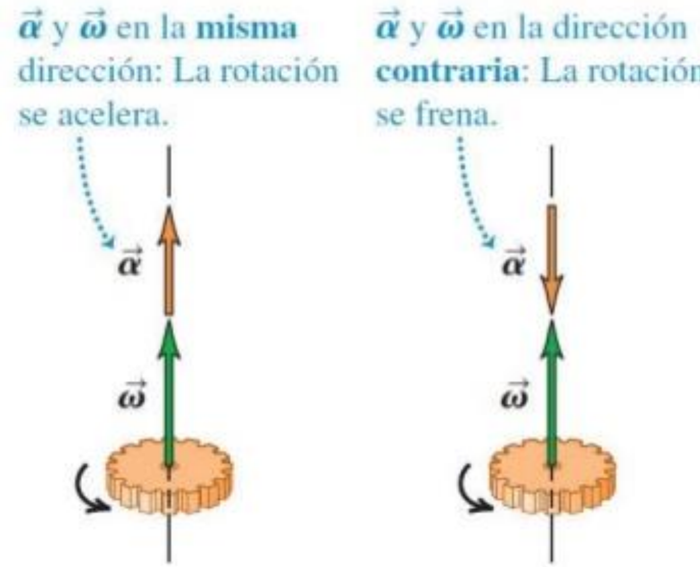
La $a_t$ tendrá igual sentido que v si ésta aumenta su módulo y contrario a v, si ésta disminuye su módulo.




$$a_T = \sqrt{{a_c}^2 + {a_t}^2}$$

## Movimiento Circular Uniforme M.C.U.V

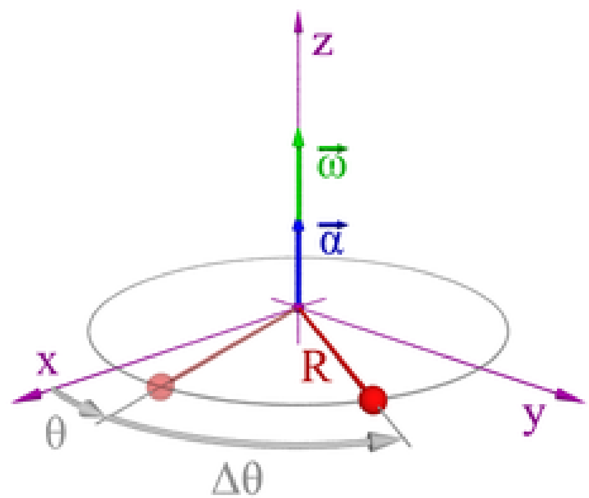
La aceleración angular




$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{rad}{s^2}$$

$$\alpha = \frac{dw}{dt}$$

$$at = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,(w\,r)}{dt} = \frac{r\,dw}{dt} = r\,\alpha$$



## Ecuaciones del MCUV a partir del MRUV

| Relaciones | Angulares | Horizontales |
|---|---|---|
| Posición | $\theta$ | $x$ |
| Velocidad | $\omega$ | $v$ |
| Aceleración | $\alpha$ | $a$ |
| Ecuación de Movimiento | $\omega = \omega_i + \alpha t$ | $v = v_i + at$ |
| Ecuación de Itinerario | $\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ | $d = v_i t + \frac{1}{2}at^2$ |
| Ecuación de Velocidad-Desplazamiento | $\omega^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\Delta\theta$ | $v^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$ |

## Curvas planas y peraltadas

Un automóvil de 1500 kg, se traslada sobre una curva, plana horizontal como se muestra en la figura a. Si el radio de la curva es 35 m y el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento seco es 0,52. Encuentre la rapidez máxima que alcanza el automóvil y aún así da la vuelta exitosamente.


a) b)

Solución:

Considere que la autopista curva es parte de un gran círculo, de modo que el automóvil se traslada en una trayectoria circular.

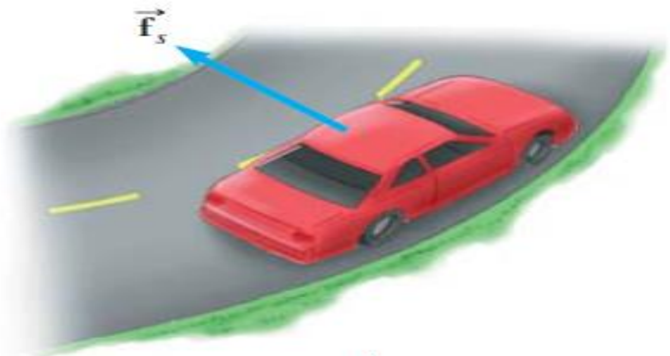
La fuerza que le permite al automóvil permanecer en su trayectoria circular es la fuerza de fricción estática. (Es estática porque no ocurre deslizamiento en el punto de contacto entre camino y llantas.

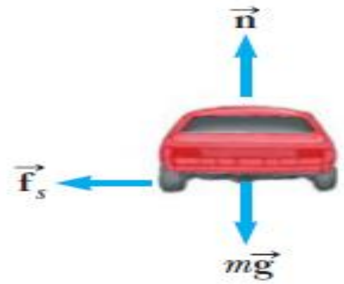
Si esta fuerza de fricción estática fuera cero (por ejemplo, si el automóvil estuviese sobre un camino congelado) el automóvil continuaría en una línea recta y se deslizaría hasta salir del camino.

La rapidez máxima $v_{máx}$ que puede tener el automóvil alrededor de la curva es la rapidez a la que está a punto de derrapar hacia afuera.

En este punto, la fuerza de fricción tiene su valor máximo $fs_{máx} = \mu_s.N$

Aplicamos la segunda ley de Newton a la fuerza de fricción en la dirección radial para la condición de rapidez máxima.




$$1)\quad f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = m\frac{v_{\text{máx}}^2}{r}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al automóvil en la dirección vertical:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad n - mg = 0 \quad \rightarrow \quad n = mg$$

Resuelva la ecuación 1) para la rapidez máxima y sustituya para n:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\mu_s n r}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s m g r}{m}} = \sqrt{\mu_s g r}$$

$$= \sqrt{(0.523)(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})} = 13.4\ \text{m/s}$$

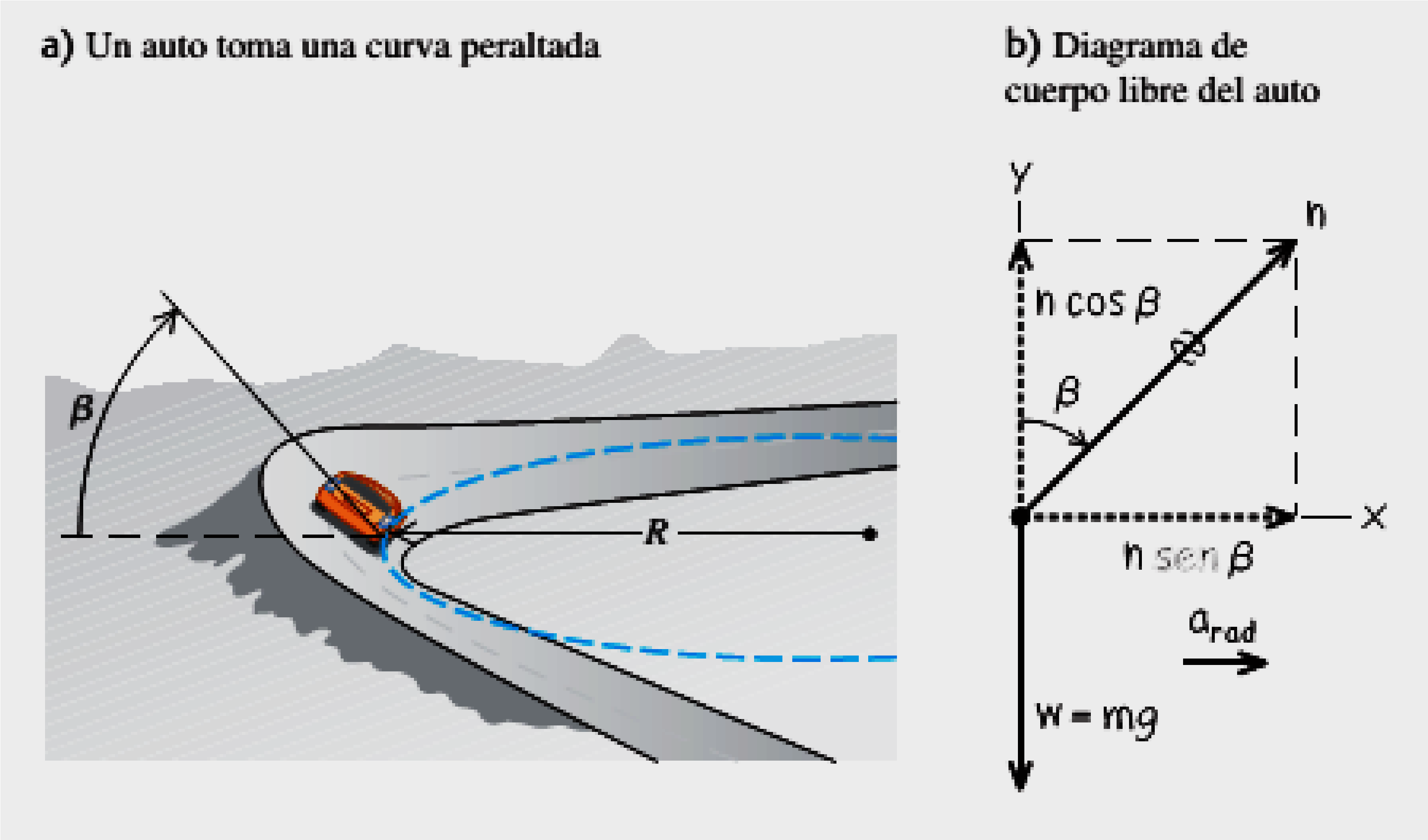
Advierta que la rapidez máxima no depende de la masa del automóvil, razón por la cual las autopistas curvas no requieren múltiples límites de rapidez para cubrir las varias masas de los vehículos que usan el camino.

¿Qué pasaría si?

Suponga que un automóvil viaja por esta curva en un día húmedo y comienza a derrapar en la curva cuando su rapidez llega sólo a 8 m/s. ¿Qué se puede decir acerca del coeficiente de fricción estática en este caso?

Respuesta: El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el camino húmedo debe ser menor que el existente entre las llantas y un camino seco. Esta expectativa concuerda con la experiencia de conducir, porque un derrape es más probable en un camino húmedo que en un camino seco.

# Curva peraltada



## Curva peraltada

Es parecido al caso de la curva plana, pero en esta ocasión la curva posee un ángulo de inclinación.

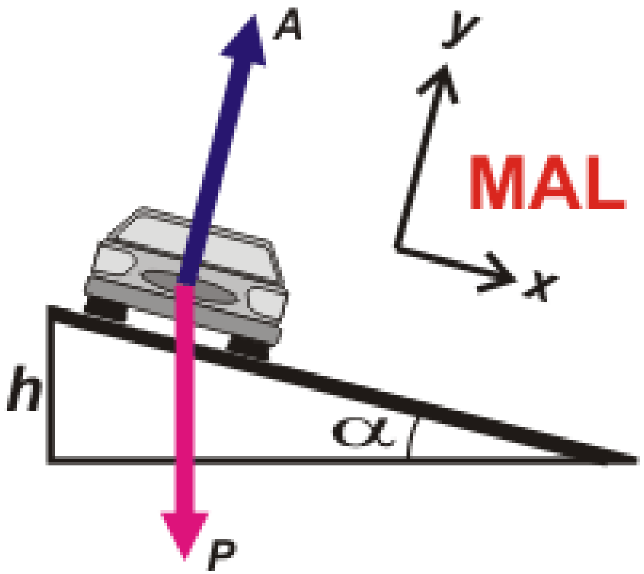
Sigue describiéndose un MCU y por tanto, el auto posee aceleración normal y fuerza centrípeta.

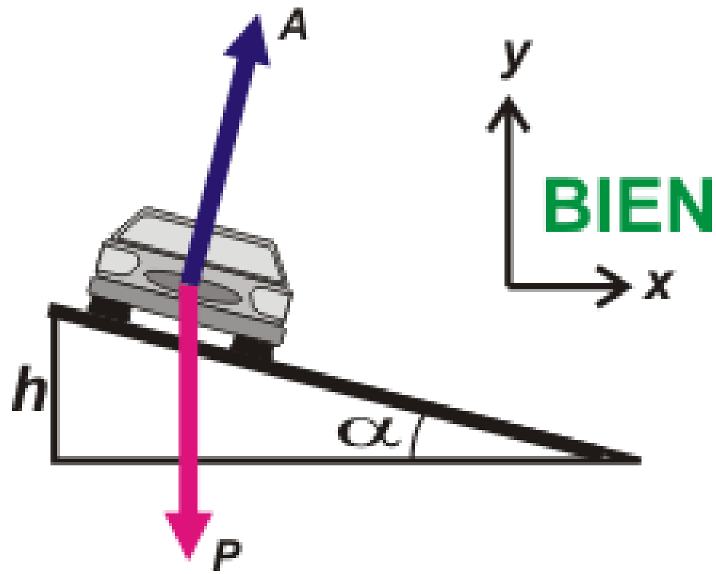
Igualmente siguen interviniendo la fuerza normal y el peso (podemos considerar también el rozamiento).

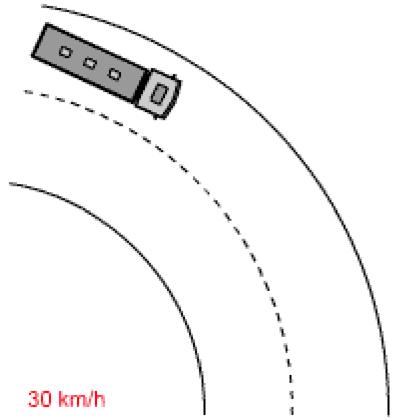
La fuerza normal por definición es perpendicular a la superficie y por tanto, no coincide con el eje de coordenadas, por lo que se puede descomponer en dos fuerzas $N_x$ y $N_y$ .

La fuerza de rozamiento es perpendicular a la superficie, y por tanto no coincide con nuestro sistema de referencia, por lo que podemos descomponerlo en dos fuerzas $FR_x$ y $FR_y$.

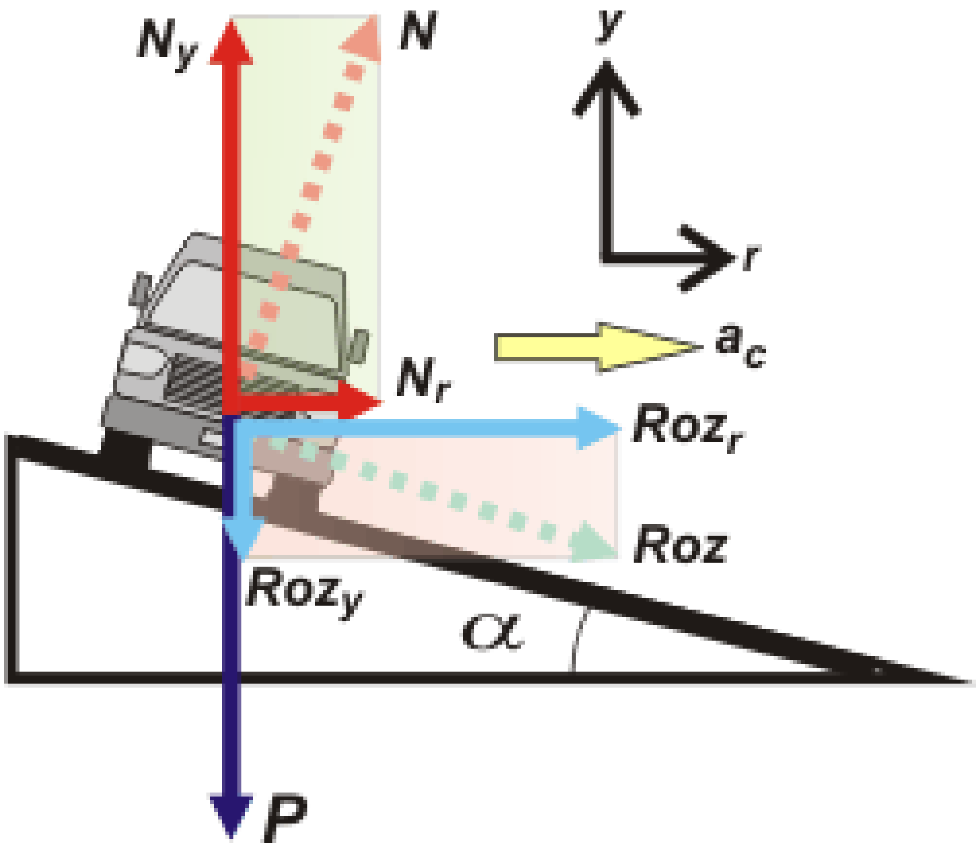
En esta ocasión la fuerza centrípeta es la suma de la fuerza de rozamiento y la fuerza normal en el eje x.


A
y
MAL
x
h
α
P


A
y
BIEN
x
h
α
P


30 km/h

## Curva peraltada con raozamiento




# Movimiento Circular