

1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

1.1 Kontinuumsmechanik

hier kommt was rein

1.2 Differentielle Geometrie

hier kommt noch mehr rein

2 Truss Theory

2.1 Herleitung eines Fachwerkstab Elementes aus dem Kontinuum

Das nachfolgende Kapitel behandelt die theoretische Herleitung eines Fachwerkstab Elementes mit den Methoden der Kontinuumsmechanik. Das Kapitel ist dahingehend zu interpretieren, dass es aufverständliche Art und Weise das Vorgehen bei der Herleitung eines allgemeinen Elementes einschließt, aber die komplexe Mechanik eines Balkenelementes außer Acht lässt.

Einhergehend mit der Definition des Fachwerkes unterwirft sich das allgemeine Fachwerkelement einigen vereinfachten Annahmen. So wird im Nachfolgenden davon ausgegangen, dass das Element an den Knotenpunkten ideal gelenkig gelagert ist. Äußere Lasten sind nicht direkt auf den Stab aufzubringen, sondern ausschließlich über die Knoten einzuleiten. Mögliche räumlich ausgedehnte Lasten sind dahingehend im Rahmen einer Vorberechnung auf die Fachwerkknöten aufzuteilen. Als klassisches Stabtragwerk sind die Längsabmessungen sehr viel größer als die entsprechenden Dicken des Querschnittes in Höhe und Breite. Bezüglich des Kräfteflusses innerhalb des betrachteten Elementes kann davon ausgegangen werden, dass alle Kräfte in Längsrichtung auf den Schwerpunkt des ideellen Querschnittes bezogen sind. Außerdem ist davon auszugehen, dass ein Fachwerkstab zwischen zwei Knoten ideal grade verläuft. Das bedeutet dass innerhalb des Elements keine Momente bzw. Schubkräfte auftreten. Statt dessen reduziert sich das Element auf die Übertragung von reinen Normalkräften.

Grundsätzlich sei anzumerken, dass es mehrere herangehensweisen gibt, um die Mechanik eines solchen Elementes zu beschreiben. An dieser Stelle konzentrieren wir uns auf die Herleitung eines allgemeinen Elementes unter Zuhilfenahme der Kontinuumsmechanik um seine Geometrie im Raum zu beschreiben. Die eigentliche Elementformulierung erfolgt im Anschluss über das Prinzip der virtuellen Arbeit Durch die Koppelung von Spannungen \mathbf{S} und Dehnungen \mathbf{E} .

Hier Bild von Ausgangszustand einfügen: vgl. Figure 5.1 IGA Skript

Darstellung [Referenz] zeigt schematisch den unverformten so wie den verformten Zustand eines Stabes mit seinem jeweiligen Positionsvektor im geometrischen Raum. Die Vektornotation erfolgt in Krummliniger Koordinatendarstellung (nachfolgend als „Curvilinear“ aus dem Englischen bezeichnet) als eine Funktion aus Θ^1 in einem euklidischen Vektorraum.

Der Stab wird als Reduktion auf seine Mittelachse beschrieben. Diese Linie besitzt im Raum keine Ausdehnung. Jeder Beliebige Punkt auf der Stabsystemachse kann durch seinen Positionsvektor \mathbf{R} in Abhängigkeit des Kurvenparameters Θ^1 beschrieben werden. Ein beliebiger Punkt des Querschnittes im Raum kann wiederum durch ein normalisiertes Koordinatensystem mit orthogonalen Basisvektoren \mathbf{A}_α in Abhängigkeit der Parameter Θ^2 und Θ^3 bestimmt werden. Nachfolgend gelten vereinfachten Annahmen der Bernoullischen Balkentheorie. Demnach kann davon ausgegangen werden, dass die Basisvektoren auch nach Deformation des Stabes senkrecht auf der Balkenachse stehen. Dies induziert ein ebenbleiben des Querschnittes bei Verformung des Elementes. Wir sprechen von einem konstanten, starren Querschnitt.

Parametrisierte Darstellung:

$$\mathbf{X}(\Theta^1) = \mathbf{R}(\Theta^1) + \Theta^2 \mathbf{A}_2 + \Theta^3 \mathbf{A}_3 \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{x}(\theta^1) = \mathbf{r}(\theta^1) + \theta^2 \mathbf{a}_2 + \theta^3 \mathbf{a}_3 \quad (2.1b)$$

Wie in Kapitel [Referenz] beschrieben, sind die Basisvektoren eines Kontinuums wie folgt definiert:

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i} \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i} \quad (2.2b)$$

Infolge der Vorschrift aus Gleichung (2.1a) und (2.1b) ergeben sich daraus die Basisvektoren des Querschnittes im unverformten sowie im verformten Zustand abhängig vom Kurvenparameter Θ^1 wie folgt:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{X}_{,1} = \mathbf{A}_1(\Theta^1), \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{x}_{,1} = \mathbf{a}_1(\theta^1) \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{X}_{,2} = \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{x}_{,2} = \mathbf{a}_2 \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{X}_{,3} = \mathbf{A}_3, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{x}_{,3} = \mathbf{a}_3 \quad (2.3c)$$

Damit lässt sich die gegebene Konfiguration vor und nach der Deformation beschreiben. Die drei Basisvektoren an einem Punkt definieren wiederum die Metrik in

Setzt man das Ergebnis in die Gleichung [Referenz Green-Lagrange Gleichung] ein, erhält man somit

3 NURBS Begrifflichkeiten

3.1 Definition der wichtigsten Begrifflichkeiten bei der Arbeit mit NURBS

3.1.1 Elemente

3.1.2 Polynomialer Grad (engl. polynomial degree)

Der polynomiale Grad einer Kurve wird als ganzzahlige, positive Nummer angegeben, wobei der kleinst mögliche Grad bei 1 beginnt. Nach oben ist der Grad einer Kurve d nur durch seine Anzahl an Kontrollpunkten n begrenzt $d = n - 1$. Allerdings ist zu berücksichtigen, dass sich mit steigendem Grad die Approximation des Kontrollpunkt-Polygons verschlechtert und der Algorithmus zunehmend instabil wird [REF Iga Skript S. 13]. Der definierte polynomiale Grad einer Kurve gibt vor, auf wie viele Intervalle d eine Basisfunktion im Parameterraum Einfluss nimmt. Nur innerhalb dieses Bereiches hat die jeweilige Basisfunktion einen Funktionswert. Außerhalb ist ihr Einfluss dagegen zu Null definiert. Diese Eigenschaft wird auch als lokaler Einfluss der Basisfunktionen bezeichnet und ermöglicht es auch bei Kurven mit einer hohen Anzahl an Kontrollpunkten lokale Veränderungen vorzunehmen, ohne die Gesamtgeometrie zu verändern.

Die Wahl des polynomialen Grades einer Kurve beeinflusst ihre Geometrie im Raum maßgeblich. Linien und Polylinien sind das Ergebnis von NURBS-Kurven des ersten Grades, Kreise und Ellipsen sind Beispiele für Kurven des zweiten Grades und Freiformkurven werden gängigerweise aus einer Kombination von NURBS-Kurven des dritten bzw. fünften Grades erstellt [REF Rhino3D Developer Guides (Degree)].

Hier Bild von Kurven 1., 2., und 3. Grades

3.1.3 Kontrollpunkte

Die Kontrollpunkte einer NURBS-Kurve sind maßgeblich für deren Geometrie im Raum verantwortlich. Formell bilden sie in diesem Zusammenhang eine Liste aus Punktkoordinaten im Raum, mit zugewiesenem X-, Y-, Z- Wert, sowie einem individuellen NURBS-Gewicht. Zur Erstellung einer NURBS-Kurve muss die vorhandene Anzahl an Kontrollpunkten mindestens $d+1$ betragen, wobei d für den polynomialen Grad der Kurve steht. Der Grad einer NURBS-Kurve ist also direkt abhängig von der, auf ihr definierten Anzahl

an Kontrollpunkten pro Element. Der intuitivste Weg die Form einer NURBS-Kurve zu verändern ist durch Verschieben einzelner Kontrollpunkte. Das bedeutet allerdings nicht, dass die Punkte auch auf der Kurve liegen müssen. Abgesehen vom ersten und letzten Punkt einer jeden Kurve werden im Normalfall alle verbleibenden Kontrollpunkte durch den Kurvenverlauf lediglich (unterschiedlich stark) approximiert. Wie stark einzelne Punkte dabei angenähert werden ist wiederum sowohl von dem polynomialen Grad als auch von den, den Punkten zugewiesenen NURBS-Gewichten abhängig.

3.1.4 Knoten (engl. knots)

Knoten sind als Koordinaten im parametrischen Raum definiert und unterteilen diesen in Intervalle, die auch Sektionen (engl. sections) genannt werden. Die Anzahl nötiger Knoten berechnet sich in Abhängigkeit der vorhandenen Kontrollpunkte p und des Grades der Kurve n als:

$$m = n + d + 1$$

3.1.5 Knotenvektor (engl. knot vector)

Jeder NURBS-Kurve ist zwingend eine Liste zugeordnet, die die entsprechenden Knoten (engl. knots) enthält. Diese Liste, häufig auch als Knotenvektor (engl. knot vector) bezeichnet, enthält die nötigen Informationen wie die Knoten über den Parameterraum eines Elementes verteilt sind. Für den Sonderfall, dass alle Knoten gleichmäßig verteilt sind, wird der Knotenvektor als uniform bezeichnet. Die Anzahl der Knoten im Knotenvektor ist abhängig von der Anzahl an Kontrollpunkten so wie von dem definierten Kurvengrad. Diese Bedingung ist in beide Richtungen gültig. Verändert man die Anzahl der Knoten einer Kurve, müssen demnach ebenfalls die Kontrollpunkte angepasst werden. Eine initiiierende Veränderung des Kurvengrades ist ebenfalls möglich, aber keine gängige Praxis. Wichtig ist außerdem, dass die Einträge des Knotenvektors immer in aufsteigender Reihenfolge sortiert sind.

Das Beispiel eines Knotenvektors sieht wie folgt aus:

$$\Xi = [0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 5.0]$$

3.1.6 Knotenstützweite (engl. knot span)

Wie im Zusammenhang mit dem polynomialen Grad einer NURBS-Kurve beschrieben wird, gibt der Grad d vor auf wie viele Knotenintervalle ein Basisfunktion einfluss nimmt. Dieses ist gleichbedeutend mit der Anzahl an benachbarter Kontrollpunkte die von dem jeweils betrachteten Punkt beeinflusst werden $k = d + 1$. Die sich ergebende Untersektion des Knotenvektors wird als Knotenstützweite (engl. knot span) bezeichnet. Umgekehrt ergibt sich die Anzahl vorhandener Stützbereiche anhand der Kontrollpunkte n als $n - d$.

3.1.7 Basisfunktionen (engl. shape functions)

3.1.8 Knoten Vielfältigkeit (engl. multiplicity)

3.1.9 Offener Knotenvektor

3.1.10 lokaler Support

3.1.11 NURBS Gewichte (engl.weights)