Formule de Stirling (intégrales de Wallis)

- Gourdon, *Analyse.* (130, 219-220)

Formule de Wallis : $\displaystyle \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right)^2 = \pi.$

Démonstration. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour $n \geqslant 2$, en intégrant par parties on a

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \big[-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\big(1-\sin^2(x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)(W_{n-2} - W_n)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \geqslant 2,\ W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$.
Comme $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = \big[-\cos(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1} \qquad (\star)$$

D'autre part, comme $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \sin^{2p+1}(x) \leqslant \sin^{2p}(x) \leqslant \sin^{2p-1}(x)$ alors par intégration, on a $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2p+1} \leqslant W_{2p} \leqslant W_{2p-1} \quad \text{donc} \quad 1 \leqslant \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \leqslant \frac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$$

Par le théorème des gendarmes, on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1$ soit

$$(2p+1)\left(\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2}\right)^2 \frac{\pi}{2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On a donc $p\left(\dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2}\right)^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\pi}$. D'où la formule de Wallis. □

Formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$

Démonstration. Posons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}} \times \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} \times \frac{n!}{(n+1)!}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{e} \times \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&= -\ln(e) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|v_n|$ converge donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}v_n$ converge (absolument convergente $\Rightarrow$ convergente).

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$ alors $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On voit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $e^\ell > 0$. Notons $\frac{1}{k} = e^\ell$.

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k} \qquad \text{donc} \qquad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} k\sqrt{n}\ n^n e^{-n} \qquad (\star)$$

Calculons la constante k :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right)^2 &= \frac{1}{p}\left(\frac{(2p)^2(2p-2)^2\cdots 2^2}{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots 2\times 1}\right)^2\\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2\\
&\underset{n\to+\infty}{\overset{(\star)}{\sim}} \frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(k\sqrt{p}\ p^p e^{-p})^2}{k\sqrt{2p}(2p)^{2p}e^{-2p}}\right)^2 = \frac{1}{p}\left(\frac{k\sqrt{p}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{k^2}{2}
\end{aligned}$$

La formule de Wallis et l'unicité de la limite nous donne donc que $\pi = \dfrac{k^2}{2}$.

Finalement, $k = \sqrt{2\pi}$. D'où la formule de Stirling. $\square$