Mathematik für Wirtschaftsinformatiker

Alfred Müller, Martin Rathgeb

Universität Siegen

Wintersemester 2008/09

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Zahlbereiche

Wir benutzen folgende Bezeichnungen für die grundlegenden Zahlbereiche:

- **Natürliche Zahlen**: $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$;
- **Ganze Zahlen**: $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- **Rationale Zahlen**: $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}\}$
- **Reelle Zahlen**: $\mathbb{R}$, die Menge aller Dezimalbrüche; $\mathbb{R}^+$, die Menge aller positiven Dezimalbrüche; $\mathbb{R}_0^+$, die Menge aller nicht-negativen (d.h. ≥ 0) Dezimalbrüche

Es gilt offensichtlich $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
Zahlen auf $\mathbb{R}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen, heissen **irrational**. Dies bedeutet, dass die Dezimalbruchentwicklung weder endlich noch periodisch ist.
Es gelten folgende Rechenregeln für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{array}{ll}
a + b = b + a & (a + b) + c = a + (b + c) \\
a + 0 = a & a + (-a) = 0 \\
ab = ba & (ab)c = a(bc) \\
1 \cdot a = a & a/a = 1,\ a \neq 0 \\
(-a)b = a(-b) = -ab & (-a)(-b) = ab \\
a(b + c) = ab + ac & (a + b)c = ac + bc
\end{array}
$$

Für Brüche (also rationale Zahlen) gelten folgende Rechenregeln, falls die Nenner ungleich Null sind:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{a \cdot c}{b \cdot c} = \dfrac{a}{b} & \dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b} \\
-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} & \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a + b}{c} \\
\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd} & a + \dfrac{b}{c} = \dfrac{ac + b}{c} \\
\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} & \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}
\end{array}
$$

Wir schreiben $a < b$, falls die Zahl a echt kleiner als b ist, also falls a auf dem Zahlenstrahl links von b liegt. Für Ungleichungen gelten folgende Regeln:

$$a > 0, b > 0 \;\Rightarrow\; a + b > 0 \text{ und } ab > 0,$$

$$a > b \;\Leftrightarrow\; a - b > 0$$

$$a > b \;\Rightarrow\; a + c > b + c$$

$$a > b \text{ und } b > c \;\Rightarrow\; a > c$$

$$a > b \text{ und } c > 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$$

$$a > b \text{ und } c < 0 \;\Rightarrow\; ac < bc$$

$$a > b \text{ und } c > d \;\Rightarrow\; a + c > b + d$$

1.2 Potenzrechnung

Potenzrechnung spielt eine wichtige Rolle in der Zinseszinsrechnung. Wir geben hier die wichtigsten Definitionen und Rechenregeln an. Wir definieren die n-te Potenz von a als

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Seien $a, b \neq 0$ reelle Zahlen und r, s ganze Zahlen:
Dann gelten folgende Rechenregeln:

$$a^0 := 1 \qquad a^{-r} := \frac{1}{a^r}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Beliebte Fehler:

- $(a + b)^r \neq a^r + b^r$! Z.B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(-10)^2 \neq -10^2$! $(-10)^2 = (-1)^2 10^2 = 100 \neq -100$.
- $(2x)^{-1} \neq 2x^{-1}$!

$$\frac{1}{2x} \neq \frac{2}{x}.$$

Gebrochene Exponenten:

Wir definieren

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$$

damit die Rechenregeln auch für gebrochene Exponenten gelten.

1.3 Folgen und endliche Summen

Definition 1.1. Wir schreiben für natürliche Zahlen $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

Das Summenzeichen ist der große griechische Buchstabe Sigma.

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k \qquad \text{(Additivität)}$$

$$\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k. \qquad \text{(Homogenität)}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n - m + 1) \cdot a$$

Satz 1.2.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Als Folgerung aus diesem Satz erhalten wir mit Hilfe der Rechenregeln für Summen

$$\sum_{k=1}^{n}(a + k \cdot d) = n \cdot a + d \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Definition 1.3.
Eine Auflistung von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ nennen wir **Zahlenfolge**.
Es gibt **endliche Folgen** wie z.B. $4, 3, 2, 1, 0$ und
unendliche Folgen wie z.B. die Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$

Eine Folge heißt **arithmetische Folge**, falls

$$a_k = a + k \cdot d, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit einem Anfangsglied a und einer konstanten Differenz d.
Sie heißt **geometrische Folge**, falls

$$a_k = a \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für Zahlen $a \neq 0$ und $q \neq 0$.

Satz 1.4. *Für alle reellen Zahlen $q \neq 1$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

1.4 Logarithmen

Definition 1.5.
Die Lösung der Gleichung

$$a^x = b$$

heißt **Logarithmus** von b zur Basis a. Wir schreiben $x = \log_a b$.

Diese Definition ist nicht immer sinnvoll. Deshalb setzt man in der Regel voraus, dass $a > 1$ und $b > 0$. Dann ist x immer eindeutig definiert.
Eine besondere Rolle spielt als Basis die sogenannte Euler'sche Zahl $e = 2.71828\ldots$.
Deshalb schreibt man speziell im Falle der Basis e auch

$$\ln b := \log_e b.$$

Es gilt also $e^{\ln b} = b$ und allgemein $a^{\log_a b} = b$.
Für Logarithmen gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \ln(b \cdot c) &= (\ln b) + (\ln c), \\ \ln(b^c) &= c \cdot \ln b, \\ \ln(b/c) &= (\ln b) - (\ln c), \\ \log_a b &= \frac{\ln b}{\ln a}. \end{aligned}$$

1.5 Grenzwerte von Folgen

Wie wollen nun formal den Begriff des **Grenzwertes** definieren. Dazu brauchen wir zunächst die Definition des **Betrages** $|x|$ einer Zahl x. Dieser ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Es gelten die Rechenregeln

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{und } |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Definition 1.6. Die Zahl A heißt Grenzwert der Folge $a_1, a_2, \ldots$, falls es für jede positive Zahl $\varepsilon > 0$ nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|A - a_n| > \varepsilon$. Wir schreiben dann

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n$$

oder

$$a_n \to A \quad \text{für } n \to \infty.$$

Es gibt auch Folgen, die keinen Grenzwert haben, z.B. die alternierende Folge $1, -1, 1, -1, \ldots$. Falls die Folgenglieder immer größer werden, und jede Grenze überschreiten, so sagt man auch, dass die Folge gegen unendlich geht, und spricht von einem uneigentlichen Grenzwert. Man schreibt

$$a_n \to \infty \quad \text{für } n \to \infty \quad \text{bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} 0, & \text{für } p < 0, \\ \infty, & \text{für } p > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1. \end{cases}$$

Für $q > 1$ gilt $q^n \to \infty$ für $n \to \infty$,
Für $q \leq -1$ divergiert die Folge, da die Folge im Vorzeichen alterniert. Man beachte, dass z.B. die Folge $a_n = (-2)^n$ die Folgenglieder $1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$ besitzt.
Es gelten folgende Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \qquad \text{falls } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

1.6 Unendliche Summen

Wir schreiben für unendliche Summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

heißt unendliche **geometrische Reihe**.
Für alle q mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

1.7 Mengen und Intervalle

Eine **Menge** ist eine Ansammlung von Objekten. Wir schreiben $x \in A$, wenn das Objekt x in der Menge A liegt, und $x \notin A$, falls x nicht in A liegt.
Wir schreiben weiter

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x : x \in A \textbf{ oder } x \in B\}, \\ A \cap B &:= \{x : x \in A \textbf{ und } x \in B\}, \\ A \backslash B &:= \{x : x \in A \textbf{ und } x \notin B\} \end{aligned}$$

für die Vereinigung, Durchschnitt und die Differenz von Mengen.
Die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b ($a < b$) nennen wir **Intervall**.
Genauer schreiben wir

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}. \end{aligned}$$

Wir nennen $[a, b]$ das abgeschlossene Intervall und (a, b) das offene Intervall. Weiter ist $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$ und $[0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$.

2 Funktionen

2.1 Grundbegriffe

Eine Vorschrift, die jedem Element x einer Menge D ein Element y einer anderen Menge V zuordnet, heißt Funktion. Wir können also die Variable y in Abhängigkeit von der Variable x betrachten, und wir schreiben dann $y = f(x)$, wenn wir die Funktion f nennen. Wir schreiben für die Funktion dann

$$f\colon D \to V, \quad x \mapsto f(x).$$

Wir nennen D (oder D_f) die **Definitionsmenge**, V (oder V_f) den **Wertebereich** und die Menge W (oder W_f) aller von der Funktion angenommen Werte nennen wir **Wertemenge** (oder **Bild** von f bzw. Bild von D unter f). Formal

$$W_f = \{f(x) : x \in D\} \subseteq V.$$

Wir erlauben $W_f \subset V$, weil wir W_f nicht immer genau bestimmen wollen.

Gilt $y = f(x) \in W$ für ein $x \in D$, so heißt x **Urbild** von y und y **Bild** von x. Die Menge $G_f := \{(x, f(x) : x \in D)\} \subset D \times V$ heißt **Graph der Funktion** f. Oft stellt man dies in Form einer Graphik dar in einem (x, y)-Koordinatensystem, in dem nach rechts auf der x-Achse die **unabhängige Variable** und nach oben auf der y-Achse die **abhängige Variable** $y = f(x)$ abgetragen wird.

Beispiel: Kleine Wertetabelle und Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = 3x + 5$:

x	-5	-3	-1	1	3	5
$3x+5$	-10	-4	2	8	14	20

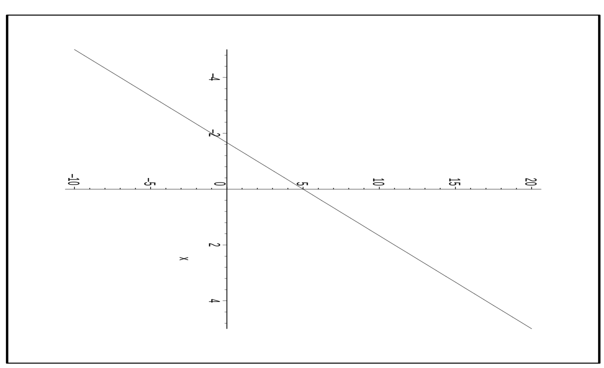


Abbildung 1: Graph der Funktion $f(x) = 3x + 5$

2.2 Eigenschaften von Funktionen

Symmetrie zur y-Achse: Ist mit (x, y) auch $(-x, y)$ ein Punkt auf dem Graphen, so ist der Graph symmetrisch zur y-Achse. Dies gilt also, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$.

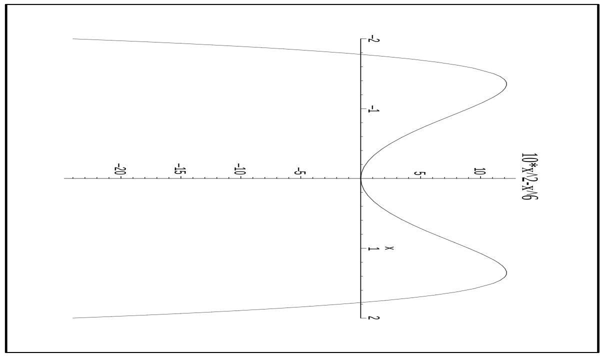


Abbildung 2: Graph einer zur y-Achse symmetrischen Funktion

Punktsymmetrie zum Ursprung: Ist mit (x, y) auch $(-x, -y)$ ein Punkt auf dem Graphen, so ist der Graph punktsymmetrisch zum Nullpunkt. Dies gilt also, falls $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in D$.

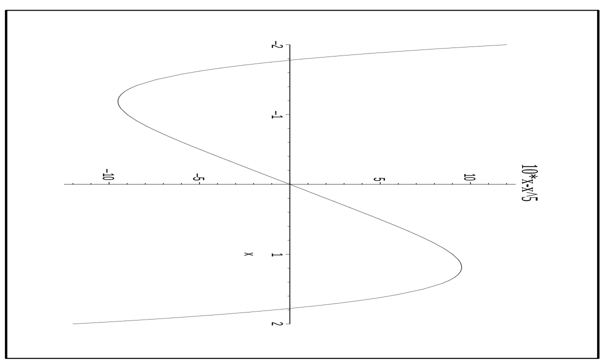


Abbildung 3: Graph einer im Ursprung punktsymmetrischen Funktion

Monotonieverhalten: Eine Funktion heißt **monoton wachsend**, falls aus $x \leq y$ immer $f(x) \leq f(y)$ folgt. Dies gilt genau dann, wenn der Graph ansteigend ist.
Eine Funktion heißt **streng monoton wachsend**, falls aus $x < y$ immer $f(x) < f(y)$ folgt. Dies gilt genau dann, wenn der Graph strikt ansteigend ist.

Eine Funktion heißt **monoton fallend**, falls aus $x \leq y$ immer $f(x) \geq f(y)$ folgt. Es ist $x \mapsto f(x)$ monoton fallend, genau dann, wenn $x \mapsto -f(x)$ monoton steigend ist.
Eine Funktion heißt **streng monoton fallend**, falls aus $x < y$ immer $f(x) > f(y)$ folgt. Es ist $x \mapsto f(x)$ streng monoton fallend genau dann, wenn $x \mapsto -f(x)$ streng monoton steigend ist.

Definition 2.1. a) Wenn es für eine Funktion $y = f(x)$ zu jedem $y \in V$ genau ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$, d.h. es gibt keine Zahlen $a \neq b$ mit $f(a) = f(b)$, dann nennt man diese Funktion **bijektiv** oder **umkehrbar**; insbesondere gilt für bijektive Funktionen $V_f = W_f$.
b) Gegeben sei eine bijektive Funktion $f : D \to W$. Dann nennen wir die Funktion $g\colon W \to D$ **Umkehrfunktion** zu f, falls gilt

$$g(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Wir schreiben dann $g = f^{-1}$.

Bemerkung: a) Vorsicht, im Allgemeinen gilt $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$.
b) Graphische Bestimmung der Umkehrfunktion: (x, y) liegt auf dem Graphen von f genau dann, wenn (y, x) auf dem Graphen von g. Also erhält man die Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

Definition 2.2. a) Ein Punkt $x^* \in D$ heißt **Minimumstelle** von $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Der Funktionswert $f(x^*)$ heißt dann **Minimum** von f.
b) Ein Punkt $x^* \in D$ heißt **Maximumstelle** von $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Der Funktionswert $f(x^*)$ heißt dann **Maximum** von f.
c) Ein Punkt $x \in D_f$ heißt **Nullstelle** von $f : D \to \mathbb{R}$, falls $f(x) = 0$. Nullstellen sind also Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse.

2.3 Verschiebung, Spiegelung und Streckung von Graphen

Verschiebung in x-Richtung: Ersetzt man $f(x)$ durch $f(x) + a$, so wird der Graph um a Einheiten nach oben verschoben (falls $a > 0$), beziehungsweise nach unten (falls $a < 0$).
Verschiebung in y-Richtung: Ersetzt man $f(x)$ durch $f(x + a)$, so wird der Graph um a Einheiten nach **links** verschoben (falls $a > 0$), beziehungsweise nach rechts (falls $a < 0$).
Spiegelung an der x-Achse: Spiegelt man den Graphen einer Funktion an der x-Achse, so erhält man gerade den Graphen der Funktion $x \mapsto -f(x)$.
Spiegelung an der y-Achse: Spiegelt man den Graphen einer Funktion an der y-Achse, so erhält man gerade den Graphen der Funktion $x \mapsto f(-x)$.

Streckung in x-Richtung: Sei a positiv. Die Funktion $x \mapsto \cdot f(ax)$ ist eine Streckung der Funktion $f(x)$ in y-Richtung für $a > 1$ und eine Stauchung für $a < 1$.
Streckung in y-Richtung: Sei a positiv. Die Funktion $x \mapsto a \cdot f(x)$ ist eine Streckung der Funktion $f(x)$ in y-Richtung für $a > 1$ und eine Stauchung für $a < 1$.

2.4 Elementare Funktionen

2.4.1 Lineare Funktionen

Eine Funktion der Form $y = f(x) = ax + b$ mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ heißt **linear**. Ihr Graph ist eine Gerade. Es ist a die Steigung der Geraden $y = ax + b$ und die Gerade geht durch den Punkt $(0, b)$. Deshalb heißt b auch y-Achsenabschnitt. Ist $a < 0$, so fällt die Gerade.
Eine lineare Funktion hat genau eine Nullstelle, falls $a \neq 0$. Diese ist dann die Lösung von

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax = -b$$

also

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Geht eine Gerade durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2), so hat sie die Steigung

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2.$$

Für eine Gerade mit Steigung a durch den Punkt (x_1, x_2) gilt folgende **Punkt-Steigungs-Formel**:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Geht eine Gerade durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$, so gilt die folgende **Zwei-Punkte-Formel**:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

2.4.2 Quadratische Funktionen

Eine Funktion f heißt **quadratisch**, falls sie die Form hat

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Die Graphen quadratischer Funktionen sind **Parabeln**.
Der Graph (die Parabel) von $f(x) = a \cdot (x + b)^2 + c$ hat einen Scheitelpunkt in $(-b, c)$.
Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet und damit $W_f = [c, \infty)$.
Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet und damit $W_f = (-\infty, c]$.

Satz 2.3. *a) Ist $a > 0$, so hat die quadratische Funktion $f(x) = a \cdot (x + b)^2 + c$ das Minimum c an der Stelle $x^* = -b$.*
b) Ist $a < 0$, so hat die quadratische Funktion $f(x) = a \cdot (x + b)^2 + c$ das Maximum c an der Stelle $x^* = -b$.

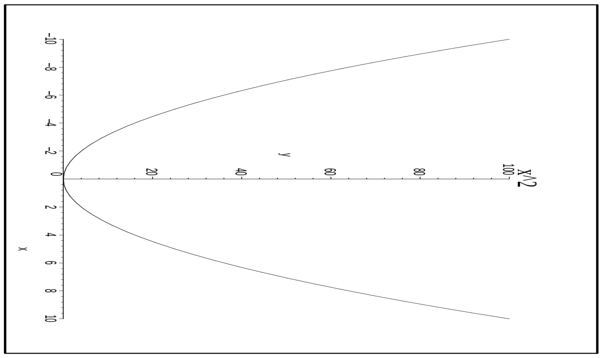


Abbildung 4: Die Parabel der Funktion $f(x) = x^2$.

Die quadratische Funktion $f(x) = a(x+b)^2 + c$ hat für $a > 0$ den Wertebereich $W_f = [c, \infty)$.

- Für $c > 0$ hat sie keine Nullstelle, weil $0 \notin W_f$.
- Für $c = 0$ hat sie genau eine Nullstelle in $x = -b$.
- Für $c < 0$ hat sie genau 2 Nullstellen.

Hat die quadratische Gleichung $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ zwei Nullstellen x_1, x_2, so gilt für diese

$$x_1 = -\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}} = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

und

$$x_2 = -\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}} = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Für praktische Zwecke genügt es, sich den Fall $a_2 = 1$ zu betrachten. Für die Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ erhält man dann die einfachere Lösung

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und diese Lösungen existieren, falls $q \leq p^2/4$.

2.4.3 Polynomiale Funktionen

Eine Funktion f der Form

$$f(x) = p_n(x) := a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ heißt **Polynom** (genauer: polynomiale Funktion) n-ten Grades.

Satz 2.4. *Ein Polynom n-ten Grades p_n hat höchstens n Nullstellen.*

Grund: Ist x_1 eine Nullstelle des Polynoms, so ist $p_{n-1}(x) := \frac{p_n(x)}{x-x_1}$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades. Hat also ein Polynom die n Nullstellen $x_1, ..., x_n$, so gilt die Faktorzerlegung

$$p_n(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

und dieses Polynom kann offensichtlich keine weiteren Nullstellen haben.

Berechnung der Nullstellen eines Polynoms heißt Lösen der Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Dies ist einfach für $n = 1, 2$ (lineare und quadratische Gleichungen), schwierig für $n = 3, 4$, und (im Allgemeinen) unmöglich für $n > 4$.

2.4.4 Rationale Funktionen

Eine **rationale Funktion** f ist ein Quotient aus zwei Polynomen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}.$$

Man beachte, dass rationale Funktionen in den Nullstellen des Nenners nicht definiert sind. In diesen Stellen hat der Graph vertikale (oder senkrechte) Asymptoten. Man nennt diese Stellen auch **Pole**.

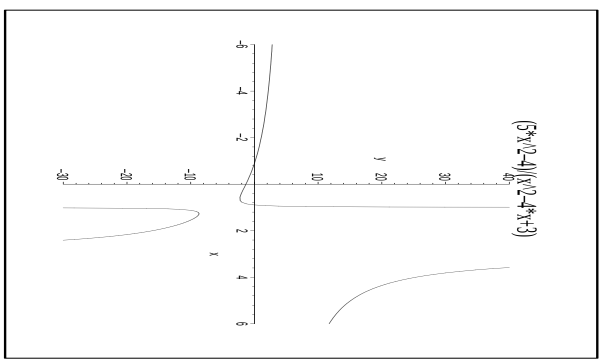


Abbildung 5: Graph einer rationalen Funktion.

2.4.5 Exponential- und Logarithmusfunktion

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ kann man folgende (konvergente!) Reihe betrachten

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dabei gilt $n! := \prod_{\nu=1}^{n}$ und speziell $0! := 1$. Insbesondere definiert man $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = \exp(x)$ heißt **Exponentialfunktion** und ist bijektiv. Die zugehörige Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit} \qquad \ln(y) = x \;\Leftrightarrow\; \exp(x) = y$$

heißt **Logarithmus** (naturalis).

Anwendung: Definition allgemeiner Potenzen. Man zeigt zunächst, dass gilt $e^x = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Diese Identität wird dann (per definitionem) fř alle $x \in \mathbb{R}$ für gültig erklärt. Man definiert weiter für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ die Potenz $a^b := \exp(b \cdot \ln(a))$.

Für $a \in \mathbb{R}^+$ heißt die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto a^x$$

Exponentialfunktion zur Basis a.

Bemerkung: Es gilt $f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln(a)} = \exp(\ln(a) \cdot x)$; damit ist f insbesondere eine Streckung bzw. Stauchung der exp-Funktion (zur Basis e) in x-Richtung;gegebenenfalls mit Spiegelung des Graphen an der y-Achse.

2.4.6 Potenzfunktion

Für $c, a \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto c \cdot x^a$$

Potenzfunktion.

2.5 Verknüpfung von Funktionen

Neben den bereits vorgestellten Grundtypen gibt es weitere Funktionen. Wir definieren folgende naheliegenden Verknüpfungen von Funktionen:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x) + g(x)\\
(f-g)(x) &:= f(x) - g(x)\\
(f\cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x)\\
(f/g)(x) &:= f(x)/g(x)\\
(f\circ g)(x) &:= f(g(x)).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Weitere Funktionen sind beispielsweise die abschnittweise definierten. Darunter auch die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$; vgl. Kapitel 1.5.

2.6 Grenzwerte und Stetigkeit

Wir sagen, die Funktion f habe für ein festes $x_0 \in D$ einen Grenzwert a für $x \to x_0$, falls für jede Zahlenfolge $x_1, x_2, \dots$ mit $x_n \to x$ gilt, dass $f(x_n) \to a$ konvergiert. Wir schreiben dann

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Definition 2.5. Eine Funktion f heißt **stetig im Punkt** x_0, falls gilt

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Sie heißt einfach **stetig**, falls sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Die Graphen stetiger Funktionen lassen sich in einem Zug durchzeichnen. Sie haben weder Sprünge noch Pole.

Bemerkung: Sind f, g stetige Funktionen, so sind auf folgende Funktionen stetig:

$$f + g,\ \ f \cdot g,\ \ f/g \text{ falls } g \neq 0,\ \ f \circ g.$$

Beispiele: Es sind alle Polynome stetig, weil $f(x) = x$ stetig ist; gleichermaßen rationale Funktionen (innerhalb ihrer Definitionsmenge). Auch die exp-, ln- und allgemeine Potenz-Funktionen sind stetig.

Satz 2.6 (Satz vom Maximum und Minimum)**.** *Die Funktion f sei stetig auf dem Intervall $[a, b]$. Dann ist f dort beschränkt und hat auf $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum.*

Satz 2.7 (Zwischenwertsatz)**.** *Die Funktion f sei stetig auf dem Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.*

Bemerkung: Eine wichtige Anwendung des Zwischenwertsatzes. Ist $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt), also das Produkt $f(a) \cdot f(b)$ negativ, dann hat f im Intervall (a, b) mindestens eine Nullstelle.

3 Differentialrechnung

3.1 Grundbegriffe

Gegeben eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei Punkte x_1, x_2 auf der x-Achse, nennen wir die Gerade durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ eine **Sekante**. Ihre Steigung ist $(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$. Lässt man den Punkt x_2 gegen den Punkt x_1 wandern, so nähert sich diese Sekante der **Tangente** im Punkt x_1 an. Die Steigung der Tangente nennt man Ableitung.

Definition 3.1. Die Steigung der Tangenten an die Funktion f im Punkte $(x, f(x))$ nennt man die **Ableitung** der Funktion f und schreibt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oder auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Der Ausdruck

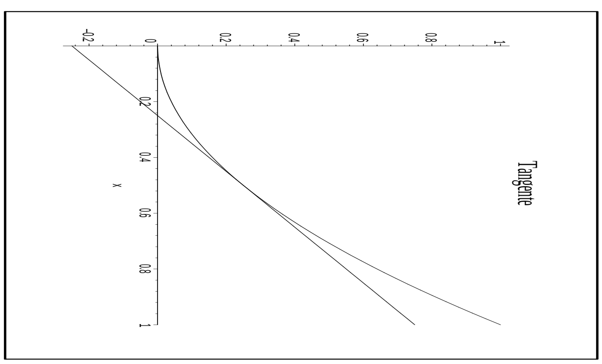
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

heißt **Differenzenquotient** und $f'(x)$ heißt auch **Differentialquotient**.

Ableitungen sind also **Änderungsraten**. Falls

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert, so ist f stetig in x, weil der Limes nur existieren kann, wenn $f(x+h) - f(x) \to 0$ gilt für $h \to 0$. Umgekehrt muss aber eine in x stetige Funktion dort nicht differenzierbar sein.



Die Formel für die Tangente im Punkt x_0 lautet

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

3.2 Rechenregeln für Ableitungen

Für Ableitungen gelten folgende Rechenregeln:

Elementare Regeln:

$$(af)'(x) = a \cdot f'(x), \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x); \quad (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

oder äquivalent für relative Änderungen:

$$\frac{(f \cdot g)'(x)}{(f \cdot g)(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Kettenregel:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{g}{h}\right)'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}.$$

oder äquivalent für relative Änderungen:

$$\frac{\left(\frac{g}{h}\right)'(x)}{\left(\frac{g}{h}\right)(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)}.$$

Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Einige elementare Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R} && \Rightarrow \quad f'(x) = ax^{a-1},\\
&f(x) = e^x && \Rightarrow \quad f'(x) = e^x,\\
&f(x) = \ln(x),\ x > 0 && \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x},\\
&f(x) = a^x,\ a > 0 && \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \ln(a).
\end{aligned}$$

3.3 Monotonieverhalten

Das Vorzeichen der Ableitung f' charakterisiert das Monotonieverhalten einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelten folgende Regeln:

- $f'(x) \geq 0$ für alle x $\quad\Leftrightarrow\quad$ f monoton wachsend;
- $f'(x) > 0$ für alle x $\quad\Rightarrow\quad$ f streng monoton wachsend;
- $f'(x) \leq 0$ für alle x $\quad\Leftrightarrow\quad$ f monoton fallend;
- $f'(x) < 0$ für alle x $\quad\Rightarrow\quad$ f streng monoton fallend.

3.4 Regel von L'Hôspital

Satz 3.2. *Sind f, g differenzierbar und gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \textit{oder} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

für $a \in \mathbb{R}$, $a = \infty$ oder $a = -\infty$, so gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Gilt auch $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) =$„0/0" oder „$\infty/\infty$", so darf die Regel wiederholt angewendet werden.

3.5 Nullstellenberechnung

Wir stellen nun zwei Verfahren zur Berechnung von Nullstellen einer Funktion vor, d.h. zur Berechnung von Punkten x mit $f(x) = 0$; ein weiteres ist die iterierte **Bisektion**.

Regula Falsi: Dieses Verfahren beruht auf der Idee, dass man ausgehend von zwei Punkten $x_1 < x_2$ mit der Eigenschaft, dass f in diesem beiden Punkten unterschiedliche Vorzeichen hat, einen verbesserten Schätzwert für die Nullstelle findet, indem man die Nullstelle x_3 der Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ berechnet. Dafür eignen sich die beiden folgenden Formeln:

$$z = y - \frac{y-x}{f(y)-f(x)} f(y) \qquad \text{bzw.} \qquad Z = \frac{xf(y) - f(x)y}{f(y)-f(x)}.$$

Zunächst sei $x := x_1$ und $y := x_2$; dann gilt $z0x_3$. Danach iteriert man dieses Verfahren, indem im nächsten Schritt die gleiche Prozedur auf $x_1 =: x$ und $x_3 =: y$ anwendet wird, falls f an diesen beiden Stellen unterschiedliche Vorzeichen hat; andernfalls auf $x_3 =: x$ und $x_2 =: y$. Dann sei $x_4 := z$. Diese Prozedur wird so oft wiederholt, bis man eine hinreichend genaue Schätzung der Nullstelle x^* bekommt; das Intervall $[x_n, x_{n+1}]$ (bzw. $[x_{n+1}, x_n]$) klein genug ist. Für die dabei erzeugte Folge $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ ist garantiert, dass sie gegen eine Nullstelle konvergiert, falls die Funktion f stetig ist.

Newton-Verfahren: Bei diesem Verfahren setzt man eine differenzierbare Funktion f voraus, von der man eine Nullstelle sucht. Ausgehend von einer Näherung x_n berechnet man hier eine neue Näherung x_{n+1} als Nullstelle der Tangente durch $(x_n, f(x_n))$. Dies führt auf die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Das Newton-Verfahren konvergiert zwar in der Regel schneller als bei Regula-falsi, aber es ist keine Konvergenz garantiert. Es kann sogar passieren, dass man sich mit diesem Verfahren immer weiter von der gesuchten Nullstelle weg bewegt, und sogar aus dem Definitionsbereich der Funktion rausfällt.

3.6 Höhere Ableitungen

Zur genaueren Analyse von Funktionen interessiert man sich auch dafür, wie sich die Steigung einer Funktion mit x ändert. Gesucht ist also die Steigung der Steigung, d.h. die Ableitung der Ableitung. Man schreibt

$$f''(x) = (f')'(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$$

für diese sogenannte **zweite Ableitung**.
Entsprechend definiert man höhere Ableitungen

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x)$$

und allgemein

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x).$$

Eine Funktion mit $f''(x) \geq 0$ für alle x heißt **konvex** und eine Funktion mit $f''(x) \leq 0$ für alle x heißt **konkav**.

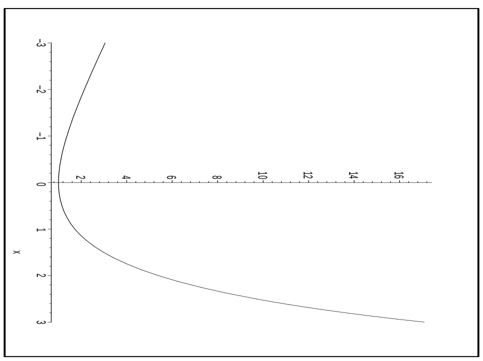


Abbildung 6: Eine konvexe Funktion.

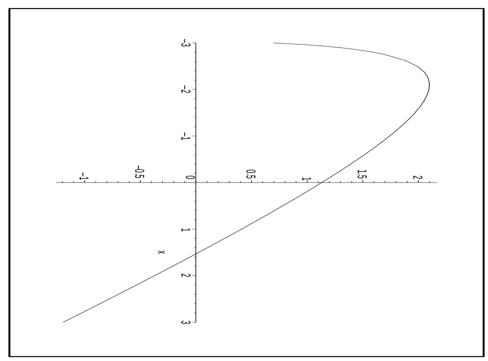


Abbildung 7: Eine konkave Funktion.

3.7 Maxima und Minima

Mit Hilfe von Differentialrechnung lassen sich Maxima und Minima von Funktionen bestimmen. Der folgende Satz ist dafür grundlegend:

Satz 3.3. *Nimmt die differenzierbare Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *in einem* **inneren** *Punkt* $x \in D$ *ein Minimum oder ein Maximum an, so gilt*

$$f'(x) = 0.$$

Man nennt die Punkte mit $f'(x) = 0$ **stationäre Punkte**. Für die Minimums- und Maximumsstellen einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kommen also nur folgende Stellen in Frage

1. Die Nullstellen der Ableitung: Stationäre Punkte;
2. Die Randpunkte a und b.

Vorgehensweise:

1. Berechne alle Nullstellen $x_1, \ldots, x_k$ der Ableitung;
2. Berechne die Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_k), f(a), f(b)$;
3. Der grösste dieser Funktionswerte ist das Maximum, der kleinste das Minimum.

Neben (globalen) Maxima und Minima interessiert man sich auch für lokale Extremstellen.

Definition 3.4. a) Ein Punkt $x^* \in D$ heißt **lokale Minimumstelle** von $f : D \to \mathbb{R}$, falls es ein Intervall $[x^* - a, x^* + a]$ gibt, so dass

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \text{für alle } x \in [x^* - a, x^* + a] \cap D.$$

Der Funktionswert $f(x^*)$ heißt dann **lokales Minimum** von f.
b) Ein Punkt $x^* \in D$ heißt **lokale Maximumstelle** von $f : D \to \mathbb{R}$, falls es ein Intervall $[x^* - a, x^* + a]$ gibt, so dass

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \text{für alle } x \in [x^* - a, x^* + a] \cap D.$$

Der Funktionswert $f(x^*)$ heißt dann **lokales Maximum** von f.

Der fundamentale Satz der Optimierung gilt auch für lokale Maxima und Minima:

Satz 3.5. *Nimmt die differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem* **inneren** *Punkt $x \in D$ ein lokales Minimum oder Maximum an, so gilt*

$$f'(x) = 0.$$

Zur Prüfung, ob ein stationärer Punkt ein lokales Maximum oder Minimum ist, muss man das Wachstumsverhalten in der Umgebung des stationären Punktes untersuchen:

- Ist die Funktion links vom stationären Punkt wachsend und rechts davon fallend, so ist der stationäre Punkt ein Maximum.
- Ist die Funktion links vom stationären Punkt fallend und rechts davon wachsend, so ist der stationäre Punkt ein Minimum.
- Hat die Funktion links und rechts vom stationären Punkt das gleiche Wachstumsverhalten, so ist der stationäre Punkt kein Extrempunkt.

Dies lässt sich zusammenfassen zu folgendem Kriterium zur Überprüfung auf lokale Extrema mit Hilfe der ersten Ableitung:

Satz 3.6. *Sei c ein stationärer Punkt von f.*

- *Falls $f'(x) \geq 0$ in einem Intervall (a, c) links von c und $f'(x) \leq 0$ in einem Intervall (c, b) rechts von c, dann ist c ein* **lokaler Maximumpunkt***;*
- *Falls $f'(x) \leq 0$ in einem Intervall (a, c) links von c und $f'(x) \geq 0$ in einem Intervall (c, b) rechts von c, dann ist c ein* **lokaler Minimumpunkt***;*
- *Falls $f'(x) < 0$ sowohl in einem Intervall (a, c) links von c als auch in einem Intervall (c, b) rechts von c, dann ist c kein lokaler Extrempunkt;*
- *Falls $f'(x) > 0$ sowohl in einem Intervall (a, c) links von c als auch in einem Intervall (c, b) rechts von c, dann ist c kein lokaler Extrempunkt.*

Ob die erste Ableitung links und rechts von einem stationären Punkt c positiv oder negativ ist, kann man auch mit Hilfe der zweiten Ableitung $f''(c)$ überprüfen.
Ist $f''(c) > 0$, so ist f' links von c negativ und rechts von c positiv, also muss c ein Minimumpunkt sein. Die Funktion ist in der Nähe von c konvex.
Ist $f''(c) < 0$, so ist f' links von c positiv und rechts von c negativ, also muss c ein Maximumpunkt sein. Die Funktion ist in der Nähe von c konkav.
Es gilt also folgendes Kriterium für die zweite Ableitung:

Satz 3.7. *Es sei f zweimal differenzierbar und $f'(c) = 0$.*

a) Ist $f''(c) < 0$, so ist c ein **lokaler Maximumpunkt***.*

b) Ist $f''(c) > 0$, so ist c ein **lokaler Minimumpunkt***.*

c) Ist $f''(c) = 0$, so ist keine Entscheidung möglich.

3.8 Wendepunkte

Ein Punkt, in dem die zweite Ableitung f'' das Vorzeichen wechselt, heißt **Wendepunkt**. Wendepunkte sind also lokale Extrempunkte der Ableitung f'. Dies sind Punkte, an denen die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert von konkav auf konvex oder umgekehrt. Potentielle Punkte für Wendepunkte sind also Punkte x mit $f''(x) = 0$.
Für die Überprüfung, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, muss man dann noch überprüfen, ob f'' in diesem Punkt auch das Vorzeichen wechselt.

3.9 Taylor-Polynome

Die Tangente in x_0 kann man als lineare Approximation der Funktion $f(x)$ in der Nähe von x_0 auffassen. Es gilt also

$$f(x) \approx g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

für $|x - x_0|$ klein. Wir nennen die lineare Funktion g die **lineare Approximation** von f in x_0. Es gilt dann $f(x_0) = g(x_0)$ und $f'(x_0) = g'(x_0)$ und die lineare Funktion $g(x) = ax + b$ ist durch diese beiden Gleichungen charakterisiert.
Sucht man allgemeiner eine Approximation durch ein Polynom n-ter Ordnung

$$p_n(x) = a_n(x - x_0)^n + \ldots + a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0$$

mit

$$p_n(x_0) = f(x_0),\ p_n'(x_0) = f'(x_0),\ \ldots,\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

so erhält man das **Taylor-Polynom** n-ter Ordnung von f im Punkt $x = x_0$:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Für das sogenannte Restglied $R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)$ gilt die folgende **Lagrange'sche Darstellung des Restgliedes**.

Satz 3.8. *Sei p_n das Taylor-Polynom n-ter Ordnung für die Funktion f im Punkt x_0 und*

$$R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x).$$

Dann gibt es einen Punkt z zwischen x_0 und x mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Gilt also $|f^{(n+1)}(z)| \leq M$ für alle z zwischen x_0 und x, so gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| = |f(x) - p_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}. \end{aligned}$$

3.10 Elastizitäten

Die Ableitung f' einer Funktion beschreibt die *absolute Änderung* des Funktionswertes bei einer kleinen Änderung des Arguments. Dagegen beschreiben sogenannte *Elastizitäten* die *relative Änderung* des Funktionswertes. Wenn man also wissen will, um wieviele Prozent sich der Funktionswert ändert, wenn man das Argument um 1% ändert, so lässt sich das approximativ mit Hilfe von Elastizitäten berechnen. Die formale Definition ist die folgende:

Definition 3.9. Für eine differenzierbare Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definieren wir die **Elastizität**

$$\mathrm{El}_x f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}.$$

Schreibt man $y = f(x)$ und $dy/dx = f'(x)$, so erhält man die intuitivere Formel

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

für die Elastizität, welche die relative Änderung von y im Vergleich zur relativen Änderung von x beschreibt.

Beispiel: Für $f(x) = a \cdot x^b$ gilt $\mathrm{El}_x f(x) = b$ für alle $x > 0$.

Die Nachfrage $f(x)$ heißt

- **elastisch**, falls $|\mathrm{El}_x f(x)| > 1$,
- **unelastisch**, falls $|\mathrm{El}_x f(x)| < 1$.

Beschreibt f eine Nachfragefunktion und ist $\mathrm{El}_x f(x) = -1$ für alle x, so bedeutet dies $f(x) = a/x$ und damit, dass Umsatz = Menge $\times$ Preis = $x \cdot f(x)$ konstant ist.
Elastische Nachfrage reagiert stark auf Preisänderungen, unelastische Nachfrage bedeutet schwache Reaktion auf Preisänderungen. Elastische Nachfrage gibt es also bei leicht zu substituierenden Gütern, eine unelastische Nachfrage bei schwer zu substituierenden.
Es gelten folgende Rechenregeln für Elastizitäten:

Summenregel:

$$\mathrm{El}_x(f(x) + g(x)) = \frac{f(x)\mathrm{El}_x f(x) + g(x)\mathrm{El}_x g(x)}{f(x) + g(x)}.$$

Produktregel:

$$\mathrm{El}_x(f(x)g(x)) = \mathrm{El}_x f(x) + \mathrm{El}_x g(x).$$

Anwendung:
Ist $f(x)$ eine Nachfragefunktion und $g(x) = x \cdot f(x)$ die zugehörige Erlösfunktion, dann gilt

$$\mathrm{El}_x g(x) = 1 + \mathrm{El}_x f(x).$$

Der Erlös ist also völlig unelastisch ($\mathrm{El}_x g(x) = 0$), falls $\mathrm{El}_x f(x) = -1$.

Insbesondere gilt:
Ist $\mathrm{El}_x f(x) > -1$, so ist $\mathrm{El}_x g(x) > 0$ und damit g wachsend.
Ist $\mathrm{El}_x f(x) < -1$, so ist $\mathrm{El}_x g(x) < 0$ und damit g fallend.

Bei unelastischer Nachfrage gibt es also einen Anreiz zu Preiserhöhungen, bei elastischer Nachfrage nicht!