



Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES



GUIA DO PROFESSOR



Software

Ondas trigonométricas

Objetivos da unidade

1. Mostrar alguns fenômenos descritos por funções trigonométricas;
2. Usar dados experimentais ou observacionais e fazer ajustes aproximados a funções elementares.

REQUISITOS DE SOFTWARE Requisitos de software Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Java 1.6+ e Adobe Flash Player 9.0+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons



UNICAMP



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



Ondas trigono- métricas

GUIA DO PROFESSOR

Sinopse

Neste software, estudamos fenômenos periódicos e aprendemos a modelar tais fenômenos usando a função seno. Ao longo das atividades, aprendemos como cada parâmetro a , b , c e d , da função $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ pode ser ajustado ao fenômeno observado. Os alunos verão que essa função pode ser aplicada para modelar as mais diversas situações, como, por exemplo, a rotação de uma roda gigante, as oscilações da maré ou o brilho de uma estrela.

Conteúdos

- Trigonometria, Função Seno;
- Trigonometria, Função Cosseno;
- Funções periódicas

Objetivos

1. Mostrar alguns fenômenos descritos por funções trigonométricas;
2. Usar dados experimentais ou observacionais e fazer ajustes aproximados a funções elementares.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Este software trata de algumas aplicações de funções trigonométricas e, portanto, os alunos já devem conhecer os princípios das funções seno e cosseno. Embora as atividades possam ser feitas em qualquer ordem, deve-se sugerir ao aluno que execute a sequência indicada no software. Além disso, é importante que os alunos se dirijam ao ambiente informático munidos de caderno de rascunho e de lápis ou caneta para anotações.

Material relacionado

- Experimentos: Roda Gigante;
- Vídeos: Os ângulos e as Torres, Um caminho para o Curral, Transportando, Alice e as relações trigonométricas;
- Software: Trigonometria e Raios Luminosos.



Introdução



Além de fornecer ferramentas geométricas e resultados matemáticos importantíssimos, a trigonometria dá origem a funções que são usadas em muitos ramos das ciências e das tecnologias. Apesar dessa importância, os alunos do ensino médio usualmente não entendem o significado ou o papel das funções trigonométricas no mundo moderno.

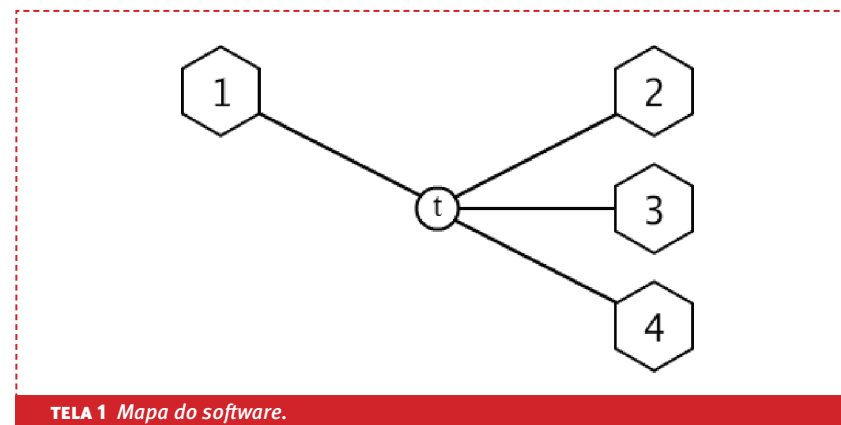
Este software não cobre todas as funções trigonométricas e usa apenas alguns exemplos de aplicações da trigonometria, mas já é um ponto de partida para os alunos entenderem as muitas implicações das funções trigonométricas.

O software

Estrutura do software

A ATIVIDADE 1 é uma revisão da função $a \sin(bx + c) + d$. Nas quatro primeiras partes, permite-se a variação de um parâmetro por vez, e, na quinta e última parte, o aluno pode variar os quatro parâmetros à vontade.

As ATIVIDADES 2, 3 e 4 são aplicações interessantes, envolvendo fenômenos ou situações periódicas nas quais a função $a \sin(bx + c) + d$ é útil para a descrição do brilho de uma estrela variável, da altura das marés e de uma roda gigante composta. Não é necessário que os alunos resolvam todas essas atividades, ficando a critério do professor decidir quais devem ser resolvidas.



TELA 1 Mapa do software.

Os valores digitados por um aluno ficam armazenados no computador que ele usar. Assim, se o aluno voltar ao mesmo computador, os dados que ele usou no software estarão disponíveis, a não ser que outro aluno utilize o mesmo computador para estudar o mesmo software. Estes valores podem ser apagados no canto superior direito da página do mapa do software, para que outro aluno também possa desenvolver a atividade plenamente.

1 A função seno

ATIVIDADE

A Atividade é composta por cinco partes, e é nelas que o aluno vai se familiarizar com a abordagem mais matemática do assunto. Esta atividade é longa em relação às demais, mas é fundamental para que as aplicações sejam significativas em termos de aprendizagem.

É importante lembrar que estamos usando *radianos* para os argumentos destas funções trigonométricas, e não graus. Se os alunos tiverem alguma dificuldade, lembre-os que π radianos correspondem a 180° .

Na PRIMEIRA PARTE, o aluno vai estudar o comportamento da função $\sin(x + c)$, sendo possível variar o parâmetro c , que é chamado de “fase”. Nesta parte, o aluno vai aprender que as funções seno e cosseno estão relacionadas apenas por uma diferença de fase.

Na SEGUNDA PARTE, a função $a \sin(x)$ é estudada, para o aluno entender a amplitude a . Na TERCEIRA PARTE, é a vez de estudar a função $\sin(bx)$, para a compreensão da frequência e do período desta função trigonométrica. Desta vez, o aluno deverá variar o parâmetro b . E, na QUARTA PARTE, é a vez da função $\sin(x) + d$, para o aluno ter uma noção de magnitude de uma função oscilatória variando o parâmetro d .

A PARTE 5 é o fechamento da atividade. Nela, o aluno pode variar todos os parâmetros da função $a \sin(bx + c) + d$, para encontrar a curva que melhor se ajuste à curva previamente dada. Essa curva é gerada aleatoriamente pelo software, assim, os alunos podem ter curvas distintas para fazer os ajustes.

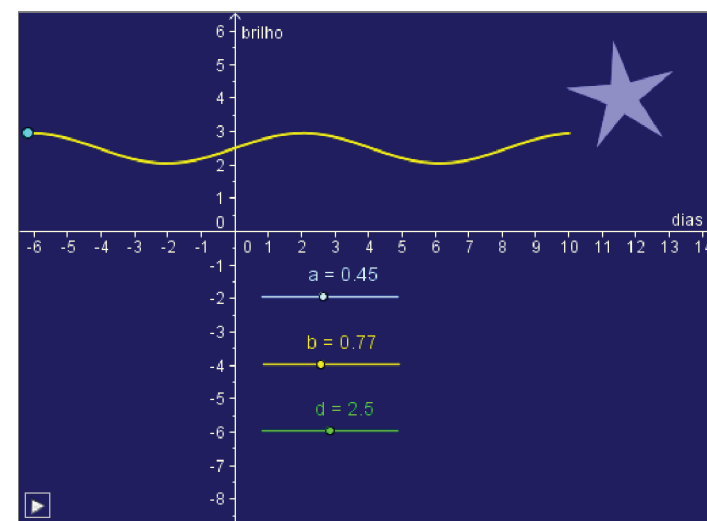
As questões para serem respondidas na ATIVIDADE 1 são simples, mas exigem o uso da calculadora em algumas delas. Os alunos podem usar a calculadora incluída no software ou outra calculadora científica. Para os propósitos da atividade, a aproximação decimal $\pi \approx 3,14$ é suficiente.

2 Brilho estelar

ATIVIDADE

Quando vemos as estrelas em um céu claro, podemos ter a impressão de que o brilho delas varia um pouco. Geralmente, essa variação se deve a flutuações de transparência da atmosfera. Mas a variação de que trata esta atividade só é observada por sensíveis telescópios profissionais. Os astrônomos descobriram que algumas estrelas brilham com intensidade que varia com frequências muito regulares e permanentes. Essas estrelas foram classificadas como “estrelas variáveis”, e são muito importantes, pois servem de referências para medir distâncias intergalácticas.

Esta atividade tem duas partes. Na primeira, os alunos são desafiados a encontrar a função $a \sin(bx + c) + d$ que melhor se ajusta ou se aproxima às observações dadas. Na segunda parte, os alunos verão que a curva de luminosidade mais realista tem alguns aspectos similares à função estudada, $a \sin(bx + c) + d$, mas tem algumas características diferentes também.



TELA 2

As questões e as respostas da primeira parte desta atividade são as seguintes:

1. Quais valores devem ser atribuídos aos parâmetros a , b e d , e na função $f(t) = a \sin(bt) + d$, de modo que ela descreva o brilho da estrela Delta Cephei?

Resposta esperada: Com base nas informações dadas, encontramos $a = 0,36$; $b = 1,16$; $d = 4,00$.

2. Ajuste o valor de c para que o brilho da estrela seja máximo quando $t = 0$.

Resposta esperada: Pela curva do gráfico, obtemos aproximadamente $c = 1,50$.

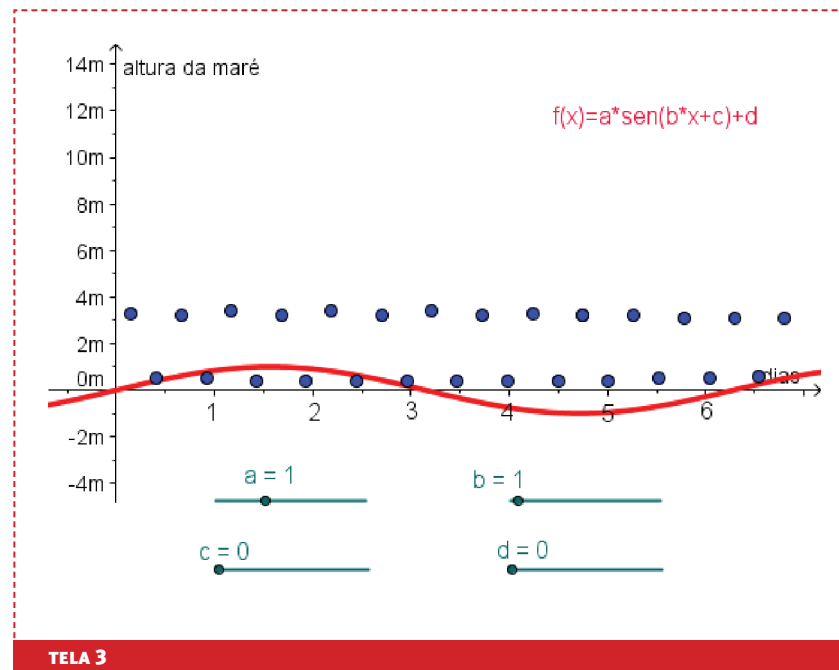
3 Marés

ATIVIDADE

Os fenômenos das marés altas e baixas estão relacionados à interação gravitacional da Terra, que pode ser analisada como um corpo elástico e fluido (em contraste com um ponto matemático ou com um corpo rígido, como a Lua e o Sol). No entanto, mesmo não conhecendo as causas das marés altas e baixas, temos os dados observados, aos quais podemos ajustar a função $a \sin(bx + c) + d$.

Os alunos devem ajustar os parâmetros para os dados plotados no gráfico. Observe que o valor aproximado para o parâmetro b será $b \approx 12,2$. O valor com maior precisão é 12,26. Isto implica no período da função ser $2\frac{\pi}{b} \approx 0,5125$. A unidade utilizada foi dia e, portanto, 0,5125 dia equivale a 12,3 horas, ou seja, o período entre as marés é de 12 horas e 20 minutos (de acordo com estes dados e com esta precisão).

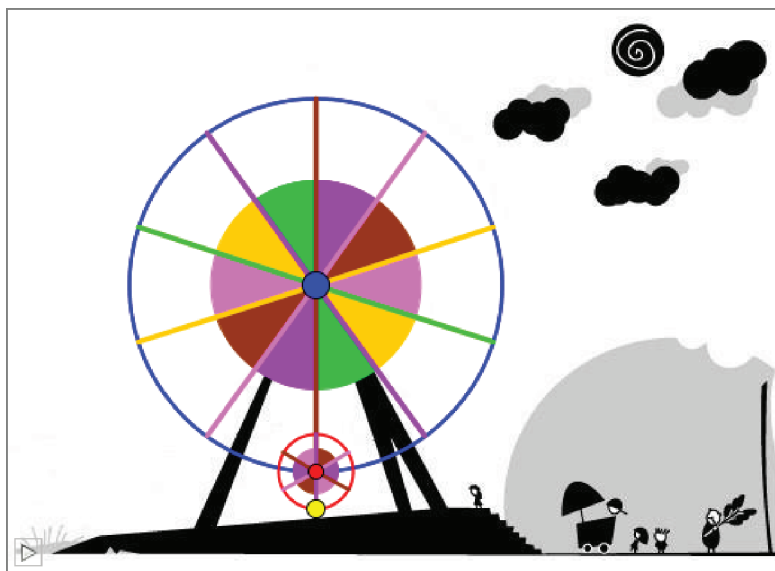
A PARTE 2 desta atividade apenas apresenta os dados de alguns meses em que outras variações aparecem.



4 Roda gigante composta

ATIVIDADE

A composição de engrenagens, em especial as de rodas, é comum em máquinas e em ferramentas desde a revolução industrial. Nesta atividade, os alunos podem ver, de maneira lúdica, a composição de duas rodas no modelo de uma roda gigante.



TELA 4

Na PARTE 1, ajustamos os parâmetros da função

$$h_1(t) = a_1 \times \text{sen}(b_1 \times t + c_1) + d_1$$

para a descrição da altura de um ponto P na circunferência maior. Com auxílio das informações e da animação, os alunos devem obter $a_1 = 20$; $b_1 = 0,052$; $c_1 = -1,62$; $d_1 = 24$.

Na PARTE 2, ajustamos os parâmetros da função

$$h_2(t) = a_2 \times \text{sen}(b_2 \times t + c_2) + d_2$$

para que ela descreva a altura da cadeira (ponto amarelo) em relação ao ponto P. Os alunos devem obter $a_2 = 4$; $b_2 = 0,26$; $c_2 = 0$; $d_2 = 0$.

Finalmente, na PARTE 3, os alunos poderão perceber que a altura do ponto P em relação ao chão no momento t é dada por $h_1(t) + h_2(t)$.

3.

A. Qual é a altura máxima em metros que a cadeira pode atingir?

Resposta esperada: 48.

B. De quanto em quanto tempo em segundos uma pessoa pode descer da cadeira? Note que uma pessoa só pode descer quando a cadeira está na altura mínima.

Resposta esperada: 120, que é o mínimo múltiplo comum de 24 e 120.

Fechamento

Este software vai dar uma noção aos alunos das possibilidades de usar as funções da classe $a \text{ sen}(bx + c) + d$, em que a , b , c e d são parâmetros ajustáveis, e x é a variável. Esperamos que, com este software, os alunos possam entender vários movimentos ou fenômenos periódicos.

Uma das principais características destas funções é a periodicidade. Uma função periódica se repete a cada período, ou melhor, seja $f(x)$ o valor da função para algum x , então a função é periódica de período p se $f(x + np) = f(x)$ para qualquer número inteiro n .

As funções trigonométricas $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$ são exemplos de funções periódicas de período 2π radianos.

Professor, aproveite para chamar a atenção dos alunos para vários fenômenos periódicos ou quase periódicos que acontecem todos os dias: o Sol nasce e se põe periodicamente, assim como a Lua; o nosso coração se expande e se contrai muitas vezes a cada minuto; nós inspiramos e expiramos algumas vezes por minuto; os processadores dos computadores fazem suas operações dentro de um ciclo de microssegundos; o som é a vibração do ar no qual a pressão oscila em um período de milissegundos; a luz é a vibração de campos eletromagnéticos que variam periodicamente a cada 10^{-15} segundos dependendo da cor, etc.

Aprofundamento

A função $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ pode ser expandida para a seguinte forma:

$$f(x) = d + a \sin(c) \cos(bx) + a \cos(c) \sin(bx)$$

que é uma função de período $2\pi/b$. Esta forma consiste nos primeiros termos da série de Fourier. Para melhor comparar com os livros textos do assunto, vamos mudar a escala da variável x e os nomes dos parâmetros: $f(x) = f(\bar{x})$, em que $\bar{x} = x/b$, o parâmetro $d = \bar{f}$ é um valor médio da função no intervalo $x \in [-b, b]$ ou $\bar{x} \in [-\pi, \pi]$, $a_1 = a \sin(c)$, $b_1 = a \cos(c)$. Assim, temos

$$f(\bar{x}) = \bar{f} + a_1 \cos(\bar{x}) + b_1 \sin(\bar{x})$$

Fourier mostrou que, de posse de uma função $g(\bar{x})$ com algumas propriedades (pelo menos integrável no intervalo $\bar{x} \in [-\pi, \pi]$), podemos encontrar os parâmetros \bar{f} , a_1 e b_1 de maneira inequívoca:

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g d\bar{x}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \cos(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \sin(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$g(\bar{x}) \approx f(\bar{x})$$

E, assim, a função $g(\bar{x})$ pode ser aproximada pela parte da série de Fourier $f(\bar{x}) = \bar{f} + a_1 \cos(\bar{x}) + b_1 \sin(\bar{x})$. Se quiser conhecer mais sobre este assunto, procure na biblioteca de sua faculdade ou na internet o tema *Séries de Fourier*.

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – contexto e aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2007. Cap 17, sec. 7.

PAIVA, Manoel. **Matemática – Conceitos, linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna, 2007. Vol 2, Cap 10.

BOYCE, William e di PRIMA, Richard. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, Editora LTC, 2008, 8ª. ed. Cap 10, sec. 2.



Ficha técnica

AUTOR

Samuel Rocha de Oliveira

REVISORES

Língua Portuguesa

Ana Cecília Agua de Melo

PROJETO GRÁFICO

Preface Design

ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara

**UNIVERSIDADE ESTADUAL
DE CAMPINAS****Reitor**

Fernando Ferreira Costa

Vice-Reitor

Edgar Salvadori de Decca

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Euclides de Mesquita Neto

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA**Coordenador Geral**

Samuel Rocha de Oliveira

Coordenador de Software

Leonardo Barichello

Coordenador de Implementação

Matias Costa

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)****Diretor**

Jayme Vaz Jr.

Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 