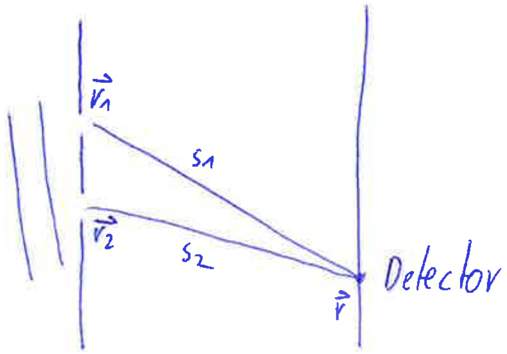
10. Quantum coherence functions

10.1 Classical coherence functions

Double-slit experiment:



Condition for interference:

$$\Delta s \leq \frac{c}{\Delta\omega} \quad (10.1)$$

, where $\Delta\omega$ ... bandwidth of the light (spectral)

$\Delta s = |s_1 - s_2|$ ... path length difference

$\Rightarrow$ ~~Δs~~ coherence length

$$\Delta s_{coh} = \frac{c}{\Delta\omega} \quad (10.2)$$

coherence time

$$\Delta t_{coh} = \frac{\Delta s_{coh}}{c} = \frac{1}{\Delta\omega} \quad (10.3)$$

$\Rightarrow$ interference, if $\Delta t_{coh} \cdot \Delta\omega \lesssim 1 \quad (10.4)$

Quantitative derivation

Field at the detector at time t is superposition of fields at positions $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ at earlier times $t_1 = t - \frac{s_1}{c}$, $t_2 = t - \frac{s_2}{c}$

$$E(\vec{r},t) = k_1 E(\vec{r}_1,t_1) + k_2 E(\vec{r}_2,t_2)$$

(k_1, k_2 .. complex geom. factors)

Note: We assume both fields have same polarization
=) scalar

Detector is "slow" compared to light frequency
=) measures only mean light intensity

$$I(\vec{r}) = \langle |E(\vec{r},t)|^2 \rangle \quad (10.6)$$

where $\langle \dots \rangle$ is the time average

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt \quad (10.7)$$

In the following we assume: time average is stationary
$\Leftrightarrow$ independent of t_0

From (10.5)

$$I(\vec{r}) = |K_1|^2 \langle |E(x_1)|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E(x_2)|^2 \rangle + 2\,\mathrm{Re}\left(K_1^* K_2 \langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle \right) \quad (10.8)$$

with $x_i = (\vec{r}_i, t_i)$

Using: $I_1 = |K_1|^2 \langle |E(x_1)|^2 \rangle$
$I_2 = |K_2|^2 \langle |E(x_2)|^2 \rangle$ (10.9)

and the normalized first order coherence function:

$$\gamma^{(1)}(x_1,x_2) = \frac{\langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}} \quad (10.10)$$

$$\Rightarrow I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \mathrm{Re}\left[\gamma^{(1)}(x_1,x_2)\right] \quad (10.11)$$ (K_i...purely imaginary)

with $\gamma^{(1)}(x_1,x_2) = |\gamma^{(1)}(x_1,x_2)| \cdot e^{i\phi_{12}}$ (10.12)

and ~~ϕ_{12} = ...~~

$$\Rightarrow I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, |\gamma^{(1)}(x_1,x_2)| \cos(\phi_{12}) \quad (10.13)$$

where ϕ_{12} depends on Δs

Note:

- (10.13) $\Rightarrow$ interference if $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \neq 0$
- three cases:

$$|\gamma^{(1)}(x_1,x_2)| = 1 \Rightarrow \text{full coherence}$$

$$0 < |\gamma^{(1)}(x_1,x_2)| < 1 \Rightarrow \text{partial coh.} \qquad (10.14)$$

$$|\gamma^{(1)}(x_1,x_2)| = 0 \Rightarrow \text{no coh.}$$

Visibility of interference signal:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \qquad (10.15)$$

$\Rightarrow$ (from 10.13) $$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma^{(1)}(x_1,x_2)|}{I_1 + I_2} \qquad (10.16)$$

Remarks

- full coherence $\Rightarrow$ visibility (contrast) maximal:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \qquad (10.17)$$

- no coh. $\Rightarrow$ no visibility $V = 0$ (10.18)

- For full coherence, (10.10) yields

$$|\langle E^*(x_1) E(x_2)\rangle| = \sqrt{\langle |E(x_1)|^2\rangle}\sqrt{\langle |E(x_2)|^2\rangle} \qquad (10.19)$$

Examples:

1) temporal coherence of stationary light field at fixed position. Consider monochromatic field that propagates in z-direction. At position z and times t and $t+\tau$:

$$\Rightarrow \quad E(x_1) = E(z,t) = E_0\, e^{i(kz-\omega t)}$$
$$E(x_2) = E(z,t+\tau) = E_0\, e^{i(kz-\omega(t+\tau))} \qquad (10.20)$$

$$\Rightarrow \quad \langle E^*(x_1)\, E(x_2)\rangle = E_0^2\, e^{-i\omega\tau} \qquad (10.21)$$

$$\Rightarrow \quad g^{(1)}(x_1,x_2) = g^{(1)}(\tau) = g^{(1)*}(-\tau) = e^{-i\omega\tau} \qquad (10.22)$$

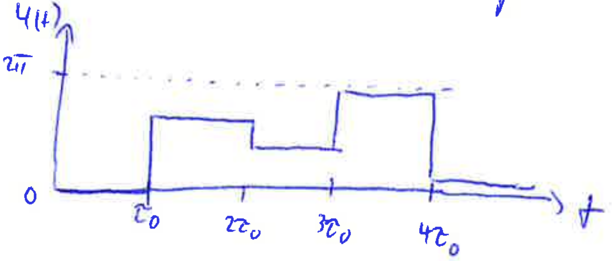
$\Rightarrow \quad |g^{(1)}(\tau)| = 1 \quad \Rightarrow$ fully temporal coherent

Note:
- $\langle E^*(t)\, E(t+\tau)\rangle$ is also called auto-correlation function
- example is non-physical: There are no perfect monochrom. light sources

2) more realistic model of "monochromatic" light:
The source emits "monochrom" wavetrains of the coherence time τ_0, ~~Each~~ which are separated by sudden phase jumps at $\tau_0, 2\tau_0, \ldots$ (spont. emission)

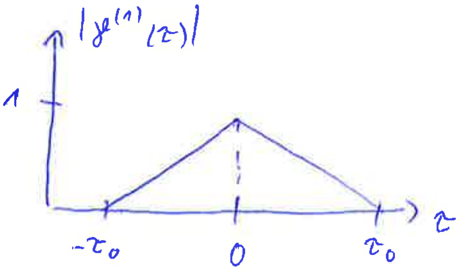
$$\Rightarrow \quad E(z,t) = E_0\, e^{i(kz-\omega t)} \cdot e^{i\varphi(t)} \qquad (10.23)$$

with $\varphi(t)$: random phase jump within $[0, 2\pi[$ at times $n\cdot\tau_0$



$$\Rightarrow \quad g^{(1)}(\tau) = \left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{-i\omega\tau} \quad \text{for } \tau \le \tau_0 \quad \&$$
$$= 0 \quad \tau > \tau_0 \qquad (10.24)$$

$$|g^{(1)}(\tau)| = \left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right) \quad \text{for } \tau \le \tau_0$$
$$0 \quad \tau > \tau_0 \qquad (10.25)$$



perfect coherence for $\tau = 0$, but coherence vanishes when τ is longer than the coherence time τ_0.

10.2 Quantum mechanical description

10.2 Quantentheoretische Beschreibung

Bemerkungen:

* Bestimmung von Lichtintensität ⇝ Messung der Reaktion eines Systems, das das Licht durch Absorption von Photonen abschwächt
* Im Folgenden: Detektor ≙ einzelnes Atom, welches durch Licht ionisiert wird und dessen Photoelektron detektiert wird

Kopplung zwischen Einzelatom-Detektor und quantisiertem Lichtfeld: Dipol-WW-Operator (vgl. (4.2)):

$$\hat{H}_{WW} = -\hat{d}\cdot\hat{E}(\vec{r},t) \qquad (10.\cancel{33}\,26)$$ (Heisenberg-picture)

wobei (vgl. (6.18))

$$\hat{E}(\vec{r},t) = i\sum_s \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\,\vec{\varepsilon}_s\left[\hat{a}_s(t)\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) - \hat{a}_s^{\dagger}\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})\right] \qquad (10.\cancel{34}\,{}^{-7}_{27})$$

Dipolnäherung ($|\vec{k}\cdot\vec{r}| \ll 1$)

$$\rightsquigarrow \hat{E}(\vec{r},t) \approx i\sum_s \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\,\vec{\varepsilon}_s\left[\hat{a}_s(t) - \hat{a}_s^{\dagger}(t)\right] \qquad (10.\cancel{35}\,28)$$

Absorption ⇝ Betrachte nur Feldkomponente mit „positiver Frequenz" (Komp. abh. von Vernichter):

$(\hat{E}^{(+)} \sim \hat{a}\,e^{-i\omega t})$ (SP)

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t) = i\sum_s \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\,\vec{\varepsilon}_s\,\hat{a}_s(t) \qquad (10.\cancel{36}\,29)$$

Anfangsbed.: Atom in $|g\rangle$ und Feld in $|i\rangle$

Endzustand: Atom ionisiert ($|e\rangle$) und Feld in $|f\rangle$

Kurz: Anfangszust. $|I\rangle = |g\rangle|i\rangle$

Endzust. $|F\rangle = |e\rangle|f\rangle$

Übergangs-Matrixelement:

$$\langle F|\hat{H}_{ww}|I\rangle = -\langle e|\hat{d}|g\rangle\langle f|\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)|i\rangle \quad (10.\cancel{37}\,30)$$

Übergangswkeit des Atom-Feld-Systems prop. zu

$$|\langle F|H_{ww}|I\rangle|^2 \quad (10.38)$$

Übergangswkeit des Feldes von Zust. $|i\rangle$ nach $|f\rangle$ prop. zu

$$|\langle f|\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)|i\rangle|^2 \quad (10.39)$$

Wir messen nur Endzust. des Detektors (des Atoms)
⇝ summiere über alle mögl. Endzust. des Feldes:

$$\sum_f |\langle f|\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)|i\rangle|^2$$

$$= \sum_f \langle i|\hat{E}^{(-)}(\vec{r},t)|f\rangle\langle f|\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)|i\rangle$$

$$= \langle i|\hat{E}^{(-)}(\vec{r},t)\cdot\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)|i\rangle \quad (10.\cancel{40}\,33)$$

wobei $$\hat{E}^{(-)}(\vec{r},t) = [\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)]^{\cancel{*}\,\dagger} \quad (10.41)$$

und ang. wurde, dass die Zust. $|f\rangle$ eine vollst. Basis bilden.

<u>Beachte</u>: Bisjetzt angen.: Feld in reinem Zust. $|i\rangle$.
Allgemeiner: Feldzust. entspricht statistischem Gemisch ⇝ verwende Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |i\rangle\langle i| \quad (10.42)$$

Damit wird aus Erwartungswert (10.~~40~~ 33) das Ensemblemittel

$$\mathrm{Sp}\{\hat{\rho}\hat{E}^{(-)}(\vec{r},t)\cdot\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)\}$$
$$= \sum_i P_i \langle i|\hat{E}^{(-)}(\vec{r},t)\cdot\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)|i\rangle \qquad (10.43)$$

Ab jetzt angen.: Felder gleicher Polarisation
⇝ als Skalare behandeln

Die Absorptionsw.keit ist somit proportional zu

$$I(\vec{r},t) = \mathrm{Sp}\{\hat{\rho}\hat{E}^{(-)}(\vec{r},t)\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)\} \qquad (10.44)$$

wobei $I(\vec{r},t)$: Intensität.

Betrachte nun Doppelspaltexp. aus Kap. 10.1:
Feldkomp. positiver Freq. am Ort des Detektors $\vec{r}$
(vgl. (10.5))

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t) = K_1 E^{(+)}(\vec{r}_1,t) + K_2\hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2,t) \qquad (10.45)$$

⇝ Intensität am Ort des Detektors:

$$I(\vec{r},t) = \mathrm{Sp}\{\hat{\rho}\hat{E}^{(-)}(\vec{r},t)\hat{E}^{(+)}(\vec{r},t)\}$$
$$= |K_1|^2 G^{(1)}(x_1,x_1) + |K_2|^2 G^{(1)}(x_2,x_2)$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\left[K_1^* K_2 G^{(1)}(x_1,x_2)\right] \qquad (10.46)$$

wobei wie zuvor $x_i = \vec{r}_i, t_i$ und

$$G^{(1)}(x_i,x_j) = \mathrm{Sp}\{\hat{\rho}\hat{E}^{(-)}(x_i)\hat{E}^{(+)}(x_j)\}, \quad i,j = 1,2 \qquad (10.47)$$

Beachte:

* $G^{(1)}(x_1,x_2)$ ist allg. Korrelationsfktn erster Ordnung.
* $G^{(1)}(x_1,x_1)$ & $G^{(1)}(x_2,x_2)$ sind davon Spezialfälle und entsprechen den von x_1 & x_2 am Detektor eintreffenden Intensitäten.