

1. SEMIKLASSISCHE LICHT-ATOM-WECHSELWIRKUNG

Hamiltonop. eines 1-e-Systems (z.B. H-Atom):

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \quad (1.1)$$

Die Lösung sei:

$$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (1.2)$$

↓ ↓
Eigenzustände Eigenwerte

Hamiltonop. für WW mit e.m. Feld:

$$\hat{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} [\hat{p} + e\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 - e\phi(\vec{r}, t) + V(r) \quad (1.3)$$

↑ ↑
Vektor- und Skalares Potential
des e.m. Feldes

wobei:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1.5)$$

\vec{E}, \vec{B} sind invariant unter Transformationen:

$$\phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t) \quad (1.7)$$

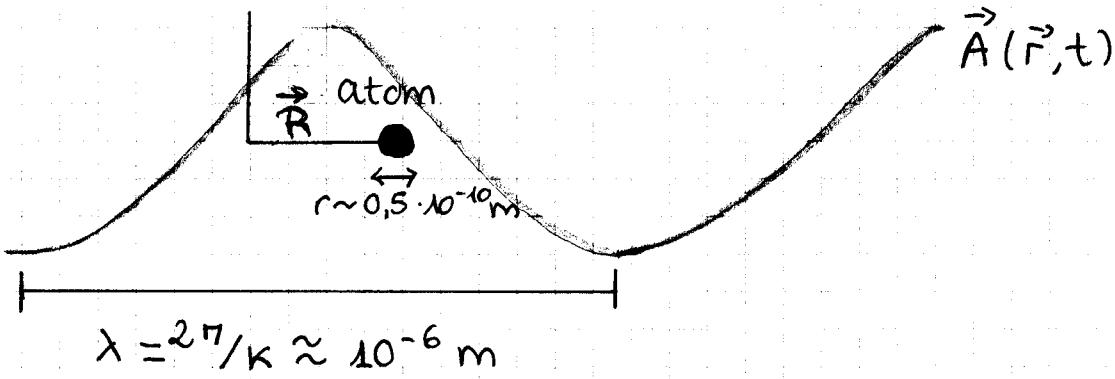
Annahmen:

* Coulombbeichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ und $\phi = 0$.

* Keine Ladungen oder Ströme in der Nähe des Atoms

$$\sim \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = 0 \quad (\text{Wellengl.})$$

* Dipolnäherung ($\vec{R} \cdot \vec{r} \ll 1$)



$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) \approx \vec{A}(\vec{R}, t) = \vec{A}(t) \quad (1.8)$$

Ort des Atoms für $\vec{R} = 0$

Das e⁻ sieht ein räumlich konst. Potential!

* Wähle:

$$\chi(\vec{r}, t) = -\vec{A}(t) \cdot \vec{r} \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \chi(\vec{r}, t) = -\vec{A}(t)$$

$$\frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{H}'(\vec{r}, t) &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + v(r) - e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \\ &= \hat{H}_0 - \hat{d} \cdot \vec{E}(t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$\hat{H}_1(t)$

mit $\hat{d} = e \cdot \vec{r}$ = Dipoloperator.

1.1. Zeitabhängige Störungstheorie

Zeitabhängige Schrödingergl.:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)) |\psi(t)\rangle \quad (1.11)$$

Entwicklung von $|\Psi(t)\rangle$ in Eigenfktn. von \hat{H}_0 :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-i\frac{\omega}{\hbar} E_{nt}} |n\rangle \quad (1.12)$$

Einsetzen in SQL (1.11) und Umformen liefert:

$$i\hbar \dot{C}_k(t) = \sum_n C_n(t) e^{-i\omega_{nk} t} \langle k | \hat{H}_1(t) | n \rangle \quad (1.13)$$

gekoppeltes DGL-System
mit $\omega_{nk} = (E_n - E_k) / \hbar$.

Beachte:

Um Übergänge von $|n\rangle$ nach $|k\rangle$ zu haben, muss Matixelement $\neq 0$ sein.

Störungsrechnung:

- * Bei $t=0$ System in Anfangszustand $|i\rangle \rightsquigarrow C_k(0) = \delta_{ki}$.
- * $\hat{H}_1(t)$ klein \Rightarrow Besetzung verbleibt hauptsächlich im Anfangszustand $|i\rangle$.

$$|C_k(t)|^2 \ll 1 \quad \forall k \neq i$$

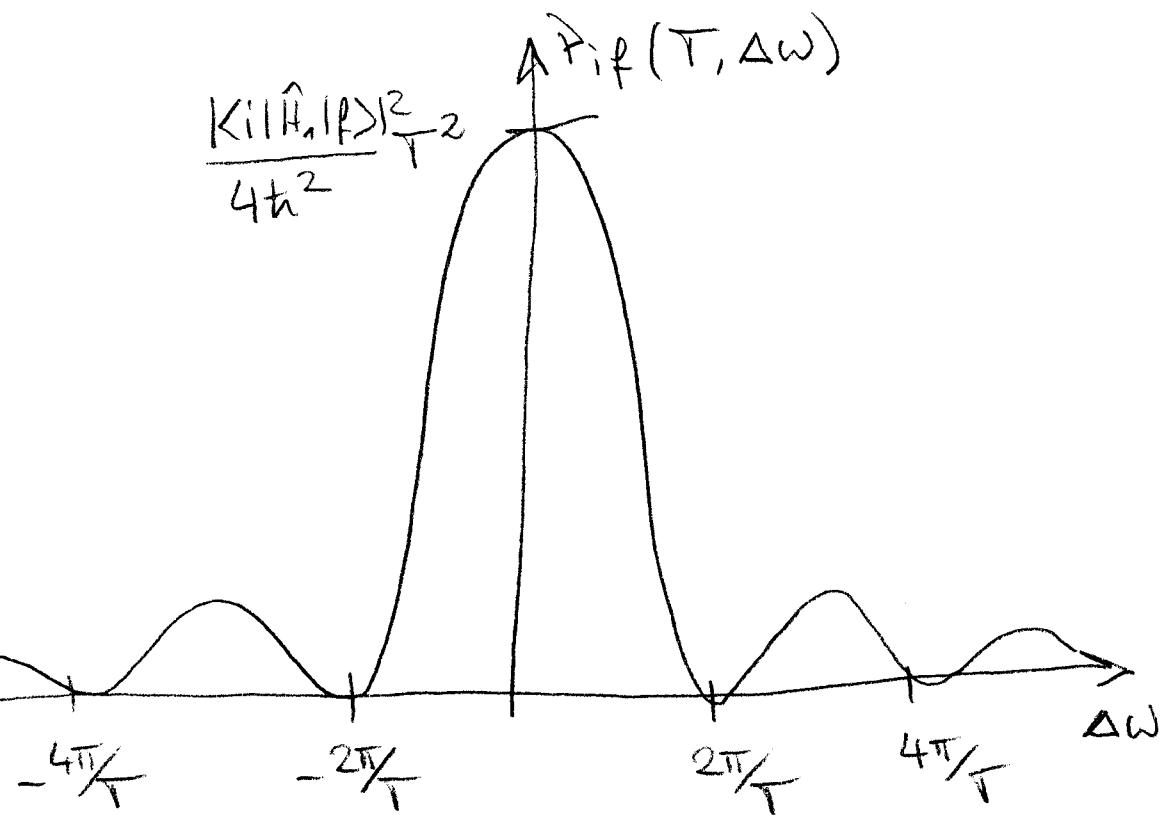
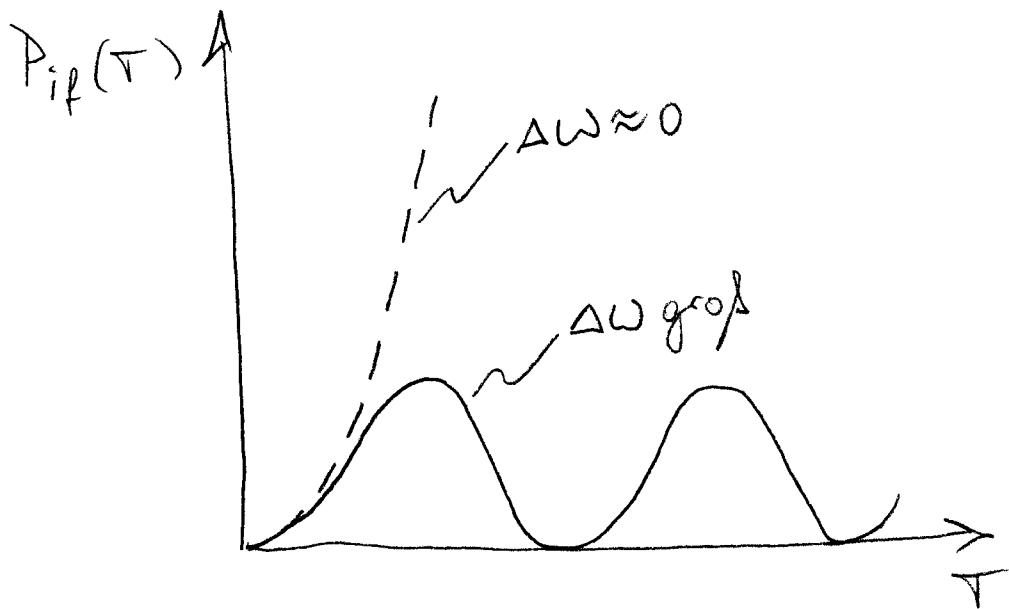
$$\Rightarrow i\hbar \dot{C}_f(t) = e^{-i\omega_{if} t} \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle \quad (1.14)$$

mit $C_f(0) = 0$ ergibt sich:

$$C_f(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{-i\omega_{if} t'} \langle f | \hat{H}_1(t') | i \rangle dt' \quad (1.15)$$

Beachte:

$P_{if}(t) = |C_f(t)|^2$: Übergangswahrscheinlichkeit
 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$. Hier: $P_{if} \ll 1$.



z.B. sinusförmige Störung:

$$\hat{H}_1(t) = -\hat{d} \cdot \vec{E}_0 \cos \omega t \quad \text{für } 0 < t < T, \\ \text{sonst } \hat{H}_1(t) = 0.$$

$$\sim P_{if}(T) = \frac{1}{4\pi^2} |\langle f | \hat{H}_1 | i \rangle|^2 Y(\Delta\omega, T) \quad (1.16)$$

mit $Y(\Delta\omega, T) = \frac{\sin^2(\Delta\omega T/2)}{(\Delta\omega/2)^2}$; $\Delta\omega = \omega - \omega_{fi}$

~ Zeige Abb. 4.1 und 4.2 "Gerry and Knight".

Beachte:

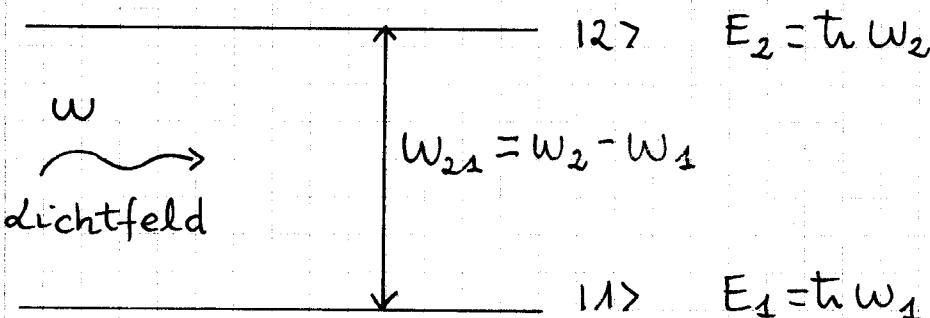
1
* Für $T \rightarrow \infty$: $\frac{1}{2\pi T} Y(\Delta\omega, T) \sim \delta(\Delta\omega)$

* $P_{if} \sim |\langle f | \hat{H}_1 | i \rangle|^2 \sim |\vec{E}_0|^2 = I \Rightarrow$ Besetzung in $|f\rangle$ hängt linear von der Intensität des e.m. Feldes ab.

1.2. Zwei-Niveau-System ohne Störungstheorie

Beim Störungstheorie ist vorausgesetzt, dass Besetzung im Anfangszustand fast unverändert bleibt. Ein starkes bzw. nahresonantes Feld verursacht jedoch nach → großen Besetzungstransfer!
kurzer Zeit

Zum Glück: 2-Niveau-System unter Einfluss eines äußeren e.m. Feldes lässt sich "exakt" lösen!



$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \vec{d} \cdot \vec{E}(t) \quad , \quad \vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar \omega_1 |1\rangle\langle 1| \quad (1.17)$$

Ansatz:

$$|\Psi(t)\rangle = C_1(t) e^{-i\omega_1 t} |1\rangle + C_2(t) e^{-i\omega_2 t} |2\rangle \quad (1.18)$$

Einsetzen in SQL (1.11):

$$i\hbar \dot{C}_1(t) = -d_{12} E_0 e^{-i\omega_2 t} \cos(\omega t) C_2(t) \quad (1.19)$$

$$i\hbar \dot{C}_2(t) = -d_{21} E_0 e^{+i\omega_1 t} \cos(\omega t) C_1(t) \quad (1.20)$$

mit Dipolmatrixelement:

$$d_{12} = \langle 1 | \vec{d} \cdot \vec{E} | 2 \rangle = e \langle 1 | \vec{r} \cdot \vec{E} | 2 \rangle = d_{21}^* = d$$

$$\dot{C}_1(t) = i\Omega_0 e^{-i\omega_2 t} \cos(\omega t) C_2(t) \quad (1.21)$$

$$\dot{C}_2(t) = i\Omega_0 e^{+i\omega_1 t} \cos(\omega t) C_1(t) \quad (1.22)$$

mit

$$\Omega_0 := \frac{d E_0}{\hbar}$$

Rabi-Frequenz (1.23)

$$\text{Benutze: } \cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

\Rightarrow

$$\dot{C}_1(t) = i \frac{\Omega_0}{2} \left[e^{-i(\omega_{21}-\omega)t} + e^{\cancel{-i(\omega_{21}+\omega)t}} \right] C_2(t) \quad (1.24)$$

$$\dot{C}_2(t) = i \frac{\Omega_0}{2} \left[e^{\cancel{i(\omega_{21}+\omega)t}} + e^{i(\omega_{21}-\omega)t} \right] C_1(t) \quad (1.25)$$

Rotating-Wave-Approximation (RWA):
(Drehwellennäherung):

Schnell oszillierende Terme tragen kaum zur dynamischen Entwicklung des Systems bei.

Mit $\delta = \omega - \omega_{21}$:

$$\dot{c}_1(t) = \frac{i\omega_0}{2} e^{i\delta t} c_2(t) \quad (1.26)$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{i\omega_0}{2} e^{-i\delta t} c_1(t) \quad (1.27)$$

Zeitabhängigkeit $e^{i\delta t}$ kann beseitigt werden:

$$\tilde{c}_1(t) = c_1(t) e^{-i\delta/2 t} \quad (1.28)$$

$$\tilde{c}_2(t) = c_2(t) e^{i\delta/2 t} \quad (1.29)$$

es gilt: $|\tilde{c}_i(t)|^2 = |c_i(t)|^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1(t) \\ \tilde{c}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\delta & \omega_0 \\ \omega_0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1(t) \\ \tilde{c}_2(t) \end{pmatrix}} \quad (1.30)$$

↓
Transformation in rotierendes Koordinatensystem,
das mit dichtfreq. ω rotiert.

a) $\delta = 0$: Einfachster Fall:

$$\dot{\tilde{c}}_1(t) = \frac{i\omega_0}{2} \tilde{c}_2(t) \quad (1.31)$$

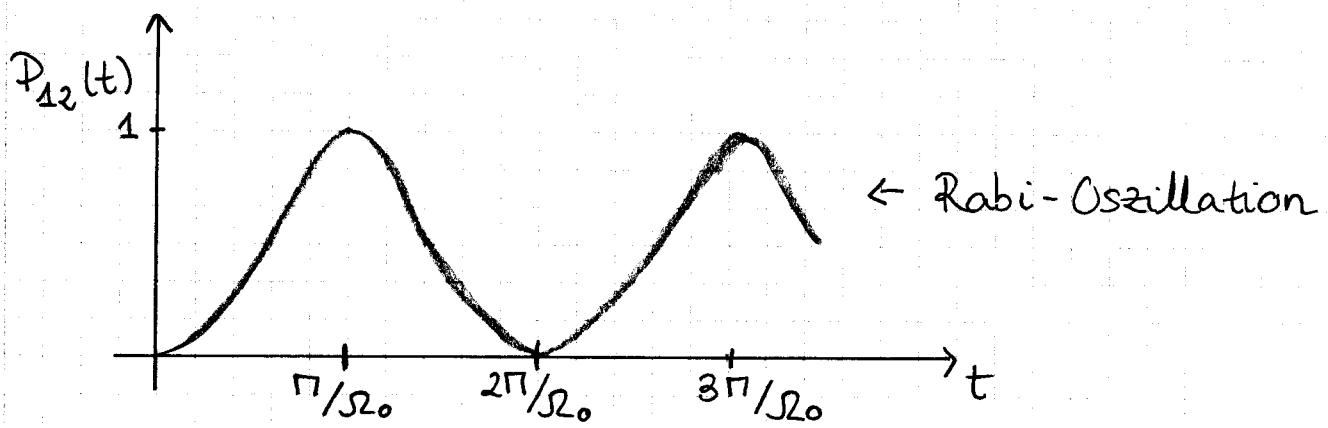
$$\ddot{\tilde{c}}_1(t) = \frac{i\omega_0}{2} \dot{\tilde{c}}_2(t) = -\frac{\omega_0^2}{4} \tilde{c}_1(t) \quad (1.32)$$

Lösung: (mit $\tilde{c}_1(0) = 1$ und $\tilde{c}_2(0) = 0$):

$$\tilde{c}_1(t) = \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \quad (1.33)$$

$$\tilde{c}_2(t) = i \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \quad (1.34)$$

$$\Rightarrow P_{12}(t) = |\tilde{C}_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_0 t}{2}\right) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_0 t)] \quad (1.35)$$



System oszilliert zw. Grund- und angeregtem Zustand mit Rabifreq. Ω_0 .

Bemerkungen:

- * Störungstheorie (Kap. 1.2) beschreibt nur Anfang der Rabi-Osz. ($P_{12}(t) \sim t^2$)
- * Übergangswahrsch. $P_{12}(t)$ hängt jetzt nicht-linear von der Int. des Dichtfeldes ab.

• Spezialfälle:

* π -Puls: Einstrahlzeit $\tau = \pi/\Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \tau = \pi$

$$\Rightarrow P_{12}(\tau) = 1 \Rightarrow \text{Besetzung wird invertiert!}$$

* $\pi/2$ -Puls: Einstrahlzeit $\tau = \pi/2\Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \tau = \pi/2$.

$$\Rightarrow \tilde{C}_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \tilde{C}_2(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |\Psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i|2\rangle) \quad (1.36)$$

System ist in einer Superposition aus Grund- und angeregtem Zustand!

Zeitentwicklung nach $\pi/2$ -Puls:

$$|\Psi(t)\rangle_{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_{21}t} |2\rangle \quad (1.37)$$

wobei: $E_1 = 0$ und $E_2 = \hbar \omega_{21}$.

Erwartungswert des Dipoloperators:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{d} | \Psi \rangle &= e \langle \Psi | \hat{r} | \Psi \rangle = \\ &= \frac{e}{2} \left[(\langle 1 | -ie^{i\omega_{21}t} \langle 2 |) \hat{r} (|1\rangle + ie^{i\omega_{21}t} |2\rangle) \right] = \\ &= \frac{e}{2} \left(ie^{i\omega_{21}t} \langle 1 | \hat{r} | 2 \rangle - ie^{-i\omega_{21}t} \langle 2 | \hat{r} | 1 \rangle \right) = \\ &= -\vec{d} \sin(\omega_{21}t) \quad (1.38) \end{aligned}$$

↓
Annahmen $\left\{ \begin{array}{l} \vec{d} \text{ reell} \\ \langle 1 | \hat{d} | 1 \rangle = 0, \langle 2 | \hat{d} | 2 \rangle = 0 \end{array} \right.$

Der Überlagerungszustand besitzt oszillierendes Dipolmoment!

* 2π -Puls: Einstrahlzeit $\tau = 2\pi/\omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \tau = 2\pi$.

$$\Rightarrow \tilde{C}_1(\tau) = -1 \text{ und } \tilde{C}_2(\tau) = 0$$

$$\Rightarrow |\Psi(\tau)\rangle = -|\Psi(0)\rangle$$

Die globale Phase des Zustands ändert das Vorzeichen
 \Rightarrow nach 4π -Puls wird der ursprüngliche Zustand wieder hergestellt!

(Eigenschaft der $SU(2)$ -Symmetrie).

b) $\delta \neq 0$: Rabi-Oszillation mit Verstimmung

Lösung für $\tilde{C}_1(0) = 1$ und $\tilde{C}_2(0) = 0$:

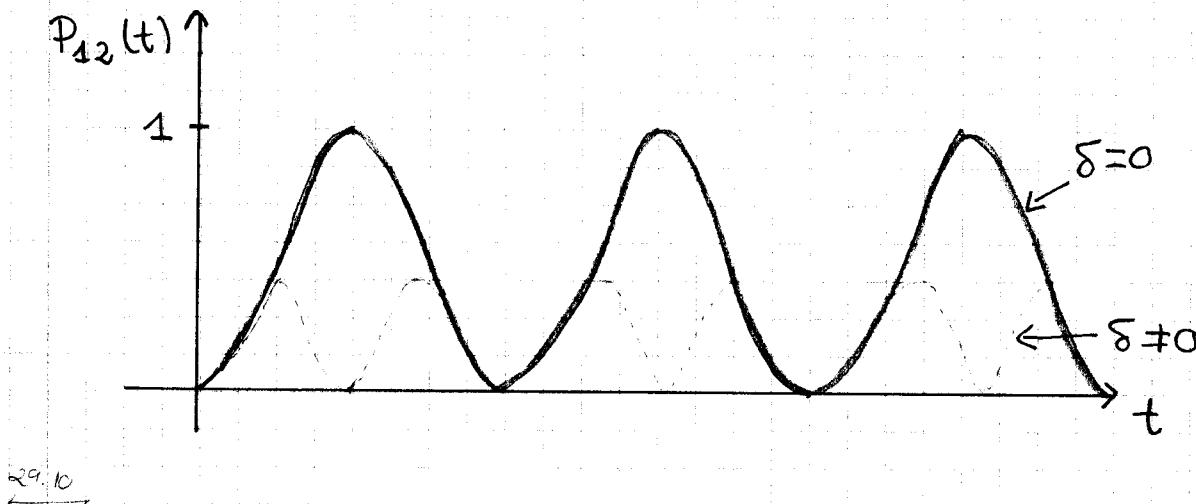
$$P_{12}(t) = |\tilde{C}_2(t)|^2 = \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2} [1 - \cos(\Omega t)] \quad (1.39)$$

mit $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2}$: effektive Rabi freq. (1.40)

$$\text{und } \delta = \omega - \omega_{24} \quad (1.41)$$

zwei Effekte:

- Oszillation mit reduzierter Amplitude
- Oszillationsfreq. erhöht.



1.3. Optische Bloch-Gleichungen

Beschreibung des Systems mit der Dichtematrix:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.42)$$

mit

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + C_2(t)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle \quad (1.43)$$

In Matrixdarstellung:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 C_1^* & C_1 C_2^* \\ C_2 C_1^* & C_2 C_2^* \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

* $S_{11} = |C_1(t)|^2$ und $S_{22} = |C_2(t)|^2$: Besetzungen, d.h. Wahrscheinlichkeiten, das System im Zustand $|1\rangle$ bzw. $|2\rangle$ zu finden.

* $S_{12} = S_{21}^*$: Kohärenzen, d.h. verschwinden sie \Rightarrow Phasen zw. Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ völlig undefined.

Zeitentwicklung der Koeffizienten:

$$\dot{S}_{11} = C_1 C_1^* + C_1 \dot{C}_1^* = i \frac{\gamma_0}{2} \left(e^{i\delta t} S_{12}^* - e^{-i\delta t} S_{12} \right) \quad (1.45)$$

↓
mit Gl. (1.26)

$$\text{Definiere: } \tilde{S}_{12} = e^{-i\delta t} S_{12} \quad (1.46)$$

$$\rightarrow \dot{S}_{11} = i \frac{\gamma_0}{2} (\tilde{S}_{12}^* - \tilde{S}_{12}) \quad (1.47)$$

Wir erhalten analog:

$$\dot{S}_{22} = i \frac{\gamma_0}{2} (\tilde{S}_{12} - \tilde{S}_{12}^*) \quad (1.48)$$

$$\dot{\tilde{S}}_{12} = -i\delta \tilde{S}_{12} + i \frac{\gamma_0}{2} (S_{22} - S_{11}) \quad (1.49)$$

~ Führe Dämpfungsterme ein, die die spontane Emission phänomenologisch berücksichtigen:
Zerfallsrate γ der Besetzung des angeregten Zustands S_{22} .

$$\begin{aligned} \dot{S}_{11} &= \gamma S_{22} + i \frac{\gamma_0}{2} (\tilde{S}_{12}^* - \tilde{S}_{12}) \\ \dot{S}_{22} &= -\gamma S_{22} + i \frac{\gamma_0}{2} (\tilde{S}_{12} - \tilde{S}_{12}^*) \\ \dot{\tilde{S}}_{12} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + i\delta\right) \tilde{S}_{12} + i \frac{\gamma_0}{2} (S_{22} - S_{11}) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad (1.50)$$

→ Optische Bloch-Gleichungen: Beschreiben (im Rahmen der RWA) vollständig die dicht-Atom-ww, inkl. spontaner Emission.

Dynamik des Systems:

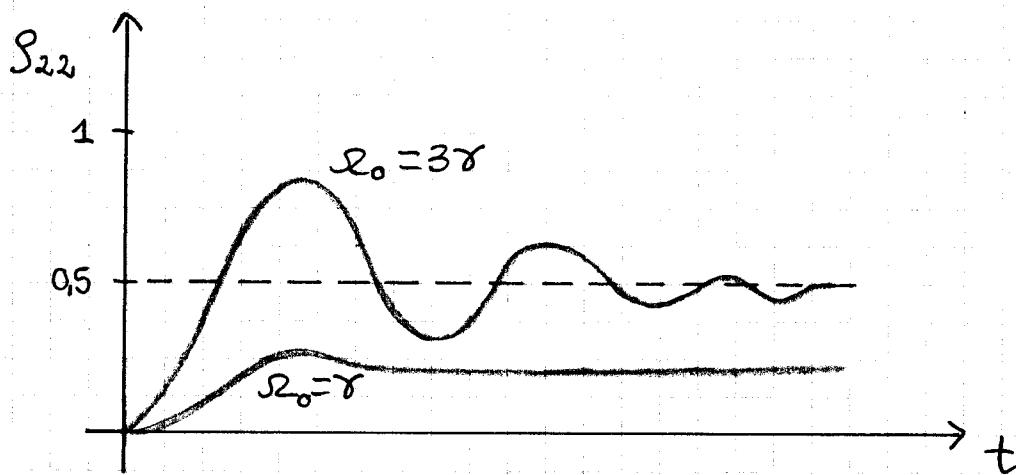
a) $t \ll 1/\gamma$:

→ Dämpfung durch spont. Emission hat keinen Effekt.

→ Rabiosz., falls $\gamma_0 > 1/\gamma$.

b) $t \gg 1/\gamma$:

→ Gleichgewichtslösung.



Führe ein $W = S_{22} - S_{11}$: Besetzungsinversion:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{S}}_{21} &= -\left(\frac{\gamma}{2} - i\delta\right)\tilde{S}_{21} - iW\frac{\gamma_0}{2} \\ \dot{W} &= -\gamma(W+1) - i\gamma_0(\tilde{S}_{21} - \tilde{S}_{21}^*)\end{aligned}\quad (1.51)$$

Gleichgewichtslösungen:

$$\tilde{S}_{21} = 0 \text{ und } W = 0$$

$$W = -\frac{1}{1+s} \quad \text{und} \quad \tilde{s}_{21} = \frac{i\omega_0}{2(\gamma/2 - i\delta)(1+s)} \quad (1.52)$$

mit

$$s = \frac{s_0}{1 + \frac{\gamma^2}{\delta^2}} \quad \text{und} \quad s_0 = \frac{2\omega_0^2}{\gamma^2} \quad (1.53)$$

s : Sättigungsparameter

s_0 : resonanter S.P. (für $\delta=0 \Rightarrow s_0=s$)

Bemerkungen:

- * s = Verhältnis aus Rabi freq. und Dämpfungsrate
- * s ist wichtiger Parameter der licht-atom-WW.

Mit:

$$\gamma = \frac{d^2 W_{21}}{3\pi\epsilon_0 t_0 c^3} \quad (1.54)$$

und

$$\omega_0 = \frac{d E_0}{t_0} \quad j I = \frac{1}{2} C \epsilon_0 E_0^2$$

folgt

$$s_0 = \frac{I}{I_s}$$

$$I_s = \frac{\pi h c}{3 \lambda^3 G}$$

(1.55) Sättigungsparameter

(1.56) Sättigungsintensität

mit $\tau = 1/\gamma$: Lebensdauer des angeregten Zustands.

typ. $I_s \approx 1-10 \text{ mW/cm}^2$.

Grenzfälle:

* $S \ll 1 \Rightarrow W \approx -1 \Rightarrow$ Besetzung hauptsächlich im Grundzustand.

* $S \gg 1 \Rightarrow W \approx 0 \Rightarrow$ 50/50 Besetzung des Grund- und angeregten Zustands.

Beachte:

Im Gleichgewicht ist eine Besetzungsinvolution unmöglich!

Besetzung des angeregten Zustands:

$$S_{22} = \frac{1}{2} (1 + W) = \frac{S}{2(1+S)} = \frac{S_0/2}{1+S_0+4\gamma^2/\gamma^2} \quad (1.57)$$

Photonenstreurate:

$$P_{ph} = \gamma S_{22} = \frac{\gamma}{2} \frac{S_0}{1+S_0+\frac{4\gamma^2}{\gamma^2}} \quad (1.58)$$

Für $S_0 = \infty \Rightarrow P_{ph}^{\max} = \frac{\gamma}{2}$ (1.59)

Lebensdauer $\tau = 1/\gamma$ des angeregten Zustands stellt fundamentale Begrenzung der Streurete dar!

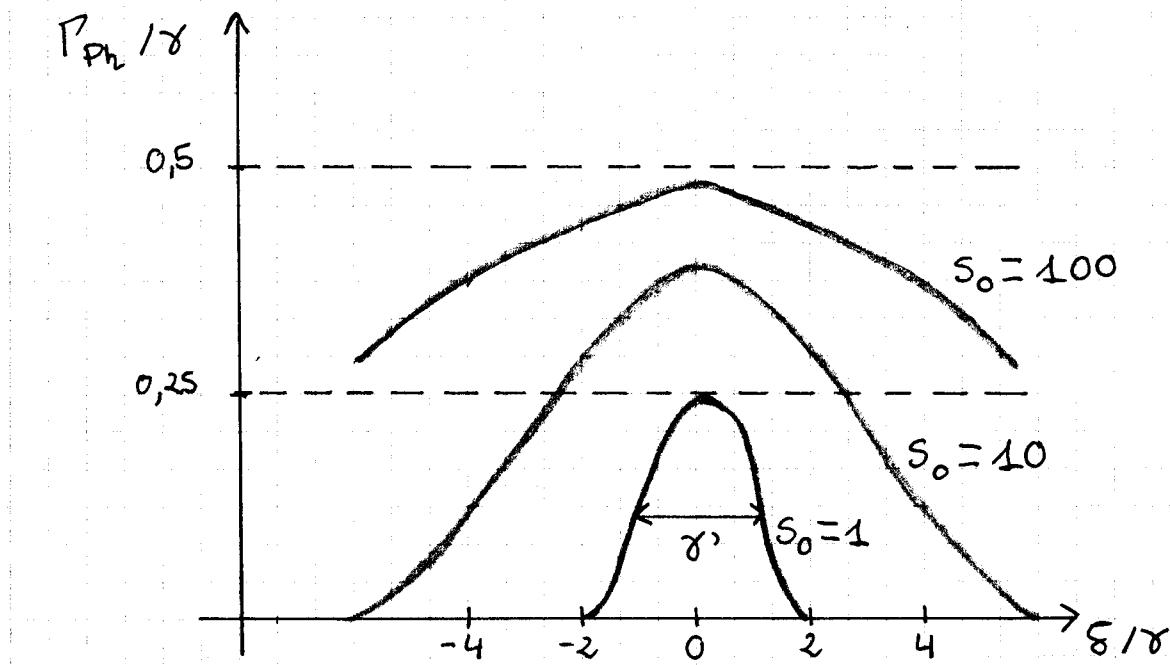
Umschreiben der Gl. (1.58) liefert:

$$P_{ph} = \frac{S_0}{1+S_0} \left(\frac{\gamma/2}{1+4\gamma^2/\gamma^2} \right) \quad (1.60)$$

mit $\gamma' = \gamma \sqrt{1+S_0}$ (1.61)

Sättigungsverbreiterung

Dorentz-Profil mit $\gamma' = \text{FWHM}$.



3.11

1.4. Blochvektor

Matrixelemente der Dichtematrix können anschaulich mithilfe des Blochvektors $\vec{u} = (u, v, w)$ beschrieben werden:

$$u = \tilde{g}_{22} + \tilde{g}_{12}^* = 2 \operatorname{Re}(\tilde{g}_{12})$$

$$v = i(\tilde{g}_{12}^* - \tilde{g}_{22}) = 2 \operatorname{Im}(\tilde{g}_{12}) \quad (1.62)$$

$$w = g_{22} - g_{11}$$

u: Dispersive Komponente des Blochvektors.

v: Absorptive " " "

w: Besetzungsinversion:

$w = -1 \Rightarrow$ atom im Grundzustand

$w = +1 \Rightarrow$ " " angeregten Zustand

Erwartungswert des Dipoloperators

Bedeutung von u, v :

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\vec{d}} \rangle &= \text{tr} (\hat{\vec{g}} \hat{\vec{d}}) = \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12}^* & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{d}_{12} \\ \vec{d}_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\} = \\
 &= \vec{d}_{12} (g_{12} + g_{12}^*) = \vec{d}_{12} (\tilde{g}_{12} e^{i\omega t} + \tilde{g}_{12}^* e^{-i\omega t}) = \\
 &\downarrow \vec{d}_{12} = \vec{d}_{21} \in \mathbb{R}^3 \\
 &= \vec{d}_{12} [u \cos(\omega t) - v \sin(\omega t)] \quad (1.63) \\
 &\downarrow e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t
 \end{aligned}$$

Da $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ \Rightarrow

u : Komp. des Dipolmoments, die in Phase mit E-Feld oszilliert.

v : Komp. des Dipolmoments, die 90° außer Phase oszilliert.

Warum ist v für Absorption und Emission verantwortlich?

\leadsto Übung

1.5. Optische Blochgleichungen mit Blochvektoren

Aus Opt. Blochgl. (1.51):

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{u} &= 5\sqrt{\gamma} \cancel{u} - \frac{\gamma}{2} u \\ \dot{v} &= -5u + \omega_0 w - \frac{\gamma}{2} \cancel{v} \\ \dot{w} &= -\omega_0 v - \gamma(w+1) \end{aligned}} \quad (1.64)$$

oder vektoriell:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} u/2 \\ v/2 \\ w+1 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

Ohne Dämpfung:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \vec{u} = - \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (1.67)$$

mit $\vec{u} = (u, v, w)$ und $\vec{\omega} = (\omega_0, 0, \gamma)$.

Bemerkungen:

- * Analog zur Kreiselgl. der klass. Mechanik beschreibt Gl. (1.66) Präzessionsbewegung des Blochvektors \vec{u} um die Achse $\vec{\omega}/\omega_0$ mit Kreisfreq. ω_0 .

* Ohne Dämpfung lässt sich zeigen:

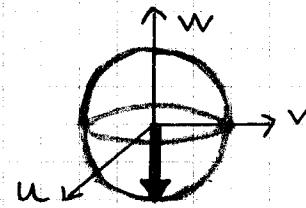
$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \Rightarrow$ Blochvektor bewegt sich auf Oberfläche Kugel mit Einheitsradius („Blochkugel“).

* Mit Dämpfung \sim Blochvektor bewegt sich innerhalb der „Blochkugel“.

Darstellung at. Zustände als Blochvektoren

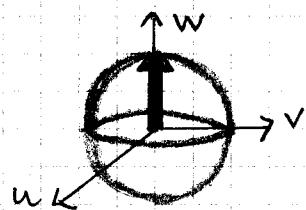
a) Atom im Grundzustand $\Rightarrow |1\rangle = |1\rangle$

$$\Rightarrow \vec{u} = (0, 0, -1)$$



b) Atom im angeregten Zustand $\Rightarrow |2\rangle = |2\rangle$

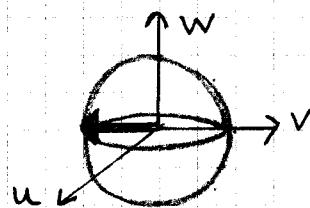
$$\Rightarrow \vec{u} = (0, 0, +1)$$



c) $\pi/2$ -Puls $\sim S_0 \cdot \delta = \pi/2$

$\delta = 0$ und Anfangszust. ist $|1\rangle \hat{=} (0, 0, -1)$.

$$|1\rangle \xrightarrow{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i|2\rangle) \Rightarrow \vec{u} = (0, -1, 0)$$

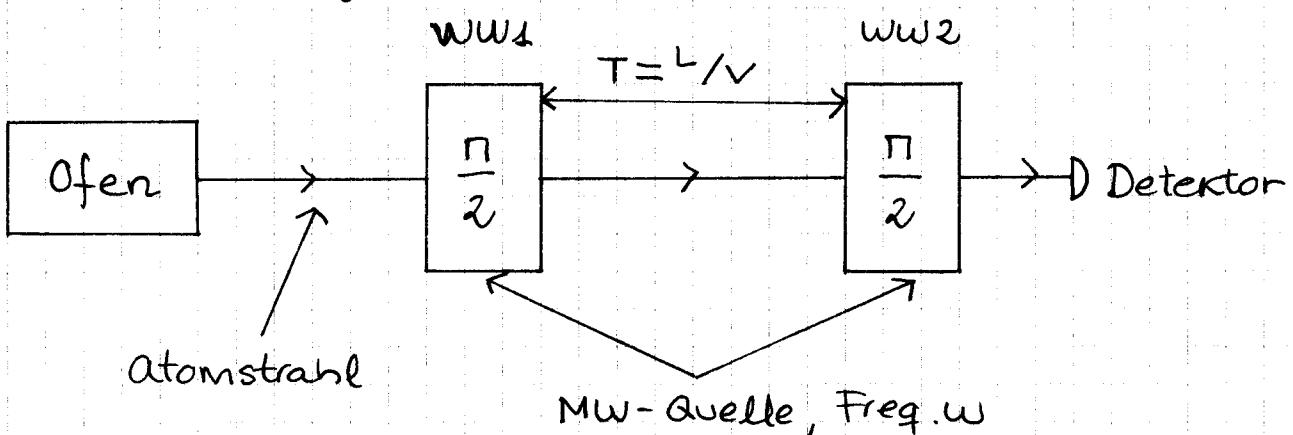


\rightsquigarrow Nach $\pi/2$ -Puls, wenn $\delta \neq 0$:

\Rightarrow Blochvektor rotiert um w mit Freq. δ

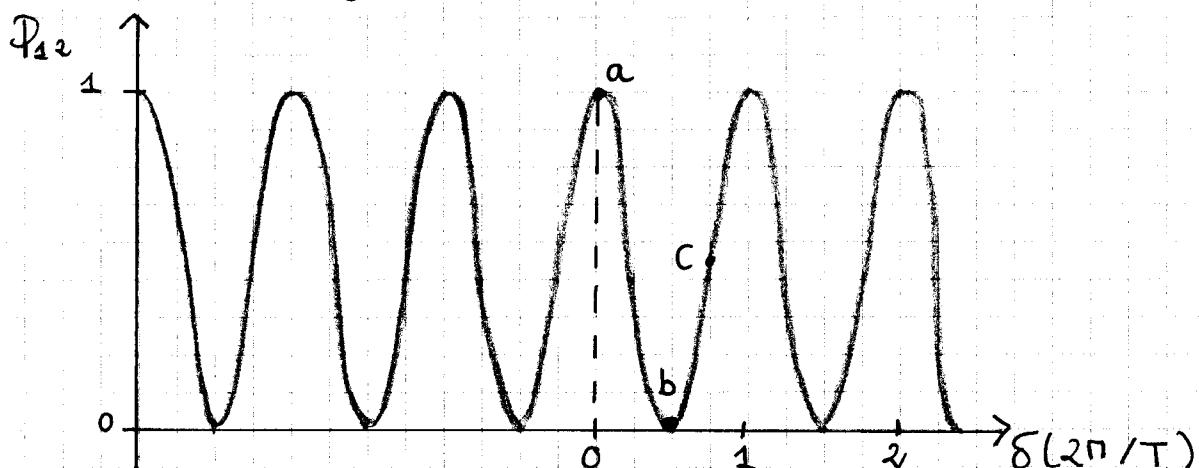
\Rightarrow Phasenverschiebung $\Delta f = \delta \cdot t$ zw. oszillierendem atomaren Dipol und oszill. dichtfeld!

1.6. Ramsey - Methode



- Erster $\pi/2$ -Puls der Freq. w in WW1 regt Oszillation des atomaren Dipols an.
- zw. WW1 und WW2 (Flugzeit) oszilliert Dipol mit Freq. w_2 .
- zweiter $\pi/2$ -Puls in WW2 : je nach Phasenlage des Dipols ($\Delta\varphi = (w_2 - w) \cdot T$) wird bestimmt, ob weiter Licht absorbiert oder emittiert wird.

→ Zeige PPT : erste 3 Folien



Nach 2. $\pi/2$ -Puls :

Ⓐ : $\delta = 0 \Rightarrow$ Atom wird vollständig ~~angeregt~~ ⁽ⁿ⁾ Zustand überführt.

Ⓑ : $\delta = \pi/T \Rightarrow$ Atom wird vollständig ~~angeregt~~ ⁽ⁿ⁾ Grundzustand überführt.

©: Optimaler Punkt, um Frequenzabweichungen $\delta = \omega_{21} - \omega$ zu messen (als Unterschied in der Besetzung in 12>) \rightarrow Atomuhr!

Dephasierung und Rephasierung

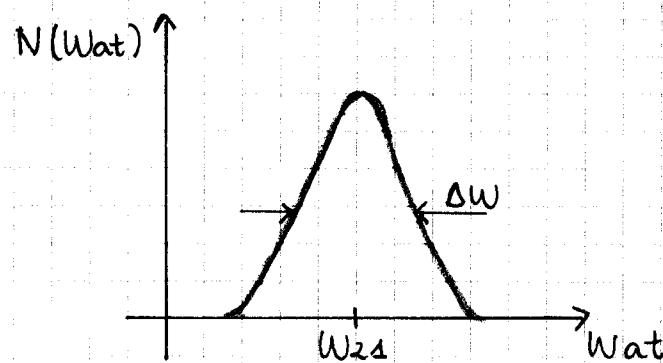
Betrachte Dynamik des Blochvektor nach $\pi/2$ -Puls für Ensemble von Atomen mit

a) gleicher Übergangsfreq. ω_{21} für alle Atome und $\delta = \omega_{21} - \omega \neq 0$:

\sim Alle Blochvektoren präzidieren in der u/v -Ebene mit Winkelgeschwindigkeit δ .

\sim Eben in PPT gezeigt

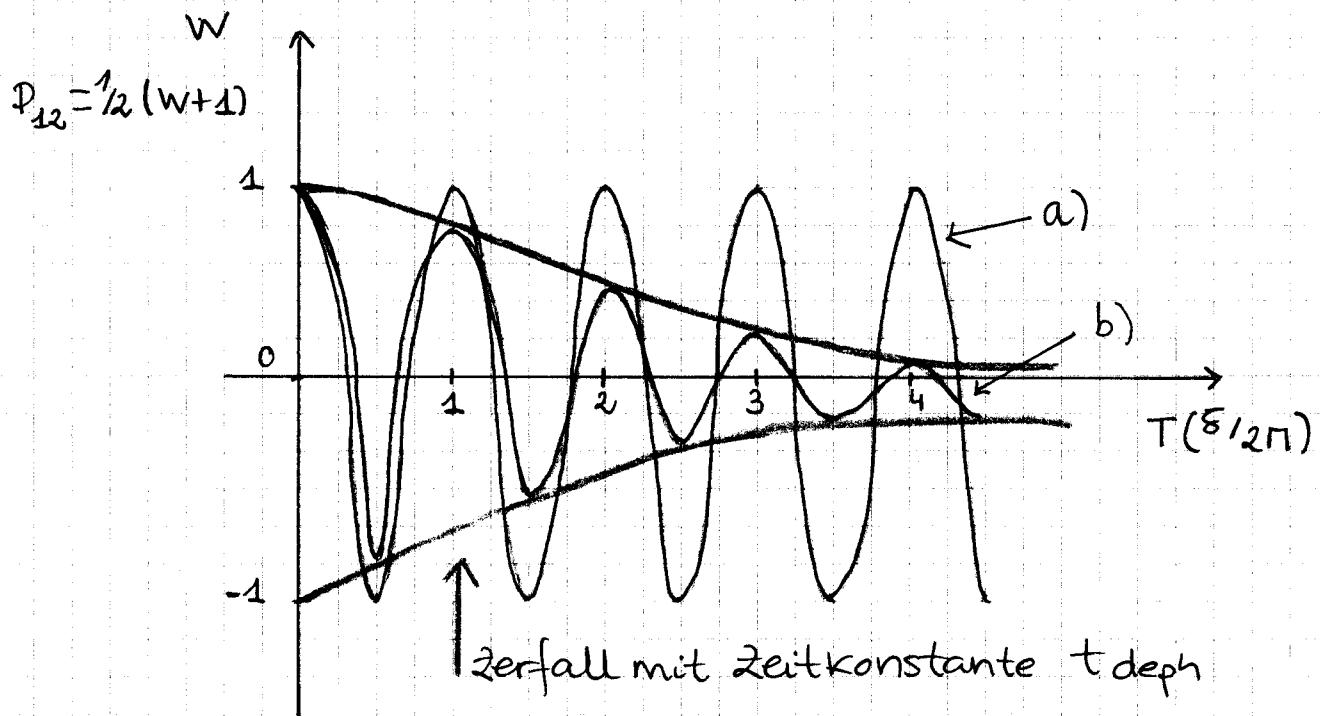
b) Verschiedene Übergangsfreq. ω_{21} für verschiedene Atome wegen einer endlichen Geschwindigkeitsbreite der At. im Atomstrahl.



Verteilung der Übergangsfreq. $N(\text{Wat})$ mit Breite $\Delta\omega$
 \Rightarrow Verteilung der δ 's mit Breite $\Delta\omega \Rightarrow$ Blochvektoren der Atome präzidieren mit unterschiedlichen Winkelgeschw. \Rightarrow At. Dipole dephasieren!

\sim Zeige PPT : Tabe 4 : "Dephasierung"

Wie sieht jetzt Ramsey-Signal als Funktion der Flugzeit T aus?



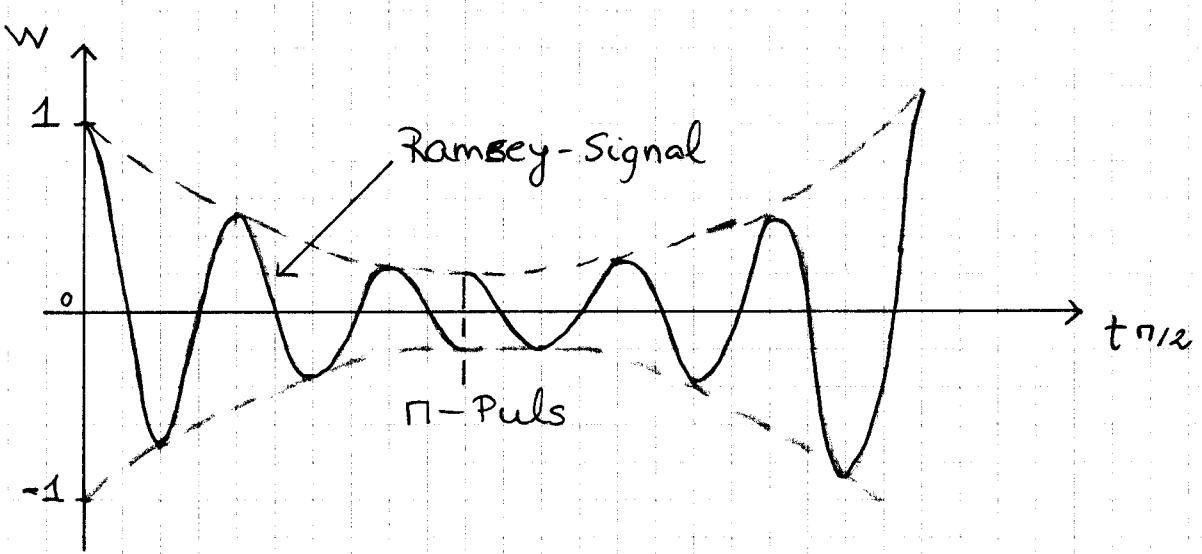
Schwebungssignal zwischen Oszillationsfreq. ω_0 des at. Dipols und dichtfeldfreq. ω .

- a) Ungedämpfter sinusförmiger Verlauf.
- b) Dämpfung des sinusförmigen Verlaufs mit Zeitkonstante t_{deph} → Ramsey-Signal ist eine Überlagerung von Sinus-Signalen mit leicht unterschiedlicher Frequenz.

Aber Rephasierung möglich durch π -Puls!

→ π -Puls nach Zeit t_π ⇒ Rephasierung der Blochvektoren (at. Dipole) nach $2t_\pi$!

→ Zeige PPT; Folie 5: "Rephasierung"



2. Quantisierung des e.m. Feldes

2.1. Lichtwellen als klassische harmonische Oszillatoren (Quelle: Mark Fox, Q0)

Bewegungen:

- * Zusammenhang Licht \leftrightarrow h.O. offensichtlich:
jedes Wellenphänomen kann auf locu. Oszillatoren
zurückgeführt werden.
- * Formal muss überprüft werden:
Bewegungsgl. der Lichtwelle $\hat{=}$ h.O. mit Masse
 m und Kreisfreq. ω , d.h.

$$p_x = m \dot{x} \quad (2.1)$$

$$m \ddot{x} = p_x = -m \omega^2 x \quad (2.2)$$

(x : Auslenkung und p_x : Impuls)

mit Lösung

$$x(t) = x_0 \sin \omega t \quad (2.3)$$

$$p(t) = p_0 \cos \omega t \quad (2.4)$$

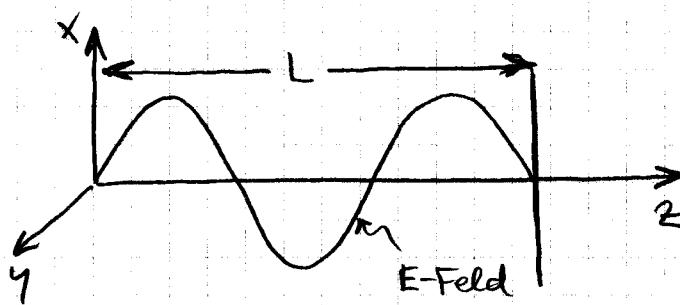
wobei $p_0 = m \omega x_0$.

Außerdem muss gezeigt werden:

Energie der Lichtwelle $\hat{=}$ h.O. mit Masse m und
Kreisfreq. ω , d.h.

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (2.5)$$

Betrachte linear pol. e.m. Welle der Wellenlänge λ in Resonator der Länge L :



Es gelte:

$$E_x(z,t) = E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \quad (2.6)$$

wobei E_0 : Amplitude, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$: Wellenzahl,
 ω : Kreisfreq.

$$\text{Maxwell-Gl. } \rightarrow -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (2.7)$$

Also:

$$B_y(z,t) = B_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \quad (2.8)$$

$$\text{mit } B_0 = E_0/c \quad (2.9)$$

Beachte: Gl. (2.6) & (2.8) \Rightarrow E - & B -Feld 90° phasenverschoben $\leftrightarrow x(t)$ & $p(t)$ bei h.o.

Bestimme Energie im Resonator durch Integration der Energiedichte U über das Modervolumen $V = A \cdot L$ (A : Modenquerschnittsfläche).

$$\text{Es gilt: } U = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \quad (2.10)$$

Energie des E-Felds:

$$H_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 A \int_0^L E_0^2 \sin^2(kz) \sin^2(\omega t) dz \\ = \frac{1}{4} \epsilon_0 V E_0^2 \sin^2(\omega t) \quad (2.11)$$

Energie des B-Feldes:

$$H_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} A \int_0^L B_0^2 \cos^2(kz) \cos^2(\omega t) dz \\ = \frac{1}{4\mu_0} V B_0^2 \cos^2 \omega t \quad (2.12)$$

→ Gesamturenergie

$$H = \frac{V}{4} \left(\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) + \frac{B_0^2}{\mu_0} \cos^2(\omega t) \right) \quad (2.13)$$

Beachte: Energie oszilliert zw. E- & B-Feld hin und her!

Führe neue Koordinaten ein:

$$q(t) = \left(\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2} \right)^{1/2} E_0 \sin(\omega t) \quad (2.14)$$

$$p(t) = \left(\frac{V}{2\mu_0} \right)^{1/2} B_0 \cos(\omega t) = \left(\frac{\epsilon_0 V}{2} \right)^{1/2} E_0 \cos(\omega t) \quad (2.15)$$

(2.8)

Beachte: Es gilt

$$p = \dot{q} \quad (2.16)$$

$$\text{und } \dot{p} = -\omega^2 q \quad (2.17)$$

* (Gln. (2.16) & (2.17) sind identisch zu Gln. (2.1) & (2.2) unter Ersatzung $q(t) = \sqrt{m} x(t)$ (2.18)
 $p(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} p_x(t)$ (2.19)

$\rightsquigarrow q(t) \& p(t) \hat{=} \text{Auslenkung und Impuls des e.m. haar. Oszillators}$

* Es gilt: $q(t) \sim E_x(t)$ & $p(t) \sim B_y(t)$

\rightsquigarrow Oszillation der Energie zw. E- & B-Feld $\hat{=}$ Oszillation zw. pot. & kin. Energie kein mechanischen Oszillator!

Einsetzen von $q(t)$ & $p(t)$ in Gl. (2.13) liefert

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2.20)$$

\rightsquigarrow Eine Mode des e.m. Feldes ist formal äquivalent zu h. O. mit $m=1$?

2.2. Quantisierung einer einzelnen Feldmode

Formal äquivalent zur Quantisierung des h. O. (s. oben)

QM-Vorlesung: Korrespondenzprinzip \rightsquigarrow ersetze kanonische Variablen q & p des klassischen Systems durch Operatoren \hat{q} & \hat{p} , welche kanonische Kommutator-Relation erfüllen müssen:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \mathbb{1}$$

$$\text{bzw. } [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.21)$$

\rightarrow E- & B-Feld sowie Gesamtenergie werden ebenfalls durch Operatoren ersetzt:

$$\hat{E}_x(z,t) = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \hat{q}(t) \sin(kz) \quad (2.22)$$

$$\hat{B}_y(z,t) = \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{k}\right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{1/2} \hat{p}(t) \cos(kz) \quad (2.23)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (2.24)$$

Beachte:

- * \hat{q} & \hat{p} sind hermitisch und entsprechen daher beobachtbaren Größen (Observablen).
- * es ist jedoch praktisch und üblich, die nicht-hermitischen (unbeobachtbaren) Vernichter- (\hat{a}) und Erzeugeroperatoren (\hat{a}^\dagger) einzuführen

Es gilt:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\omega \hat{q} + i\hat{p}) \quad (2.25)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\omega \hat{q} - i\hat{p}) \quad (2.26)$$

Für E- & B-Feld gilt dann

$$\hat{E}_x(z,t) = \epsilon_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (2.27)$$

$$\hat{B}_y(z,t) = B_0 \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos(kz) \quad (2.28)$$

Wobei: $\epsilon_0 = \sqrt{\hbar\omega/\epsilon_0 V}$ und $B_0 = (\mu_0/k) \sqrt{E\hbar\omega^3/V}$
 \rightarrow el. & magn. Feld "pro Photon".

Die Operatoren \hat{a} & \hat{a}^\dagger erfüllen die Kommutatoren,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.29)$$

Damit gilt für den Hamiltons (2.24):

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (2.30)$$

Beachte: \hat{a} & \hat{a}^\dagger sind zeitabhängig.

Heisenberg-Darstellung

$$\Rightarrow \frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] = -i\omega\hat{a} \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow \hat{a}(t) = \hat{a}(0) \exp(-i\omega t) \quad (2.32)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) \exp(i\omega t) \quad (2.33)$$

* Man kann zeigen: Ist $|n\rangle$ Eigenzust. von \hat{H} mit Eigenwert E_n , dann ist $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ Eigenzust. mit Eigenwert $E_n + \hbar\omega$. Wir schreiben $|n+1\rangle = \hat{a}^\dagger |n\rangle$, $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$

* Beweis: $\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle$

$$\Rightarrow |n-1\rangle = \hat{a}|n\rangle, E_{n-1} = E_n - \hbar\omega$$

* Energieniveaus bilden Äquidist. Reihe, wobei $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ ein Quant der Energie $\hbar\omega$ erzeugt (vervielfacht),
als ein Photon

* Sei $|0\rangle$ der Grundzust. mit Eigenwert $E_0 > 0$, dann muss gelten $\hat{a}|0\rangle = 0$ (2.34)

Es folgt: $\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle = E_0|0\rangle \quad (2.35)$

daher

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (2.36)$$

und schließlich $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, n=0,1,2,\dots \quad (2.36)$

* Die Zust. $|n\rangle$ sind auch Eigenzust. des Zahlop.

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.37)$$

Aus Gl. (2.36) folgt

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad (2.38)$$

$\Rightarrow |n\rangle \hat{=} (\text{Photonen}) \text{Zahl-Zustände}$
auch: Fockzust.

* Normalisierung:

$$\langle n-1|n-1\rangle = \langle n|n\rangle = \langle n+1|n+1\rangle = 1 \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (2.40)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.41)$$

* Gl. (2.41) $\Rightarrow |n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (2.42)$

* \hat{n} ist hermitesch: $\hat{n}^\dagger = (\hat{a}^\dagger \hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}$

\Rightarrow verschiedene Zahl-Zustände sind
orthogonal:

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n'n} \quad (2.43)$$

und bilden vollständiges Basisystem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{1} \quad (2.44)$$

* Einzige nichtverschwindende Matrixelemente
von \hat{a} & \hat{a}^\dagger :

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} \langle n-1|n-1\rangle = \sqrt{n} \quad (2.45)$$

$$\langle n+1|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1|n+1\rangle = \sqrt{n+1} \quad (2.46)$$

2.3. Quantenfluktuationen einer einzelnen Feldwelle

Betrachte Fockzust. $|n\rangle \rightarrow$ wohldefinierte Energie aber kein wohldefinierter el. Feld:

$$\langle n | \hat{E}_x(z, t) | n \rangle = \epsilon_0 \sin(kz) [\langle n | \hat{a} | n \rangle + \langle n | \hat{a}^\dagger | n \rangle] = 0 \quad (2.47)$$

d.h. der Erwartungswert des el. Feldes verschwindet.

Aber: Erwartungswert des Quadrats des el. Feldes (trägt zur Energiedichte bei) verschwindet nicht:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{E}_x^2(z, t) | n \rangle &= \epsilon_0^2 \sin^2(kz) \langle n | \hat{a}^2 + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger | n \rangle \\ &= \epsilon_0^2 \sin^2(kz) \langle n | \hat{a}^2 + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 | n \rangle \\ &= 2\epsilon_0^2 \sin^2(kz) (n + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Betrachte Standardabweichung

$$\begin{aligned} \Delta E_x &= \sqrt{\underbrace{\langle \hat{E}_x^2(z, t) \rangle - \langle \hat{E}_x(z, t) \rangle^2}_{\text{Varianz}}} \\ &= \sqrt{2} \epsilon_0 |\sin(kz)| \sqrt{n + \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.47) \& (2.48)$$

Beachte:

* ΔE_x charakterisiert Fluktuationen des el. Feldes

* selbst für $n=0$ ist $\Delta E_x \neq 0 \rightarrow$ Vakuumflukt.?

* In Einklang mit Unbestimmtheitsprinzipien:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C} \Rightarrow \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle| \quad (2.50)$$

$$\text{Ist: } \Delta n \Delta E_x \geq \frac{1}{2} \epsilon_0 |sin(kz)| |\langle \hat{a}^\dagger - \hat{a} \rangle| \quad (2.51)$$

~ ist das Feld genau bestimmt, so ist die Photonenzahl unbekannt

~ für Fockzust. sind beide Seiten von (2.51) = 0

* ohne Herleitung: Photonenzahl-Phasen Unbestimmtheitsrel.: $\Delta n \Delta \phi \geq 1 \quad (2.52)$

(Analog zu Energie-Zet-Unbestimmtheitsrel.)

~ ist die Phase genau bestimmt, so ist die Photonenzahl unbekannt (und umgekehrt).

2.4 Quadratur-Operatoren für eine einzelne Feldmode

E-Feld-Operator unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit (vgl. Glu. (2.32) & (2.33)):

$$\hat{E}_x = \epsilon_0 (\hat{a} \exp(-i\omega t) + \hat{a}^\dagger \exp(i\omega t)) \sin(kz) \quad (2.53)$$

wobei $\hat{a} = \hat{a}(0)$ & $\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger(0)$.

Für die Quadratur-Operatoren ein genügs

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.54)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (2.55)$$

Bemerkung: Dimensionslose Form des Orts- & Impulsoperators, praktisch für manche Rechnungen.

Damit:

$$\hat{E}_x(z,t) = 2 E_0 \sin(kz) [\hat{x}_1 \cos \omega t + \hat{x}_2 \sin \omega t] \quad (2.56)$$

Beachte:

- * \hat{x}_1 & $\hat{x}_2 \leftrightarrow$ Feldamplituden, welche um 90° phasenversetzt (in Quadratur) zueinander oszillieren.

- * \hat{x}_1 & \hat{x}_2 erfüllen die Kommutatoren.

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i \frac{\hbar}{2} \quad (2.57)$$

$$\Rightarrow \langle \Delta x_1 \rangle^2 \langle \Delta x_2 \rangle^2 \geq \frac{1}{16} \quad (2.58)$$

(dimensionslose Form der Orts-Impuls-Ungewissheitssel.)

- * Je nach Rechnung verwendet man \hat{Q} & \hat{P} oder \hat{x}_1 & \hat{x}_2 (abh. davon, was praktischer ist).

Abschließende Bemerkung zu Kap. 2:

- * Wir haben gesehen: Die Energie eines Einmodenfeldes ist quantisiert in Einheiten von $\hbar\omega$.
- * Diese Lichtquanten (Photonen) sind nicht lokalisiert sondern über das gesamte Modellvolumen ausgedehnt.
- * Photonen sind also keine Billardbälle, die im Resonator hin und her fliegen, auch wenn dieses Bild oft praktisch und üblich ist.

3. Kohärenz Zustände

Frage: Wie kommt man von den Fockzust. zu klass. Lichtzust.?

Antwort (?): QM \rightarrow klass. Beschreibung für $n \gg 1$

Problem: $\langle n | \hat{E}_x | n \rangle = 0$ unabh. von n ! Für klass. Feld erwartet man aber sinusförmige Schwingung.

Lösung: Kohärenz Zustände (Glauber 1963, Nobelpreis 2005)

3.1 Eigenzust. des Versuchst. und Zust. unbekannter Unbestimmtheit

Betrachte E-Feld-Operator für lin. pol. ebene Welle:

$$\hat{E}_x(\vec{r}, t) = i \left(\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} \right)^{1/2} [\hat{a} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) - \hat{a}^\dagger \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))] \quad (3.1)$$

Ersetzt man \hat{a} & \hat{a}^\dagger durch kont. Variable, so beschreibt dies ein klassisches Feld.

\Rightarrow Suche Eigenzust. des Versuchst.:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (3.2)$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig (\hat{a} ist nicht hermitesch)

Dann gilt auch

$$\langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle \alpha | \quad (3.3)$$

Entwickle $|\alpha\rangle$ im Feldzust. (vollst. Basis):

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (3.4)$$

Einsetzen in gl. (3.2) liefert

$$c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \quad c_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} \quad c_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \quad (3.5)$$

Normierung $\Rightarrow c_0 = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)$

und somit

$$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.6)$$

Erwartungswert des E-Feld-Op. (3.1)

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(z, t) | \alpha \rangle = i \left(\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} \right)^{1/2} [\alpha \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) - \alpha^* \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))] \quad (3.7)$$

(3.2) & (3.3)

bzw. mit $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(z, t) | \alpha \rangle = 2|\alpha| \left(\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \theta) \quad (3.8)$$

\rightarrow (3.7) bzw. (3.8) hat Form eines klass. Feldes!

Weiterhin kann man zeigen:

$$\langle \alpha | \hat{E}_x^2(z, t) | \alpha \rangle = \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} [1 + 4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \theta)] \quad (3.9)$$

Für die Fluktuationen von $\hat{E}_x(\vec{r}, t)$ folgt

$$\Delta E_x = \sqrt{\langle \hat{E}_x^2 \rangle - \langle \hat{E}_x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V}} \quad (3.10)$$

unabh. von α (identisch wie bei Vakuumzust.)

$\Rightarrow |\alpha\rangle$ ist annähernd klassisch (gewünschte Erwartungswerte und nur das Rauschen des Vakuums)

Frage: Physikalische Bedeutung von α ?

Betrachte Erwartungswert von $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$:

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (3.11)$$

$\approx |\alpha|^2$ entspricht mittlerer Photonenzahl des Feldes

Betrachte Fluktuationen der Photonenzahl:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \\ &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \sqrt{\bar{n}}} \quad (3.13)$$

Für die relative Unbestimmtheit der Photonenzahl folgt:

$$\boxed{\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}} \quad (3.14)$$

$\approx \Delta n / \bar{n}$ nimmt mit steigendem \bar{n} ab.

Beachte: * $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$ ist charakteristisch für Poisson-Prozess.

* Wahrscheinlichkeit, n Photonen zu detektieren:

$$P_n = \langle \alpha | n X_n | \alpha \rangle = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \quad (3.15)$$

\rightsquigarrow Poisson-Verteilung mit Mittelwert \bar{n} .

* zeitliche Entwicklung des Kohärenzen Zust.:

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \exp(-i\omega t/2) |\underbrace{\alpha \exp(-i\omega t)}_{\alpha'}\rangle \quad (3.16)$$

Übung

$$\text{wobei } |\alpha'|^2 = |\alpha|^2$$

\rightsquigarrow kohärenter Zust. bleibt coh. Zust.?

* Es gilt

$$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle$$

$$= \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}|\alpha|^2) |0\rangle$$

$$= \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (3.17)$$

$$\text{mit } \hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}|\alpha|^2) \quad (3.18)$$

Verschiebungsoperator (unter)

$\rightsquigarrow \hat{D}(\alpha)$ kann als Erzeuger-Operator für coh. Zust. $|\alpha\rangle$ betrachtet werden.

4. Quantisierte Licht-Atom Wechselwirkung

Betrachte WW eines 2-Niveau-Atoms mit einer einzelnen Feldmode (im Resonator)

Beachte: Einfachst denkbare Modell; interessant aus folgenden Gründen:

- * Exakt lösbar für bel. Kopplungsstärke.
- * Weist echte Quanteneffekte auf.
- * Einfachste Illustration der spont. Emission.
- * Lässt sich experimentell realisieren!

Aber: Modell beschreibt nicht spont. Emission im freien Raum (WW mit ∞ vielen Moden, später)

4.1 Atom-Feld-Hamiltonoperator

Ein-Moden-Feldop. im Resonator (vgl. (2.27))

$$\hat{E} = \vec{\epsilon} \sqrt{\frac{\hbar \nu}{\epsilon_0}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (4.1)$$

mit $\vec{\epsilon}$: bel. Polarisationsvektor.

WW-Hamiltonop. (vgl. (1.10))

$$\begin{aligned} \hat{H}_{WW} &= -\hat{d} \cdot \hat{E} \\ &= -\epsilon_0 \sin(kz) \hat{d} \cdot \vec{\epsilon} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Führe ein:

* atomare Übergangsopt.

$$\hat{\sigma}_+ = |2 \times 1|, \hat{\sigma}_- = |1 \times 2| = \hat{\sigma}_+^\dagger \quad (4.3)$$

$$* \text{ Inversionsop. } \hat{\sigma}_3 = |2 \times 2| - |1 \times 1| \quad (4.4)$$

Damit kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \hat{d} \cdot \vec{\epsilon} &= d_{12} |1 \times 2| + d_{12}^* |2 \times 1| \\ &= d_{12} \hat{\sigma}_- + d_{12}^* \hat{\sigma}_+ = d_{12} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \\ &= d (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hierbei verwendet i

$$* \langle 1 | \hat{d} \cdot \vec{\epsilon} | 1 \rangle = \langle 2 | \hat{d} \cdot \vec{\epsilon} | 2 \rangle = 0 \text{ aus}$$

Paritätsgründen.

$$* d_{12} = d_{12}^* = d \in \mathbb{R} \text{ o.B.d.A.}$$

Somit gilt für WW-Hamiltonop.:

$$\hat{H}_{WW} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (4.6)$$

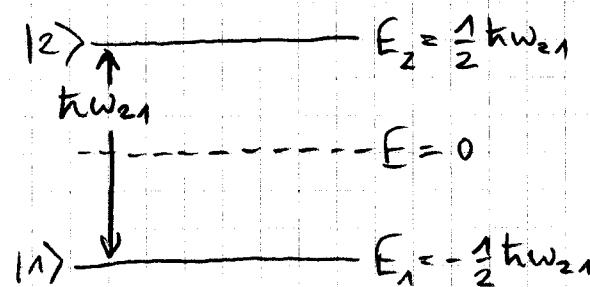
wobei

$$g = -\frac{d \epsilon}{\hbar} \sin(kz) \quad (4.7)$$

Außerdem:

freies atomares Hamiltonop. (vgl. (1.17))

$$\hat{H}_{At} = \frac{1}{2} (E_2 - E_1) \hat{\sigma}_3 = \frac{1}{2} \hbar \omega_{21} \hat{\sigma}_3 \quad (4.8)$$



Freier Feld-Hamiltonop. (vgl. (2.30))

$$\hat{H}_F = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (4.9)$$

wobei Nullphotonennergie = 0 gesetzt.

→ Atom-Feld-Hamiltonop.

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_{At} + \hat{H}_F + \hat{H}_{Hw} \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega_{21} \hat{\sigma}_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\end{aligned}} \quad (4.10)$$

Betrachte Zeitabh. von \hat{H} :

* Schwingung (2.31) - (2.33) für freies Feld gegebt:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) \exp(-i\omega t) \quad (4.11)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) \exp(i\omega t) \quad (4.12)$$

* Ebenso: $\hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0) \exp(\pm i\omega_{21} t) \quad (4.13)$

für freies Atom

* Insgesamt ergibt sich Lösungsweise in (4.10)

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a} \sim \exp(i(\omega_{21} - \omega)t) \quad (4.14)$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \sim \exp(-i(\omega_{21} - \omega)t) \quad (4.15)$$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \sim \exp(i(\omega_{21} + \omega)t) \quad (4.16)$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a} \sim \exp(-i(\omega_{21} + \omega)t) \quad (4.17)$$

Beachte:

- * Für $\omega_{21} \approx \omega$: Terme (4.16) & (4.17) variieren viel schneller als (4.14) & (4.15).
- * Terme (4.16) & (4.17) erhalten im Gegensatz zu (4.14) & (4.15) nicht die Energie.
- * Integration der Schrödingergl. liefert für (4.16) & (4.17) einen Nenner $\sim (\omega_{21} + \omega)$ und für (4.14) & (4.15) einen Nenner $\sim (\omega_{21} - \omega)$
- Insgesamt \Rightarrow vernachlässige Terme (4.16) & (4.17)
(~~Detektorenabschaltung~~)

So mit erhält man für Atom-Feld-Hamiltonop.

$$\boxed{\hat{H}_{JC} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{21} \hat{\sigma}_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)} \quad (4.18)$$

Jaynes-Cummings-Hamiltonop.

Beachte

- * Eigenzust. in ungekoppelten Fall ($g=0$):
 $|2,n\rangle = |2\rangle \otimes |n\rangle$ & $|1,n\rangle = |1\rangle \otimes |n\rangle$ (bare states)
- * Für $g \neq 0$ koppelt \hat{H}_{JC} die bare states im Boden:
 $|2,n\rangle$ mit $|1,n+1\rangle$
 \Rightarrow die neuen Eigenzust. sind linear komb.
von $|2,n\rangle$ & $|1,n+1\rangle$ (dressed states, später)
- * Der Zust. $|1,0\rangle$ bleibt auch für $g \neq 0$ ungekoppelt.

4.2 Zeitentwicklung im J-C.-Modell

Betrachte \hat{H}_n innerhalb einer Menge mit
 $E_n = \{|2,n\rangle, |1,n+1\rangle\}$:

$$\begin{aligned}\hat{H}_n &= \hbar \begin{pmatrix} \omega_{21/2} + \omega_n & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & -\omega_{21/2} + \omega(n+1) \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \omega(n+\frac{1}{2}) - \delta_2 & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & \omega(n+\frac{1}{2}) + \delta_2 \end{pmatrix} \quad (4.19)\end{aligned}$$

Der Folgenden war interessant: Dynamik aufgrund von Kopplung zw. $|2,n\rangle$ & $|1,n+1\rangle$

→ Übergang ins Wechselwirkungsbild

WW-Bild:

- * Zeitabh. Operatoren & Zustände
- * Ziel: Zeitliche Entwicklung des Zust. nur für $g \neq 0$.
- * Für $\delta = 0$ verschwindet Dynamik aufgrund Diagonalelementen in (4.19)

Konkret:

Aufangzust. $|2n(0)\rangle \in E_n$

⇒ Zust. zum Zeitpunkt t im WW-Bild ist def.

als: $|\tilde{2n}(t)\rangle = \hat{U}_{ok}^+(t,0) |2n(t)\rangle \quad (4.20)$

Wobei $|2n(t)\rangle$: Zust. zum Zeitp. $t=0$ im Schrödingerbild und $\hat{U}_{ok}(t,0)$: Zeitentwicklungsoperator ohne Kopplung (für $g=0$)

$$\text{Es gilt: } \hat{U}_{\text{OK}}(t,0) = \exp(-i\omega(n+\frac{1}{2})t) \begin{pmatrix} \exp(+i\delta t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\delta t/2) \end{pmatrix}$$

Der Hamiltonop. im WJ-Bild ist dann def. als der Operator, für den gilt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}_n(t)\rangle = \hat{H}_{\text{WJ}}^n |\tilde{\psi}_n(t)\rangle \quad (4.22)$$

Explizite Form

$$\hat{H}_{\text{WJ}}^n = \hat{U}_{\text{OK}}^+(t,0) \hat{H}_K \hat{U}_{\text{OK}}(t,0) \quad (4.23)$$

$$\text{mit } \hat{H}_K = \text{tg} \sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

also:

$$\boxed{\hat{H}_{\text{WJ}}^n = \text{tg} \sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\delta t) \\ \exp(i\delta t) & 0 \end{pmatrix}} \quad (4.25)$$

Bemerkungen:

- * Gl. (4.22) hat die gleiche Form wie SG.
- * In Kombination mit Gl. (4.20) folgt: WJ-Bild entspricht Schrödingerbild in Bezugssystem, welches mit Bohrfrequenzen des ungekoppelten Systems rotiert.
- * Ohne Kopplung ($\gamma=0$) gilt wie gewünscht $\hat{H}_{\text{WJ}}^n = 0$.
- * Zur Folgenden: Alle Zust. im WJ-Bild.

Betrachte Beispiele für zeitl. Entwicklung:

Verstreuung $\delta = 0$, Anfangszust. $|1\rangle(0) = |2,n\rangle$
Zust. zum Zeitpkt t :

$$|1\rangle(t) = C_{1,n+1}(t)|1,n+1\rangle + C_{2,n}(t)|2,n\rangle \quad (4.26)$$

Einsetzen von Glu. (4.25) & (4.26) in Gl. (4.22)
liest:

$$\dot{C}_{1,n+1}(t) = -ig\sqrt{n+1}C_{2,n}(t) \quad (4.27)$$

$$\dot{C}_{2,n}(t) = -ig\sqrt{n+1}C_{1,n+1}(t) \quad (4.28)$$

Differenzieren von (4.27) und Einsetzen von (4.28)

$$\Rightarrow \ddot{C}_{2,n}(t) = -g^2(n+1)C_{2,n}(t) \quad (4.29)$$

Lösung, die Anfangsbed. $C_{2,n}(0) = 1$ esfüllt:

$$C_{2,n}(t) = \cos(gt\sqrt{n+1}) \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow C_{1,n+1}(t) = -i \sin(gt\sqrt{n+1}) \quad (4.31)$$

Somit: (4.32)

$$\boxed{|1\rangle(t) = \cos(gt\sqrt{n+1})|2,n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n+1})|1,n+1\rangle}$$

Es folgt:

* W. Rkt, dass das System in $|2,n\rangle$ verbleibt:

$$P_{2,n}(t) = |C_{2,n}(t)|^2 = \cos^2(gt\sqrt{n+1}) \quad (4.33)$$

* W. Rkt, dass das System zu $|1,n+1\rangle$ übergeht:

$$P_{1,n+1}(t) = |C_{1,n+1}(t)|^2 = \sin^2(gt\sqrt{n+1}) \quad (4.34)$$

* Atomare Inversion

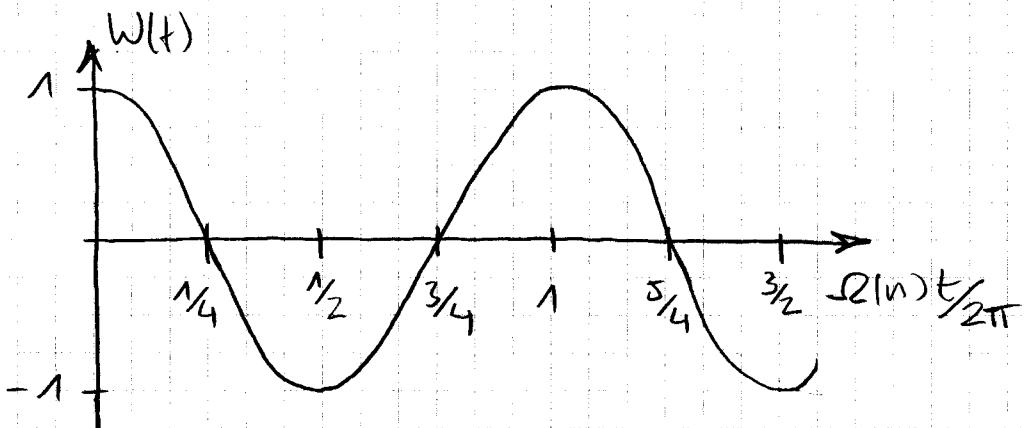
$$W(t) = \langle \psi_1(t) | \hat{\sigma}_z | \psi_2(t) \rangle \\ = P_2(t) - P_1(t) = \cos(2gt\sqrt{n+1}) \quad (4.35)$$

Definiere quantenelektrodynamische Rabi-Freq.:

$$\Omega(n) = 2g\sqrt{n+1} \quad (4.36)$$

Dann:

$$W(t) = \cos(\Omega(n)t) \quad (4.37)$$



Quanten-Rabi-Oszillationen

Beachte:

- * Feld im Fockzust. $\Rightarrow W(t)$ streng periodisch.
- * Feld im Vakuumzust. \Rightarrow Vakuum-Rabi-Oszillation:

$$W(t) = \cos(\Omega_0 t) \quad (4.38)$$

mit

$$\Omega_0 = 2g \quad (4.39)$$

Vakuum-Rabi-Frequenz

- * Vakuum-Rabi-Oszillation ist reiner Quanteneffekt ohne klassische Entsprechung!
 \Rightarrow Atom emittiert spontan Photon, reabsorbiert es, reemittiert es, etc.

* Dynamik mit Feld in Fockzust. entspricht semiklass. Rabi-Modell \Rightarrow seltsam, weil Fockzust. in jeder Würscht nicht klass. ist ...

Intuitive Vermutung: Feld in coh. Zust. (klassisch) \Rightarrow Dynamik entspricht semiklass. (regelmäßig periodischer) Rabi-Oszillation.

Überraschend: Vermutung i.A. falsch!

Bekachte dies für allgemeine Dynamik:
Atomarer Anfangszust.:

$$|4(0)\rangle_{At} = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle \quad (4.40)$$

Anfangszust. Feld: $|4(0)\rangle_F = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle \quad (4.41)$

\Rightarrow Atom-Feld-Anfangszust.

$$|4(0)\rangle = |4(0)\rangle_{At} \otimes |4(0)\rangle_F \quad (4.42)$$

Lösung von SG (4.22) analog zu Gl. (4.32):

$$\begin{aligned} |4(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[c_2 c_n \cos(gt\sqrt{n+1}) - i c_1 c_{n+1} \sin(gt\sqrt{n+1}) \right] |2\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[-i c_2 c_{n+1} \sin(gt\sqrt{n+1}) + c_1 c_n \cos(gt\sqrt{n+1}) \right] |1\rangle \right\} |n\rangle \end{aligned}$$

Beachte: $|4(t)\rangle$ i.A. verschärkt! $\quad (4.43)$

Ann.: Atom anfangs in $|2\rangle \Rightarrow c_2 = 1, c_1 = 0$

$$\Rightarrow |4(t)\rangle = |4_1(t)\rangle |1\rangle + |4_2(t)\rangle |2\rangle \quad (4.44)$$

~~Feld~~ Atom

mit $|q_1(t)\rangle = -i \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(gt\sqrt{n+1}) |n+1\rangle$ (4.45)

und $|q_2(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(gt\sqrt{n+1}) |n\rangle$ (4.46)

Es folgt für atomare Inversion:

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle q_1(t) | \hat{\sigma}_z | q_1(t) \rangle \\ &= \langle q_2(t) | q_2(t) \rangle - \langle q_1(t) | q_1(t) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \cos(2gt\sqrt{n+1}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Beachte: gl. (4.47) \leftrightarrow Summe der Inversionen über alle Photonenzahlen n , gewichtet mit anfänglicher Photonenzahlverteilung $P_n = |c_n|^2$.

Betrachte nun Ioh. Zust. (klass. Schr. aller Zust.)

$$\Rightarrow c_n = \exp(-1|\alpha|^2/2) \frac{\alpha^n}{n!} \quad (4.48)$$

Somit

$$W(t) = \exp(-n) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos(2gt\sqrt{n+1}) \quad (4.49)$$

\Rightarrow zeige Fig. 4.7 aus Gerry & Knight

Beachte:

- * Rabi-Oszillation erscheint anfänglich gedämpft (Kollaps).
- * Nach einer Weile lebt die Rabi-Oszillation teilweise wieder auf (Revival)!
- * Für längere Zeiten: Serie von Kollapsen und Revivals mit sinkendem Kontrast!
- * Dynamik völlig anders als in semiklass. Modell!

Ausschauliche Erklärung für Kollaps:

Mittlere Photonenzahl: $\bar{n} = \alpha t^2$

→ dominante Rabi-freq.:

$$\Omega(\bar{n}) = 2g\sqrt{\bar{n}+1} \approx 2g\sqrt{\bar{n}} \text{ für } \bar{n} \gg 1 \quad (4.50)$$

Aber: Verteilung der $|C_n|^2$ im Bereich $\bar{n} \pm \Delta n$

→ Vert. des Rabi-freq. im Bereich $\Omega(\bar{n}-\Delta n)$ bis $\Omega(\bar{n}+\Delta n)$

Schätze Kollaps-Zet t_K ab mittels Zeit-Freq.-Unbestimmtheitsrel.:

$$t_K [\Omega(\bar{n}+\Delta n) - \Omega(\bar{n}-\Delta n)] \approx 1 \quad (4.51)$$

Mit $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$ und Taylorentwicklung 1. Ordn.:

$$t_K 2g \approx 1 \text{ bzw. } t_K \approx \frac{1}{2g} \quad (4.52)$$

Schätze Revival-Zet t_R ab mittels Bedingung

$$[\Omega(\bar{n}+1) - \Omega(\bar{n})] t_R = 2\pi k, \quad k=0,1,2,\dots \quad (4.53)$$

(auschaulche Deutung: beobachtete Freq.-Comp.
Schwingen in Phase)

$$\text{Taylorentwicklung} \Rightarrow t_R = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\bar{n}} k \text{ für } \bar{n} \gg 1 \quad (4.54)$$

Beachte: Kollaps & Revival sind experimentell
beobachtet worden! (später)

4.3 Das Dressed State Bild

Ermittlung: \hat{H}_{xc} innerhalb $E_n = \{|2,n\rangle, |1,n+1\rangle\}$
gemäß Gl. (4.19):

$$\hat{H}_n = \hbar \begin{pmatrix} \omega(n+\frac{1}{2}) - \delta/2 & q\sqrt{n+1} \\ q\sqrt{n+1} & \omega(n+\frac{1}{2}) + \delta/2 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierung liefert Energieniveaus

$$E_{\pm}(n) = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \pm \frac{1}{2}\hbar\Omega_n(\delta) \quad (4.55)$$

$$\text{wobei } \Omega_n(\delta) = \sqrt{4q^2(n+1) + \delta^2} \quad (4.56)$$

Entsprechende Eigenzust. $|n, \pm\rangle$ lauten:

$$|n, +\rangle = \cos(\theta_{n/2})|2,n\rangle + \sin(\theta_{n/2})|1,n+1\rangle \quad (4.57)$$

$$|n, -\rangle = -\sin(\theta_{n/2})|2,n\rangle + \cos(\theta_{n/2})|1,n+1\rangle \quad (4.58)$$

wobei θ_n def. ist über

$$\tan \theta_n = -\frac{2q\sqrt{n+1}}{\delta} = -\frac{\Omega_n(0)}{\delta} \quad (4.59)$$

so dass

$$\sin(\theta_{n/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Omega_n(\delta) + \delta}{\Omega_n(\delta)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.60)$$

und

$$\cos(\theta_{n/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Omega_n(\delta) - \delta}{\Omega_n(\delta)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.61)$$

Beachte:

* $|n, \pm\rangle$ nennt man dressed states.

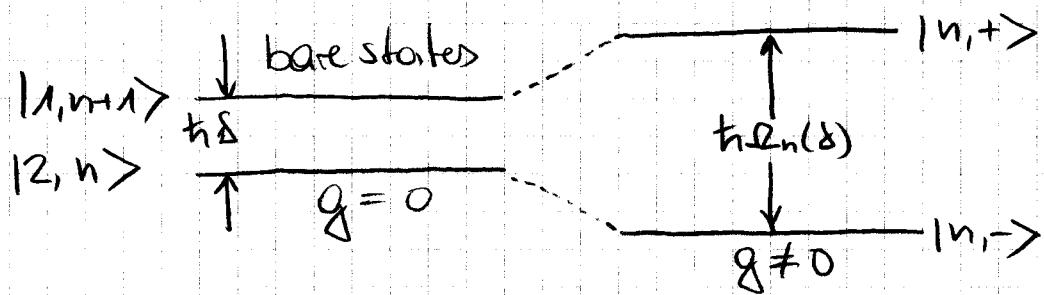
* Energieniveaus der bare states $|2,n\rangle$ & $|1,n+1\rangle$ ohne Kopplung:

$$E_{2,n} = \hbar(\omega_{21/2} + n\omega) \quad (4.62)$$

$$E_{1,n+1} = \hbar(-\omega_{21/2} + (n+1)\omega) \quad (4.63)$$

$$\Rightarrow \text{Energieaufspaltung: } E_{1,n+1} - E_{2,n} = \hbar \delta \quad (4.64)$$

- * Die dressed states sind durch Kopplung weiter aufgespalten: $E_+(n) - E_-(n) = \hbar \Omega_n(\delta) \quad (4.65)$



- * Aufspaltung des bare states in dressed states wird AC-Stark-Verschiebung genannt.

- * Im Resonanzfall: bare states sind entartet, dressed states aufgespalten um $\hbar \Omega_n(0)$.

Es gilt:

$$|n,+> = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2,n> + |1,n+1>) \quad (4.66)$$

$$|n,-> = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|2,n> + |1,n+1>) \quad (4.67)$$

- * Betrachte weiterhin Fälle:

$$(i) \delta < 0, |\delta| > 2g\sqrt{n+1} \Rightarrow \Omega_n(\delta) \approx |\delta| = -\delta$$

$$\Rightarrow \sin(\theta_{n/2}) \approx 0, \cos(\theta_{n/2}) \approx 1$$

(4.60) & (4.61)

$$\Rightarrow |n,+> \approx |2,n>, |n,-> \approx |1,n+1> \quad (4.68)$$

$$(ii) \delta > 0, \delta > 2g\sqrt{n+1} \Rightarrow \Omega_n(\delta) \approx \delta$$

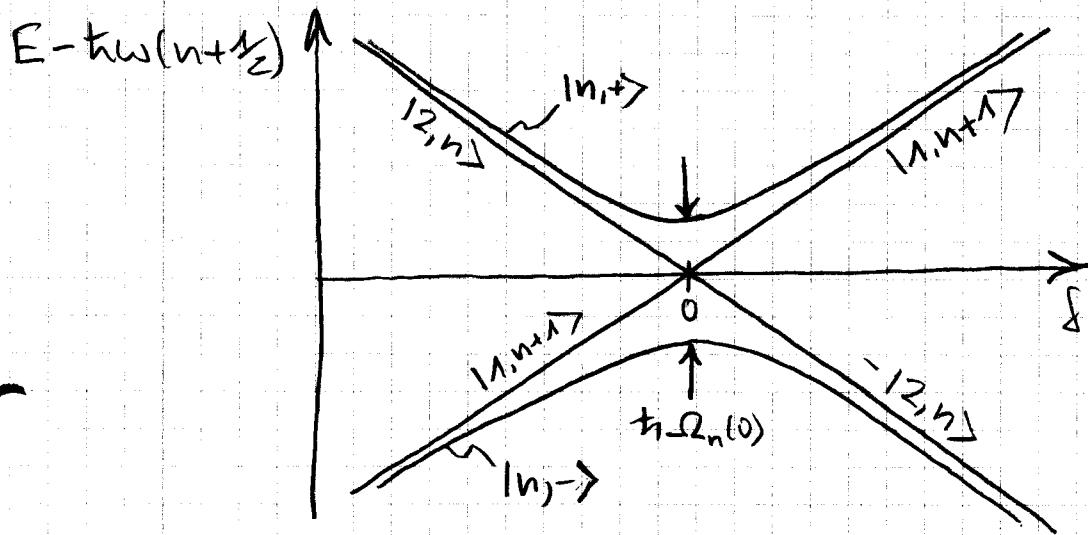
$$\Rightarrow \sin(\theta_{n/2}) \approx 1, \cos(\theta_{n/2}) \approx 0$$

(4.60) & (4.61)

$$\Rightarrow |n,+> \approx |1,n+1>, |n,-> \approx -|2,n> \quad (4.69)$$

Ihso: Für große Verkrümmungen bzw. für verschwindende Kopplung entsprechen die dressed states den bare states.

* Beobachte Eigenenergie für $g = 0$ & $g \neq 0$:



→ ohne Kopplung sind die Zust. für $\delta=0$ entartet und entsprechen den bare states

→ mit Kopplung spalten die Zustände für $\delta=0$ um $\hbar\Omega_n(0)$ auf, es kommt zu einer verminderen Kreuzung.

* Dressed states eignen sich auch zur Bestimmung der Dynamik eines allg. Atom-Feld-Zust. (Übung)

4.4. Jaynes-Cummings Modell mit großer Verschierung: Dispersive Wechselwirkung

Energieeigenwerte von \hat{H}_{JC} für $|\delta| \gg 2g\sqrt{n+1}$
 durch Taylorentwicklung von Gl. (4.56)
 (in Folgenden angenommen: $\delta > 0$)

$$\Omega_n(\delta) \approx \delta + \frac{4g^2(n+1)}{2\delta} = \delta + \frac{\Omega(n)^2}{2\delta} \quad (4.70)$$

$$\Rightarrow E_{\pm} \approx (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \pm \hbar\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\Omega(n)^2}{4\delta}\right) \quad (4.71)$$

Außerdem gilt: $|n,+\rangle \approx |1,n+1\rangle$ & $|n,-\rangle = |2,n\rangle$

Es folgt: die disperse WW für $\delta > 0$

* verschiebt Energie von $|1,n+1\rangle$ um

$$\Delta_{1,n+1} = \hbar(n+1)\chi \quad (4.72) \text{ mit } \chi = \frac{\Omega_0^2}{4\delta} \quad (4.73)$$

* verschiebt Energie von $|2,n\rangle$ um

$$\Delta_{2,n} = -\hbar(n+1)\chi \quad (4.74)$$

→ man spricht von Lichtverschiebung oder
 AC-Stark-Verschiebung der Energieniveaus.

Wichtige Konsequenz: Übergangsfreq. eines Atoms
 im Resonator mit n Photonen ist bezgl. Wert
 im freien Raum (ω_{21}) verschoben. Es gilt

$$\Delta\omega_{21} = \frac{1}{\hbar}(\Delta_{2,n} - \Delta_{1,n}) = -(2n+1)\chi \quad (4.75)$$

Beachte: *gl. (4.74) hat zwei Beiträge

1. Term $-2n\chi$ ist prop. zu $n \Rightarrow$ Lichtverschieb.
durch WW mit verstärkten n -Photonen
Resonator Lichtfeld.
 \Rightarrow Lichtverschiebung ist quantisiert.
2. Term $-\chi$ entspricht "halbem" Photon
 \Rightarrow Lichtverschiebung durch Vakuum
(Komboverschiebung) des angeregten Niveaus
(vgl. (4.73)).

* Sowohl quantisierte Lichtverschiebung als auch Kombaverschiebung im Resonator wurden besprochen?

Andere Sichtweise: Betrachte Energiedifferenz zwischen Zust $|2,n\rangle$ & $|2,n+1\rangle \Rightarrow$ unabh. von n gleich $\hbar(\omega - \chi)$

\Rightarrow Resonator freq. durch Atom in $|2\rangle$ verschoben um

$$\Delta_2 \omega = -\chi \quad (4.76)$$

Ebenso: Resonator freq. durch Atom in $|1\rangle$ versch. um

$$\Delta_1 \omega = \chi \quad (4.77)$$

Interpretation: *Dispersives Regime \Rightarrow Atom im Resonator $\hat{=}$ transparenter Dielektrikum
(kein Energieaustausch möglich)

- * Atomares Brechungsindex ändert effektive Resonatorlänge und damit die Resonanzfreq.
- * Vorzeichen des Effekts abh. von at. Zust. und von Vorzeichen der Verstreuung

Dispersive WW lässt sich durch eff. Hamiltonop. beschreiben. Schreibe dafür (4.71) wie folgt:

$$E_{2,n} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{21} + n \hbar \omega - (n+1) \hbar \chi \quad (4.78)$$

$$E_{1,n} = -\frac{1}{2} \hbar \omega_{21} + n \hbar \omega + n \hbar \chi \quad (4.79)$$

$|1,n\rangle$ & $|2,n\rangle$ sowie $E_{1,n}$ & $E_{2,n}$ sind Näherungsweise Eigenzust. bzw. Eigenwerte von \hat{H}_{xc} im dispersiven Regime

→ eff. Hamiltonop.

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{21} \hat{\sigma}_3 + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hbar \chi \hat{\sigma}_3 \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hbar \chi \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \quad (4.80)$$

bzw. im Wechselwirkungsbild:

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{WW}} = -\hbar \chi (\hat{\sigma}_3 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-) \quad (4.81)$$

Beachte: Terme in (4.80) lassen sich auf zwei Weisen zusammenfassen:

1.) Fasse Terme $\sim \hat{\sigma}_3$ zusammen zu

$$\hat{V}_1 = \frac{1}{2} \hbar (\omega_{21} - 2 \chi \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_3 \quad (4.82)$$

nicht in VL gemacht

Sicht in VL gemacht

$\rightsquigarrow \hat{V}_1$ entspricht Hamiltonop. eines Atoms, dessen Übergangsfreq. um $-\chi \hat{a}^\dagger \hat{a}$ verschoben ist (Lichtverschiebung durch n Photonen von oben)

2) Farbe Terme $\sim \hat{a}^\dagger \hat{a}$ zusammen zu

$$\hat{V}_2 = \hbar(\omega - \chi \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (4.83)$$

$\rightsquigarrow \hat{V}_2$ entspricht Hamiltonop. eines Feldes, dessen Freq. um $-\chi \hat{a}^\dagger \hat{a}$ verschoben ist (atomarer Brechungsindex von oben).

Zeitliche Entwicklung im Wechselwirkungsfeld:

Aufangszust. $|14(0)\rangle = |1,n\rangle \quad (4.84)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |14(t)\rangle &= \exp(-i\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{WW}} t/\hbar) |14(0)\rangle \\ &= \exp(-ixnt) |1,n\rangle \quad (4.85) \end{aligned}$$

Aufangszust. $|14(0)\rangle = |2,n\rangle \quad (4.86)$

$$\Rightarrow |14(t)\rangle = \exp(ix(n+1)t) |2,n\rangle \quad (4.87)$$

Es folgt für Feld in l.o.h. Zust.:

Aufangszust. $|14(0)\rangle = |1\rangle |\alpha\rangle \quad (4.88)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |14(t)\rangle &= \exp(-i\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{WW}} t/\hbar) |1\rangle |\alpha\rangle \\ &= |1\rangle |\alpha \exp(-ixt)\rangle \quad (4.89) \end{aligned}$$

$$\text{Anfangszust. } |4(0)\rangle = |2\rangle |\alpha\rangle \quad (4.90)$$

$$\Rightarrow |4(t)\rangle = \exp(i\chi t) |2\rangle |\alpha \exp(i\chi t)\rangle \quad (4.91)$$

Beachte: Amplitude des Sch. Zust. wird im Phasenraum um Winkel χt gedreht, wobei Drehsignum von Sch. Zust. abhängt.

Betrachte nun Atom anfänglich in Superposition: $|4_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + e^{i\phi} |2\rangle) \quad (4.92)$

$$\text{Also: } |4(0)\rangle = |4_{at}\rangle |\alpha\rangle \quad (4.93)$$

$$\Rightarrow |4(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |\alpha e^{-i\chi t}\rangle + e^{i(\chi t + \phi)} |2\rangle |\alpha e^{i\chi t}\rangle) \quad (4.94)$$

Für $\chi t = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir:

$$|4(\frac{\pi}{2}\chi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |-i\alpha\rangle + ie^{i\phi} |2\rangle |i\alpha\rangle) \quad (4.95)$$

Beachte:

- * Amplituden der Sch. Zust. in Gl. (4.95) haben 180° Phasendifferenz \Rightarrow maximal separiert.
- * (vgl. Übungsblatt 2, Aufg. 3 b.) Es gilt

$$\langle -i\alpha | i\alpha \rangle \approx 0 \text{ für } 4|\alpha|^2 \gg 1 \quad (4.96)$$

In diesem Fall sind die Zust. "makroskopisch unterschiedbar" und (4.95) entspricht einem Schrödingerketten-Zust.

(4.97)

$$|\Psi_{\text{Atom-Katze}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle |\text{Katze tot}\rangle + |12\rangle |\text{Katze lebendig}\rangle)$$

Wobei $|1-i\rangle \hat{=} |\text{Katze tot}\rangle \quad (4.98)$

und $|i\rangle \hat{=} |\text{Katze lebendig}\rangle \quad (4.99)$

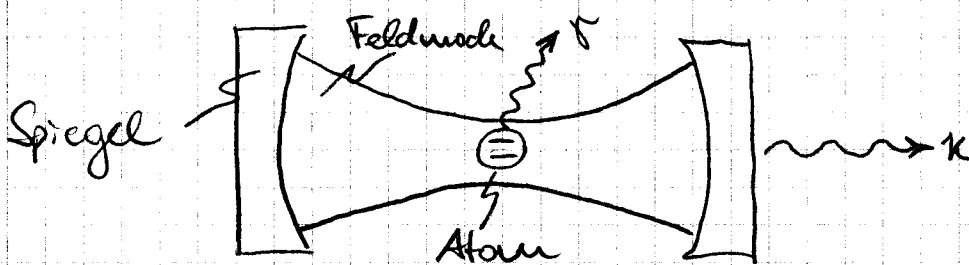
* Solche Schrödiger-katzen-Zustand kann man im Labor erzeugen und ihre Dynamik (Dekohärenz) untersuchen!

5. Resonator - Quantenelektrodynamik (QED)

Resonator \leftrightarrow engl. cavity

\rightarrow cavity QED, (QED)

Bis jetzt theoretisch betrachtet: WW eines einzelnen 2-Niveau-Atoms mit einer einzelnen Feldmode eines Resonators:



Probleme bei der exp. Realisierung des Herer-Modells:

- * Atome haben mehr als zwei Niveaus.
- * Neben der Resonatormode koppeln auch alle Moden des freien Raums an das Atom
 \rightarrow spontane Zersetzung des At. im freien Raum mit Rate γ (nicht berücksichtigt im Modell).
- * Streuung, Absorption & Transmission der Resonatorspiegel führen zu Abklingen der im Resonator gespeicherten Energie mit Zeitkonst.
 $\tau_{\text{cov}} = \frac{1}{2\pi\kappa}$ (τ_{cov} : Photonenlebensdauer, κ : Energieverlustrate; nicht berücksichtigt im Modell)
- * κ & γ beschreiben dissipative Prozesse, die zu einer Relaxation des Atom-Feldzust. zu $|1,0\rangle$ führen.

→ Notwendige Bed., um Vakuum-Rabi-Z., etc.
zu beobachten:

$$g \gg \gamma \quad (5.1)$$

$$\text{und } g \gg \kappa \quad (5.2)$$

d.h. Quantendynamik muss auf Zeitskala ablaufen ($\sim \frac{1}{\gamma}$), die viel kürzer ist, als Zeitskala der diss. Prozesse ($\sim \frac{1}{\kappa}$ bzw $\sim \frac{1}{g}$).

Fasse (5.1) & (5.2) zusammen zu

$$\boxed{\frac{g^2}{\kappa\gamma} \gg 1} \quad (5.3)$$

Ist (5.3) erfüllt, spricht man von starker Kopplung.

Es gilt (vgl. (4.7)): $g^2 \sim d^2 \epsilon^2 \sim \frac{d^2 w}{V} \quad (5.4)$

mit V : Modenvolumen.

Normierte Photonenlebensdauer auf opt.
Periodendauer

$$\rightarrow \text{Gütefaktor } Q = \frac{2\pi\tau_{\text{cav}}}{T_{\text{opt}}} = \omega\tau_{\text{cav}} \quad (5.5)$$

$$\text{Es folgt: } \kappa = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{cav}}} \sim \frac{\omega}{Q} \quad (5.6)$$

Außerdem gilt für spont. Zerfallsraten (später)

$$\gamma \sim d^2 w_{21}^3 \quad (5.7)$$

Somit haben wir:

$$\frac{q^2}{\kappa g} \sim \frac{Q}{V} \cdot \frac{1}{\omega_{21}^3} \sim \frac{Q}{(V/\lambda^3)} = \frac{Q}{V} \quad (5.8)$$

Wobei $\lambda = 2\pi c/\omega$, $V/\lambda^3 = \tilde{V}$ und $\omega_{21} \approx \omega$.

Also: Starke Kopplung \Rightarrow maximale Verhältnisse von Gütefaktor zu Modenvol. (in Einh. der Kubikwellenlänge).

Beachte: * Q & \tilde{V} beschreiben ausschließlich Resonator-eigenschaften! At. Dipolmoment spielt keine Rolle, da $q^2 \sim d^2$ & $g \sim d^2$.

* Genau gilt $\frac{q^2}{\kappa g} = \frac{3}{4\pi} \frac{Q}{\tilde{V}} \quad (5.9)$

$$\Rightarrow \text{starke Kopplung} \Leftrightarrow \frac{3}{4\pi} \frac{Q}{\tilde{V}} \approx \frac{1}{4} \frac{Q}{\tilde{V}} \gg 1 \quad (5.10)$$

\Rightarrow Experimentelles Ziel ist also z.B.

$$Q_g \approx 1000 \quad (5.11)$$

* Zahlenbeispiel: Optisches Fabry-Pérot-Ressonator ($\Rightarrow \lambda \approx 1\mu\text{m}$)

gut handhabbarer Spiegelabstand:

$$L \approx 100 \mu\text{m} \approx 100\lambda$$

typischer Modendurchmesser: $\varnothing \approx 35 \mu\text{m} \approx 35\lambda$

\Rightarrow Modenquerschnittsfläche: $A \approx 1000 \lambda^2$

$$\Rightarrow V = A \cdot L \approx 100000 \lambda^3 \text{ bzw. } \tilde{V} = 10^5 \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow Q \gtrsim 10^8 \quad (5.13)$$

Das erfordert extrem verlustarme Spiegel!

Spiegelreflektivität für $Q = 10^8$ und $L = 100\lambda$ (Übung)

$$R \geq 99,9994\% \quad ?? \quad (5.14)$$

also Verluste von 6 ppm pro Reflexion.

Zum Vergleich: Sehr guter Metallspiegel (Silber)

$$R \approx 97\%$$

→ Verluste 5000fach zu groß?

Großen unglaublich: Es gibt Spiegel mit Verlusten nur ppm-Bereich (beruhen auf Vielschichtaufbau am Stapel von dielektr. Schichten)!

→ Zeige Folie mit Bild von Baumer Resonator

Andere Typen von opt. Resonatoren, die in Bereich der starken Kopplung vorstehen:

* photoni sche Kristalle

* Flüssigkeitsresonatoren

→ Zeige Folie K. Vahala Review

Beispiel in Mainz: Flaschenresonator

→ Zeige Folien Strahlenschild, schematisches Wellenbild & Fluoreszenz.

Mit weiter Abstand beste Ressonatoren:

F.-P. Ressonatoren aus supraleitenden Spiegelblättern
für Mikrowellen (Ecole Normale Supérieure, Paris)

→ Zwei Folie mit Bild aus Stefans Phiz - Paper

* $\tau_{\text{cav}} = 0,13 \text{ s}$! (entspricht einer Milliarde
Reflexionen → Verluste im ppb-Bereich!)

$$* \omega = 2\pi \times 51 \text{ GHz} \Rightarrow Q = \omega \tau_{\text{cav}} = 4 \cdot 10^{10}$$

$$* V = 770 \text{ mm}^3 \quad (\text{Spiegelabstand} \approx 3 \text{ cm} \stackrel{!}{=} 4,5\lambda) \\ \rightsquigarrow \tilde{V} = 3,8$$

$$* \Rightarrow Q/V = 10^{10} \text{ ?}$$

* Zweite Jahrzehnte Entwicklungsarbeit!

* Betriebsstemperatur $\approx 1 \text{ K}$ aus zwei Gründen

1.) Supraleiter haben temperaturabhängigen
Widerstand für Wechselfelder.

2.) Theoret. Feld in Resonatormode bei 51 GHz
soult zu groß.

„Passendes“ Atom für diesen Resonator sollte haben:

* Mikrowellentransition:

Erinnerung: $E_{n,l} = -\frac{R}{(n-\delta_l)^2} \text{ ergs} \approx -\frac{R}{n^2} \quad (5.15)$

Wobei $R = 13,6 \text{ eV}$: Rydbergkonstante (5.16)

$$n=1,2,3,\dots : \text{Hauptquantenzahl} \quad (5.17)$$

$$l=0,1,2,\dots,n-1 \text{ Balmandekkimpuls-quantenzahl} \quad (5.18)$$

$$\delta_e > 0 : \text{Quantendefekt} \quad (5.19)$$

Aus Gl. (5.15) folgt:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n \approx 2R/n^3 \quad (5.20)$$

Microwellenübergang: $\Delta E/h \approx 51 \text{ GHz}$

$$\Rightarrow n = 50 \quad (5.21)$$

Atome mit $n > 20$: Rydbergatome

* Großes Dipolmoment, damit γ groß:

Einschwingung: $\rightarrow d_5 = \langle \vec{r}_n | q \vec{r} | \vec{r}_{n-1} \rangle \sim q n^2 a_0 \quad (5.22)$

$$\text{z.B. } |\vec{d}_{50}| = 1706 \cdot 1 q a_0 \text{ (riesig!)}$$

\rightsquigarrow Rydbergatome ✓

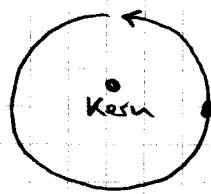
* Kleine spont. Zerfallsrate

$$\gamma \sim d^2 \omega^3 \sim n^4 \cdot \frac{1}{n^8} \sim \frac{1}{n^5} \quad (5.23)$$

$$\text{z.B. } T_{\text{At}} = \frac{1}{2\pi\gamma} = 30 \text{ ms für } n=50 \text{ (sehr lang!)}$$

\rightsquigarrow Rydbergatome ✓

* Zwe-Niveau-Atom \rightsquigarrow verwendet zirkulare Rydbergatome ($l=n-1$ & $m=l$, m : magnet. Quantenzahl)



Naheru. klass. Kreisförmiger
e- Orbit

Z.B.

$|12\rangle \xrightarrow{\quad} n=51, l=m=50$

$|11\rangle \xrightarrow{\quad} n=50, l=m=48$

$$\downarrow \omega_{21} \approx 51 \text{ GHz}$$

Erinnerung: Auswahlregel für Dipolübergänge:

$$\Delta l = \pm 1; \Delta m = 0, \pm 1$$

$\Rightarrow |12\rangle$ leppelt ausschließlich an $|11\rangle$

$|11\rangle$ leppelt (fast) ausschließlich an $|12\rangle$

wg. Clebsch-Gordan-Koeff. & geeign. Polarisation



\Rightarrow Fast ideales zwe-Niveau-System!

Nachteil: Extrem schwierig zu präparieren
(3 opt., 48 RF & 1 MW-Übergang !!!)

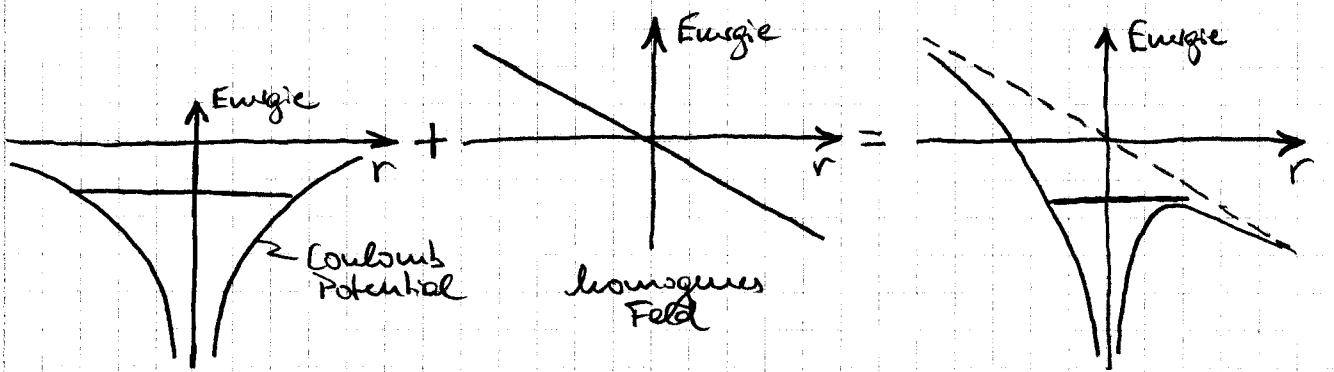
\rightsquigarrow Zeige Fig 2.4 aus diss.

$\otimes \rightsquigarrow$ Zeige Fig 2.3 aus diss.

* Zustandsselektive Detektionsmethode

\rightsquigarrow Bei zirk. Rydbergatomen möglich durch Feldionisation

Idee: Bringt Atom in extres el. Feld, welches Coulombfeld am Ort des e- übersteigt:



Konsequenz: e^- wird vom Kernfeld des Ryd.-Atoms „abgelenkt“ und kann sehr effizient detektiert werden.

e^- „sieht“ Coulomb-Feld

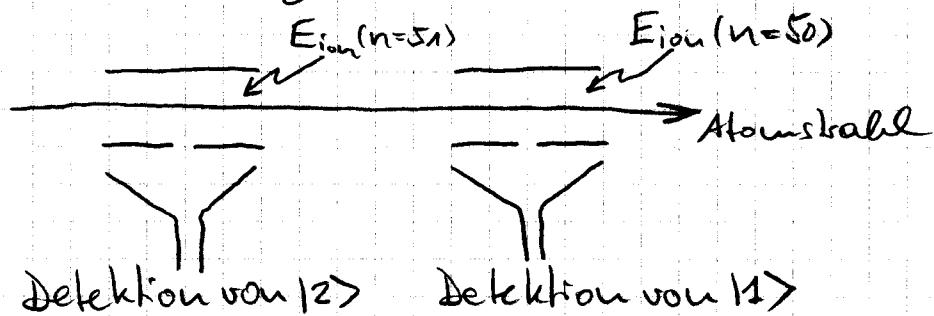
$$E_{\text{Coulomb}} \approx \frac{1q^2}{4\pi\epsilon_0(n^2a_0)^2} \quad (5.24)$$

\Rightarrow Ionisationsfeldstärke $E_{\text{ion}}(n)$ abhängig von Hauptquantenzahl ($\sim \frac{1}{n^4}$)

\Rightarrow Prozess Zustandsselektiv ✓

Mögliche experimentelle Umsetzung:

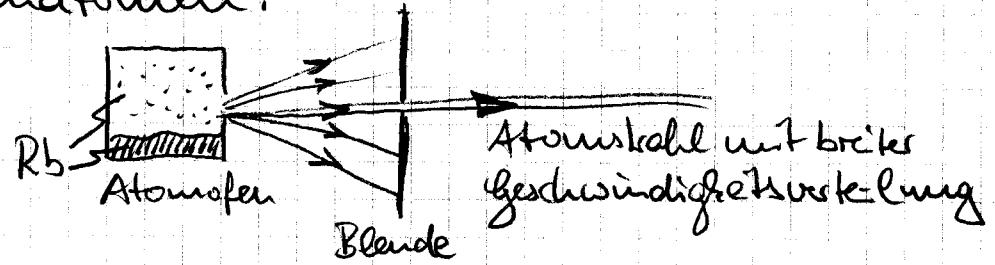
lässt e^- zwei Kondensatoren durchqueren, denen jeweils eine e^- -Sammeloptik und ein e^- -Vervielfacher nachgeschaltet sind:



* Problem: Erzeugung von zirk. Ryd.-Atomen
Ist mehrbe probabilistischer Prozess.

Derzeit experimentell möglich:

- Arbeit mit kontinuierlichem Strahl von Atom.
- Rubidiumatome:



- Erzeugung durch gepulsten & geschwindigkeitsselektiven Prozess im Atomstrahl zu Zeit t ein „Paket“ Rydbergatome mit scharfer Geschwindigkeitsverteilung und mittlerer Atomzahl \bar{n}_{At} .

Achtung: Tatsächliche Atomzahl n_{At} poissonverteilt.

Unbedingt zu vermeiden: $n_{At} > 1$ (kann bei Detektion nicht von $n_{At} = 1$ unterschieden werden)

Einige Möglichkeit: $\bar{n}_{At} \ll 1$

$$\text{z.B. } \bar{n}_{At} = 0,2 \Rightarrow P(n_{At}=0) = 0,818$$

$$P(n_{At}=1) = 0,164 \quad (5.25)$$

$$P(n_{At} \geq 2) = 0,018$$

Detektor klick \Rightarrow bedingte Wahrscheinlichkeiten
(Ann.: 100% Detektoreffizienz):

$$P(n_{At}=0/\text{klick}) = 0$$

$$P(n_{At}=1/\text{klick}) = 0,90 \quad (5.26)$$

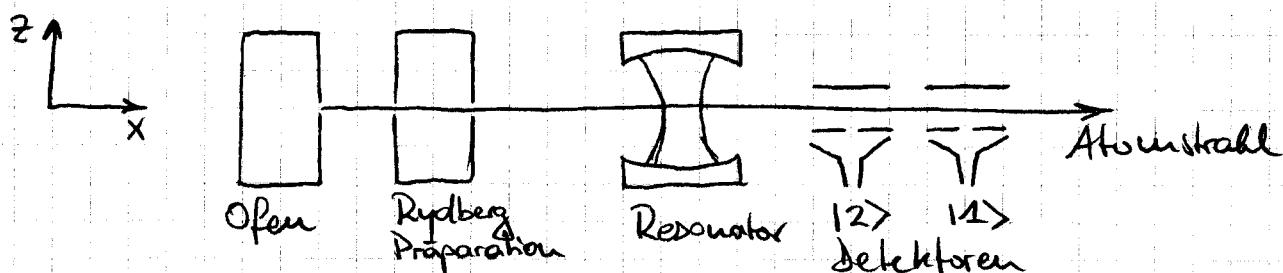
$$P(n_{At} \geq 2/\text{klick}) = 0,10$$

Konsequenz: Experimente mit $n_{At}=1$ mit großer Wkt. mögl. Dies: In 82% des Falle ist $n_{At}=0$ und wir müssen das Experiment verschieben.

\Rightarrow Datenanzahl um 5x länger (30x länger für Exp. mit zwei einzelnen Atomen, 170x länger für drei einzelne Atome etc.)

5.1 Quanten-Rabi-Oszillationen im Experiment

Schematischer experimenteller Aufbau:



Ziel:
 * Präpariere Atom in $|2\rangle$ und Resonatormode in $|0\rangle$ (durch Kühlung des Aufbaus)

* Messe W. & t Atom in $|1\rangle$ zu finden als Flkt der Wechselwirkung $\hat{E} + \hat{t}_{\text{res}}$

Beachte: Transversaler Intensitätsverlauf der Resonatormode ist gaußförmig

\Rightarrow Kopplungsstärke ortsabh.:

$$g(x) = g \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \quad (5.27)$$

wobei w_0 : Strahlgröße der Gaußmode

und $x=0$: Zentrum des Resonators

\Rightarrow Für Atom mit Geschwindigkeit $v \Rightarrow$ zeitabh.

Kopplungsstärke:

$$g(t) = g \exp\left(-\frac{(vt)^2}{w_0^2}\right) \quad (5.28)$$

Man kann zeigen: Durchläuft das Atom die Resonatormode vollständig, so ist der Atomfeld-Zustand gegeben durch:

$$|2(t_{\text{eff}})\rangle = \cos(g t_{\text{eff}}) |2,0\rangle - i \sin(g t_{\text{eff}}) |1,1\rangle \quad (5.29)$$

Wobei:

$$t_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{\pi} \omega_0}{\sqrt{v}} \quad (\text{eff. WW-Zet}) \quad (5.30)$$

Beachte:

- * Gl. (5.29) entspricht genau Rabi-Oszillation mit konstanter Kopplungsstärke g für $t = t_{\text{eff}}$ (vgl. Gl. (4.32))

- * t_{eff} lässt sich mittels v variieren.

→ Messe $P_1 = \langle 2(t_{\text{eff}}) | 1X1 | 2(t_{\text{eff}}) \rangle \quad (5.31)$
als Funktion von t_{eff} .

→ Zeige Rabi-Signal

Interpretation des exp. Signals:

- * Deutlich sichtbar: Mehrere Perioden der Quanten-Rabi-Oszillation (Vakuum-Rabifreq.: $\omega_0 = 2\pi \times 50 \text{ kHz}$)

- * Signal entspricht nicht dem theor. erwarteten ungedämpften sinusförmigen Signal, sondern zerfällt zu $P_1 = 0,5$ nach einigen Perioden.

Grund: Nicht Dissipation (sonst wäre $P_1 = 0$)
Sondern Dephasierung.

- * Dämpfung durch Variation der Vakuum-Rabi freq. von Atom zu Atom \Rightarrow Kollaps des Signals nach $t \approx \frac{1}{\Delta\omega}$.

Experimenteller Grund: Atomschub hat Durchmesser $\approx 1 \text{ mm} \Rightarrow$ nicht alle Atome treffen Resonatormode im Punkt der stärksten Kopplung.

5.2 Rabi-Oszillation in kohärenten Feldern

Gleicher Aufbau wie oben. Zusätzlich: Resonator gekoppelt an gepulste Mikrowellenquelle (resonant mit Resonatormode).

Idee: * Präpariere Resonatormode unmittelbar vor Eintreffen des Atoms in $|1\rangle$.

Man kann zeigen: Kopplung an Mikrowellenquelle tut genau dies ($|1\rangle|^2 \sim$ Leistung der Quelle \times Pulsdauer)

- * Messe P_1 als Funktion von t_{eff} für verschiedene mittl. Photonenzahlen $\bar{n} = |1\rangle^2$
- \rightarrow Zeige Fig. 2 (A)-(D) aus PRL

Interpretation des exp. Signals:

- * Schwebung zwischen verschiedenen Rabi freq. für Photonenzahlen $n = 0, 1, 2, \dots$ sichtbar.
- * Schneller Kollaps für größere mittl. Photonenzahl (vgl. Kap. 4).

Frage: Kann man die Signale auch noch quantitativ auswerten?

Gedächtnis: Gl. (4.47) \rightarrow Signal = Summe der Rabiroz. über alle Photonenzahlen n , gewichtet mit Photonenzahlverteilung P_n .

\rightarrow Betrachte FT der Rabi-Signale

\rightarrow Zeige Fig. 2 (a)-(d) aus PRL

Beachte: Im Fourierspektrum der Rabi-Signale treten diskrete Peaks auf bei Frequenzen $\Omega_0, \Omega_0\sqrt{2}, \Omega_0\sqrt{3}, \Omega_0\sqrt{4}$, etc.

\rightarrow Direkter Nachweis der Quantisierung des em. Feldes im Resonator?

Frage: Steckt noch mehr Information in den Signalen?

Betrachte Gewicht der verschiedenen Frequenzbump. (Parse gedämpfte Sinussignale mit Frequenzen $\Omega_0\sqrt{n+1}$ für $n=0\dots 5$ am Rabiroz. an)

\rightarrow Zeige Fig. 2 (A)-(D) & (a)-(e) aus PRL

Beachte: Die so ermittelte Photonenzahlverteilung entspricht der für lwh. Zust. erwarteten Poissonvert.

\rightarrow Lehrbuchexperiment zum Niederschlag?

6. Spontane Emission im freien Raum

Bis jetzt gesehen: WW von Atom in $|2\rangle$ mit einzeiner Feldwunde in Resonator \Rightarrow Übergang nach $|1\rangle$ auch für Feld in Zust. $|0\rangle$ (Vacuum-Rabiöse)

Jetzt: WW von Atom in $|2\rangle$ mit Kontinuum von Wunden im freien Raum.

Wir werden sehen: Das führt zu (irreversiblen) exponentiellem Zerfall von P_2 .

6.1 Modendichte des freien Raums

Für die folgenden Rechnungen führen wir ein: Kubisches Volumen mit Seitenlänge L und periodische Randbed.

Beispiel: Ebene Wellen entlang x müssen erfüllen:

$$\exp(ik_x x) = \exp(ik_x(x+L)) \quad (6.1)$$

Es folgt: $k_x = \frac{2\pi}{L} m_x, m_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.2)$

Entsprechend für y- & z-Richtung

\Rightarrow Wellenvektor: $\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (m_x, m_y, m_z) \quad (6.3)$

(m_x, m_y, m_z) spezifiziert (bis auf Polarisierung) eine Normalwelle.

Frequenz dieser Mode bestimmt über $\omega_k = \frac{\omega_0}{c}$ (6.4).

Zahl der Wellen in Intervallen $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$:

$$\Delta n = \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (6.5)$$

eine Polarisationsrichtungen

Betrachte quasi-kontinuierlichen Grenzfall ($L \gg \lambda$)
→ nähere Δn durch Differential

$$dn = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) dk_x dk_y dk_z \quad (6.6)$$

wobei $V = L^3$.

Übergang zu sphärischen Koordinaten, also

$$\vec{k} = k (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (6.7)$$

$$\rightsquigarrow dn = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) k^2 dk d\Omega \quad (6.8)$$

mit infinitesimalen Raumwinkellement

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.9)$$

Mit Gl. (6.4) finden wir

$$dn = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) \frac{\omega_k^2}{c^3} dw_k d\Omega \quad (6.10)$$

Integration über Raumwinkel liefert für Zahl der Wellen im Intervall $\omega_k \dots \omega_k + dw_k$:

$$V \frac{\omega_k^2}{\pi^2 c^3} dw_k = V g(\omega_k) dw_k \quad (6.11)$$

mit der Modendichte

$$g(\omega_k) = \frac{\omega_k^2}{\pi^2 c^3} \quad (6.12)$$

Beachte:

- * Winkelrichtung erlaubt, direkte Summen über alle Moden in Volumen V durch Integral zu ersetzen gemäß

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \varepsilon} f(\vec{k}) \rightarrow \int d\omega_k g(\omega_k) f(\omega_k) \quad (6.13)$$

Wobei $f(\vec{k})$ eine bel. Fkt. ist und $\varepsilon = 1, 2$ ein Index ist, der die beiden Polarisierungen zählt.

- * Wenn f von θ, φ und ε abhängt, d.h. $f(\vec{k}, \varepsilon)$, gilt (allg. Fall):

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \varepsilon} f(\vec{k}, \varepsilon) &\rightarrow \frac{1}{V} \int d\omega_k f(\vec{k}, \varepsilon) = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3 k f(\vec{k}, \varepsilon) \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int d\omega_k \frac{\omega_k^2}{c^3} \left[\int_0^\pi d\theta \sin \theta \right]_0^{2\pi} d\varphi f(\vec{k}, \varepsilon) \quad (6.14) \end{aligned}$$

Wobei zusätzlich noch über $\varepsilon = 1, 2$ summiert werden muss.

6.2 Quantisierung eines Mehrmodenfeldes

Hamiltonop. eines Mehrmodenfeldes = Summe der Hamiltonop. der einzelnen Moden

$$\hat{H} = \sum_S \hat{H}_S \quad (6.15)$$

$$\text{mit } S = \{\vec{k}, \varepsilon\} \text{ und } \hat{H}_S = \hbar \omega_S (\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S + \frac{1}{2}) \quad (6.16)$$

Vernichter und Erzeugerop. erfüllen Vertauschungsrelation

$$[\hat{a}_S, \hat{a}_{S'}^\dagger] = \delta_{S,S'} \quad (6.17)$$

Für el. Feldop. gilt (vgl. Gl. (3.1))

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \sum_s i \vec{E}_s \vec{E}_s [\hat{a}_s \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)) - \hat{a}_s^\dagger \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t))] \quad (6.18)$$

wobei \vec{E}_s der Polarisationsvektor ist und

$$E_s = \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 V}} \text{ das Feld pro Photon} \quad (6.19)$$

Eigenzust. von (6.15): Produktzust. des Einzelmoden-Eigenzust.:

$$|n_1, n_2, \dots, n_s, \dots\rangle = |\{\epsilon_n\}\rangle \quad (6.20)$$

Eigenwerte: $\hat{H}|\{\epsilon_n\}\rangle = \hbar \sum_s \omega_k (n_s + \frac{1}{2}) |\{\epsilon_n\}\rangle \quad (6.21)$

Wirkung der Erzeuger- und Verstärkerop. \hat{a}_p^\dagger & \hat{a}_p auf $|\{\epsilon_n\}\rangle$:

$$\hat{a}_p^\dagger |\{\epsilon_n\}\rangle = \sqrt{n_p + 1} |n_1, n_2, \dots, n_p + 1, \dots\rangle \quad (6.22)$$

$$\hat{a}_p |\{\epsilon_n\}\rangle = \sqrt{n_p} |n_1, n_2, \dots, n_p - 1, \dots\rangle \quad (6.23)$$

Allg. Zust eines Multimodenfelds: lineare Überlagerung von Zust. $|\{\epsilon_n\}\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_s} c_{n_1 n_2 \dots n_s} |n_1, n_2, \dots, n_s, \dots\rangle = \sum_{\{\epsilon_n\}} c_{\{\epsilon_n\}} |\{\epsilon_n\}\rangle \quad (6.24)$$

Beachte: Zust (6.24) beschreibt i. A. mehr als Produktzust.

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle |\Psi_2\rangle \dots |\Psi_s\rangle \dots \quad (6.25)$$

Es kann auch Korrelationen zwischen den Moden geben (z.B. durch W.W mit einem Atom).

6.3 Weisskopf-Wigner Theorie der spont. Emission

Atom-Feld-Hamiltonp. In Analogie zu Jaynes-Cummings-Hamiltonp.:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_{z1}\hat{\sigma}_3 + \hbar\sum_s \omega_k \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \hbar\sum_s (g_s \hat{\sigma}_+ \hat{a}_s + g_s^* \hat{\sigma}_- \hat{a}_s^\dagger) \quad (6.26)$$

(Achtung: g_s i.A. komplexwertig)

Betrachte Atom anfangs in $|2\rangle$ und Feld in $|1, \{0\}\rangle$. WW-Term in (6.26) koppelt $|2, \{0\}\rangle$ ins an Zustände $|1, \{1s\}\rangle$, also Atom im Grundzust & 1 Photon in der Sten Mode

→ Atom-Feld-Zust. zum Zeitp t:

$$|q(t)\rangle = c_{2,\{0\}}(t) \exp(-i\frac{\omega_{z1}t}{2}) |2, \{0\}\rangle$$

$$+ \sum_s c_{1,\{1s\}}(t) \exp(-i(\omega_k - \frac{\omega_{z1}}{2})t) |1, \{1s\}\rangle \quad (6.27)$$

Einsetzen von (6.26) & (6.27) in SG liefert:

$$\dot{c}_{2,\{0\}}(t) = -i \sum_s g_s \exp(-i(\omega_k - \omega_{z1})t) c_{1,\{1s\}} \quad (6.28)$$

$$\dot{c}_{1,\{1s\}}(t) = -i g_s^* \exp(i(\omega_k - \omega_{z1})t) c_{2,\{0\}} \quad (6.29)$$

Formelle Integration von (6.29) und Einsetzen in (6.28) liefert:

$$\dot{c}_{2,\{0\}}(t) = - \sum_s |g_s|^2 \int_{t_0}^t dt' \exp(-i(\omega_k - \omega_{z1})(t-t')) c_{2,\{0\}}(t') \quad (6.30)$$

Beachte: Gl. (6.30) ist nicht lokal in der Zeit, d.h. $c_{2,\text{LOS}}(t)$ ist eine Funktion des früheren Werte $c_{2,\text{LOS}}(t')$.

Mit Gl. (6.14) kann man die Summe in (6.30) nun als Integral schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{2,\text{LOS}}(t) = & -\frac{V}{8\pi^3 c^3} \left[\int d\omega_k \omega_k^2 \right]_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ & \times |g(\omega_k, \theta)|^2 \int_{t_0}^t dt' \exp(-i(\omega_k - \omega_{21})(t-t')) c_{2,\text{LOS}}(t') \end{aligned} \quad (6.31)$$

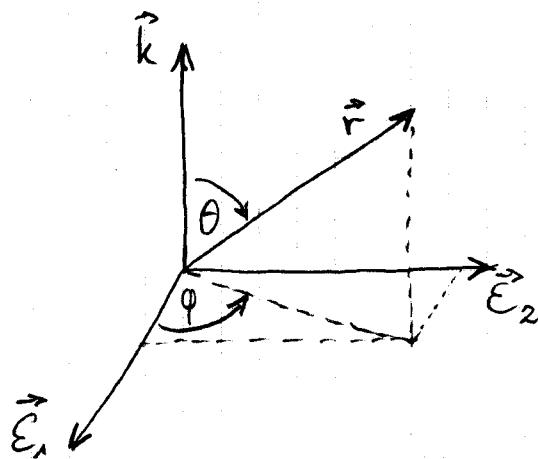
Beachte:

* Kopplungskonst. g hängt ab von Skalarprodukt in (vgl. (4.2)) $\hat{H}_{WW} = -\hat{d} \cdot \hat{E}$ mit $\hat{d} = q \cdot \vec{r}$ (6.32)

Da in (6.31) auch noch über die zwei möglichen Polarisierungen summiert werden muss

→ berechne zunächst $\sum_{E=1,2} |g(\omega_k, \theta)|^2$ (6.33)

Betrachte hierfür Koord. System, welches für eben eine Welle aufgespannt wird durch \vec{k} , $\vec{\epsilon}_1$ und $\vec{\epsilon}_2$, wobei $\vec{\epsilon}_{1,2}$ zwei konservative Polarisationsvektoren sind:



Wir finden

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon=1,2} |\vec{q}(\omega_k, \theta)|^2 &= \frac{1}{h^2} \sum_{\varepsilon=1,2} |\langle 2 | \vec{q} \cdot \vec{\epsilon}_\varepsilon | 1 \rangle \epsilon_\varepsilon|^2 \\ &= \left| \frac{d\epsilon_s}{h} \right|^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= \left| \frac{d\epsilon_s \sin \theta}{h} \right|^2 \quad (6.34)\end{aligned}$$

Bei Einsetzen von (6.34) in (6.31) findet folgendes Integral auf:

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) (1 - \cos^2 \theta) = \frac{4}{3} \quad (6.35)$$

Mit (6.13) erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{c}_{2,\text{so3}}(t) &= -\frac{1}{6\epsilon_0 \pi^2 k c^3} \int d\omega_k \omega_k^3 |dl|^2 \\ &\times \int_{t_0}^t dt' \exp(-i(\omega_k - \omega_{21})(t-t')) c_{2,\text{so3}}(t') \quad (6.36)\end{aligned}$$

Vereinfachungen:

* $\omega_k^3 |dl|^2$ variiert langsam mit ω_k .

* Annahme: $c_{2,\text{so3}}(t')$ ändert sich wenig während des Zeitintervalls $t-t_0$, in dem der verbleibende Integrand von Null verschiedene Werte liefert

\Rightarrow Werte $c_{2,\xi_0\delta}(t')$ aus für $t'=t$. (6.37)

- * Das verbleibende Zeitintegral hat den stark gepeckten Wert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t dt' \exp(-i(\omega_k - \omega_{21})(t-t')) \\ = \pi \delta(\omega_k - \omega_{21}) - \beta \left(\frac{i}{\omega_k - \omega_{21}} \right) \quad (6.38)$$

wobei β der Cauchy-Hauptwert ist (vernachlässigen wir, da ein Imaginar \Rightarrow Frequenzverschiebung \Leftrightarrow Lambshift)

Einsetzen der δ -Fktu aus (6.38) und (6.37) in Gl. (6.36) liefert

$$c_{2,\xi_0\delta}(t) = -\gamma/2 c_{2,\xi_0\delta}(t) \quad (6.39)$$

wobei

$$\boxed{\gamma = \frac{\omega_{21}^3 |dI|^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}} \quad (6.40)$$

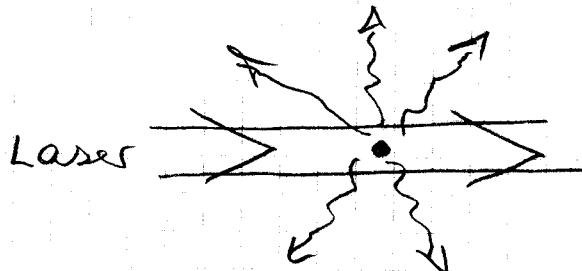
Beachte:

- * Weisskopf-Wigner Theorie \Rightarrow exponentieller Zerfall der Besetzung des angeregten Zustands mit Rate γ .
- * Insbesondere: Keine Rabi-Osz. oder Revivals.
- * Realabsorption aus jedem einzelnen Mode im Prinzip möglich. Aber U.letsampl. für solche Ereignisse interferieren destruktiv bei Summation über Modenkontinuum.

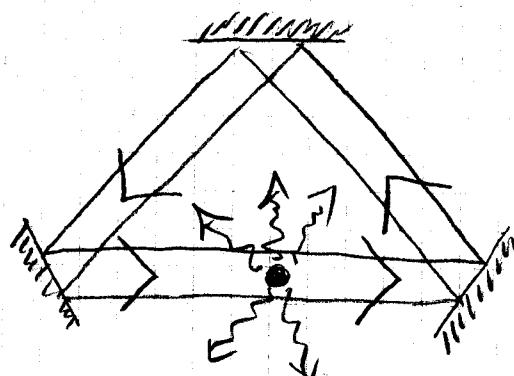
7. Resonanzfluoreszenz, hollow-Triplet

Zee-Niveau-

Betrachte Atom, welches mit einer Laser-Mode und einem Kontinuum von leeren Moden (freier Raum) wechselwirkt:



Idee: modelliere Laser-Mode als oszillat. freie Resonatormode:



Annahmen:

- * Energiedichte $\sim \bar{n}_V$ soll Lasermode entsprechen
- * Keine Modifikation der spont. Emission
 $\Rightarrow V \rightarrow \infty$, wobei $\bar{n}_V = \text{konst.}$ (also $\bar{n} \rightarrow \infty$)
- * Mode im ldk. Zust., $\Rightarrow \Delta n = \sqrt{\bar{n}}$ (6.1)
- * Zahl der spontan emittierten Photonen $\ll \Delta n$
 $\Rightarrow gT\frac{1}{2} \ll \sqrt{\bar{n}} \quad (6.2)$
wobei T : WW-Zet
(gl. (6.2) erfüllt für $\bar{n} \rightarrow \infty$, s. oben).

* Zusammengefasst wird angenommen:

$$\bar{n}, \Delta n \gg 1, g\tau \quad (6.3)$$

$$\text{Sowie } \bar{n} \gg \Delta n \gg 1 \quad (6.4)$$

Unter diesen Annahmen: Beschreibe Energie-Eigenzust. durch Dressed States und spont. Emission durch Übergänge zwischen Multiplicitäten.

7.1 Lokale Periodizität des Energiediagramms

Betrachte Kopplungsstärke $g\sqrt{n+1}$ innerhalb Multiplicität $E_n = \{ |2,n\rangle, |1,n+1\rangle \}$ (vgl. (4.18)).

→ Variation über Breite der Photonenzahlverteilung

$$\frac{\Delta g\sqrt{n+1}}{g\sqrt{n+1}} = \frac{\Delta\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta n}{n} \ll 1 \quad (6.5)$$

→ Variation vernachlässigbar.

→ Energiediagramm in gerader Näherung periodisch im Bereich Δn um \bar{n} .

7.2 Radiative Kaskade im dressed State Bild

Betrachte Matrixelemente des Dipolops zwischen Dressed States (vgl. (4.5)): $\hat{d} = d(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$ (6.6)

Mit (4.57) & (4.58) finden wir für die Matrixel. von $\hat{\sigma}_+$ (prop. zu Matrixel. von \hat{d}):

$$\langle n,+ | \hat{\sigma}_+ | n-1,+ \rangle = \sin(\theta_{n/2}) \cos(\theta_{n/2}) \quad (6.7)$$

$$\langle n,- | \hat{\sigma}_+ | n-1,- \rangle = -\sin(\theta_{n/2}) \cos(\theta_{n/2}) \quad (6.8)$$

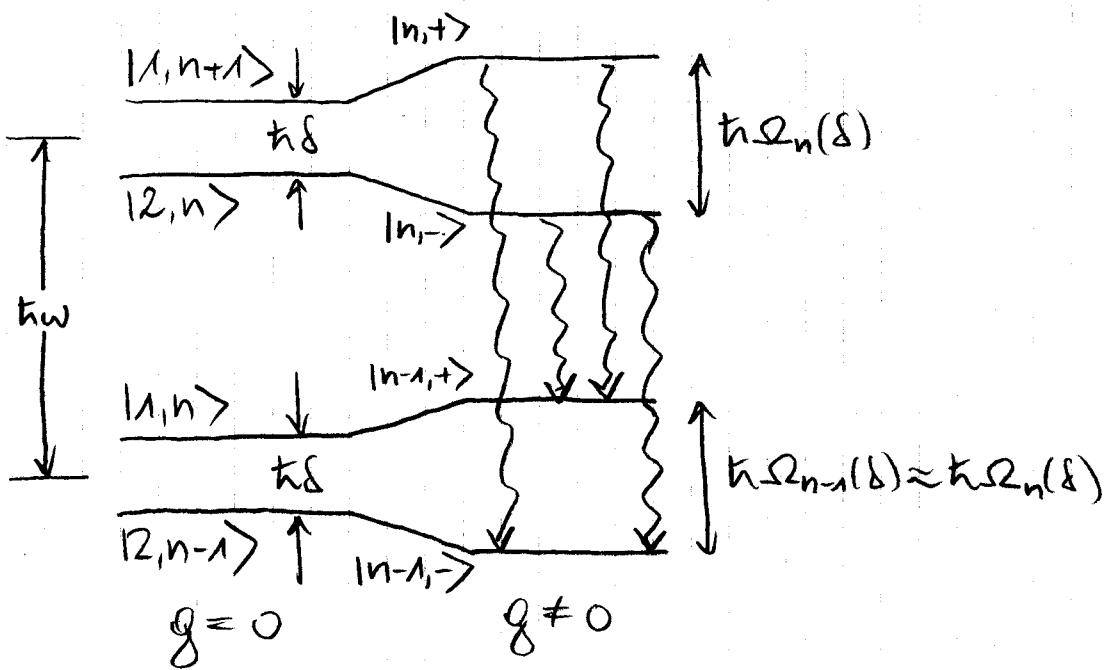
$$\langle n,+ | \hat{\sigma}_+ | n-1,- \rangle = \cos^2(\theta_{n/2}) \quad (6.9)$$

$$\langle n,- | \hat{\sigma}_+ | n-1,+ \rangle = -\sin^2(\theta_{n/2}) \quad (6.10)$$

Beachte: Alle Matrixelemente $\neq 0$ für $g \neq 0$
 (vgl. (4.60) & (4.61))

Grund: Sowohl $|n,+ \rangle$ als auch $|n,- \rangle$ sind mit $|2,n \rangle$ „kontaminiert“. Gleichzeitig sind $|n-1,+ \rangle$ & $|n-1,- \rangle$ mit $|1,n \rangle$ kontaminiert.

Konsequenz: Alle vier möglichen Übergänge zwischen den dressed States zweier benachbarter Mannigfaltigkeiten sind erlaubt:



Für die Mittenfrequenzen der Übergänge finden wir:

$$|n,+\rangle \rightarrow |n-1,-\rangle : \omega + \Omega_n(\delta)$$

$$|n,-\rangle \rightarrow |n-1,+\rangle : \omega - \Omega_n(\delta)$$

$$|n,+\rangle \rightarrow |n-1,+\rangle : \omega$$

$$|n,-\rangle \rightarrow |n-1,-\rangle : \omega$$

(7,11)

Beachte:

* Fluoreszenzspektrum besteht aus zentraler Linie bei ω und zwei Seitenbändern bei $\omega \pm \Omega_n(\delta) \rightsquigarrow$ Mollow-Triplett.

* Linienbreiten sind nicht einfach durch natürliche Linienbreite der spontanen Emission im freien Raum gegeben (betrachten wir nicht).

\rightsquigarrow Zeige Fig 6b aus PRA 15, 227 (1977)

8. Adiabatische WW

Erinnerung: Semiklassische Atom-licht-WW wird beschrieben durch RWA-Hamiltonop.

(vgl. Kap. 1)

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_0 \\ -\Omega_0 & -2\delta \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

In Anlehnung an Kap. 4.3 können wir nun auch die Energie-Eigenzust. berechnen und bezeichnen diese als Dressed States $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$.

Eigenwertgl. $\hat{H}| \pm \rangle = \hbar\omega^{\pm}| \pm \rangle \quad (8.2)$

→ Eigenwerte $\omega^{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2} = \pm \frac{1}{2} \Omega \quad (8.3)$

mit $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2}$: effektive Rabi-freq. (8.4)

und Eigenzust. $|+\rangle = \cos \theta |2\rangle + \sin \theta |1\rangle \quad (8.5)$

$$|-\rangle = -\sin \theta |2\rangle + \cos \theta |1\rangle \quad (8.6)$$

wobei θ der sogenannte Mischungswinkel ist:

$$\tan(2\theta) = \frac{\Omega_0}{\delta} \quad (8.7)$$

Beachte: $|+\rangle$ & $|-\rangle$ sind Energie-Eigenzust.

→ keine zeitliche Evolution unter \hat{H}

(insbesondere keine Übergänge zwischen $|+\rangle$ und $|-\rangle$).

Frage: Ist es möglich, Ω_0 und/oder δ zeitlich zu variieren, ohne dass das Atom den (sich entsprechend ändernden) Zust. $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ verlässt?

Antwort: Ja, wenn die Änderung adiabatisch erfolgt.

8.1 Adiabatische Näherung

Drücke allg. atomaren Zust. durch $|+\rangle$ & $|-\rangle$ aus:

$$|q(t)\rangle = c_+(t)|+(t)\rangle + c_-(t)|-(t)\rangle \quad (8.8)$$

Einsetzen in SG $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |q(t)\rangle = \hat{H} |q(t)\rangle$

Linke Seite:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |q(t)\rangle &= \dot{c}_+(t)|+\rangle + c_+(t)\frac{\partial}{\partial t}|+\rangle \\ &\quad + \dot{c}_-(t)|-\rangle + c_-(t)\frac{\partial}{\partial t}|-\rangle \end{aligned} \quad (8.9)$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t}|+\rangle = -\dot{\theta}\sin\theta|2\rangle + \dot{\theta}\cos\theta|1\rangle$
 $= \dot{\theta}|-\rangle \quad \left. \right\} (8.10)$

und $\frac{\partial}{\partial t}|-\rangle = -\dot{\theta}|+\rangle \quad \left. \right\}$

also $\frac{\partial}{\partial t}|q(t)\rangle = (c_+ - c_- \dot{\theta})|+\rangle + (c_+ \dot{\theta} + \dot{c}_-)|-\rangle \quad (8.11)$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} \hat{H}|q(t)\rangle &= \hbar\omega|+\rangle + \hbar\omega|-\rangle \\ &= \frac{\hbar\Omega}{2}c_+|+\rangle - \frac{\hbar\Omega}{2}c_-|-\rangle \end{aligned} \quad (8.12)$$

Vergleich mit SG liefert:

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_+ - c_- \dot{\theta} \\ c_+ \dot{\theta} + \dot{c}_- \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \Omega \begin{pmatrix} c_+ \\ -c_- \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_+ \\ \dot{c}_- \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Omega & 2i\dot{\theta} \\ -2i\dot{\theta} & -\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Beachte:

- * gl. (8.14) entspricht zeitabh. SG
- * Terme mit $\dot{\theta}$ können verschlissigt werden, falls $\dot{\theta} \ll \Omega$ (adiabatische Näherung) (8.15)
- * Falls adiab. Näherung gilt:
 - ⇒ ungekoppelte Gln. für Amplituden c_+ & c_-
 - ⇒ keine Übergänge zwischen den dressed States
 - ⇒ wird Atom anfangs in dressed State vorbereitet, so verblebt es in diesem (auch wenn dieser sich ändert).
- * Die genaue Form des Adiabatic-Kriteriums (8.15) hängt vom zeitlichen Verlauf von $\Omega_0(t)$ und $\delta(t)$ ab.

Abschätzung für glatten Puls der Länge τ :

$$\dot{\theta} \approx \theta/\tau \Rightarrow \Omega(t)\tau \gg \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Omega_0(t)}{\delta(t)}\right) \quad (8.16)$$

Da $\frac{1}{2} \arctan(\dots) \leq \pi \approx 1$ ist, muss also gelten

$$\Omega(t) \tau \gg 1 \quad (8.17)$$

und falls $\delta = 0$: $\Omega_0(t) \tau \gg 1 \quad (8.18)$

Beachte:

- * Adiabatische Entwicklung erfolgt für
 - glatte Laserpulse
 - große WW-Zeit
 - große Rabi-freq. und/oder große Verstimmung.
- * Vorteile adiabatischer Prozesse:
 - unempfindlich gegenüber kleinen Fluktuationen
⇒ keine genaue Kontrolle der exp. Parameter notwendig.

8.2 Schnelle adiabatische Passage

(Rapid adiabatic passage, RAP)

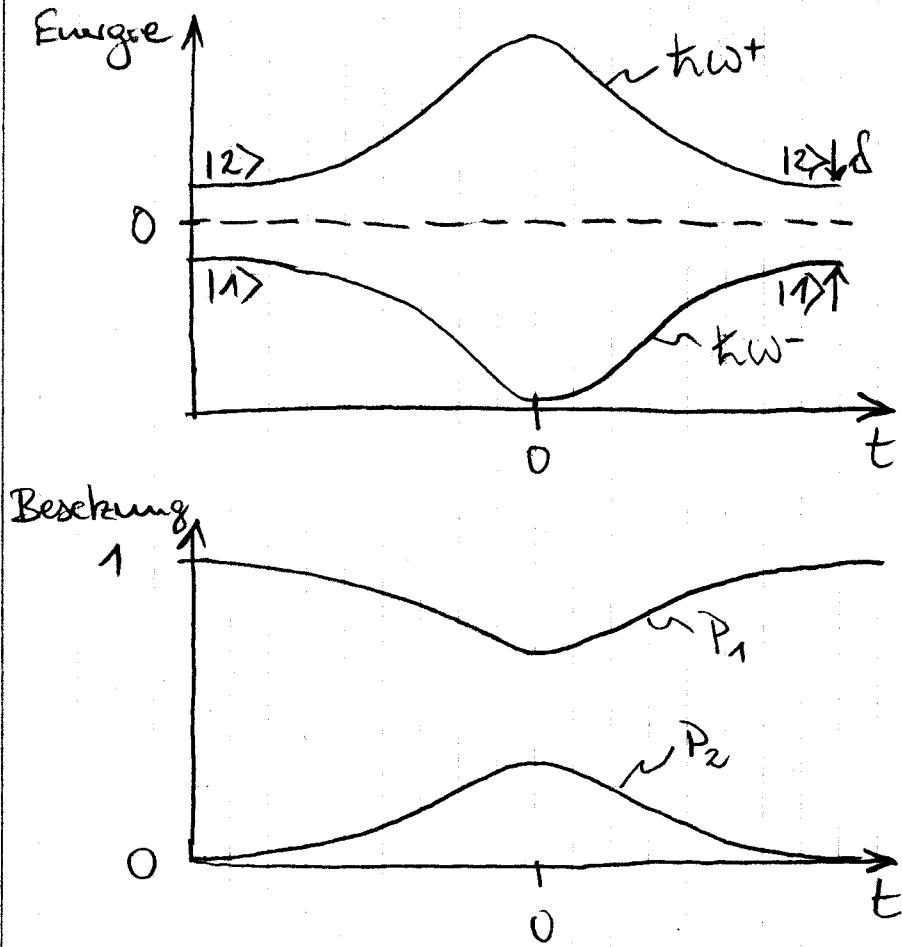
Bis jetzt: Besetzungsinversion mgl. mittels π -Pulsen \Rightarrow präzise Kontrolle der Rabi-freq. und WW-Zeit notwendig

Alternative: Adiabatischer Besetzungskauf durch RAP-Prozess.

Behachte zunächst Laserpulse mit $\delta = \text{const} \neq 0$ und

$$\Omega_0(t) = \Omega_0^{\max} \exp\left(-\frac{t^2}{\Delta t^2}\right) \quad (8.19)$$

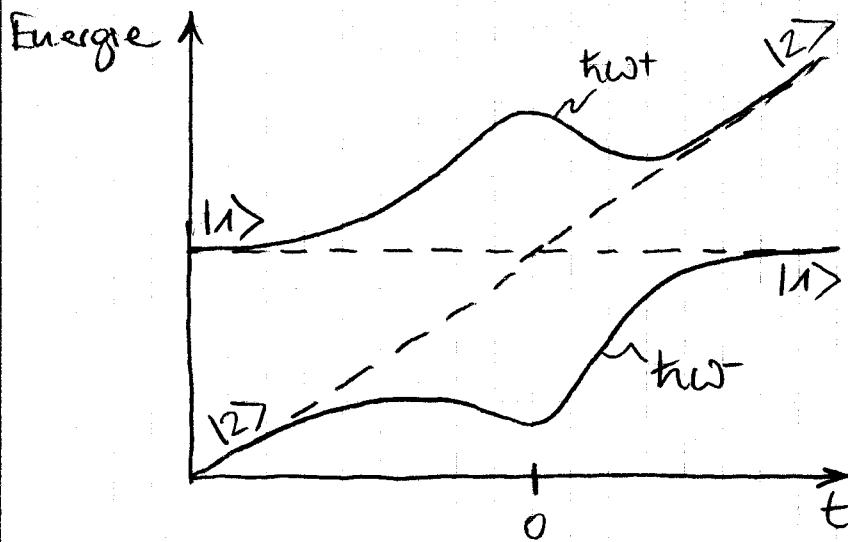
→ Zeitverlauf des dressed States:



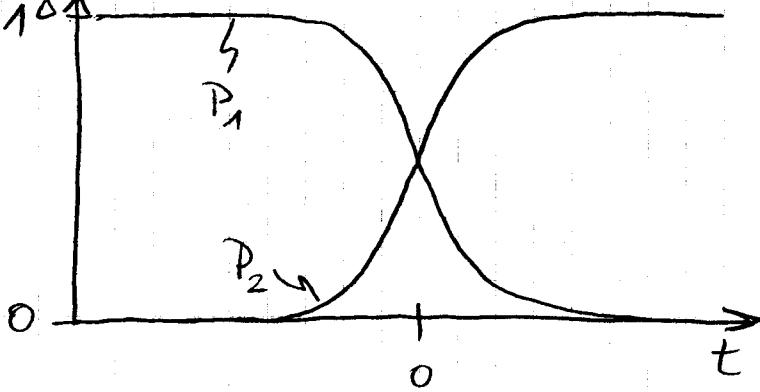
Betrachte nun Laserpuls mit demselben Verlauf wie gl. (8,19) aber mit

$$\delta(t) = \alpha t + \text{konst.} \quad (8,20)$$

→ Zeitverlauf der dressed States:



Besetzung



Beachte:

- * Laserpuls mit Frequenzweep produziert vollständigen Besetzungskaust von $|1\rangle$ nach $|2\rangle$ (und umgekehrt)!
- * Rapid Adiabatic Passage: Der gesamte Prozess muss in $\ll T$ stattfinden, die viel kürzer ist als die Lebensdauer des angeregten Zustands
- * Der genaue Verlauf von $P_0(t)$ & $\delta(t)$ spielt dabei keine Rolle.

3. Adiabatische WU für 3-Niveau-Atom

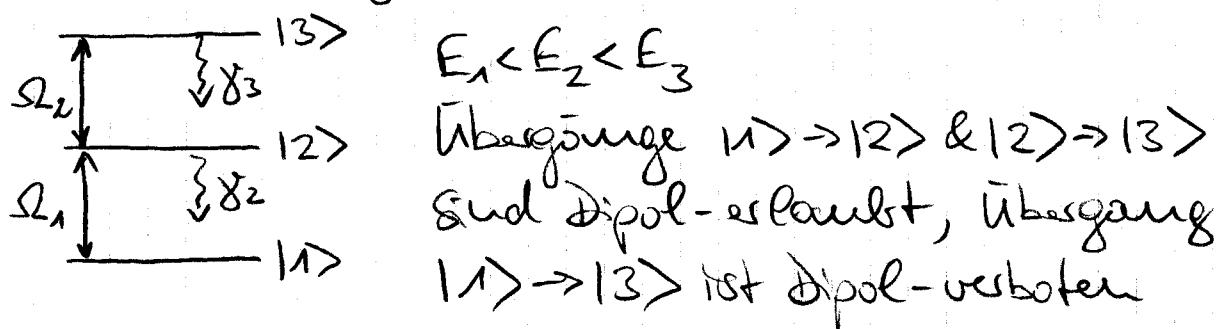
Bis jetzt: 2-Niveau-Atom

Einfachste Erweiterung: 3-Niveau-Atom

Wir werden sehen: Viele neue Effekte...

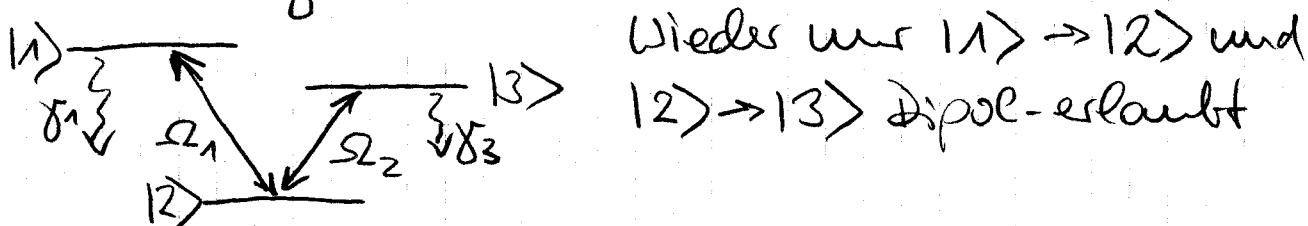
3.1. Dre-Niveau-Konfigurationen

a) Reiter-Konfiguration:



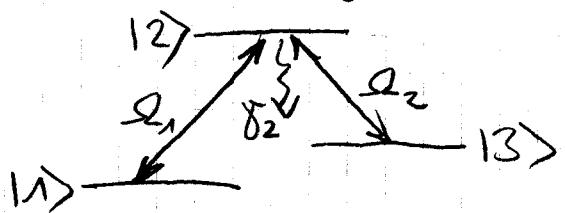
* Interessant z.B. für schrittweise Anregung zur Ionisation, leicht auf viele Niveaus verallgemeinbar.

b) V-Konfiguration:



* Interessant z.B. zur Erzeugung von "Quantum-Beats" (Interferenz zwischen den zwei Anregungs- & Zerfalls wegen aus und in ein einzelnes Niveau).

c.) Δ -Konfiguration:



Wieder um $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ und
 $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ Dipol- erlaubt

- * Große Bedeutung für viele höherrechte Prozesse in der Quantenoptik.

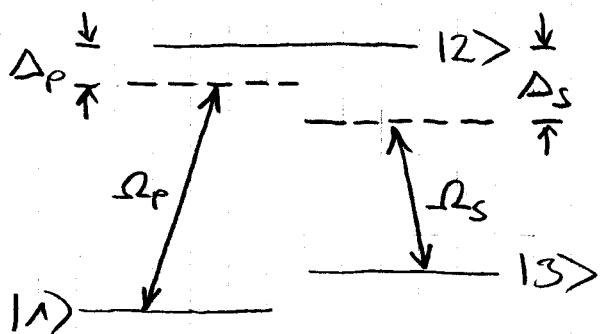
Beachte:

- * Per Definition in Δ -Konf.: $|1\rangle$ stabil,
 $|3\rangle$ metastabil
- * Andere Bezeichnung: Raman-Konf.
(die zwei Laser (1&2) lieben 2-Photonen-Übergang \Rightarrow sinnlicher Raman-Übergang).

§.2. Dressed-State-Formalismus im 3-Niveau-System

Betrachte Δ -Konf. aus c.).

\Rightarrow In Analogie zum spont. Ramanprozess werden die Laserfelder Pump- & Stokes-Laser genannt.



Δ_P & Δ_S : Verschiebungen
der Laser bzgl. 1-Photonen-
Übergänger $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$
bzw. $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$

$$\text{Also: } h\Delta_P = E_2 - E_1 - h\omega_p \quad (\text{§.1})$$

$$h\Delta_S = E_2 - E_3 - h\omega_s \quad (\text{§.2})$$

Hamiltonsp. in Schwellennäherung (RWA):

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_p & 0 \\ -\Omega_p & -2\Delta_p & \Omega_s \\ 0 & -\Omega_s & 2(\Delta_p - \Delta_s) \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

Betrachte 2-Photonen-Resonanz:

$$\Delta_p = \Delta_s \equiv \Delta \quad (9.4)$$

$$\text{bzw. } \delta = \Delta_p - \Delta_s = 0 \quad (9.5)$$

→ Eigenwerte (d.h. Energien des adiabatischen Zust.)

$$\hbar \omega_+(t) = \frac{\hbar}{2} [\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(t)}] \quad (9.6)$$

$$\hbar \omega_0(t) = 0 \quad (9.7)$$

$$\hbar \omega_-(t) = \frac{\hbar}{2} [\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(t)}] \quad (9.8)$$

$$\text{mit } \Omega(t) = \sqrt{\Omega_p^2(t) + \Omega_s^2(t)} \quad (9.9)$$

Entsprechende Eigenvektoren:

$$|a^+(t)\rangle = \sin \theta(t) \sin \phi(t) |1\rangle + \cos \phi(t) |2\rangle + \cos \theta(t) \sin \phi(t) |3\rangle \quad (9.10)$$

$$|a^0(t)\rangle = \cos \theta(t) |1\rangle - \sin \theta(t) |3\rangle \quad (9.11)$$

$$|a^-(t)\rangle = \sin \theta(t) \cos \phi(t) |1\rangle - \sin \phi(t) |2\rangle + \cos \theta(t) \cos \phi(t) |3\rangle \quad (9.12)$$

Mit zeitabh. Mischungswinkeln $\theta(t)$ & $\phi(t)$ def.

durch

$$\tan \theta(t) = \frac{\Omega_p(t)}{\Omega_s(t)} \quad \& \quad \tan 2\phi(t) = \frac{\Omega(t)}{\Delta} \quad (9.13)$$

Beachte:

Zust. $|1a^{\circ}(t)\rangle$ mit Eigenenergie 0 hat besondere Wichtigkeit, da er keinen Beitrag von Niveau $|2\rangle$ enthält. Da Niveau $|2\rangle$ langlebig ist und zerfällt, bewirkt dies ein Fangen der Besetzung in Zust. $|1a^{\circ}\rangle$.

$\rightarrow |1a^{\circ}\rangle$ wird „trapped state“ (oder auch Dunkelzust., „dark state“) genannt.

9.3. Kohärenter Besetzungstransfer im 3-Niveau-System mittels STIRAP

Frage: Wie kann man Besetzung mit hoher Effizienz von $|1\rangle$ nach $|3\rangle$ transferieren?

naive Antwort: Erst π -Puls auf Übergang $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ und anschließend π -Puls auf Übergang $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$.

Probleme: * Genaue Kontrolle der Parameter
(s. Kap. 8)

* Spontane Zerfälle aus Zwischenzust. $|2\rangle$
 \rightarrow Verlustkanal (verringert Effizienz).

Besser: STIRAP-Methode („Stimulated Raman Adiabatic Passage“)

STIRAP benötigt:

- ① 2-Photonen-Resonanz zw. Zust. $|1\rangle$ & $|3\rangle$,
also $\delta = \Delta_p - \Delta_s = 0$.

- ② Kontraintuitive Pulsfolge: Stokes-Laser vor Pump-Laser, d.h. erst Kopplung der unbesetzten Niveaus.
- ③ Geringfügig starke Laserpulse für adiabatische Zustandsentwicklung.

Beachte:

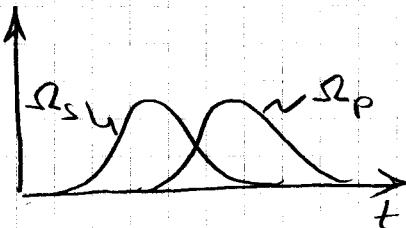
Zu ①: Für $\delta = 0$ ist $|a^\circ(t)\rangle$ Eigenzust. von $\hat{H}(t)$ und besteht aus Linearkomb. von $|1\rangle$ & $|3\rangle$ (Anfangs- & Zielzust.). Die Koeffizienten sind gegeben durch I_p & I_s (vgl. (9.13)). Durch geeignete Zustandsentwicklung von I_p & I_s erfolgt der Transfer zwischen $|1\rangle$ & $|3\rangle$ entlang des adiab. Zust. $|a^\circ(t)\rangle$,

Zu ②: Kontraintuitive Pulsfolge:

Anfangszusten ($t \rightarrow -\infty$):

$$\frac{I_p}{I_s} \xrightarrow{(9.13)} 0 \Rightarrow \tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \& \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow |a^\circ(t=-\infty)\rangle = |1\rangle$$



Endzusten ($t \rightarrow \infty$):

$$\frac{I_p}{I_s} \rightarrow \infty \Rightarrow \tan \theta = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = 0 \& \sin \theta = 1$$

$$\Rightarrow |a^\circ(t=\infty)\rangle = -|3\rangle$$

Zwischenzusten: $|a^\circ(t)\rangle$ = Superposition von $|1\rangle$ & $|3\rangle$ gemäß Gl. (9.11).

Zu ③: Adiabatische Entwicklung \rightarrow keine Kopplung zu den Zust. $|1a^+\rangle$ & $|1a^-\rangle$ mit Beikopplung von Zust. $|2\rangle \rightarrow$ verlustfreier Transfer

\rightarrow Zeige Bild 3 aus RMP, Bergmann et al.

STIRAP im Experiment: Beispiel: Ne-Atome

\rightarrow 2 Dauerstrichlaser in Kombination mit Atomschall \rightarrow verzögerte Wechselwirkungssequenz durch räumlichen Versatz der Achsen beider Laserstahle.

\rightarrow Zeige Bild 16 aus Adv. At. Mol. Opt. Phys., Vitanov

Anwendungen von STIRAP:

* Präparation von hochangeregten Zust. z.B. für Exp. zur Reaktionsdynamik.

* Atomoptik: Besetzungstransfer ist verbündet mit Photonenimpuls-Übertrag auf die Atome (Grundlage für atomare Spiegel & Schaltelemente)

* Erzeugung & Messung von Schärferen Überlagerungszust.

* Frequenzkonversionprozesse

⋮

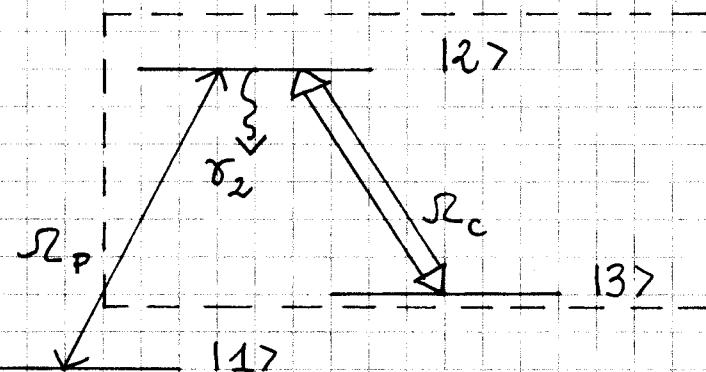
9.4. Elektromagnetisch induzierte Transparenz (EiT)

~> Eliminierung der Absorption eines Nachweisstrahlungsfelds auf der Resonanz eines at. Übergangs \Rightarrow lichtundurchlässiges Medium wird zu transparentem Medium.

~> Die Brechungseigenschaften des Mediums können ebenfalls stark modifiziert werden.

Bis jetzt: Drei-Niveau-System gekoppelt mit zwei starken Dichtfeldern S_2^P und S_2^C .

Jetzt: nur ein starkes Dichtfeld S_2^C ("Coupling laser"); S_2^P ("Probe laser") sei schwach ($S_2^P \ll S_2^C$).



\Rightarrow Drei-Niveau-System wird als stark getriebenes Zwei-Niveau-System $(|12\rangle, |13\rangle)$ betrachtet, das von Zustand $|11\rangle$ aus untersucht wird.

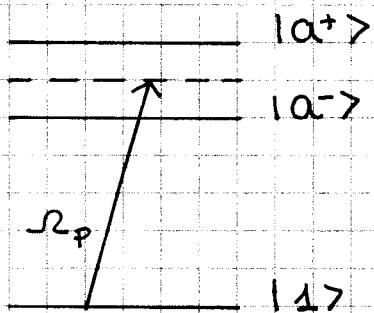
Adiabatische Zustände für Drei-Niveau-System sind gegeben durch Gln. (3.8) – (3.10):

* In unserem Fall $S_2^P \ll S_2^C \Rightarrow \sin \theta \rightarrow 0$ und $\cos \theta \rightarrow 1 \Rightarrow |\alpha^\circ\rangle = |11\rangle$

* Probelaser auf Resonanz $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \tan \phi \rightarrow 1$ (i.e., $\phi = \pi/2$).

$$|1a^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|12\rangle + |13\rangle) \quad (9.14)$$

$$|1a^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|12\rangle + |13\rangle) \quad (9.15)$$



"Coupling laser" erzeugt Interferenz der Anregungswege durch das Doublet der adiab. Zuständen $|1a^\pm\rangle$

\Rightarrow Kein Besetzungstransfer von $|11\rangle$ nach $|1a^\pm\rangle \Rightarrow$ keine Absorption des "Coupling laser" mehr!

* Genauer:

Übergangswahrscheinlichkeit von $|11\rangle$ nach $|1a^\pm\rangle$ (in vereinfachter Form):

$$P \sim |\mu_{1a^+} E_p + \mu_{1a^-} E_p|^2 \sim |\mu_{1a^+} + \mu_{1a^-}|^2 \quad (9.16)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mu_{1a^+} &= \langle 11 | \mu | 1a^+ \rangle \sim \langle 11 | \mu | 13 \rangle + \langle 11 | \mu | 12 \rangle = \\ &= + \langle 11 | \mu | 12 \rangle = + \mu_{12} \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1a^-} &= \langle 11 | \mu | 1a^- \rangle \sim \langle 11 | \mu | 13 \rangle - \langle 11 | \mu | 12 \rangle = \\ &= - \langle 11 | \mu | 12 \rangle = - \mu_{12} \end{aligned} \quad (9.18)$$

und dadurch

$$P \sim |1 + \mu_{12} - \mu_{12}|^2 = 0 \quad (9.19)$$

\Rightarrow Die Übergangswahrscheinlichkeit (der Absorption) ist Null \Rightarrow EiT.

\leadsto Zeige Bild EiT Exp. Harris

* Anwendungen von EIT:

- Verlustfreie und störungsfreie Propagation von Laserpulsen.
- Verstärkung in Quantensystemen ohne Besetzungsinversion.
- Propagation von dicht mit ultralangsamem Geschwindigkeit.
- Speicherung von Dichtpulsen.
- Verstärkung der nichtlinearen opt. Prozesse (Frequenzkonversion mit sehr hoher Effizienz).

9.5 Optische Eigenschaften eines elektromagnetisch induziert transparenten Mediums

~ Bis jetzt: Änderungen der Besetzungs dynamik im System.

~ Jetzt: Änderungen der opt. Eigenschaften.

Opt. Prozesse sind durch die von den Dichtfeldern induzierte Polarisierung bestimmt:

$$P_{12} = n_A \chi_{12} S_{12} \quad (9.20)$$

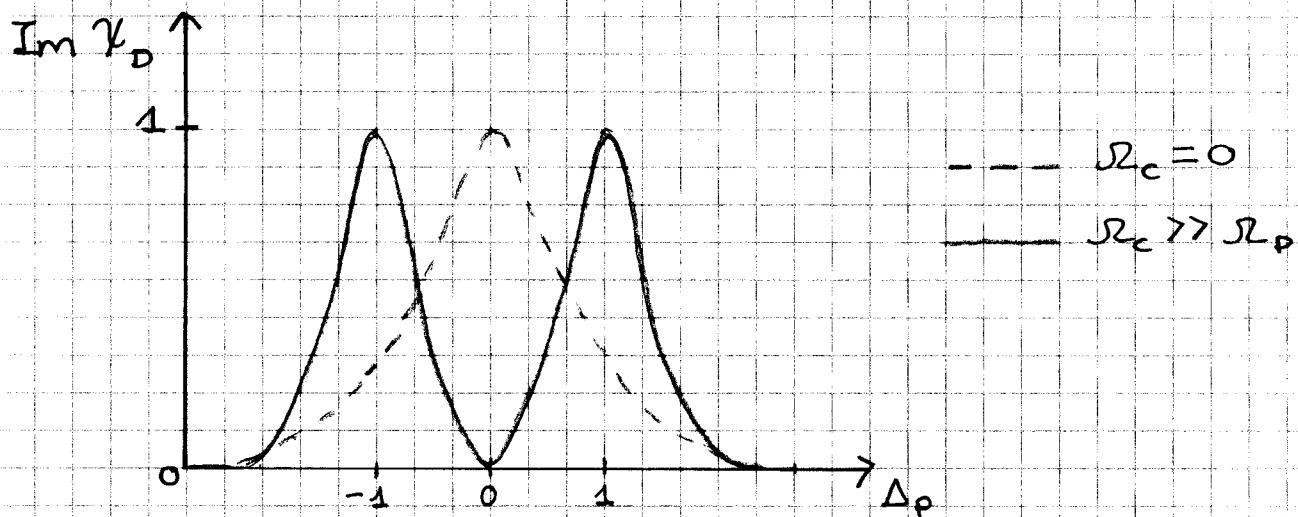
n_A : Zahl der At. im Grundzustand pro Volumeneinheit innerhalb des Mediums.

Jetzt können Imaginär- und Realteil der linearen Suszeptibilität direkt verknüpft werden mit der Kohärenz S_{12} :

$$P_{12} = \epsilon_0 \chi E \quad (9.21)$$

* Imaginärteil von χ : gibt den Verlustfaktor ("Dissipation") des Feldes an, der durch die Absorption im Medium verursacht wird:

$$\text{Im } \chi_D = \frac{|u_{12}|^2 n_A}{\epsilon_0 \hbar} \left[\frac{8\gamma_3^2 + 2\gamma_3 (|\mathcal{J}_{2c}|^2 + \gamma_2 \gamma_3)}{(4\Delta_p \delta - \gamma_3 \gamma_2 - |\mathcal{J}_{2c}|^2)^2 + 4(\gamma_3 \delta + \gamma_3 \Delta_p)^2} \right] \quad (9.22)$$

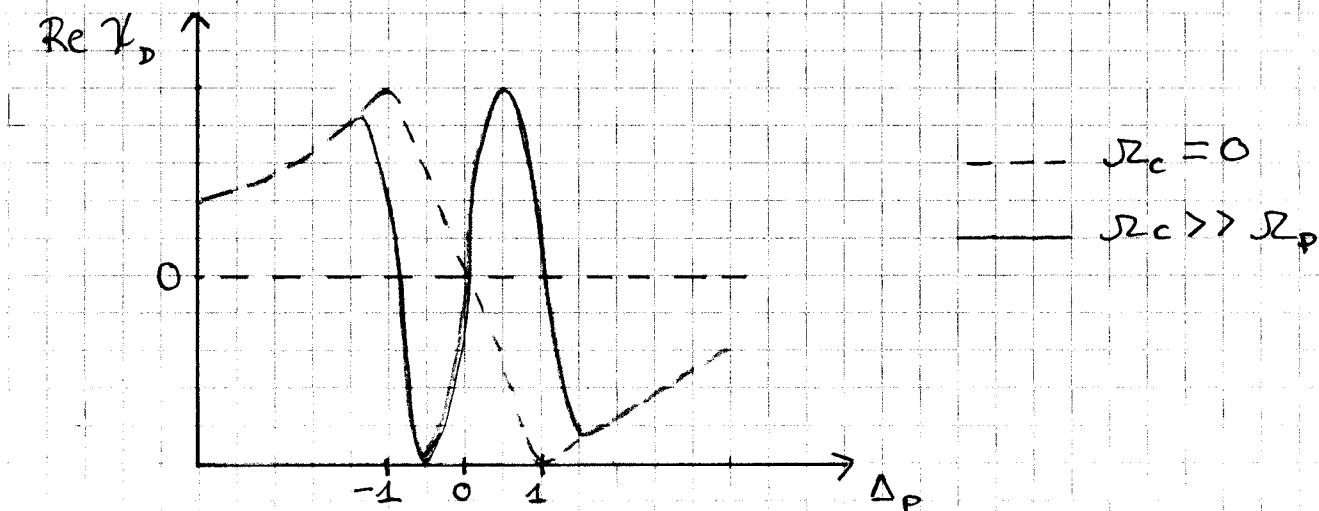


Beachte:

$\Delta_p = 0 \Rightarrow$ Absorption des Probelasers Null, falls "Coupling laser" eingeschaltet und Zust. 13> metastabil ist ($\gamma_3 = 0$).

* Realteil von χ : gibt die Dispersion (Brechzahl) an.

$$\text{Re } \chi_D = \frac{|u_{12}|^2 n_A}{\epsilon_0 \hbar} \left[\frac{-4\delta (|\mathcal{J}_{2c}|^2 - 4\delta \Delta_s) + 4\Delta_p \gamma_3^2}{(4\Delta_p \delta - \gamma_3 \gamma_2 - |\mathcal{J}_{2c}|^2)^2 + 4(\gamma_3 \delta + \gamma_3 \Delta_p)^2} \right] \quad (9.23)$$



Anwendungen von EIT:

A) Langsames Licht:

Die große Steigung von $\text{Re } \chi_D$ führt zu einer reduzierten Gruppengeschwindigkeit v_g .

Wellenvektor:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c n} = \frac{\nu}{c} n(\nu) \quad (9.24)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{\partial \nu}{\partial k} = \left(\frac{\partial \nu}{\partial \omega} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\nu}{c} n(\omega) \right] \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} n'(\omega) \right)^{-1} = \frac{c}{n(\omega) + \omega n'(\omega)} \end{aligned} \quad (9.25)$$

Für große positive Dispersion $\Rightarrow n'(\omega)$ sehr groß \Rightarrow Gruppengeschwindigkeit sehr klein!

EIT: große positive Dispersion bei $\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow v_g \ll c \Rightarrow$ langsames Licht.

\rightsquigarrow Zeige Bild Exp

B) Speicherung von Licht:

Die Abremmung eines Lichtpulses in einem Medium ist mit wichtigen Effekten verknüpft:

\rightsquigarrow Puls im Medium ist in Propagationsrichtung um v_g/c räumlich komprimiert \Rightarrow Lichtpuls kann im Medium begrenzt werden.

\rightsquigarrow Propagation der Pulse durch langsame Veränderung der "Coupling-laser"-Intensität:

- "Coupling laser" langsam ausschalten \Rightarrow Gruppengeschwindigkeit $\rightarrow 0$ und dichtpuls ist im Medium eingefroren \Rightarrow Information auf die atomare Anregung abgebildet.
- "Coupling laser" nach einer Speicherungszeit wieder langsam einschalten \Rightarrow der Prozess wird umgekehrt.
 \rightsquigarrow Zeige Bild

\rightsquigarrow Definiere: Dunkelzustandspolaron: Mischung aus elektromagn. und kollektiver at. Anregung von Spinübergängen.

$$D = \cos\theta(t) S_p(z, t) - \sin\theta(t) \sqrt{n_a} S_{34} \quad (9.26)$$

mit Mischungswinkel

$$\tan^2 \theta = \frac{n_a \sigma c P_{21}}{S_c^2} \quad (9.27)$$

σ : Absorptionsquerschnitt der Atome.

Entscheidener Punkt: dynamische Drehung von θ

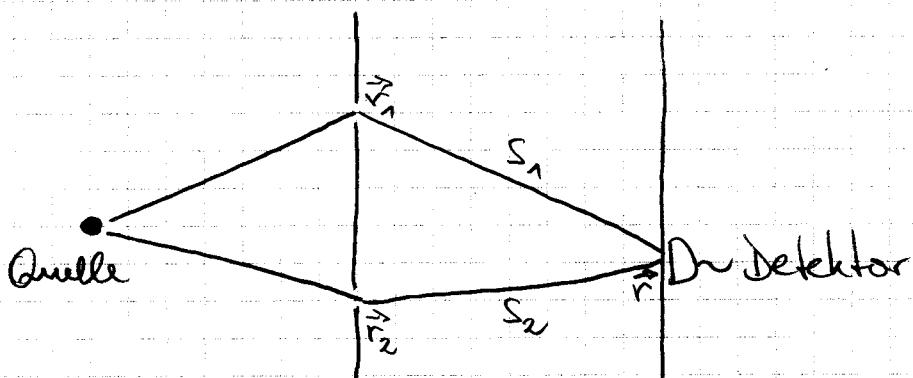
\Rightarrow adiab. Passage von einem rein photonartigen zu einem rein Spinwellenartigen Polaron.

\rightsquigarrow Zeige Bild

10. Quanten-Kohärenzfunktionen

10.1. Klassische Kohärenzfunktionen

Betrachte Doppelspalt-Experiment.



Bedingung für Interferenz auf Schirm:

Sei $\Delta\omega$ die Bandbreite des (punktformigen) Quelle und $\Delta s = |s_1 - s_2|$ der Weglängenunterschied

\rightarrow Interferenz, falls $\Delta s \leq \frac{\lambda}{2\Delta\omega}$ (10.1)

Beachte:

$$\Delta s_{\text{koh}} = \frac{\lambda}{2\Delta\omega} \quad (10.2)$$

wird Kohärenzänge genannt und

$$\Delta t_{\text{koh}} = \frac{\Delta s_{\text{koh}}}{c} = \frac{\lambda}{2\Delta\omega c} \quad (10.3)$$

Kohärenzzt.

\rightarrow Interferenz, falls $\Delta t_{\text{koh}} \Delta\omega \approx 1$ (10.4)

Quantitativ: Feld am Ort des Detektors zum Zeitp. t ist die Überlagerung des Feldes an Orten \vec{r}_1 & \vec{r}_2 zu früheren Zeiten $t_1 = t - \frac{s_1}{c}$ und $t_2 = t - \frac{s_2}{c}$. Also

$$E(\vec{r}, t) = K_1 E(\vec{r}_1, t_1) + K_2 E(\vec{r}_2, t_2) \quad (10.5)$$

Wobei K_1 & K_2 kompl. geom. Faktoren (abh. von s_1 & s_2).

Beachte: Felder behandelt als Skalare \Leftrightarrow Ann., dass beide Felder gleiche Polarisationsrichtungen haben.

Aufgrund endlicher Auflöszeit muss der Detektor die mittlere Lichtintensität

$$I(\vec{r}) = \langle |E(\vec{r}, t)|^2 \rangle \quad (10.6)$$

Wobei $\langle \dots \rangle$ für das Zeitmittel steht:

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (10.7)$$

Jur Folgenden angenommen: Zeitmittel stationär, d.h. unabh. von Ursprung der Beobachtung

Mit (10.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} I(\vec{r}) &= |K_1|^2 \langle |E(\vec{r}_1, t_1)|^2 \rangle \\ &\quad + |K_2|^2 \langle |E(\vec{r}_2, t_2)|^2 \rangle \quad (10.8) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} [K_1^* K_2 \langle E^*(\vec{r}_1, t_1) E(\vec{r}_2, t_2) \rangle]. \end{aligned}$$

Definiere:

$$I_1 = |K_1|^2 \langle |E(\vec{r}_1, t_1)|^2 \rangle \quad (10.9)$$

$$I_2 = |K_2|^2 \langle |E(\vec{r}_2, t_2)|^2 \rangle$$

sowie die unminimale Kohärenz flt. erster Ordnung:

$$f^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{\langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}} \quad (10.10)$$

mit der Abkürzung $x_i = \vec{r}_i, t_i$.

Damit schreibt sich Gl. (10.8)

(10.11)

$$I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \left[\frac{K_1 + K_2}{|K_1||K_2|} g^{(1)}(x_1, x_2) \right]$$

Mit

$$K_i = |K_i| \exp(i\varphi_i) \quad (10.12)$$

und

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = |g^{(1)}(x_1, x_2)| \exp(i\phi_{12}) \quad (10.13)$$

finden wir

$$I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |g^{(1)}(x_1, x_2)| \cos(\phi_{12} - \varphi) \quad (10.14)$$

wobei $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ (abh. von $\Delta S \leq \Delta S_{\text{koh.}}$).

Beachte:

* Gl. (10.14) \rightarrow Interferenz, falls $|g^{(1)}(x_1, x_2)| \neq 0$,

* Unterscheide drei Fälle:

$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \rightarrow$ vollständige Koh.

$0 < |g^{(1)}(x_1, x_2)| < 1 \rightarrow$ teilweise Koh. (10.15)

$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 0 \rightarrow$ vollst. Interferenz

Betrachte Visibility des Interferenzsignals:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (10.16)$$

Aus Gl. (10.14) folgt

$$I_{\min}^{\max} = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2} |g^{(1)}(x_1, x_2)| \quad (10.17)$$

Somit gilt $V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)|}{I_1 + I_2}$ (10.18)

Beachte:

- * Bei vollst. Koh. wird die Visibilität (der Kontrast) des Interferenzsignals maximal:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad (10.19)$$

- * Bei vollst. Inkoh. verschwindet die Visibilität:

$$V = 0 \quad (10.20)$$

- * Bei vollst. Koh., also $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$ folgt aus Gl. (10.19)

$$| \langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle | = \sqrt{\langle |E(x_1)|^2 \rangle} \sqrt{\langle |E(x_2)|^2 \rangle} \quad (10.21)$$

Betrachte einfache Beispiele:

- (1) Zentrale Koh. eines stationären Lichtfelds an einem festen Ort. Betrachte z.B. monochromatisches Lichtfeld welches in z -Richtung propagiert am Ort z zu Zeitpunkten t und $t+\tau$

$$\Rightarrow E(x_1) = E(z, t) = E_0 \exp(i(kz - \omega t)) \quad (10.22)$$

$$E(x_2) = E(z, t+\tau) = E_0 \exp(i(kz - \omega(t+\tau)))$$

Somit

$$\langle E^*(z, t) E(z, t+\tau) \rangle = E_0^2 \exp(-i\omega\tau) \quad (10.23)$$

folglich

$$f^{(1)}(x_1, x_2) = f^{(1)}(\tau) = f^{(1)*}(-\tau) = \exp(-i\omega\tau) \quad (10.24)$$

und daher $|f^{(1)}(\tau)| = 1$, also vollst. 2^o tl. Koh.

Beachte:

* $\langle E^*(z, t) E(z, t + \tau) \rangle = \langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle$

nennt man Autokorrelationsfunktion.

* Beispiel unphysikalisch: Es gibt keine perfekt monochromatischen Lichtquellen,

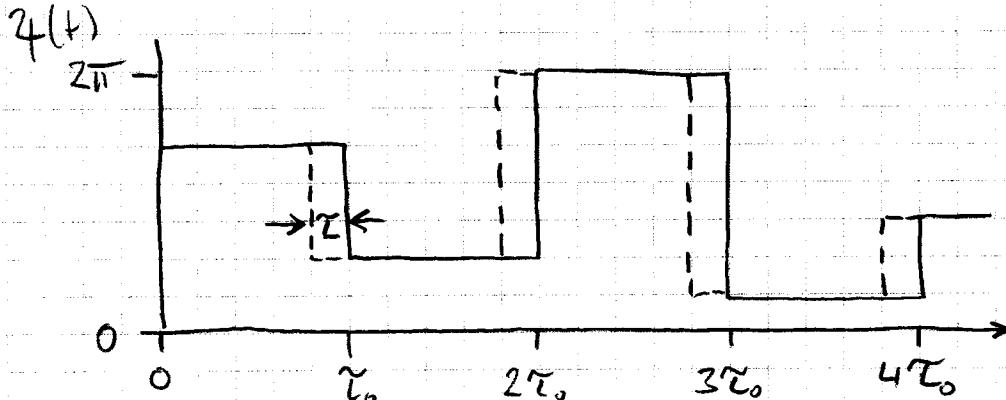
(2) Realistischeres Modell für „monochrom.“

Lichtquelle: Emission von „monochrom.“

Wellenzügen der Länge τ_0 , die von unsystematischen Phasensprüngen getrennt sind (spont. Emiss.).

$$\Rightarrow E(z, t) = E_0 \exp(i(kz - \omega t)) \exp(i\varphi(t)) \quad (10.25)$$

wobei $\varphi(t)$: Zufällige Sprungfunktion im Wertebereich $[0, 2\pi]$ und „Periodizität“ von τ_0 .



Für die Autokorrelationsfkt. folgt

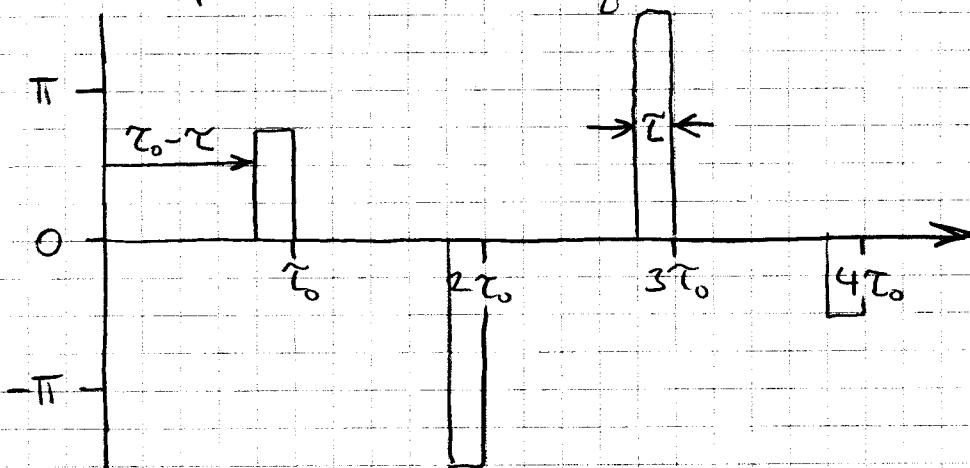
$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle = E_0^2 \exp(i\omega\tau) \langle \exp(i(\varphi(t + \tau) - \varphi(t))) \rangle \quad (10.26)$$

so dass gilt

(10.27)

$$g^{(1)}(\tau) = \exp(-i\omega\tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp(i(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))) dt$$

wobei $\varphi(t) - \varphi(t+\tau)$ folgenden Verlauf hat:



Beachte:

* Für $0 < t < \tau_0 - \tau$ ist $\varphi(t+\tau) - \varphi(t) = 0$

* Für $\tau_0 - \tau < t < \tau_0$ ist $\varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ eine Zufallszahl im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$

* Für $t \geq \tau_0$ gilt Entsprechendes

* Integral (10.24) kann man berechnen zu

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\tau) &= (1 - \tau/\tau_0) \exp(-i\omega\tau) \quad \text{für } \tau < \tau_0 \\ &= 0 \quad \text{für } \tau \geq \tau_0. \end{aligned} \tag{10.28}$$

Folglich

$$\begin{aligned} |g^{(1)}(\tau)| &= 1 - \tau/\tau_0 \quad \text{für } \tau < \tau_0 \\ &= 0 \quad \text{für } \tau \geq \tau_0. \end{aligned} \tag{10.29}$$

* Mit (10.15) folgen wir: Ist die Verszögerung τ länger als die Kohärenzzeit τ_0 , verschwindet die Kohärenz.

(3) Nachrealistisches Modell für Lichtquelle:
Korenzförwiges Leistungsspektrum um Zentralfreq.
W₀. Für Autokorr. flktu folgt:

$$\langle E^*(t) E(t+\tau) \rangle = E_0^2 \exp(-i\omega_0 \tau - i^2/\tau_0) \quad (10.30)$$

wobei τ_0 : mittlere Zeit zwischen Phasenwechseln.

$$\text{Es folgt: } g^{(1)}(\tau) = \exp(-i\omega_0 \tau - i^2/\tau_0) \quad (10.31)$$

$$\text{bzw. } |g^{(1)}(\tau)| = \exp(-i^2/\tau_0) \quad (10.32)$$

$$\text{also } 0 < |g^{(1)}(\tau)| \leq 1$$

Beachte:

* $|g^{(1)}(\tau)| \rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow$ zunehmend
unsch. Licht für größer werdende Verzögerung τ .

* Für $|\tau| \ll \tau_0$: vollst. Kohärenz

* τ_0 kleiner \Rightarrow Spektrum breiter $\Rightarrow |g^{(1)}(\tau)|$ geht
schneller gegen Null.

10.2 Quantentheoretische Beschreibung

Bemerkungen:

- * Bestimmung von Lichtintensität \Rightarrow Messung der Reaktion eines Systems, das das Licht durch Absorption von Photonen abschwächt
- * Im Folgenden: Detektor $\hat{=}$ einzelnes Atom, welches durch Licht ionisiert wird und dessen Photoelektron detektiert wird

Kopplung zwischen Einzelatom-Detektor und quantisiertem Lichtfeld: Dipol-WW-Operator (vgl. (4.2)): $\hat{H}_{\text{WW}} = -\vec{d}_s \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ (10.33)

wobei (vgl. (6.18))

(10.34)

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = i \sum_s \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 V}} \vec{\epsilon}_s [\hat{a}_s(t) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{a}_s^\dagger \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

Dipolnäherung ($|i \vec{k} \cdot \vec{r}| \ll 1$)

$$\Rightarrow \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) \approx i \sum_s \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 V}} \vec{\epsilon}_s [\hat{a}_s(t) - \hat{a}_s^\dagger(t)] \quad (10.35)$$

Absorption \Rightarrow Betrachte nur Feldkomponente mit „positiver Frequenz“ (Komp. abh. von Verstärker):

$$\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sum_s \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 V}} \vec{\epsilon}_s \hat{a}_s(t) \quad (10.36)$$

Aufangsbed.: Atom in $|g\rangle$ und Feld in $|i\rangle$

Endzustand: Atom ionisiert ($|e\rangle$) und Feld in $|f\rangle$

Kurz: Aufangszust. $|I\rangle = |g\rangle|i\rangle$
Endzust. $|F\rangle = |e\rangle|f\rangle$

Übergangs-Matrixelement:

$$\langle F | \hat{H}_{\text{well}} | I \rangle = -\langle e | \hat{d} | g \rangle \langle f | \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle \quad (10.37)$$

Übergangsw.keit des Atom-Feld-Systems prop. zu

$$|\langle F | \hat{H}_{\text{well}} | I \rangle|^2 \quad (10.38)$$

Übergangsw.keit des Feldes von Zust. $|i\rangle$ nach $|f\rangle$

prop. zu $|\langle f | \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle|^2 \quad (10.39)$

Wir messen nur Endzust. der Detektors (des Atoms)
 \rightsquigarrow summiere über alle mögl. Endzust. des Feldes:

$$\begin{aligned} & \sum_f |\langle f | \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle|^2 \\ &= \sum_f \langle i | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) | f \rangle \times \langle f | \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle \\ &= \langle i | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle \quad (10.40) \end{aligned}$$

wobei $\hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) = [\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t)]^*$ (10.41)

und ang. wurde, dass die Zust. $|f\rangle$ eine vollst. Basis bilden.

Beachte: Bis jetzt angen.: Feld in reinem Zust. $|i\rangle$.
 Allgemeines: Feldzust. entspricht statistischem
 Gemisch \rightsquigarrow verwende Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \quad (10.42)$$

Damit wird aus Erwartungswert (10.40) das
 Ensemblemittel

$$\text{Sp} \left\{ \hat{\hat{g}} \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \right\} \quad (10.43)$$

$$= \sum_i p_i \langle i | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle$$

Ab jetzt angen.: Felder gleicher Polarisierung
 \rightarrow als Skalare behandeln

Die Absorptionsw. k. ist somit proportional zu

$$I(\vec{r}, t) = \text{Sp} \left\{ \hat{\hat{g}} \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \right\} \quad (10.44)$$

wobei $I(\vec{r}, t)$: Intensität.

Beachte nun Doppelpaltexp. aus Kap. 10.1:
 Feldkomp. positiver Freq. am Ort des Detektors \vec{r}
 (vgl. (10.5))

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = K_1 E^{(+)}(\vec{r}_1, t) + K_2 \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t) \quad (10.45)$$

\rightarrow Intensität am Ort des Detektors:

$$\begin{aligned} I(\vec{r}, t) &= \text{Sp} \left\{ \hat{\hat{g}} \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \right\} \\ &= |K_1|^2 G^{(1)}(x_1, x_1) + |K_2|^2 G^{(1)}(x_2, x_2) \\ &\quad + 2 \text{Re} [K_1^* K_2 G^{(1)}(x_1, x_2)] \end{aligned} \quad (10.46)$$

wobei wie zuvor $x_i = \vec{r}_i, t_i$ und

$$G^{(1)}(x_i, x_j) = \text{Sp} \left\{ \hat{\hat{g}} \hat{E}^{(-)}(x_i) \hat{E}^{(+)}(x_j) \right\}, \quad i, j = 1, 2 \quad (10.47)$$

Beachte:

- * $G^{(1)}(x_1, x_2)$ ist allg. Korrelationsfkt. erster Ordnung.
- * $G^{(1)}(x_1, x_1) \& G^{(1)}(x_2, x_2)$ sind davon Spezialfälle und entsprechen den von x_1 & x_2 am Detektor einfallenden Intensitäten.

Definieren Quanten-Kohärenzfaktur erster Ordnung:

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{G^{(1)}(x_1, x_2)}{\sqrt{G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2)}} \quad (10.48)$$

Beachte:

* Es gilt $0 \leq |g^{(1)}(x_1, x_2)| \leq 1 \quad (10.49)$

* Unterscheide (wie bei klass.) drei Fälle:

$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \rightarrow$ vollständige Koh.

$0 < |g^{(1)}(x_1, x_2)| < 1 \rightarrow$ teilweise Koh. (10.50)

$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 0 \rightarrow$ vollst. In Kohärenz

* Aus der Def. von $G^{(1)}(x_i, x_j)$ folgt

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = [G^{(1)}(x_2, x_1)]^* \quad (10.51)$$

$$G^{(1)}(x_i, x_i) \geq 0 \quad (10.52)$$

$$G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2) \geq |G^{(1)}(x_1, x_2)|^2 \quad (10.53)$$

* Gleichheit in (10.53) impliziert $|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$ und damit maximale Visibilität des Interferenzsignals (vgl. (10.46))

Betrachte als Beispiel ein Ein-Moden-Feld (ebene Welle mit Wellenvektor \vec{k} , vgl. (3.1))

$$\Rightarrow E^{(+)}(x) = i\hat{E} \hat{a} \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \quad (10.54)$$

$$\text{mit } \hat{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0V}},$$

(1) Sei Feld in Fockzust. $|n\rangle$, dann

$$G^{(1)}(x, x) = \langle n | \hat{E}^{(-)}(x) \hat{E}^{(+)}(x) | n \rangle \quad (10.55)$$
$$= \epsilon^2 n$$

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \langle n | \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_2) | n \rangle \quad (10.56)$$
$$= \epsilon^2 n \exp(i(\vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \omega(t_2 - t_1)))$$

und somit $|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \quad (10.57)$

(2) Sei Feld in Kohärenzunt. Zust. $|\alpha\rangle$, dann

$$G^{(1)}(x, x) = \langle \alpha | \hat{E}^{(-)}(x) \hat{E}^{(+)}(x) | \alpha \rangle \quad (10.58)$$
$$= \epsilon^2 |\alpha|^2$$

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \langle \alpha | \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_2) | \alpha \rangle \quad (10.59)$$
$$= \epsilon^2 |\alpha|^2 \exp(i(\vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \omega(t_2 - t_1)))$$

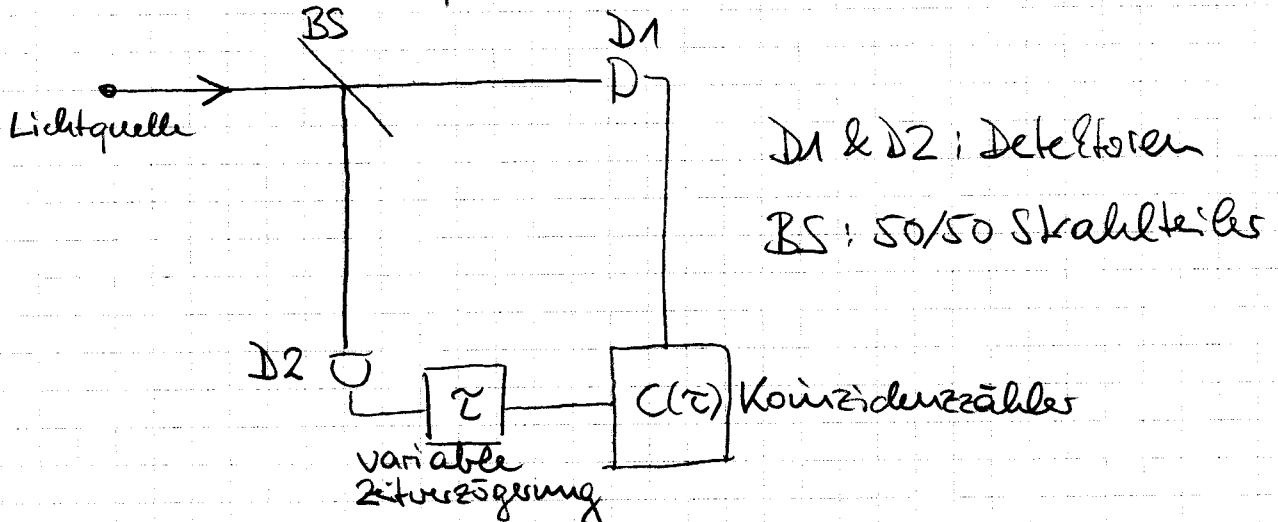
und somit ebenfalls $|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \quad (10.60)$

10.3 Kohärenzfunktionen höherer Ordnung

Folgerung aus (10.55) - (10.60):

Experimente zur Koh. ersten Ordnung erlauben, die Monochromatik oder Kohärenzlänge von Licht zu messen, sagen aber nichts über die stat. Eigensch. des Lichts aus! (Sowohl Fockzust. als auch Koh. Zust. sind erster Ordnung quanten-kohärent)

Betrachte Huygen-Brown und Twiss-Experiment:



D1 & D2; Detektoren

BS: 50/50 Skalenteiler

Beachte:

* Korrelation von Intensitäten statt von Feldern.

* D1 & D2 haben gleichen Abstand zu BS.

* Aufbau weist verzögerte Koinzidenzrate $C(\tau)$, d.h. D1 registriert Zählereignis zum Zeitpkt $t + \tau$ und D2 zum Zeitpkt t .

* Wir werden sehen: Für $\tau < \tau_0$ (Kohärenzzeit) liefert $C(\tau)$ Information über die Statistik des Lichts.

Führe zunächst klassische Betrachtung durch:

Es gilt

$$C(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau) \rangle \quad (10.61)$$

Wobei $I(t)$ & $I(t+\tau)$: instantane Intensitäten an den beiden Detektoren und $\langle \dots \rangle$: Zeitmittel

Se die mittlere Intensität an beiden Detektoren angeben durch $\langle I(t) \rangle$.

→ Definiere die normierte Kohärenz für zweiter Ordnung durch

$$\gamma^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \quad (10.62)$$

$$= \frac{\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2}$$

Allgemeines, falls Abstand von D1 & D2 zu BS unterschiedlich:

$$\gamma^{(2)}(x_1, x_2; x_3, x_4) = \frac{\langle I(x_1)I(x_2) \rangle}{\langle I(x_1) \rangle \langle I(x_2) \rangle}$$

$$= \frac{\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle}{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle} \quad (10.63)$$

Beachte: Klassische Kohärenz bis zur zweiten Ordn.

$$\Leftrightarrow |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \text{ und } \gamma^{(2)}(x_1, x_2; x_3, x_4) = 1 \quad (10.64)$$

Hierbei impliziert die zweite Bed. die Faktorisierung

$$\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle = \langle |E(x_1)|^2 \rangle \times \langle |E(x_2)|^2 \rangle \quad (10.65)$$

Beispiel: Ebene Welle in z-Richtung (vgl. (10.22))

$$\Rightarrow \langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle = E_0^4 \quad (10.66)$$

und daher $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$.

Allgemeines gilt für jedes lichtfeld konstante, nicht-fluoreszierende Intensität

$$I(t) = I(t+\tau) = I_0 \quad (10.67)$$

und daher $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$.

Beachte: Der Gegenwart zu $\gamma^{(1)}$ ist $\gamma^{(2)}$ nicht beschränkt. Betrachte hierfür

$$\gamma^{(2)}(0) = \frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \quad (10.68)$$

Für Reihe von N Messwerten zu Zeiten t_1, \dots, t_N gilt für die Mittelwerte

$$\langle I(t) \rangle = \frac{I(t_1) + \dots + I(t_N)}{N} \quad (10.69)$$

$$\langle I(t)^2 \rangle = \frac{I(t_1)^2 + \dots + I(t_N)^2}{N}$$

Mit $2 I(t_i) I(t_j) \leq I(t_i)^2 + I(t_j)^2$ für alle i, j (Arithmetische Ungl.) kann man zeigen, dass

$$\langle I(t)^2 \rangle \geq \langle I(t) \rangle^2 \quad (10.70)$$

und somit

$$1 \leq \gamma^{(2)}(0) < \infty \quad (10.71)$$

↑ keine obere Schranke!

Für $\tau \neq 0$ folgt aus Positivität der Intensität

$$0 \leq \gamma^{(2)}(\tau) < \infty \quad (10.72)$$

Zusätzlich kann man ähnlich wie (10.70)

zeigen, dass gilt $\langle I(t) I(t+\tau) \rangle \leq \langle I(t) \rangle^2$ (10.73)

und somit

$$\boxed{\gamma^{(2)}(\tau) \leq \gamma^{(2)}(0)} \quad (10.74)$$

Gln. (10.71) & (10.74) schränken die Werte von $\gamma^{(2)}(\tau)$ für klassische Lichtfelder ein?

Betrachte Lichtquelle aus großer Zahl unabh. skaliender, Collision-verbreiterter Atome.
Dann kann zeigen, dass gilt

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + |\gamma^{(1)}(\tau)|^2 \quad (10.75)$$

Aus $0 \leq |\gamma^{(1)}(\tau)| \leq 1$ folgt

$$1 \leq \gamma^{(2)}(\tau) \leq 2 \quad (10.76)$$

Für Lorenz-förmiges Spektrum finden wir mit (10.32)

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + \exp(-2|\tau|/\tau_0) \quad (10.77)$$

Beachte:

* Für $\tau \rightarrow \infty$ gilt $\gamma^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$

* Für $\tau \rightarrow 0$ gilt $\gamma^{(2)}(0) = 2$

* Falls Licht auf λ_1 unabh. von Licht auf λ_2
für alle $0 \leq \tau < \infty$, sollte gelten $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$.

Hanbury Brown und Twiss glaubten fälschlich,
dass Photonen (wenn sie existieren) voneinander
unabhängig von der Quelle emittiert und
von Strahlteilen entweder transmittiert oder
reflektiert werden. In diesem Fall müsste
gelten $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$ für $0 \leq \tau < \infty$.

Nach messen ergab jedoch das klassisch
erwartete Verhalten (10.74) und just.

$\gamma^{(2)}(0) = 2\gamma^{(2)}(\infty)$. Schlussfolgerung: Photonen
treffen für $\tau=0$ paarweise und für $\tau \rightarrow \infty$ unabh.

zueinander ein. Für $\tau = 0$ spricht man von "photon bunching".

Beachte: Durch Messung von $g^{(2)}(\tau)$ lässt sich die Kohärenz τ_0 der Lichtquelle bestimmen (vgl. (10.77)).

Betrachte nun quantentheoretische Beschreibung:

Übergangsw. k. für Absorption von zwei Photonen (analog zu (10.39)):

$$|\langle f | \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) | i \rangle|^2 \quad (10.78)$$

Summierung über alle Endzust.

$$(10.79)$$

$$\langle i | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) | i \rangle$$

Verallgemeinerung auf gew. Zust. liefert Quanten-Korrelationsfkt. zweiter Ordnung:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \text{Sp} \{ \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(-)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_1) \} \quad (10.80)$$

Beachte:

* entspricht $G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)$ als Ensemblemittel von $I(x_1) I(x_2)$.

* Reihenfolge der Operatoren ist wichtig und darf nicht getauscht werden (Normalordnung)

Definiere die Quanten-Korrelationsfkt. zweiter Ordn. als.

$$g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \frac{G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)} \quad (10.81)$$

Beachte:

- * $g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) \sim$ Wahrscheinlichkeit, ein Photon am Ort \vec{r}_1 zur Zeit t_1 und ein weiteres Photon am Ort \vec{r}_2 zur Zeit t_2 zu detektieren.
 - * Man sagt, ein Quantenfeld ist bis zur 2. Ordn. kohärent, falls $|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$ und $g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = 1$. Dies impliziert die Folgerung
- $$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2) \quad (10.82)$$

- * An festem Ort hängt $g^{(2)}$ nur von $\tau = t_2 - t_1$ ab:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(-)}(t+\tau) \hat{E}^{(+)}(t+\tau) \hat{E}^{(+)}(t) \rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(t+\tau) \hat{E}^{(+)}(t+\tau) \rangle} \quad (10.83)$$

- * Für Einmodenfeld der Form (10.54) reduziert sich (10.83) zu

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n}-1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} \\ &= 1 + \frac{(\Delta n)^2 - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} \end{aligned} \quad (10.84)$$

und ist unabh. von τ .

Ist das Feld in koh. Zust $|a\rangle$, so folgt

$$g^{(2)}(\tau) = 1 \quad (10.85)$$

Ist das Feld in ihresm. Zust., so folgt

$$g^{(2)}(\tau) = 2 \quad (10.86)$$

* Für ein Multimodenfeld im therm. Zust. kann man zeigen, dass

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2, \quad (10.87)$$

so dass, wie im klass. Fall, $1 \leq g^{(2)}(\tau) \leq 2$.

Ist das nicht Collisionssverstreut und horenbför mig, so ist

$$g^{(1)}(\tau) = \exp(-i\omega_0\tau - |\vec{r}|/\tau_0) \quad (10.88)$$

und somit $g^{(2)}(\tau) = 1 + \exp(-2|\vec{r}|/\tau_0) \quad (10.89)$

wie im klass. Fall. Interpretation: Für $|\vec{r}| \ll \tau_0$ ist die W. ket, zwei Photonen zu de teilen, größer als im unkorr. Fall ($g^{(2)}(0) = 2$ & $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$) \rightsquigarrow photon bunching

* Für ein Multimodenfeld im coh. Zust. gilt immer noch

$$g^{(2)}(\tau) = 1 \quad (10.90),$$

die Photonen treffen also zufällig entsprechend Poissonverteilung ein ($g^{(2)}(\tau)$ unabh. von τ).

* Gemäß gl. (10.84) kann aber auch $g^{(2)}(\tau) < 1$ werden (klassisch unmögl.), falls gilt

$$\Delta n^2 \ll \langle \hat{n} \rangle \quad (10.91)$$

\rightsquigarrow Sondercase des Fall für Fockzust. ($\Delta n^2 = 0$)

In diesem Fall gilt

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } n=0,1 \\ 1-\frac{1}{n} & \text{für } n \geq 2 \end{cases} \quad (10.92)$$

- Interpretation von $g^{(2)}(\tau) < 1$: Quantenmechanische Verletzung der Cauchyschen Ungleichung!

* Im Fall von $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ (ebenfalls klass. unmöglich) spricht man von "photon anti-Bunching" \rightarrow Photonen treffen mit festen Zeitabständen am Detektor ein.

\rightarrow Zeige Fig. 4.13 aus Scully & Zubairy

\rightarrow Zeige Bonner Graph von $g^{(2)}(\tau)$ für 1-3 Atome

11. Optische Tests der Quantenmechanik

- Quantenmechanik: Statische Theorie \rightarrow
W. Letaussagen über das Verhalten von
Ensembles identisch präparierter Quantensysteme

Betrachtet man Voraussagen für Messungen
an einem Quantensyst., schien diese,
dem „gesunden Menschenstand“ zu
widersprechen.

- Schlussfolgerung Schrödingers (1952):

„... we never experiment with just one electron or
atom or (small) molecule. In thought
experiments we sometimes assume we do; this
inevitably entails ridiculous consequences.“

mit Hilfe des Quantenphysik lassen sich heute
solche Gedankenexperimente realisieren und die
„fachlichen Konsequenzen“ überprüfen.

11.1. Verschränkte Zustände, EPR-Argument

Betrachte verschärkte Zust. zweier Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen:

$$| \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \uparrow_1 \rangle, | \downarrow_2 \rangle - | \downarrow_1 \rangle, | \uparrow_2 \rangle) \quad (11.1)$$

wobei $| \uparrow_i \rangle$, bzw. $| \downarrow_i \rangle$ für Spin up bzw. down des
i-ten Teilchens bzgl. z-Richtung steht (EPR-Zust.)

- Beachte:

* $| \Psi \rangle$ hat Gesamtspin = 0 (entsteht z.B. beim
Zerfall von Spin-0-Teilchen in zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen)

* W.keit, Teilchen 1 bzw. 2 in Zust. \uparrow_z bzw. \downarrow_z zu detektieren; jeweils 50%

* Bedingte Detektionsw.keiten:

(11.2)

$$P(\uparrow_z^1 | \uparrow_z^2) = 0, P(\uparrow_z^1 | \downarrow_z^2) = 1, P(\downarrow_z^1 | \uparrow_z^2) = 1, P(\downarrow_z^1 | \downarrow_z^2) = 0$$

Wobei $P(\uparrow_z^1 | \uparrow_z^2)$: W.keit, Teilchen 1 in \uparrow_z zu messen, während Teilchen 2 in \uparrow_z gemessen wurde etc.
 $(P(\uparrow_z^2 | \uparrow_z^1) = 0, \dots$ analog).

$|z\rangle$ weist perfekte Antikorrelationen auf.

* Perfekte Antikorr. auch bzgl. x-Richtung:

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle) \quad (11.3)$$

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle)$$

also

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle|\downarrow_x\rangle_2 - |\downarrow_x\rangle|\uparrow_x\rangle_2) \quad (11.4)$$

Genauso bzgl. y-Richtung $\Rightarrow |z\rangle$ rotationsinv.

* Analyse des von QM vorausgesagten Korr. veranlasst Einstein, Podolsky und Rosen (EPR) 1935 zu Schlussfolgerung, dass QM keine vollst. Beschreibung der phys. Realität liefert

Das EPR-Argument:

* QM \Rightarrow Ergebnis von Spinnmessung an Teilchen 2 bzgl. x, y oder z kann mit Sicherheit vorhergesagt werden durch Spinnmessung an Teilchen 1 bzgl. gleicher Richtung (perfekte Antikorr.).

- * Zum Zeitp. der Messungen können beide Teilchen bel. weit voneinander entfernt sein und nicht mehr wechselwirken \rightarrow Messung an T1 kann Zust. von T2 nicht ändern (lokalitäts-Hypothese).
- * Die Werte von $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ & $\hat{\sigma}_z$ sind folglich Elemente der phys. Realität, weil sie sich mit Sicherheit vorhersagen lassen, ohne T2 zu stören (Realitäts-Hypothese).
- * QM: $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ & $\hat{\sigma}_z$ kommutieren nicht
 \rightarrow # Quantenzust. mit scharf def. Werten für alle drei Op.
- Schlussfolgerung: \exists Elemente der phys. Realität, die von der QM nicht beschrieben werden können
 \rightarrow QM ist unvollständig (Vollständigkeit: jedes Element der phys. Realität muss Gegenstück in Theorie haben).
- * EPR spekulieren, dass es eine vollst. Theorie möglich ist.

Beachte:

- * EPR zweifeln nicht an der QM sondern an ihrer Vollständigkeit.
- * In der vollst. Theorie wären Werte von $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ & $\hat{\sigma}_z$ von vornherein (durch verborgene Parameter) festgelegt.

J.S. Bell (1964): Beliebige Theorie basierend auf lokalen verborgenen Variablen (LVT) würde quantitativ von Voraussagen des QM für Messungen an $|z\rangle$ widersprechen (Bell'sche Ungl.).

⇒ Experimentelle Überprüfung QM vs. LVT ugl.?

Voraussetzung: Präparation von und Messungen am Quantensystem in Zust. $|z\rangle$.

11.2. Verschränkte Photonenpaare | Spontane Parametrische Fluoreszenz

Bemerkungen:

* Beliebiges Quantensystem mit zwei möglichen orthogonaler Zust. $|0\rangle$ & $|1\rangle$ ist formal äquivalent zu Spin- $\frac{1}{2}$ mittels Identifikation

$$|0\rangle \hat{=} |+\rangle, |1\rangle \hat{=} |-\rangle \quad (11.5)$$

* Betrachte zwei mögliche lineare Polarisationszust. $|H\rangle$ & $|V\rangle$ als fiktiven Spin- $\frac{1}{2}$

⇒ Zwei-Photonen EPR-Zust.:

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |V\rangle_2 - |V\rangle_1 |H\rangle_2) \quad (11.6)$$

* Präpariere $|z\rangle$ mittels spontaner parametrischer Fluoreszenz (SPF).

SPF entsteht durch nichtlin. W.W. eines Pumpkabels mit einem nichtlin. Kristall.

Nichtlin. Kristall: \vec{E} -Feld induziert nichtlin.

Polarisation:

$$P_i = \chi^{(1)}_{ij} E_j + \chi^{(2)}_{ijkl} E_j E_k + \chi^{(3)}_{ijklm} E_j E_k E_l + \dots \quad (M.7)$$

wobei gleiche Indizes \Rightarrow Summation und

$\chi^{(n)}$: nichtlin. Suszeptibilität n-ter Ordnung

Beachte:

* $\chi^{(1)}$: lineare Effekte (Brennung & Brechung)

* $\chi^{(2)}$: SPF, Frequenzverdopplung, Summen- & Differenzfreq.

* $\chi^{(3)}$: Viesswellenprozesse

* Relative Größenordnungen der Effekte:

$$\chi^{(1)} \approx 1$$

$$\chi^{(2)} \approx 10^{-10} \text{ m/V} \quad (M.8)$$

$$\chi^{(3)} \approx 10^{-17} (\text{m/V})^2$$

WW-Hamiltonsp. für Effekte 2. Ord.

$$\hat{H}^{(2)} = \epsilon_0 \int_V d^3 r \chi^{(2)}_{ijkl} \hat{E}_i \hat{E}_j \hat{E}_k \quad (M.9)$$

wobei V: WW-Volumen und \hat{E} : Feldop.

SPF vom Typ 2: aufsordentlich pol. Pumpphoton wird vernichtet und je ein aufsordentlich und ordentlich pol. Photon wird erzeugt.

aufsordentlich (ao) pol.: Polarisation in aus gtl. Ebene und \vec{k} aufgespannter Ebene

ordentlich (o) pol.: Polarisation \perp zu dieser Ebene.

Aus historischen Gründen bezeichnet man die beiden erzeugten Photonen als Signal-Photon (S) und Idler-Photon (I).

Bedingungen an Pump-, Signal- & Idler- Photon:

$$\text{Energieerhaltung: } \hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i \quad (M.10)$$

$$\text{Impulserhaltung: } \hbar\vec{k}_p = \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_i \quad (M.11)$$

Gegebener Schnitt des NL-Kristalls bzgl. opt. Achse und $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$ (durch Filtrierung)

→ Photonen werden entlang zweier sich schneidender, o- und ao-polarisierter Kegel emittiert.

→ Zeige Abb. 3.3 & 3.4 aus Steffis Arbeit

Hamiltonop., der diesen Prozess beschreibt:

$$\hat{H}_I = \hbar\eta (\hat{a}_{o,s}^\dagger \hat{a}_{ao,i}^\dagger + \hat{a}_{ao,s}^\dagger \hat{a}_{o,i}^\dagger) + \text{h.c.} \quad (M.12)$$

↑ herunterkohägiert

Wobei $\eta \sim \chi^{(2)} E_p$ mit der Amplitude des klass. elektrischen Pumpfelds E_p und $\hat{a}_{o,s}^\dagger, \hat{a}_{ao,i}^\dagger, \hat{a}_{ao,s}^\dagger, \hat{a}_{o,i}^\dagger$ die Erzeuger für Photonen mit ordentlicher bzw. aufwärtsdrehender Pol. im Signal- bzw. Idlerspektrum.

Beachte:

* Mit Signal- & Idlerspektrum sind die beiden sogenannten Schnittkegelstrahlen gemeint.

* \hat{H}_I berücksichtigt schon die räumliche Filtrierung der Schnittkegelstrahlen durch zwei hochblenden.

Betrachte nun der Anfangszust.

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle_{o,s} |0\rangle_{ao,s} |0\rangle_{o,i} |0\rangle_{ao,i} = |\varepsilon_0\rangle \quad (11.13)$$

d.h. alle Wörter im Vakuumzust.

\Rightarrow Zeitentwicklung von $|\psi_0\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-it\hat{H}_I/k) |\psi_0\rangle \quad (11.14)$$

Nun ist \hat{H}_I zeitunabh. \Rightarrow entwicke gl. (11.14)

$$|\psi(t)\rangle \approx [1 - it\hat{H}_I/k - \frac{1}{2}(t\hat{H}_I/k)^2] |\psi_0\rangle$$

$$\approx (1 - \mu^2) |\varepsilon_0\rangle \quad (11.15)$$

$$- i\mu (|1\rangle_{o,s} |0\rangle_{ao,s} |0\rangle_{o,i} |1\rangle_{ao,i} + |0\rangle_{o,s} |1\rangle_{ao,s} |1\rangle_{o,i} |0\rangle_{ao,i})$$

wobei $\mu := \eta t$.

Definiere nun:

$$|0\rangle := |0\rangle_s |0\rangle_{ao}$$

$$|V\rangle := |1\rangle_s |0\rangle_{ao} \quad (11.16)$$

$$|H\rangle := |0\rangle_s |1\rangle_{ao}$$

Dann:

$$|\psi(t)\rangle = (1 - \mu^2) |0\rangle_s |0\rangle_i - i\mu (|V\rangle_s |H\rangle_i + |H\rangle_s |V\rangle_i) \quad (11.17)$$

Beachte:

* $|\psi(t)\rangle$ besteht vor allem aus dem Vakuumzust., da $\mu \ll 1$.

* Wenn zw. links den beiden hochblenden positionierte Detektoren gleichzeitig feuer, weiß man jedoch, dass man es mit dem zweiten Term der Wellenfkt zu tun hätte:

$$|4^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle_s |H\rangle_i + |H\rangle_s |V\rangle_i) \quad (M.18)$$

* Durch die Detektion wird der Zust. jedoch zerstört
 $\leadsto |4^+\rangle$ wird nicht präpariert sondern postselektiert.

* Aus $|4^+\rangle$ lassen sich durch den NL-Kristall nachgeschaltete Polarisationsoptik folgende Zust. erzeugen:

$$|4^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_s |V\rangle_i \pm |V\rangle_s |H\rangle_i) \quad (M.19)$$

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_s |H\rangle_i \pm |V\rangle_s |V\rangle_i)$$

die man als Bell-Zust. bezeichnet.

* Bell-Zust. bilden vollst. Basis für System aus zw. Spin- $\frac{1}{2}$.

* Man spricht dc: $|4^\pm\rangle$ & $|\phi^\pm\rangle$ von maximal verschärften Zuständen.

11.3. Das Bellsche Theorem & qt. Tests des QM
 Betrachte nun den so erzeugten EPR-Zust.

$$|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |V\rangle_2 - |V\rangle_1 |H\rangle_2) \quad (M.20)$$

Definieren für die beiden fäumlichen Winkel 1 & 2
 Pol.zust. entlang und orthogonal zu den
 Richtungen θ bzw. ϕ :

$$|\theta\rangle_1 = \cos\theta |H\rangle_1 + \sin\theta |V\rangle_1$$

$$|\theta^\perp\rangle_1 = -\sin\theta |H\rangle_1 + \cos\theta |V\rangle_1 \quad (11.21)$$

$$|\phi\rangle_2 = \cos\phi |H\rangle_2 + \sin\phi |V\rangle_2$$

$$|\phi^\perp\rangle_2 = -\sin\phi |H\rangle_2 + \cos\phi |V\rangle_2$$

Damit:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi) |\theta\rangle_1 |\phi\rangle_2 \\ & + (\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) |\theta\rangle_1 |\phi^\perp\rangle_2 \\ & - (\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) |\theta^\perp\rangle_1 |\phi\rangle_2 \\ & - (\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) |\theta^\perp\rangle_1 |\phi^\perp\rangle_2]. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Beachte:

* Messung von $|\theta\rangle$, $|\theta^\perp\rangle$, $|\phi\rangle$ & $|\phi^\perp\rangle$ durch
 entsprechend ausgerichtete Polarisatoren usgl.

* Für $\theta = \phi$ reduziert sich (11.22) zu

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\theta\rangle_1 |\theta^\perp\rangle_2 - |\theta^\perp\rangle_1 |\theta\rangle_2) \quad (11.23)$$

$\rightsquigarrow |\Psi\rangle$ ist rotationsinvariant.

Betrachte nun die Korrelationsfkt

$$C(\theta, \phi) = \langle A(\theta) B(\phi) \rangle \quad (M.24)$$

Wobei $\langle \dots \rangle$: Mittelwert aus großer Zahl exp. Realisierungen und $A(\theta) = +1$ bzw. -1 , falls Photon 1 detektiert in $|\theta\rangle_1$ bzw. $|\theta^\perp\rangle_1$, sowie $B(\phi) = +1$ bzw. -1 , falls Photon 2 detektiert in $|\phi\rangle_2$ bzw. $|\phi^\perp\rangle_2$.

$$\rightsquigarrow A(\theta) B(\phi) = \begin{cases} +1 & \text{für } |\theta\rangle_1 |\phi\rangle_2 \& |\theta^\perp\rangle_1 |\phi^\perp\rangle_2 \\ -1 & \text{für } |\theta^\perp\rangle_1 |\phi\rangle_2 \& |\theta\rangle_1 |\phi^\perp\rangle_2 \end{cases} \quad (M.25)$$

Für Mittelwert folgt:

$$\begin{aligned} C(\theta, \phi) &= P(|\theta\rangle_1 |\phi\rangle_2) + P(|\theta^\perp\rangle_1 |\phi^\perp\rangle_2) \\ &\quad - P(|\theta^\perp\rangle_1 |\phi\rangle_2) - P(|\theta\rangle_1 |\phi^\perp\rangle_2) \end{aligned} \quad (M.26)$$

mit $P(\dots)$: W. ket. Mit (M.22) erhalten wir

$$C(\theta, \phi) = -\cos[2(\theta - \phi)] \quad (M.27)$$

(quantenmech. berechnetes Wert von $C(\theta, \phi)$).

Nehmen wir nun die Existenz eines LVT an und berechnen der Satz vorliegenden Parameters mit $\lambda \rightsquigarrow A(\theta) \& B(\phi)$ hängt von λ ab

$$\rightsquigarrow A(\theta, \lambda) = \pm 1 \& B(\phi, \lambda) = \pm 1 \quad (M.28)$$

mit ± 1 def. wie oben.

Beachte: $A(\theta, \phi, \lambda) \& B(\phi, \theta, \lambda) \leftrightarrow$ hält fest.

Sei außerdem $g(\lambda)$ die W. Lktsdichte der verborgenen Parameter, also $\int g(\lambda) d\lambda = 1$ (M.29)

Mit der LVPT berechnen wir

$$C_{vp}(\theta, \phi) = \int A(\theta, \lambda) B(\phi, \lambda) g(\lambda) d\lambda \quad (\text{M.30})$$

Dieses Ergebnis ist übereinstimmend mit (M.24):

Nebenrechnung: Seien $X_1, X'_1, X_2, X'_2 = \pm 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} S &= X_1 X_2 + X_1 X'_2 + X'_1 X_2 - X'_1 X'_2 \\ &= X_1 (X_2 + X'_2) + X'_1 (X_2 - X'_2) = \pm 2 \end{aligned} \quad (\text{M.31})$$

Ersetze nun $X_1 = A(\theta, \lambda)$, $X'_1 = A(\theta', \lambda)$, $X_2 = B(\phi, \lambda)$ & $X'_2 = B(\phi', \lambda)$, multipliziere mit $g(\lambda)$ und integriere über λ

$$\Rightarrow -2 \leq C_{vp}(\theta, \phi) + C_{vp}(\theta', \phi) + C_{vp}(\theta, \phi') - C_{vp}(\theta', \phi') \leq 2 \quad (\text{M.32})$$

Bellsche Ungleichung in der Form von Clauser, Horne, Shimony & Holt (CHSH-Ungl.)

Setze nun $\theta = 0$, $\theta' = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \frac{\pi}{8}$ & $\phi' = -\frac{\pi}{8}$, so erhalten wir aus (M.24) den QM-Wert

$$S = C(0, \phi) + C(0', \phi) + C(0, \phi') - C(0', \phi') = -2\sqrt{2} \quad (\text{M.33})$$

Dieser Wert liegt außerhalb der für del. LVPT bestimmten Grenzen (M.32) !!!

Was (M.32) um viele Standardabweichungen verlässt will, möge unser FP-Versuch durchführen...

12. Grundlagen der Quanteninformation

12.1. Quantenbits

Klass. Bit: Zust. entweder 0 oder 1

Quantenbit (Qubit): Basiszust. $|0\rangle$ & $|1\rangle$ (Rechenbasis)

Allg. Zust. eines Qubits (äquiv. Spin- $\frac{1}{2}$):

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (12.1)$$

$$\text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (12.2)$$

Beachte:

* Zust. des Klass. Bits kann durch Messung bestimmt werden. Nicht möglich mit Qubit (Messergebnis entweder 0 (W. $|\alpha|^2$) oder 1 (W. $|\beta|^2$); zudem projiziert Messung $|\psi\rangle$ auf $|0\rangle$ oder $|1\rangle$.)

* $|\psi\rangle$ kann jedoch entsprechend SG (deterministisch) manipuliert & transformiert werden.

* $|\psi\rangle$ kann geometrisch auf Blochkugel dargestellt werden:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (12.3)$$

$\Rightarrow |\psi\rangle$ beinhaltet ∞ -viel Information (soviel, wie Punkte auf der Bloch-Kugel liegen)

* Diese Information kann nicht direkt ausgelernt werden (s.o.). Sie kann aber entsprechend der SG verarbeitet werden.

* Allg. n-Qubit Zust.: d.h. Superposition aller Basiszust.: $|x\rangle = \sum_i \alpha_i |x_i\rangle$, $x_i \in \{0, 1\}^n$ (12.4)

mit 2^n Amplituden $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

* $n=500 \Rightarrow 2^n >$ Zahl der Atome im Universum
 \Rightarrow unmöglich mit klass. Computer zu handeln.
 \Rightarrow Feynman (1981): Quantensysteme lassen sich effizient nur auf Quantencomputern simulieren.

12.2. Quanten-Rechnungen

Klassisches Rechnen: elekt. Schaltkreis aus Kabeln und logischen Gattern

Quanten-Rechnen: Quanten-Schaltkreis aus „Kabeln“ und Quanten-Gattern

Ein-Qubit-Gatter:

Einziges nichttriviales klassisches Ein-Bit-Gatter:

$$0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0 \text{ (NOT-Gatter)} \quad (12.5)$$

Quanten-NOT-Gatter:

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle, |1\rangle \rightarrow |0\rangle$$

Beachte:

* QM (SG) ist linear, also auch NOT-Gatter:

$$\Rightarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle \quad (12.6)$$

* Matrix-Darstellung:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{X}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.7)$$

Allg. Ein-Qubit-Gatter: 2×2 Matrix

Einschränkung: Operation muss Norm erhalten:

$$\langle 2|2 \rangle = \langle 2|M^\dagger M|2 \rangle \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow M^\dagger M = 1 \Rightarrow M \text{ unitär}$$

Weitere wichtige Ein-Qubit-Gatter:

Z-Gatter: $|0\rangle \rightarrow |0\rangle, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.8)$
 $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$

Hadamard-Gatter: $|0\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$
 $|1\rangle \rightarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}, H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.9)$

Ein-(Qu)Bit-Gatter:

Klass.	QM
$x - \boxed{D_0} - \bar{x}$	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle - \boxed{x} - \alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$
	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle - \boxed{z} - \alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$
	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle - \boxed{H} - \alpha \frac{ 0\rangle + 1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{ 0\rangle - 1\rangle}{\sqrt{2}}$

Multi-Qubit-Gatter:

Klass. 2-Bit-Gatter: AND, OR, XOR, NAND = NOT AND, NOR = NOT OR

2 Input-Bit \rightarrow 1 Output-Bit

Beachte: NAND ist universell (jede Fkt kann durch Komb. von ausschließlich NAND-Gattern berechnet werden).

Wichtigstes Multi-Qubit-Gatter: controlled NOT, CNOT
2 Input-Qubits \rightarrow 2 Output-Qubits

$$|100\rangle \rightarrow |100\rangle, |101\rangle \rightarrow |101\rangle, |110\rangle \rightarrow |111\rangle, |111\rangle \rightarrow |110\rangle \quad (12.10)$$

Kreis: $|A, B\rangle \rightarrow |A, B \oplus A\rangle \quad (12.11)$

Wobei \oplus : Addition modulo 2

Schaltbild-Darstellung: $|A\rangle \xrightarrow{\text{---}} |A\rangle \quad (12.11)$

$$|B\rangle \xrightarrow{\oplus} |B \oplus A\rangle$$

Matrix-Darstellung:

$$U_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.12)$$

Beachte:

* Auch hier muss gelten $U^\dagger U = \mathbb{1}$ (z.B. $U_{\text{CNOT}}^\dagger U_{\text{CNOT}} = \mathbb{1}$)

* CNOT \leftrightarrow reversibel, XOR-Gatter. Aber: XOR ist nicht
reversibel wg. Informationsverlust ($A, B \rightarrow A \oplus B$)

* Quantengatter sind dagegen immer reversibel
($U^\dagger = U^{-1}$ ist auch Quantengatter)

Quantum-Schaltungen:

Beispiel:

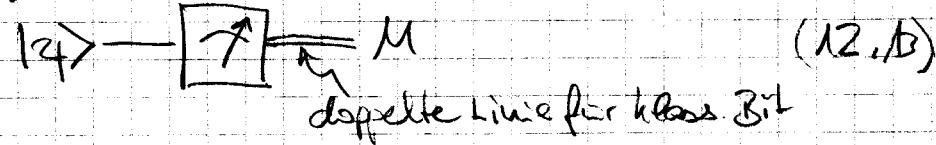


Wird von links nach rechts
gelesen

Effekt: $|a, b\rangle \rightarrow |b, a\rangle$ für alle Rechenbasis-Zust.

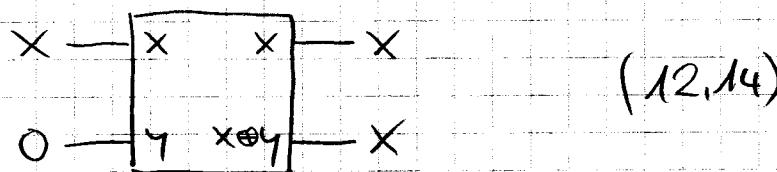
Weitere wichtige Operation: Messung

- Konvertiert Qubit-Zust. $|q\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ in probabilistisches klass. Bit M (0 mit Wkft $|\alpha|^2$, 1 mit Wkft $|\beta|^2$)



12.3 Quanten-Kopieren?

- Klazz. Bit in unbekanntem Zust. X kann mittels Klazz. CNOT-Gatter kopiert werden:



Quanten-NOT-Gatter:

$$|q\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{\text{NOT}} \begin{array}{c} \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \\ \alpha|1\rangle \xrightarrow{\oplus} \end{array} \quad (12.15)$$

- aber: $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \neq |q\rangle|q\rangle = \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \beta\alpha|10\rangle + \beta^2|11\rangle$
außer wenn $\alpha\beta = 0$

Allgemein besagt das „no-cloning theorem“:
Ein unbekannter Quantenzustand kann nicht kopiert werden! (Übung)

12.4 Quanten-Teleportation

Alice & Bob:

- * Telen sich Bell-Zust. $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- * Sind beliebig weit voneinander entfernt

Alice:

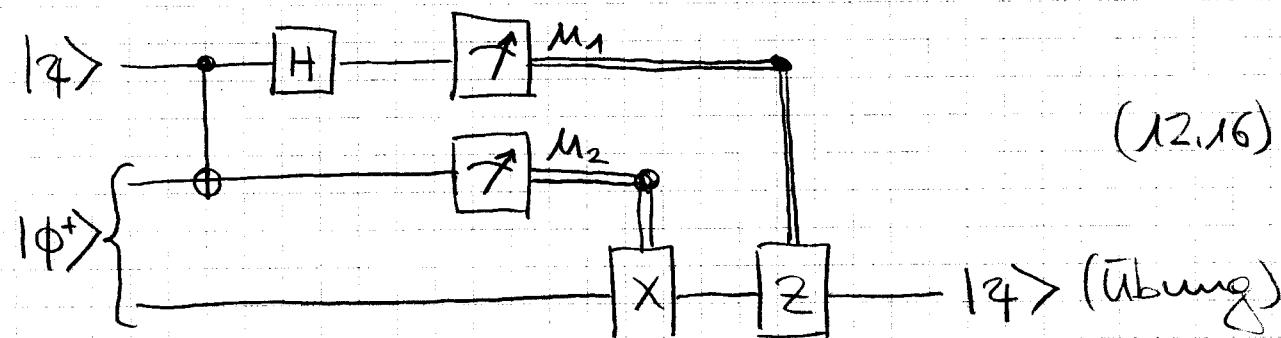
- * Kann Bob klass. Information senden
- * Hat ein Qubit in einem unbekannten Zust. $|q\rangle$

Aufgabe: Alice soll Bob das Qubit übermitteln

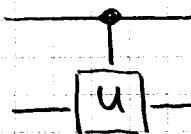
Probleme:

- * $|q\rangle$ kann durch Messung nicht bestimmt werden
- * Selbst wenn Alice $|q\rangle$ kennt, braucht sie für die Übermittlung der ∞ -vielen Informationen ∞ lange.

Mittels Quantenschaltung ist Aufgabe lösbar!



Erläuterung:



→ controlled-U Operation → wende U an, falls das Kontroll-(Qn)Bit den Wert 1 hat

Beachte: Die Quanten-Teleportation

* ist nicht überlichtschnell wg. Kommunikation über klass. Kanal.

- * erzeugt keine Kopie des Input-Qubits, da dieses durch Messung auf Rechenbasis projiziert wird.
- * nutzt einen Bell-Zust. als „Ressource“.
- * transportiert keine Matrize!

12.5. Quanten-Algorithmen

12.5.1 Quanten-Parallelismus

Sei $f(x) : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ eine Ein-BIT-Funktion

Definiere $U_f : |x,y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$ (12.17)

Daten-Register Ziel-Register

Beachte:

* U_f ist unitär (Übung)

* Man kann zeigen: Gibt es einen klass. Schaltkreis, um $f(x)$ zu berechnen, so gibt es auch einen Quanten-Schaltkreis mit vergleichbarer Effizienz.

* Es gilt $|x,0\rangle \xrightarrow{U_f} |x,f(x)\rangle$ (12.18)

Wende U_f an auf den Inputzust. $|x,y\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |0\rangle$:

$$\begin{array}{c} |0\rangle + |1\rangle \\ \hline \sqrt{2} \\ |0\rangle \end{array} \xrightarrow{\quad U_f \quad} \boxed{\begin{array}{c} x & x \\ |0\rangle & |1\rangle \\ \hline y & y \oplus f(x) \end{array}} \quad |x,y\rangle = \frac{|0,f(0)\rangle + |1,f(1)\rangle}{\sqrt{2}} \quad (12.19)$$

Beachte:

* $|x,y\rangle$ beinhaltet Informationen über $f(0)$ & $f(1)$!

* Es wurde nur eine $f(x)$ -Schaltung angewendet.

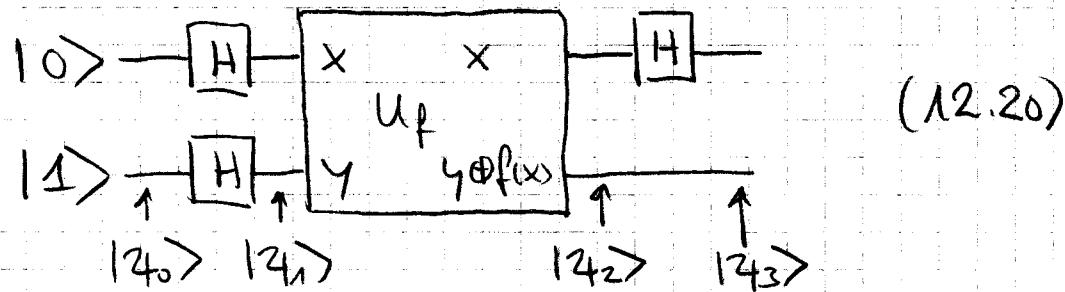
* Quanten-Parallelismus ermöglicht simultane "Berechnung" aller möglichen Wert von f .

* Problem: Messung liefert $f(x)$ nur für einen Wert von $x \rightarrow$ Information nicht direkt zugänglich.

12.5.2 Deutsch-Algorithmus

Wir suchen Weg, Informationen über mehr als einen Wert von $f(x)$ aus Zust. wie $\{x, f(x)\}$ zu extrahieren

→ kombinire Quanten-Parallelismus mit Quanten-Interferenz:



$$|14_0\rangle = |0,1\rangle, |14_1\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{Es gilt: } |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \xrightarrow{U_f} (-1)^{f(x)} |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (12.21)$$

$$\Rightarrow |14_2\rangle = \begin{cases} \pm \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right), & \text{falls } f(0) = f(1) \\ \pm \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right), & \text{falls } f(0) \neq f(1) \end{cases} \quad (12.22)$$

$$\text{Schließlich } |14_3\rangle = \begin{cases} \pm |0\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right), & \text{falls } f(0) = f(1) \\ \pm |1\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right), & \text{falls } f(0) \neq f(1) \end{cases} \quad (12.23)$$

$$\text{Nun gilt } f(0) \oplus f(1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f(0) = f(1) \\ 1, & \text{falls } f(0) \neq f(1) \end{cases} \quad (12.24)$$

$$\text{Folglich: } |14_3\rangle = \pm |f(0) \oplus f(1)\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (12.25)$$

Beschreibung:

- * Messung des ersten Qubits liefert $f(0) \oplus f(1)$.
- * Globale Eigenschaft von $f(x)$ mit nur einer Berechnung von $f(x)$ bestimmbar (klassisch wären zwei Berechnungen von $f(x)$ notwendig!).
- * Erweiterbar auf n -Bit-Fetzen:

$$f(x): \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\} \quad (12.26)$$

- unterscheide mit einer Messung, ob f konst. ($f(x) = 0$ bzw. $1 \forall x$) oder balanciert ($f(x) = 0$ für die Hälfte aller x) ist (sog. Deutsch-Problem).
- möglich mit Deutsch-Jozsa-Algorithmus (klass. $2^{n-1} + 1$ Anfragen notwendig!).
- Quantenalgorithmus hier exponentiell schneller als klass. Algorithmus!

- * Deutsch-Problem hat keine bekannten Anwendungen.
- * Aber: Deutsch-Jozsa-Alg. legt Grundstein für Verständnis mächtigerer Quanten-Algorithmen wie Quanten-Fourier-Transformation, Shor-Alg. und Grover-Such-Alg.

12.6. Quanten-Kryptographie

12.6.1 Schlüssel und ihre Übertragung

Moderne Verschlüsselungsverfahren beruhen auf öffentlich bekannten Algorithmen, die zusammen mit Schlüssel (Parameteratz) verwendet werden:

$$\hat{E}_k(P) = C \text{ und } \hat{S}_k(C) = P \quad (12.27)$$

wobei P : Klartext, C : Kryptotext, k : Kryptograph, Schlüssel
 \hat{E} & \hat{S} : Ver- & Entschlüsselungsoperationen.

Beachte:

- * Sicherheit des Kryptotexts \rightarrow Geheimhaltung von k .
- * k muss zufällige, hinreichend lange Bitfolge sein.

Beispiel: Vernam-Verschlüsselung (one time pad)

Erstelle digitales Alphabet:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & B & C & \dots & \times & \downarrow & ? & , & \cdot \\ 00 & 01 & 02 & \dots & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \end{array} \quad (12.28)$$

Addiere zum Klartext genauso langen Schlüssel
(Zufallszahlen von 00-29)

$$\begin{array}{ccccccccc} A & N & G & R & I & F & F \\ 00 & 13 & 06 & 17 & 08 & 05 & 05 \\ + k = & 15 & 04 & 28 & 13 & 14 & 06 & 21 \\ \hline & 15 & 17 & 04 & 06 & 22 & 11 & 26 \end{array} \quad (12.29)$$

$$\text{also } P+k=C \text{ mod } 30. \quad (12.30)$$

Kryptotext \rightarrow Klartext durch Subtraktion des Schlüssels:

$$C-k=P \text{ mod } 30 \quad (12.31)$$

(Claude Shannon 1949: One time pad ist absolut sicher, sofern Schlüssel rein zufällig ist, die gleiche Länge wie Nachricht hat & nur einmal verwendet wird)

Problem: Schlüssel muss (übermöglichst sicher)
kanal vereinbart werden \Rightarrow Schlüsselübersetzung
kann prinzipiell abgehört werden.

Lösungen:

- 1.) Public-Key-Versfahren (RSA) Aber: Sicherheit nicht beweisbar.
- 2.) Quanten-Kryptographie

12.6.2 Quanten-Schlüsselübersetzung

Idee von Bennett & Brassard (BB84):

Alice kodiert Schlüssel in nicht-orthogonale Zust. einzelner Quanten, die sie Bob schickt. Falls Eve die Quanten abfängt und misst, kann sie durch no-cloning Theorem die Qubits nicht fehlerfrei an Bob weiterleiten.

Konkret:

- 1.) Alice sendet Bob Sequenz von Photonen, die sie zufällig in einem von vier Polarisationszust. präpariert: horizontal, vertikal, $+45^\circ$, -45° ($| \leftrightarrow \rangle, | \uparrow \rangle, | \swarrow \rangle, | \nwarrow \rangle$).
- 2.) Für jedes Photon wählt Bob zufällig die Messbasis (HV oder $\pm 45^\circ$) und mit dieser Polarisator.
- 3.) Bob kohiert Basis und Messergebnis.

4.) Bob teilt Alice über klass. Kanal die gewählten Basen mit (nicht die Messergebnisse!).

Bem.: Dies darf erst nach Messung geschehen.

5.) Alice teilt Bob mit, welche Messungen in der richtigen Basis erfolgt sind.

6.) Alice & Bob verwerfen Pol. Daten bei nicht übereinstimmender Basis. Mit einem Teil der anderen Daten schätzen Alice & Bob die Fehlerrate ab. Ist diese zu hoch, wird Eve in der Detektion (oder der Quantenkanal zu verstaut) und die Daten werden komplett verworfen. Andernfalls stellen die restlichen Daten den Rötschlüssel.

→ Siehe Table 2.1 S23 aus The Physics of QI

Problem: Fehlerrate ist nie null (wg. Eve und/oder Rauschen) → Rötschlüssel von Alice & Bob sind nicht identisch.

Lösung: Klassische Fehlerkorrektur und „Privacy Amplification“.

Beachte: Sicherheit von BB84 \leftrightarrow 1-Photonen-Pulse (falls > 1 Photon pro Puls \rightarrow Eve kann Strahl teilen und entdeckt müssen).

13. KÜHLUNG UND SPEICHERUNG NEUTRALER ATOME

13.1. Prinzip der Laserkühlung

- Lichtdruck-Kraft:

Absorption \rightsquigarrow Impulsübertrag auf Atom in Richtung des Laserstrahls.

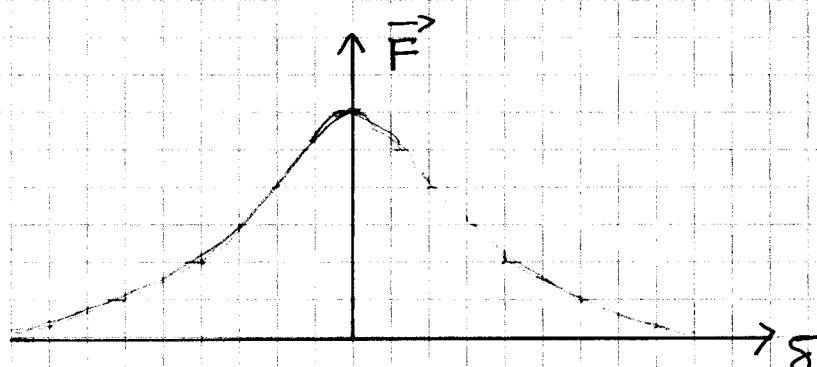
Spont. Emission \rightsquigarrow Impulsübertrag in zufällige Richtung

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Absorption} \rightsquigarrow \langle \vec{p} \rangle = \hbar k_L \\ \text{Emission} \rightsquigarrow \langle \vec{p} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \underbrace{\text{Photonimpuls}}_{\hbar k_L} \times \underbrace{\text{Photonstrate}}_{\sigma S_{22}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2} \frac{s_0}{1 + s_0 + 4\delta^2/\gamma^2} \hbar k_L = \vec{F}(\delta) \quad (13.1)$$

siehe
Kap. 1.3



\rightsquigarrow Beachte:

$$\vec{F} \text{ ist maximal bei } \delta = 0 \Rightarrow F_{\max} = \frac{\sigma}{2} \hbar k_L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{\hbar k}{m} \frac{\sigma}{2}$$

$$\text{z.B. Na-At.} \rightsquigarrow a_{\max} = 9 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-2} \approx 10^5 \text{ g}$$

• Doppler-Kühlung:

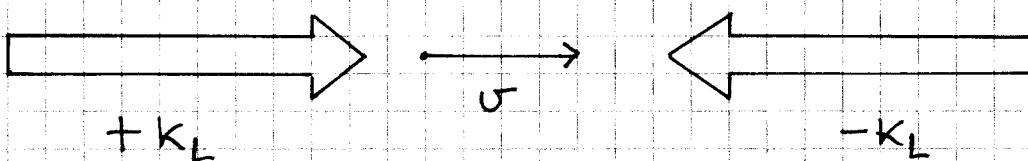
Geschwindigkeit \vec{v} des Atoms führt zu Doppler-Verschiebung der Laserfreq. $\Rightarrow \left\{ \omega_L \rightarrow \omega_L - \vec{k}_L \cdot \vec{v} \right. \quad \left. \delta \rightarrow \delta - \vec{k}_L \cdot \vec{v} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}(\delta) = \vec{F}(\delta(\vec{v})) = \vec{F}(\vec{v}) = \\ = \pm \hbar k_L \frac{\gamma \frac{s_0/2}{\delta}}{1 + s_0 + \left(\frac{2(\delta - \vec{k}_L \cdot \vec{v})}{\delta} \right)^2} \quad (13.2)$$

Die Kraft ist Geschwindigkeitsabh.

• Optische Melasse:

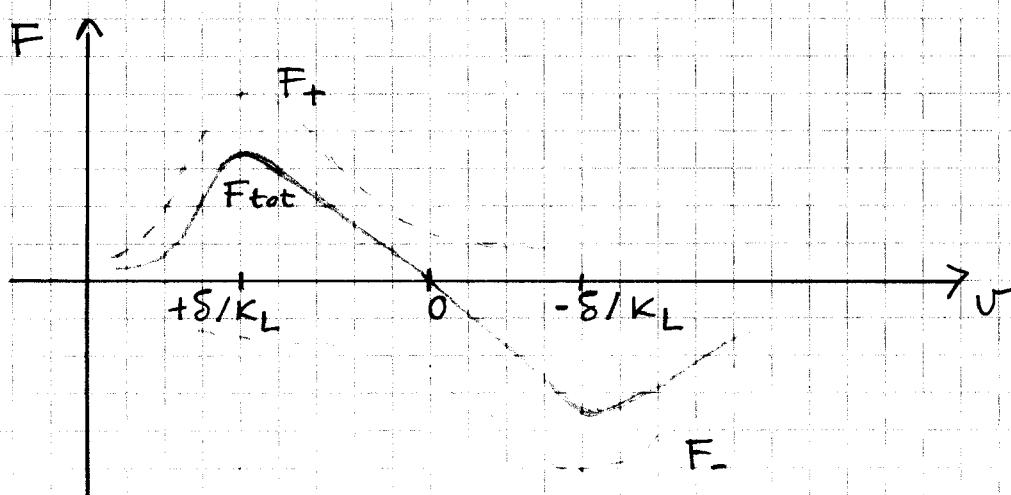
Verwende 2 gegenläufige Laserstrahlen verstimmt gegenüber at. Resonanzfreq.



Einzelkräfte:

$$F_{+} = \pm \hbar k_L \frac{\gamma \frac{s_0/2}{\delta}}{1 + s_0 + \left(\frac{2(\delta + k_L v)}{\delta} \right)^2} \quad (13.3)$$

Gesamtkraft: $F_{\text{tot}} = F_{+} + F_{-}$



Nähe $v=0 \Rightarrow$ lineare Bereich \Rightarrow

$$F_{\text{tot}} \approx -\beta v \quad (13.4)$$

$$\text{mit } \beta = \frac{-8\pi n k_L^2 \delta s_0}{\gamma(1+s_0 + (2\delta/\gamma)^2)^2} \quad (13.5)$$

wobei F_{tot} entspricht Reibungskraft mit Reibungskoeff. β

\Rightarrow At. wie in viskoser Flüssigkeit gebremst \Rightarrow
Optische Melasse!

\rightsquigarrow Bemerkung:

Ungerichtete Impulsüberträge bei spont. Emission führen
zu Heizprozess \Rightarrow gleichzeitig Kühlung + Heizung.

\rightsquigarrow Gleichgewichtstemp. $T_D = \frac{\gamma}{2k_B}$ (Dopplertemp.)

Z.B. Na-At. $\rightsquigarrow T_D \approx 240 \mu\text{K}$.

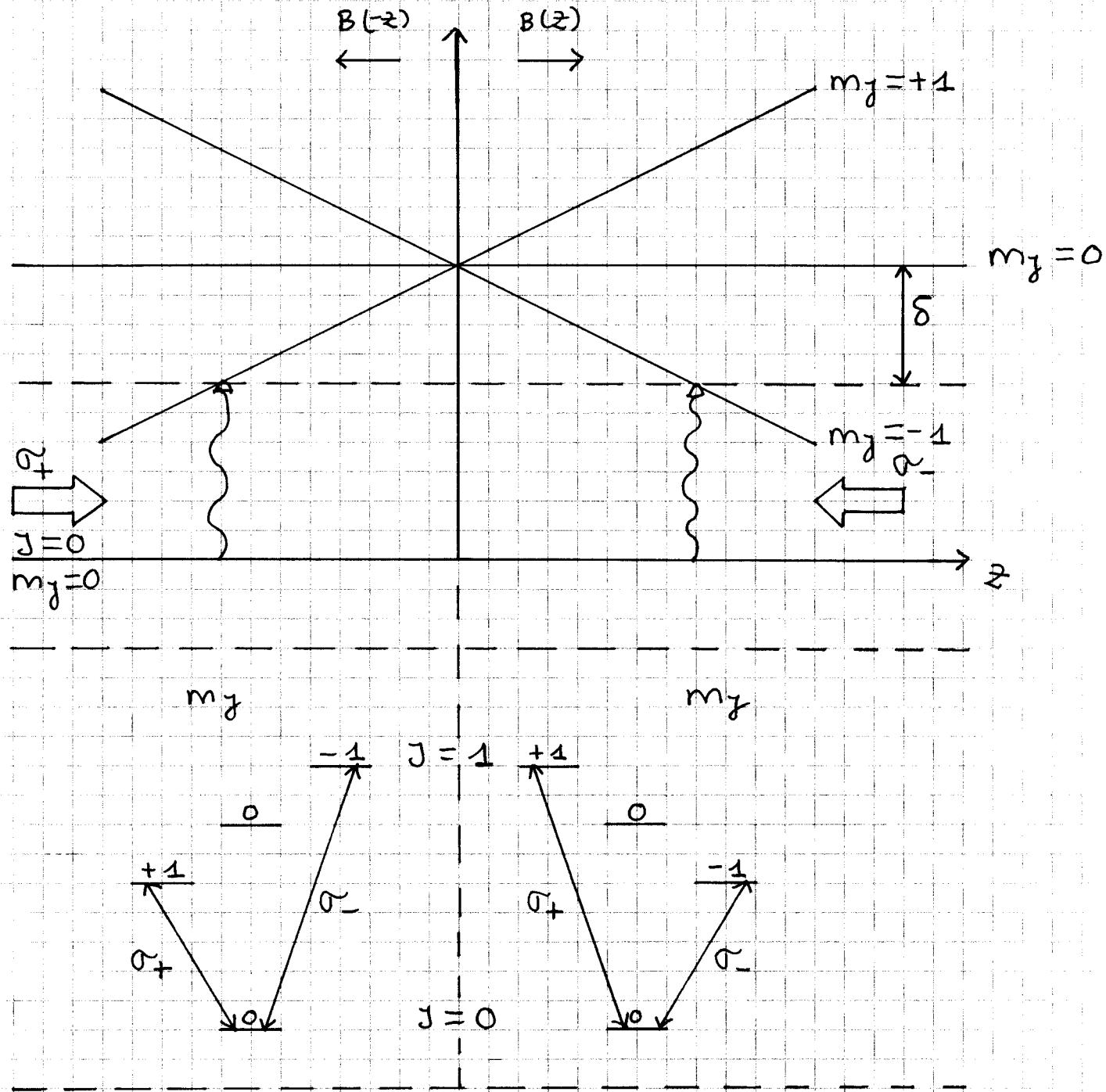
13.2. Magneto-optische Falle (MOT)

Atome kühlen und gleichzeitig an einer Stelle im Raum festhalten.

\rightsquigarrow Verwende zusätzlich ortsabhängige Kraft:

- Magnetfeld um die Energieniveaus ortabh. zu verschieben.
- Geeignete Wahl der Polarisierung der Laserstrahlen.

Quadrupolfeld: $B(z) = Az$



Für Atome, die aus dem Zentrum herausdiffundieren, dominiert die WW mit dem Laserstrahl, welcher Atom zurück ins Zentrum treibt!

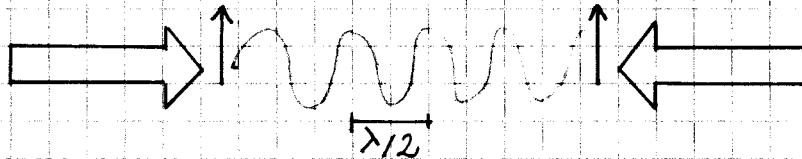
13.3. Sisyphus Kühlung

In opt. Melasse mit MOT wurden Temperaturen kleiner als T_D gemessen!

Wie ist das möglich?

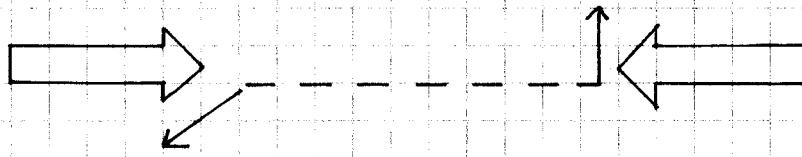
Beachte Bewegung der Atom in:

a.) Laserstrahlen parallel linear polarisiert (lin || lin)



Stehwelle in Intensität!

b.) Laserstrahlen orthogonal linear polarisiert (lin ⊥ lin)



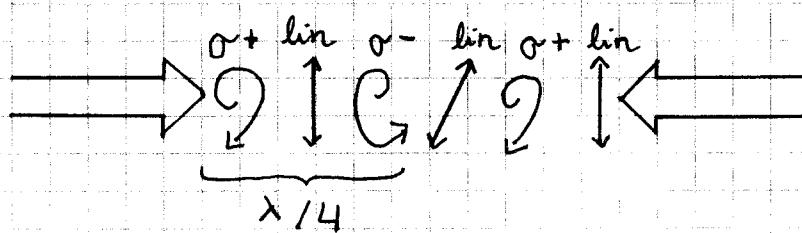
Keine Stehwelle in Intensität!

$$\vec{E}(z,t) = \frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbf{e}}_x E_0 e^{i(kz - \omega t)} - i \hat{\mathbf{e}}_y E_0 e^{i(kz + \omega t)} + c.c. \right\} \quad (13.6)$$

Für $z = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}$ σ - Polarisation

Für $z = \frac{1}{4} \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}$ σ + Polarisation

und dazwischen lineare Polarisation



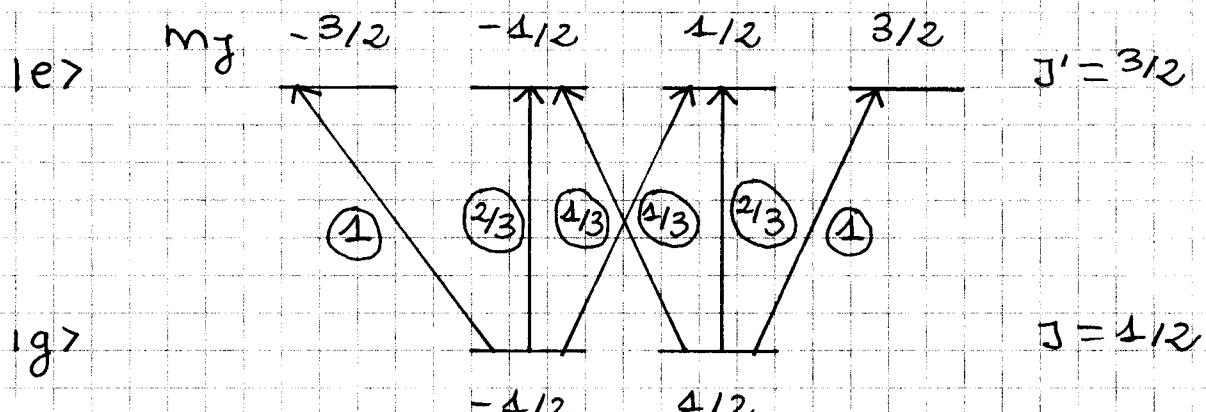
$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{E}(z) E e^{-i\omega t} + c.c. \right\} \quad (13.7)$$

Wobei $\vec{E}(z)$ ein ortabhängiges Polarisationsvektor ist \sim
 \sim Polarisationsgradient.

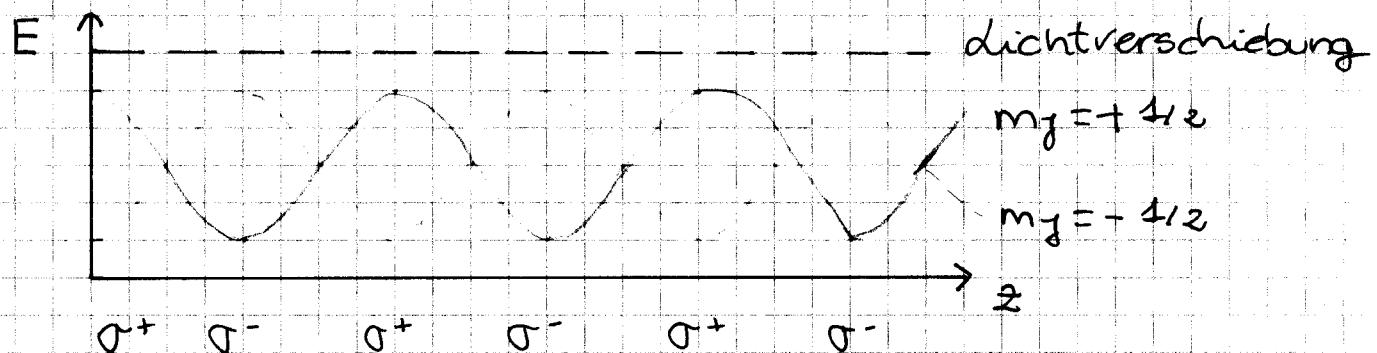
$$\vec{E}(z) = \vec{e}_- \cos(kz) - i\vec{e}_+ \sin(kz), \quad (13.8)$$

$$\vec{e}_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \vec{e}_x \mp i\vec{e}_y \} \quad (13.9)$$

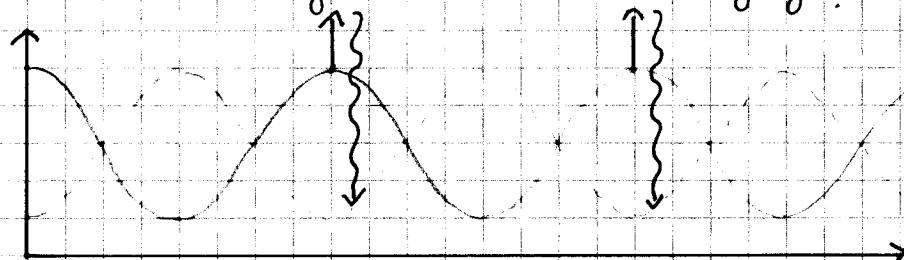
Was passiert mit den atomaren Energieniveaus?



mit 0 relative Stärke der Übergänge.



Dichtverschiebung ist ortssabhängig!



Und "optisches Pumpen" transferiert Atome von "top of the hill" zu "bottom of a valley".

→ In σ^+ -Bereichen der Stehwelle wird Atom nach $1g + 1/2 \rightarrow$ gepumpt, in σ^- -Bereichen nach $1g - 1/2 \rightarrow$.

⇒ Das Atom läuft immer den Berg hoch und verliert dadurch Kinetische Energie → "Sisyphus Kühlung".

Minimale Temperatur: ist gegeben durch das letzte gestreute Photon:

$$k_B T \sim h w_{\text{recoil}} \sim \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m \lambda^2} \quad (13.10)$$

Endtemperaturen liegen Faktor 10-100 unter T_{Doppler} !

13.4 Dipolfalle

~ Bis jetzt: MOT:

- * Dissipative Falle \Rightarrow z.B. Keine Speicherung von Superpositionszust., da spont. Emission inkohärent \Rightarrow Dynamik entsprechend SG nicht möglich (Rabi-Osz. in QED, ...)
- * Niedrigste mögl. Temp. limitiert wegen Photonen-Rückstoß.

~ Lösung: konservative Fallen, die durch Potential beschrieben werden können.

2 wichtigste Möglichkeiten: Dipolfalle und magn. Falle.

Klassische Beschreibung:

Anwendbar auch auf makroskopische Systeme, z.B.: biolog. Zellen und Plastikkugelchen (opt. Pinzette).

Betrachte Atom in Laserfeld:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e} E(\vec{r}) \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (13.11)$$

der das at. Dipolmoment

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \hat{e} p(\vec{r}) \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (13.12)$$

induziert. Es folgt,

$$p = \alpha E \quad (13.13)$$

wobei α die komplexe Polarisierbarkeit ist.

Das WW-Potential ist

$$U_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \vec{p} \cdot \vec{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \operatorname{Re}(\alpha) I \quad (13.14)$$

wobei $I = 2 \epsilon_0 c |E|^2$.

Der Dipolkraft ist

$$\vec{F}_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\nabla U_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) \nabla I(\vec{r}) \quad (13.15)$$

Die absorbierte Leistung ist

$$P_{\text{abs}} = \langle \dot{\vec{p}} \cdot \vec{E} \rangle = 2w \text{Im}(PE^*) = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I \quad (13.16)$$

und die Streureate somit

$$P_{\text{sc}}(\vec{r}) = \frac{P_{\text{abs}}}{\pi w} = \frac{1}{\pi \epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\vec{r}) \quad (13.17)$$

Polarisierbarkeit α lässt sich im Lorentz-Modell des klassischen Oszillators berechnen mit der Bewegungsgl.:

$$\ddot{x} + P_w \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E(t) \quad (13.18)$$

und liefert

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega P_w} \quad (13.19)$$

mit der Dämpfungsrate

$$P_w = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} \quad (13.20)$$

Im Falle $\delta \equiv \omega - \omega_0 \ll \omega_0$ unter Verwendung der Drehwellennäherung folgen folgende Ausdrücke für Dipolpotential und Streureate

$$U_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\delta} I(\vec{r}) \quad (13.21)$$

$$P_{\text{sc}}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\pi \omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\delta} \right)^2 I(\vec{r}) \quad (13.22)$$

mit $P \equiv P_{\text{W}_0} = (\omega_0/\omega)^2 P_{\text{W}}$.

Aus (13.21) und (13.22) folgt

$$\hbar P_{\text{sc}} = \frac{P}{\delta} U_{\text{dip}} \quad (13.23)$$

~ Beachte:

* Für rotverstimmtes Licht ($\delta < 0$) $\Rightarrow U_{\text{dip}}$ ist negativ \Rightarrow Atome erfahren Kraft in Richtung der hohen Intensitäten \Rightarrow Potential Minima bei Intensitätsmaxima

Für blauverstimmtes Licht ($\delta > 0$) \Rightarrow Atome erfahren Kraft in Richtung der niedrigen Intensitäten \Rightarrow Potential Minima bei Intensitätsminima.

* Da $U_{\text{dip}} \propto I/8$ und $P_{\text{sc}} \propto I/8^2$ \Rightarrow Dipolfalle benötigt große Verstimmungen und hohe Intensitäten, um Streureate klein zu halten bei gegebener Potentialtiefe.

Quantenmechanische Beschreibung

~ Verwende "Dressed - State" - Bild.

AC-Stark-Verschiebung gegeben durch (siehe Kap. 4.3.):

$$\Delta E^\pm = \pm \hbar \frac{g^2 (n+1)}{\delta} \quad (13.24)$$

Falls $\delta < 0$: der ~~untere Zustand~~ (der mit Grundzustand verknüpfte ist) wird nach unten verschoben während der ~~oberer Zustand~~ nach oben verschoben wird.

(mit dem angeregten Zust. verknüpfte
Dressed-State)

Beispiel: einfachste Möglichkeit: Verwende fokussierten Gaußschen Strahl mit großer Rotverstimmung und Intensität

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} \exp\left(-2 \frac{r^2}{w^2(z)}\right) \quad (13.25)$$

wobei:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (13.26)$$

Das opt. Potential ist dann $U(r, z) \propto I(r, z)$ und die Potentialenergie $U_0 = |U(r=0, z=0)|$.

Für at. Ensemble mit $K_B T \ll U_0 \Rightarrow$ Ausdehnung des Ensembles ist radial $\ll w_0$ und axial $\ll z_0 \Rightarrow$ zylindersymmetrisches harmonisches Potential:

$$U(r, z) \approx -U_0 \left[1 - 2 \left(\frac{r}{w_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \quad (13.27)$$

Oszillationsfreq. der Atome nahe Fallenzentrum in axialer und radialer Richtung:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{4U_0}{m w_0^2}}, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{2U_0}{m z_0^2}} \quad (13.28)$$

Vorteile DF:

- * dadurch aus MOT möglich.
- * at. kann unabh. in jedem Grundzust. (F, m_F) gefangen werden.

Nachteile DF:

$U_{\text{dip}} \gtrsim 1 \text{ mK} \Rightarrow$ mehrere Watt Laserleistung je nach

Verstimmung) mit sehr geringem Intensitätsrauschen (sonst \rightarrow Heizen) \Rightarrow sehr teurer Laser ($\approx 10 \text{ k}\epsilon$, $\approx 100 \text{ k}\epsilon$)

13.5. Magnetische Falle

Aus Stern-Gerlach Experiment: Kraft über Atom $\propto -\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$ wobei $\vec{\mu}$ das at. magn. Dipolmoment ist.

Semiklass. Potential $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ entspricht Änderung der Grundzust. Energie wegen Zeeman-Effekt.

Für ein räumlich inhomogenes Magnetfeld ist:

$$U_{\text{magn.}}(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = g_F m_F \mu_B B(\vec{r}) \quad (13.29)$$

Im Folgenden angenommen: Spin folgt externem magn. Feld adiabatisch $\Rightarrow m_F$ -Zustand ändert sich nicht.

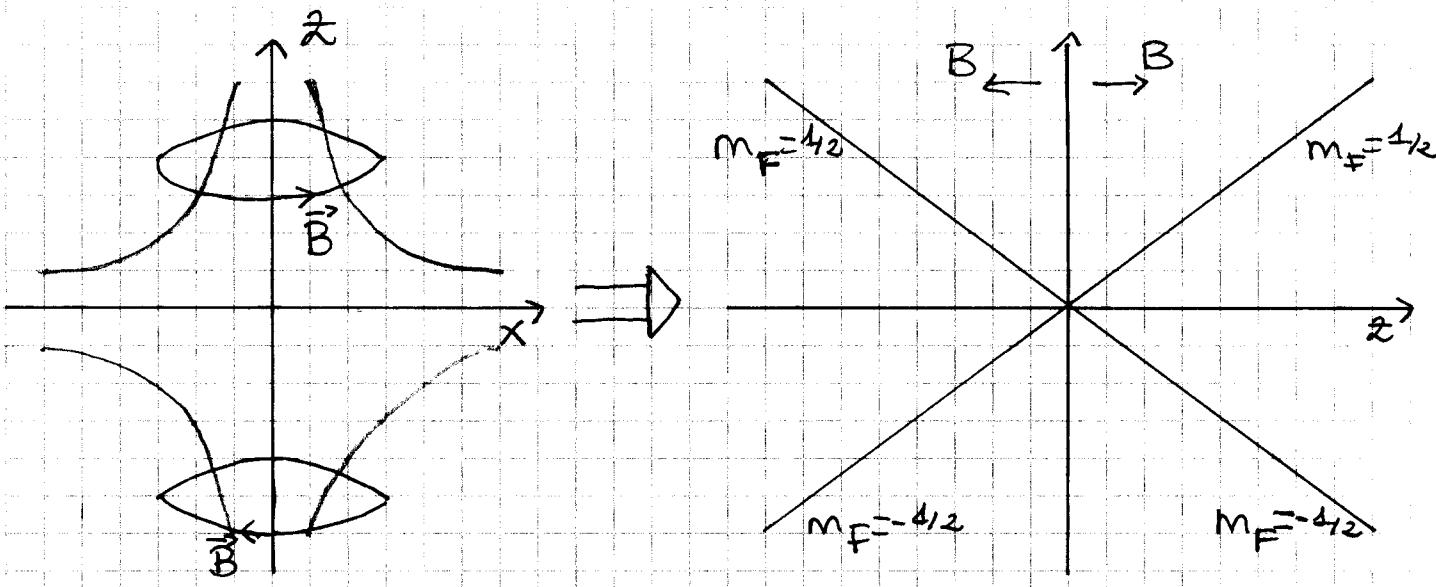
Kraft auf Atome ist dann:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_{\text{magn.}} = -g_F m_F \mu_B \vec{\nabla} B(\vec{r}) \quad (13.30)$$

\rightsquigarrow Für $g_F m_F > 0 (< 0)$: auf Atom wirkt Kraft Richtung kleinerer (größerer) Magnetfeldstärke \Rightarrow Schwachfeldsucher (Starkfeldsucher).

Einfachste Konfiguration: Quadrupolfalle

Zwei parallele Spulen mit gegensinnigem Strom (Anti-Helmholtz-Konfiguration).



Vorteil:

Selbe Magnetfeld-Konfiguration wie für MOT \Rightarrow At. können einfach aus MOT in QF umgeladen werden \rightarrow MOT-Laser ausschalten und Spulenstrom erhöhen.

Beispiel:

\vec{B} -Feld Gradient für MOT $\approx 39 \text{ G/cm}$ und für QF $\approx 16 \text{ G/cm}$ (um at. gegen Gravitation zu halten).

Nachteil:

Majorana-Spinflips nahe $\vec{B} = 0$:

at. Spin folgt externem Feld nicht, wenn

$$\left| \frac{d}{dt} \vec{B} \right| / |\vec{B}| \gtrsim \omega_L = \frac{|\vec{\mu} \cdot \vec{B}|}{t} \quad (13.31)$$

↓
Diamagn.freq.

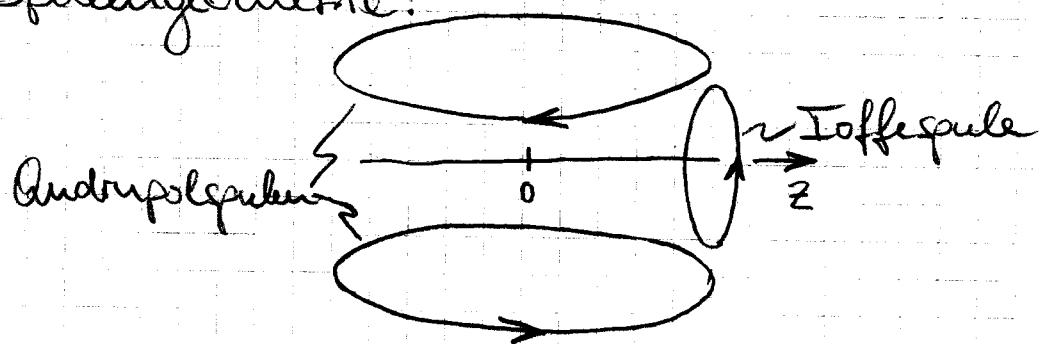
Nach Umlappen des Spins \Rightarrow Zeeman-Niveau evtl. nicht magnetisch fangbar \Rightarrow at. gehen verbrennen!

Die Quadrupol-Ioffe-Konfiguration (QUIC)-Falle

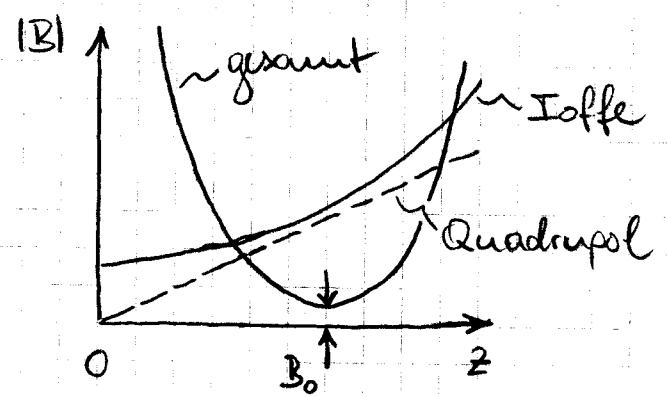
Idee: Erzeugt nicht verschwindendes Minimum des \vec{B} -Felds, d.h. $\nabla |\vec{B}(x, y, z)| = 0$ aber $|\vec{B}(x, y, z)| \neq 0$.

→ Mögliche durch Überlagerung des Quadrupolfelds mit einem Dipolfeld ($\sim \frac{1}{z^3}$)

→ Spulengeometrie:



→ resultierender Feld entlang z-Achse:



B_0 : Offsetfeld

Beachte: Für Temperaturen von wenigen $10 \mu\text{K}$ (nach Laserkühlung) ist $B_0 \approx 1\text{G}$ ausreichend, um Majorana Spinflips zu verhindern.

* Speicherzeit in QUIC-Falle nur noch durch Hintergrundgas-Stöße limitiert ($\sim \text{min}$).