Physique des particules – L3

TD 6 (correction)

Exercice 1 : Section efficace différentielle

1. Pour passer d'un référentiel à l'autre on effectue un boost Λ selon $\vec{e}_z$ donc les coordonnées selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont inchangées, en particulier pour $p_1 = \Lambda p_1^*$:
$$|\vec{p}_1|(\sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\vec{e}_y) = |\vec{p}_i^*|(\sin\theta^*\cos\phi^*\vec{e}_x + \sin\theta^*\sin\phi^*\vec{e}_y)\,. \tag{1}$$
Cela entraîne en effet $\phi = \phi^*$ (mais aussi $|\vec{p}_1|\sin\theta = |\vec{p}_i^*|\sin\theta^*$).

2. On a
$$s = (p_a^* + p_b^*)^2 = p_a^{*2} + 2p_a\cdot p_b + p_b^{*2} = m_a^2 + 2E_a^*E_b^* + 2\vec{p}_i^{*2} + m_b^2 \tag{2}$$
soit
$$E_a^*E_b^* = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2} - \vec{p}_i^{*2} \Longrightarrow (m_a^2 + \vec{p}_i^{*2})(m_b^2 + \vec{p}_i^{*2}) = \left(\frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2} - \vec{p}_i^{*2}\right)^2 \tag{3}$$
donc
$$|\vec{p}_i^*| = \frac{\sqrt{(s - (m_a + m_b)^2)(s - (m_a - m_b)^2)}}{2\sqrt{s}}\,. \tag{4}$$
On a aussi
$$s = (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + 2E_a m_b + m_b^2 \Longleftrightarrow E_a = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}\,. \tag{5}$$
Enfin
$$\vec{p}_a^2 = E_a^2 - m_a^2 = \frac{(s - (m_a + m_b)^2)(s - (m_a - m_b)^2)}{4m_b^2} \Longleftrightarrow m_b|\vec{p}_a| = \sqrt{s}|\vec{p}_i^*|\,. \tag{6}$$

3. On a $t = (p_a^* - p_1^*)^2 = m_a^2 - 2(E_a^*E_1^* - |\vec{p}_i^*||\vec{p}_f^*|\cos\theta^*) + m_1^2$. Les valeurs de E_a^*, E_1^*, $|\vec{p}_i^*|$ et $|\vec{p}_f^*|$ sont fixées par la conservation de l'énergie impulsion, donc indépendantes de θ^* et ϕ^*, par conséquent
$$\mathrm{d}t = 2|\vec{p}_i^*||\vec{p}_f^*|\mathrm{d}\cos\theta^*\,. \tag{7}$$
On en déduit (on rappelle que $\phi = \phi^*$ et que $\mathrm{d}\Omega^* = -\mathrm{d}\cos\theta^*\mathrm{d}\phi^*$)
$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^*}\left|\frac{\mathrm{d}\Omega^*}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi}\right| = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2 s}\frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|}\frac{1}{2|\vec{p}_i^*||\vec{p}_f^*|} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{128\pi^2 s\vec{p}_i^{*2}}\,. \tag{8}$$
La valeur absolue n'est là que par convention parce que l'on veut que le résultat soit positif : c'est une densité que l'on calcule.

4. Pour la première partie de la question il suffit d'écrire t dans le référentiel du laboratoire de deux façons différentes,

$$t = (p_b - p_2)^2 = (p_a - p_1)^2\,, \tag{9}$$

puis de développer les carrés en utilisant le fait que $\vec{p}_b = \vec{0}$ et que $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_1 = |\vec{p}_a||\vec{p}_1|\cos\theta$:

$$t = m_2^2 - 2E_bE_2 + m_b^2 = m_a^2 + m_1^2 - 2E_1E_a + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|\cos\theta\,, \tag{10}$$

et enfin d'utiliser le fait que $E_b = m_b$ et la conservation de l'énergie $E_2 = E_a + E_b - E_1$ pour obtenir

$$t = m_2^2 - m_b^2 + 2m_b(E_1 - E_a) = m_a^2 + m_1^2 - 2E_1E_a + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|\cos\theta\,. \tag{11}$$

On veut ensuite prendre une variation infinitésimale des égalités précédentes, il faut se rappeler que E_a est fixée (on l'a calculée à la question 2.) mais que E_1 et $|\vec{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$ ne le sont pas. Cela donne

$$\mathrm{d}t = 2m_b\mathrm{d}E_1 = -2E_a\mathrm{d}E_1 + 2|\vec{p}_a|\frac{\mathrm{d}|\vec{p}_1|}{\mathrm{d}E_1}\mathrm{d}E_1\cos\theta + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|\mathrm{d}\!\cos\theta\,. \tag{12}$$

Puisque $\mathrm{d}|\vec{p}_1|/\mathrm{d}E_1 = E_1/|\vec{p}_1|$, la deuxième égalité implique bien

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\!\cos\theta} = \frac{|\vec{p}_a||\vec{p}_1|^2}{(E_a + m_b)|\vec{p}_1| - E_1|\vec{p}_a|\cos\theta}\,. \tag{13}$$

5. En utilisant les résultats des questions précédentes et le fait que $\mathrm{d}t = 2m_b\mathrm{d}E_1$ on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E_1}\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\!\cos\theta} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{128\pi^2 s\vec{p}_i^{*2}} \times 2m_b \times \frac{|\vec{p}_a||\vec{p}_1|^2}{(E_a + m_b)|\vec{p}_1| - E_1|\vec{p}_a|\cos\theta}\,. \tag{14}$$

Comme en outre $s\vec{p}_i^{*2} = m_b^2\vec{p}_a^2$ (d'après la question 2.) c'est bien le résultat demandé. Dans cette formule il faut bien noter que non seulement $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ mais aussi E_1 et $\vec{p}_1^2 = E_1^2 - m_1^2$ sont des fonctions de θ.

6. Dans ce cas de figure on a

$$m_b = m_p, \quad |\vec{p}_1| \approx E_1, \quad |\vec{p}_a| \approx E_a \tag{15}$$

et l'équation (11) implique

$$E_1 \approx \frac{m_b|\vec{p}_a|}{E_a + m_p - E_a\cos\theta}\,. \tag{16}$$

La section efficace différentielle se simplifie alors en effet en

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \approx \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2}\frac{1}{(E_a + m_p - E_a\cos\theta)^2} \tag{17}$$

où la seule dépendance implicite en θ provient de $|\mathcal{M}_{fi}|^2$.

Exercice 2

1. Dans la limite non relativiste on a

$$E = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \approx m\left(1+\frac{\vec{v}^2}{2}\right), \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \approx m\vec{v}\,. \tag{18}$$

   Par conséquent

$$p_a \cdot p_b = E_a E_b - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b \approx m_a m_b \left(1 + \frac{\vec{v}_a^2 + \vec{v}_a^2 - 2\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b}{2}\right) = m_a m_b \left(1 + \frac{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2}{2}\right) \tag{19}$$

   et

$$F = \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \approx m_a m_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b|\,. \tag{20}$$

2. On commence par remarquer que (on rappelle que $\vec{v} = \vec{p}/E$ pour une particule libre)

$$\begin{aligned} E_a^2 E_b^2 (\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (p_a \cdot p_b)^2 &= E_b^2 \vec{p}_a^2 - 2E_a E_b \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b + E_a^2 \vec{p}_b^2 - (E_a^2 E_b^2 - 2E_a E_b \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b + (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b)^2) \\ &= E_b^2 \vec{p}_a^2 + E_a^2 \vec{p}_b^2 - E_a^2 E_b^2 - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b)^2 \\ &= (m_b^2 + \vec{p}_b^2)\vec{p}_a^2 + (m_a^2 + \vec{p}_a^2)\vec{p}_b^2 - (m_a^2 + \vec{p}_a^2)(m_b^2 + \vec{p}_b^2) - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b)^2 \\ &= \vec{p}_a^2 \vec{p}_b^2 - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2\,. \end{aligned}$$

   Si les impulsions des deux particules sont colinéaires alors $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b = \pm|\vec{p}_a||\vec{p}_b|$ et on a bien

$$E_a^2 E_b^2 (\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 = (p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 = F^2\,. \tag{21}$$

3. Dans le référentiel du centre de masse les deux impulsions sont opposées donc colinéaires et le résultat de la question précédente entraîne

$$F = E_a^* E_b^* (|\vec{v}_a^*| + |\vec{v}_b^*|) = E_a^* E_b^* \left(\frac{|\vec{p}^*|}{E_a^*} + \frac{|\vec{p}^*|}{E_b^*}\right) = (E_a^* + E_b^*)|\vec{p}^*| = \sqrt{s}|\vec{p}^*|\,. \tag{22}$$