Physique des particules – L3

TD 7 (correction)

Exercice 1

1. On commence par remarquer que

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu = \gamma^\mu\gamma^\nu - (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\mu\gamma^\nu) = 2\gamma^\mu\gamma^\nu - 2\eta^{\mu\nu}I_4\,. \tag{1}$$

On peut par conséquent écrire

$$[[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\rho] = 2\,[\gamma^\mu\gamma^\nu - \eta^{\mu\nu}I_4, \gamma^\rho] = 2\,[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho] = 2\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu) \tag{2}$$

On utilise ensuite les relations d'anti-commutation sur le premier terme pour faire passer $\gamma^\mu\gamma^\nu$ à droite et récupérer le second terme :

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho &= \gamma^\mu(\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \gamma^\rho\gamma^\nu) = 2\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu \\ &= 2\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - (\{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} - \gamma^\rho\gamma^\mu)\gamma^\nu \\ &= 2\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$[[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\rho] = 4(\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu) = 4\,(\eta^{\nu\rho}\delta^\mu{}_\sigma - \eta^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\sigma)\,\gamma^\sigma = 4\mathrm{i}(V^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma\gamma^\sigma\,. \tag{3}$$

La dernière égalité peut être vérifiée composante par composante :

$$\mathrm{i}(\eta^{0\rho}\delta^i{}_\sigma - \eta^{i\rho}\delta^0{}_\sigma) = \left\{\begin{array}{l}\mathrm{i} \text{ si } (\rho,\sigma) = (0,i) \text{ ou } (\rho,\sigma) = (i,0) \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right\} = (K^i)^\rho{}_\sigma = (V^{0i})^\rho{}_\sigma \tag{4}$$

et

$$\mathrm{i}(\eta^{1\rho}\delta^2{}_\sigma - \eta^{2\rho}\delta^1{}_\sigma) = \left\{\begin{array}{l}-\mathrm{i} \text{ si } (\rho,\sigma) = (1,2) \\ \mathrm{i} \text{ si } (\rho,\sigma) = (2,1) \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right\} = (J^3)^\rho{}_\sigma = (V^{12})^\rho{}_\sigma\,, \text{ etc.} \tag{5}$$

Si on pose $S^{\mu\nu} = \mathrm{i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/4$ on a ainsi montré que

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = -(V^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma\gamma^\sigma\,. \tag{6}$$

Remarque : Cette relation de commutation permet de montrer que

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}\gamma^\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}V^{\mu\nu}})^\rho{}_\sigma\gamma^\sigma = \Lambda(\omega)^\rho{}_\sigma\gamma^\sigma\,. \tag{7}$$

Il faut pour cela aussi utiliser l'égalité suivante (A et B sont des matrices carrés de même taille)

$$\mathrm{e}^A B\mathrm{e}^{-A} = B + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[A, [A, \cdots, [A, B]] \cdots]}{n!} \tag{8}$$

où dans le n-ième terme il y a n commutateurs.

2. D'après l'équation (1),
$$[[\gamma^\mu,\gamma^\nu],[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]] = 4\,[\gamma^\mu\gamma^\nu - \eta^{\mu\nu}I_4, \gamma^\rho\gamma^\sigma - \eta^{\rho\sigma}I_4] = 4\,[\gamma^\mu\gamma^\nu,\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu)\ . \tag{9}$$
On utilise ensuite les relations d'anti-commutation sur le premier terme pour faire passer $\gamma^\mu\gamma^\nu$ à droite et récupérer le second terme :
$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma &= \gamma^\mu(\{\gamma^\nu,\gamma^\rho\} - \gamma^\rho\gamma^\nu)\gamma^\sigma = 2\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma\\ &= 2\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\sigma - 2\eta^{\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu\\ &= 2\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\sigma - 2\eta^{\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\rho + 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu\\ &= 2\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\sigma - 2\eta^{\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\rho + 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\end{aligned}$$
Enfin on utilise de nouveau l'équation (1) pour remplacer $2\gamma^\alpha\gamma^\beta$ par $[\gamma^\alpha,\gamma^\beta] + 2\eta^{\alpha\beta}$, les termes quadratiques en η s'annulent deux à deux et il reste
$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \eta^{\nu\rho}[\gamma^\mu,\gamma^\sigma] - \eta^{\nu\sigma}[\gamma^\mu,\gamma^\rho] + \eta^{\mu\rho}[\gamma^\sigma,\gamma^\nu] - \eta^{\mu\sigma}[\gamma^\rho,\gamma^\nu] + \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu \tag{10}$$
c'est-à-dire
$$[[\gamma^\mu,\gamma^\nu],[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]] = 4\,(\eta^{\nu\rho}[\gamma^\mu,\gamma^\sigma] - \eta^{\nu\sigma}[\gamma^\mu,\gamma^\rho] + \eta^{\mu\rho}[\gamma^\sigma,\gamma^\nu] - \eta^{\mu\sigma}[\gamma^\rho,\gamma^\nu])\ . \tag{11}$$
Si on pose $S^{\mu\nu} = \mathrm{i}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]/4$ cela se récrit
$$[S^{\mu\nu},S^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\,(\eta^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}S^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}S^{\nu\rho}) \tag{12}$$
qui prouve que l'on a bien une représentation (de dimension 4) de l'algèbre de Lorentz.

Exercice 2 : Spin et équation de Dirac

1. Il suffit de récrire l'équation de Dirac ($\hat{p}_i = -\mathrm{i}\partial/\partial x^i$)
$$\left(\mathrm{i}\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - \gamma^i\hat{p}_i - m\right)\psi = 0 \tag{13}$$
sous la forme
$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_D\psi\,. \tag{14}$$
Pour ce faire, on la multiplie par $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$, le hamiltonien est alors
$$\hat{H}_D = \gamma^0\gamma^i\hat{p}_i + m\gamma^0\,. \tag{15}$$
Cet opérateur est bien hermitien mais son spectre n'est pas borné inférieurement puisque ses valeurs propres sont de la forme $\pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$.
2. On a ($\epsilon_{xyz} = 1$)
$$\begin{aligned}\left[\hat{H}_D,\hat{L}_x\right] &= \left[\gamma^0\gamma^i\hat{p}_i + m\gamma^0, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y\right] = \left[\gamma^0\gamma^y\hat{p}_y,\hat{y}\hat{p}_z\right] - \left[\gamma^0\gamma^z\hat{p}_z,\hat{z}\hat{p}_y\right]\\ &= \gamma^0\gamma^y[\hat{p}_y,\hat{y}]\hat{p}_z - \gamma^0\gamma^z[\hat{p}_z,\hat{z}]\hat{p}_y = \mathrm{i}\left(\gamma^0\gamma^z\hat{p}_y - \gamma^0\gamma^y\hat{p}_z\right)\\ &= \mathrm{i}{\epsilon_{xj}}^k\gamma^0\gamma^j\hat{p}_k\,.\end{aligned}$$

Un calcul similaire pour les deux autres composantes montre que

$$\left[\hat{H}_D, \hat{L}_i\right] = \mathrm{i}\epsilon_{ij}{}^k \gamma^0 \gamma^j \hat{p}_k\,. \tag{16}$$

Cela signifie que le moment angulaire orbital n'est pas préservé pour une particule satisfaisant l'équation de Dirac.

3. Dans la représentation des matrices de Dirac choisie on a

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{17}$$

où σ_x, σ_y et σ_z sont les matrices de Pauli et $\sigma^i = -\sigma_i$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\left[\gamma^0\gamma^i, \hat{S}_j\right] &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & [\sigma^i, \sigma_j] \\ [\sigma^i, \sigma_j] & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\epsilon^i{}_{jk}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\mathrm{i}\epsilon^i{}_{jk}\gamma^0\gamma^k\,.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\left[\hat{H}_D, \hat{S}_i\right] = [\gamma^0\gamma^k\hat{p}_k, \hat{S}_i] = [\gamma^0\gamma^k, S_i]\hat{p}_k = -\mathrm{i}\epsilon_{ij}{}^k\gamma^0\gamma^j\hat{p}_k\,. \tag{18}$$

Finalement

$$\left[\hat{H}_D, \hat{L}_i + \hat{S}_i\right] = 0\,, \tag{19}$$

que l'on interprète comme la conservation du moment cinétique total, somme du moment cinétique orbital et du spin (ou moment cinétique intrinsèque). Pour connaître la valeur du spin s de la particule il suffit de regarder les valeurs propres de $\vec{S}^2$, elles doivent être de la forme $s(s+1)$:

$$\vec{S}^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}I_4 \tag{20}$$

donc la particule a un spin $s = 1/2$.