Physique des particules – L3

TD 9 (correction)

Exercice 1

Il est équivalent de montrer que

$$ {}^{t}R((R\vec{a}) \wedge (R\vec{b})) = (\det R)\vec{a} \wedge \vec{b}\,. \tag{1} $$

La composante i du membre de gauche est donnée par

$$ \begin{aligned} R_{ji}((R\vec{a}) \wedge (R\vec{b}))_j &= R_{ji}\epsilon_{jkl}(R\vec{a})_k(R\vec{b})_l = \epsilon_{jkl}R_{ji}R_{km}R_{ln}a_m b_n \\ &= (\det R)\epsilon_{imn}a_m b_n = (\det R)(\vec{a} \wedge \vec{b})_i. \end{aligned} $$

Pour une matrice orthogonale ($R \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$) cela se récrit aussi

$$ (R\vec{a}) \wedge (R\vec{b}) = (\det R)R(\vec{a} \wedge \vec{b})\,. \tag{2} $$

Cela signifie que si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ se transforment en $R\vec{a}$ et $R\vec{b}$ sous une transformation orthogonale alors $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ se transforme en $(\det R)R\vec{c}$, c'est donc un vecteur axial.

Exercice 2

Lors d'un processus ayant lieu au moyen de l'interaction forte on doit avoir, en plus de la conservation du moment cinétique total, conservation de la parité. La parité d'un état est le produit des parités intrinsèques des particules qui le composent et de $(-1)^l$ où l est la valeur du moment cinétique orbital.

Dans les deux cas envisagés les particules finales ont un spin nul donc le moment cinétique total final se confond avec le moment cinétique orbital final. À l'inverse les particules initiales ont un moment cinétique orbital nul donc leur moment cinétique se confond avec leur spin. La conservation du moment cinétique implique alors, dans l'état final, $l = 1$ pour le premier processus et $l = 0$ pour le second.

Par conséquent on a pour les parités

$$ P(\rho^0) = -1 = P(\pi^+)P(\pi^-)(-1)^{l=1} \tag{3} $$

mais

$$ P(\eta) = -1 \neq P(\pi^+)P(\pi^-)(-1)^{l=0} \tag{4} $$

ce qui justifie que le second processus ne puisse pas avoir lieu via l'interaction forte.

Exercice 3

On rappelle que $P_L = \frac{I_4 - \gamma^5}{2}$ et $P_R = \frac{I_4 + \gamma^5}{2}$ sont des projecteurs ($P_L^2 = P_L$ et $P_R^2 = P_R$) qui vérifient en outre

$$P_L P_R = P_R P_L = 0\,, \quad P_L + P_R = I_4\,, \quad P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L\,. \tag{5}$$

Les spineurs se décomposent en

$$u = u_L + u_R \quad \text{avec} \quad u_L = P_L u \quad \text{et} \quad u_R = P_R u \tag{6}$$

et

$$v = v_L + v_R \quad \text{avec} \quad v_L = P_R v \quad \text{et} \quad v_R = P_L v\,. \tag{7}$$

On dit que u_L et v_L ont une chiralité gauche tandis que u_R et v_R ont une chiralité droite.
Il s'agit pour cet exercice de voir quelles paires de chiralités peuvent donner des contributions non nulles en fonction de l'interaction.

1. Pour l'interaction vectorielle de l'électrodynamique quantique, le courant correspondant à l'interaction e^+e^- est $\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)$, celui correspondant à l'interaction $q\bar{q}$ est $\bar{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4)$.
   Calculons $\bar{v}_R \gamma^\mu u_R$:

$$\begin{aligned}\bar{v}_R\gamma^\mu u_R &= v_R^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_R = (P_L v_R)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_R u_R = v_R^\dagger P_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_R u_R = v_R^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu P_R u_R \\ &= v_R^\dagger \gamma^0 P_R \gamma^\mu P_R u_R = v_R^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_L P_R u_R = 0\end{aligned}$$

   On montre de la même façon que $\bar{v}_L \gamma^\mu u_L = 0$ mais on ne peut rien dire des combinaisons $\bar{v}_R \gamma^\mu u_L$ et $\bar{v}_L \gamma^\mu u_R$ qui peuvent être non nulles. Le terme d'interaction des quarks est similaire, là aussi seules les combinaisons LR et RL de la chiralité peuvent contribuer. Il n'y a finalement que quatre combinaisons de la chiralité qui contribuent à l'interaction vectorielle de l'électrodynamique quantique :

$$LR \to LR\,, \quad LR \to RL\,, \quad RL \to LR\,, \quad RL \to RL\,. \tag{8}$$

2. Si l'interaction était scalaire le terme correspondant à l'interaction e^+e^- serait $\bar{v}(p_1)u(p_2)$, celui correspondant à l'interaction $q\bar{q}$ serait $\bar{u}(p_3)v(p_4)$. Si l'interaction était pseudo-scalaire ces termes seraient respectivement $\bar{v}(p_1)\gamma^5 u(p_2)$ et $\bar{u}(p_3)\gamma^5 v(p_4)$.

   Interaction scalaire On commence avec $\bar{v}_R u_L$:

$$\bar{v}_R u_L = v_R^\dagger \gamma^0 u_L = (P_L v_R)^\dagger \gamma^0 P_L u_L = v_R^\dagger P_L^\dagger \gamma^0 P_L u_L = v_R^\dagger P_L \gamma^0 P_L u_L = \bar{v}_R P_R P_L u_L = 0\,. \tag{9}$$

   On montre de la même façon que $\bar{v}_L u_R = 0$ mais on ne peut rien dire des combinaisons $\bar{v}_R u_R$ et $\bar{v}_L u_L$ qui peuvent être non nulles. Le terme d'interaction des quarks est similaire, là aussi seules les combinaisons LL et RR de la chiralité peuvent contribuer. Finalement pour une interaction scalaire, il n'y a que quatre combinaisons possibles pour la chiralité :

$$LL \to LL\,, \quad RR \to LL\,, \quad LL \to RR\,, \quad RR \to RR\,. \tag{10}$$

Interaction pseudo-scalaire Le calcul est presque le même puisque $[\gamma^5, P_L] = [\gamma^5, P_R] = 0$:

$$\bar{v}_R\gamma^5 u_L = v_R^\dagger\gamma^0\gamma^5 u_L = (P_L v_R)^\dagger\gamma^0\gamma^5 P_L u_L = v_R^\dagger P_L^\dagger\gamma^0\gamma^5 P_L u_L = v_R^\dagger P_L\gamma^0\gamma^5 P_L u_L = \bar{v}_R\gamma^5 P_R P_L u_L = 0\,. \tag{11}$$

La conclusion est donc la même que pour le cas précédent, les seules combinaisons possibles pour la chiralité sont

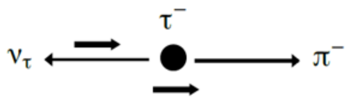
$$LL \to LL\,, \quad RR \to LL\,, \quad LL \to RR\,, \quad RR \to RR\,. \tag{12}$$

Interaction $S-P$ Les termes d'interaction sont maintenant $\bar{v}(1-\gamma^5)u$ pour l'électron et le positron et $\bar{u}(1-\gamma^5)v$ pour le quark et l'antiquark. Le projecteur P_L présent dans l'interaction a pour conséquence d'annuler les contributions avec un électron de chiralité droite ou un antiquark de chiralité gauche. Finalement, avec ce que l'on a fait ci-dessus on en déduit que la seule combinaison qui survit est

$$LL \to RR\,. \tag{13}$$

Exercice 4

Si l'interaction est de la forme $V-A$ on a un projecteur P_L dans le courant donc on ne peut garder que des particules de chiralité gauche et des antiparticules de chiralité droite. Le neutrino étant presque sans masse on peut identifier chiralité et hélicité et comme le spin du neutrino doit être le même que celui du tau initial la seule configuration possible est



Si en revanche l'interaction est de la forme $V+A$, il y a un projecteur P_R dans le courant et on ne peut garder que des particules de chiralité droite et des antiparticules de chiralité gauche. La seule configuration possible est alors