Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : TD n° 5
Fonctionnelles linéaires et distributions

Emmanuel Baudin & Francesco Zamponi

1 Fonctionnelles linéaires

1. Montrer que $F(P) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \cos\theta \frac{dP(\theta)}{d\theta}$ est une fonctionnelle linéaire sur l'espace des polynômes trigonométriques $P(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$.
2. Pour la fonctionnelle $F(P)$ définie au point précedent, et pour le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \overline{P(\theta)} Q(\theta)$, trouver le vecteur f tel que $F(P) = \langle f, P\rangle$.
3. Trouver le polynôme trigonométrique $f(\theta)$ tel que la fonctionnelle $F(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sin 3\theta \frac{d^2 \cos\theta P(\theta)}{d\theta^2}$ peut être représentée comme $F(P) = \langle f, P\rangle$.
4. Etant donnée la suite des fonctionnelles linéaires
$$F_n[\phi] = n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \exp[-n^2(x-1)^2]\phi(x) \ ,$$
Calculer la fonctionnelle $F[\phi] = \lim_{n\to\infty} F_n[\phi]$ pour $\phi \in \mathcal{S}$ (l'espace de Schwartz).

2 Exemples de distributions

1. Quelles sont, parmi les fonctionnelles suivantes, celles qui définissent une distribution ?
$$\langle f, \phi\rangle = \int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$
$$\langle f, \phi\rangle = \int_0^1 |\phi(x)|\,\mathrm{d}x \tag{2}$$
$$\langle f, \phi\rangle = \sum_{n=0}^{N} \phi^{(n)}(0) \quad (f = \delta \text{ si } N = 0) \tag{3}$$
$$\langle f, \phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(0) \tag{4}$$
$$\langle f, \phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(n) \tag{5}$$
$$\langle Ш, \phi\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi(n) \quad \text{(Peigne de Dirac).} \tag{6}$$
2. Calculer les d-dérivées successives de la fonction de Heaviside $H(x)$.
3. Calculer les d-dérivées successives de la fonction $f\ :\ x \to |x|$.
4. Calculer $g(x) = \frac{d^2}{dx^2}\exp(-2|x|)$.
5. Tracer $f(x) = \cos(x)[H(x) - H(x-\pi)]$ et calculer df/dx.
6. Expliciter les distributions $F[\phi] = \langle f, \phi\rangle$ correspondantes à
$$f(x) = x^2\delta^{(2)}(x-1) \qquad \text{et} \qquad f(x) = a(x)\delta^{(1)}(x-1)\ , \quad a(x) \in C^{(1)}$$
7. Trouver le symbole $f(x)$ correspondant à
$$F[\phi] = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{d\mathrm{sign}(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx} = \langle f, \phi\rangle$$
pour $\phi \in \mathcal{S}$.

3 Changement de variables

On va définir des changements de variables dans les distributions. Considérer d'abord le cas d'une distribution s'identifiant à une fonction régulière F, et d'un changement de variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bijectif.

1. Montrer que l'on est amené à définir la distribution $F \circ f$ comme :

$$\langle F \circ f, \phi \rangle = \langle \frac{F}{|f' \circ f^{-1}|}, \phi \circ f^{-1} \rangle \,.$$

2. Que vaut alors la distribution $\delta \circ f$ si l'on étend cette définition ?
3. Motiver la généralisation au cas d'une fonction f non nécessairement bijective — mais toujours dérivable, dont les zéros sont de dérivée non nulle :

$$\langle \delta \circ f, \phi \rangle = \lll \int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(f(x)\big)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x \ggg = \sum_{x\,|\,f(x)=0} \frac{1}{|f'(x)|}\, \phi(x).$$

4. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \delta(x^2 - a^2)\ \phi(x)$ où ϕ est dans $\mathcal{D}$, avec $a > 0$.
5. Calculer l'intégrale $C = \int_{-7}^{4} \mathrm{d}x x^2 \delta(\sin(x))$.
6. Calculer l'intégrale

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_2 \exp[-a^2(p_1^2 + p_2^2)] \delta(p_1^2 + p_2^2 - A^2)$$

pour $a, A \in \mathbb{R}$.

7. Calculer l'intégrale $I = \int_0^4 dx \cos(\pi x) \delta(x^2 + x - 2)$

4 Valeur Principale de Cauchy

L'application

$$\phi \in \mathcal{D} \longmapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

définit une distribution, appelée **valeur principale de Cauchy** ou **partie principale**, et notée

$$\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, \phi \rangle \overset{\text{déf}}{=} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x \,.$$

1. Soit $f(x)$ une fonction continue en $[-R, R]$ et telle que $f(x) = f(-x)$ et $f(0) = 1$. Prouver que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{R} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x \right] = 0$$

Ensuite, prouver que pour $\epsilon \to 0$

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\epsilon^2}^{R} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x \propto \log \epsilon$$

Ce résultat montre que l'intégrale $\int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \frac{f(x)}{x}$ n'est pas definie, d'où l'intérêt de definir la partie principale.

2. Montrer que la valeur principale est la d-dérivée de $\ln |x|$, et que $x \left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right) = 1$.
3. Montrer que de même, on peut définir au sens des distributions une “partie finie” de $1/x^2$, notée $Pf(1/x^2)$, et telle que $x^2 Pf(1/x^2) = 1$. De quoi est-elle la d-dérivée ?