Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr

Correction TD $N^o 5$

1 L'obélisque de la Concorde.

1. On commence par des considérations globales du système.
   L'équilibre des moments est séparé en 2: le moment de la force et celui de la gravité. L'objet va tourner par rapport à son point d'appui $S = 0$. Le moment de F se trouve rapidement avec le bras de levier: $M_F = -Fl\cos(\theta)$.
   Pour la gravité, il faut intégrer le moment de chaque morceau élémentaire de l'obélisque sur toute la structure. Le moment sera alors $M_g = \int_0^L \rho g \cos(\theta) S dS = \rho g \cos(\theta)\frac{L^2}{2}$.
   L'équilibre des moments donne $M_F + M_g = 0$. On en déduit l'expression de la force :
   $$F = \rho g \frac{L^2}{2l}.$$
   Pour l'équilibre des forces, on doit ajouter la réaction du sol. On voit aussi que toutes les forces sont selon l'axe Oy, donc la réaction sera aussi selon cet axe. Prenons cette réaction vers les y positifs. L'équilibre des forces donne $F + R(0) - P = 0$. On en déduit la force de réaction:
   $$R(0) = \rho g L \frac{2l - L}{2l}$$
   On veut que le point $S = 0$ permettent à l'obélisque de prendre appui, donc on doit avoir $R(0) > 0$. Cela donne bien comme condition $l > L/2$.

2. **Local**
   On prends un équilibre local de force, on a alors:
   $$-\underline{R}(S + dS) + \underline{R}(S) + \rho \underline{g} dS = 0$$
   $$\frac{dR(S)}{dS} = -\rho g$$
   On a une discontinuité en l dûe à la force appliquée à l'obélisque. On aura $R(l^+) = R(l^-) + F$. On pourra rapidement vérifier que et $R(L) = 0$. On en déduit l'expression de R:
   $$R(S) = \rho g (L\frac{2l - L}{2l} - S) \text{ pour } S < l,$$
   $$R(S) = \rho g (L - S) \text{ pour } S > l.$$
   On a un moment nul aux extrémités (bord libre + point de rotation), donc $M(0) = M(L) = 0$.
   A cela, on ajoute l'équilibre des moments locaux:
   $$\frac{d\underline{M}}{dS} + \underline{t} \wedge \underline{R} = 0$$
   $$\frac{dM(S)}{dS} = -R(S)\cos(\theta)$$

Pour trouver $M(S)$, on intègre $R(S)$ avec les conditions aux limites. La discontinuité en l est caractérisée par un changement de signe de la dérivée (point de rebroussement).
On trouve:

$$M(S) = \rho g(L\frac{2l-L}{2l} - \frac{S}{2})S\cos(\theta) \text{ pour } S < l,$$
$$M(S) = -\frac{\rho g}{2}(L^2 - 2LS + S^2)\cos(\theta) \text{ pour } S > l.$$

Cut à S
Pour $S > l$: $R(S)$ est le poids de la partie d'abscisse $> S$ et $M(S)$ est le moment du poids de la partie d'abscisse $> S$ càd $R(S)$ avec un bras de levier $\cos(\theta)(L-S)/2$.
Pour $S < l$: On procède aux même considérations, mais en plus on retire la force F pour $R(S)$ et on rajoute le moment de la force F avec un bras de levier $\cos(\theta)(l-S)$ pour $M(S)$.

3. Le système a des extrema du moment en $S = l$ et en $S = S_m$ pour lequel $R(S_m) = 0$. On peut facilement trouver que $S_m = L(1 - L/2l)$.
   Les moments s'expriment alors:

$$M(S = l) = -\rho g\cos(\theta)\frac{(l-L)^2}{2}$$
$$M(S = S_m) = \rho g\cos(\theta)(\frac{L^4}{8l^2} - \frac{L^3}{2l} + \frac{L^2}{2})$$

   On peut étudier l'évolution de ces moments en fonction de la variable l. On remarque alors que $M(S = l)$ et $M(S = S_m)$ ont des monotonies opposées en fonction de l. Le moment extrême minimal se trouve alors pour $M(S = l^{min}) = M(S = S_m^{min})$. On trouve finalement $l = L/\sqrt{2}$.
   On peut aussi réfléchir autrement. Le moment local étant l'intégrale de R (à une constante près), on peut essayer de calculer géométriquement l'aire sous la courbe de R avant S_m et celle après l. Vu que leurs pentes sont les même, ce qui va être important c'est de comparer S_m et l. Le minimum intervient quand elles vont se croiser pour $L - l = S_m$. Cela donne plus facilement $l = L/\sqrt{2}$.