Géométrie Différentielle, TD 6 du 15 mars 2019

1. Compléments sur le crochet de Lie - (À FAIRE AVANT LE TD)

1– Dans $\mathbb{R}^n$, Montrer que $[X,Y](x) = d_xY[X(x)] - d_xX[Y(x)]$.

2– Soit M une variété, $X \in \Gamma(TM)$. Montrer que si pour tout champ de vecteurs $Y \in \Gamma(TM)$, on a $[X,Y] = 0$, alors $X = 0$.

Solution :

1– Direct en utilisant la formule du crochet en coordonnées.

2– En coordonnées locales, on a $0 = [X,Y]_i = \sum_j X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$. En prenant pour Y le champ constant $Y = \frac{\partial}{\partial x_k}$, on obtient $0 = [X,Y]_i = -\frac{\partial X_i}{\partial x_k}$, donc les X_i sont constants. En prenant pour Y le champ $Y = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et comme les X_i sont constants, on obtient $0 = [X,Y]_i = X_i$, et donc $X = 0$.

2. Quelques flots classiques (À FAIRE AVANT LE TD)

Calculer les flots des champs de vecteurs suivants :

1– Sur $\mathbb{R}^n$, $X(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

2– Sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X(x) = \frac{x}{\|x\|}$ (vecteur radial).

3– Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $X(x)$ défini tel que $(\frac{x}{\|x\|}, X(x))$ soit une base orthonormée directe.

4– Sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $X(x) = a\frac{\partial}{\partial x_1} + b\frac{\partial}{\partial x_2}$. Discuter des trajectoires selon que (a,b) est $\mathbb{Q}$-libre ou non.

5– Sur S^2, $X = \psi^*(\frac{\partial}{\partial x_1})$ sur $S^2 \setminus \{N\}$ et $X(N) = 0$, où $\psi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ est la projection stéréographique.

Solution :

1– $\varphi_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$, défini sur $\mathbb{R}$.

2– $\varphi_t(x) = x + t\frac{x}{\|x\|}$, défini sur $]-\frac{1}{\|x\|}, +\infty[$.

3– $\varphi_t(re^{i\theta}) = re^{i\theta + t/r})$, défini sur $\mathbb{R}$.

4– $\varphi_t(\pi(x,y)) = \pi(x + ta, y + tb)$,défini sur $\mathbb{R}$. Si a et b sont $\mathbb{Q}$-liées, les orbites sont périodique : si $a = \frac{p}{q}b$, $\varphi_{q/b}(\pi(x,y)) = \pi(x+p, y+q) = \pi(x,y)$.
Si (a,b) est $\mathbb{Q}$-libre, les orbites sont denses. En effet, étant donné $z \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{(z-x+n)/a}(\pi(x,y)) = \pi(z+n, y+(z-x)\frac{b}{a} + n\frac{b}{a}) = \pi(z, y+(z-x)\frac{b}{a} + n\frac{b}{a})$. Par densité

de $\mathbb{Z}+\frac{b}{a}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\{\pi(z, y+(z-x)\frac{b}{a}+n\frac{b}{a}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\{z\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et donc $\{\varphi_t(\pi(x,y)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

5– On commence par vérifier que le champ est bien C^∞ (laissé au lecteur). Si $x = N$, alors $\varphi_t(x) = x$, défini sur $\mathbb{R}$. Si $x \in S^2 \setminus \{N\}$, en posant $\psi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, on a $\varphi_t(x) = \psi^{-1}(x_1 + t, \ldots, x_n)$, défini sur $\mathbb{R}$.

3. Redressement d'un champ de vecteurs

On montre qu'un champ de vecteurs sans point d'annulation sur une variété peut être représenté localement par un champ de vecteurs constant.

1– Soit X un champ de vecteurs C^∞ défini sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $X(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Notons φ_t le flot local de X. Montrer que l'application $F(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

2– Soit G un inverse local de F au voisinage de l'origine. Calculer G_*X.

3– Soit M une variété C^∞ de dimension n, X un champ de vecteurs C^∞ sur M, et $x \in M$ tel que $X(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ψ entre un voisinage U de x dans M et un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\psi_*X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}|_V$.

4– En déduire qu'il existe des champs de vecteurs $X_2, \cdots, X_n$ tels que $(X, X_2, \cdots, X_n)$ soit une base de l'espace tangent sur un voisinage de x.

Solution :

1– On calcule la différentielle de F en 0 :
$$\frac{\partial}{\partial x_1}F(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 \mapsto \varphi_{x_1}(0)) = X(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}F(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \mapsto (0, \cdots, 0, x_i, 0 \cdots, 0)) = \frac{\partial}{\partial x_i}$$
Donc $dF(0) = Id$, donc par le théorème d'inversion locale, F est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

2– Soit $y = F(x)$.
$F_*\frac{\partial}{\partial x_1}(y) = dF_{(x_1,\cdots,x_n)}(\frac{\partial}{\partial x_1}) = \frac{\partial}{\partial x_1}F(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 \mapsto \varphi_{x_1}(0, x_2, \cdots, x_n))_{|(x_1,\cdots,x_n)} = X(\varphi_{x_1}(0, x_2, \cdots, x_n)) = X(y)$.
Donc $F_*\frac{\partial}{\partial x_1} = X$, d'où $G_*X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

3– Soit $f : M \to \mathbb{R}^n$ une carte locale de M en x : f est un difféomorphisme entre un voisinage de x dans M et un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Quitte à composer f avec un isomorphisme linéaire, on peut supposer $f_*X(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. On a alors, d'après les questions précédentes, G un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^n, 0)$ vers $(\mathbb{R}^n, 0)$ tel que $G_*(F_*X) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. En posant $\psi = G \circ f$, on obtient le résultat voulu.

4– Soit ψ comme dans la question précédente. On pose, au voisinage de x,

$$X_i = \psi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i})$$

et on vérifie que ces vecteurs conviennent.

Remarque : On peut répondre à la question 4 directement. Il suffit de se donner des champs de vecteurs X_2, X_n au voisinage de x tels que la famille $(X_1, \dots, X_n)$ soit libre au point x dans T_xM. Cela reste alors vrai sur un petit voisinage de x.

4. Transitivité des difféomorphismes

1– Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $||x||, ||y|| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $||z|| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.

2– Soit M une variété de dimension n et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.

3– Soit M une variété connexe. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.

4– Soit M une variété connexe de dimension $\geqslant 2$, et soit $k \geqslant 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k-transitivement sur M : si $x_1, \dots, x_k \in M$ sont distincts et si $y_1, \dots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Solution :

1– Considérons le champ de vecteurs X constant égal à $y - x$. Soit ρ tel que $||x||, ||y|| < \rho < r$ et notons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction plateau égale à 1 sur $B(0, \rho)$ et égale à 0 hors de $B(0, r)$. Posons $Y = fX$. Le flot de Y est défini pour tout temps, par le théorème des bouts. En effet, hors de $B(0, r)$, il est constant, de sorte qu'il ne peut sortir de tout compact.

Notons φ le flot de Y au temps 1. Il vérifie les propriétés voulues.

2– On choisit un voisinage U de x difféomorphe à $\mathbb{R}^n$; on l'identifie à $\mathbb{R}^n$ de sorte que x en soit l'origine. On pose V la boule unité ouverte dans U. Montrons que V convient.

Soit $y \in V$. Par la question précédente, on trouve un difféomorphisme φ de U envoyant x sur y, et qui peut se prolonger en un difféomorphisme de M en posant $\varphi(z) = z$ pour $z \notin U$.

3– La question précédente montre que les orbites de l'action du groupe des difféomorphismes sont ouvertes. Comme M est connexe, et partitionnée en orbites, il ne peut y avoir qu'une orbite, égale à M tout entier.

4– On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$, c'est le résultat ci-dessus. Si c'est vrai pour $k-1$, on considère un difféomorphisme ψ envoyant x_i sur y_i pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Posons $x = \psi(x_k)$. On va construire un difféomorphisme ψ' tel que $\psi'(y_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $\psi'(x) = y_k$. On pourra alors poser $\varphi = \psi' \circ \psi$.

On considère pour cela l'action sur M du groupe des difféomorphismes fixant $y_1, \dots, y_{k-1}$. En raisonnant comme dans les questions précédentes (et en particulier en exploitant la connexité de $M \setminus \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$, vraie car $\dim(M) \geqslant 2$), on montre qu'il agit transitivement sur $M \setminus \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$, ce qui conclut.

5. Dilatation d'un champ de vecteurs

On considère X un champ de vecteurs défini sur une variété M.

1– Montrer qu'il existe une fonction lisse f strictement positive de M dans $\mathbb{R}$ telle que fX est un champ de vecteurs complet.

2– Comparer les trajectoires de X et fX.

Solution :

Le lemme fondamental est le suivant : soient $K \subset L$ deux compacts de $\mathbb{R}^n$ tels que K est contenu dans l'intérieur de L. Soit ε tel que pour tout x dans K, le flot de X partant de x est défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et est à valeurs dans L. Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}^n$; notons C son maximum sur L. Alors le flot de fX partant de $x \in K$ est défini sur $]-\varepsilon/C, \varepsilon/C[$ et est à valeurs dans L.

Démonstration. Notons $\varphi(t,x)$ le flot de X défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times K$. On cherche le flot de fX sous la forme $\psi(t,x) = \varphi(s(t,x), x)$ où s est définie sur un voisinage de $\{0\} \times K$, est à valeurs dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et vérifie $s(0,x) = 0$, pour tout x dans K. On doit avoir

$$\partial_t \psi(t,x) = f(\psi(t,x)) X(\psi(t,x)),$$

soit

$$\partial_t s(t,x) X(\psi(t,x)) = f(\psi(t,x)) X(\psi(t,x)),$$

ce qui sera satisfait dès que

$$\partial_t s(t,x) = f(\varphi(s(t,x), x)).$$

C'est une équation différentielle en la fonction s. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une constante $\alpha > 0$ tel que $s(t,x)$ est défini sur $]-\alpha, \alpha[\times K$ et est à valeurs dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Si $\alpha < \varepsilon/C$, alors comme $\varphi(s(t,x), x) \in L$, on a $|\partial_t s(t,x)| \leqslant C$, d'où $|s(t,x)| \leqslant Ct$, pour $|t| \leqslant \alpha$. Cette inégalité prouve qu'on peut augmenter la valeur de α, de telle sorte que $s(t,x)$ est encore à valeurs dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Donc, on peut supposer $\alpha = \varepsilon/C$.

Finalement, on a montré que le flot de fX est donné par $\psi(t,x) = \varphi(s(t,x), x)$, où $s(t,x)$ est définie sur $]-\varepsilon/C, \varepsilon/C[\times K$.

□

Considérons alors une suite exhaustive de compacts $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$. On a donc $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ et $\mathbb{R}^n = \bigcup_i K_i$. Notons $L_i = K_i - \overset{\circ}{K}_{i-1}$ et $M_i = K_{i+1} - \overset{\circ}{K}_{i-2}$ de sorte que M_i est un voisinage compact de L_i. Soit ε_i une constante positive telle que le flot de X démarrant en tout point $x \in L_i$ reste dans M_i pendant un temps ε_i. Soit alors f une fonction strictement positive telle que $|f| \leqslant \varepsilon_i$ sur M_i (une telle fonction existe). D'après ce qui précède, le flot de fX démarrant en un point de L_i reste dans M_i pendant un temps au moins 1. En particulier, le flot reste dans un compact en temps fini, donc est défini sur tout $\mathbb{R}$.

On a vu au cours de la preuve que les trajectoires de fX et de X étaient les mêmes, après reparamétrage. Soyons plus précis :

Définition 1. *Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Soit x un point de $\mathbb{R}^n$, notons I l'ouvert maximal de définition du flot de X, partant de x. Notant $\varphi(t,x)$ ce flot, défini pour $t \in I$, on appelle* trajectoire *de x pour le champ X l'image $\varphi(I,x)$.*

Les trajectoires d'un champ de vecteurs X forment une partition de $\mathbb{R}^n$, par les propriétés du flot d'un champ de vecteurs. Montrons que, si f est une fonction strictement positive, alors les trajectoires du champ X et du champ fX sont les mêmes.

On a vu précédemment que si $\psi(t,x)$ est le flot de fX et $\varphi(t,x)$ celui de X, alors $\psi(t,x) = \varphi(s(t,x),x)$, pour une certaine fonction s et pour un temps t assez petit. Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, il existe un ouvert U_x de la trajectoire de x pour le champ fX tel que U_x contient x et est contenu dans la trajectoire de x pour le champ X. Ceci implique que toute la trajectoire de x pour le champ fX est contenue dans la trajectoire de x pour le champ X.

En effet, soit y dans la trajectoire de x pour le champ fX, écrivons $y = \psi(t_0,x)$. Pour tout t dans $[0,t_0]$, considérons U_t un ouvert de la trajectoire de $z_t := \psi(t,x)$ pour le champ fX (égale par définition à la trajectoire de x pour le champ fX) tel que U_t contient z_t et U_t est contenu dans la trajectoire de z_t pour le champ X. Par compacité de $[0,t_0]$, il existe des temps $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = t_0$ tels que les U_{t_i} recouvrent $\psi([0,t_0],x)$. On peut de plus supposer les intersections $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}}$ non vides. Alors, par construction, $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}}$ est contenu à la fois dans la trajectoire de z_{t_i} pour le champ X et dans la trajectoire de $z_{t_{i+1}}$ pour le champ X. Par une récurrence immédiate, toutes ces trajectoires doivent être les mêmes, nécessairement égales à la trajectoire de x pour le champ X. Finalement, y est bien dans la trajectoire de x pour le champ X.

On a montré l'inclusion des trajectoires du champ fX dans les trajectoires du champ X. En raisonnant avec $1/f$, on montre l'inclusion réciproque.

6. Dérivation du flot selon le champ de vecteurs

Soit M variété de dimension n, X champ de vecteurs sur M et φ_t son flot. Soit $x \in M$ et $]-a,b[\subset \mathbb{R}$ l'intervalle sur lequel $\varphi_t(x)$ est défini. Montrer que :

$$\forall t \in]-a,b[, T_x\varphi_t(X(x)) = X(\varphi_t(x))$$

Solution :
Vérifions d'abord que cet énoncé fait sens même si le champ de vecteur X n'est pas complet. Soit $t \in]-a, b[$. Comme le domaine $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ de définition du flot est ouvert et contient (x, t), il contient un certain $U \times \{t\}$ où $U \subseteq M$ est un voisinage ouvert de x. Le flot définit donc une application $\varphi_t : U \to M$ de classe C^∞. On calcule ensuite que :

$$\begin{aligned} T_x\varphi_t(X(x)) &= T_x\varphi_t \frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi_s(x) \\ &= \frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi_{t+s}(x) \\ &= X(\varphi_t(x)) \end{aligned}$$

7. Flot d'un champ de vecteurs incompressible

Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, de coordonées $(X^1, \dots, X^n)$. Il est dit *incompressible* si sa divergence est nulle, c'est-à-dire si $\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x_i} \equiv 0$. Montrer qu'alors la différentielle (spatiale) du flot de X a pour déterminant 1.

Solution :
Soit V un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sur lequel le flot est défini. Par définition, en tout point de V,

$$\partial_t\varphi(t, x) = X(\varphi(t, x)).$$

Dans ce qui suit, d^s désigne la différentielle spatiale d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. En différentiant spatialement l'égalité précédente, il vient :

$$\partial_t d^s_x\varphi(t, \cdot) = d_{\varphi(t,x)}X \circ d^s_x\varphi(t, \cdot),$$

où X est vu comme une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Notons $D(t, x) = \det d_x\varphi(t, \cdot)$. On rappelle que la différentielle du déterminant est donné par la formule :

$$d_M \det(H) = \mathrm{Tr}(\widetilde{M}H),$$

où $\widetilde{M}$ est la comatrice de M, égale à $\det(M).M^{-1}$ si M est inversible. En particulier, si $A : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ est un chemin de matrices et si $f(t) = \det(A(t))$, on a la formule :

$$\partial_t f(t) = \mathrm{Tr}(\widetilde{A}(t)\partial_t A(t)).$$

On peut maintenant calculer $\partial_t D(t, x)$:

$$\partial_t D(t, x) = \mathrm{Tr}((d^s_x)^{-1}\varphi(t, \cdot) \times d_{\varphi(t,x)}X \circ d^s_x\varphi(t, \cdot)) \times \det d^s_x\varphi(t, \cdot).$$

En faisant commuter les matrices à l'intérieur de la trace, il vient :

$$\partial_t D(t, x) = \mathrm{Tr}(d_{\varphi(t,x)}X) \times \det d^s_x\varphi(t, \cdot).$$

Mais l'hypothèse d'incompressibilité se traduit par $\mathrm{Tr}(dX) = 0$, donc $D(t, x)$ est constant en t. Comme par définition, $D(0, x)$ est le déterminant de l'identité, cela conclut l'exercice.