Géométrie Différentielle, TD 7 du 22 mars 2019

1. Questions-diverses - A FAIRE AVANT LE TD

1– Soit $f : M \to N$ une immersion entre deux variétés. Montrer que pour tout $x \in M$, il existe $U \subseteq M$ ouvert contenant x tel que $f_{|U}$ est un plongement.

2– Soit $f : M \to N$ une application lisse et surjective, $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$ des champs de vecteurs tels que $f_\star X_i = Y_i$ au sens où pour tout $x \in M$, on a $Tf \circ X_i = Y_i \circ f$. Si $[X_1, X_2] = 0$, a t'on $[Y_1, Y_2] = 0$? A t'on la réciproque ?

Soit G un groupe de Lie connexe.

3– Montrer que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local en 0.

4– En déduire que le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est G.

5– Donner un exemple où $\exp : \mathfrak{g} \to G$ n'est pas surjective.

Solution :

1– Utiliser le théorème de forme normale des immersions : localement une immersion est une inclusion donc un plongement.

2– OUI dans le premier cas. En effet, notons $\varphi_1^M(t,x)$ et $\varphi_2^M(t,x)$ les flots associés à X_1, X_2 sur M, $\varphi_1^N(t,y)$ et $\varphi_2^N(t,y)$ les flots associés à Y_1, Y_2 sur N. On va montrer que les flots φ_i^N, $i = 1,2$ commutent localement. On remarque que $f \circ \varphi_{i,t}^M = \varphi_{i,t}^N \circ f$. Soit $x \in M$. Comme $[X_1, X_2] = 0$, on a pour $s, t \in \mathbb{R}$ assez petits que

$$\varphi_{2,-s}^M \circ \varphi_{1,-t}^M \circ \varphi_{2,s}^M \circ \varphi_{1,t}^M(x) = x$$

puis en appliquant f et en utilisant l'équivariance par rapport aux flots :

$$\varphi_{2,-s}^N \circ \varphi_{1,-t}^N \circ \varphi_{2,s}^N \circ \varphi_{1,t}^N(f(x)) = f(x)$$

Les flots φ_i^N, $i = 1,2$ commutent donc localement au voisinage de $f(x)$. On en déduit que $[Y_1, Y_2](f(x)) = 0$. Comme f est surjective, cela conclut.

La réciproque est FAUSSE. Considérer $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1$ et des champs de vecteurs X_i à valeurs dans $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ qui ne commutent pas. Leurs projections Y_i sont nuls donc commutent.

3– Soit $X \in \mathfrak{g}$. On a

$$T_e \exp(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(tX) = X.$$

Donc $T_e \exp = Id_{\mathfrak{g}}$ et exp est un difféomorphisme local en 0

4– Soit $A = \{\exp(X_1) \dots \exp(X_k) \in G \mid k \in \mathbb{N}, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}\}$ le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$.

l'application $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme d'un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage V de e dans G. Soit $g = \exp(X_1) \dots \exp(X_k) \in A$. Alors gV est un voisinage de g dans G (car L_g difféomorphisme de G). Or tout élément de V s'écrit $\exp(X)$ pour un $X \in U \subset \mathfrak{g}$, donc tout élément de GV s'écrit $\exp(X_1) \dots \exp(X_k) \exp(X)$. On en déduit $gV \subset A$ et donc A est ouvert.

Soit $g \in \bar{A}$. L'ouvert gV est un voisinage de g dans G, donc il existe $g' \in gV$ tel que $g' \in A$. Alors il existe $h \in V$ tel que $g' = gh$ et donc gh s'écrit $gh = \exp(X_1) \dots \exp(X_k)$. Comme $h \in V$, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $h = \exp(X)$. Alors $g = \exp(X_1) \dots \exp(X_k) \exp(-X)$ donc $g \in A$. L'ensemble A est donc fermé.

Bilan : A est un ouvert fermé non vide (contient e) de G connexe, donc $A = G$.

5– Pour $G = GL_2^+(\mathbb{R})$, l'application $\exp : M_2(\mathbb{R}) \to GL_2^+(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. En effet, montrons que la matrice $A := \begin{pmatrix} -1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de exp. Si c'était le cas, il existerait $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Les valeurs propres de B sont de la forme $\lambda_1 = \pm i$, $\lambda_2 = \pm i\sqrt{2}$. De plus leur somme est réelle (comme trace d'une matrice réelle), ce qui est absurde.

2. Commutation des champs de vecteurs

Soit X, Y des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ de flots respectifs φ^X et φ^Y. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on considère l'application $\psi_x : \mathbb{R}^2 \to M$ définie au voisinage de 0 par :

$$\psi_x(s,t) = \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X \circ \varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x).$$

Montrer que $\psi_x(0) = 0$, $d_0\psi_x = 0$ et $d_0^2\psi_x(s,t) = st[X,Y](x)$. Autrement dit, le crochet de deux champs de vecteurs mesure le défaut de commutation de leurs flots à l'ordre 2.

Solution :

1– Comme $\varphi_0^Y = \varphi_0^X = Id$, on a $\forall s, \psi_x(s,0) = x$ et $\forall t, \psi_x(0,t) = x$ donc $\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\psi_x = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0}\psi_x = 0$. Finalement, $\psi_x(0) = x$ et $d_0\psi_x = 0$.

On a $\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(s,t) = Y(\varphi_s^Y \circ \varphi_t^X \circ \varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x)) + d(\varphi_s^Y \circ \varphi_t^X)_{\varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x)}[-Y(\varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x))]$, donc

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(s,0) = Y(\varphi_s^Y \circ \varphi_{-s}^Y(x)) + d(\varphi_s^Y)_{\varphi_{-s}^Y(x)}[-Y(\varphi_{-s}^Y(x))] = Y(x) - (\varphi_s^Y)_*Y(x)$$

et de même

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(0,t) = Y(x) - (\varphi_t^X)_*Y(x).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi_x(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\big(Y(x) - (\varphi_s^Y)_*Y(x)\big) = -\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\big((\varphi_s^Y)_*Y(x)\big) = -[Y,Y](x) = 0$$

et de même

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\psi_x(0,0) = -\frac{\partial}{\partial t}_{|s=0}\big((\varphi_t^X)_*Y(x)\big) = \frac{\partial}{\partial t}_{|s=0}\big((\varphi_t^X)^*Y(x)\big) = [X,Y](x).$$

On montre de manière similaire que $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_x(0,0) = 0$, ce qui achève la preuve.

3. Redressement simultané de champs de vecteurs qui commutent

Soit M une variété et $X_1, \ldots, X_k$ des champs de vecteurs sur M. On suppose qu'au voisinage d'un point $x_0 \in M$, la famille $(X_1(x), \ldots, X_k(x))$ est libre et $[X_i, X_j](x) = 0$ pour $i \neq j$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ψ d'un voisinage U de x_0 vers un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ qui redresse simultanément ces champs de vecteurs, autrement dit tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \quad \psi_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Solution :

On va faire un raisonnement similaire au redressement d'un seul champ de vecteurs. Tout d'abord, dans $\mathbb{R}^n$, supposons que $X_1, \ldots, X_k$ commutent deux à deux et que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}, X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Posons alors

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \cdots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \mapsto \varphi_{x_i}^{X_i}(0))_{|x_i=0} = X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Pour $i \geqslant k+1$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \mapsto Id(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)_{|x_i=0} = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Donc $d_0F = Id$ et F est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Pour $y = F(x)$ et $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a, en utilisant la commutation des flots,

$$\begin{aligned}
F_* \tfrac{\partial}{\partial x_i}(y) &= dF_x(\tfrac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= \tfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i \mapsto \varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \cdots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\right)_{|x_i} \\
&= \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i \mapsto \varphi_{x_i}^{X_i}\varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \varphi_{x_{i-1}}^{X_{i-1}} \circ \varphi_{x_{i+1}}^{X_{i+1}} \cdots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\right)_{|x_i} \\
&= X_i\left[\varphi_{x_i}^{X_i}\varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \varphi_{x_{i-1}}^{X_{i-1}} \circ \varphi_{x_{i+1}}^{X_{i+1}} \cdots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\right] \\
&= X_i\left[\varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \cdots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\right] \\
&= X_i\left[F(x)\right] = X_i(y)
\end{aligned}$$

Donc $F_* \frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$. En notant G l'inverse local de F, on a $G_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Si nous sommes sous les hypothèses de l'énoncé, on se place dans une carte $\psi : U_{x_0} \to \mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0. Quitte à composer ψ avec une application de $GL_n(\mathbb{R})$, on peut supposer que $Y_i := \psi_* X_i$ vérifie $Y_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$. D'après le travail que nous venons de faire, il existe un difféomorphisme G défini au voisinage de 0 tel que $G_* Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. En posant $\Phi = G \circ \psi$, on a défini un difféomorphisme d'un voisinage de x_0 dans M sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie pour tout i :

$$\Phi_* X_i = G_* \psi_* X_i = G_* Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

4. Théorème de Frobénius

Soit M une variété. Une *distribution p-plans* sur M la donnée pour tout $x \in M$ d'un sous-espace vectoriel $E(x) \subseteq T_xM$ de dimension p, telle que la famille $E = (E(x))_{x \in M}$ est lisse au sens où pour tout $x \in M$, il existe $U \subseteq M$ voisinage ouvert de x, et des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ définis sur U tels que $(X_1(y), \ldots, X_p(y))$ est une base de $E(y)$ pour tout $y \in U$.

Une distribution E est dite *intégrable* si pour tout $x \in M$, il existe une sous-variété N de M contenant x tel que $\forall y \in N, T_yN = E(y)$. Cela signifie que la distribution E s'écrit localement comme le fibré tangent d'une sous variété.

1– Montrer qu'une distribution de 1-plans (i.e. un champ de droites) sur M est toujours intégrable.

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Frobénius :

Théorème. Soit E une distribution de p-plans sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) E est intégrable

ii) E est stable par crochet : Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ à valeurs dans E, on a $[X, Y]$ à valeurs dans E

iii) E a des bases locales commutatives : Pour tout $x_0 \in M$, il existe une base locale $(Y_1, \dots, Y_p)$ de E au voisinage de x_0 dont les crochets sont nuls : $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $[Y_i, Y_j] = 0$

2– Montrer que i) implique ii).

3– Montrer que iii) implique i). [on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2]

On suppose désormais ii) et on cherche à prouver iii). On fixe $x_0 \in M$, (U, φ) un carte en x_0 telle que $\varphi(x_0) = 0$. Quitte à choisir U plus petit, on peut supposer qu'il existe $(X_1, \dots, X_p)$ une base de $E_{|U}$. On note $\widetilde{X}_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ le champ de vecteurs X_i lu dans la carte (U, φ). On écrit $\widetilde{X}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ où les coefficients $a_{i,j} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ sont C^∞.

4– Montrer qu'on peut choisir (U, φ) telle que pour tout $i = 1, \dots, p$, $\widetilde{X}_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$, puis telle que la matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est inversible en tout point de $\varphi(U)$.

On note $(b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ l'inverse de $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, puis pour $i = 1, \dots, p$, $\widetilde{Y}_i := \sum_{j=1}^p b_{i,j} \widetilde{X}_j$, et $Y_i := \varphi^\star(\widetilde{Y}_i) \in \Gamma(TU)$.

5– Montrer que $(Y_1, \dots, Y_p)$ est une base de $E_{|U}$ et que $[Y_i, Y_j] = 0$ si et seulement si $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j] = 0$.

6– Montrer que $\widetilde{Y}_i$ est de la forme $\widetilde{Y}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^n c_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$

7– En déduire que $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j]$ est de la forme $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j] = \sum_{k=p+1}^n e_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ puis montrer que les $e_{i,j,k}$ sont nuls en utilisant l'hypothèse ii).

Solution :

1– Soit $x_0 \in M$, $U \subseteq M$ un ouvert contenant x_0, $X \in \Gamma(TU)$ un champ de vecteurs sur U sans point d'annulation et à valeurs dans E. On note $c(t) := \varphi_t(x)$ où φ est le flot associé à X. Le chemin c est définie sur l'intervalle de temps $] - \varepsilon, \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ est assez petit. c est une immersion en $t = 0$ car $c'(0) = X((x_0)) \neq 0$. Quitte à choisir ε suffisamment petit, on peut donc supposer que c est un plongement (th. de forme normale des immersions). On pose $N := \mathrm{Im}(c)$. On a $T_{c(t)}N = \mathbb{R}c'(t) = \mathbb{R}X(c(t)) = E(c(t))$. La sous variété N admet donc $E_{|N}$ pour fibré tangent ce qui conclut.

2– Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$ à valeurs dans E, $x \in M$. Montrons que $[X, Y](x) \in M$. Par hypothèse il existe $N \subseteq M$ une sous-variété tangente de fibré tangent $E_{|N}$ et contenant le point x. Les champs de vecteurs X, Y se restreignent en des champs de vecteurs $X_{|N}, Y_{|N} \in \Gamma(TN)$. On a $[X, Y](x) = [X_{|N}, Y_{|N}](x) \in T_x(N) = E(x)$. D'où le résultat.

3– D'après l'exercice précédent, si E est engendrée au voisinage de x_0 par des champs de vecteurs $Y_1, \dots, Y_k$ qui commutent deux à deux, alors il existe un difféomorphisme ψ défini au voisinage de x_0 tel que $\psi_* Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Alors $N := \psi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ est une sous-variété de M passant par x_0 et $T_x N = \psi^*(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \mathrm{Vect}(\psi^* \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \psi^* \frac{\partial}{\partial x_k}(x)) = \mathrm{Vect}(Y_1(x), \dots, Y_k(x)) = E(x)$. La distribution E est donc intégrable.

4– Pour la suite, c.f. Paulin, cours de géométrie différentielle, preuve du th. de Frobénius page 113, deuxième paragraphe.

5. Deux champs de vecteurs

1– Soient X et Y deux champs de vecteurs sur une variété M de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. Montrer qu'il existe f, g des fonctions C^∞ strictement positives définies au voisinage de x telles que $[fX, gY] = 0$.

2– Le résultat local est-il encore valable si M est de dimension supérieure à 3 ?

Solution :

1– On développe l'équation $[fX, gY] = 0$. C'est équivalent à $fg[X,Y] + f(X.g)Y - g(Y.f)X = 0$. Comme on est en dimension 2, $[X,Y] = aX + bY$, avec des fonctions a et b lisses, uniquement déterminées. On veut donc résoudre les équations (découplées) $Y.f - af = 0$ et $X.g + bg = 0$. Pour montrer qu'une telle équation admet toujours une solution, on peut redresser X en un champ de vecteur constant, choisir une fonction quelconque sur une ligne transverse à la direction du vecteur et se ramener à une EDO en dimension 1.

2– Choisissons X et Y de sorte qu'ils engendrent un champ de 2-plans non intégrable. Alors fX et gY engendrent le même champ de 2-plans. La condition $[fX, gY] = 0$ permettrait d'appliquer le théorème de Frobenius pour montrer son intégrabilité. C'est absurde.

6. Une hypersurface compacte voit tout

Soit M une hypersurface compacte C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $f : M \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x \mapsto T_xM^\perp$. Montrer que f est une application C^∞ surjective.

Solution :

Voir le *Cours de Géométrie différentielle élémentaire* de Frédéric Paulin, exercice 62 (solution page 86).