Formation Interuniversitaire de Physique

(L3) *(Année 2012/2013)*

Examen de "Mathématiques pour physiciens"

(29 janvier 2013 –durée : 3h00)

Barème approximatif :

Exercice I	:	17%
Exercice II	:	17%
Exercice III	:	30%
Exercice IV	:	36%

Les calculatrices, téléphones et autres appareils électroniques ne sont pas autorisés

3 pages imprimées

Par défaut, les notations sont celles du cours

Les exercices sont totalement indépendants

Exercice I *Intégrales et résidus*

A. On considère l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x e^{i\alpha x}}{1+x^2}$$

avec α un réel *strictement négatif*. La calculer par la formule des résidus en précisant bien le contour choisi et en justifiant la raison de ce choix.

B. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{\cos z}$$

1. Déterminer les singularités de $f(z)$ le long de l'axe réel positif.
2. Déterminer les résidus des pôles sur l'axe réel positif.
3. Calculer l'intégrale $I = \oint f(z)\mathrm{d}z$ le long d'un cercle de centre $(\pi/4, 0)$ et de rayon $\pi/3$.
4. Calculer l'intégrale $J = \int_{-i\infty}^{i\infty} f(z)\mathrm{d}z$ le long de l'axe imaginaire en justifiant bien les opérations effectuées.

Exercice II *Transformation de Fourier*

Soit $f(x,y)$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$\forall x \lim_{y\to+\infty} f(x,y) = 0 \qquad\qquad f(x,0) = g(x) \tag{2}$$

où g est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ donnée. On cherche les solutions intégrables et deux fois différentiables en x et y.

1. Soit $\tilde{f}(k,y)$ la transformée de Fourier de $f(x,y)$ par rapport à x. Que vaut en termes de $\tilde{f}$ la transformée de Fourier de $\partial^2 f/\partial x^2$ par rapport à x ?
2. Montrer que $\tilde{f}(k,y)$ satisfait une équation différentielle en y et que, compte tenu des conditions aux bords (2), sa solution est de la forme $A(k)e^{\alpha(k)y}$ où on précisera les expressions de $A(k)$ et $\alpha(k)$.
3. Calculer la transformée de Fourier $\tilde{h}(k,y)$ de $h(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$ par rapport à x et exprimer $\tilde{f}(k,y)$ en termes de $\tilde{g}(k)$ et $\tilde{h}(k,y)$.
4. En déduire l'expression de $f(x,y)$ comme une intégrale
$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,x';y)g(x')\mathrm{d}x' \tag{3}$$
où on précisera l'expression de K.

Exercice III *Probabilités : distribution de Gumbel*

On considère une variable aléatoire réelle Y uniformément distribuée entre 0 et 1.

1. Que vaut sa fonction de répartition $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y)$?
2. On construit alors la v.a. $X = \phi(Y)$ où ϕ est la fonction définie sur $[0,1]$ par $\phi(y) = -\ln(-\ln y)$. Montrer que la fonction ϕ est une fonction monotone croissante $[0,1] \to \mathbb{R}$ et écrire explicitement sa fonction inverse ϕ^{-1}.
3. En déduire la fonction de répartition $F_X(x)$ de la v.a. X. On dit que la v.a. X est distribuée selon la loi de Gumbel standard.
4. Calculer la densité de probabilité $f(x)$ de la v.a. X.
5. Comparer la décroissance vers 0 de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.
6. Déterminer le "mode" (maximum de la fonction $f(x)$) de la distribution de Gumbel standard.
7. Tracer l'allure du graphe de f en prenant en compte les deux informations précédentes.
8. Au vu de ce graphe, s'attend-on à une valeur moyenne $\langle X\rangle$ positive, nulle ou négative ?
9. Montrer que les moments de cette distribution peuvent s'écrire comme $\langle X^n\rangle = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} F_X(x)\mathrm{d}x\Big|_{t=1}$.
Se rappelant la définition de la fonction Γ d'Euler
$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} u^{t-1}e^{-u}\mathrm{d}u$$
ramener par un changement de variable le calcul des moments à celui des dérivées successives en $t=1$ de $\Gamma(t)$.
10. Gauss a montré que
$$\Psi(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-tu}}{1-e^{-u}}\right)\mathrm{d}u\,. \tag{4}$$
Sans chercher à calculer la valeur numérique de $\langle X\rangle$, montrer que la variance de X s'exprime en termes de $\Psi'(1) = \int_0^{\infty} u\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\mathrm{d}u$.
Développant l'intégrand en série de e^{-u}, calculer $\operatorname{var} X$ en termes de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La distribution de Gumbel décrit l'occurrence d'événements extrêmes, tels des tremblements de terre, inondations etc de très grande magnitude.

Exercice IV *Théorème de Rouché*

A. Soit f une fonction holomorphe dans un domaine ouvert Ω en dehors d'un nombre fini de pôles. Soit γ un chemin fermé simple contenu dans Ω, orienté dans le sens positif, et sur lequel f n'a ni pôle ni zéro.

On se propose de calculer l'intégrale

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z \,. \tag{5}$$

1. Soit z_0 un **zéro** d'ordre m_0 de f. Écrivant $f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z)$ où g est holomorphe et non nulle dans un voisinage de z_0, calculer $I(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$ pour un contour γ_0 n'entourant aucun autre pôle ou zéro de f que z_0.
2. Soit z_p un **pôle** d'ordre p_0 de f. Montrer par un raisonnement similaire que l'on peut calculer $I(z_p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$ pour un contour γ_p n'entourant aucun autre pôle ou zéro de f que z_p.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I(\gamma)$ de (5).
4. Supposons que $f(z)$ est un polynôme de degré N. Quelle est la limite quand $R \to \infty$ de $I(\gamma_R)$ où γ_R est le cercle de rayon R centré à l'origine ? Quel théorème fondamental déduit-on de la comparaison de ce résultat avec celui du A.3 ?
5. Supposons maintenant que f est holomorphe à l'intérieur et sur le contour γ. Pourquoi la fonction $\log f(z)$ est-elle multivaluée ? Soit $\Delta_\gamma[\arg f(z)]$ la variation de $\arg f(z)$ le long de γ. Utiliser les résultats de 1.–3. pour calculer
$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma[\arg f(z)] \,.$$

B. Avec les mêmes notations que précédemment, soient f et g deux fonctions holomorphes à l'intérieur et sur le contour γ. On suppose que sur γ, $|g(z)| < |f(z)|$ et on veut démontrer alors le théorème de Rouché

Théorème. *$f(z)$ et $f(z) + g(z)$ ont le même nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité) à l'intérieur de γ.*

1. Montrer qu'avec les hypothèses, ni f ni $f + g$ n'ont de zéro sur γ.
2. Exprimer $\Delta_\gamma \left[\arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \right]$ en termes des nombres de zéros à l'intérieur de γ de f et $f + g$.
3. Montrer en utilisant l'inégalité $|g(z)| < |f(z)|$ que, pour $z \in \gamma$, le point $\zeta = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ est à l'intérieur du disque unité centré en 1. Quelle conséquence en tire-t-on sur les valeurs possibles de $\arg \zeta$ et sur $\Delta_\gamma \left[\arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \right]$?
4. En déduire le théorème de Rouché.
5. Application. Soit g une fonction holomorphe dans un ouvert Ω contenant le disque unité fermé $|z| \leq 1$ et satisfaisant $|g(z)| < 1$ sur le cercle $|z| = 1$.
Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $g(z) - z^n$ admet exactement n zéros à l'intérieur du disque.