Cours de physique quantique
examen de mi-semestre

23 novembre 2018

1 Particule dans un puits infini

On considère une particule de masse m au sein d'un puits quantique 1D dont le potentiel est donné par $V(x) = 0$ si $|x| \in [0, L]$, $V(x) = \infty$ ailleurs.

1. *Cas classique* : on considère dans un premier temps que la particule obéit à la mécanique classique.
   (a) Décrire qualitativement la trajectoire de la particule.
   (b) On note E l'énergie de la particule. Calculer en fonction de E son impulsion puis le temps mis pour faire un aller-retour entre les parois de la cavité.
2. On considère à présent le cas où la particule est décrite par la mécanique quantique. On admet que le confinement dans un puits de profondeur infinie revient à imposer la condition $\psi(0) = \psi(L) = 0$.
   (a) Écrire l'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ pour un état stationnaire d'énergie E.
   (b) En déduire les énergies propres et fonctions propres du puits en représentation position.
   (c) Exprimer les états propres en représentation impulsion. Comparer avec le cas classique.
   (d) On prépare le système dans une superposition cohérente des états $|n\rangle$ et $|n+1\rangle$ à l'instant initial, n étant fixé. Quel est l'état de la particule à l'instant t?
   (e) Calculer les moyennes des observables position et impulsion. Montrer qu'elles évoluent périodiquement et préciser leur période d'évolution T_n.
   (f) A quelle condition sur n retrouve-t-on la période d'évolution classique? Préciser si le mouvement est classique lorsque cette condition est vérifiée.

2 Franges de Ramsey dans une fontaine atomique

1. *Question préliminaire.* On considère un système à deux niveaux dont les vecteurs $|a\rangle$ et $|b\rangle$ forment une base de l'espace des états. L'évolution du système est décrite par le hamiltonien

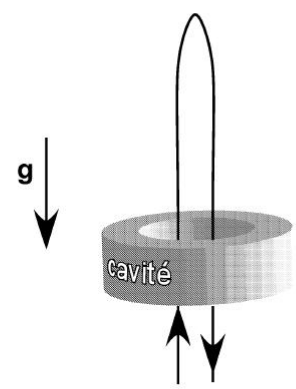
$$\widehat{H} = \frac{\hbar\delta}{2}\left(-|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right) + \hbar\Omega\left(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|\right). \tag{1}$$

   (a) Ecrire les éléments de matrice de $\widehat{H}$ dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$.

(b) Calculer les valeurs propres $E_\pm$ de $\widehat{H}$ en fonction de $\widetilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2/4}$.

(c) Dans le cas où $\delta = 0$, montrer que les vecteurs propres de $\widehat{H}$ sont $|\Psi_\pm\rangle = (|a\rangle \pm |b\rangle)/\sqrt{2}$.

2. Dans une fontaine atomique, on fait interagir un jet vertical d'atomes en vol libre avec des photons piégés dans une cavité. Les atomes sont envoyés vers le haut avec une vitesse initiale v_0, traversent une première fois la cavité en un temps τ, évoluent ensuite en vol libre pendant un temps T avant de traverser la cavité une seconde fois.

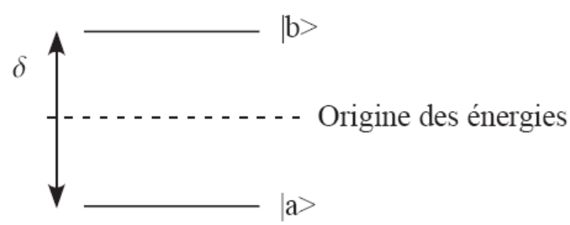


Dans ce qui suit, on ne considérera que deux niveaux atomiques f et e (pour fondamental et excité) séparés d'une énergie $E_a = \hbar\omega_a$. On notera ω la pulsation des photons de la cavité et on notera $\delta = \omega - \omega_a$.

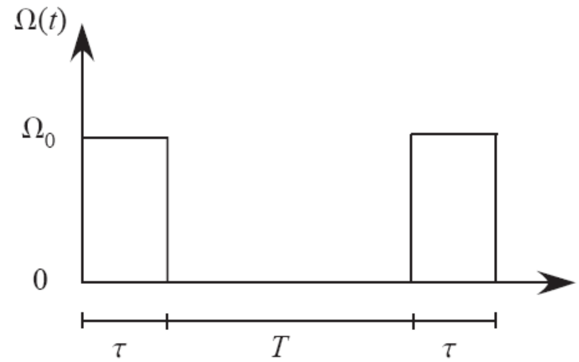
Enfin, on suppose que l'espace des états du système atome+photon est engendré par les vecteurs $|\alpha, N_i\rangle$, où $\alpha \in \{\mathrm{e}, \mathrm{f}\}$ et $N_i \in \mathbb{N}$, correspondent respectivement à l'état de l'atome et au nombre de photons dans la cavité.

(a) À $t = 0$, on prépare le système dans l'état $|\mathrm{f}, N\rangle$. En considérant les processus possibles d'absorption et d'émission de photons par l'atome, montrer que l'évolution du vecteur d'état se déroule dans le sous-espace $\mathcal{E}_N$ engendré par $|a\rangle = |\mathrm{f}, N\rangle$ et $|b\rangle = |\mathrm{e}, N-1\rangle$.

(b) Montrer que par un choix judicieux de l'origine des énergies, les niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ ont des énergies $\pm\hbar\delta/2$:



(c) On admet que la restriction à l'espace $\mathcal{E}_N$ du hamiltonien du système atome+champ peut s'écrire sous la forme (1), avec Ω dépendant du temps selon l'évolution ci-dessous :



Justifier physiquement cette forme de hamiltonien.

(d) On suppose $\delta \ll \Omega_0$ et $\Omega_0\tau = \pi/4$. Justifier qu'on peut supposer que $\delta = 0$ pour étudier l'évolution du vecteur d'état entre les temps 0 et τ. Calculer l'état du système au temps τ en décomposant le vecteur d'état initial $|a\rangle$ sur la base propre trouvée au 1(c). Montrer qu'il vaut $(|a\rangle - i\,|b\rangle)/\sqrt{2}$.

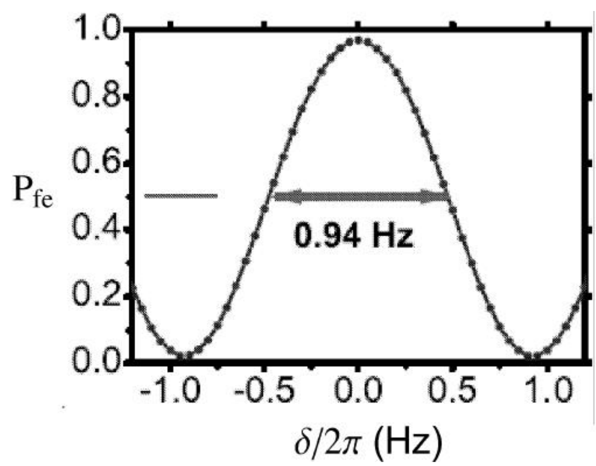
(e) Exprimer le vecteur d'état au temps $T + \tau$ dans la base $|a\rangle, |b\rangle$.

(f) Calculer le vecteur d'état au temps $T + 2\tau$ de manière analogue au calcul du vecteur au temps τ.

(g) Montrer que la probabilité de trouver l'atome dans l'état excité après la deuxième traversée de la cavité vaut

$$P_{\text{fe}} \sim \cos^2(\delta T/2).$$

(h) On obtient le résultat présenté sur la figure ci-dessous.



En supposant le mouvement du centre de masse des atomes décrit par la mécanique newtonienne, calculer la vitesse v_0 des atomes dans la cavité. A quelle température cette vitesse correspond-elle ? Commentaire.