Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr, salle L273

TD N^o2: Diagramme de Mohr des contraintes

1 Interprétation géométrique des contraintes

Soit un élément de volume infinitésimal en 2 dimensions soumis à un champ de contrainte représenté par $\underline{\underline{\sigma}}$. On se place dans le repère $\left(O, \underline{x_1}, \underline{x_2}\right)$ correspondant au repère des directions principales. En d'autres termes, le tenseur des contraintes dans ce repère s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Soit un plan P parallèle à $\underline{x_3}$, de normale $\underline{n}$ orientée d'un angle α par rapport à la direction $\underline{x_1}$ (voir Fig. 1). Le vecteur contrainte $\underline{T}$ agissant sur le plan orienté peut se décomposer en une composante normale σ_n et une composante tangentielle τ dans le repère $(O, \underline{n}, \underline{t})$.

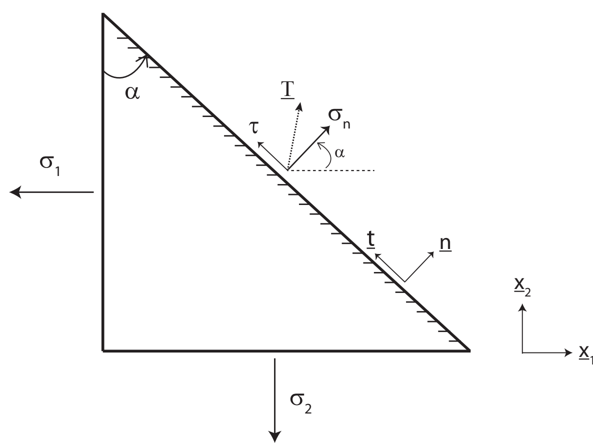

Figure 1: Vecteur contrainte T agissant sur un plan incliné.

1. Déterminer les invariants de la contrainte exercée.
2. Montrer que cette contrainte peut s'écrire comme la somme d'une contrainte isotrope et d'un cisaillement pur que l'on représentera.
3. À partir du tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$, exprimer les composantes normale et tangentielle σ_n et τ en fonction de α, σ_1 et σ_2.
4. Quel est le lieu des points de coordonnées $(\sigma_n(\alpha), \tau(\alpha))$? Cette figure géométrique est appelée diagramme de Mohr. Caractériser et construire cette figure.
5. Déterminer l'orientation des plans sur lesquels la contrainte de cisaillement τ est maximum.

6. Dessiner le cercle de Mohr d'un élément (figure 2) soumis à :
   - une compression uniaxiale.
   - une traction uniaxiale.
   - une charge hydrostatique.

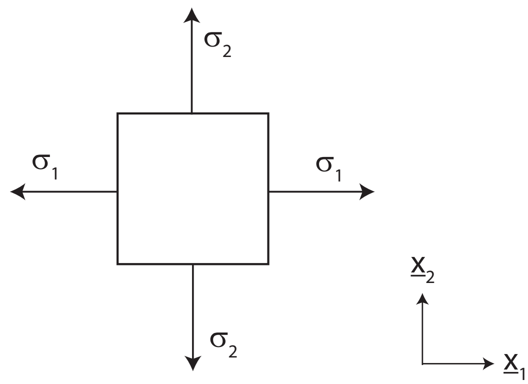

Figure 2: Element 2-D soumis à une contrainte principale (σ_1, σ_2).

7. Dessiner le cercle de Mohr d'un élément soumis à du cisaillement pure, i.e.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

2 Application du diagramme de Mohr

Soit un élément de volume en 2-D soumis à un champ de contraintes représenté par $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le repère $\left(O, \underline{x_1}, \underline{x_2}\right)$ correspondant au repère des directions des contraintes principales. Ce champ de contrainte admet comme représentation de Mohr (σ_n, τ) un cercle centré en ($\sigma_n = -12$ MPa , $\tau = 0$ MPa) et de rayon 5 MPa.

Soit un plan P' dont la normale n' est orienté d'un angle $\alpha' = (\underline{x_1}, \underline{n'})$.

Soit un plan P'' de normale n''. Sur ce plan s'applique une contrainte normale $\sigma_n = -10.5$ MPa et une contrainte de cisaillement $\tau > 0$.

1. Quelles sont les valeurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 ?
2. A l'aide du diagramme de Mohr et par le calcul, donner les valeurs de σ_n et τ s'appliquant sur P' lorsque $\alpha' = \pi/3$. Interpréter ces résultats en termes de contraintes compressive/extensive.
3. Trouver, à l'aide du diagramme de Mohr et par le calcul, l'angle α'' pour le plan P''. En déduire la valeur de la contrainte de cisaillement τ agissant sur ce plan P''. Retrouver cette valeur τ à l'aide du diagramme de Mohr.

3 Les critères de rupture

Soit un élément de volume en 2-D soumis à un champ de contrainte représenté par $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le repère $\left(O, \underline{x_1}, \underline{x_2}\right)$ correspondant au repère des directions des contraintes principales.

1. Dessiner le cercle de Mohr dans le cas d'un essai de compression uniaxiale.
2. Dessiner l'évolution du cercle de Mohr quand la contrainte uniaxiale augmente.
3. Critère de Tresca : L'état de limite élastique est atteint lorsque la contrainte de cisaillement τ atteint une valeur critique τ_{max}. Dessiner dans le diagramme des contraintes (σ_n, τ) le domaine élastique. En déduire l'orientation des plans de rupture.
4. Le critère de Tresca est adapté pour les métaux, mais non pour les roches. En effet pour des roches, la résistance au cisaillement augmente avec le confinement (compression isotrope). On utilisera pour les roches le critère de Mohr-Coulomb, définit par :

$$|\tau| = \sigma_n \tan \phi + C$$

   où C est la cohésion, et ϕ l'angle de frottement interne. Dessiner le domaine élastique. En déduire l'orientation des plans de rupture.

En général, $\phi \approx 30^o$.