



Examen de mécanique analytique (L4)

Les deux parties contribueront de manière équivalente à la note finale. **Merci de les traiter sur des copies séparées.**

Les copies présentant des sous-parties traitées en profondeur seront valorisées, à l'inverse des tentatives de « grapillage ».

On prendra garde à toujours indiquer les variables des fonctionnelles L , H , S , \mathcal{L} , \mathcal{H} considérées.

1 Formation de rides sous l'effet d'une compression

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement d'une membrane inextensible lorsqu'elle est soumise à une force de compression. La première partie s'intéresse au problème unidimensionnel de la déformation d'une membrane flexible posée à la surface d'un bain liquide, comprimée dans une direction (en réduisant la distance entre ses deux extrémités). La seconde partie cherche à modéliser l'apparition de rides à la surface d'un film élastique étiré dans une direction, ce qui cause une compression du film dans la direction transverse. Pour ce deuxième problème on ne considère plus de bain liquide sous la membrane.

1.1 Problème uni-dimensionnel : membrane sur un bain liquide

On considère une membrane flexible mais inextensible posée sur un bain liquide. La membrane sera comprimée selon l'axe Oy , et on supposera que le problème est invariant par translation selon Ox . Soit ℓ la largeur de la membrane selon Ox , et W la longueur initiale selon Oy . On impose aux extrémités d'être rapprochées selon l'axe Oy d'une distance $\Delta \ll W$. La membrane initialement plane va se déformer selon l'axe Oz (ascendant), et adopter une forme minimisant l'énergie totale du système composé de la membrane et du bain liquide. Cette énergie totale est la somme de l'énergie de courbure de la membrane et de l'énergie potentielle du liquide sous-jacent (la surface du bain liquide étant déterminée par la forme de la membrane, une apparition de rides au niveau de la membrane cause un déplacement de liquide, donc un changement de l'énergie potentielle de pesanteur du liquide).

On donne l'expression de l'énergie de courbure (*bending*) U_B et de l'énergie potentielle de pesanteur du liquide sous-jacent U_p :

$$U_B = \frac{\ell B}{2} \int_A^B (\partial_s \phi)^2 ds \quad \text{et} \quad U_p = \frac{\ell K}{2} \int_A^B h^2 \cos \phi ds \quad (1)$$

où s est une abscisse curviligne, h le déplacement vertical local (selon l'axe Oz), ϕ l'angle local entre l'horizontale et la surface, B une constante appelée raideur de courbure, et K une constante reliée à la masse volumique du substrat. A et B sont les positions repérant les extrémités de la membrane selon l'axe Oy .

1. Faire un schéma du système étudié, sur lequel vous représenterez les grandeurs locales ϕ et h , ainsi que les variations dy , dh et ds .
2. Justifier l'expression de U_p .
3. Donner les dimensions de B et K . On se placera ensuite dans les unités où $\ell = B = K = 1$.
4. À cause de la compression, la distance entre les deux extrémités de la membrane selon l'axe Oy est $W - \Delta$. Exprimer la contrainte d'inextensibilité en égalant Δ à une intégrale curviligne faisant intervenir $\cos \phi$.

5. Exprimer $\partial_s h$ en fonction de ϕ . On admettra qu'on peut traiter h et ϕ comme variables indépendantes à condition d'ajouter un terme $\int_A^B Q(s)(\partial_s h - \sin \phi) ds$ à l'action. Quel est le rôle de $Q(s)$?
6. En déduire une action dont la minimisation selon ϕ et h donnera la solution du problème (en prenant en compte toutes les contraintes). Écrire le lagrangien $L(s, \phi, \partial_s \phi, h, \partial_s h)$ le plus simple correspondant.
7. Calculer les impulsions conjuguées et le hamiltonien équivalent.
8. Exprimer les équations de Hamilton, et montrer que l'une se met sous la forme

$$\partial_s^3 \phi + \left(\frac{(\partial_s \phi)^2}{2} + P \right) \partial_s \phi + h = 0 \quad (2)$$

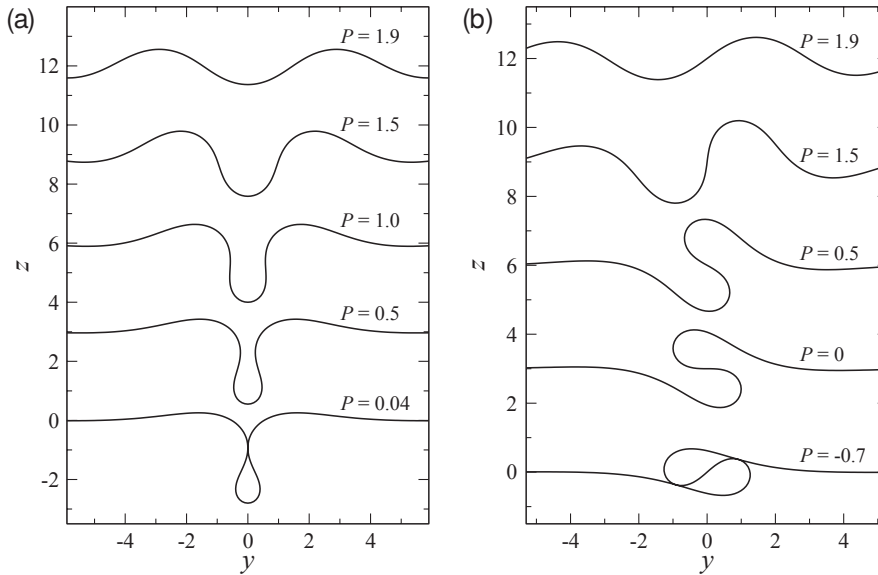
où P est un coefficient dont on justifiera la présence.

9. En déduire une équation d'ordre 4 uniquement en fonction de ϕ .
10. Intégrer une première fois cette équation, montrer qu'elle se met sous la forme

$$\partial_s^3 \phi \partial_s \phi - \frac{1}{2} (\partial_s^2 \phi)^2 + f(\partial_s \phi) \frac{(\partial_s \phi)^2}{2} + 1 - \cos \phi = 0 \quad (3)$$

avec $f(\partial_s \phi)$ une fonction polynomiale d'ordre 2 à déterminer.

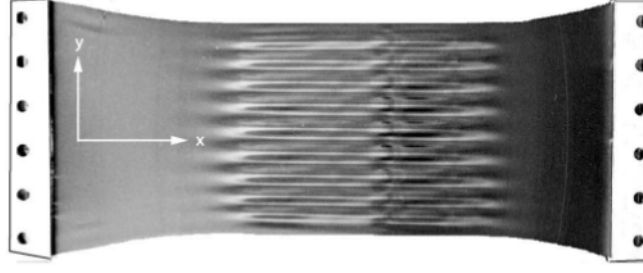
Il est possible de résoudre explicitement cette équation, mais la méthode est assez pénible. Ci-dessous sont représentées différentes solutions pour cette équation. Pour des P proches de la valeur critique 2, on observe un profil sinusoïdal. Cependant, lorsque P diminue, c'est-à-dire lorsque Δ augmente, le profil change et toute la déformation se concentre au centre du profil.



1.2 Effet à deux dimensions

On observe également des rides lorsqu'on étire une membrane élastique selon l'axe Ox car cela produit par réaction une compression selon l'axe perpendiculaire Oy , et peut conduire à la formation de rides selon le même phénomène que dans la partie précédente.

On étudie la situation sur la figure ci-dessous, où un film est étiré selon Ox et libre selon Oy . Dans ce problème, on oublie l'effet du bain liquide sous la membrane, et on supposera la membrane inextensible selon Oy .



La hauteur $h(x, y)$ n'est maintenant plus prise comme une fonction de l'abscisse curviligne, mais est entendue comme un champ scalaire. On admet que selon l'axe Oy , la condition d'inextensibilité s'écrit :

$$\int_0^W \left[\frac{1}{2} (\partial_y h)^2 - \frac{\Delta(x)}{W} \right] dy = 0 \quad (4)$$

où $\Delta(x)$ est comme dans la partie précédente la compression selon l'axe Oy par rapport à la longueur W ; comme on le voit sur la figure ci-dessus, celle-ci peut dépendre de la position x . La fonctionnelle à minimiser s'écrit maintenant

$$\mathcal{U} = \frac{B}{2} \int_S (\partial_y^2 h)^2 dS + \frac{1}{2} \int_S f(x) (\partial_x h)^2 dS - \int_S b(x) \left[\frac{1}{2} (\partial_y h)^2 - \frac{\Delta(x)}{W} \right] dS. \quad (5)$$

1. Interpréter chacun des termes de \mathcal{U} . Donner en particulier la dimension et une interprétation physique de la fonction $f(x)$.
2. Exprimer la densité lagrangienne \mathcal{L} associée au problème. Dans ce problème, les équations pour les champs vues en cours et en TDs ne sont plus valides, dériver **explicitement** les nouvelles équations d'Euler-Lagrange pour cette densité lagrangienne.
3. En déduire que la fonction h vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$B \partial_y^4 h - f(x) \partial_x^2 h + b(x) \partial_y^2 h = 0. \quad (6)$$

4. Justifier que l'on cherche une solution sous la forme $h(x, y) = \sum_n A_n \cos(k_n y + \phi_n) X_n(x)$, avec $k_n = \frac{2\pi n}{W}$, et donner les conditions aux limites associées aux fonctions X_n .
5. Établir l'équation différentielle vérifiée par les fonctions X_n , en faisant apparaître la pulsation

$$\omega_n^2 = \frac{b(x) - B k_n^2}{f(x)} k_n^2 \quad (7)$$

6. La résoudre en supposant b et f constantes, et ne conserver que la solution minimisant la courbure du problème. En déduire l'expression de ω_n ne faisant pas apparaître n .

Trouver la solution générale nécessite une approche numérique. L'objectif des questions suivantes est de trouver une loi d'échelle pour la longueur d'onde et l'amplitude des rides. Pour cette raison, on considère dans la suite $h \sim A \cos(ky + \phi) X(x)$ en se rappelant que les k possibles sont les k_n définis précédemment ; et on cherche des relations entre λ , A , et les paramètres du système.

7. Déduire de la relation d'inextensibilité un lien entre A et k . Commenter cette relation en faisant apparaître λ .
8. Montrer que l'énergie totale peut s'écrire

$$\mathcal{U} = B k^2 \Delta L + \frac{\pi^2 f \Delta}{k^2 L} \quad (8)$$

9. En déduire une loi d'échelle entre λ , L , et les paramètres physiques du problème. Commenter cette relation.

Références

- H. Diamant & T.A. Witten, Compression Induced Folding of a Sheet : An Integrable System, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 164302 (2011).
- E. Cerda & L. Mahadevan, Geometry and Physics of Wrinkling, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 074302 (2003).

2 Oscillateurs couplés

2.1 Machine d'Atwood

On considère la machine d'Atwood représentée figure 1 : un fil passant sur une poulie relie deux masses m_1 et m_2 . Le fil est supposé de masse négligeable et non élastique, sa longueur est donc constante. La poulie est également supposée de moment d'inertie négligeable et sans frottement. La position de la masse m_1 par rapport à sa position initiale est repérée par $x(t)$. L'accélération de la pesanteur est notée g .

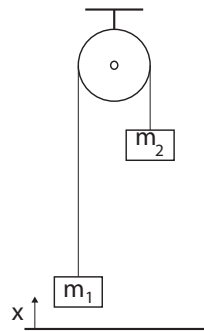


FIGURE 1 – Machine d'Atwood

1. Écrire le Lagrangien du système en fonction de x , \dot{x} , m_1 , m_2 et g . En déduire l'équation de Lagrange.
2. Retrouver le résultat précédent en exprimant la conservation de l'énergie. Pourquoi a-t-on conservation de l'énergie ?
3. Indiquer sur un schéma les forces s'appliquant aux deux masses et à la poulie. Comment retrouvez-vous les résultats précédents dans le cadre du principe fondamental de la dynamique ?

2.2 Pendules couplés

On utilise le dispositif précédent pour coupler deux pendules (voir le schéma de la figure 2). On suppose que m_1 se déplace suivant la verticale et que m_2 effectue des oscillations d'amplitude $\theta(t)$. On note $r(t)$ la longueur du deuxième pendule. On prend $m_1 = m_2 = m$.

1. Écrire le Lagrangien du système en fonction de r , \dot{r} , θ , $\dot{\theta}$, m et g .
2. En déduire les équations de Lagrange pour r et θ .
3. Linéariser les équations de Lagrange pour \dot{r} et θ petits. m_1 et m_2 ont une vitesse initiale nulle et $\theta(t=0) = \epsilon$ petit. Intégrer les équations pour r et θ .

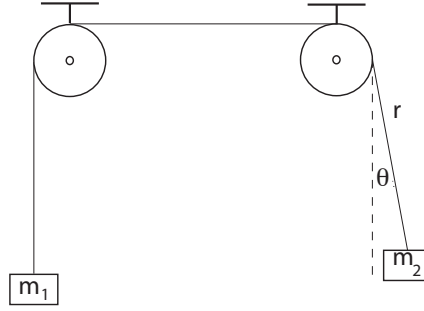


FIGURE 2 – Pendules couplés

4. Donner l'expression de l'équation de Lagrange pour r en gardant les termes non linéaires d'ordre le plus bas en θ et $\dot{\theta}$.
5. En utilisant la solution approchée trouvée pour θ , déterminer l'accélération de m_1 en fonction de ϵ et g , en l'évaluant en moyennant sur une période d'oscillation. Dans quel sens se déplace la masse m_1 .
6. Si la masse m_1 n'est pas maintenue sur la verticale, pensez-vous qu'elle va se mettre à osciller ?

2.3 Transfert d'énergie entre oscillateurs couplés non linéairement

On considère trois oscillateurs couplés non linéairement. Le Lagrangien du système est

$$L = \sum_{k=1}^3 (\dot{x}_k^2 - \omega_k^2 x_k^2) - V x_1 x_2 x_3. \quad (9)$$

Initialement, un seul oscillateur possède une amplitude d'oscillation finie, les deux autres sont au repos. On veut déterminer dans quelles conditions cet oscillateur peut exciter les deux autres. Il faudra pour cela analyser la stabilité linéaire des deux oscillateurs au repos.

1. Écrire les équations de Lagrange pour les amplitudes des 3 oscillateurs, $x_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$).
2. On cherche à résoudre approximativement ce système d'équations par la méthode des échelles multiples. Il faut pour cela que les amplitudes soient faibles. On note $x_k(t) = \epsilon y_k(t, T)$ avec $T = \epsilon t$ et $\epsilon \ll 1$. Écrire les équations pour les $y_k(t, T)$.
3. On cherche des solutions sous la forme,

$$y_k(t, T) = y_k^{(0)}(t, T) + \epsilon y_k^{(1)}(t, T) + \epsilon^2 y_k^{(2)}(t, T) + \dots \quad (10)$$

Écrire les équations pour les $y_k^{(0)}(t, T)$.

4. Montrer que les solutions à l'ordre 0 sont données par :

$$y_k^{(0)}(t, T) = A_k(T) \exp i\omega_k t + \bar{A}_k(T) \exp -i\omega_k t. \quad (11)$$

5. Écrire les équations pour les $y_k^{(1)}(t, T)$ obtenues à l'ordre suivant.
6. En écrivant les conditions de solvabilité, montrer que les amplitudes complexes $A_k(T)$ sont constantes sauf si les pulsations ω_k obéissent à des relations que l'on déterminera.

7. On considère les équations

$$2i\omega_1 \frac{dA_1}{dT} = V A_2 A_3, \quad (12)$$

$$2i\omega_2 \frac{dA_2}{dT} = V A_1 \bar{A}_3, \quad (13)$$

$$2i\omega_3 \frac{dA_3}{dT} = V A_1 \bar{A}_2. \quad (14)$$

Quelle est la relation entre les ω_k qui doit être satisfaite ?

8. Quelle symétrie impose-t-elle que le coefficient de proportionnalité entre chaque dérivée et le terme non linéaire correspondant soit imaginaire pur ?
9. On suppose que l'on a initialement l'oscillateur (1) excité : $A_1 = A_1^{(0)}$ et $A_2 \simeq 0$, $A_3 \simeq 0$. Linéariser les équations pour A_2 et A_3 .
10. Chercher des solutions $A_2 = A_2^{(0)} \exp sT$ et $A_3 = A_3^{(0)} \exp sT$ et donner les solutions pour s . Montrer que la solution initiale est instable i.e. que les amplitudes des oscillateurs (2) et (3) augmentent exponentiellement en fonction du temps.
11. On suppose à présent que l'oscillateur (2) est initialement excité, les deux autres étant au repos. Cette solution est-elle stable ? Même question dans le cas de l'oscillateur (3).
12. Quelle est la condition sur les pulsations pour qu'un oscillateur puisse exciter les deux autres ?
13. On pose $N_k = \omega_k |A_k|^2$. Montrer les relations de Manley-Rowe, $N_1 + N_2 = C$, $N_1 + N_3 = C'$ où C et C' sont des constantes. Donner l'interprétation physique de ces relations.
14. Montrer que $N_1 \omega_1 + N_2 \omega_2 + N_3 \omega_3$ est constant. Que représente cette quantité ?

2.4 Couplage gyroscopique (les calculs sont un peu longs)

On considère le pendule double représenté figure 3. Les masses m_1 et m_2 sont reliées par des barres solides de longueur l et de masse négligeable. Les deux pendules sont astreints à osciller dans des plans perpendiculaires. Leurs angles par rapport à la verticale sont respectivement θ_1 et θ_2 . L'ensemble du dispositif est en rotation autour de l'axe vertical $0z$, (angle $\phi(t)$). On note $\mu^2 = m_2/(m_1 + m_2)$. L'accélération de la pesanteur est notée g .

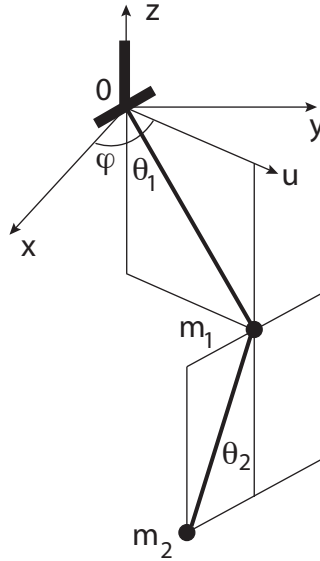


FIGURE 3 – Couplage gyroscopique

1. Donner les expressions des coordonnées des masses m_1 et m_2 en fonction de l , θ_1 , θ_2 et $\phi(t)$.
2. Donner l'expression du Lagrangien
3. Écrire les équations de Lagrange pour θ_1 et θ_2 .
4. On suppose que le dispositif tourne à vitesse angulaire constante $\dot{\phi} = \Omega$ et que les pendules sont initialement suivant la verticale. Linéariser les équations de Lagrange dans la limite θ_1 et θ_2 petits. Montrer que l'on obtient les équations

$$\ddot{\theta}_1 = \left(\Omega^2 - \frac{g}{l} \right) \theta_1 - 2\mu^2 \Omega \dot{\theta}_2, \quad (15)$$

$$\ddot{\theta}_2 = 2\Omega \dot{\theta}_1 + \left(\Omega^2 - \frac{g}{l} \right) \theta_2. \quad (16)$$

5. Chercher les solutions pour θ_1 et θ_2 en $\exp st$. Donner l'équation pour s et indiquer la localisation dans le plan complexe des solutions pour s dans le cas où Ω est faible. Montrer que lorsque Ω atteint une valeur critique Ω_c , la solution $\theta_1 = \theta_2 = 0$ devient instable. Comment sont les solutions pour s dans le plan complexe lorsque $\Omega = \Omega_c$?