Géométrie Différentielle, TD 13 du 17 mai 2019

1. Questions diverses - A FAIRE AVANT LE TD

Soient M et N des variétés connexes compactes orientées de dimension $n \geqslant 1$ et $f : M \to N$ une application lisse.

1– Montrer que si f n'est pas surjective alors $\deg f = 0$ (il s'agit de détailler la démonstration du théorème 21.4 vu en cours dans ce cas précis). Que dire de la réciproque ?

2– Le degré de f est il nécessairement dans $\mathbb{Z}$?

3– Soit $i \in \mathbb{Z}$. Construire un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ s'annulant en l'origine et seulement en l'origine, et d'indice i en l'origine.

4– On considère $\mathbb{S}^2$ comme réunion de $\mathbb{R}^2$ et du point à l'infini ∞. Considérons un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et qui est d'indice i en 0. Quel est son indice en ∞ ?

Solution :

1– Si f n'est pas surjective, alors le complémentaire de son image est un ouvert non vide $V \subseteq N$. On se donne $\alpha \in \Omega^n N$ à support dans V tel $\int_N \alpha = 1$. Le degré de f est alors donné par $\deg f = \int_M f^\star\alpha = 0$ car $f^\star\alpha = 0$.

La réciproque est fausse. Se donner une fonction $f : S^1 \to S^1$ telle que : si x fait un tour de S^1, $f(x)$ fait une fois le tour de S^1 dans le sens positif puis une fois le tour de S^1 dans le sens négatif. f est homotope à une application constante donc de degré nul.

2– Oui d'après le théorème 21.4 du cours.

3– On peut prendre par exemple $X(z) = z^i$ en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

4– On peut appliquer le théorème de Poincaré-Hopf. On a : $\mathrm{ind}_0 + \mathrm{ind}_\infty = \chi(\mathbb{S}^2) = 2$. Ainsi, l'indice en ∞ vaut $2 - i$.

2. Degré d'une application

1– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞ qui coïncide avec l'identité hors d'un compact.
—Montrer que f se prolonge en une application C^∞ $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.
—Calculer $\deg(\widetilde{f})$.
—Montrer que f est surjective.

2– Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes, avec Q non nul.
—Montrer que P/Q induit une application C^∞ $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
—Calculer $\deg(f)$.

Solution :

1– Comme f coïncide avec l'identité hors d'un compact, f se prolonge en $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ en posant $\widetilde{f}(\infty) = \infty$. $\widetilde{f}$ est bien C^∞ car f et l'identité sont C^∞.

Soit K ce compact, et soit x une valeur régulière de $\widetilde{f}$ dans l'ouvert complémentaire de $K \cup f(K)$. Alors x possède un et un unique antécédent par $\widetilde{f}$: lui-même. De plus, $d_x\widetilde{f} = \mathrm{Id}$ préserve l'orientation. Ceci montre que $\deg(\widetilde{(f)}) = 1$.

Alors, si f nétait pas surjective, soit $x \in \mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à son image. C'est une valeur régulière de $\widetilde{f}$ sans antécédents par $\widetilde{f}$. Ceci montre $\deg(\widetilde{f}) = 0$: c'est une contradiction.

2– Ecrivons $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, où ces deux polynômes sont sans facteurs communs, et où $a_m, b_n \neq 0$. On prolonge la fonction P/Q qui est a priori définie hors des zéros de Q et du point à l'infini $[1:0]$ par la valeur $[1:0]$ en les zéros de Q. On la prolonge également en $[1:0]$ par la valeur $[0:1]$ si $m < n$, la valeur a_m/b_n si $m = n$, et la valeur $[1:0]$ si $m > n$.

On vérifie que cette fonction est C^∞ en utilisant la carte $z \mapsto 1/z$ au voisinage de $[1:0]$. En changeant de carte au but, la nouvelle expression de P/Q est Q/P, qui est bien C^∞ et nulle en les zéros de Q. En changeant de carte à la source, la nouvelle expression de P/Q est $P(1/z)/Q(1/z)$, qui est C^∞ et prend en zéro la bonne valeur si $m \leqslant n$. Le dernier cas se traite de même, en changeant de carte à la source et au but.

La fonction P/Q est holomorphe, donc préserve l'orientation. Le degré de P/Q est donc le cardinal de l'image réciproque d'un élément général λ de $\mathbb{C}$. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ suffisament général (par exemple tel que $P([1:0]) \neq \lambda$, ...). On cherche à compter le nombre de racines de $P(x) - \lambda Q(x)$. Si λ n'est pas de la forme $P(z)/Q(z)$ pour un z tel que $P(z)Q'(z) = Q(z)P'(z)$, ce polynôme est à racines simples, et a donc exactement $\max(m,n)$ racines. Ainsi, $\deg(f) = \max(m,n)$.

3. Applications de la sphère dans elle-même

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ dont le degré n'est pas $(-1)^{n+1}$. Montrer que f admet un point fixe.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré impair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.

3– Soit $x \in \mathbb{S}^n$ et $U \subset \mathbb{S}^n$ un ouvert non vide. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ et une application C^∞ $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tels que f réalise un difféomorphisme entre V et $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$, et que $f(\mathbb{S}^n \setminus V) = \{x\}$.

4– Soit $d \in \mathbb{Z}$. Déduire de la question précédente qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même.

Solution :

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ sans point fixe. L'application $(t,x) \mapsto \frac{-tx+(1-t)f(x)}{||-tx+(1-t)f(x)||}$ est alors une homotopie entre f et l'antipodie. Comme l'antipodie a degré $(-1)^{n+1}$, on a $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ telle qu'il n'existe pas $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$. Alors $(t,x) \mapsto \frac{t/2f(-x)+(1-t/2)f(x)}{||t/2f(-x)+(1-t/2)f(x)||}$ est une homotopie entre f et $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Cette dernière application a toutes ses fibres de cardinal pair. En particulier, son degré pair. Ceci montre que $\deg(f)$ est pair.

3– Quitte à restreindre U, on peut supposer que U est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. On choisit alors $V = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. D'autre part, on écrit $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Il est alors facile de construire $f : U = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ à la main en la choisissant de la forme $y \mapsto \rho(||y||^2)$.

4– Supposons $d \geqslant 0$. On choisit un point $x \in \mathbb{S}^n$ et d ouverts disjoints $U_1, \ldots, U_d$; on considère des applications $f_1, \ldots, f_d$ comme dans la question précédente. Comme l'image réciproque d'un point général de $\mathbb{S}^n$ par f_i a un antécédent, $\deg(f_i)$ vaut 1 ou -1. Quitte à composer au but par une symétrie, on peut supposer que $\deg(f_i) = 1$. Soit f l'application C^∞ qui coïncide avec f_i sur U_i et qui vaut x ailleurs. Par construction, l'image réciproque d'un point $\neq x$ est constituée de d points, et toutes les différentielles préservent l'orientation. Ainsi, $\deg(f) = d$.

Si $d < 0$, on compose au but une application de degré $-d$ avec une symétrie, pour obtenir une application de degré d.

4. Degré et homotopie

Soit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ le tore de dimension 2. On considère les applications $f, g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ définies par $f(w,z) = (w,z)$ et $g(w,z) = (z, \bar{w})$. Montrer que f et g ont même degré, mais ne sont pas homotopes. On pourra considérer les morphismes induits sur le premier groupe de cohomologie.

Solution :

Soit $d\theta_1 \wedge d\theta_2$ la forme volume sur le tore : $d\theta_1$ est la forme volume sur la sphère de première coordonnée, $d\theta_1$ est la forme volume sur la sphère de deuxième coordonnée. Alors $f^*(d\theta_1 \wedge d\theta_2) = d\theta_1 \wedge d\theta_2$, car f est l'identité sur le tore. Pour $x = (w,z)$, on note $h_1(x)$ et $h_2(x)$ les vecteurs unitaires tangents positivement à la première sphère (resp. à la deuxième) en x. Le couple $(h_1(x), h_2(x))$ forme une base de $T_x\mathbb{T}^2 = T_{(w,z)}\mathbb{T}^2$ et

$$\begin{aligned} g^*(d\theta_1 \wedge d\theta_2)(x)[h_1(x), h_2(x)] &= d\theta_1 \wedge d\theta_2(g(x))[T_{(w,z)}h_1(x), T_{(w,z)}h_2(x)] \\ &= d\theta_1 \wedge d\theta_2(g(x))[-h_2(g(x)), h_1(g(x))] \\ &= d\theta_1 \wedge d\theta_2(g(x))[h_1(g(x)), h_2(g(x))] \\ &= 1 = (d\theta_1 \wedge d\theta_2)(x)[h_1(x), h_2(x)] \end{aligned}$$

Donc $g^*(d\theta_1 \wedge d\theta_2) = d\theta_1 \wedge d\theta_2$. En particulier, f et g sont de degré 1.

Mais on remarque de la même manière que $g^*(d\theta_1) = -d\theta_2$ et $g^*(d\theta_2) = d\theta_1$ (on aurait pu d'ailleurs d'abord montrer ça pour ensuite calculer $g^*(d\theta_1 \wedge d\theta_2)$). En particulier

$$[g^*][d\theta_1] = -[d\theta_2] \neq [d\theta_1] = [f^*][d\theta_1]$$

puisque $([d\theta_1], [d\theta_2])$ est une base de $H^1(\mathbb{T}^2)$. On a montré que $[g^*] \neq [f^*]$ et donc f et g ne sont pas homotopes.

5. Théorème de Brouwer

Soit $n \geqslant 1$. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Brouwer : toute application continue $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{\mathbb{B}^n}$ admet un point fixe.

1– Soit $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$ une application C^∞. Montrer que $\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = 0$.

2– En déduire qu'il n'existe pas d'application $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$ telle que $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{Id}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$.

3– Montrer que toute application C^∞ $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{\mathbb{B}^n}$ admet un point fixe.

4– Conclure.

Solution :

1– Soit $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. On a, via la formule de Stokes,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f^*_{|\mathbb{S}^{n-1}}\alpha = \int_{B^n} df^*\alpha = \int_{B^n} f^* d\alpha = 0$$

car $d\alpha = 0$ pour des raisons de degré. Cela prouve que $\deg(f_{|\mathbb{S}^{n-1}}) = 0$.

2– Une telle application vérifierait d'une part $\deg(f_{|\mathbb{S}^{n-1}}) = 0$ et d'autre part $\deg(f_{|\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(\mathrm{Id}\,|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = 1$, ce qui est impossible.

3– Supposons qu'il existe $f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ C^∞ sans point fixe. On construit alors $g : \overline{B^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$ en prenant pour $g(x)$ le point d'intersection entre $\mathbb{S}^{n-1}$ et la demi-droite d'origine x passant par $f(x)$. Cette application est bien C^∞ (le vérifier) et vérifie $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{Id}\,|_{\mathbb{S}^{n-1}}$, ce qui est impossible d'après la question précédente. On a montré par l'absurde le résultat désiré.

4– Soit $f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ une application continue. Comme $\overline{B^n}$ est compact et que $\forall x \in \overline{B^n}, \|f(x) - x\| > 0$, il existe $a > 0$ tel que $\forall x \in \overline{B^n}, \|f(x) - x\| > \alpha$. On considère alors $g : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ C^∞ telle que $\|g - f\|_\infty < \alpha/4$. En particulier g est à valeurs dans $\overline{B^n}(1+\alpha/4)$, et donc $h := \frac{1}{1+\alpha/4} g$ est une application C^∞ de $\overline{B^n}$ dans $\overline{B^n}$. Alors pour tout $x \in \overline{B^n}$, on a

$$\begin{aligned}
\|h(x) - x\| &\geqslant \|f(x) - x\| - \left\| \frac{1}{1+\alpha/4} g(x) - \frac{1}{1+\alpha/4} f(x) \right\| - \left\| \frac{1}{1+\alpha/4} f(x) - f(x) \right\| \\
&> \alpha - \frac{\alpha/4}{1+\alpha/4} - (1 - \frac{1}{1+\alpha/4}) \\
&= \frac{\alpha/2 + \alpha^2/4}{1+\alpha/4} > 0,
\end{aligned}$$

ce qui contredit la question précédente.

6. Invariant de Hopf

1– Soit $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ une application C^∞ et $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$. Montrer que la forme $f^*\alpha$ est exacte.

2– Soit $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ et $\beta \in \Omega^1(\mathbb{S}^3)$ une primitive de $f^*\alpha$. Montrer que l'intégrale $\int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge f^*\alpha$ ne dépend pas du choix de β.

3– Montrer que cette intégrale est nulle si α est exacte.

4– Soit $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{S}^2} \alpha = 1$. Montrer que $\int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge f^*\alpha$ ne dépend pas non plus du choix de α satisfaisant à cette condition.

5– Ce qui précède montre que cette intégrale ne dépend que de f. On la note $H(f)$ et on l'appelle *l'invariant de Hopf de* f. Si $\varphi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ est une application lisse, montrer que $H(f \circ \varphi) = \deg(\varphi) H(f)$.

6– Si $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est une application lisse, montrer que $H(\psi \circ f) = \deg(\psi)^2 H(f)$.

7– Montrer que $H(f) = 0$ si f n'est pas surjective.

8– Montrer que si f_1 et f_2 sont homotopes, $H(f_1) = H(f_2)$.

9– Soit f la fibration de Hopf, c'est à-dire l'application $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ donnée par l'équation $f(z, w) = [z : w]$, où l'on a identifié $\mathbb{S}^3$ à la sphère unité dans $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{S}^2$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Montrer que $H(f)$ est non nul. En déduire que la fibration de Hopf n'est pas homotope à une application constante.

Solution :

1– On a $\mathrm{d}(f^*\alpha) = f^*(\mathrm{d}\alpha) = 0$. Ainsi, $f^*\alpha$ est fermée sur $\mathbb{S}^3$. Mais $H^2(\mathbb{S}^3) = 0$. Elle est donc exacte. Il existe donc β de degré 1 telle que $f^*\alpha = \mathrm{d}\beta$.

2– Soit β' une autre forme différentielle telle que $\mathrm{d}\beta' = \mathrm{d}\beta = f^*\alpha$. Alors $\beta - \beta'$ est fermée. C'est une forme différentielle de degré 1. Comme $H^1(\mathbb{S}^3) = 0$, elle est donc exacte : on peut écrire $\beta' = \beta + \mathrm{d}u$. Alors

$$\int \beta' \wedge f^*\alpha = \int \beta' \wedge \mathrm{d}\beta' = \int \beta \wedge \mathrm{d}\beta + \int \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta.$$

Il faut donc vérifier que $\int \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta = 0$. Mais $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta = \mathrm{d}(u \wedge \mathrm{d}\beta)$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{S}^3} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta = \int_{\mathbb{S}^3} \mathrm{d}(u \wedge \mathrm{d}\beta) = \int_{\partial\mathbb{S}^3} u \wedge \mathrm{d}\beta = 0,$$

puisque $\partial\mathbb{S}^3 = \emptyset$.

3– Si $\alpha = d\gamma$ avec $\gamma \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)$, on peut prendre $\beta = f^*\gamma$. On a alors

$$\beta \wedge f^*\alpha = f^*\gamma \wedge f^*\alpha = f^*(\gamma \wedge \alpha) = 0$$

car $\gamma \wedge \alpha$ est une forme de degré 3 sur $\mathbb{S}^2$.

4– Soit α' une autre forme volume sur $\mathbb{S}^2$ avec $\int \alpha' = 1$. Alors $\int(\alpha' - \alpha) = 0$. Mais, par dualité de Poincaré, l'application "intégrale" est un isomorphisme entre H^n et $\mathbb{R}$, donc $\alpha' - \alpha$ est exacte : il existe une forme différentielle γ telle que $\alpha' = \alpha + \mathrm{d}\gamma$.

Soit β telle que $f^*\alpha = \mathrm{d}\beta$. Alors $f^*\alpha' = \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}(f^*\gamma)$. Par conséquent,

$$\int (\beta + f^*\gamma) \wedge f^*(\alpha + \mathrm{d}\gamma) = \int (\beta) \wedge f^*\alpha) + \int f^*\gamma \wedge f^*\alpha + \int f^*\gamma \wedge \mathrm{d}(f^*\gamma) + \int \beta \wedge \mathrm{d}(f^*\gamma).$$

De plus,

$$\int f^*\gamma \wedge \mathrm{d}\beta = \int f^*\gamma \wedge f^*\alpha = \int f^*(\gamma \wedge \alpha).$$

Comme $\gamma \wedge \alpha = 0$ car c'est une forme différentielle de degré $2n-1$ sur $\mathbb{S}^n$, cette intégrale est nulle. De même, $f * \gamma \wedge \mathrm{d}(f^*\gamma) = f^*(\gamma \wedge \mathrm{d}\gamma) = 0$.

Finalement, $\mathrm{d}(\beta \wedge f^*\gamma) = \mathrm{d}\beta \wedge f^*\gamma - \beta \wedge \mathrm{d}(f^*\gamma)$. Comme $\mathrm{d}\beta \wedge f^*\gamma = 0$, comme ci-dessus, on obtient

$$\int \beta \wedge \mathrm{d}(f^*\gamma) = -\int \mathrm{d}(\beta \wedge f^*\gamma) = \int_{\partial\mathbb{S}^3} \beta \wedge f^*\gamma = 0.$$

Cela montre le résultat désiré.

5– Soit $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{S}^2} \alpha = 1$. Soit β une primitive de $f^*\alpha$. Alors $\beta' = \varphi * \beta$ est une primitive de $\varphi^* f^* \alpha = (f \circ \varphi)^* \alpha$. On a donc

$$\begin{aligned}
H(f \circ \varphi) &= \int_{\mathbb{S}^3} \beta' \wedge (f \circ \varphi)^* \alpha \\
&= \int_{\mathbb{S}^3} \varphi * \beta \wedge \varphi^* f^* \alpha \\
&= \int_{\mathbb{S}^3} \varphi * (\beta \wedge f^* \alpha) \\
&= \deg(\varphi) \int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge f^* \alpha \\
&= \deg(\varphi) H(f).
\end{aligned}$$

6– Soit $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{S}^2} \alpha = 1$. Alors $\psi^* \alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ et $\int_{\mathbb{S}^2} \psi^* \alpha = \deg(\psi)$. Donc $\alpha' = \psi^* \alpha / \deg(\psi)$ vérifie $\int_{\mathbb{S}^2} \alpha' = 1$. Soit β une primitive de $f^* \psi^* \alpha$. Alors $\beta' = \beta / \deg(\psi)$ est une primitive de $f^* \alpha'$. On a donc

$$\begin{aligned}
H(\psi \circ f) &= \int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge (\psi \circ f)^* \alpha \\
&= \int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge f^* \psi^* \alpha \\
&= \deg(\psi)^2 \int_{\mathbb{S}^3} \beta' \wedge f^* \alpha' \\
&= \deg(\psi)^2 H(f).
\end{aligned}$$

7– Supposons f non surjective. Comme $f(\mathbb{S}^3)$ est compact (image d'un compact), $f(\mathbb{S}^3)$ est fermé dans $\mathbb{S}^2$ et en particulier $\mathbb{S}^2 \setminus f(\mathbb{S}^3)$ est ouvert non vide. Soit $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ à support inclus dans $\mathbb{S}^2 \setminus f(\mathbb{S}^3)$ telle que $\int_{\mathbb{S}^2} \alpha = 1$. Alors $f^* \alpha = 0$ et donc $H(f) = 0$.

8– Si f_1 et f_2 sont homotopes, elles sont aussi C^∞-homotopes, de sorte qu'il existe $F : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ C^∞ coïncidant avec f_1 pour $t \leqslant 0$ et avec f_2 pour $t \geqslant 1$. Soit α une forme volume d'intégrale 1 sur $\mathbb{S}^2$. Comme $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^3$, $H^2(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}) = 0$, de sorte que $F^* \alpha$ est exacte : $F^* \alpha = d\beta$. Appliquons alors le théorème de Stokes à la variété à bord $\mathbb{S}^3 \times [0, 1]$ et à la forme différentielle $\beta \wedge d\beta$. On prend garde à ce que la sphère $\mathbb{S}^3 \times \{0\}$ est orientée négativement et à ce que la sphère $\mathbb{S}^3 \times \{1\}$ est orientée positivement. Il vient :

$$\begin{aligned}
H(f_2) - H(f_1) &= \int_{\mathbb{S}^3\times\{1\}} \beta \wedge F^*\alpha + \int_{\mathbb{S}^3\times\{0\}} \beta \wedge F^*\alpha \\
&= \int_{\mathbb{S}^3\times\{1\}} \beta \wedge \mathrm{d}\beta + \int_{\mathbb{S}^3\times\{0\}} \beta \wedge \mathrm{d}\beta \\
&= \int_{\mathbb{S}^3\times[0,1]} d\beta \wedge d\beta \\
&= \int_{\mathbb{S}^3\times[0,1]} F^*(\alpha \wedge \alpha) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $\alpha \wedge \alpha$ est nulle comme forme différentielle pour raisons de degrés. Cela conclut.

9– On voit $\mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ via l'inclusion $(z, w) \mapsto [z : w : 1]$. En particulier, $(0, 0) \equiv [0 : 0 : 1]$. La variété $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\}$ se rétracte sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à l'infini à l'aide de l'application $p_t : [z : w : u] \mapsto [z : w : tu]$, de sorte que l'application $p_0 : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un isomorphisme en cohomologie. Remarquons que $p_0|_{\mathbb{S}^3}$ est exactement la fibration de Hopf, et que pour tout $R > 0$, $p_0|_{\mathbb{S}(0,R)}$ est homotope à la fibration de Hopf.

Soit ω une forme volume sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. En considérant la suite de Mayer-Vietoris associée au recouvrement ouvert de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\}$ et $\mathbb{C}^2$, on voit que la classe de cohomologie représentée par $p_0^*\omega$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\}$ est la restriction d'une classe de cohomologie c de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, engendrant $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Soit α une 2-forme différentielle fermée sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ représentant c. Par construction, α et $p_0^*\omega$ sont cohomologues sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\}$ de sorte qu'on y a $p_0^*\omega - \alpha = d\eta$ pour $\eta \in \Omega^1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\})$.

Par description de l'algèbre de cohomologie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $c \wedge c$ est non nulle. Ainsi, par dualité de Poincaré, $\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \alpha \wedge \alpha = I \neq 0$. Comme $\mathbb{C}^2$ est contractile, son H^2 est nul, et α y est exacte : il existe donc $\gamma \in \Omega^1(\mathbb{C}^2)$ telle que $\alpha|_{\mathbb{C}^2} = d\gamma$.

Nous sommes enfin prêts à évaluer l'invariant de Hopf de f. Comme H est un invariant d'homotopie, $H(f) = H(p_0|_{\mathbb{S}(0,R)})$. Or, sur $\mathbb{S}(0, R)$, $p_0^*\omega = \alpha + d\eta = d(\gamma + \eta)$. Par définition de l'invariant de Hopf,

$$H(f) = H(p_0|_{\mathbb{S}(0,R)}) = \int_{\mathbb{S}(0,R)} (\gamma + \eta) \wedge (d\gamma + d\eta).$$

Comme $\int_{\mathbb{S}(0,R)}(\gamma \wedge d\eta + \eta \wedge d\gamma) = \int_{\mathbb{S}(0,R)} d(\gamma \wedge \eta) = 0$ par le théorème de Stokes, on obtient :

$$H(f) = \int_{\mathbb{S}(0,R)} (\gamma \wedge d\gamma + \eta \wedge d\eta).$$

Remarquons que, toujours par Stokes, $\int_{\mathbb{S}(0,R)}(\gamma\wedge d\gamma) = \int_{B(0,R)} \alpha\wedge\alpha$ tend vers I quand R tend vers $+\infty$. De même, par Stokes, $\int_{\mathbb{S}(0,R)}(\eta \wedge d\eta) = \int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\setminus B(0,R)} d\eta \wedge d\eta$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

Ainsi, faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient $H(f) = I \neq 0$.

L'invariance de $H(f)$ par homotopie et la nullité de l'invariant de Hopf d'une application constante montre alors que la fibration de Hopf n'est pas homotope à une application constante.