Formation Interuniversitaire de Physique *Stéphane Perrard, Christophe Gissinger*

Hydrodynamique — TD 5

Ondes et sillages

On s'intéresse dans ce TD aux ondes engendrées sur la surface de l'eau par des bateaux.

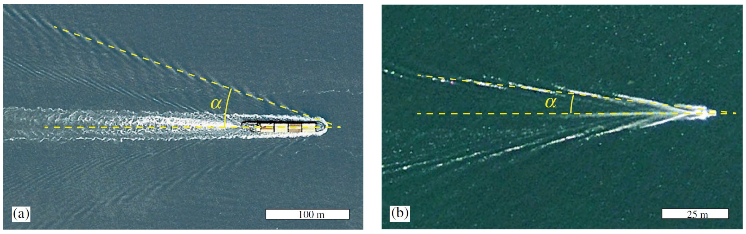

Figure 1 – Sillages de bateau. Source : M. Rabaud et F. Moisy, *Ship Wakes : Kelvin or Mach Angle ?*, Phys. Rev. Lett. **110**, 214503 (2013)

Équation de dispersion

On considère un fluide 2D non-visqueux et incompressible, initialement au repos. Dans cet exercice, on cherche à retrouver la relation de dispersion pour les ondes de surface en eau profonde.

On suppose l'axe x horizontal et l'axe y vertical vers le haut. Au repos, la surface libre se trouve en $y = 0$.

1. Quelle est l'équation satisfaite par le potentiel des vitesses ?
2. On cherche une solution sous la forme d'une onde propagatrice sinusoidale en x. Trouver la dépendance en y du potentiel de vitesse $\phi(x, y, t)$ dans le cas d'ondes en eau profonde.
3. Écrire l'équation de Bernoulli pour un écoulement irrotationel non-stationnaire.
4. En prenant en compte la tension superficielle, en déduire la condition sur la pression au niveau de la surface libre.
5. Les particules de fluides à la surface doivent rester à la surface. Traduire cela par une relation entre la vitesse verticale et l'élévation de la surface libre $y = h(x, t)$.
6. Linéariser les équations qui régissent le problème.
7. Établir l'équation de dispersion.
8. Calculer la vitesse de phase v_φ, et la tracer en fonction du vecteur d'onde k. Pour quelle valeur de k la vitesse de phase est-elle minimale ? Quelle est la valeur minimale de v_φ ?
9. Évaluer cette vitesse de phase minimale et sa longueur d'onde associée dans le cas de l'eau.
10. Que vaut la vitesse de groupe v_g ? Comparer à la vitesse de phase, en particulier dans le cas d'ondes purement capillaire ou purement de gravité.

Sillage d'un bateau

On considère pour le moment un problème à une dimension. On se place dans le référentiel de l'obstacle (le bateau, par exemple, que l'on pourra noter B) qui crée des perturbations sur la surface. Le fluide environnant s'écoule à la vitesse $-U$ selon l'axe Ox.

1. Montrer que pour une vitesse donnée, les perturbations stationnaires dans le référentiel du bateau peuvent avoir deux longueurs d'onde différentes. Donner l'expression de ces longueurs d'onde dans le cas où $U \gg v_\varphi^{min}$.

2. Justifier qualitativement que les deux perturbations stationnaires sont observées dans deux zones distinctes : l'une à l'avant du bateau, l'autre à l'arrière.

On revient à la propagation bidimensionnelle des ondes de surface et l'on s'intéresse plus précisément aux motifs créés par le passage du bateau en se restreignant au cas des ondes gravitaires.

3. On se place dans le référentiel du bateau et l'on repère un vecteur d'onde par ses coordonnées polaires (k, θ) où θ est l'angle de $\boldsymbol{k}$ avec la direction du mouvement du bateau. Montrer que la stationarité de l'écoulement impose la condition

$$k(\theta) = \frac{g}{U^2 \cos^2 \theta}. \tag{1}$$

4. Quelle est la longueur d'onde du sillage dans la direction de propagation du navire ? En déduire une méthode de détermination de la vitesse d'un navire à l'aide d'une photographie.
5. Déduire de la question 3 que le déplacement de l'interface en un point $\boldsymbol{r}$ de coordonnée polaires (r, φ) se met sous la forme générale

$$h(r, \varphi) = \int d\theta A(\theta) e^{ir\psi(\theta,\varphi)}, \tag{2}$$

avec $\psi(\theta, \varphi) = k(\theta)\cos(\theta - \varphi)$
On se place à longue distance de l'objet en mouvement. Montrer qu'en $\boldsymbol{r}$, le sillage est dominé par le vecteur d'onde incliné de $\theta^*(\varphi)$ solution de de l'équation

$$\frac{dk}{d\theta}\cos(\theta - \varphi) - k\sin(\theta - \varphi) = 0. \tag{3}$$

Réexprimer cette condition en fonction de $x = \tan\theta$ et $y = \tan\varphi$.
6. Montrer qu'il existe une valeur de $\varphi^{\max}$ au-delà de laquelle l'équation (3) n'a plus de solution. En déduire l'angle d'ouverture du sillage. Celui-ci dépend-il de la vitesse de l'objet ?
7. Montrer que pour la valeur limite de $\varphi^{\max}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}(\theta^*(\varphi^{\max}), \varphi^{\max}) = 0$. Quelle est la conséquence de ce calcul ?
8. On admet qu'un bateau de longueur L n'émet d'ondes de hauteur notable que pour $k > 1/L$. Expliquer qualitativement comment se traduit ce résultat sur l'équation (2). Donner qualitativement la condition portant sur nombre adimensionné que l'on précisera, pour observer un sillage d'angle $\varphi^{\max}$. Comment varie l'angle du sillage lorsque ce nombre adimensionné change ?

Annexe : théorème de la phase stationnaire

Soit l'intégrale

$$I(x) = \int f(t)\exp(ix\psi(t))\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

avec $f \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}$, $|f|$ intégrable, f et ψ régulières.

Si ψ est monotone, I tend exponentiellement vers 0 quand $x \to +\infty$. Si ψ est extrémal en a (uniquement) et $f(a) \neq 0$, en notant p l'ordre de la première dérivée non-nulle en a, on a :

$$I(x) \underset{x\to+\infty}{\propto} f(a)\exp(ix\psi(a))\left(\frac{p!}{x|\psi^{(p)}(a)|}\right)^{1/p} \tag{5}$$

Le détail des préfacteurs peut se trouver dans : C. Bender et S. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Springer.