Mécanique Analytique

Marco Biroli

November 4, 2019

1 Principe de Fermat et applications.

1.1

1.1.1

On a:
$$\mathcal{L} = (AMA') = n \cdot d(A, M) + n' \cdot d(M, A') = n\sqrt{x^2 + y_0^2} + n'\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}$$

1.1.2

Par consequent:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = x\frac{n}{\sqrt{x^2 + y_0^2}} + (x - x_0)\frac{n'}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}}$$
Résolvant pour $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ on obtient:
$$n\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_0^2}} = n'\frac{(x_0 - x)}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}} \Leftrightarrow n \sin i = n' \sin i'$$

1.1.3

Ceci correspond au principe de moindre action.

1.1.4

Si on autorize $z \neq 0$ on aurait immediatement:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2nz + 2n'z = z(2n + 2n') = 0 \Rightarrow z = 0$$

1.2

L'équation du dipotre est donnée par:
$$(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$
Pour obtenir l'approximation parabolloide on doit mettre les termes d'un coté et effectuer une expansion de Taylor:
$$x - R = \pm\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \Rightarrow x = R - R\sqrt{1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2}} = R - R\left(1 + \frac{y^2 + z^2}{2R^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right) \approx \frac{y^2 + z^2}{2R}$$

1.3

On travaille d'abord sur le premier segment, le deuxième suit immediatement:
$$(AM) = n\sqrt{(|x_A| - \frac{y^2}{2R})^2 + (y_A - y)^2} = n\sqrt{(|x_A|^2 - \frac{R}{2}\rho^2)^2 + (y_A - R\rho)^2}$$
Où on prend $\rho = \frac{y}{R} \ll 1$ maintenant en faisant une expansion de Taylor en ρ on obtient:
$$(AM) = n\sqrt{x_A^2 + y_A^2} - \frac{nRy_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}\rho - \frac{\left(n\left(-R^2x_A^2 + R|x_A|^3 + R|x_A|y_A^2\right)\right)}{2\left(x_A^2 + y_A^2\right)^{3/2}}\rho^2 + O\left(\rho^3\right)$$

Meme si l'énoncé ne l'explicite pas nous allons assumer que $|y_A| \ll |x_A|$ car sinon les calculs ne donnent pas la bonne reponse. Par consequent on obtient (on se rappelle du fait que $x_A < 0$):

$$\kappa_A = n\sqrt{|x_A|^2 + y_A^2} = n\left(-x_A - \frac{y_A^2}{2x_A}\right) + \mathcal{O}\left(\left|\frac{y_A}{x_A}\right|^2\right) \approx -nx_A - \frac{1}{2}\nu_A y_A^2$$

De même on a (on obtient un terme R au denominateur en remplacant ρ par y/R):

$$\beta_A = \frac{ny_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \frac{n\frac{y_A}{|x_A|}}{\sqrt{1 + \frac{y_A^2}{x_A^2}}} = n\frac{y_A}{|x_A|} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{y_A}{|x_A|}\right)^3\right) \approx -\nu_A y_A$$

Et finalement:

$$-\frac{1}{2}\alpha_A = \frac{\left(n\left(-R^2 x_A^2 + R|x_A|^3 + R|x_A|y_A^2\right)\right)}{2R^2\left(x_A^2 + y_A^2\right)^{3/2}} = \frac{nR - \frac{nR^2}{y_A}\frac{y_A}{|x_A|} + nR\frac{y_A^2}{x_A^2}}{2R^2(1 + \frac{y_A^2}{x_A^2})^{3/2}} = \frac{n}{2R} - \frac{n}{2y_A}\frac{y_A}{|x_A|} - \frac{n}{4R}\frac{y_A^2}{x_A^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{y_A}{|x_A|}\right)^3\right)$$

Mais le terme:

$$\left|\frac{n}{4R}\frac{y_A^2}{x_A^2}\right| < \left|\frac{n}{4}\frac{y_A}{R}\frac{y_A^2}{x_A^2}\right| = \mathcal{O}\left(\left|\frac{y_A}{x_A}\right|^3\right)$$

On a donc:

$$\alpha_A = \frac{n}{R} + \frac{n}{|x_A|} = \frac{n}{R} - \nu_A$$

De manière identique on obtient:

$$\kappa_{A'} = n' x_{A'} + \frac{1}{2}\nu_{A'} y_{A'}^2, \quad \beta_{A'} = \nu_{A'} y_{A'}, \quad \alpha_{A'} = -\frac{n'}{R} + \nu_{A'}$$

Et puisque $\mathcal{L} = (AMA') = (AM) + (MA')$ on a $\alpha = \alpha_A + \alpha_{A'}, \beta = \beta_A + \beta_{A'}, \kappa = \kappa_A + \kappa_{A'}$, cqfd.

1.4

Le principe de Fermat nous enonce que $\mathcal{L}$ doit être stationnaire. Il nous faut donc que:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0} = 0 \Rightarrow y_0\alpha - \beta = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{\beta}{\alpha}$$

1.5

Dans le cadre de nos approximations $\mathcal{L}$ est une parabole et par consequent l'extremum est un minimum si et seulement si $\alpha > 0$ soit:

$$\frac{n'}{x_{A'}} - \frac{n}{x_A} - \frac{n'-n}{R} > 0 \Leftrightarrow \frac{n' x_A R - n x_{A'} R - n' x_A x_{A'} + n x_A x_{A'}}{x_{A'} x_A R} > 0$$
$$\Leftrightarrow -n'|x_A|R - n x_{A'} R + n'|x_A| x_{A'} - n|x_A| x_{A'} < 0$$

1.6

La condition de stigmatisme imposerait que $\mathcal{L}(y)$ soit constante afin que quel que soit y le chemin est minimal. Par consequent le stigmatisme impose $\alpha = \beta = 0$. On a donc (on note par simplicite $y_A = y, y_{A'} = y'$, de même pour les autres variables):

$$\begin{cases} \nu y - \nu' y' = 0 \\ \nu' - \nu - \frac{n'-n}{R} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = \frac{\nu R y}{R\nu + n' - n} \\ \nu' = \nu + \frac{n'-n}{R} \end{cases}$$

1.7

1.8

On a donc:

$$\delta\mathcal{L} = \int_{s_1}^{s_2} \left(\boldsymbol{\nabla} n \cdot u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n(\vec{r})\vec{u}\right)\vec{u}\right) \cdot \delta\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Par consequent on obtient:

$$\boldsymbol{\nabla} n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n(\vec{r})\vec{u}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n(\vec{r})\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right)$$

1.9

En introdusiant $\mathrm{d}s = n(\vec{r})\mathrm{d}a$ on obtient:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\vec{r} = n(\vec{r})\boldsymbol{\nabla}n(\vec{r}) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(n(r)\vec{u}\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}n(\vec{r})^2\right)$$

On remarque que cette equation est similaire a la deuxième loi de Newton pour la mécanique du point:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \vec{F} = \boldsymbol{\nabla}V$$

La quantité de mouvement à pour equivalent optique $n(\vec{r})\vec{u}$, par consequent le moment cinétique est donnée par $n(\vec{r})\vec{r} \times \vec{u}$. Et finalement l'énergie potentielle est donnée par $\frac{1}{2}n(\vec{r})^2$.

1.10

Si l'indice optique ne depend que de r on a:

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{2}n(r)^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2n(r)\mathrm{d}_r n(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour utiliser l'analogie mecanique on pose:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2) - n(r)\frac{\mathrm{d}n(r)}{\mathrm{d}r}$$

On note immediatement que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0$ et avec les equations d'Euler Lagrange on a:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = cst = m\dot{z} = p_z \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = cst = mr^2\dot{\varphi} = r^2 p_\varphi$$

En remplacant cela par notre probleme on obtient immediatement:

$$n(r)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = cst = \lambda \quad \text{et} \quad r^2 n(r)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = cst = \mu$$

La loi d'optique qui se cache derriere la premiere equation est une loi de Snell-Descarte infinitésimale.

1.11

1.11.1

On a:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}\right)^2 - 1 = \frac{n(r)^2}{\lambda^2} - 1 = \frac{n(r)^2 - \lambda^2}{\lambda^2}$$

1.11.2

Par la question précédente on deduit qu'il nous faut que $\frac{n^2-\lambda^2}{\lambda^2} \geq 0$. Pour r contenu dans une région de $[-a, a]$. Par le theorème de la valeur moyenne il nous faut donc:

$$\frac{n_1^2 - \lambda^2}{\lambda^2} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{n_2^2 - \lambda^2}{\lambda^2} \leq 0$$

On obtient donc immediatement que:

$$n_2 \leq \lambda \leq n_1$$

1.12

En injectant la solution dans l'équation on obtient:

$$r_0^2\Omega^2\sin^2(\Omega z) = \frac{n^2 - \lambda^2}{\lambda^2} = \frac{n_1^2(1 - 8\Delta\frac{r_0^2\cos^2(\Omega z)}{a^2}) - \lambda^2}{\lambda^2}$$

Que l'on peut ré-écrire:

$$r_0^2\Omega^2(\sin^2(\Omega z) + \cos^2(\Omega z)) = \frac{n_1^2 - \lambda^2}{\lambda^2} \Rightarrow r_0^2 = \frac{n_1^2 - \lambda^2}{\lambda^2\Omega^2}$$

2

2.1

Les équations vérifiées par x et y sont:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{y} - 2\lambda\dot{y} + ky = 0 \\ m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = 0 \end{cases}$$

On a donc:

$$x(t) = c\exp\left(-t\left(\frac{\lambda}{m} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - km}}{m}\right)\right) + c'\exp\left(t\left(-\frac{\lambda}{m} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - km}}{m}\right)\right)$$

Et:

$$y(t) = c\exp\left(t\left(\frac{\lambda}{m} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - km}}{m}\right)\right) + c'\exp\left(t\left(\frac{\lambda}{m} - \frac{\sqrt{\lambda^2 - km}}{m}\right)\right)$$

2.2

Le moments conjugués sont donc:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{y} - \lambda y \quad \text{et} \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{x} + \lambda x$$

2.3

On a donc:

$$\begin{aligned} H &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L} = (m\dot{y} - \lambda y)\dot{x} + (m\dot{x} + \lambda x)\dot{y} - m\dot{x}\dot{y} + \lambda(y\dot{x} - x\dot{y}) + kxy \\ &= m\dot{x}\dot{y} + kxy = (p_x + \lambda y)(p_y - \lambda x) + kxy \end{aligned}$$

Puisque les moments conjugués sont définis par des équations scléronomes on a que $H = E$.

3

3.1

On a l'équation suivante:

$$a\frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} + \frac{3}{\nu^2}\frac{\partial^2 \rho(\vec{x})}{\partial t^2} - \nabla^2 \rho(\vec{x}) = 0$$

En multipliant a gauche et à droite par $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$ et en integrant sur $\mathbb{R}^3$ on peut passer dans l'espace de Fourier et on obtient:

$$a\frac{\partial \hat{\rho}(\vec{q},t)}{\partial t} + \frac{3}{\nu^2}\frac{\partial^2 \hat{\rho}(\vec{q},t)}{\partial t^2} + \vec{q}^2\hat{\rho}(\vec{q},t) = 0$$

Maintenant on peut fixer un quelquonque $\vec{q}$ et on écrit $\hat{\rho}(\vec{q},t) = u(t)$ et on à donc:

$$a\dot{u} + \frac{3}{\nu^2}\ddot{u} + \vec{q}^2 u = 0$$

Si on écrit maintenant cette equation pour le terme réel et imaginaire on obtient immediatement un system similaire a la question précedente. On en deduit qu'on peut modeliser ce problème par la Lagrangienne:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{\nu^2}\frac{\partial \operatorname{Re} u}{\partial t}\frac{\partial \operatorname{Im} u}{\partial t} - \frac{a}{2}\left(\operatorname{Re} u\frac{\partial \operatorname{Im} u}{\partial t} + \operatorname{Im} u\frac{\partial \operatorname{Re} u}{\partial t}\right) + \vec{q}^2 \operatorname{Re} u \operatorname{Im} u$$

3.2

En injectant la solution on obtient:

$$-a(i\omega)\rho + \frac{3}{\nu^2}\omega^2\rho - k^2\rho = 0 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3\frac{\omega^2}{\nu^2} - iaw}$$

Ceci est similaire a la propagation d'une onde dans un milieu dissipatif.

4

4.1

Si ψ est solution soit $\varphi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},-t)$ alors:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V\varphi \Leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V\varphi$$

On remarque que cela est exactement:

$$\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^* = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi\right)^* \Leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + V\psi^*$$

On en déduit donc que $\psi^* = \varphi$. On remarque donc que le temps est assimilé à l'ordre absolu sur le droite complexe en mecanique quantique.

4.2

De manière similaire a la question précedente on se propose de passer en espace de Fourier et on obtient:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \overset{\text{TF}}{\Longrightarrow} i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{q}^2\hat{\psi} + \hat{V} \circledast \hat{\psi}$$

Par extension soit M la matrice de dimension infinie contenant $\frac{1}{i\hbar}\hat{V}$ sur chaque ligne et soit W la matrice de dimension infinie et diagonale contenant $\frac{i\hbar}{2m}\vec{q}^2$ sur la diagonale. On re-ecrit alors le systeme precedent comme:

$$\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t} = (W+M)\hat{\psi}$$