Géométrie Différentielle, TD 12 du 10 mai 2019

1. Questions diverses -A FAIRE AVANT LE TD

Sur la mesure de Haar :

1– Soit G un groupe de Lie et $\rho : G \to GL_n(\mathbb{R})$ une représentation C^∞ de G. Montrer que si G est fini, alors $\mathbb{R}^n$ admet un produit scalaire G-invariant. Généraliser au cas où G est compact.

2– Montrer que le sous groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles $T_2(\mathbb{R}) \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie qui n'est pas unimodulaire. Que dire si on considère le groupe des matrices triangulaires supérieures non nécessairement inversibles munies de l'addition ?

Sur la cohomologie d'algèbre de Lie :

1– Soit G un groupe de Lie, $\omega \in \Omega_p(G)$ une p-forme sur G, $X_1, \dots, X_p \in \Gamma(TG)$ des champs de vecteurs sur G. Montrer que si ω et les X_i sont G-invariants à gauche, alors l'application $\omega_{X_1,\dots,X_p} : G \to \mathbb{R}$ est constante.

2– Expliciter la cohomologie d'algèbre de Lie de $\mathbb{R}^n$. Que remarque t'on ?

3– Expliciter les différentielles $d : \Lambda^0\mathfrak{g}^\star \to \Lambda^1\mathfrak{g}^\star$, $d : \Lambda^1\mathfrak{g}^\star \to \Lambda^2\mathfrak{g}^\star$.

Solution :

1– On se donne $\langle .,. \rangle_0$ un produit scalaire quleconque sur $\mathbb{R}^n$. Dans le cas où G est fini, on pose $\langle .,. \rangle := \sum_{g\in G} \langle g.,g. \rangle_0$. C'est un produit scalaire G invariant sur $\mathbb{R}^n$. Dans le cas où G est seulement supposé compact, on se donne une mesure de Haar λ sur G. Par compacité de G, elle est finie invariante à droite. On remplace la somme précédente par une intégrale contre λ : $\langle .,. \rangle := \int_G \langle g.,g. \rangle_0 \, d\lambda(g)$. L'invariance à droite de λ implique que G préserve ce produit scalaire.

2– On calcule la mesure de Haar de $T_2(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ via $\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \mapsto (x,y,z)$. Pour cette identification la loi de groupe devient : $(a,b,c).(x,y,z) = (ax, by, az + cy)$. Cherchons une forme volume $T_2(\mathbb{R})$ invariante sous la forme $\lambda = f(x,y,z) dx \wedge dy \wedge dz$. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a $L_{(a,b,c)} f dx \wedge dy \wedge dz = f \circ L_{(a,b,c)} adx \wedge bdy \wedge adz$. λ est donc G invariante si pour tout (a,b,c), on a $a^2 b \, f \circ L_{(a,b,c)} = f$. On pose $f(x,y,z) := x^{-2}y^{-1}$. La forme volume $\lambda = f dx \wedge dy \wedge dz$ convient alors. Elle n'est pas invariante à droite car $R^\star_{a,b,c}\lambda = \frac{b}{a}\lambda$.

1– On montre que l'application $\omega_{X_1,\dots,X_p} : G \to \mathbb{R}$ est G-invariante à gauche. Soit $g, x \in G$. On a $\omega_{X_1,\dots,X_p}(x) = (L_g^\star \omega)_{X_1,\dots,X_p}(x) = \omega(TL_g X_1(x), \dots, TL_g X_p(x)) = \omega(X_1(gx), \dots, \omega X_p(gx)) = \omega_{X_1,\dots,X_p}(x)$ d'où le résultat.

2– C'est la même que celle du tore $\mathbb{T}^n$. En particulier, elle n'est pas isomorphe à la cohomologie de De Rham de $\mathbb{R}^n$ (qui est contractile).

3– $d : \Lambda^0\mathfrak{g}^\star \to \Lambda^1\mathfrak{g}^\star$ correspond à la différentielle appliquée aux fonctions C^∞ G-invariantes sur G. Ces dernières étant constantes, leur différentielle est nulle puis $d_{|\Lambda^0\mathfrak{g}^\star} = 0$. Le lemme 20.4 du poly donne que la différentielle $d : \Lambda^1\mathfrak{g}^\star \to \Lambda^2\mathfrak{g}^\star$ est telle que $d\alpha(X_1, X_2) = \alpha([X_1, X_2])$.

2. Quelles sphères sont des groupes de Lie ?

Soit G un groupe de Lie compact connexe, $\mathfrak{g} := T_eG$ son algèbre de Lie. Pour $g \in G$, on note $C_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ la conjugaison par g et $\mathrm{Ad}(g) := T_eC_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

1– Vérifier que $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ est une représentation lisse de G. On l'appelle la *représentation adjointe* de G. Justifier que $\mathfrak{g}$ admet un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ G-invariant.

2– En déduire que pour $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, Y \mapsto [X, Y]$ est antisymétrique pour $\langle .,. \rangle$ i.e. $\langle [X, Y], Z\rangle = -\langle Y, [X, Z]\rangle$ pour tout $Y, Z \in \mathfrak{g}$. (Indication : $\mathrm{ad}(X) = T_e \mathrm{Ad}(X)$).

3– Montrer que la formule $\omega(X, Y, Z) := \langle X, [Y, Z]\rangle$ définit une 3-forme invariante à gauche et à droite sur G. En déduire une condition sous laquelle $H^3(G) \neq 0$. Montrer qu'elle est satisfaite en particulier si $H^1(G) = 0$.

4– Conclure que les sphères admettant une structre de groupe de Lie sont exactement S^0, S^1 et S^3.

Solution :

1– Pour $g \in G$, l'application C_g est un difféomorphisme de G qui fixe e donc $\mathrm{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$. L'application Ad est C^∞ par lissité de l'application $G \times G \to G, (g, h) \mapsto ghg^{-1}$. Enfin, $C_{g_1g_2} = C_{g_1} \circ C_{g_2}$ et en différentiant on obtient $\mathrm{Ad}(g_1g_2) = \mathrm{Ad}(g_1)\,\mathrm{Ad}(g_2)$. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ admet un produit scalaire G-invariant car G est compact (cf question 1 exercice 1).

2– Soit $Y, Z \in \mathfrak{g}$. Pour $g \in G$, on a $\langle \mathrm{Ad}(g)Y, \mathrm{Ad}(g)Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$ donc en différentiant par rapport à G au point e suivant le vecteur $X \in \mathfrak{g}$ on obtient : $\langle \mathrm{ad}(X)Y, Z\rangle + \langle Y, \mathrm{ad}(X)Z\rangle = 0$ ce qui est le résultat.

3– D'après le cours (proposition 20.27), on a ω invariante à gauche et à droite si et seulement si pour tout $W, X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, on a $\omega([V, X], Y, Z)+\omega(X, [V, Y], Z)+\omega(X, Y, [V, Z]) = 0$ i.e. $\langle [V, X], [Y, Z]\rangle+\langle X, [[V, Y], Z]\rangle+\langle X, [Y, [V, Z]]\rangle = 0$. Par antisymétrie de $\mathrm{ad}(V)$, on a $\langle [V, X], [Y, Z]\rangle = -\langle X, [V, [Y, Z]]\rangle$. Il s'agit donc de vérifier que $-[V, [Y, Z]] + [[V, Y], Z] + [Y, [V, Z]] = 0$ ce qui est l'identité de Jacobi démontrée en cours.

D'après le cours, on a $H(G) \equiv (\Lambda\mathfrak{g}^\star)^G$ donc $H^3(G) \neq \{0\}$ si $\omega \neq 0$, autrement dit si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$. Or $H^1(G) \equiv (\frac{\mathfrak{g}}{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]})^\star$ donc $H^1(G) = 0$ implique $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g} \neq \{0\}$ puis $H^3(G) \neq 0$.

4– S^0, S^1 et $S^3 \equiv SU_2(\mathbb{C})$ (cf partiel) admettent des structures de groupes de Lie. Réciproquement, si S^k est un groupe de Lie avec $k \geqslant 2$, on a $H^1(S^k) = 0$ donc $H^3(S^k) \neq 0$ donc $k = 3$.

3. Cohomologie d'un groupe non compact

On note $G := SL_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} := T_eG$ son algèbre de Lie.

1– Montrer que l'application $G \to \mathbb{R}^2 - \{0\}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une équivalence d'homotopie. En déduire la cohomologie de G.

2– Expliciter $\mathfrak{g}$, vérifier que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. En déduire le premier groupe de cohomologie du complexe des formes G-invariantes $H^1({}^G\Omega G)$.

3– Conclure que la cohomologie des formes G-invariante ne coïncide pas avec la cohomologie de De Rham. Justifier cependant que la cohomologie de De Rham est G-invariante, i.e. pour $g \in G$, $(L_g)^\star : H^p(\Omega G) \to H^p(\Omega G)$ est l'identité.

Solution :

1– Notons f cette application et $f' : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to G, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ b & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$. On a $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2-\{0\}}$. Montrons que $f \circ f'$ est homotope à Id_G. Pour $t \in [0,1]$, on pose $h_t : G \to G, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & (1-t)c - t\frac{b}{a^2+b^2} \\ b & (1-t)d + t\frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$. Par multilinéarité du déterminant, h_t est bien à valeurs dans G et réalise une homotopie en Id_G et $f' \circ f$.
Finalement $H(G) \equiv H(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \equiv H(S^1)$ i.e. $H^k(G) = \mathbb{R}$ si $k = 0, 1$ et $H^k(G) = 0$ si $k \geqslant 2$.

2– $\mathfrak{g} = T_eG = \{X \in M_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Comme G est linéaire, le crochet sur $\mathfrak{g}$ est donné par le crochet usuel sur $M_2(\mathbb{R})$ à savoir $[X,Y] = XY - YX$. On se donne base de $\mathfrak{g}$ en posant $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $[E,F] = H$, $[H,E] = 2E$, $[H,F] = 2F$. Ainsi $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.
Or $H^1({}^G\Omega G) \equiv \{\alpha \in \Lambda\mathfrak{g}^\star,\ \alpha([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0\}$ d'où $H^1({}^G\Omega G) = 0$.

3– On ainsi $H^1(G) \neq H^1({}^G\Omega G)$. L'action de G sur lui même par translation à gauche est triviale au niveau de la cohomologie $H(G)$ car G est connexe donc pour $g \in G$, on a L_g homotope à $L_e = \mathrm{Id}_G$.

4. Cohomologie de l'espace projectif réel

Soit G un groupe fini opérant librement par difféomorphismes sur une variété M. Notons $p : M \to G\backslash M$ l'application quotient.

1– Rappeler pourquoi, pour $k \geqslant 0$, l'application $p^* : \Omega^k(G\backslash M) \to \Omega^k(M)$ est injective d'image l'ensemble des k-formes G-invariantes ${}^G\Omega^k(M)$.

2– Montrer que $[p^*] : H^k(G\backslash M) \to H^k(M)$ est injective.

3– Montrer que l'image de $[p^*]$ est formée des classes de cohomologie invariantes sous l'action de G (par tiré en arrière).

4– En déduire la cohomologie des espaces projectifs réels $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ pour $n \geqslant 1$.

Solution :

1– L'image de p^* est incluse dans $\Omega^k(M)^G$ car pour tout $G \in G$, $p \circ g = p$.
Supposons $p^*\omega = 0$. Soit $y \in M/G$ et x un antécédent de y par p. Soient $e_1, \ldots, e_k$ des vecteurs tangents à M/G en y. Comme p est un difféomorphisme local, T_xp est un isomorphisme et on calcule :

$$\omega_y(e_1, \ldots, e_k) = p^*\omega_x((T_xp)^{-1}(e_1), \ldots, (T_xp)^{-1}(e_1)) = 0,$$

ce qui montre $\omega = 0$. L'application p^* est donc injective.
Soit $\omega \in \Omega^k(M)^G$. On définit $\sigma \in \Omega^k(M/G)$ de la manière suivante : soit $y \in M/G$. On choisit x un antécédent de y par p et on pose $\sigma_y(e_1, \ldots, e_k) = \omega_x((T_xp)^{-1}(e_1), \ldots, (T_xp)^{-1}(e_1))$. L'invariance de ω sous G montre que cette définition ne dépend pas du choix de x.

Montrons que σ est une forme C^∞. Pour cela, comme p est un difféomorphisme local, on choisit un voisinage U de x et un voisinage V de y tel que $p|_U$ réalise un difféomorphisme de U sur V. Alors notre construction est telle que $\sigma|_V = ((p|_U)^{-1})^*(\omega|_U)$ et cette expression montre que σ est C^∞ au voisinage de y. Comme, par construction, $p^*\sigma = \omega$, on a montré la surjectivité de p^*.

2– Soit une $c \in H^k(M/G)$ telle que $p^*c = 0$. On choisit une forme différentielle fermée ω représentant c. L'hypothèse est que $p^*\omega$ est exacte : il existe $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ telle que $p^*\omega = d\alpha$. Posons $\alpha' = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*\alpha$. On calcule :

$$d\alpha' = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^* d\alpha = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*p^*\omega = p^*\omega$$

car $p^*\omega$ est G-invariante. L'expression de α' montre que α' est G-invariante. Par la question précédente, il existe $\beta \in \Omega^{k-1}(M/G)$ telle que $p^*\beta = \alpha'$. On a alors $p^*(\omega - d\beta) = p^*\omega - d\alpha' = 0$ donc la question précédente montre que $\omega = d\beta$ est exacte. Ainsi, $c = 0$.

3– L'image de p^* est constituée de classes de cohomologie G-invariantes par fonctorialité de la cohomologie et car $p \circ g = p$ pour $g \in G$. Réciproquement, soit $c \in H^k(M)$ une classe de cohomologie G-invariante. On choisit ω une forme fermée représentant c. Posons $\omega' = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*\omega$. Alors ω' représente aussi la classe de cohomologie c par G-invariance de c. Son expression montre que ω' est G-invariante. La première question montre alors qu'il existe $\alpha \in \Omega^k(M/G)$ telle que $p^*\alpha = \omega'$. Comme $p^*d\alpha = dp^*\alpha = d\omega' = 0$ et que p^* est injective, α est fermée. la classe de cohomologie c' qu'elle représente est bien telle que $p^*c' = c$. Ceci montre que l'image de p^* contient toutes les classes de cohomologie G-invariantes, et conclut.

4– On pose $M = \mathbb{S}^n$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant par l'antipodie f et $M/G = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ le quotient. On applique les résultats précédents. La sphère n'a que deux groupes de cohomologie non triviaux : $H^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ et $H^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$. L'antipodie agit par l'identité sur le premier car on peut choisir comme représentants de ces classes de cohomologie les fonctions constantes. L'action sur le second est la multiplication par le degré de l'antipodie f. Celui-ci est 1 quand f préserve l'orientation et -1 sinon. Or l'antipodie préserve l'orientation de $\mathbb{S}^n$ si et seulement si n est impair.

On peut alors appliquer la question précédente : $H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ est nul sauf si $i = 0$ ou si $i = n$ et n est impair, auquelcas il est de dimension 1.

5. Groupe de cohomologie de dimension infinie

Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$ est de dimension infinie

1– En utilisant une suite exacte de Mayer-Vietoris convenable ;

2– En montrant que les classes de cohomologie des $\alpha_k = \frac{(x-k)dy - ydx}{(x-k)^2+y^2}$, $k \in \mathbb{Z}$ forment une famille libre de $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$. On pourra regarder ce qu'il se passe quand on intègre les α_k sur un petit cercle autour d'un entier $l \in \mathbb{Z}$.

Solution :

1– On pose $U := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$, $V := \amalg_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} B(k, 1/4)$. Alors $U \cup V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Pour cette de décomposition de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris donne en particulier la suite exacte : $H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to H^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ ce qui se réécrit $H^1(U) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to 0$. On en déduit que $H^1(U)$ se surjecte sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et est donc de dimension infinie.

2– Il suffit de montrer que pour $\varepsilon \in]0,1[$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $\int_{k+\varepsilon S^1} \alpha_{l|k+\varepsilon S^1}$ est non nul sur $k = l$ et nul sinon.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Notons ω_k la forme volume standard sur le translaté $k + S^1$ (définie explicitement par $\omega_k = (x-k)dy - ydx$, voir TD10 par exemple). Alors $\alpha_k = p_k^\star \omega_k$ où $p_k : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z} \to k + S^1$ désigne la projection radiale. On en déduit que pour $\varepsilon < 1$, $\alpha_{k|k+\varepsilon S^1} = (p_{k|k+\varepsilon S^1})^\star \omega_k$. Comme la projection $p_{k|k+\varepsilon S^1} : k + \varepsilon S^1 \to k + S^1$ est un difféomorphisme préservant l'orientation, on a finalement $\int_{k+\varepsilon S^1} \alpha_{k|k+\varepsilon S^1} = \int_{k+S^1} \omega_k$ qui est donc non nul.

Soit maintenant $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq k$. Montrons que $\int_{k+\varepsilon S^1} \alpha_{l|k+\varepsilon S^1} = 0$. On a comme précédemment que $\alpha_{l|k+\varepsilon S^1} = (p_{l|k+\varepsilon S^1})^\star \omega_l$. Cependant $p_{l|k+\varepsilon S^1}$ n'est pas surjective sur $l + S^1$, donc est homotope à une application constante. On en déduit que $\alpha_{l|k+\varepsilon S^1}$ est une forme diférentielle fermée, puis d'intégrale nulle.

6. Surfaces non orientables

Soit U_g la somme connexe de $g+1$ copies de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. En particulier, $U_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

1– Montrer que U_g est une surface compacte connexe non orientable.

2– Calculer $\dim H^1(U_g, \mathbb{R})$ pour $g \geqslant 0$.

3– En déduire que si $g \neq g'$, U_g et $U_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

Solution :

1– U_g est bien une surface. La construction de la somme connexe montre que la somme connexe de deux variétés connexes est connexe, de sorte que U_g est connexe. La construction de la somme connexe montre que la somme connexe de deux variétés compactes est compacte (car réunion de deux compacts), de sorte que U_g est compacte.

Par construction, U_g contient une variété difféomorphe $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ privé d'un point, i.e. la bande de Möbius, qui n'est pas orientable. Ainsi, U_g ne peut être orientable.

2– La cohomologie $U_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a été calculée dans l'exercice précédent : $H^1(U_0) = 0$. Montrons par récurrence sur g que $\dim H^1(U_g, \mathbb{R}) = g$. w Notons U'_g la variété obtenue en enlevant un point à U_g. En considérant un recouvrement de U_g par U'_g et un petit disque, dont l'intersection est une couronne se rétractant sur un cercle, et appliquant Mayer-Vietoris, on montre que $\dim H^1(U'_g, \mathbb{R}) = g + 1$.

Enfin, en considérant un recouvrement de U_{g+1} par deux ouverts difféomorphes à U'_g et U'_0, dont l'intersection est une couronne se rétractant sur un cercle, et appliquant Mayer-Vietoris, on montre que $\dim H^1(U_{g+1}, \mathbb{R}) = g + 1$. Cela conclut la récurrence.

3– Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie, de sorte que deux variétés homéomorphes ont mêmes groupes de cohomologie. Mais, la question précédente montre que $\dim H^1(U_g, \mathbb{R}) \neq \dim H^1(U_{g'}, \mathbb{R})$ si $g \neq g'$: U_g et $U_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.