Département de Physique
École normale supérieure

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

FIP
2019-2020

Lionel DJADAOJEE & Simon MESSELOT (prenom.nom@ens.fr)

TD 2: Lagrangiens et constantes du mouvement

1 Pendule d'Atwood

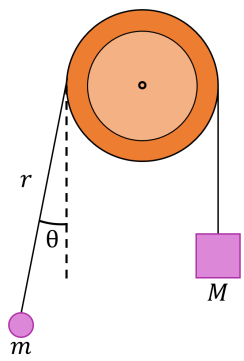
On considère le pendule d'Atwood représenté ci-dessous comportant une poulie en liaison pivot parfait autour de son axe fixe (rayon R, masse μ, moment d'inertie $J = \frac{1}{2}\mu R$).

Un fil souple inextensible sans masse posé sur la poulie relie deux masses, M de mouvement supposé vertical, et m pouvant osciller avec un angle θ. Le fil ne glisse pas sur la poulie.

1. Écrire le lagrangien L du système et en déduire les équations dynamiques relatives à r et θ.

2. Déterminer la nature du mouvement des masses en l'absence d'oscillation.

3. Évaluer les temps caractéristiques correspondants aux 2 types de mouvements du système, et expliquer pourquoi il n'est pas possible de faire une approximation découplant temporellement les 2 phénomènes.



2 Lagrangien d'une particule libre

À l'aide des symétries générales de l'espace, déduire des contraintes sur le lagrangien d'une particule libre.

3 Particule chargée dans un champ électromagnétique

On considère une particule de charge q et de masse m dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.

1. On rappelle que le potentiel-vecteur est défini par $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. Trouver l'expression des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en fonction des potentiels V et $\vec{A}$.

2. Rappeler l'expression du lagrangien L d'un tel système. Écrire les équations d'Euler-Lagrange et retrouver la force de Lorentz exercée sur la particule.

3. Expliciter la quantité $H(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_j p_j\dot{q}_j - L$, appelée *hamiltonien* du système, où $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ est appelée *impulsion conjuguée* de q_i. Que remarquez-vous au sujet de l'impulsion ?

4. Si $\vec{A}$ est un potentiel-vecteur admissible, montrer que $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ où f est une fonction réelle quelconque est également admissible. Avec une telle transformation, comment est modifié le potentiel scalaire ?

5. Une transformation comme décrite dans la question précédente s'appelle une *transformation de jauge*. Quel est l'effet d'un changement de jauge sur le lagrangien ? sur les équations du mouvement ?

4 Problème à deux corps et mouvement à force centrale

On s'intéresse au mouvement de deux particules ponctuelles M_i, de positions $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{OM_i}$, de masses m_i $(i = 1,2)$, interagissant entre elles par une force centrale (gravitation, électromagnétisme, etc.).

1. Écrire le lagrangien d'un tel système.

2. Déduire une intégrale première du mouvement liée à l'invariance par translation dans le temps du système.

3. Idem avec l'invariance par translation dans l'espace.

4. Proposer un changement de variables $(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) \to (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{R})$ qui simplifie le lagrangien en utilisant le résultat précédent. Montrer que le problème peut se ramener au mouvement d'une seule particule fictive.

5. En utilisant les coordonnées sphériques pour $\overrightarrow{r}$, trouver une nouvelle intégrale du mouvement liée à une coordonnée cyclique. Quelles conclusions en tirer ?

6. Considérons le cas particulier où la force centrale dérive de l'énergie potentiel $U(r) = -\frac{K}{r}$ où K est une constante réelle. Ce problème, dit problème de Kepler, recouvre à la fois interactions newtoniennes et coulombienne et se retrouve naturellement dans de nombreux problèmes de physique, de l'astronomie à la physique atomique.

(a) Soient $\vec{r}$ et $\vec{p}$ la position et l'impulsion de la particule fictive vue précédemment. On définit le *vecteur de Runge-Lenz* par la relation

$$\vec{\mathscr{A}} = \frac{1}{mK}\vec{L} \wedge \vec{p} + \frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

Montrer que $\vec{\mathscr{A}}$ est une constante du mouvement. *Indication : on établira au préalable que :*

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{\vec{L}}{mr^2} \wedge \vec{u}_r \tag{2}$$

où $\vec{u}_r = \vec{r}/r$

(b) Evaluer $\vec{\mathscr{A}} \cdot \vec{L}$ et indiquer l'orientation de $\vec{\mathscr{A}}$ par rapport au plan de la trajectoire.

(c) On choisit dorénavant l'axe Oz suivant la direction de $\vec{L}$ et l'axe Ox suivant celle de $\vec{\mathscr{A}}$. En formant $\vec{\mathscr{A}} \cdot \vec{r}$ et en utilisant les coordonnées polaire (r, θ) du plan xOy, établir l'équation de la trajectoire. Quelle est alors l'interprétation géométrique de $\vec{\mathscr{A}}$?