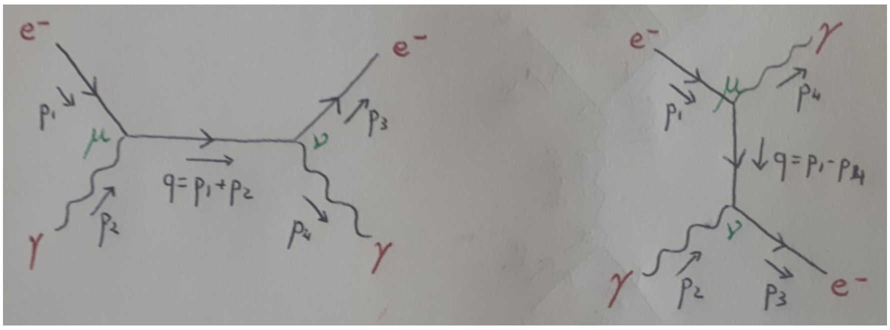
Physique des particules – L3

TD 8 (correction)

1. Il y a deux diagrammes qui contribuent à l'ordre $O(e^2)$, ce sont les suivants :



La contribution à l'élément de matrice pour ces diagrammes se décompose ainsi :
— les polarisations des photons initial $\epsilon_\mu(p_2)$ et final $\epsilon^*_\nu(p_4)$ (ou $\epsilon_\nu(p_2)$ et $\epsilon^*_\mu(p_4)$ pour le second diagramme),
— les spineurs de l'électron initial $u(p_1)$ et de l'électron final $\bar{u}(p_3)$,
— les facteurs venant des sommets d'interaction $\mathrm{i}e\gamma^\mu$ et $\mathrm{i}e\gamma^\nu$,
— le propagateur de l'électron $\frac{\mathrm{i}(\not{q}+m)}{q^2-m^2}$ avec $q = p_1 + p_2$ dans le premier cas et $q = p_1 - p_4$ dans le second.

Parmi ces termes il y en a qui sont des matrices (interaction et propagateur) ou des vecteurs (spineurs des fermions), on ne peut donc pas les multiplier dans n'importe quel ordre. Pour écrire l'élément de matrice il suffit de suivre les lignes fermioniques dans le sens opposée aux flèches qui sont dessus et d'écrire les différents facteurs que l'on recontre les uns après les autres. Ici, cela donne

$$-\mathrm{i}e^2\bar{u}(p_3)\gamma^\nu\frac{\not{q}+m}{q^2+m^2}\gamma^\mu u(p_1) \tag{1}$$

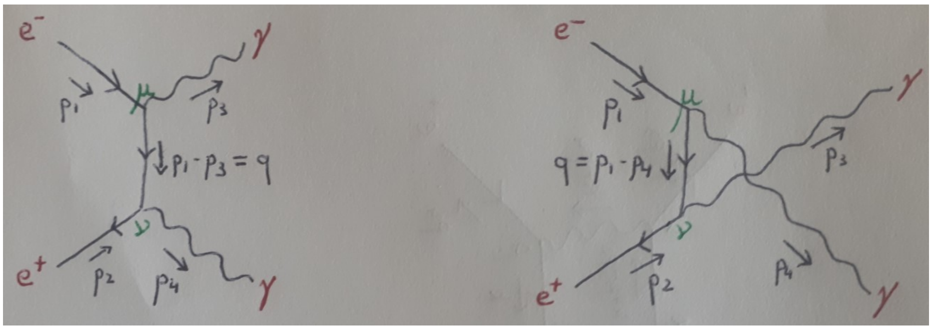
Si l'on regroupe tout, les contributions à l'élément de matrice $\mathrm{i}\mathcal{M}$ sont

$$-\mathrm{i}e^2\bar{u}(p_3)\gamma^\nu\frac{\not{p_1}+\not{p_2}+m}{(p_1+p_2)^2-m^2}\gamma^\mu u(p_1)\epsilon_\mu(p_2)\epsilon^*_\nu(p_4) \tag{2}$$

pour le premier diagramme et

$$-\mathrm{i}e^2\bar{u}(p_3)\gamma^\nu\frac{\not{p_1}-\not{p_4}+m}{(p_1-p_4)^2-m^2}\gamma^\mu u(p_1)\epsilon_\nu(p_2)\epsilon^*_\mu(p_4) \tag{3}$$

pour le second.



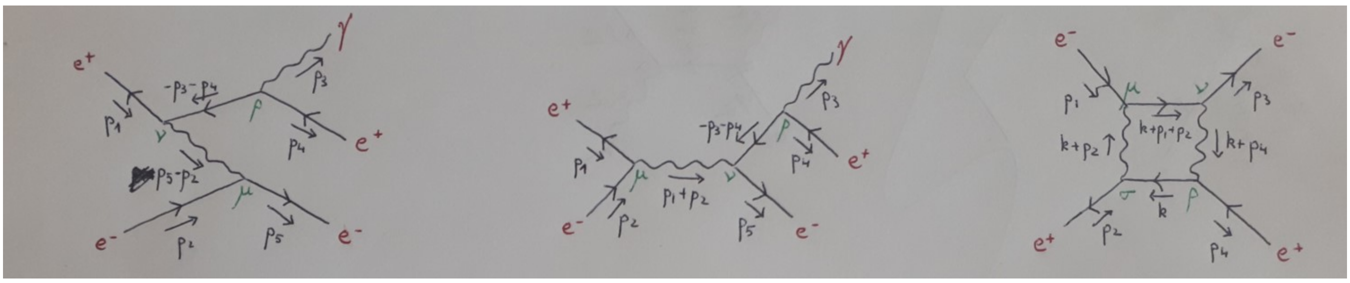
2. Il y a deux nouveaux deux diagrammes possibles.
   La contribution à l'élément de matrice pour ces diagrammes se décompose ainsi :
   — les polarisations des photons finaux $\epsilon^*_\mu(p_3)$ et $\epsilon^*_\nu(p_4)$ (ou $\epsilon^*_\mu(p_4)$ et $\epsilon^*_\nu(p_3)$ pour le second diagramme),
   — les spineurs des fermions initiaux $u(p_1)$ (électron initial) et $\bar{v}(p_2)$ (positron initial),
   — les facteurs venant des sommets d'interaction $\mathrm{i}e\gamma^\mu$ et $\mathrm{i}e\gamma^\nu$,
   — le propagateur de l'électron $\frac{\mathrm{i}(\not{q}+m)}{q^2-m^2}$ avec $q = p_1 - p_3$ dans le premier cas et $q = p_1 - p_4$ dans le second.
   Si l'on regroupe tout, les contributions à l'élément de matrice $\mathrm{i}\mathcal{M}$ sont

$$-\mathrm{i}e^2\bar{v}(p_2)\gamma^\nu\frac{\not{p}_1-\not{p}_3+m}{(p_1-p_3)^2-m^2}\gamma^\mu u(p_1)\epsilon^*_\mu(p_3)\epsilon^*_\nu(p_4) \tag{4}$$

   pour le premier diagramme et

$$-\mathrm{i}e^2\bar{v}(p_2)\gamma^\nu\frac{\not{p}_1-\not{p}_4+m}{(p_1-p_4)^2-m^2}\gamma^\mu u(p_1)\epsilon^*_\nu(p_3)\epsilon^*_\mu(p_4) \tag{5}$$

   pour le second.
3. Pour compléter les diagrammes de manière réaliste il suffit qu'à chaque sommet d'interaction il y ait une flèche entrante et une flèche sortante. Une possibilité est la suivante :



   Les contributions à l'élément de matrice associées aux deux premiers diagrammes s'écrivent de façon similaire à précédemment. La seule nouveauté est la présence de photons virtuels dont les propagateurs s'écrivent $\frac{-\mathrm{i}\eta_{\mu\nu}}{q^2}$ si le photon relie les sommets d'indices μ et ν et a une impulsion q. On obtient

$$-\mathrm{i}e^3\left[\bar{u}(p_5)\gamma^\mu u(p_2)\right]\frac{\eta_{\mu\nu}}{(p_5-p_2)^2}\left[\bar{v}(p_1)\gamma^\nu\frac{-\not{p}_3-\not{p}_4+m}{(p_3+p_4)^2-m^2}\gamma^\rho v(p_4)\right]\epsilon^*_\rho(p_3) \tag{6}$$

pour le premier diagramme et

$$-\mathrm{i}e^3\left[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)\right]\frac{\eta_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2}\left[\bar{u}(p_5)\gamma^\nu\frac{-\not{p_3}-\not{p_4}+m}{(p_3+p_4)^2-m^2}\gamma^\rho v(p_4)\right]\epsilon^*_\rho(p_3) \tag{7}$$

pour le second.

Le troisième diagramme est en revanche assez différent parce qu'il contient une boucle. Dans un tel diagramme la conservation de la quadri-impulsion à chaque interaction ne permet pas de fixer les impulsions de toutes les particules fictives : on peut translater toutes les quadri-impulsions qui parcourent la boucle d'un même quadri-vecteur k tout en respectant la conservation de l'impulsion à chaque interaction. Dans ce cas, pour obtenir la contribution à l'élément de matrice, il faut intégrer sur k (avec un facteur $(2\pi)^{-4}$, c'est une nouvelle règle de Feynman). Cela donne ici

$$e^4\int\frac{\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\nu(\not{k}+\not{p_1}+\not{p_2}+m)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{v}(p_2)\gamma_\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu v(p_4)\right]}{((k+p_1+p_2)^2-m^2)(k^2-m^2)(k+p_2)^2(k+p_4)^2}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,. \tag{8}$$