Hydrodynamique — TD 4

Force de Stokes

On s'intéresse dans ce TD à la force de trainée qui s'exerce sur une sphère plongée dans un écoulement incompressible uniforme d'un fluide très visqueux (vitesse $U\mathbf{e_z}$). On note η la viscosité dynamique du fluide, supposé newtonien.

1. On s'intéresse ici à la limite bas Reynolds ($Re \ll 1$) des équations de Navier-Stokes. Quel terme peut alors être négligé ? Ecrire la forme simplifiée que prennent les équations dans ce cas. On parle parfois d'écoulement rampant.

2. Discuter la pertinence d'une telle approximation pour une particule de diamètre $D = 1$ cm se déplaçant à une vitesse $U = 1$ cm/s dans de l'eau à 20°C. Même question pour de l'huile d'olive ($\nu \approx 10^{-4}$ m^2.s^{-1}) et du sirop de sucre (on prendra $\nu = 0.1$ m^2.s^{-1}).
3. Nous cherchons une solution axisymétrique pour l'écoulement uniforme autour d'une sphère en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{u} = [u_r(r,\theta), u_\theta(r,\theta), 0]$$

   En utilisant la condition d'imcompressibilité de l'écoulement, montrer qu'il existe une fonction Ψ telle que :

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \left(\frac{\Psi \mathbf{e}_\phi}{r\sin(\theta)}\right)$$

   où Ψ est la fonction de courant, constante le long des lignes de courants.

4. Exprimer $\nabla \wedge \mathbf{u}$ en fonction de $E^2\Psi$, où E^2 est l'operateur donné par :

$$E^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]$$

   Ré-exprimer alors les équations de Navier-Stokes en utilisant la vorticité.
5. Trouver une relation reliant $\partial_r P$ et Ψ et une relation reliant $\partial_\theta P$ et Ψ. En déduire l'équation statisfaite par Ψ.

6. Donner la condition limite sur l'écoulement à l'infini et en déduire l'expression correspondante pour la fonction de courant Ψ lorsque $r \to \infty$.
7. Cette condition suggère d'essayer une solution de la forme :

$$\Psi = f(r)\sin^2(\theta)$$

   Quelles conditions aux limites verifie Ψ en $r = a$? En utilisant notamment les conditions à l'infini et les conditions en $r = a$, identifier $f(r)$ et en déduire que la solution du problème est :

$$\Psi = \frac{U}{4}\left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar\right)\sin^2(\theta)$$

   Dessiner quelques lignes de courant autour de la sphère.

8. Calculer le champ de vitesse. Commenter le comportement de l'écoulement à grande distance de la sphère.
9. En utilisant l'équation de Navier-Stokes, calculer le champ de pression.
10. On donne les composantes du tenseur des contraintes en coordonnées sphériques :

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{\eta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

Par des arguments de symétrie, on s'attend à ce que la force nette sur la sphère soit dans la direction du courant uniforme. La force par unité de surface pertinente est donc

$$f = \sigma_{rr}\cos(\theta) - \sigma_{r\theta}\sin(\theta)$$

Montrer que sur la sphère :

$$f = -p_\infty \cos(\theta) + \frac{3}{2}\frac{\eta U}{a}$$

11. En déduire que la force de trainée D exercée par le fluide sur la sphère est donnée par :

$$D = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

12. Donner l'expression de la force de trainée.
13. Proposer une expérience simple pour tester cette loi sur la force de trainée.

Annexe : coordonnées sphériques

Divergence :

$$\nabla.\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi)}{\partial\phi}$$

Rotationnel :

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{e_r} +$$
$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(A_r)}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta +$$
$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\phi$$