



TD 1: Principes variationnels

1 Quelques principes variationnels

1. Prouver que le plus court chemin pour aller d'un point A à un point B est la ligne droite.
2. Les films de savon cherchent à minimiser la surface de contact avec l'air. Pourquoi ? En déduire un principe variationnel. Étudier le cas d'un film de savon entre deux anneaux de diamètre $2r$, espacés de $2d$.
3. Bonus : On souhaite transporter une particule de masse m de A à B d'altitude différente à l'aide d'un rail. Trouver la forme optimale de celui-ci pour minimiser le temps de trajet.

2 Principe de Fermat

Dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, le principe de Fermat stipule que les rayons lumineux joignant deux points A et B , d'un milieu d'indice $n(\mathbf{r})$, suivent une trajectoire rendant extrémal le chemin optique $\ell_{AB} = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds$, où s est l'abscisse curviligne.

1. Établir l'équation de la trajectoire lumineuse à partir des équations d'Euler-Lagrange.
2. Appliquer au cas particulier où l'indice varie selon $n^2(z) = 1 + az$, avec a un nombre constant. Expliquer le phénomène des mirages optiques.

3 Nanotubes de carbone

Les nanotubes de carbone sont des variétés allotropiques du carbone dérivées du graphite. Ces tubes, d'un diamètre de quelques nanomètres et d'une longueur pouvant atteindre plusieurs microns, possèdent des propriétés mécaniques remarquables que nous allons étudier dans ce qui suit.

On modélise un nanotube par un solide élastique cylindrique de longueur libre L selon la direction x , et de rayon a . Afin de modéliser les déformations élastiques du solide selon la direction x , on décrit celui-ci par une série de ressorts de longueur à vide ℓ_0 , de raideur k , chaque section du solide contenant des ressorts repartis uniformément selon une densité surfacique σ (Figure 1).

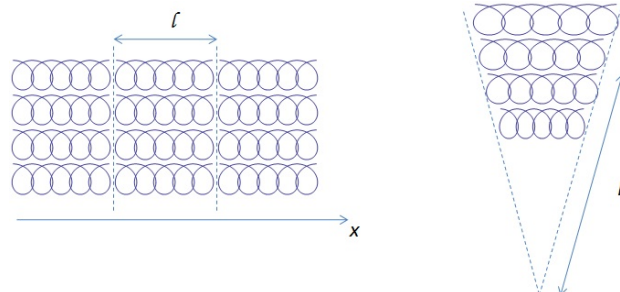


FIGURE 1 – Gauche : modélisation d'un solide élastique (coupe dans le plan xOy). Droite : déformation de flexion dans le plan xOy , selon un rayon de courbure moyen R .

1. **Efforts de compression.** On comprime le solide dans la direction x en exerçant une force $\pm F$ à ses extrémités. Le module d'Young E du solide étant défini par

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}, \quad (1)$$

donner son expression en fonction de σ , k et ℓ_0 .

2. **Efforts de flexion.** On fléchit le solide selon un arc de cercle de centre O et de rayon R (Figure 1), sans variation de sa longueur moyenne, et on cherche à évaluer l'énergie élastique nécessaire à cette déformation. Traduire la condition de longueur moyenne inchangée, et calculer la longueur d'un ressort placé à une distance d du centre de flexion. En déduire son énergie.
3. En sommant sur les ressorts constituant le solide, montrer que l'énergie par unité de longueur s'écrit

$$\frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{EI}{2R^2}, \quad (2)$$

où on explicitera I . Le produit EI s'appelle le *module de flexion* selon Oz . Le calculer.

4. On considère un nanotube encastré dans un support, à l'extrémité duquel on exerce une force F selon une direction perpendiculaire au tube au repos. Dans la suite, on décrit la déformation du nanotube par une courbe $M(s)$, paramétrée par l'abscisse curviligne s , et on note $\theta(s)$ l'angle de la tangente locale avec l'axe x . Montrer que l'énergie totale du système peut s'écrire

$$\mathcal{E}^{\text{tot}} = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + F \sin \theta \right] ds. \quad (3)$$

5. Minimiser \mathcal{E}^{tot} par rapport à $\theta(s)$ et montrer que θ est solution de l'équation différentielle

$$-EI \frac{d^2 \theta}{ds^2} + F \cos \theta = 0. \quad (4)$$

Les conditions aux limites aux extrémités du nanotube sont $\theta(0) = 0$ et $\theta'(L) = 0$.

6. Dans la limite des petites déformations, relier $\theta(s)$ à $z(x)$. On prendra $z(0) = 0$ comme origine verticale. Déduire des questions précédentes l'expression de la déflection $z(L)$.
7. On a représenté sur la figure 2 la déflection d'un nanotube de carbone de rayon $a = 32.9$ nm. Donner un ordre de grandeur de son module d'Young. Comparer à celui de l'acier (210 GPa).

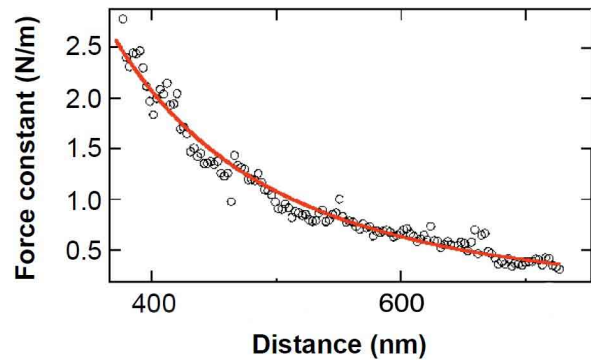
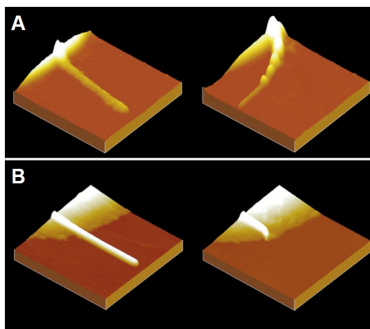


FIGURE 2 – *A gauche* et *B gauche* : Image du nanotube non contraint en microscopie à effet tunnel. *A droite* : nanotube déformé dans le régime élastique. *B droite* : nanotube fracturé. *Droite* : raideur effective $-\frac{dF}{dz}$ d'un nanotube de rayon $a = 32.9$ nm en fonction de sa longueur. D'après *Nanobeam Mechanics : Elasticity, Strength, and Toughness of Nanorods and Nanotubes*, Eric W. Wong, Paul E. Sheehan, and Charles M. Lieber Science **277**, 5334 (1997).