Mécanique quantique – L3

Sylvain Nascimbène

Séance de tutorat du 9 octobre 2019

Dynamique d'une particule : comparaison classique/quantique

---

1 Théorème d'Ehrenfest

On considère un système quantique évoluant selon un hamiltonien $\hat{H}$, ainsi qu'une observable indépendante du temps $\hat{A}$.

1. Écrire l'équation de Schrödinger satisfaite par l'état du système $|\psi(t)\rangle$.
2. Obtenir l'équation d'Ehrenfest, qui régit l'évolution temporelle de la valeur moyenne $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$:

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}\langle \hat{A} \rangle}{\mathrm{d}t} = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle. \tag{1}$$

2 Lien avec l'évolution classique

On s'intéresse au mouvement d'une particule dans un potentiel à une dimension $V(x) = V_0\, x^n$. Les opérateurs qui interviennent dans le traitement quantique du problème vérifient :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \mathrm{i}\hbar, \tag{2}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V_0\, \hat{X}^n. \tag{3}$$

3. Appliquer le théorème d'Ehrenfest aux opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$. Comparer les équations obtenues aux équations classiques du mouvement.
4. Pour quel type de potentiels retrouve-t-on exactement les mêmes équations ?

3 Evolution d'une particule libre

Dans la suite, on supposera la particule libre (pas de terme d'énergie potentielle) et on se place dans son référentiel propre, de telle façon que $\langle \hat{P} \rangle(0) = 0$ et $\langle \hat{X} \rangle(0) = 0$. On cherche à différencier l'évolution du système quantique en étudiant la dispersion de l'observable $\hat{X}$.

5. Écrire les équations d'évolution pour $\langle \hat{X}^2 \rangle$, $\langle \hat{P}^2 \rangle$ et $\langle \hat{C} \rangle = \langle \hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X} \rangle$.
   Montrer qu'elles constituent un système fermé que l'on résoudra.
6. Montrer que l'on peut choisir l'origine des temps de telle sorte que $\langle \hat{C} \rangle(t = 0) = 0$.
7. Montrer que $\Delta\hat{X}^2$ croît au cours du temps.