HYDRODYNAMIQUE — TD 2

ADVECTION-DIFFUSION

Cet exercice traite de l'étalement d'une tâche de colorant en présence d'un écoulement.

Équation d'advection-diffusion

Nous considérons un fluide incompressible (div $(\overrightarrow{v}) = 0$) qui contient une faible quantité de colorant de concentration locale $c(\overrightarrow{r}, t)$ (en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$). La diffusivité moléculaire du colorant dans le fluide est notée κ.

1. Établir que le champ de concentration c vérifie :
$$\frac{\mathrm{D}c}{\mathrm{D}t} = \kappa \Delta c \tag{1}$$
2. On considère que le fluide est confiné dans un volume de contrôle V fixe. La surface de ce volume de contrôle est notée S et elle est constituée de parois solides imperméables. Montrer :
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V c^2\,\mathrm{d}\tau = -\kappa \int_V (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ c)^2\,\mathrm{d}\tau \tag{2}$$
3. Déduire de l'équation (2) que la concentration tend vers une valeur homogène.
4. Discuter l'effet du champ de vitesse sur l'homogénéisation de la concentration à partir de cette même équation (2).

Dispersion de Taylor

En plus des hypothèses de la section précédente, nous considérons maintenant que le champ de vitesse est donné et qu'en particulier qu'il n'est pas affecté par le colorant (le colorant est un «scalaire passif»).

Nous considérons l'écoulement bidimensionnel entre deux parois rigides et imperméables situées en $y = d$ et $y = -d$ (voir figure 1), dans un canal de longueur infinie. Nous admettons que le champ de vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = u(y)\overrightarrow{i} = a(d^2 - y^2)\overrightarrow{i}$, où a est une constante et $\overrightarrow{i}$ le vecteur unitaire dans la direction x.

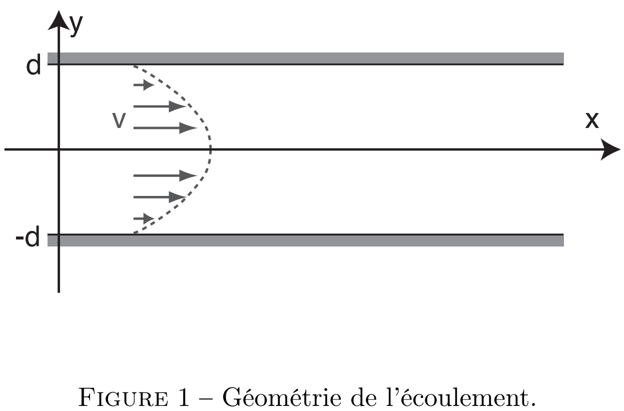

FIGURE 1 – Géométrie de l'écoulement.

Le but de cet exercice est de montrer qu'une tache de colorant, observée dans un référentiel qui lui est liée, s'étale en suivant une équation de diffusion avec un coefficient de diffusion effectif qui dépend de la vitesse du fluide.

1. Dessiner l'évolution d'une tache de colorant dans le cas $\kappa = 0$.
2. Discuter qualitativement le cas où κ est faible mais non nul. En considérant l'étalement de la tâche selon x, préciser par rapport à quelle grandeur κ doit être comparée pour être considérée comme faible.
3. Pour établir l'équation de diffusion effective du colorant selon x, nous nous plaçons dans le cas où κ est faible. Nous effectuons le changement de variable suivant :

$$X = \varepsilon(x - v_0 t) \tag{3}$$
$$Y = y \tag{4}$$
$$T = \varepsilon^2 t \tag{5}$$

   où v_0 est une vitesse de l'ordre de ad^2 et où $\varepsilon \ll 1$. Justifier la forme de ce changement de variable.
4. Réécrire l'équation (1) en fonction des nouvelles variables.
5. Écrire l'équation précédente à l'ordre 0 en ε. En déduire que la concentration à l'ordre 0 notée c_0 ne dépend que de X et T, ce qui peut s'écrire $c_0 = F(X, T)$.
6. Écrire l'équation à l'ordre 1. En déduire qu'il faut choisir $v_0 = 2ad^2/3$. Montrer que la concentration à l'ordre 1 notée c_1 vérifie :

$$c_1(X, Y, T) = \frac{ad^4}{3\kappa} P(\xi) \frac{\partial F}{\partial X} + H(X, T) \tag{6}$$

   où $P(\xi)$ est un polynôme de $\xi = Y/d$ que l'on précisera.
7. Écrire l'équation à l'ordre 2. Montrer que $F(X, T)$ vérifie une équation de diffusion de coefficient :

$$\kappa + \frac{a^2 d^6}{18\kappa} \int_{-1}^{1} (P'(\xi))^2 \, \mathrm{d}\xi \tag{7}$$

8. Le calcul donne comme coefficient de diffusion effectif :

$$\kappa_{\text{eff}} = \kappa + \frac{8}{945} \frac{a^2 d^6}{\kappa} \tag{8}$$

   Commenter la variation de κ_{eff} avec la vitesse typique de l'écoulement. Commenter la variation de κ_{eff} avec κ lorsque κ est faible. À quelles conditions le calcul perturbatif effectué pour obtenir le résultat (8) est-il valable ?

Bibliographie

[1] G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press (2007) page 136

[2] G. Taylor, *Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube*, Proc. Roy. Soc. A. **219**,186-203 (1953)