Géométrie Différentielle, TD 12 avril 2019

1. Intégration et dérivée de Lie - A FAIRE AVANT LE TD

Soit M une variété compacte orientée de dimension n, ω une forme différentielle de degré n sur M et X un champ de vecteurs sur M. Montrer que

$$\int_M \mathcal{L}_X \omega = 0.$$

Solution :

D'après la formule de Cartan, $\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_X d\omega = d(i_X\omega)$ car ω est de degré maximal. La formule de Stokes nous dit alors que

$$\int_M \mathcal{L}_X\omega = \int_M d(i_X\omega) = 0.$$

2. Orientabilité - A FAIRE AVANT LE TD

1– Montrer que la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ est orientable.

2– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une submersion, et M la sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définie par $M = f^{-1}(0)$. Montrer que M est orientable.

3– Une sous-variété d'une variété orientable est-elle nécessairement orientable ?

4– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \dots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de T_xM,

$$\omega_x(e_1, \dots, e_d) = 1.$$

5– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \widehat{\mathrm{d}x_i} \dots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Solution :

1– Pour $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, on pose $\omega_x = i_x dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Lambda^{n-1} T_x^*\mathbb{S}^{n-1}$. On obtient une forme volume sur $\mathbb{S}^{n-1}$ d'où son orientabilité.

2– C'est en fait vrai pour toute sous-variété $M \subseteq \mathbb{R}^n$ dont le fibré normal est trivialisable. C'est bien le cas si M est l'image réciproque d'un point par une submersion (cf. TD 5). Supposons donc simplement $N(M)$ trivialisable, autrement dit qu'il existe des applications lisses $X_1, \ldots, X_k : M \to \mathbb{R}^n$ telles que pour tout $x \in M$, on a $(X_1(x), \ldots, X_k(x))$ qui forme une base de $T_xM^\perp$. Pour $x \in M$, on pose $\omega_x = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(X_1(x), \ldots, X_k(x), ., \ldots, .) \in \Lambda^{\dim M} T_x^*M$. On obtient une forme volume sur M d'où son orientabilité.

3– NON, d'après le théorème de Withney, toute variété peut se voir comme une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ pourvu que $\mathbb{R}^n$ soit assez grand. Or $\mathbb{R}^n$ est orientable mais toute variété n'est pas orientable (voir exercices suivant).

4– Soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un recouvrement de M par des cartes orientées, $(\chi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée. Fixons $i \in I$, notons $(U_i, \varphi_i) = (U, \varphi)$. Soit $X_1, \ldots, X_d \in \Gamma(TU)$ une base de champs de vecteurs sur U (obtenue par exemple en tirant en arrière la base canonique sur $\varphi(U)$). Quitte à remplacer cette base par son orthonormalisé de Gram-Schmidt, on peut supposer qu'elle est orthonormale (pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$). Quitte à échanger X_1 et X_2, on peut supposer cette base directe pour l'orientation de M. On note $(X_i^*)_{i=1\ldots d}$ la base duale. Alors pour toute base de champs de vecteurs orthonormée directe sur U, on a $X_1^* \wedge \cdots \wedge X_d^*(Y_1, \ldots Y_d) = 1$. On conclut en posant $\omega_i := \chi_i(X_1^* \wedge \cdots \wedge X_n^*)$. puis $\omega = \sum_{i\in I} \omega_i$.

5– On considère l'orientation standard de $\mathbb{S}^{n-1}$ donnée par la forme volume de la réponse à la question 1). On remarque que cette forme volume envoie toute base directe orthonormée sur 1. Donc elle convient. Le calcul explicite donne l'expression (cf TD9 pour le calcul explicite de $i_v\omega$).

3. Comparaison bord / volume

Soit $vol = dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface compacte. L'intérieur de S est un domaine $N \subseteq \mathbb{R}^3$ dont le bord est $\partial N = S$. Pour $p \in S$, on note $v(p)$ la normale sortante en p à S. Soit la 2-forme d'aire $\sigma \in \Omega^2(S)$ définie par $\sigma(X, Y) = vol(v(p), X, Y)$ si X, $Y \in T_pS$. L'aire de S est $\int_S \sigma$.

1– Soit $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$. Calculer $d\alpha$.

2– Montrer que si (V_1, V_2) est une base orthonormée directe de T_pS, alors

$$\alpha(V_1, V_2) \leqslant ||p||\sigma(V_1, V_2)$$

3– En déduire que si N est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R, alors

$$\text{volume}(N) \leqslant \frac{R}{3}\text{aire}(\partial N)$$

Solution :

1– $d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = 3dx \wedge dy \wedge dz$

2– On a $\sigma(V_1, V_2) = 1$. Par ailleurs, on voit par un calcul direct que $\alpha(V_1, V_2) = \langle p, V_1 \times V_2 \rangle$ où $\times$ désigne le produit vectoriel. Comme $||V_1 \times V_2|| \leqslant 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne le résultat.

3– $Aire(\partial N) = \int_{\partial N} \sigma \geqslant \int_{\partial N} \frac{1}{R}\alpha \geqslant \frac{3}{R} Vol(N)$ par la formule de Stokes.

4. Non orientabilité

1– Soit X une variété connexe munie d'une action libre et propre d'un groupe de Lie discret G. Montrer que si le quotient $G\backslash X$ est orientable, alors X est orientable et l'action de G préserve l'orientation sur X.

2– Montrer que $P^n(\mathbb{R})$ n'est pas orientable si n est pair. Que dire si n est impair ?

3– Montrer que le ruban de Moebius n'est pas orientable.

4– Montrer que la bouteille de Klein n'est pas orientable.

Solution :

1– On considère la projection de $p : X \to G\backslash X$. C'est un difféomorphisme local. On tire en arrière via p un atlas orienté de $G\backslash X$. C'est un atlas orienté préservé par l'action de G. Comme de plus X est connexe, G préserve toute orientation de X (i.e. celle induite par $G\backslash X$ et "l'autre" en obtenu en la renversant).

2– Si $P^n(\mathbb{R})$ est orientable, alors il admet une forme volume ω. On la tire en arrière via la projection $p : \mathbb{S}^n \to P^n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{S}^n/x \sim -x$ Cela définit une forme volume $\widetilde{\omega}$ sur $\mathbb{S}^n$ invariante par $x \mapsto -x$. Mais comme $\mathbb{S}^n$ est connexe, on sait que $\widetilde{\omega}$ est de la forme $\widetilde{\omega} = f\widetilde{\omega}_0$ où $\widetilde{\omega}_0$ est la forme définie dans la dernière question de l'exercice 2, et f est une fonction C^∞ soit strictement positive, soit strictement négative. Si n est pair, $\widetilde{\omega}_0$ est ant-invariante par antipodie, on a $\widetilde{\omega}$ qui ne peut être invariante par antipodie. Absurde.

Si n est impair, on a l'orientabiité en passant au quotient la forme volume $\widetilde{\omega}_0$ qui alors est bien invariante par antipodie.

3– Le Ruban de Moebius R est la variété quotient de $\mathbb{R}^2$ par le groupe de transformations engendré par $f : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Cette application renverse l'orientation de $\mathbb{R}^2$. En raisonnant comme en 2), on conclut que R n'est pas orientable.

4– La bouteille de Klein K est la variété quotient de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ par le groupe de transformations engendré par $f : (x, y) \mapsto (1/2 - x, y + 1)$. Cette application renverse l'orientation de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. En raisonnant comme en 2), on conclut que K n'est pas orientable.

5. Volume d'un quotient

Soit X une variété compacte de dimension n. Soit G un groupe fini agissant librement par C^∞-difféomorphismes sur M. On note $p : X \to X/G$ le quotient.

1– Si X/G est orientée, montrer que X est munie d'une orientation naturelle.

2– Soit ω une n-forme différentielle sur X/G. Montrer que :

$$\int_X p^*\omega = |G| \int_{X/G} \omega.$$

On pourra commencer par traiter le cas où ω a support inclus dans un ouvert suffisamment petit de X/G.

Solution :

1– On va prendre pour cartes orientées de X les cartes construites comme suit. Soit $x \in X$, et U, V des voisinages de x et $p(x)$ tels que p réalise un difféomorphisme $U \to V$. Quitte à réduire U et V, on peut supposer qu'il existe une carte orientée $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ de X/G. Alors $\varphi \circ p : V \to \mathbb{R}^n$ est une carte orientée de X.

Il faut vérifier que les changements de carte ont jacobien positif. Mais le jacobien en un point x du changement de carte entre les cartes $\varphi \circ p$ et $\psi \circ p$ coïncide avec le jacobien en $p(x)$ du changement de carte entre les cartes φ et ψ, qui est positif car les cartes φ et ψ sont des cartes orientées de X/G.

2– Soit $y \in X/G$, et $p^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_{|G|}\}$. Comme p est un difféomorphisme local, si U_y est un voisinage suffisament petit de y, $p^{-1}(U_y)$ est réunion disjointe de $|G|$ ouverts $U_y^1, \dots, U_y^{|G|}$ difféomorphes par p à U_y et voisinages respectifs de $x_1, \dots, x_{|G|}$. Les U_y forment un recouvrement ouvert de X/G. Par compacité, on extrait un recouvrement fini $U_1, \dots, U_r$ (et on note $p^{-1}(U_j) = U_j^1 \cup \dots \cup U_j^{|G|}$). On choisit une partition de l'unité χ_j adaptée au recouvrement ouvert U_j. On écrit alors :

$$\int_X p^*\omega = \sum_j \int_X p^*(\chi_j\omega) = \sum_j \sum_{i=1}^{|G|} \int_{U_j^i} p^*(\chi_j\omega).$$

Comme p induit un difféomorphisme $U_j^i \to U_j$, il vient :

$$\int_X p^*\omega = \sum_j |G| \int_{U_j} \chi_j\omega = |G| \sum_j \int_{X/G} \chi_j\omega = |G| \int_{X/G} \omega.$$

6. Sommes de normales

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Soit M une partie de $\mathbb{S}^2$ délimitée par une sous-variété de dimension 1 fermée ∂M de $\mathbb{S}^2$, de sorte que M est une variété à bord de bord ∂M.

On munit M et ∂M des formes volumes canoniques, qu'on note da et ds. Si $x \in \mathbb{S}^2$, on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant. Si $x \in \partial M$, on note $n(x)$ le vecteur tangent à la sphère en x qui est le vecteur normal unitaire sortant à ∂M.

Montrer que :

$$\int_{\partial M} n(x)ds + 2 \iint_M N(x)da = 0.$$

Solution :

On va considérer des formes différentielles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les formules usuelles restent valables en raisonnant coordonnées par coordonnées dans $\mathbb{R}^3$.

Introduisons la 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\omega_x(v) = -x \times v$, où $\times$ désigne le produit vectoriel. En particulier, on vérifie que $\omega|_{\partial M} = n(x)ds$.

Introduisons la 2-forme différentielle α sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\alpha_x(v_1, v_2) = v_1 \times v_2$. En particulier, on vérifie que $\alpha|_M = N(x)da$.

On calcule de plus que $\mathrm{d}\omega = -2\alpha$. Par exemple, la première coordonnée de ω est donnée par $x_3dx_2 - x_2dx_3$, de sorte que la première coordonnée de $\mathrm{d}\omega$ est donnée par $-2dx_2 \wedge dx_3$. Mais la première coordonnée de α est bien $dx_2 \wedge dx_3$.

On applique alors le théorème de Stokes : $\int_{\partial M} n(x)ds = \int_{\partial M} \omega = \iint_M \mathrm{d}\omega = -2 \iint_M \alpha = -2 \iint_M N(x)da$