Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : TD n°2

Fonctions analytiques et variables complexes

Emmanuel Baudin & Francesco Zamponi

1 Application des formules de Cauchy-Riemann

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine du plan complexe. On notera $z = x + \mathrm{i}y$ et $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ avec u, v les parties réelles et imaginaires de f.

1. On considère un point $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Montrer que les lignes $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ et $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ s'intersectent à angle droit en (x_0, y_0).
   On suppose maintenant que $f'(z_0) = 0$ et $f''(z_0) \neq 0$. Quelle est l'allure de la surface $u(x, y)$ au voisinage de (x_0, y_0) ?
2. Déterminer $f(z)$ sachant que $f(0) = 0$ et :
   a) $u(x, y) = e^x[(x^2 - y^2)\cos y - 2xy \sin y]$;
   b) $v(x, y) = 3x^2y - y^3$;
   c) $v(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$.
3. Quelles sont les conditions sur les nombres réels a, b, c, d pour que la fonction $p(x, y) = f(ax + by, cx + dy)$ soit holomorphe ?

2 Dérivabilités au sens de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$

1. Pour une fonction $F(x, y) = f(z)$ (avec $z = x + \imath y$), y a-t-il équivalence entre la dérivabilité de F par rapport à x et y, et celle de f au sens complexe ?
2. On introduit les opérateurs différentiels
   $$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
   agissant sur les fonctions $\mathcal{C}^1$ de deux variables réelles à valeurs complexes. Calculer ∂z, $\partial \bar{z}$, $\bar{\partial} z$ ainsi que $\bar{\partial}\bar{z}$.
3. Si f est holomorphe, montrer que
   $$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,,$$
   où $z = x + \mathrm{i}y$. Récrire les conditions d'analyticité de Cauchy-Riemann et calculer ∂F et $\bar{\partial} F$.
4. Calculer $\partial\bar{\partial}$. Montrer que si f est holomorphe, alors
   $$\triangle(|f|^2) = 4\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 .$$

3 Exemple d'une frontière essentielle

Soit $f(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$. Montrer qu'elle converge dans le disque $|z| < 1$ et qu'elle a une singularité en $z = 1$. Montrer que f satisfait les relations fonctionnelles $f(z) = z^2 + f(z^2)$, et plus généralement $f(z) = z^2 + z^4 + z^8 + \cdots + z^{2^p} + f(z^{2^p})$ pour tout p entier. En déduire que f a aussi des singularités en toute racine 2^p-ième de l'unité.

4 Singularités

Déterminer en quels points les fonctions suivantes ne sont pas holomorphes sur le plan complexe.

a) $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$
b) $g(z) = \frac{z}{i+z}$
c) $h(z) = \frac{3z^2-2}{z^2+2z+5}$
d) $l(z) = \exp 1/z$

5 Exercices maison

1. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction analytique. Trouver la partie imaginaire $v(x, y)$ sachant que :
   a) $u(x, y) = x^3 + 3x(1 - y^2)$;
   b) $u(x, y) = \cos y \cosh x$;
   c) $u(x, y) = e^{-x}[(1 + x)\cos y + y \sin y]$.

2. Trouver les singularités sur le plan complexe de fonctions suivantes et discuter leurs natures.
   a) $f(z) = \frac{z^2-\pi^2}{\sin z}$
   b) $g(z) = \frac{3z^2+4}{z^2-16}$
   c) $h(z) = \cot z$
   c) $l(z) = \frac{\sin z - z}{z \sin z}$