Mathematiques pour physiciens.

Marco Biroli

19 novembre 2019

1 Analyse Complexe.

1.1 Rappels.

Definition 1.1. Un ensemble E est connexe ssi il ne peut être écrit comme la reunion de deux ouverts disjoints.

Proposition 1.1. *L'image d'un connexe par une application continue est connexe.*

Proposition 1.2. *Les seuls ouverts-fermés de E sont E et $\emptyset$.*

Theorem 1.1. *f analytique sur U ouvert connexe. Si f n'est pas la fonction nulle, si z_0 est un zéro de f alors*

$$\exists \epsilon > 0 | z_0 \text{ soit le seul zéro de } f_{|D(z_0,\epsilon}$$

Theorem 1.2. *Si la restriction de 2 fonctions analytiques sur U ouvert coincide sur $U \subset D$ connexe alors ces fonctions sont égales sur D.*

Theorem 1.3. *Si U ouvert connexe, si f atteint une maximum local sur U alors f est constante.*

1.2 Théorème de Cauchy.

1.2.1 Chemins et lacets.

Definition 1.2. Soit $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors γ' est le vecteur tangent à la courbe. On appele $\gamma(a)$ l'origine, $\gamma(b)$ l'extremité et γ le chemin.

Definition 1.3. Un lacet est un chemin tq l'éxtrémité et l'origine sont confondues.

Definition 1.4. Le chemin opposé à γ est :

$$\gamma^0 : t \longmapsto \gamma(a + b - t)$$

Definition 1.5. On dit que γ_1 et γ_2 sont equivalents si il existe une bijection φ croissante $\mathcal{C}^1$, φ^{-1} soit aussi $\mathcal{C}^1$:

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$$

1.3 Intégration le long d'un chemin.

Definition 1.6. Si $\gamma : I \Rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, f continue sur $\gamma(I)$ alors $t \Rightarrow f(\gamma(t))\gamma'(t)$ et on définit :

$$\int_\gamma f(z)dz = \gamma_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Remark. Cette définition coincide avec la circulation du champ vectoriel $(\Re f, \Im f)$ le long de $\gamma(I)$. De plus, on constate $\int_\gamma f = -\int_{\gamma^0} f$. Aussi si γ est un lacet alors l'integrale ne depend pas du point de départ choisi.

Definition 1.7. On aussi un règle de la chaine : si $\Gamma : t \to u(\gamma(t))$, u analytique alors $\int_\gamma f(u(z))u'(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$.

1.4 Primitives.

Theorem 1.4. *Pour qu'une fonction analytique sur un domaine D ouvert admette une primitive sur D il faut et il suffi que pour tout lacet $\int_\gamma f = 0$.*

Proposition 1.3. *Lorsqu'il en est ainsi une primitive F de f s'écrit $F(z) = C + \int_\gamma f(w)dw$ ou γ est un chemin d'origine arbitraire d'extrimite z.*

Remark. L'exemple récurrent est $f : z \mapsto \frac{1}{z}$. Alors soit $\gamma : [0, 2\pi] \to U, t \mapsto e^{it}$. Alors :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^\pi f(e^{it})ie^{it}dt = i\int_0^\pi dt = 2\pi i$$

1.5 Homotopie

Definition 1.8. Une homotopie entre deux chemins $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{C}$ est une application continue :

$$\varphi : I \times J \to D$$

telle que $\varphi(t,c) = \gamma_0(t)$ pour tout t dans I et $\varphi(b,t) = \gamma_1(t)$ pour tout t dans J.

Remark. On note que si on defini $\gamma_s(t) = \varphi(s,t)$ peut être vu comme une famille de lacets qui morphes du chemin γ_0 vers γ_1.

Definition 1.9. D connexe est simplement connexe ssi tout lacet est homotope à un point.

1.6 Théorème de Cauchy.

Theorem 1.5. *Soit D ouvert convexe, f analytique sur D alors pour tout lacet $\gamma \subset D$ on a :*

$$\int_\gamma f = 0$$

Démonstration. Soit $z_0 \in D, z \in D, [z_0, z] \subset D$, alors on definit :

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f$$

Si h est suffisament petit, $[z, z+h] \subset D, [z+h, z_0] \subset D$ alors l'intégrale autour du triangle $z_0, z, z+h$ est nulle. Il s'ensuit que en definissant :

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f = \int_0^1 dt f(z+th)h$$

On en deduit si $h \to 0$ que :

$$F'(z) = f(z)$$

Theorem 1.6. *Soit D un ouvert connexe, f analytique, γ_1, γ_2 deux lacets de D, homotopes alors :*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Corollary 1.6.1. *Si D est simplement connexe alors l'integrale est nulle pour tout lacet.*

1.7 Indince d'un point par rapport à un lacet.

Definition 1.10. Soit γ un lacet de $I = [a,b]$ et $w \notin \gamma(I)$ alors on defini l'indice comme étant :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-w} dz$$

C'est un entier relatif qui quantifie l'enroulement de γ autour de w.

Remark. On a $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(w) = -\mathrm{Ind}_\gamma(w)$ et si deux lacets sont homotopes leur indices coincides.

Proposition 1.4. *Si γ est un lacet, et D connexe tel que $\gamma(I) \cap D = \emptyset$ alors $w \to Ind_\gamma(w)$ est constante.*

1.8 Formule de Cauchy

Theorem 1.7. *Soit D simplement connexe, $\gamma : I \to D$ alors pout toute fonction f analytique on a :*

$$\forall w \in D \setminus \gamma(I), 2\pi i f(w) Ind_\gamma(w) = \int_\gamma dz \frac{f(z)}{z-w}$$

1.9 Conditions de Cauchy.

Theorem 1.8. *Si f est continument derivable dans D ouvert alors f est analytique.*