Mécanique quantique – L3

Emmanuel Baudin – Sylvain Nascimbène

Séance du 23 octobre 2019

Soutien 2
Aspect spatial de l'expérience de Stern et Gerlach

Dans ce TD nous reprenons l'expérience de Stern et Gerlach en s'intéressant cette fois au paquet d'onde des atomes d'Argent. Pour simplifier l'étude nous supposerons que le faisceau se déplace dans la direction $\hat{x}$ à vitesse constante v_0, et nous ne considérerons que le déplacement dans la direction $\hat{z}$ dans laquelle est appliqué un gradient de champ magnétique homogène G. Dans le référentiel en translation à cette vitesse, le hamiltonien du paquet d'ondes selon $\hat{z}$ dépend du temps ; il peut être schématisé par l'application successive d'un potentiel de confinement harmonique pour préparer la mise en forme du faisceau puis par l'application d'un gradient de champ magnétique pendant un temps $T = L/v_0$ correspondant à la distance effective parcoure L dans le gradient de champ magnétique. L'atome d'argent possède un spin 1/2 et présente un rapport magnétogyrique γ, on ne le prendra en compte que dans la 3e partie.

1 Préparation : potentiel harmonique

1. Quelle est l'équation de Shrödinger de la fonction d'onde $|\phi\rangle$ dans le potentiel harmonique $V(z) = \frac{k}{2}z^2$? Quelle est la pulsation propre ω de cet oscillateur harmonique ?
2. En déduire l'équation différentielle de $\phi(z)$ dans la base des positions puis de $\bar{\phi}(p)$ dans la base des impulsions. Que remarquez-vous concernant les équations différentielles régissant $\phi(z)$ et $\bar{\phi}(p)$?
3. Aux temps longs, on suppose que la fonction d'onde atteint l'état fondamental de l'oscillateur harmonique précédemment défini. Rappelez l'énergie et la fonction d'onde normalisée $\phi(x)$ de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique sur la base des positions ainsi que la fonction d'onde $\bar{\phi}(p)$ sur la base des impulsions.

2 Évolution du paquet d'ondes en l'absence de potentiel

1. On relâche à présent le potentiel de confinement et on suppose alors qu'à $t = 0$ le paquet d'ondes est dans l'état fondamental de l'oscillateur harmonique précédemment étudié. Donnez l'évolution temporelle du paquet d'ondes $\bar{\phi}(p, t)$.
2. En utilisant le théorème d'Ehrenfest, déterminez le jeu d'équations couplées régissant les moments du paquet d'ondes jusqu'à l'ordre 2.
3. Résoudre ce jeu d'équation et donner l'évolution de la position moyenne ainsi que celle de l'incertitude sur la position et sur l'impulsion en fonction du temps.

3 Évolution dans le gradient de champ magnétique

1. Quel est le Hamiltonien de la fonction d'onde dans le gradient de champ magnétique ?
2. Trouvez les états propres de cet Hamiltonien dans la base des impulsions.
3. En utilisant le théorème d'Ehrenfest, déterminez le jeu d'équations couplées régissant les moments du paquet d'ondes de spin $|-_z\rangle$ jusqu'à l'ordre 2.
4. Résoudre ce jeu d'équation et donner l'évolution de la position moyenne ainsi que celle de l'incertitude sur la position et sur l'impulsion en fonction du temps.
5. Sous quelle condition les paquets d'ondes correspondants aux états de propres de spin sont-ils bien séparés ?
6. Ecrire formellement l'état du paquet d'ondes de spin $|-_z\rangle$ au temps T dans la base des positions et montrer qu'il s'agit bien d'une gaussienne.