Mathématiques pour physiciens

Examen : 27/1/2015

1. Soit la fonction
$$f(z) = \frac{\cosh z}{z^5(z^2-1)} \,.$$

   a) Déterminer les singularité de la fonction et leur nature.

   b) Calculer le devéloppement de Laurent de f autour de $z=0$ et écrire explicitement la partie principale.

   c) Calculer l'intégrale
$$\oint_\gamma dz f(z)$$
   sur le cercle $\gamma_{1/2}$ centré en $z=0$ de rayon $R=1/2$ et le cercle γ_1 de rayon $R=1$ centré en $z=1/2$.

2. Soit $T(x,t)$ la distribution de température à l'istant t dans une tige homogène de longeur infinie. La variation de $T(x,t)$ est déterminée par l'équation de diffusion
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) \,,$$
   où κ est la conductivité thermique. A l'aide de la transformée de Fourier, déterminer la valeur de la temperature pour $t>0$ si
$$T(x,0) = f(x) \,.$$
   Les fonctions $T(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dans la variable x.

3. Soit l'équation différentielle

$$(x-2)(x-3)u''(x) - (2x-5)u'(x) + 2u(x) = 0\,.$$

   a) Déterminer la nature des points $x = 0$ et $x = 0$.

   b) Résoudre l'équation par séries autour de $x = 0$.

4. Soit une variable aléatoire de Cauchy avec distribution de probabilité

$$p_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2 + a^2} \qquad a \in \mathbb{R}\,,$$

   avec $a > 0$.

   a) A l'aide du théorème des résidus déterminer sa fonction caractéristique $\phi(u)$.

   b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires avec loi de probabilité de Cauchy $p_{a_1}(x)$ et $p_{a_2}(x)$. Déterminer la fonction caractéristique de leur somme $X = X_1 + X_2$.

   c) On considère maintenant la variable aléatoire

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} X_n\,,$$

   où toutes les variables aléatoires X_n suivent une loi de probabilité de Cauchy $p_{a_n}(x)$ avec $a_n = \frac{a}{n^2}$. Déterminer la fonction caractéristique de X_N, $\phi_N(u)$, et calculer sa limite pour $N \to \infty$, sachant que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

   d) Déduire la loi de probabilité $p(x)$ pour la variable X_∞ et justifier pourquoi on n'obtient pas une gaussienne.