École normale supérieure, année universitaire 2018-2019.
Cours *Algèbre 1*, examen partiel du 7 novembre 2018.
Durée : 2 heures. *Les documents et calculatrices sont interdits.*

Exercice 1. On se propose dans cet exercice de démontrer le résultat suivant de «simplification dans la catégorie des groupes finis» : *soient X, H et K trois groupes finis tels que $X \times H \simeq X \times K$. Alors $H \simeq K$.*

Pour tout couple (G, H) de groupes finis, on note $M(G, H)$ le nombre de morphismes de groupes de G dans H, et $I(G, H)$ le nombre de morphismes de groupes injectifs de G dans H.

(a) Soient G et H deux groupes finis. Montrez que

$$M(G,H) = \sum_{\Gamma \lhd G} I(G/\Gamma, H).$$

(b) Soit G un groupe fini. Montrez par récurrence sur $|G|$ qu'il existe une famille $(a_\Gamma)_{\Gamma \lhd G}$ d'entiers relatifs tels que pour tout groupe fini H on ait

$$I(G,H) = \sum_{\Gamma \lhd G} a_\Gamma M(G/\Gamma, H).$$

(c) Soient X, H et K trois groupes finis tels que $X \times H \simeq X \times K$.

(c1) Montrez que $M(G, H) = M(G, K)$ pour tout groupe fini G.

(c2) Montrez que $I(G, H) = I(G, K)$ pour tout groupe fini G.

(c3) Montrez que $H \simeq K$.

(d) *Un contre-exemple dans le cas infini.* Soit G le groupe des suites d'entiers relatifs, avec l'addition définie composante par composante (autrement dit, G est le produit d'une famille de copies de $\mathbf{Z}$ indexée par $\mathbf{N}$). Montrez que $G \times G \simeq G$.

Exercice 2. Soit n un entier et soient $\ell_1, \ldots, \ell_r$ des entiers $\geqslant 2$ deux à deux distincts. Soient $n_1, \ldots, n_r$ des entiers $\geqslant 1$ tels que $\sum n_i \ell_i \leqslant n$. Soit $\sigma \in S_n$ une permutation dont l'écriture comme produit de cycles à supports deux à deux disjoints comprend n_i cycles de longueur ℓ_i pour chaque i, et aucun autre cycle. On désigne par C la classe de conjugaison de σ.

(a) Soit G le commutant de σ, c'est-à-dire l'ensemble des permuations τ telles que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$. Calculez $|G|$; en déduire $|C|$.

(b) On suppose à partir de maintenant que σ est paire. Montrez que $G \subset A_n$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :
(i) chacun des ℓ_i est impair ;
(ii) les n_i sont tous égaux à 1 ;
(iii) $\sum n_i \ell_i \geqslant n - 1$.

(c) Montrez que si les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus sont satisfaites C est réunion de deux classes de conjugaison de A_n qui ont même cardinal. Montrez que dans le cas contraire C est une classe de conjugaison de A_n.

Exercice 3. Soit G un groupe.

(a) Montrez que le groupe $\mathrm{Int}(G)$ des automorphismes intérieurs de G est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$. On note $\mathrm{Out}(G)$ le quotient $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$; on l'appelle le groupe des *automorphismes extérieurs* de G. On note π le morphisme quotient de $\mathrm{Aut}(G)$ vers $\mathrm{Out}(G)$.

(b) Soit

$$\mathscr{S} = \left(1 \longrightarrow G \xrightarrow[u]{\hspace{2em}} \Gamma \xrightarrow[p]{\hspace{2em}} Q \longrightarrow 1 \right)$$

une suite exacte de groupes. Rappelez comme on associe naturellement à une section s de p un morphisme φ_s de Q dans $\mathrm{Aut}(G)$.

(c) En vous inspirant de la construction rappelée en (b), utilisez la suite exacte $\mathscr{S}$ pour construire de manière naturelle un morphisme ψ de Q vers $\mathrm{Out}(G)$ sans avoir à choisir une section de p, ni même à supposer qu'il en existe. Montrez que si p possède une section s alors $\psi = \pi \circ \varphi_s$.

(d) Que peut-on dire du morphisme ψ construit en (c) lorsque G est abélien ?

Exercice 4. On fixe un entier impair $m \geqslant 3$. On note φ le morphisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ qui envoie $\overline{1}$ sur la multiplication par (-1), et l'on note D le groupe diédral $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \rtimes_\varphi \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(a) Calculez l'ordre d'un élément (a, b) de D (en fonction de a et b).

(b) Montrez qu'il existe un morphisme μ de $\mathrm{Aut}(D)$ dans $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times$ tel que $u(a, 0) = (\mu(u)a, 0)$ pour tout $a \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Montrez que μ est surjectif et possède une section.

(c) Montrez qu'il existe un morphisme λ de $\mathrm{Ker}(\mu)$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ tel que $u(0, 1) = (\lambda(u), 1)$ pour tout $u \in \mathrm{Ker}(\mu)$. Montrez que λ est un isomorphisme.

(d) Utiliser ce qui précède pour construire un isomorphisme explicite

$$(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \rtimes_\psi (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times) \simeq \mathrm{Aut}(D)$$

où ψ est un morphisme de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ à déterminer. Modulo cet isomorphisme, à quoi correspond la conjugaison par un élément (a, b) de D ? À quoi correspond le groupe des automorphismes intérieurs de D ?