Mécanique analytique

FIP
2017-2018

Alexis BRES, Stephan FAUVE & Arnaud RAOUX (prenom.nom@ens.fr)

Examen 2017

On prendra garde à ***toujours indiquer les variables*** *des fonctionnelles L, H, S, $\mathscr{L}$, $\mathscr{H}$ considérées.*

Merci de traiter les deux parties sur des copies séparées.

1 Partie I

1.1 Forces résultant de contrainte

On considère un cerceau de rayon R et de masse M représenté Fig. 1. Il roule sans glisser sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. L'accélération de la pesanteur est notée g. On rappelle que l'énergie cinétique relative au mouvement de rotation du cerceau à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est $T_R = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$.

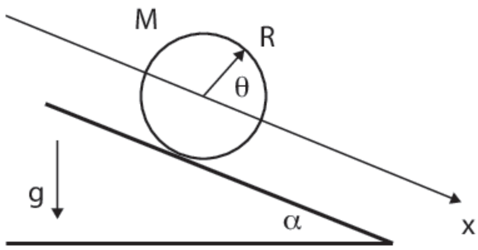

FIGURE 1 – Un cerceau roule sans glisser sur un plan incliné.

1. Écrire le Lagrangien L du système en fonction de $\dot{x}$, x, $\dot{\theta}$, R, M, g et α.

2. Le cerceau roule sans glisser. En déduire la relation $F(x,\theta) = 0$ exprimant cette contrainte.

3. Donner l'expression du principe de moindre action en prenant en compte la contrainte $F(x,\theta) = 0$. On notera λ le multiplicateur de Lagrange.

4. En déduire les équations du mouvement pour x et θ ainsi que l'expression de λ.

5. Donner les expressions des forces généralisées qui résultent de la contrainte.

6. Reproduire la Fig. 1 sur votre copie, représenter ces forces généralisées, et donner leur interprétation physique.

1.2 Pendule sphérique

On considère une particule de masse m assujettie à se déplacer le long d'une sphère de rayon R dans un champ de pesanteur g. On repère la position de la particule à l'aide des coordonnées sphériques, $r = R$, la longitude φ et l'angle par rapport à la verticale θ.

7. Écrire le lagrangien du système en fonction de θ, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, R, m et g.

8. Montrer qu'en choisissant convenablement l'unité de temps, on peut sans restreindre le problème se ramener au cas $m = 1$, $g = 1$, $R = 1$ que l'on considérera par la suite afin d'alléger les notations.

9. Montrer que $\dot{\varphi}\sin^2\theta = C =$ constante.

10. Montrer que l'on a conservation de l'énergie et écrire l'équation correspondante en utilisant le résultat de la question précédente.

11. On pose $w = \cos\theta$. Montrer que l'équation de conservation de l'énergie peut s'écrire $\dot{w}^2 = P(w)$ où $P(w)$ est un polynome en w.

12. Discuter le nombre de racines de $P(w) = 0$ à partir des valeurs de $P(w)$ pour $w \to -\infty$, $w = -1$, $w = 1$, et $w \to \infty$.

13. En déduire que le mouvement de la particule a lieu entre deux angles limites θ_m et θ_M.

14. Donner l'équation du mouvement pour θ.

15. On considère le cas où $\theta_m \simeq \theta_M \simeq \theta_0$ et on cherche à calculer perturbativement le mouvement de la particule en écrivant $\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \cdots$ avec $\varepsilon \to 0$. En première approximation, la particule suit donc une trajectoire avec $\theta = \theta_0 = \text{cste}$ et $\theta_1(t)$ représente la correction au premier ordre en ε. Écrire l'équation pour θ_0.

16. Montrer que l'équation pour θ_1 est

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{1 + 3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0}\,\theta_1 = 0. \tag{1}$$

17. Donner la solution pour $\theta_1(t)$ et en déduire la solution pour $\varphi(t)$ jusqu'au terme d'ordre 1 en ε compris.

18. Décrire le mouvement de la particule.

1.3 Approximation de courte longueur d'onde

On considère une onde que l'on écrit en notation complexe $a(x,t)e^{i\theta(x,t)}$. Dans le cas d'une onde plane monochromatique, on a $\theta(x,t) = kx - \omega t$.

19. La vitesse de phase est la vitesse de déplacement des lignes d'égale phase $\theta(x,t) = \text{cste}$, soit $v = (\partial x/\partial t)_\theta$. Donner l'expression de v pour une onde plane monochromatique.

20. On considère à présent le cas d'une onde localement plane monochromatique mais dont le nombre d'onde $k(x,t)$ et la pulsation $\omega(x,t)$ peuvent *a priori* varier dans l'espace et le temps. On considère que ces variations se produisent sur une échelle spatiale grande par rapport à $2\pi/k$ et sur une échelle de temps longue par rapport à $2\pi/\omega$ (approximation de courte longueur d'onde). En effectuant un développement de Taylor de θ au voisinage de $x = 0$ et $t = 0$, justifier que l'on peut définir

$$k(x,t) = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \omega(x,t) = -\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{2}$$

Vérifier que les premiers termes non pris en compte sont effectivement négligeables.

21. k et ω satisfont donc à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Comment s'appelle ce type d'équation ? Quelles autres équations ayant la même forme connaissez vous ?

22. ω et k sont reliés par l'équation de dispersion des ondes considérées, $\omega = W(k)$. Écrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $k(x,t)$ et montrer que k est constant sur les trajectoires données par $dx/dt = W'(k)$. Comment s'appelle cette vitesse ? Comment sont les trajectoires en question ?

23. On considère à présent la propagation de l'onde dans un milieu dont les caractéristiques (par exemple l'indice) dépendent de l'espace et du temps. On considère toujours que ces variations sont sur des échelles grandes par rapport à $2\pi/k$ et $2\pi/\omega$. On a donc pour l'équation de dispersion $\omega = W(k,x,t)$. Montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial W}{\partial k}\right)_{x,t}, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{k,t}, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{x,k}. \tag{6}$$

24. On souhaite retrouver ces résultats dans le cas général $\theta = \theta(\vec{r},t)$. Donner les définitions de $\vec{k}(\vec{r},t)$ et de $\omega(\vec{r},t)$. L'équation de dispersion est $\omega = W(\vec{k},\vec{r},t)$. En utilisant l'analogie avec l'équation de Hamilton-Jacobi, écrire les équations pour $d\vec{r}/dt$ et $d\vec{k}/dt$.

25. Qu'est-ce que ces équations permettent d'obtenir ? Comment s'appelle l'approximation étudiée ici dans le cas des ondes électromagnétiques ?

2 Partie II

On se propose dans ce problème d'étudier le lagrangien de l'électromagnétisme et d'étudier son invariance sous certaines transformations, dites de jauge. On se place ici dans le formalisme de l'espace quadri-dimensionnel. On note $x_0 = ct$ la coordonnée de temps et x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'espaces, réunies ensemble sous la coordonnée x_μ, avec $\mu = 0,1,2,3$. On utilisera la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés : $x_\mu y_\mu = \sum_{0\leq\mu\leq 3} x_\mu y_\mu$.

2.1 Bases de théorie classique des champs

Soit un champ $\varphi(x_\mu)$. On suppose que la densité de lagrangien encodant la dynamique de ce champ ne dépend que des coordonnées d'espace-temps, du champ $\varphi(x_\mu)$ et de ses dérivées par rapport aux coordonnées d'espace-temps $\partial_\nu\varphi(x_\mu) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}(x_\mu)$: $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x_\mu, \varphi(x_\mu), \partial_\nu\varphi(x_\mu))$. On rappelle les équations d'Euler-Lagrange pour un tel champ :

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\right) \tag{7}$$

On considère la densité lagrangienne suivante (par la suite, la dépendance dans les coordonnées d'espace-temps est soit sous-entendue, soit résumée par x)

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2c^2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{8}$$

26. Montrer qu'on retrouve une équation du type Klein-Gordon. Ce lagrangien décrit un champ dit *scalaire* associé à une particule de masse m.

2.2 Champ électromagnétique et invariance de jauge

On considère à présent le champ électromagnétique qu'on écrit ici sous forme de potentiels V et $\overrightarrow{A}$. On les rassemble dans un vecteur $A_\mu = (-V, \overrightarrow{A})$. Le lagrangien de l'électromagnétisme est constitué de deux parties. Une partie « cinétique »

$$\mathscr{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{où} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{9}$$

Une autre partie est le couplage du champ avec la matière chargée, représentée par le champ (scalaire complexe) φ, sous la forme

$$\mathscr{L}_{\text{coupl}} = (D_\mu\varphi)(D_\mu\varphi)^* \qquad \text{où} \qquad D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi \tag{10}$$

On souhaite montrer que ce lagrangien est invariant sous une *transformation de phase locale*, c'est-à-dire sous la transformation $\varphi \to e^{i\alpha(x)}\varphi$.

27. Démontrer que si $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$, alors $\mathscr{L}_{\text{coupl}}$ est invariant. Montrer (simplement) que $\mathscr{L}_{\text{cin}}$ est également invariant sous cette transformation.

28. Écrire les équation d'Euler-Lagrange pour φ et A_μ.

29. Si le champ φ correspond à une particule de masse m, peut-on ajouter un terme de la forme $m^2\varphi^*\varphi$ qui maintienne les invariances précédemment étudiées ? Si le champ A_μ correspond à une particule de masse m, peut-on ajouter un terme de la forme $m^2A_\mu A_\mu$ qui maintienne les invariances précédemment étudiées ?

2.3 Le mécanisme de Higgs

Il semble interdit par l'invariance de jauge que les bosons vecteurs d'interaction soient massifs. Cela pose problème, non pas forcément pour l'électromagnétisme où il semblerait que le photon soit sans masse (ou en tout cas de masse inférieur à 10^{-52} kg selon les dernières estimations), mais dans des théories plus générales décrivant les interactions faibles.

On cherche donc à faire émerger un terme de masse pour le champ A_μ sans briser explicitement l'invariance de jauge (c'est-à-dire que l'invariance de jauge reste préservée dans le lagrangien initial).

On considère un champ φ scalaire complexe de densité lagrangienne

$$\mathscr{L} = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi)^* - \left(\mu^2|\varphi|^2 + \lambda|\varphi|^4\right) \tag{11}$$

30. En supposant $\mu^2 < 0$ et $\lambda > 0$, démontrer que ce potentiel admet un ensemble de minima de la forme $\varphi_{min} = \frac{v}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Donner l'expression de v^2 en fonction de μ^2 et λ. Quelle forme a ce potentiel ?

31. En développant φ sous la forme $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\varepsilon(x))$ (avec ε et η réels), montrer qu'on peut réécrire le lagrangien précédent sous la forme

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varepsilon)^2 - \frac{\mu^2}{2}((\eta + v)^2 + \varepsilon^2) - \frac{\lambda}{4}((\eta + v)^2 + \varepsilon^2)^2 \tag{12}$$

32. En collectant les termes en η^2 et ε^2, montrer qu'on a donné naissance à deux champs scalaires, un de masse nulle et l'autre de masse $\sqrt{-2\mu^2}$.

2.4 Génération d'un terme de masse pour le boson de jauge

On reprend la densité $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{cin}} + \mathscr{L}_{\text{coupl}}$ de la partie 2.2, auquel on adjoint le lagrangien de la partie 2.3.

$$\mathscr{L}_{\text{tot}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)(D_\mu \varphi)^* + (\partial_\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi)^* - m^2|\varphi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\varphi|^4 \tag{13}$$

On réalise le même mécanisme de brisure de symétrie, c'est-à-dire qu'on développe le lagrangien autour d'un minimum arbitraire selon le développement précédent.

33. Montrer qu'au premier ordre, on peut écrire au voisinage du minimum du potentiel :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\varepsilon(x)) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x))e^{i\varepsilon(x)/v} \tag{14}$$

34. L'électromagnétisme étant invariant sous les transformations de phases, montrer qu'on peut réabsorber le champ ε dans φ. Ce champ est-il observable ?

35. En développant la partie $\mathscr{L}_{\text{coupl}}$ du lagrangien, montrer qu'on obtient un terme de masse pour le champ A_μ de la forme $m_A^2 A_\mu A_\mu$. L'exprimer en fonction de v et e.