Physique des particules – L3

TD 5 (correction)

Exercice 1

1. On a vu au TD 3 que dans la représentation de spin $l/2$ les valeurs propres de L_z sont $l/2, l/2-1, \ldots, -l/2$. Une base orthonormée de $2 \otimes 2 \otimes 2$ est
$$\{\mathrm{uuu}, \mathrm{uud}, \mathrm{udu}, \mathrm{duu}, \mathrm{udd}, \mathrm{dud}, \mathrm{ddu}, \mathrm{ddd}\} \tag{1}$$
et dans cette base $L_z = \mathrm{Diag}(3, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -3)/2$. Par conséquent, il ne peut y avoir que des représentations de spins 1/2 et 3/2 dans la décomposition de $2 \otimes 2 \otimes 2$ et comme 3/2 n'est qu'une valeur propre simple, la représentation de spin 3 n'apparaît qu'une seule fois : $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$.
2. Il suffit de prendre une base orthonormée de vecteurs propres de L_z pour la valeur propre 1/2 qui soient en outre orthogonaux à $(\mathrm{duu}+\mathrm{udu}+\mathrm{uud})/\sqrt{3}$. Les deux éléments de cette base seront les vecteurs de plus haut poids de chacune des représentations de spin 1/2. On prend par exemple $(\mathrm{udu} - \mathrm{duu})/\sqrt{2}$ et $(2\mathrm{uud} - \mathrm{udu} - \mathrm{duu})/\sqrt{6}$.
On construit le reste des vecteurs de base en agissant avec L_- (on a vu au TD 3 qu'une application répétée de L_- sur le vecteur propre de valeur propre maximale pour L_z permet de reconstruire toute la base de la représentation) :
$$L_-(\mathrm{udu} - \mathrm{duu}) = \mathrm{ddu} + \mathrm{udd} - (\mathrm{ddu} + \mathrm{dud}) = \mathrm{udd} - \mathrm{dud}\,, \tag{2}$$
$$L_-(2\mathrm{uud}-\mathrm{udu}-\mathrm{duu}) = 2(\mathrm{dud}+\mathrm{udd})-(\mathrm{ddu}+\mathrm{udd})-(\mathrm{ddu}+\mathrm{dud}) = \mathrm{dud}+\mathrm{udd}-2\mathrm{ddu}\,. \tag{3}$$
Finalement on choisit
$$\left\{\mathrm{uuu}, \frac{\mathrm{uud}+\mathrm{udu}+\mathrm{duu}}{\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{udd}+\mathrm{dud}+\mathrm{ddu}}{\sqrt{3}}, \mathrm{ddd}\right\} \cup \left\{\frac{\mathrm{udu}-\mathrm{duu}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{udd}-\mathrm{dud}}{\sqrt{2}}\right\} \cup \left\{\frac{2\mathrm{uud}-\mathrm{udu}-\mathrm{duu}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathrm{dud}+\mathrm{udd}-2\mathrm{ddu}}{\sqrt{6}}\right\} \tag{4}$$
comme base orthonormée adaptée à la décomposition $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$.

Exercice 2

1. Un calcul donne les relations de commutation suivantes :
$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm\,, \quad [T_3, U_\pm] = \frac{\mp 1}{2} U_\pm\,, \quad [T_3, V_\pm] = \frac{\pm 1}{2} V_\pm\,, \tag{5}$$

$$[Y, T_\pm] = 0\,, \quad [Y, U_\pm] = \pm U_\pm\,, \quad [Y, V_\pm] = \pm V_\pm\,. \tag{6}$$

Cela signifie par exemple que T_+ augmente la valeur propre de T_3 de 1 et ne change pas la valeur propre de Y. En effet, si (dans une représentation quelconque donnée) v est un vecteur propre pour ces deux éléments : $T_3 v = \lambda v$ et $Y v = \mu v$ alors

$$T_3(T_+v) = [T_3, T_+]v + T_+(T_3v) = (\lambda + 1)T_+v\,, \quad Y(T_+v) = [Y, T_+]v + T_+(Yv) = \mu T_+v\,. \tag{7}$$

Dans la représentation 3 les valeurs propres de T_3 et Y sont $(1/2, 1/3)$ pour u, $(-1/2, 1/3)$ pour d et $(0, -2/3)$ pour s et les seules actions non nulles des opérateurs d'échelle sont

$$T_+\mathrm{d} = \mathrm{u}\,, \quad U_+\mathrm{s} = \mathrm{d}\,, \quad V_+\mathrm{s} = \mathrm{u}\,, \quad T_-\mathrm{u} = \mathrm{d}\,, \quad U_-\mathrm{d} = \mathrm{s}\,, \quad V_-\mathrm{u} = \mathrm{s} \tag{8}$$

en accord avec ce que l'on vient d'expliquer.

2. On a vu à la question précédente que U_- et V_- diminuent strictement la valeur propre de Y, pour avoir un vecteur qui est annulé par ces deux opérateurs il suffit d'en prendre un avec la valeur propre minimale de Y autorisée dans $3 \otimes 3$. La valeur propre minimale de Y est $-4/3$ et le seul (à un signe près) vecteur propre de norme 1 pour cette valeur propre est ss. Il se trouve qu'il est aussi annulé par T_-. On agit dessus avec T_+, U_+ et V_+ de manière répétée pour construire une base de la représentation recherchée :

$$T_+\mathrm{ss} = 0\,, \quad U_+\mathrm{ss} = \mathrm{ds} + \mathrm{sd}\,, \quad V_+\mathrm{ss} = \mathrm{us} + \mathrm{su}\,, \tag{9}$$

$$T_+(\mathrm{ds} + \mathrm{sd}) = \mathrm{us} + \mathrm{su}\,, \quad U_+(\mathrm{ds} + \mathrm{sd}) = 2\mathrm{dd}\,, \quad V_+(\mathrm{us} + \mathrm{su}) = 2\mathrm{uu}\,, \tag{10}$$

$$U_+(\mathrm{us} + \mathrm{su}) = V_+(\mathrm{ds} + \mathrm{sd}) = \mathrm{ud} + \mathrm{du}\,. \tag{11}$$

Les autres actions possibles ne fournissent plus de nouveaux vecteurs. On a donc obtenu 6 vecteurs linéairement indépendants qui engendrent un sous-espace stable sous l'action de l'algèbre, ce sous-espace est celui de la représentation de dimension 6 recherchée, une base orthonormée en est

$$\left\{\mathrm{ss}, \mathrm{uu}, \mathrm{dd}, \frac{\mathrm{ud} + \mathrm{du}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{us} + \mathrm{su}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{sd} + \mathrm{ds}}{\sqrt{2}}\right\}\,. \tag{12}$$

3. L'orthogonal de la sous-représentation de dimension 6 dans $3 \otimes 3$ admet comme base de vecteurs propres de T_3 de Y

$$\left\{\frac{\mathrm{ud} - \mathrm{du}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{us} - \mathrm{su}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{sd} - \mathrm{ds}}{\sqrt{2}}\right\}\,. \tag{13}$$

Les valeurs propres associées à chacun de ces vecteurs sont respectivement $(0, 2/3)$, $(1/2, -1/3)$ et $(-1/2, -1/3)$, ce ne sont pas les mêmes que pour la représentation 3 donc c'est une représentation inéquivalente que l'on a ici. On rappelle en effet que deux représentations sont équivalentes s'il existe un isomorphisme entre elle qui préserve l'action de l'algèbre. Cela implique en particulier que si un élément de l'algèbre a un vecteur propre pour une valeur propre dans une des représentations alors il a aussi un vecteur propre pour cette valeur propre dans l'autre représentation.

4. On procède de la même façon qu'aux questions précédentes. Pour construire la sous-représentation de dimension 10 on part de sss qui est annulé par T_-, U_- et V_- puis on agit dessus avec T_+, U_+ et V_+ de manière répétée (V_+ est en fait superflu puisque $V_+ = [T_+, U_+]$). On obtient la base orthonormée suivante

$$\Big\{\mathrm{sss}, \frac{\mathrm{uss}+\mathrm{sus}+\mathrm{ssu}}{\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{dss}+\mathrm{sds}+\mathrm{ssd}}{\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{uus}+\mathrm{usu}+\mathrm{suu}}{\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{uds}+\mathrm{usd}+\mathrm{dus}+\mathrm{dsu}+\mathrm{sud}+\mathrm{sdu}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathrm{dds}+\mathrm{dsd}+\mathrm{sdd}}{\sqrt{3}}, \mathrm{uuu}, \frac{\mathrm{uud}+\mathrm{udu}+\mathrm{duu}}{\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{udd}+\mathrm{dud}+\mathrm{ddu}}{\sqrt{3}}, \mathrm{ddd}\Big\}. \tag{14}$$

Son orthogonal est la sous-représentation de dimension 8 recherchée, elle admet comme base orthonormée de vecteurs propres de T_3 et Y

$$\Big\{\frac{\mathrm{uss}+\mathrm{sus}-2\mathrm{ssu}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathrm{dss}+\mathrm{sds}-2\mathrm{ssd}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathrm{usu}+\mathrm{suu}-2\mathrm{uus}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathrm{uds}+\mathrm{dus}+\mathrm{usd}+\mathrm{sud}-2\mathrm{sdu}-2\mathrm{dsu}}{2\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{uds}+\mathrm{dus}-\mathrm{usd}-\mathrm{sud}}{2}, \frac{\mathrm{dsd}+\mathrm{sdd}-2\mathrm{dds}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathrm{udu}+\mathrm{duu}-2\mathrm{uud}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathrm{dud}+\mathrm{udd}-2\mathrm{ddu}}{\sqrt{6}}\Big\}. \tag{15}$$

Dans cette sous-représentation le sous-espace vectoriel associée aux valeurs propres $(0, 0)$ de (T_3, Y) est de dimension 2 on avait donc une infinité de choix pour la base. Pour la suite de l'exercice on nomme l'espace de cette sous-représentation 8_S.

5. Un vecteur annulé par T_-, U_- et V_- dans $\bar{3} \otimes 3$ est dss − sds, en agissant dessus avec T_+ et U_+ on génère la sous-représentation de dimension 8 recherchée, une base orthonormée en est

$$\Big\{\frac{\mathrm{uss}-\mathrm{sus}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{dss}-\mathrm{sds}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{usu}-\mathrm{suu}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{uds}-\mathrm{dus}+\mathrm{dsu}-\mathrm{sdu}-2\mathrm{sud}+2\mathrm{usd}}{2\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{uds}-\mathrm{dus}-\mathrm{dsu}+\mathrm{sdu}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{sdd}-\mathrm{dsd}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{udu}-\mathrm{duu}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{udd}-\mathrm{dud}}{\sqrt{2}}\Big\}. \tag{16}$$

Pour la suite de l'exercice, on nomme ce sous-espace 8_A. La sous-représentation de dimension 1 est alors le sous-espace orthogonal à 8_A dans $\bar{3} \otimes 3$, elle est donc engendrée par

$$\left\{\frac{\mathrm{uds}-\mathrm{dus}+\mathrm{dsu}-\mathrm{sdu}+\mathrm{sud}-\mathrm{usd}}{\sqrt{6}}\right\}. \tag{17}$$

6. Une base des fonctions d'onde pour le spin est donnée par la réponse à la deuxième question de l'exercice 1 si on remplace u par $\uparrow$ et d par $\downarrow$.

   On remarque que les fonctions d'onde du décuplet sont déjà complètement symétriques donc pour préserver cette symétrie lorsque l'on prend en compte la fonction d'onde du spin il va falloir que cette dernière soit aussi complètement symétrique. D'après le premier exercice, la seule possibilité est de prendre le spin 3/2 de la décomposition $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$.

7. On peut vérifier que pour tout $\phi_S \in 8_S$, il existe $\phi_A \in 8_A$ ayant les mêmes nombres quantiques (valeurs propres de T_3 et Y) tel que $\phi_S\chi_S + \phi_A\chi_A$ soit complètement symétrique

pour $(\chi_S, \chi_A) = (2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)$ ou bien $(\chi_S, \chi_A) = (2\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow)$. La symétrie par rapport à l'échange des deux premiers quarks est automatique puisque ϕ_S et χ_S (respectivement ϕ_A et χ_A) sont déjà symétriques (respectivement antisymétriques) par rapport à cet échange.

8. Le singulet de saveur est complètement antisymétrique mais il n'y a pas de fonction d'onde du spin qui le soit aussi donc on ne peut pas former de fonction d'onde complètement symétrique qui le contienne.

   Ce singulet qui apparaît dans la décomposition de $3 \otimes 3 \otimes 3$ permet en revanche de décrire la couleur des baryons (on rappelle que la couleur correspond à une invariance de jauge sous $SU(3)$ et qu'elle est exacte alors que la symétrie $SU(3)$ de saveur n'est qu'approximative).