HYDRODYNAMIQUE — TD SOUTIEN 1

Théorème du transport

1. Rappeler le théorème du transport pour une fonction scalaire $f(\overrightarrow{r}, t)$ et pour une fonction vectorielle $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t)$ en intégrant sur un volume $V(t)$ de frontière $S(t)$.
2. Quelle est la signification de la vitesse intervenant dans le théorème précédent ?
3. Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f$ si $V(t)$ est un volume de contrôle matériel. Même question si V est indépendant du temps.
4. Écrire et démontrer l'équation de conservation de la masse.
5. En déduire qu'un fluide incompressible vérifie div $(\overrightarrow{v}) = 0$.

Vortex de Taylor

1. Tracer les lignes de courant de l'écoulement de champ de vitesse en coordonnées polaires $\boldsymbol{v} = \frac{\alpha}{r}\boldsymbol{u}_\theta$, avec $\alpha > 0$. Que vaut la vorticité dans un tel écoulement ?
2. Calculer la circulation de la vitesse sur un cercle centré sur l'origine. Le résultat est-il en contradiction avec celui de la question précédente ?

Notations d'Einstein

Montrer les égalités suivantes en utilisant les notations d'Einstein.

1. $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})f = \overrightarrow{v}.(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$
2. $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{b}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{a}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{b})$
3. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,(\overrightarrow{a})) - \Delta\overrightarrow{a}$
4. On considère un fluide incompressible contenu dans un volume fixe V. La vitesse du fluide s'annule à la frontière S du volume V.
   (a) Développer $\partial_i(v_j\partial_i v_j)$.
   (b) On appelle $G_{i,j} = \partial_i v_j$ le tenseur des gradients de vitesse (convention différente de celle du cours). Montrer :
   $$\int_V \Delta(\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v} = -\int_V G_{i,j}G_{i,j} \tag{1}$$
   (c) Développer $\partial_i(v_j\partial_j v_i)$.
   (d) On appelle $S_{i,j} = G_{i,j} + G_{j,i}$ la partie symétrique de G. Montrer :
   $$\int_V \Delta(\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v} = -\frac{1}{2}\int_V S_{i,j}S_{i,j} \tag{2}$$

Ressaut hydraulique

Cet exercice permet de revoir la notion de bilan.

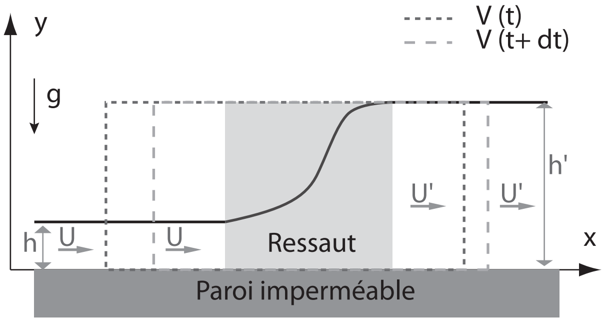

FIGURE 1 – Schéma du ressaut hydraulique.

Un ressaut est une zone où la vitesse varie brutalement (voir figure 1 et l'écoulement autour d'un jet dans un évier). Nous considérons l'écoulement stationnaire d'un liquide incompressible de masse volumique ρ sur une paroi imperméable. Un gaz de pression p_0 uniforme se trouve au-dessus de ce liquide. Nous considérons que la vitesse du liquide est uniforme et selon x avant le ressaut : $\vec{v} = U\vec{i}$ et que sa hauteur vaut h. La vitesse vaut U' et la hauteur h' après le ressaut. L'effet de la viscosité est négligé en dehors du ressaut.

Le but est d'écrire les relations entre U, U', h et h' sans étudier les détails du ressaut.

1. Écrire la relation liée à l'incompressibilité du fluide. On pourra utiliser les volumes de contrôle $V(t)$ et $V(t+dt)$ de la figure 1.
2. Nous supposons que la pression loin du ressaut est égale à la pression hydrostatique. Écrire la pression en amont et en aval du ressaut.
3. Écrire le bilan de quantité de mouvement entre t et $t+dt$ en utilisant les volumes de contrôle de la figure.
4. Le but des questions suivantes est de retrouver ce résultat par une autre méthode.
   Écrire l'équation qui traduit le bilan local de quantité de mouvement pour un fluide parfait.
5. En déduire que pour un volume d'intégration V fixe de surface S, si le fluide est parfait et incompressible, dans une direction i pour laquelle la gravité est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v_i = -\int_S (\rho v_i v_j + p\delta_{i,j})n_j \tag{3}$$

6. Utiliser cette équation pour en déduire une relation entre U, U', h et h'. Comparer avec le résultat de la question 3.