Physique des particules – L3

TD 5

Exercice 1

On souhaite terminer la décomposition en représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ du produit tensoriel $2 \otimes 2 \otimes 2$. On confondra les éléments de l'algèbre et leurs images sous les différentes représentations et on les notera L_z, L_+ et L_-. On note $\{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}$ une base orthonormée de 2 telle que

$$L_z \mathrm{u} = \frac{1}{2}\mathrm{u}, \quad L_z \mathrm{d} = -\frac{1}{2}\mathrm{d}, \quad L_- \mathrm{u} = \mathrm{d}, \quad L_+ \mathrm{d} = \mathrm{u}, \quad L_+ \mathrm{u} = L_- \mathrm{d} = 0\,. \tag{1}$$

Il a été vu en cours que le produit tensoriel contient une représentation irréductible de dimension 4 dont une base orthonormée est $\{\mathrm{uuu}, (\mathrm{duu} + \mathrm{udu} + \mathrm{uud})/\sqrt{3}, (\mathrm{ddu} + \mathrm{dud} + \mathrm{udd})/\sqrt{3}, \mathrm{ddd}\}$.

1. En utilisant les résultats du TD 3, montrer que $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$. On pourra regarder les valeurs propres possibles pour L_z.
2. Construire une base orthonormée adaptée à la décomposition précédente. Justifier qu'elle n'est pas unique.

Exercice 2

On souhaite dans cet exercice construire la décomposition en représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ du produit tensoriel $3 \otimes 3 \otimes 3$. Une base orthonormée de 3 est $\{\mathrm{u}, \mathrm{d}, \mathrm{s}\}$ et dans cette base les générateurs de l'algèbre sont

$$T_+ = T_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad U_+ = U_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad V_+ = V_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

Cette représentation est aussi celle dans laquelle on définit l'algèbre :

$$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(T_+, T_-, U_+, U_-, V_+, V_-, T_3, Y)\,, \tag{2}$$

le crochet de Lie étant le commutateur usuel pour les matrices.

1. D'après la forme des générateurs donnée ci-dessus, quel est l'effet des opérateurs d'échelle $T_\pm$, $U_\pm$ et $V_\pm$ sur les valeurs propres de T_3 et Y ?

Table 9.2 Measured masses and number of strange quarks for the $L = 0$ light baryons.

s quarks	Octet		Decuplet	
0	p, n	940 MeV	Δ	1230 MeV
1	Σ	1190 MeV	Σ^*	1385 MeV
1	Λ	1120 MeV		
2	Ξ	1320 MeV	Ξ^*	1533 MeV
3			Ω	1670 MeV

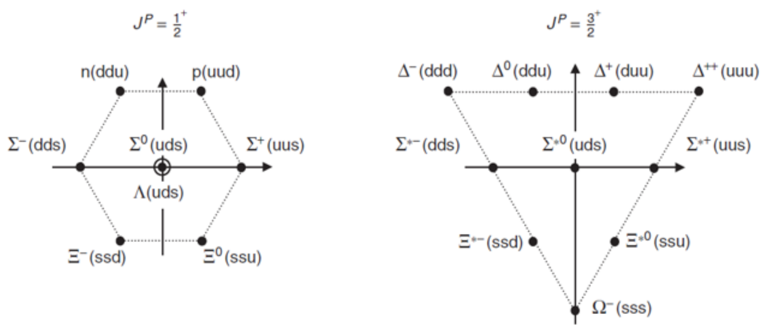

Fig. 9.17 The observed octet and decuplet of light baryon states.

FIGURE 1 – Figure tirée du livre *Modern Particle Physics* de Mark Thomson. Les coordonnées sont les valeurs propres pour les opérateurs T_3 (axe horizontal) et Y (axe vertical).

2. Montrer que $3 \otimes 3$ contient une représentation irréductible de dimension 6 dont on donnera une base orthonormée de vecteurs propres de T_3 et Y. On pourra chercher un vecteur annulé par T_-, U_- et V_- puis agir dessus avec T_+, U_+ et V_+.
3. Montrer que $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$ où $\bar{3}$ est une représentation irréductible de dimension 3 non équivalente à 3 et dont on donnera une base.
4. Montrer que $6 \otimes 3 = 10 \oplus 8$. Expliciter une base de vecteurs propres de T_3 et Y associée à cette décomposition.
5. Montrer $\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1$. Expliciter une base de vecteurs propres de T_3 et Y associée à cette décomposition.

   On a donc $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$. On veut maintenant prendre en compte le spin des quarks.
6. On veut que la fonction d'onde décrivant le spin et la saveur soit complètement symétrique sous échange de deux quarks, quel doit être le spin des baryons qui forment le décuplet ?
7. Montrer qu'en combinant les deux octets de saveur et les deux doublets de spins on peut aussi former des fonctions d'onde complètement symétriques.
8. Justifier qu'il n'est pas possible de combiner une fonction d'onde de spin à celle du singulet de saveur pour créer une fonction d'onde complètement symétrique.