Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : TD n°1

Nombres complexes, suites et séries

Emmanuel Baudin & Francesco Zamponi

1 Nombres complexes

Commençons par un petit échauffement autour des nombres complexes :

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de 5^{3i}, $\frac{1+i}{2-i}$, i^n ($n \in \mathbb{N}$).
2. Dessiner les regions suivantes du plan complexe :

$$|z-i+5| = 3 \qquad |3z+i| \geq 1 \qquad \mathrm{Re}z \leq \mathrm{Im}z \qquad |z-1|-|z+1| = 2 \qquad |z-1|+|z+i| = 0$$

3. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que $|z+w| = |z| + |w|$
4. Prouver par induction que

$$\begin{aligned} &|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n| \\ &|z_1 \cdots z_n| = |z_1| \cdots |z_n| \\ &\overline{z_1 \cdots z_n} = \overline{z_1} \cdots \overline{z_n} \end{aligned}$$

5. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $\cos z$ et $\tanh z$.
6. Prouver que pour $\theta \neq 0$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)} \cos(n\theta/2)$$

Montrer que la même relation reste vraie pour $\theta \to 0$.

2 Suites de Cauchy

Nous rappelons la définition d'une suite de Cauchy : *Une suite u_n est dite de Cauchy (ou elle satisfait le critère de Cauchy) si*

$$\forall \epsilon \; \exists N : \forall n, n' > N \;\; \|u_n - u_{n'}\| < \epsilon \,. \tag{1}$$

Rappelons également la définition d'une norme : *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme est une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes pour tout $x, y \in E$:*

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

1. Démontrez le théorème suivant :
   (a) Toute suite de Cauchy est bornée.
   (b) Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergeant vers l converge elle-même vers l.
2. Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On le munit de la norme

$$|| \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i || = \max_{0 \leq i \leq n} |\alpha_i| \,. \tag{2}$$

   (a) Vérifiez que (2) est bien une norme.
   (b) On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$. Montrez qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Converge-t-elle dans $\mathbb{R}[x]$? Que peut-on en conclure sur $\mathbb{R}[x]$?

3 Convergence uniforme

1. Considérons la suite des fonctions $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
   (a) En considérant des quotients de termes successifs de la suite $\frac{x^k}{k!}$, montrez la convergence absolue pour tout $x \in \mathbb{C}$. La fonction limite s'appelle la fonction exponentielle e^x.
   (b) En utilisant une suite géométrique, trouver une estimation de $r_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour x fixé et n suffisament grand.
   (c) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $C_R = \{x \in \mathbb{C} |\, |x| < R\}$, $R \in \mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
2. Considérez les séries de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ pour les g_k suivantes. Convergent-elles ? Si oui, simplement ou uniformément ? La limite, si elle existe, est-elle continue ?
   (a)
$$g_k(x) = \begin{cases} 0\,, & x < k \\ (-1)^k\,, & x \geq k\,. \end{cases}$$
   (b)
$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k^2}\,, & |x| < k \\ \frac{1}{x^2}\,, & |x| \geq k\,. \end{cases}$$
   (c)
$$g_k(x) = x^k\,,\ x \in (0, 1)\,.$$
3. Montrez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} x^3$ définit une fonction continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4 Intégration

1. Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$. Vers quoi converge cette suite ? La convergence est-elle uniforme ? En dérivant par rapport à n, montrer que $f_n(x) \leq \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$. Calculer alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$. Comparer avec le calcul direct de $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
2. On considère la fonction :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n\,, & 2^{-n} < x < 2^{-(n-1)} \\ 0\,, & \text{ailleurs}\,. \end{cases}$$

   Montrer que f_n est dominée par une fonction simple . Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$?

5 Exercices maison

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $\log z$.
2. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^a},\ a > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^a} z^n,\ a > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} z^n,\ c \in \mathbb{C} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

3. Considérons la suite de fonctions $g_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Exprimer $g_n(x)$ en utilisant le développement binomial. En supposant $x > 0$, prouver ainsi que $g_n(x) \leq f_n(x)$ où $f_n(x)$ a été defini dans la partie 3.
   (b) En deduire les propriétés de convergence de $g_n(x)$ sur $C_R = \{x \in \mathbb{C} |\, |x| < R\}$, $R \in \mathbb{R}$.