HYDRODYNAMIQUE — TD DE SOUTIEN 5

ÉCOULEMENTS PARALLÈLES

Écoulement de Poiseuille cylindrique

Le but de cet exercice est de déterminer analytiquement la formule de la vitesse et du débit d'un écoulement de Poiseuille à l'intérieur d'une conduite cylindrique de longueur L et de rayon a et d'axe Oz. On considère un fluide incompressible de viscosité dynamique η. On applique une pression P_1 à une extrémité de la conduite, et une pression P_2 à l'autre extrémité. On néglige la gravité. On se place en régime permanent.

On suppose l'écoulement parallèle : $\overrightarrow{v} = v_z \overrightarrow{e}_z$.

1. De quelle variable(s) dépend(ent) v_z ? Justifier.
2. Justifier que p ne dépend que de z. Justifier que $\frac{\partial p}{\partial z}$ soit indépendant de z.
3. Calculer le champ de vitesse.
4. Calculer le débit volumique, ainsi que la vitesse moyenne.
5. Jusqu'à quelle valeur du nombre de Reynolds la solution calculée existe t-elle ? Que savez-vous sur sa stabilité ?
6. Dans cette question, on considère que le profil en $z = 0$ (début du tube) est un profil uniforme en r : $\overrightarrow{v} = V_0 \overrightarrow{e}_z$. À l'aide d'arguments dimensionnels, évaluer au bout de quelle distance d le profil de vitesse est un profil de Poiseuille.

En coordonnées cylindriques :

$$\text{div }(\mathbf{u}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{(u_\theta)^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{(u_r u_\theta)}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)$$

Écoulement de Couette plan

Un écoulement de Couette plan est celui d'un fluide délimité par deux plans parallèles horizontaux selon Ox, de vitesses constantes mais différentes. Notons U_1 (resp. U_2) la vitesse du plan inférieur (resp. supérieur) de cote $y = 0$ (respectivement $y = L$). Nous supposerons que la vitesse en tout point de l'écoulement est de la forme $\mathbf{u} = U(y,t)\mathbf{e_x}$. On n'impose pas de gradient de pression. On négligera la gravité.

1. Établir l'équation dont $u(y,t)$ est solution.
2. Établir l'expression de u lorsque le régime permanent est atteint.
3. Régime transitoire : on se place dans le cas où $U_2 = 0$. Le fluide est initialement au repos. A $t = 0$, le plan inférieur acquiert brusquement la vitesse U_1. À l'aide d'arguments dimensionnels, proposer un temps caractéristique de l'établissement du régime permanent.

4. Calculer la force par unité de surface selon $\mathbf{e_x}$ sur le plan inférieur. Quelle application de ce calcul connaissez-vous ?

Écoulement sur un plan incliné

On considère un liquide newtonien incompressible de viscosité dynamique η et densité ρ. Ce liquide s'écoule le long d'un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale (voir figure 1). L'épaisseur de couche reste constante et égale à h. De l'air à la pression uniforme p_0 est situé au-dessus du liquide. L'écoulement est stationnaire.

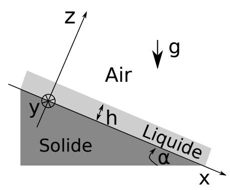

FIGURE 1 – Écoulement sur un plan incliné.

1. Donner l'expression du nombre de Reynolds associé à cet écoulement. On considérera dans la suite que ce nombre est petit devant 1.
2. Quelle est la forme du champ de vitesse ?
3. Donner les équations qui décrivent le mouvement du liquide.
4. Donner les conditions aux limites vérifiées par le fluide. On suppose que la viscosité dynamique de l'air est négligeable devant celle du liquide. Utiliser cette hypothèse pour simplifier une des conditions aux limites.
5. Calculer les champs de vitesse et de pression.
6. Calculer le débit par unité de longueur selon Oy.

Écoulement oscillant dans un fluide visqueux

Un liquide très visqueux de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ, incompressible, est placé au-dessus d'un plan horizontal infini selon Ox. Ce plan est animé d'un mouvement sinusoïdal suivant ce même axe Ox défini par un déplacement $\delta x(t) = A\sin(\omega t)$. On suppose que le vecteur vitesse est suivant x en tout point. On néglige la gravité, et la pression est uniforme en $y \to \infty$.

1. Calculer le champ de vitesse.
2. Quelle longueur caractéristique apparaît ? De quels autres phénomènes physiques ce problème est-il analogue ?
3. Peut-on propager des ondes de cisaillement dans un fluide ?