TD 4 : physique des particules.

Exercice 1 :

Sous une rotation $R \in SO_3(\mathbb{R})$ une fonction d'onde φ se transforme en $\tilde{\varphi}$:
$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(R^{-1}x)$

Les rotations autour de l'axe (Ox) sont les éléments de $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_1(\theta)} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$

$$\varphi(R_1^{-1}(\theta)x) = \varphi(x, \cos\theta y + \sin\theta z, -\sin\theta y + \cos\theta z)$$
$$\underset{\theta \to 0}{\simeq} \varphi(x, y + \theta z, -\theta y + z)$$

$$\underset{\theta \to 0}{\simeq} \varphi(x,y,z) + \theta(z\partial_y \varphi - y\partial_z \varphi)(x,y,z)$$

or par définition de L_x : $\varphi(R_1^{-1}(\theta)x) \underset{\theta \to 0}{\simeq} \varphi(x) - i\theta(L_x\varphi)(x)$

$$\Rightarrow L_x \varphi = i(z\partial_y \varphi - y\partial_z \varphi) \quad \text{i.e.} \quad \hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$$

De la même façon : rotations autour de (Oy) $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$

$$\Rightarrow \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$$

rotations autour de (Oz) : $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$

$$\Rightarrow \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

Exercice 2:

1). On pose
$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \leftarrow i \end{array}$$
, alors :

l'espace vectoriel des matrices hermitiennes admet pour base
$$\{E_{i,j}+E_{j,i}\}_{1\leq i<j\leq n} \cup \{i(E_{k,j}-E_{j,k})\}_{1\leq k<j\leq n} \cup \{E_{i,i}\}_{1\leq i\leq n}$$

l'espace vectoriel des matrices antihermitiennes admet pour base
$$\{E_{i,j}-E_{j,i}\}_{1\leq i<j\leq n} \cup \{i(E_{k,j}+E_{j,k})\}_{1\leq k<j\leq n} \cup \{iE_{j,j}\}_{1\leq j\leq n}$$

Remarque : ce sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, pas sur $\mathbb{C}$ puisque si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et hermitienne $A^{\dagger}=A$ alors iA est antihermitienne $(iA)^{\dagger}=-iA$.

Ils sont d'ailleurs tous deux de dimension n^2.

2). Si on note $M_1,\dots,M_n$ les colonnes de la matrice M on a :
$$\det(I_n+\varepsilon M) = \det I_n + \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\det\left((e_1|\dots|e_{k-1}|M_k|e_{k+1}|\cdots|e_n)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
où
$$e_j = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \leftarrow j.$$

$$M_k = \sum_{j=1}^{n} m_{j,k}\, e_j \quad \text{et} \quad \det\left((e_1|\cdots|e_{k-1}|e_j|e_{k+1}|\cdots|e_n)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq k \\ 1 & \text{si } j=k \end{cases}$$

donc $\det\left((e_1|\cdots|e_{k-1}|M_k|e_{k+1}|\cdots|e_n)\right) = m_{k,k}$

soit $\det(I_n+\varepsilon M) = \det I_n + \varepsilon \operatorname{Tr} M + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

On a donc bien $\det(I_n+\varepsilon M) = \det I_n + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \Leftrightarrow \operatorname{Tr} M = 0$.

3). $U^{\dagger}U = I_2$: $(I_2+\varepsilon M^{\dagger})(I_2+\varepsilon M) = I_2+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \Leftrightarrow M^{\dagger}=-M$

$\det(I_2+\varepsilon M) = 1+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \Leftrightarrow \operatorname{Tr} M = 0$.

L'espace vectoriel est $\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C});\ M^{\dagger}=-M \text{ et } \operatorname{Tr}M=0\} = su(2)$

4) Soit $M \in su(2)$: $\cdot$ $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Tr}\, M) = \exp(0) = 1$

$\cdot$ $\exp(M)^\dagger = \exp(M^\dagger) = \exp(-M)$

$\Rightarrow \exp(M)^\dagger \exp(M) = \exp(-M)\exp(M) = I_2$

car on rappelle que si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent ($AB = BA$) alors

$$\exp A \exp B = \exp B \exp A = \exp(A+B)$$

5). Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in su(2)$: $M^\dagger = -M \Leftrightarrow \alpha^* = -\alpha,\ \beta^* = -\gamma,\ \delta^* = -\delta$

$\mathrm{Tr}\, M = 0 \Leftrightarrow \alpha + \delta = 0$

donc $\exists\, a \in \mathbb{R},\ \alpha = ia$ et $M = \begin{pmatrix} ia & \beta \\ -\beta^* & -ia \end{pmatrix} = a i\sigma_z + \mathrm{Re}(\beta) i\sigma_y + \mathrm{Im}(\beta) i\sigma_x$

on vient de montrer que $su(2) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z)$

La réciproque est bien sûr vraie donc $su(2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z)$

et $i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z$ sont linéairement indépendants donc ils forment une base de $su(2)$

6). Si $U \in SU(2)$: $U^{-1} = U^\dagger$

$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\det U = 1 \Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, $U^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}$

donc $\alpha = \delta^*$ et $\gamma = -\beta^*$ i.e. $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$

et $1 = \det U = \alpha\delta - \beta\gamma = |\alpha|^2 + |\beta|^2$

On vient de montrer que $SU(2) \subset \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} ; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$

L'autre inclusion est claire donc il y a égalité.

7). On cherche $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $ad - bc = 1$ t.q.

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = U^* = S^{-1} U S = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad\alpha - bc\alpha^* + ab\beta^* + cd\beta & bd(\alpha - \alpha^*) + b^2\beta^* + d^2\beta \\ ac(\alpha^* - \alpha) - a^2\beta^* - c^2\beta & -bc\alpha + ad\alpha^* - ab\beta^* - cd\beta \end{pmatrix}$$

Il suffit de prendre $a = d = 0$ $b = -c = 1$: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : on a ainsi montré l'équivalence de deux représentations de $SU(2)$, à savoir, la représentation de définition ($U \mapsto U$) et sa conjuguée ($U \mapsto U^*$).