Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr

TD N^o1: Correction

1 Quelques relations grâce aux notations d'Einstein.

ϵ_{ijk} est le symbole de Levi-Civita.

1. Dans une base $(\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3})$ orthonormée donnée, intéressons nous d'abord au résultat intermédiaire $\underline{\mathrm{B}} = \underline{\mathrm{grad}}\mathrm{A}$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A}{\partial x_2} \\ \frac{\partial A}{\partial x3} \end{pmatrix}$$

Si maintenant on prend le rotationnel:

$$\underline{rot}(\underline{B}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial A}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial A}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial A}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial A}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial A}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

En utilisant le théorème de Schwartz pour changer l'ordre des dérivations partielle, on peut donc en déduire:

$$\underline{rot}(\underline{grad}A) = \underline{0}$$

2. Dans une base $(\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3})$ orthonormée donnée, intéressons nous d'abord au résultat intermédiaire $\underline{\mathrm{B}} = \underline{\mathrm{rot}}\underline{\mathrm{A}}$. En utilisant en plus le symbole de Levi-Civita

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{(j,k)} \epsilon_{1jk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \\ \sum_{(j,k)} \epsilon_{2jk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \\ \sum_{(j,k)} \epsilon_{3jk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1jk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \\ \epsilon_{2jk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \\ \epsilon_{3jk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

Si maintenant on prend la divergence:

$$div(\underline{B}) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Or pour les indices j et k, $\dfrac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j}$ est symétrique alors que ϵ_{ijk} est anti-symétrique. Par conséquent, on a bien:

$$div(\underline{rot A}) = 0$$

3. Commençons par effectuer $\underline{B} \times \underline{C}$. En utilisant la même méthode que pour l'exercice précédent, on arrive à:

$$(\underline{B} \times \underline{C})_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k$$

Avec cela, on montre que:

$$(\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}))_p = \epsilon_{pqr} A_q (\underline{B} \times \underline{C})_r = \epsilon_{pqr} \epsilon_{rjk} A_q B_j C_k$$

Or on peut prouver que:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

Donc on a:

$$(\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}))_p = (\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) A_q B_j C_k$$

Pour p = 1:

$$(\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}))_1 = (\delta_{1j} \delta_{qk} - \delta_{1k} \delta_{qj}) A_q B_j C_k = B_1 (\underline{A} \cdot \underline{C}) - C_1 (\underline{A} \cdot \underline{C})$$

En répétant sur les 3 indices, on arrive bien à l'égalité $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B} \cdot (\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C} \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B})$.

2 Déformation d'un solide

1. (a)

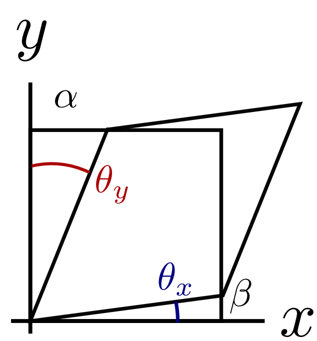

Figure 1: Déformation du carré.

(b) En utilisation géométrique et l'hypothèse de petits angles avec des angles orientés:

$$\theta_x = \beta$$
$$\theta_y = -\alpha$$

(c) La rotation d'ensemble correspond à la moyenne des rotations de chaque partie:

$$\theta_{rot} = \frac{\theta_x + \theta_y}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

On peut aussi le retrouver en décomposant le tenseur gradient F (gradient de la transformation):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{-\alpha+\beta}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\beta+\alpha}{2} \\ \dfrac{\beta+\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour des petits angles, on retrouve pour le premier terme la matrice rotation:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_{rot}) & -\sin(\theta_{rot}) \\ \sin(\theta_{rot}) & \cos(\theta_{rot}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{rot} \\ \theta_{rot} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{-\alpha+\beta}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Cela confirme $\theta_{rot} = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ et nous donne le tenseur symétrique de déformation E:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{-\alpha+\beta}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Une autre façon de récupérer le tenseur déformation est depuis le tenseur déformation:

$$E = F^T F - Id.$$

2. (a) Pour regarder la variation de volume, on doit s'intéresser à la trace du tenseur (Exemple: au premier ordre, test avec $V = a^3(1+\epsilon_{11})(1+\epsilon_{22})(1+\epsilon_{33})$).
   Pour une augmentation de volume, on veut $Trace > 0$. Donc:
   $\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$ avec $A > 0$.

   (b) $Trace = 0$, donc:
   $\begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda A & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda A \end{bmatrix}$ avec $A > 0$ et $\lambda > 0$.

3 Quelques questions sur les tenseurs d'ordre 2

Exercice A: Soit un tenseur $\underline{\underline{S}}$. Prenons 2 bases orthonormées B et B' quelconque avec P matrice de passage de B à B'. Appelons S_{ij} (resp. S'_{ij}) les termes de la matrice de $\underline{\underline{S}}$ dans B (resp. B'). On a alo!rs:

$$S'_{ij} = P_{ip}P_{jq}S_{pq}$$

Prenons un cas où $\underline{\underline{S}}$ est symétrique, alors $S_{pq} = S_{qp}$. Donc:

$$S'_{ij} = P_{ip}P_{jq}S_{qp}$$

De plus les indices p et q sont muets, on peut donc les intervertir:

$$S'_{ij} = P_{jp}P_{iq}S_{qp} = S'_{ji}$$

Donc $\underline{\underline{S}}'$ est bien symétrique. On montre de la même manière l'antisymétrie.

Exercice B: Depuis tenseur $\underline{\underline{T}}$ on peut créer 2 nouveaux tenseurs $\underline{\underline{T}}^S$ et $\underline{\underline{T}}^A$ suivant les formules suivantes:

$$\underline{\underline{T}}^S = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} +^t \underline{\underline{T}})$$
$$\underline{\underline{T}}^A = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} -^t \underline{\underline{T}})$$

Dans une base $(\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3})$ orthornormée, on a:

$$T^S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2}(T_{ji} + T_{ij}) = T^S_{ji}$$
$$T^A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -\frac{1}{2}(T_{ji} - T_{ij}) = -T^A_{ji}$$

Donc $\underline{\underline{T}}^S$ est symétrique et $\underline{\underline{T}}^A$ est antisymétique. CQFD.

Exercice C: Dans une base orthornormée:

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{A}} = S_{ij}A_{ji} = -S_{ji}A_{ij} = -S_{ij}A_{ji} = 0$$

CQFD.

Exercice D: Conséquence directe de l'exercice précédent et de la distributivité de l'opérateur produit doublement contracté.

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{T}}^S + \underline{\underline{T}}^A) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}}^S + \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}}^A = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}}^S$$

Exercice E: Soit un tenseur $\underline{\underline{T}}$. Prenons 2 bases orthonormées B et B' quelconque avec P matrice de passage de B à B'. Appelons T_{ij} (resp. T'_{ij}) les termes de la matrice de $\underline{\underline{T}}$ dans B (resp. B'). On a:

$$\mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}}') = \mathrm{Tr}({}^t\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{P}}) = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}})$$

Donc $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}})$ est bien un invariant.

De la même manière, on montre que $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}}^2)$ est un invariant, donc $\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}})^2 - \mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}}^2))$ l'est aussi. Enfin, on a:

$$\mathrm{Det}(\underline{\underline{T}}') = \mathrm{Det}({}^t\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{P}}) = \mathrm{Det}(\underline{\underline{T}})$$

Donc $\mathrm{Det}(\underline{\underline{T}})$ est aussi un invariant.

4 Déterminant de matrice 3x3 avec Einstein

Développons le déterminant:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(V) &= V_{11}(V_{22}V_{33} - V_{32}V_{23}) + V_{21}(V_{13}V_{32} - V_{12}V_{33}) + V_{31}(V_{12}V_{23} - V_{22}V_{13}) \\ &= \epsilon_{ijk}V_{1i}V_{2j}V_{3k}\end{aligned}$$

On peut alors poser $(p, q, r) = (1, 2, 3)$. Cela nous donne:

$$\epsilon_{pqr}\,\mathrm{Det}(V) = \epsilon_{ijk}V_{pi}V_{qj}V_{rk}$$
$$\epsilon^2_{pqr}\,\mathrm{Det}(V) = \epsilon_{pqr}\epsilon_{ijk}V_{pi}V_{qj}V_{rk}$$

On calcul ensuite ϵ_{pqr}^2 :

$$\begin{aligned}\epsilon_{pqr}^2 &= \epsilon_{123}^2 + \epsilon_{132}^2 + \epsilon_{231}^2 + \epsilon_{213}^2 + \epsilon_{312}^2 + \epsilon_{321}^2 \\ &= 6\end{aligned}$$

On arrive donc bien à l'égalité demandée:

$$\mathrm{Det}(V) = \frac{1}{6}\epsilon_{pqr}\epsilon_{ijk}V_{pi}V_{qj}V_{rk}$$