Géométrie Différentielle, TD 9 du 5 avril 2019

1. Questions diverses- A FAIRE AVANT LE TD

Sur l'algèbre extérieure :

1– Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $v \in E$ et $\Lambda E^\star$ l'agèbre extérieure de $E^\star$ identifiée avec l'algèbre des formes multilinéaires alternées sur E. Montrer que le produit intérieur par v est une dérivation de degré -1 de $\Lambda E^\star$.

2– Montrer que si D_1, D_2 sont des dérivations de $\Lambda E^\star$ de degrés respectifs $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ alors $[D_1, D_2] := D_1 D_2 - (-1)^{r_1 r_2} D_2 D_1$ est une dérivation de degré $r_1 + r_2$.

Sur l'orientabilité :

1– Montrer qu'une variété connexe admet au plus deux orientations.

2– Montrer que le fibré tangent d'une variété est orientable.

3– Montrer qu'un groupe de Lie est orientable.

Solution :

1– On se donne $\alpha \in \Lambda^p E^*$, $\beta \in \Lambda^q E^*$. On doit montrer que $i_v(\alpha\wedge\beta) = (i_v\alpha)\wedge\beta + (-1)^p \alpha\wedge(i_v\beta)$. Par multilinéarité, on peut supposer que $\alpha = l_1 \wedge\cdots\wedge l_p$ et $\beta = m_1\wedge\cdots\wedge m_q$. On note $v_1 = v$. Alors pour tous vecteurs $v_2, \ldots, v_p \in E$, en développant le déterminant, on a :

$$\begin{array}{rcl} i_{v_1}(\alpha)(v_2,\ldots,v_p) & = & i_{v_1}(l_1\wedge\cdots\wedge l_p)(v_2,\ldots,v_p) \\ & = & (l_1\wedge\cdots\wedge l_p)(v_1,v_2,\ldots,v_p) \\ & = & \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1} l_i(v_1)(l_1\wedge\cdots\wedge\widehat{l_i}\wedge\cdots\wedge l_p)(v_2,\ldots,v_p) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$i_{v_1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1} l_i(v_1) l_1\wedge\cdots\wedge\widehat{l_i}\wedge\cdots\wedge l_p.$$

En appliquant cette formule à β et $\alpha\wedge\beta = l_1\wedge\cdots\wedge l_p\wedge m_1\wedge\cdots\wedge m_q$, on a

$$i_{v_1}(\beta) = \sum_{j=1}^{q}(-1)^{j-1} m_j(v_1) m_1\wedge\cdots\wedge\widehat{m_j}\wedge\cdots\wedge m_q$$

et

$$\begin{array}{rcl} i_{v_1}(\alpha\wedge\beta) & = & \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1} l_i(v_1) l_1\wedge\cdots\wedge\widehat{l_i}\wedge\cdots\wedge l_p\wedge m_1\wedge\cdots\wedge m_q \\ & + & \sum_{j=p+1}^{p+q}(-1)^{j-1} m_{j-p}(v_1) l_1\wedge\cdots\wedge l_p\wedge m_1\wedge\cdots\wedge\widehat{m_{j-p}}\wedge\cdots\wedge m_q. \end{array}$$

Ce qui donne bien

$$\begin{aligned} i_{v_1}(\alpha\wedge\beta) &= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}l_i(v_1)l_1\wedge\cdots\wedge\widehat{l_i}\wedge\cdots\wedge l_p\wedge\beta \\ &+ \alpha\wedge\left(\sum_{j=p+1}^{p+q}(-1)^{j-1}m_{j-p}(v_1)m_1\wedge\cdots\wedge\widehat{m_{j-p}}\wedge\cdots\wedge m_q\right) \\ &= (i_{v_1}\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge(i_{v_1}\beta). \end{aligned}$$

2– Calcul direct.

3– Soit ω une forme volume sur M variété connexe orientable. Si ω' est une autre forme volume, on a $\omega'=f\omega$ où $f:M\to\mathbb{R}$ est C^∞ sans point d'annulation. Par connexité, on a $f>0$ ou bien $f>0$ donc ω' définit la même orientation que ω ou que $-\omega$. D'où le résultat.

4– Soit U un ouvert de M et $\varphi:U\to V\subset\mathbb{R}^m$ une carte de M. Soit $T\varphi:TU\to V\times\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^{2m}$ la carte de TM associée. Montrons que ces cartes munissent TM d'une structure de variété orientée.

Si ψ est une autre carte de M, l'application de changements de cartes est $T\psi\circ T\varphi^{-1}(x,v)=(\psi\circ\varphi^{-1}(x),d_x(\psi\circ\varphi^{-1})(v))$. Sa différentielle en (x,v) est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} d_x(\psi\circ\varphi^{-1}) & \bullet \\ 0 & d_x(\psi\circ\varphi^{-1}) \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant positif.

5– Soit $n=\dim G$ (nécéssairement constante pour un groupe de Lie). On se donne ω_e une n-forme linéaire alternée non nulle au point e de G. On l'étend à G tout entier en une forme volume G invariante à gauche en posant $\omega_g:=L^\star_{g^{-1}}\omega_e:=\omega_e(TL_{g^{-1}},\dots,TL_{g^{-1}})\in\Lambda^n(T_g^*G)$. G est ainsi orientable (et l'action de G sur lui même par multiplication à gauche préserve l'orientation).

2. Produit intérieur et dérivée de Lie

Soient X,Y des champs de vecteurs sur une variété M. On va s'inspirer de la preuve de la formule de Cartan pour montrer que $i([X,Y])=\mathcal{L}_X\circ i(Y)-i(Y)\circ\mathcal{L}_X$.

1– Montrer que $i([X,Y])$ et $\mathcal{L}_X\circ i(Y)-i(Y)\circ\mathcal{L}_X$ coïncident sur les 0-formes et les différentielles de 0-formes.

2– Montrer que $i([X,Y])$ et $\mathcal{L}_X\circ i(Y)-i(Y)\circ\mathcal{L}_X$ sont des dérivations de degré -1.

3– Conclure.

Solution :

On note $P:=\mathcal{L}_X\circ i_Y-i_Y\circ\mathcal{L}_X$.

1– $i_{[X,Y]}$ *et* P *coïncident sur les 0-formes et les différentielles de 0-formes.*
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Alors $P(f) = 0 - 0 = i_{[X,Y]} f$.
En utilisant le fait que $\mathcal{L}_Z = i_Z \circ d$ sur les 0-formes, on obtient :

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}(df) &= df([X,Y]) = \mathcal{L}_{[X,Y]} f \\ &= \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f \\ &= \mathcal{L}_X i_Y(df) - i_Y \circ d \circ \mathcal{L}_X f \\ &= \mathcal{L}_X i_Y(df) - i_Y \mathcal{L}_X(df) \\ &= P(df) \end{aligned}$$

2– $i_{[X,Y]}$ *et* P *sont des anti-dérivations*
Cela découle de la question 2 du premier exercice.

3– *Conclusion.*
P et $i_{[X,Y]} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ sont des opérateurs locaux (i.e. qui commutent à la restriction à un ouvert de M). Pour montrer que $P\alpha = i_{[X,Y]}\alpha$ on peut donc se restreindre à un domaine de cartes, puis supposer que $M = U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$. On écrit alors $\alpha = \sum_{i\in I} a_i dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ où I est l'ensemble des p-uplets sans répétition d'éléments de $\{0, \ldots, n\}$ ordonnés par ordre strictement croissant. On calcule par propriété d'antidérivations que $P\alpha = \sum_{i\in I} P(a_i) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} + a_i P(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})$ et de même pour $i_{[X,Y]}$. Il suffit donc de montrer que $P(a_i) = i_{[X,Y]}(a_i)$ (fait en question 1), et $P(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = i_{[X,Y]}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})$ (provient de la question 1 en raisonnant par récurrence). D'où le résultat.

3. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

1– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de $T_x M$,

$$\omega_x(e_1, \ldots, e_d) = 1.$$

2– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

3– Montrer que $P^n(\mathbb{R})$ n'est pas orientable si n est pair.

Solution :

1– Soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un recouvrement de M par des cartes orientées, $(\chi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée. Fixons $i \in I$, notons $(U_i, \varphi_i) = (U, \varphi)$. Soit $X_1, \ldots, X_d \in \Gamma(TU)$

une base de champs de vecteurs sur U (obtenue par exemple en tirant en arrière la base canonique sur $\varphi(U)$). Quitte à remplacer cette base par son orthonormalisé de Gram-Schmidt, on peut supposer qu'elle est orthonormale (pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$). Quitte à échanger X_1 et X_2, on peut supposer cette base directe pour l'orientation de M. On note $(X_i^*)_{i=1\dots d}$ la base duale. Alors pour toute base de champs de vecteurs orthonormée directe sur U, on a $X_1^* \wedge \dots \wedge X_d^*(Y_1, \dots Y_d) = 1$. On conclut en posant $\omega_i := \chi_i(X_1^* \wedge \dots \wedge X_n^*)$. puis $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i$.

2– On considère l'orientation standard de $\mathbb{S}^{n-1}$ donnée par la forme volume $\omega_x = i_x dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Lambda^{n-1} T_x^* \mathbb{S}^{n-1}$. Cette dernière vérifie la propriété demandée dans la question 1). La formule explicite pour un produit intérieur est prouvée dans le TD précédent et permet de conclure.

3– Si $P^n(\mathbb{R})$ est orientable, alors il admet une forme volume ω. On la tire en arrière via la projection $p : \mathbb{S}^n \to P^n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{S}^n / x \sim -x$ Cela définit une forme volume $\widetilde{\omega}$ sur $\mathbb{S}^n$ invariante par $x \mapsto -x$. Mais comme $\mathbb{S}^n$ est connexe, on sait que $\widetilde{\omega}$ est de la forme $\widetilde{\omega} = f \widetilde{\omega}_0$ où $\widetilde{\omega}_0$ est la forme définie dans la dernière question de l'exercice 2, et f est une fonction C^∞ soit strictement positive, soit strictement négative. Si n est pair, $\widetilde{\omega}_0$ est ant-invariante par antipodie, on a $\widetilde{\omega}$ qui ne peut être invariante par antipodie. Absurde.

4. Divergence d'un champ de vecteurs

Soit M une variété différentielle, ω une forme volume sur M, X un champ de vecteurs sur M. On apelle divergence du champ X par rapport à la forme ω la fonction $\mathrm{div}(X) \in C^\infty(M)$ définie par $\mathrm{d}(i(X)\omega) = \mathrm{div}(X)\omega$.

1– Montrer que le flot du champ X préserve la forme ω si et seulement si la divergence de X est nulle.

2– Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$, calculer la divergence d'un champ X par rapport à la forme volume canonique $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.

Solution :

La formule de Cartan donne que $L_\xi \omega = d i_\xi \omega + i_\xi d\omega$. Ici, ω est de degré maximal, donc $\mathrm{d}\omega = 0$, si bien que $L_\xi \omega = d(i_\xi \omega) = \mathrm{div}(\xi)\omega$. Mais rappelons qu'une des définitions de $L_\xi \omega$ est $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} (\varphi_t)^* \omega$, où φ_t est le flot de ξ. Ainsi, ω est invariante le long du flot si et seulement si $L_\xi \omega = 0$, i.e. si et seulement si $\mathrm{div}(\xi) = 0$.

Si $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, alors

$$i_\xi \omega(x).(\eta_2, \ldots, \eta_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma(1) = i} \varepsilon(\sigma) \eta_{2\sigma(2)} \ldots \eta_{n\sigma(n)}.$$

Ainsi,

$$i_\xi \omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \xi_1 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \dots \mathrm{d}x_n.$$

En dérivant, on trouve

$$d(i_\xi \omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

i.e. $\mathrm{div}(\xi) = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}$: on retrouve la divergence habituelle.

5. Théorème de Darboux

Soit M une variété de dimension $2n$ munie d'une 2-forme ω fermée (i.e. $d\omega = 0$) et de rang en tout point égal à $2n$ (on dit que ω est une forme symplectique). On va montrer que tout point $p \in M$ admet un voisinage U muni de coordonnées locales $(x_1, \cdots, x_{2n})$ telles que

$$\omega_{|U} = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

1– On suppose tout d'abord $n = 1$. Montrer que si (y_1, y_2) est un système de coordonnées locales arbitraire en p, on peut trouver une fonction différentiable h telle que (y_1, h) soit un système de coordonnées répondant à la question sur un voisinage de p.

2– On étudie le cas général. Soit f une fonction différentiable telle que $f(p) = 0$ et $df_p \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X_2 sur M tel que $i_{X_2}\omega = df$, et qu'il existe une fonction différentiable g telle que $dg.X_2 = 1$ sur un voisinage de p.

3– Soit X_1 le champ de vecteurs tel que $i_{X_1}\omega = dg$. Montrer qu'au voisinage de p on a :

$$\omega(X_1, X_2) = 1 \text{ et } [X_1, X_2] = 0$$

4– On considère alors un système de coordonnées locales $(y_1, \cdots, y_{2n})$ au voisinage de p telles que $X_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$ pour $i = 1, 2$. Montrer que $(x_1, \cdots, x_{2n}) := (-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ est un système de coordonnées sur un voisinage V de p tel que

$$\omega_{|V} = dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{3 \leqslant i < j \leqslant 2n} \omega_{ij}(x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dw_j.$$

5– Conclure.

Solution :

1– Cherchons h. On a $dy_1 \wedge dh = dy_1 \wedge \frac{\partial h}{\partial y_2} dy_2$ et $\omega = f dy_1 \wedge dy_2$ au voisinage de p (pour une certaine fonction f). Il s'agit donc de trouver h $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\frac{\partial h}{\partial y_2} = f$, ce qui se résout en prenant par exemple (en coordonnées locales) : $h(y_1, y_2) = \int_0^{y_2} f(y_1, t) dt$.

2– Soit $x \in M$. Comme ω est de rang $2n$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} TxM & \longrightarrow & TxM^* \\ v & \mapsto & \omega(v,.) \end{array}$$

est un isomorphisme. Il existe donc un unique vecteur $X_2(x)$ tel que $i_{X_2(x)}\omega_x = df_x$. Montrons que X_2 est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$. Au voisinage d'un point a, dans une carte locale, ω s'écrit $\omega_x = \sum\limits_{i<j} 2\omega_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$, où $\Omega_x := (\omega_{ij}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n}$ matrice antisymétrique de rang 2n représentant la forme bilinéaire ω_x.

Alors $i_{X_2(x)}\omega_x = df_x$ se réécrit :

$$\sum_{i<j} 2\omega_{ij}(x)[X_i(x)dx_j - X_j(x)dx_i] = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

c'est à dire

$$\sum_j \left(\sum_i \omega_{ij}(x) X_i(x) \right) dx_j = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

ou encore $\Omega_x(X_2(x)) = \nabla_x f$, i.e. $X_2(x) = \Omega_x^{-1} \nabla_x f$, donc X_2 est $\mathcal{C}^\infty$.

3– On a, au voisinage de p, $\omega(X_1, X_2) = i_{X_2}(\omega(X_1,.)) = i_{X_2} i_{X_1} \omega = i_{X_2} dg = dg.X_2 = 1$. Pour le crochet de X_1 et X_2, on utilise la formule de l'exercice 2 appliquée à la forme ω (et la formule de Cartan) :

$$\begin{array}{lll} i_{[X_1,X_2]}\omega & = \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{X_2}\mathcal{L}_{X_1}\omega & \\ & = \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{X_2}(d(i_{X_1}\omega) + i_{X_1}(d\omega)) & \\ & = \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{X_2}(d(i_{X_1}\omega)) & \text{car } \omega \text{ est fermée} \\ & = \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{X_2}(d(dg)) & \\ & = \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega & \text{car } d \circ d = 0 \\ & = d(i_{X_1}(i_{X_2}\omega)) + i_{X_1}(d(i_{X_2}\omega)) & \\ & = d(i_{X_1}(i_{X_2}\omega)) + i_{X_1}(d(df)) & \\ & = d(x \mapsto 1) & \\ & = 0 & \end{array}$$

Comme ω est de rang $2n$, cela montre que $[X_1, X_2] = 0$ au voisinage de p (cf isomorphisme de la question précédente).

4– On a

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y_1} = df.X_1 = i_{X_1}(df) = i_{X_1} i_{X_2}\omega = \omega(X_2, X_1) = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} = df.X_2 = i_{X_2}(df) = i_{X_2} i_{X_2}\omega = \omega(X_2, X_2) = 0 \end{array}$$

De même, $\frac{\partial g}{\partial y_1} = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y_2} = 1$.

La jacobienne de $(-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ ? & ? & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et est donc inversible ; $(-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ est donc un système de coordonnées locales au voisinage de p.
Au voisinage de p, ω s'écrit $\omega = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2n} \omega_{ij}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dw_j$. En évaluant ω en (X_1, X_2), on obtient $\omega_{12} \equiv 1$. En évaluant ω en $(X_1, \frac{\partial}{\partial x_j})$ pour $j \geqslant 3$, on obtient $\omega_{1j} = \omega(X_1, \frac{\partial}{\partial x_j}) = i_{X_1}\omega(\frac{\partial}{\partial x_j}) = dg(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial x_2}{\partial x_j} = 0$. De même, $\omega_{2j} \equiv 0$ pour $j \geqslant 3$. Ainsi, ω s'écrit $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + \sum\limits_{3\leqslant i<j\leqslant 2n} \omega_{ij}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dw_j$.

Enfin, en écrivant $d\omega = 0$, on obtient que pour $j > i \geqslant 3$, $\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_2} = 0$, et donc

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{3\leqslant i<j\leqslant 2n} \omega_{ij}(x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dw_j$$

5– On considère la sous-variété M' de M au voisinage de p donnée par l'équation $x_1 = x_2 = 0$ et la forme ω' sur M' donnée par $\omega' = \sum\limits_{3\leqslant i<j\leqslant 2n} \omega_{ij}(x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dw_j$.
Comme ω est fermée et que $d(dx_1 \wedge dx_2) = 0$, on obtient que ω' est fermée. De plus, ω' est bien de rang $2n-2$ en tout point : si un vecteur v est dans le noyau de ω'_x, alors $(0, 0, v)$ est dans celui de ω_x et donc v=0. Par récurrence, Il existe des coordonnées locales $(x'_3, \cdots, x'_{2n})$ sur M' telles que $\omega' = dx'_3 \wedge dx'_4 + \cdots + dx'_{2n-1} \wedge dx'_{2n}$. On obtient alors que $(x_1, x_2, x'_3, \cdots, x'_{2n})$ est un système de coordonnées locales au voisinage de p et que $\omega' = dx_1 \wedge dx_2 + dx'_3 \wedge dx'_4 + \cdots + dx'_{2n-1} \wedge dx'_{2n}$.