Mécanique quantique – L3

Emmanuel Baudin – Tom Bienaimé – Sylvain Nascimbène

TD 1 : Formalisme et postulats

---

1 Matrices de Pauli, bras, kets et mesure

Dans les espaces de Hilbert à 2 dimensions, on utilise très souvent les trois matrices suivantes, appelées matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elles jouent un rôle fondamental dans la description du comportement quantique du spin de l'électron, et plus généralement de tous les systèmes quantiques à deux niveaux. On se propose d'étudier quelques-unes de leurs propriétés.

1. Les matrices de Pauli sont-elles hermitiennes ? Peuvent-elles être des observables ?
2. Calculer les commutateurs $[\sigma_1, \sigma_2]$, $[\sigma_2, \sigma_3]$, $[\sigma_3, \sigma_1]$.
3. Déterminer les valeurs propres $\lambda_{\pm,i}$ et les vecteurs propres associés $|\pm_i\rangle$ des matrices de Pauli.
4. Pour un état $|\psi\rangle$ quelconque, quelle est la probabilité de mesurer l'état $|+_i\rangle$? Exprimer ce résultat à partir de l'observable $\hat{O}_i$ que vous définirez et qui correspond à la détection de l'état $|+_i\rangle$.

2 L'effet Zénon quantique

On considère dans cette partie un système à deux niveaux (espace des états à deux dimensions, engendré par $\{|1\rangle, |2\rangle\}$), évoluant selon un hamiltonien $\widehat{H}_0$:

$$H_0 = \hbar\Omega\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)\,. \tag{1}$$

On note $|\psi(t)\rangle = a(t)|1\rangle + b(t)|2\rangle$, et on suppose qu'initialement $|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle$.

1. En utilisant l'équation de Schrödinger $\widehat{H}_0|\psi(t)\rangle = i\hbar\partial_t|\psi\rangle$, écrire les équations d'évolution de $a(t)$ et $b(t)$.
2. Résoudre ces équations.
3. Quelle est la probabilité de mesurer le système dans l'état $|2\rangle$ au temps t ?
4. Montrer qu'au bout d'un temps T donné, le système peut être détecté avec certitude dans l'état $|2\rangle$. **On notera T la plus petite des durées qui vérifie cette propriété.**

n	$\frac{1}{2}[1-\cos^n(\pi/n)]$	$1 \rightarrow 2$ transition Predicted	Observed
1	1.0000	0.995	0.995
2	0.5000	0.497	0.500
4	0.3750	0.351	0.335
8	0.2346	0.201	0.194
16	0.1334	0.095	0.103
32	0.0716	0.034	0.013
64	0.0371	0.006	−0.006

FIGURE 1 – Résultats de l'expérience d'Itano *et al.* La barre d'erreur estimée sur le taux de transition est de 2 %. Pour cette expérience, le basculement $1 \rightarrow 2$ s'effectue en $T = 256$ ms. Les séquences de mesure s'effectuent en 2,4 ms.

On découpe l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles égaux. On effectue une mesure sur le système (qui le projette dans l'état $|1\rangle$ ou l'état $|2\rangle$) à la fin de chacun de ces intervalles.
On note $P(i, n)$ la probabilité de trouver le système dans l'état $|2\rangle$ après i intervalles.

5. On s'intéresse tout d'abord au cas $n = 2$. Montrer que $P(2, 2) = \frac{1}{2}$.
6. On s'intéresse maintenant au cas général. Montrer pour $0 \leq i \leq n-1$:
$$P(i+1, n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) P(i, n) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)(1 - P(i, n)) . \tag{2}$$
7. Résoudre l'équation précédente et montrer finalement :
$$P(n, n) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) . \tag{3}$$
8. Vérifier l'accord des données expérimentales.
9. Quels effets supplémentaires peut-on songer à prendre en compte (troisième colonne de la table) ? Cela remet-il en cause la réalité de l'effet ?
10. Montrer finalement que dans la limite $n \rightarrow \infty$:
$$P(n, n) \simeq \frac{1}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{2n}\right)\right) . \tag{4}$$
11. Conclure et justifier le nom d'*effet Zenon quantique* donné à cet effet.

Bibliographie :

W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, *Quantum Zeno effect*,
Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990).