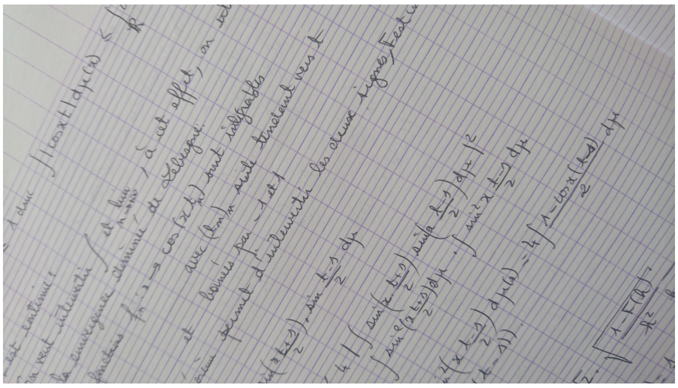


École Normale Supérieure L3 FIP

Mathématiques pour la physique

Antoine Maillard & Guilhem Semerjian & Frédéric van Wijland

Travaux dirigés

2019 - 2020

Ces énoncés ont été compilés par Antoine Maillard, Guilhem Semerjian, Frédéric van Wijland et Francesco Zamponi.

Table des matières

1 Intégration et probabilités

1.1 Suites de Cauchy

Nous rappelons qu'un espace vectoriel E, sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est dit normé s'il est muni d'une fonction $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes pour tous $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) \geq 0 &\text{ avec égalité ssi } x = 0 \\ \forall \lambda \in K,\ \mathcal{N}(\lambda x) &= |\lambda| \mathcal{N}(x) \\ \mathcal{N}(x+y) &\leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y) \end{aligned} \tag{1}$$

et l'on notera $\mathcal{N}(x) = \|x\|$. On appelle suite de Cauchy une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E (muni d'une norme) telle que le critère de Cauchy soit vérifié, à savoir :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n, m > n_0,\ \|u_n - u_m\| < \varepsilon \tag{2}$$

1. Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Démontrer que toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergeant vers $\ell \in E$ converge elle-même vers ℓ.
3. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels. On le munit de la norme

$$\mathcal{N} \ :\ P(X) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j X^j \mapsto \mathcal{N}(P) = \|P\| = \max_{0\leq i\leq n} |\alpha_i| \tag{3}$$

   Montrer que $\mathcal{N}$ est bien une norme.
4. On considère la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ avec $P_n(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X^k$. Est-ce une suite de Cauchy ? Converge-t-elle dans $\mathbb{R}[X]$? Qu'en conclure quant à $\mathbb{R}[X]$?

1.2 Autour de l'exponentielle

Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. En considérant des quotients de termes successifs de la suite $\frac{x^k}{k!}$, montrer la convergence absolue sur $\mathbb{C}$. La fonction limite s'appelle la fonction exponentielle e^x.
2. Montrer que le reste de la somme, $r_n(x) = \sum_{k\geq n} \frac{x^k}{k!}$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \forall n > |x|,\ |r_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n}} \tag{4}$$

3. Conclure quant à la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ pour $R \in \mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$.

.

1.3 Intégration

1. Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de f_n.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? Et sur $[1,2]$? En trouvant le maximum de $f_n(x)$ par rapport à n pour un $x > 0$ donné, montrer que $f_n(x) \leq \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.
3. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{d}x f_n(x)$ et comparer avec le calcul direct de $\int_0^1 \mathrm{d}x f_n(x)$.
4. On considère à présent la fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n, & 2^{-n} < x < 2^{-(n-1)} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{5}$$

   Montrer que f_n est dominée par une fonction simple indépendante de n. Peut-on appliquer le théorème de la convergence dominée à $\int_0^1 \mathrm{d}x f_n(x)$?

1.4 Convergences

1. Soit la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin jx}{2^j}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe.
2. La convergence est-elle uniforme ?
3. Évaluer $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
4. Soit la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ définies sur $[0,1]$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} 2n^3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n^2 - 2n^3\left(x - \frac{1}{2n}\right), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{6}$$

   Tracer le graphe de g_n.
5. Calculer $\int_0^1 \mathrm{d}x \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{d}x g_n(x)$.

1.5 Utilisation de l'intégrale de Lebesgue pour des passages à la limite

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^n}$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x x^{-1/n}(1+x/n)^{-n}$.
2. Calculer $\lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{1+x^\alpha \sin^2 x}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t t^{2n} \mathrm{e}^{-t^2}$ puis, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \cos tz \mathrm{e}^{-t^2}$. On admettra que $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
4. Justifier la formule $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{n^2+a^2}$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable de période $T > 0$ telle que $A = \int_0^T \mathrm{d}x |f(x)| < +\infty$. Montrer que pour presque tout $x \in [0,T]$, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(nx)}{n^2} = 0$. En déduire pour presque tout x que $\lim_{n\to\infty}(|\cos nx|)^{1/n} = 1$.

6. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ai}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \cos(tx + x^3/3)$ existe. Montrer que la fonction Ai est deux fois dérivable et qu'elle est solution de l'équation différentielle $\mathrm{Ai}''(t) - t\mathrm{Ai}(t) = 0$. Prouver que pour $t \to +\infty$, $\mathrm{Ai}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/4} \mathrm{e}^{-2t^{3/2}/3} \left[1 + O(t^{-3/4})\right]$.
7. On pose $F(x) = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{t^x - 1}{\ln t}$ lorsque cette intégrale est définie. Trouver le domaine de définition de F. Montrer que F y est dérivable et trouver $F(x)$.

1.6 Application linéaire

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction mesurable au sens de Lebesgue telle que, $\forall t > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-tx} |f(x)| < +\infty \tag{26}$$

On pose, $\forall t > 0$, $Lf(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-tx} f(x)$ et on désigne par $I(f)$ la limite dans $\mathbb{C}$ –si elle existe– de $Lf(t)$ lorsque t tend vers 0^+.

1. On suppose que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que $I(f)$ existe est égale à $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x f(x)$.
2. On suppose dans cette question que f est positive. Montrer que si $I(f)$ existe alors f est intégrable.
3. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I(f)$ lorsque $f(x) = x^n \mathrm{e}^{iax}$.
4. Vérifier que f est intégrable sur tout intervalle $]0, u[$ avec $0 < u < \infty$. On pose alors, $\forall u \geq 0$,
$$F(u) = \int_0^u \mathrm{d}x f(x) \tag{27}$$
5. Montrer que $\forall t > 0$, $tLF(t) = Lf(t)$.
6. Montrer que si $F(u)$ admet une limite ℓ quand $u \to +\infty$ alors $I(f)$ existe et $I(f) = \ell$.
7. On suppose que pour presque tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x + 1) = f(x)$. On pose $J_0 = \int_0^1 \mathrm{d}x f(x)$ et $J_1 = \int_0^1 \mathrm{d}x x f(x)$. Montrer que
$$Lf(t) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} \int_0^1 \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-tx} f(x) \tag{28}$$
8. En déduire que $I(f)$ existe si et seulement si $J_0 = 0$ et qu'alors $I(f) = -J_1$.

1.7 Une suite de fonctions

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^{2n}(1 - x)$. On considère la série de terme général f_n.

1. Montrer que cette série converge vers une fonction F intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur les boréliens.

2. En déduire que l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$.
3. On considère la série de terme général $(-1)^n f_n$. Montrer que la série converge vers une fonction intégrable G et déterminer $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1.8 Deux suites de fonctions

Soit $p_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n^{-1}}{x^2+n^{-2}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Discuter la convergence simple de $\int_{\mathbb{R}} p_n$. Répéter la discussion pour $p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n^{-2}}} e^{-\frac{x^2}{2n^{-2}}}$. Soit f une fonction infiniment dérivable à support compact. Que peut-on dire de $\int f(x)p_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$?

1.9 Mesure de Dirac

Une mesure de Dirac (ou masse de Dirac) est une mesure supportée par un singleton et de masse unitaire. Soient un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ ($\mathcal{A}$ tribu sur l'univers Ω), et soit $\omega \in \Omega$. On appelle mesure de Dirac δ_ω l'application

$$\begin{aligned} \delta_\omega \ : \ \mathcal{A} &\to \{0, 1\} \\ A &\mapsto \delta_\omega(A) = \chi_A(\omega) \end{aligned} \tag{30}$$

où χ_A est la fonction indicatrice sur A.

1. Cette application est-elle une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$?
2. Soit $(\omega_n)_{n\in I}$ une famille finie ou dénombrable d'éléments de Ω et soit $(p_n)_{n\in I}$ une famille de réels positifs ou nuls de somme unité, $\sum_{n\in I} p_n = 1$. Si la tribu $\mathcal{A}$ contient tous les singletons (par exemple $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) alors montrer que
$$P = \sum_{n\in I} p_n \delta_{\omega_n} \tag{31}$$
est une mesure de probabilité. Préciser $P(\{\omega\})$ pour $\omega \in \Omega$.
3. Dans un jeu de lancer de dé (non pipé), préciser Ω, $\mathcal{A}$, et les p_n.
4. Si A est une partie de Ω, exprimer $P(A)$ à l'aide des cardinaux de A et de Ω. Quelle est la probabilité d'obtenir le tirage d'un nombre pair ?

1.10 Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire. Montrer que $\langle |X|^p \rangle \geq a^p P(|X| \geq a)$ pour tout $a > 0$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ (lorsque le moment de $|X|^p$ existe). Pour $p = 2$ cette inégalité (génériquement dite de Markov) prend le nom de Bienaymé-Tchebychev.

1.11 Échantillonner des lois qui ne sont pas uniformes

Il est souvent nécessaire d'échantillonner numériquement des lois plus complexes que la loi uniforme sur $[0,1]$. Cette dernière est par exemple disponible en python à l'aide de la commande `random` (qui fournit un nombre aléatoire entre 0 et 1 avec une dizaine de décimales).

1. Si x est une variable de densité uniforme sur $[0,1]$, on s'intéresse à la variable aléatoire $y = f(x) > 0$. Comment choisir la fonction f afin que la loi de y soit une loi exponentielle $p(y) = \mathrm{e}^{-y}$? Et comment choisir f pour que y suive une loi de Cauchy $p(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$.
2. Soient x_1 et x_2 de densité uniforme sur $[0,1]$. Si $y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\cos 2\pi x_2$ et $y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\sin 2\pi x_2$, quelles sont les lois de y_1 et de y_2 ? Comment échantillonner le rapport de deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance unité ?

1.12 Fonctions génératrices

1. Déterminer les fonctions génératrices $G(z) = \sum_n P_n z^n$ des lois suivantes sur $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P_n^{(1)} &= \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \\
P_n^{(2)} &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
P_n^{(3)} &= p\delta_{n,0} + (1-p)\delta_{n,1} \\
P_n^{(4)} &= \frac{\binom{M}{n}\binom{N}{K-n}}{\binom{M+N}{K}}
\end{aligned} \tag{34}$$

qui correspondent respectivement aux lois de Bernoulli, de Poisson, bimodale et hypergéométrique. Proposer, pour chacune de ces lois, une situation dans laquelle cette loi ressort de façon naturelle. Dans le cas de $P^{(4)}$ on se contentera d'écrire formellement la définition de sa fonction génératrice et de vérifier que $G^{(4)}(1) = 1$.

2. Déterminer les fonctions génératrices $G(z) = \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-zx} p(x)$ des lois dont les densités sur $\mathbb{R}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\
p_2(x) &= \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-|x|/a} \\
p_3(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2} \\
p_4(x) &= \frac{1}{b-a}\theta(x-a)\theta(b-x)
\end{aligned} \tag{38}$$

en précisant la région de $z \in \mathbb{C}$ où la fonction génératrice existe.

1.13 Probabilité d'une somme

1. Si deux variables aléatoires indépendantes sont régies par des lois de Poisson de paramètres a et b, déterminer la loi de la somme.
2. Qu'en est-il pour des variables aléatoires régies par des lois normales centrées de variances différentes ?

1.14 Extrêmes

On s'intéresse à N variables aléatoires indépendantes $\{x_i\}$ tirées selon une loi de probabilité de densité ρ.

1. Montrer que la densité de probabilité $R_N(x_{max})$ du maximum x_{max} de N variables aléatoires $\{x_i\}$ peut s'écrire sous la forme

$$R_N(x_{max}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{max}} \left[1 - \int_{x_{max}}^{\infty} \mathrm{d}x \; \rho(x)\right]^N \tag{43}$$

2. Dans le cas où aux grands argument la loi se comporte comme $\rho(x) \overset{x\to+\infty}{\simeq} \frac{C}{x^{1+\mu}}$, chercher quand $N \to \infty$ une loi limite que l'on précisera pour une variable d'échelle du type $y = \frac{x_{max}}{N^\gamma}$. Pour $0 < \mu < 1$ comparer l'ordre de grandeur du terme maximum x_{max} à celui de la somme totale S.
3. Pour une loi à décroissance exponentielle $\rho(x) \overset{x\to+\infty}{\simeq} Ae^{-x^\alpha}$, montrer qu'il est possible, pour N grand, d'écrire une expression du type

$$R_N(x_{max}) \simeq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{max}} \exp\left[-\left(\frac{x_{max}}{f(N)}\right)^{1-\alpha} e^{(f(N))^\alpha - x_{max}^\alpha}\right]$$

valable au voisinage de $x_{max} \simeq f(N)$. Quel est l'ordre dominant en N de $f(N)$? Chercher une variable réduite de la forme $u = g(N)\left(\frac{x_{max}}{f(N)} - 1\right)$ qui admette en $N \to \infty$ une loi limite que l'on précisera.

1.15 Chaîne de Markov

Soit $P_0(n)$ une loi de probabilité sur $n \in I \subset \mathbb{N}$ (I fini). Et soit W une matrice à coefficients positifs $W_{ij} \geq 0$ telle que $\sum_j W_{ij} = 1$ pour tout $i \in I$. On impose de surcroît la propriété suivante dite d'irréductibilité à W : si pour tous $i, j \in I$ il existe une séquence $k_1, \ldots k_p$ de p entiers de I tels que $W_{ik_1} W_{k_1 k_2} \ldots W_{k_p j} \neq 0$, alors W est irréductible.

1. Montrer que si $t \in \mathbb{N}$, alors $P_t(n)$ définie par la récurrence

$$P_{t+1}(n) = \sum_j W_{jn} P_t(j), \; t \geq 0 \tag{44}$$

est aussi une loi de probabilité.

2. Montrer que 1 est valeur propre de W (on pourra avoir l'intuition d'un vecteur propre à droite particulièrement simple). Quel sens physique attribuer à un vecteur propre à gauche associé à la même valeur propre ?
3. Quel théorème d'algèbre linéaire permet d'affirmer que la valeur propre maximale de W est strictement positive, simple, et que le vecteur propre associé a toutes ses coordonnées de même signe ? On ne cherchera pas à le démontrer.
4. On se place désormais sur $I = \mathbb{Z}$ et on considère W_{ij} la matrice dont les éléments W_{ij} tels que $|i-j| = 1$ valent 1/2 et zéro sinon. Représenter la matrice W.
5. Montrer que la fonction génératrice de $P_t(n)$, appelée $G_t(z)$, vérifie

$$G_{t+1}(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})G_t(z) \tag{45}$$

et en déduire $G_t(z)$ en fonction de z si $P_0(n) = \delta_{n,0}$.
6. En déduire enfin $P_t(n)$ en fonction de n.

1.16 Gaussienne à deux dimensions

Une variable aléatoire de $\mathbb{R}^2$ a pour densité $p(x, y) = Z_0^{-1} e^{-\frac{1}{2}r^T \Gamma r}$ où Γ est une matrice symétrique à coefficients réels définie positive et où $r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $Z_0 = 2\pi/\sqrt{\det \Gamma}$.
2. On appelle $G(h) = \langle e^{h^T r} \rangle$, où h est un vecteur quelconque. Montrer que $G(h) = e^{\frac{1}{2}h^T \Gamma^{-1} h}$.
3. Que valent $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$?
4. On appelle $C_{ij} = \langle r_i r_j \rangle$, où $i, j = 1, 2$ se rapportent aux deux directions spatiales ($r_1 = x$, $r_2 = y$). Relier la matrice C d'éléments C_{ij} à la matrice Γ.
5. Déterminer $\langle x^4 \rangle$, $\langle y^4 \rangle$ et $\langle x^2 y^2 \rangle$ à l'aide des C_{ij}. Conjecturer une expression pour $\langle x^{2n} y^{2m} \rangle$.

1.17 Déterminant d'une matrice aléatoire

Soit $(M_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ n^2 variable aléatoires indépendantes d'espérance nulle et de variance unité. Déterminer l'espérance et la variance du déterminant de la matrice M en fonction de n.

1.18 Matrice aléatoire 2×2

Une matrice M symétrique $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}$ a ses éléments indépendants x_1, x_2 et x_3 distribués selon des lois normales centrées de variance unité (pour x_1 et x_2) ou de variance

$\frac{1}{2}$ (pour x_3). On appelle λ_- et λ_+ ses deux valeurs propres, avec $\lambda_- < \lambda_+$. Déterminer la loi de l'espacement $s = \lambda_+ - \lambda_-$ entre les deux valeurs propres. Tracer la densité $p(s)$ de la variable aléatoire s en fonction de s.

1.19 Changement de variables et matrices aléatoires

Les éléments M_{ij} d'une matrice aléatoire M symétrique de taille $N \times N$ sont des variables aléatoires réelles dont la loi a pour densité $p(\mathrm{Tr}M^2)$.

1. Combien d'éléments indépendants la matrice M possède-t-elle ?
2. On appelle λ_i, $i = 1, \ldots, N$ les N valeurs propres d'une matrice M donnée. Quel argument permet de s'assurer que M est diagonalisable ? Exprimer $\mathrm{Tr}M$ et $\mathrm{Tr}M^2$ à l'aide des valeurs propres.
3. Soit $F(M)$ une observable dépendant de la matrice aléatoire M. Exprimer $\langle F(M) \rangle$ comme une intégrale sur les éléments indépendants de M. Proposer quelques exemples de fonction $F(M)$ ne dépendant de M qu'au travers des valeurs propres de cette dernière.
4. On écrit la matrice M sous la forme
$$M = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} R^{-1} \tag{52}$$
Que peut-on dire de la matrice R. Elle est elle-même aléatoire ; combien d'éléments indépendants possède-t-elle ? Est-il possible de réaliser un changement de variables des éléments indépendants M_{ij} vers les valeurs propres et les éléments indépendants de R ?
5. Si l'on s'intéresse à une telle quantité F ne dépendant de M qu'au travers de ses valeurs propres, il peut-être intéressant de réaliser un changement de variables des $\frac{N(N+1)}{2}$ éléments M_{ij} indépendants vers les N valeurs propres λ_i auxquels on adjoint les $\frac{N(N-1)}{2}$ paramètres indépendants permettant de paramétrer R dans l'intégrale écrite à la question 3. On appelle $J(\{\lambda_i\}, R)$ le jacobien de cette transformation ; on va chercher à la déterminer. Montrer que si l'on varie une matrice symétrique M d'une quantité dM alors
$$\mathrm{d}M = R(\delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \mathrm{d}\Lambda)R^T, \; \delta\Omega = R^T \mathrm{d}R \tag{53}$$
où $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale constituée par les valeurs propres de M, R la matrice de passage associée.

6. On pose $\delta M' = \delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \mathrm{d}\Lambda$. Montrer que
$$\frac{\partial M'_{ij}}{\partial\lambda_k} = \delta_{ij}\delta_{ik}, \ \frac{\partial M'_{ij}}{\partial\Omega_{k\ell}} = \delta_{ik}\delta_{jl}(\lambda_j - \lambda_i) \tag{54}$$
7. Par quels arguments supplémentaires peut-on conclure que le jacobien de la transformation prend la forme $\prod_{i<j}|\lambda_i - \lambda_j|$ à une constante multiplicative près ne dépendant que de N (que l'on ne cherchera pas à déterminer) ?
8. En déduire que $\langle f(\mathrm{Tr}(M))\rangle = Z^{-1}\int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n f(x_1 + \ldots + x_N)\prod_{i<j}|x_i - x_j| p(x_1^2 + \ldots x_N^2)$ où l'on exprimera Z sous forme d'une intégrale N-uple.
9. Un jacobien est par définition un déterminant, dans notre cas celui d'une matrice de taille $\frac{N(N+1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}$. Reconnaître en la formule $\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)$ le déterminant d'une matrice $N \times N$.

1.20 Convergences

On se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (la densité de probabilité de chaque X par rapport à la mesure de Lebesgue est $p_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$).

1. Montrer la convergence en probabilité suivante :
$$\frac{1}{\ln n}\max_{1\leq k\leq n} X_k \to \frac{1}{\lambda} \tag{56}$$
2. Montrer que la suite de terme général $\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$ converge en loi vers une limite à déterminer.

1.21 Somme d'un grand nombre de variables aléatoires

On considère N variables aléatoires $\{x_i\}$, identiques et indépendantes, distribuées selon la densité de probabilité $\rho(x)$, et on s'intéresse aux propriétés statistiques de la somme $S = \sum_{i=1}^N x_i$ lorsque N est grand.

1. On considère des variables de moyenne $\langle x\rangle$ et de variance $\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ finies. Calculer la fonction génératrice $G_N(k)$ de la loi $P_N(y)$ de la variable aléatoire
$$y = \frac{S - N\langle x\rangle}{\sigma\sqrt{N}}$$
dans la limite $N \to \infty$. Discuter, selon le comportement asymptotique de la loi ρ, l'ordre en N du premier terme correctif à la loi limite $P_\infty(y)$.
2. On considère le produit $P = \prod_{i=1}^N x_i$ de variables aléatoires strictement positives. Caractériser la distribution asymptotique du produit P lorsque N est grand. Comparer la valeur moyenne et la valeur typique de P. Est-il possible que la valeur moyenne tende vers l'infini alors que la valeur typique tend vers 0 ?

3. On vous propose le jeu de dés suivant : si le dé tombe sur les valeurs 5 ou 6, votre mise est multipliée par 6, alors que si le dé tombe sur les valeurs 1,2,3 ou 4, votre mise est divisée par 3. Calculer les perspectives de gain après deux parties. Doit-on accepter de jouer un grand nombre de parties ?
4. On suppose que la distribution ρ présente les comportements asymptotiques

$$\rho(x) \simeq \frac{C_\pm}{x^{1+\mu}}, \quad x \to \pm\infty, \; 0 < \mu < 2 \tag{74}$$

   On commence par le cas où $0 < \mu < 1$ et $\langle x \rangle$ est infinie. Écrire la loi de distribution $P_N(s)$ de la somme réduite $s = \frac{S}{N^\alpha}$. Comment faut-il choisir l'exposant α pour qu'il existe une limite $P_\infty(s)$?
5. Dans le cas où $1 < \mu < 2$ et $\langle x \rangle$ est finie mais de variance infinie, procéder comme à la question précédente en utilisant une variable réduite de la forme $s = \frac{S - N\langle x \rangle}{N^\beta}$.
6. Montrer que les lois limites obtenues sont stables et qu'il y a additivité des paramètres C_+ et C_-, ce qui généralise le cas des lois de Cauchy $\rho(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$ ($\mu = 1$ et $C_\pm = \frac{a}{\pi}$).

2 Fonctions de plusieurs variables

2.1 Déterminant

1. Soit l'application qui à une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$ associe sa trace. Déterminer la différentielle de cette application.

2. Même question avec le déterminant (on travaillera avec des matrices carrées inversibles).

3. En déduire, pour une matrice carrée $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ symétrique définie positive et de taille $n \times n$ l'expression de $\frac{\partial \ln Z}{\partial \Gamma_{ij}}$, où $Z = (2\pi)^{n/2}(\det \Gamma)^{-1/2}$. Proposer une lecture probabiliste de ce calcul.

2.2 Polygone convexe inscrit dans le cercle unité de périmètre maximal

On considère un polygone convexe à n côtés inscrit dans le cercle unité du plan euclidien. On note P son périmètre, et e^{ia_j}, $j = 1, \dots, n$ les affixes de ses sommets, avec $0 \leq a_1 < a_2 \dots < a_n < 2\pi$.

1. On pose, pour $k = 1, \dots, n-1$, $t_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k)$ et $t_n = \frac{1}{2}(a_1 + 2\pi - a_n)$. Exprimer P en fonction des t_i, $i = 1, \dots, n$.

2. Montrer que P est maximal lorsque le polygone est régulier.

2.3 Une fonction importante en physique

Soit S la fonction de $]0, 1]^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $S(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$.

1. Quels sont les extrema de S ?

2. Quels sont les extrema de S sur l'hyperplan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^n x_i = 1$?

3. On se donne une famille de $n + 1$ réels $E, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Quels sont les extremas de S sur $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_E$? Ici $\mathcal{P}_E$ est l'hyperplan d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i = E$ (on prend E entre le minimum et le maximum des ε_i).

2.4 Inégalités

1. *Inégalité de réarrangement.*– Soient $x_1 \leq \dots \leq x_n$ et $y_1 \leq \dots \leq y_n$ des nombres réels. Pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, on a

$$x_1 y_n \dots + x_n y_1 \leq x_1 y_{\sigma(1)} \dots + x_n y_{\sigma(n)} \leq x_1 y_1 \dots + x_n y_n. \tag{77}$$

   Établir cette inégalité.

2. *Inégalité de Tchebychev.*– L'inégalité de Tchebychev permet de comparer une "moyenne des produits" avec le "produit des moyennes". Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Si $a_1 \leq \ldots \leq a_n$ et si $b_1 \leq \ldots \leq b_n$ alors

$$\frac{1}{n}\sum_i a_i b_i \geq \left[\frac{1}{n}\sum_i a_i\right]\left[\frac{1}{n}\sum_i b_i\right] \tag{78}$$

Si au contraire $a_1 \leq \ldots \leq a_n$ mais $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ alors

$$\frac{1}{n}\sum_i a_i b_i \leq \left[\frac{1}{n}\sum_i a_i\right]\left[\frac{1}{n}\sum_i b_i\right] \tag{79}$$

2.5 Moindres carrés

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère un nuage de points $\{(t_i, x_i)\}_{1\leq i\leq N}$, et on cherche à mettre en œuvre une régression parabolique, autrement dit, on recherche la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = at^2 + bt + c$, où a, b et c sont trois réels à déterminer, telle que la somme sur tous les indices i variant de 1 à N du carré de la distance du point (t_i, x_i) au point de même abscisse sur $\mathcal{P}$ soit minimale.

1. Écrire ce problème comme un problème de minimisation quadratique, c'est-à-dire un problème de la forme

$$\inf_{U\in\mathbb{R}^3} J(U),\ J(U) = U^T(AU) - v^T U \tag{82}$$

avec A une matrice $n \times n$ symétrique et v un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Identifier, n, A et v. On utilisera la notation $S_k = \sum_{i=1}^N t_i^k$.

2. Discuter l'existence des solutions d'un tel problème.
3. On suppose que la matrice A est définie positive. Démontrer que l'équation (82) possède une unique solution.

2.6 Quotient de Rayleigh

Soit A une matrice réelle $n \times n$ symétrique définie positive et soit f la fonction de $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\},\ f(x) = \frac{x^T.(Ax)}{x^T x} \tag{85}$$

où $x^T x = \|x\|^2$ définit la norme que l'on utilisera.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
2. Montrer l'existence de $\inf f(x)$ et $\sup f(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ privé de l'origine.
3. Déterminer l'ensemble des points critiques de la fonction f.

4. Résoudre les deux problèmes ci-dessus.
5. Démontrer que la hessienne de f en un point critique $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$ est donnée par
$$\text{Hess}(f)(x^*) = \frac{2}{\|x^*\|^2}\left(A - f(x^*) I_n\right) \tag{88}$$
où I_n désigne la matrice identité de taille $n \times n$.
6. En déduire que tous les points critiques qui ne sont pas solution d'un des problèmes ci-dessus sont des points-selles.

2.7 Extremum d'un polynôme sur un cercle

Soit la fonction définie par $f(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3}$. On appelle $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle de rayon 1.

1. Donner le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$
2. Montrer qu'il n'y a pas de point critique où $\nabla g = 0$ (dit de seconde espèce) sur $\mathcal{C}$, avec $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.
3. Trouver les six points critiques de première espèce sous la contrainte $\mathcal{C}$ et les placer graphiquement.
4. Montrer que f atteint son minimum global et son maximum global sur $\mathcal{C}$. Déterminer les points où ces extrema globaux sont atteints.
5. Déterminer la nature des autres points critiques.
6. Quelle relation existe aux points critiques entre le gradient de la fonction f et la tangente à la courbe qui définit l'ensemble $\mathcal{C}$? Montrer que cette relation est satisfaite.

2.8 Extremum d'une fonction sur un cercle

Soient les fonctions définies par $f(x,y) = \ln(xy)$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Cet ensemble est-il convexe ?
2. La fonction f admet-elle des extrema locaux sur son domaine de définition ?
3. Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce pour f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.
4. Déterminer les points critiques de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.
5. Déterminer la nature locale et globale des points critiques de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

2.9 Optimisation avec contraintes non linéaires d'inégalités

Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus abordable, se vend à 1 €pièce. Quant au modèle Y, beaucoup plus sophistiqué, il se vend à 3 €. Le coût de fabrication, exprimé en €, est donné par la fonction suivante

$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000 \tag{91}$$

où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y. Cette expression est valable dans la région où $C(x, y) \geq 0$. On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché. On appelle $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ le premier quadrant.

1. Déterminer le profit $P(x, y)$ réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu x jouets de modèle X et y jouets de modèle Y.
2. Étudier la convexité de la fonction P sur le premier quadrant.
3. La capacité de production de l'entreprise est au total de 20 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition optimale entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien. Calculer dans ce cas le profit réalisé. Indication : dans cette question et la suivante, on ne tiendra pas compte des contraintes (pourtant naturelles) $x \geq 0$ et $y \geq 0$. On expliquera pourquoi cela ne change en réalité rien.
4. Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en produisant autrement. Pouvez-vous aider le conseil d'administration ?

2.10 Minimisation d'une fonction linéaire sur un compact

Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$ (avec $b \neq 0$).

1. Montrer que $\min_{x\in A} b^T x = \min_{x\in A'} b^T x$ où A' est l'enveloppe convexe de A.
2. Soient p employés que l'on veut assigner à p tâches. À chaque paire (i = employé, j = tâche) est effecté un coût C_{ij}. Exprimer le coût total $f(\sigma)$ associé à une configuration de paires $(i, j = \sigma(i))$ caractérisée par la permutation σ.
3. Soit M_σ la matrice de la permutation σ. Montrer que $f(\sigma) = \mathrm{Tr}(CM_\sigma)$.
4. Soit B_p l'ensemble des matrices bistochastiques $p \times p$ ($M_{ij} \geq 0$, $\sum_i M_{ij} = \sum_j M_{ij} = 1$). Montrer que cet espace a $(p-1)^2$ dimensions (qu'il est inclus dans un sous-espace affine à $(p-1)^2$ dimensions de $\mathbb{R}^{p^2}$).
5. Montrer le théorème de Birkhoff-von Neumann selon lequel il existe $k \leq p!$ matrices de permutations $P_1, \ldots P_k$ et $\theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0$ avec $\sum_{j=1}^k \theta_j = 1$ tels que si M est une matrice bistochastique on puisse la décomposer ainsi :

$$M = \sum_{j=1}^{k} \theta_j P_j \tag{92}$$

6. On cherche $f_m = \min_\sigma f(\sigma)$. Que peut-on dire de la matrice M qui vérifie $f_m = \mathrm{Tr}(CM)$?

2.11 Inégalités de Hölder

Les inégalités de Hölder généralisent l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'aide de norme $\|\cdot\|_p$ (pour $x \in \mathbb{R}^n$, on appelle $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$). Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{93}$$

avec $p, q \in [1, +\infty]$ et $1/q + 1/p = 1$. Une façon de démontrer cette inégalité est de partir de la boule unité $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_p \leq 1\}$ et, pour $y \in \mathbb{R}^n$ donné, de chercher $\min_{x \in B_p} x^T y$.

1. Commençons par $p = \infty$. Trouver $x \in B_\infty$ tel que $x^T y$ soit minimal (donner x_i en fonction du signe de y_i, noté $\mathrm{sign}(y_i)$).
2. En déduire l'inégalité de Hölder pour $p = +\infty$ et $q = 1$ lorsque x est dans la boule unité B_∞, puis pour x quelconque.
3. On se concentre dans toute la suite sur le cas $p \in]1, +\infty[$. On suppose également $y \neq 0$ (car pour $y = 0$ l'inégalité est triviale). soit $\theta(x) = \frac{1}{p} \|x\|_p$. On pose $L(x, \lambda) = x^T y - \lambda\theta(x)$ pou r$\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\frac{\partial L}{\partial x_i}$.
4. Trouver x^* tel que $x^{*T} y = \min_{x \in B_p} x^T y$.
5. En déduire l'inégalité de Hölder donnée à l'équation (93).

3 Distributions

3.1 Exemples de distributions

Quelles sont, parmi les fonctionnelles suivantes, celles qui définissent une distribution sur l'ensemble des fonctions tests à support borné ?

$$
\begin{aligned}
T_1(\phi) &= \int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \\
T_2(\phi) &= \int_0^1 |\phi(x)|\,\mathrm{d}x \\
T_3(\phi) &= \sum_{n=0}^{N} \phi^{(n)}(0) \\
T_4(\phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(0) \\
T_5(\phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(n) \\
T_6(\phi) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \phi(n) \quad \text{(peigne de Dirac).}
\end{aligned}
\tag{96}
$$

3.2 Parties finies

Pour $A > 0$ l'intégrale $\int_0^A x^\lambda \mathrm{d}x$ n'a de sens que pour $\lambda > -1$. On convient de lui donner un sens pour λ réel quelconque par un procédé apparenté à la valeur principale de Cauchy. Pour cela, on pose

$$
\mathrm{Pf}\int_0^A x^\lambda \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{A^{\lambda+1}}{\lambda+1} & \text{pour } \lambda \neq -1 \\ \ln A & \text{pour } \lambda = -1 \end{cases}
\tag{97}
$$

Le symbole Pf se réfère à "partie finie". Il indique que l'on supprime, pour $\lambda \leq -1$, le terme infini $-0^{\lambda+1}/(\lambda+1)$ (où $-\ln 0$ si $\lambda = -1$) qui apparaîtrait dans un calcul normal de l'intégrale. Si maintenant g est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, A]$ on pourra définir $\mathrm{Pf}\int_0^A x^\alpha g(x)\mathrm{d}x$ en décomposant g, grâce à la formule de Taylor, en combinaison d'un nombre fini de monômes pour lesquels on utilisera la définition (97), et d'une fonction qui, pour $x \to 0$, tend vers 0 assez vite pour que son produit par x^α soit intégrable sur $[0, A]$. On pose donc, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell > -\alpha - 2$ entier,

$$
\mathrm{Pf}\int_0^A x^\alpha g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\frac{A^{\alpha+k+1}}{\alpha+k+1} + \int_0^A \mathrm{d}x x^\alpha \left[g(x) - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\frac{x^k}{\alpha+k+1} \right]
\tag{98}
$$

étant entendu que si $\alpha + k + 1 = 0$ on remplace $\frac{A^{\alpha+k+1}}{\alpha+k+1}$ par $\ln A$. On définira alors une distribution $\mathrm{Pf}H(x)x^\alpha$ par la formule

$$
\langle \mathrm{Pf}H(x)x^\alpha, \phi(x)\rangle = \mathrm{Pf}\int_0^A x^\alpha \phi(x)\mathrm{d}x
\tag{99}
$$

où $\phi \in \mathcal{D}$, et $A > 0$ est tel que le support de ϕ soit inclus dans $]-\infty, A]$.

1. Vérifier que l'équation (98) est bien indépendante du choix de $\ell > -\alpha - 2$.
2. Vérifier que l'équation (99) est bien indépendante du choix de A (pourvu que le support de ϕ soit bien inclus dans $]-\infty, A]$) et que cette formule définit bien $\mathrm{Pf}H(x)x^\alpha$ comme une distribution.
3. On veut étendre à $\mathrm{Pf}\int_0^A$ l'intégration par parties. Si g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, A]$, établir une relation entre $\mathrm{Pf}\int_0^A x^\alpha g'(x)\mathrm{d}x$ et $\mathrm{Pf}\int_0^A \alpha x^{\alpha-1} g(x)\mathrm{d}x$. On commencera par traiter le cas où g est un monôme x^k (en faisant attention au cas $\alpha + k = 0$), ensuite lorsque g et g' tendent vers 0 assez vite pour que $\mathrm{Pf}\int_0^A = \int_0^A$ soit une intégrale ordinaire, et enfin, dans le cas général en décomposant g par la formule de Taylor. En déduire la dérivée de la distribution $\mathrm{Pf}H(x)x^\alpha$ (attention aux cas $\alpha = 0, -1, \ldots$).
4. Déterminer la dérivée de $H(x)\ln x$ par une méthode analogue.
5. Soit α réel ($\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$). On définit la distribution H^α par la formule
$$H^\alpha = \mathrm{Pf}H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{113}$$
Déterminer la dérivée de H^α.
6. Quelle est la limite, au sens des distributions, de H^α lorsque $\alpha \to -n$ (avec n entier) ? On appelle H^{-n} la limite ainsi trouvée.
7. Déterminer $H^\alpha * H^\beta$ pour α, β réels quelconques.
8. Soit B une distribution de $\mathcal{D}'_+$. Existe-t-il une distribution X de $\mathcal{D}'_+$ telle que $H^\alpha * X = B$?
9. Étant donné une fonction h localement intégrable sur $[0, +\infty[$, existe-t-il une fonction localement intégrabble f sur $[0, +\infty[$ vérifiant l'équation intégrale
$$\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = h(x) \tag{117}$$
Discuter le cas particulier $h(x) = x^\beta$, $\beta > 0$.

3.3 Deux distributions

1. Montrer que pour toute fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et tout intervalle $[a, b]$,
$$\int_a^b \sin\lambda x\psi(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \cos\lambda x\psi(x)\mathrm{d}x \tag{123}$$
convergent vers 0 lorsque $\lambda \to +\infty$.
2. Montrer que la distribution $\frac{\sin\lambda x}{x}$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers $\pi\delta$ quand $\lambda \to +\infty$.
3. Montrer que la distribution $\mathrm{vp}\frac{\cos\lambda x}{x}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'$.

3.4 Équations

1. Résoudre dans $\mathcal{D}'$ les équations $xT = 0$, $x^2T = 0$, $x^nT = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
2. Si $S \in \mathcal{D}'$ est une distribution connue, résoudre $xT = S$. On ussposera que l'on connait une distribution T_0 telle que $xT_0 = S$.

3.5 Dérivées de distributions

On rappelle qu'on définit la distribution T', dérivée au sens des distributions de la distribution T, par la relation $T'(\phi) = -T(\phi')$ pour toute fonction test ϕ. On utilisera aussi la notation $\langle T, \phi\rangle = T(\phi)$, et on rappelle qu'à toute fonction localement sommable f on associe la distribution régulière $\langle f, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction de Heaviside $H(x)$.
2. Calculer les dérivées successives de la fonction $f : x \to |x|$.
3. Avec un léger abus de notation on écrit $\delta(x - x_0)$ la distribution T telle que $\langle T, \phi\rangle = \phi(x_0)$, ainsi que $\delta'(x - x_0)$, $\delta''(x - x_0)$ ses dérivées successives. Simplifier les expressions suivantes :

$$a(x)\,\delta(x-1)\ , \qquad a(x)\,\delta'(x-1)\ , \qquad x^2\,\delta''(x-1)\ , \qquad \text{où } a(x) \in \mathcal{C}^1\ . \tag{127}$$

4. Calculer $g(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \exp(-2|x|)$.
5. Tracer $f(x) = \cos(x)[H(x) - H(x - \pi)]$ et calculer $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

3.6 Flux d'énergie

Une particule de position $r(t)$ évolue sur une ligne ($r(t) \in \mathbb{R}$) selon des équations horaires où $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -V'(r(t))$ et $v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ (ici $x \mapsto V(x)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$, et $m > 0$ est une constante). On appelle $\rho(x, t) = \delta(x - r(t))$ (ou, plus rigoureusement $\rho(t)$ est la distribution $\delta_{r(t)}$ telle que si $\phi \in \mathcal{D}$, $\langle \rho(t), \phi\rangle = \phi(r(t))$). On appellera également $j(x, t) = v(t)\rho(x, t)$ et $\varepsilon(x, t) = \left(\frac{mv^2}{2} + V(r(t))\right)\rho(x, t)$.

1. Montrer que $\partial_t\rho = -\partial_x j$ au sens des distributions.
2. Montrer que $\partial_t\varepsilon = -\partial_x q$ où l'on précisera la distribution $q(x, t)$.

3.7 Changement de variables

On va définir des changements de variables dans les distributions. Considérer d'abord le cas d'une distribution s'identifiant à une fonction régulière F, et d'un changement de variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bijectif.

1. Montrer que l'on est amené à définir la distribution $F \circ f$ comme :
$$\langle F \circ f, \phi \rangle = \langle \frac{F}{|f' \circ f^{-1}|}, \phi \circ f^{-1} \rangle\,. \tag{128}$$
2. Que vaut alors la distribution $\delta \circ f$ si l'on étend cette définition aux distributions singulières ?
3. Motiver la généralisation au cas d'une fonction f non nécessairement bijective — mais toujours dérivable, dont les zéros sont de dérivée non nulle :
$$\langle \delta \circ f, \phi \rangle = \text{«} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(f(x)\big)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x \text{»} = \sum_{x\,|\,f(x)=0} \frac{1}{|f'(x)|}\, \phi(x). \tag{129}$$
4. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; \delta(x^2 - a^2)\; \phi(x)$ où ϕ est dans $\mathcal{D}$, avec $a > 0$.
5. Calculer l'intégrale $C = \int_{-7}^{4} \mathrm{d}x\, x^2\, \delta(\sin(x))$.
6. Calculer l'intégrale
$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_2 \exp[-a^2(p_1^2 + p_2^2)]\, \delta(p_1^2 + p_2^2 - A^2)$$
pour $a, A \in \mathbb{R}$.
7. Calculer l'intégrale $I = \int_0^4 dx\; \cos(\pi x)\, \delta(x^2 + x - 2)$.

3.8 Valeur principale de Cauchy

Pour une fonction test ϕ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\phi(x)}{x}$ n'existe pas en général, à cause de la singularité non-intégrable en 0. On peut toutefois montrer que l'application
$$\phi \in \mathcal{D} \longmapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x \tag{130}$$
définit une distribution, appelée **valeur principale de Cauchy** ou **partie principale**, et notée
$$\langle \text{v.p.} \frac{1}{x}, \phi \rangle \overset{\text{déf}}{=} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x\,. \tag{131}$$

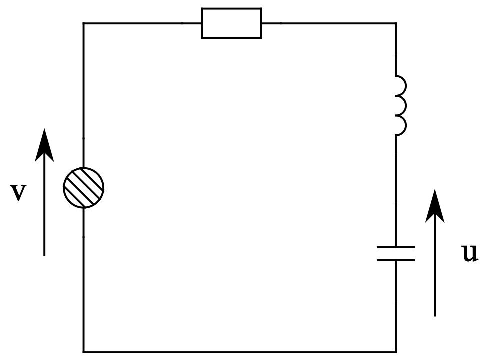
1. Considérer que $\phi(x)$ se comporte comme x^p au voisinage de $x = 0$; quelle valeur de p rend $\phi(x)/x$ non intégrable ? Pourquoi ce cas est-il régularisé par la définition de la valeur principale de Cauchy ?
2. Soit $\phi(x)$ une fonction continue sur $[-R, R]$ et telle que $\phi(x) = \phi(-x)$ et $\phi(0) = 1$. Prouver que
$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{R} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x \right] = 0\,. \tag{132}$$
Ensuite, prouver que pour $\epsilon \to 0$
$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\epsilon^2}^{R} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x \propto \log \epsilon\,. \tag{133}$$
Ce résultat montre l'importance de la symétrie de l'intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$ exclu dans la valeur principale de Cauchy.

3. Montrer que la valeur principale est la dérivée de $\ln|x|$, et que $x\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right) = 1$.
4. Calculer les parties réelle et imaginaire de $\frac{1}{x-i\eta}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$, tracer leurs allures en fonction de x pour plusieurs valeurs de η, et discuter leur limite, au sens des fonctions, quand $\eta \to 0^+$. Justifier finalement la limite au sens des distributions :

$$\lim_{\eta\to 0^+} \frac{1}{x-i\eta} = \text{v.p.}\frac{1}{x} + i\pi\delta\ . \tag{134}$$

3.9 Circuit RLC

On considère le circuit RLC présenté sur la figure ci-dessous.



1. Etablir l'équation d'évolution que satisfait la tension u aux bornes du condensateur. On pourra noter $\tau = RC$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
2. Etablir la fonction de transfert $\chi(\omega) = \tilde{u}(\omega)/\tilde{v}(\omega)$ du filtre ainsi constitué, où $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont les amplitudes complexes de u et v à la pulsation ω. On s'intéressera à la position des pôles de χ que l'on notera $\omega_\pm$.
3. Calculer la fonction de Green $\chi(t)$ du circuit, aussi appelée fonction de réponse impulsionnelle.
4. En utilisant la fonction de Green, calculer la réponse du circuit aux conditions initiales suivantes :
   a. Le circuit n'est initialement pas alimenté et le courant y est nul. À $t = 0$ on branche un générateur $v = Ve^{j\omega t}$ (comme toujours, à la fin des calculs, on prendra la partie réelle de u.)
   b. Le circuit est alimenté pour $t \leq 0$ par un générateur $v = V = \text{const}$; à l'instant $t = 0$, on remplace le générateur par un court-circuit.

3.10 Équation de la diffusion

On considère des particules diffusant dans un espace à une dimension (l'axe réel x). On appelle $\rho(x,t)$ la densité de particules autour du point x au temps t, de sorte que

$$N_V(t) = \int_V \mathrm{d}x\, \rho(x,t)$$

soit le nombre de particules dans un ensemble V de l'axe réel au temps t. Dans la suite on note $\partial_x = \partial/\partial x$, etc.

1. L'équation de continuité s'écrit
$$\partial_t \rho(x,t) = -\partial_x J(x,t) \ .$$
Montrer que cette équation implique pour $V = [a,b]$:
$$\frac{dN_{[a,b]}(t)}{dt} = J(a,t) - J(b,t) \ .$$
A partir de cette expression, interpréter $J(x,t)$ comme étant le courant au point x et à l'instant t. Montrer que $J(x,t) = \rho(x,t)v(x,t)$ où $v(x,t)$ est la vitesse moyenne au point x et à l'instant t.

2. Pour un profil de densité homogène (indépendant de x) le courant de particules est nul. Le courant J doit donc dépendre des inhomogénéités (les gradients) du profil de densité ρ. Le choix le plus simple est :
$$J(x,t) = -D\partial_x \rho(x,t) \ .$$
Montrer qu'il est raisonnable de supposer $D > 0$. En déduire l'équation pour ρ : $\partial_t \rho = D\partial_x^2 \rho$, qui est l'équation de la diffusion.

3. On suppose qu'à l'instant t_0, une particule est injectée dans le point x_0, de telle sorte que
$$N_{[x_0-a/2,x_0+a/2]}(t_0^+) = N_{[x_0-a/2,x_0+a/2]}(t_0^-) + 1 \ ,$$
pour tout $a > 0$. Montrer que le profil de densité satisfait l'équation
$$\partial_t \rho(x,t) = D\partial_x^2 \rho(x,t) + \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) \ . \tag{135}$$

4. On considère la transformée de Fourier $\rho(k,t) = \int \mathrm{d}x\, \rho(x,t)e^{ikx}$. Montrer qu'à partir de l'équation (135) on obtient
$$\partial_t \rho(k,t) = -Dk^2 \rho(k,t) + e^{ikx_0}\delta(t-t_0) \ . \tag{136}$$
Montrer que la solution telle que $\rho(k, t<t_0) = 0$ est $\rho(k,t) = H(t-t_0)e^{ikx_0 - Dk^2(t-t_0)}$.

5. En déduire que la solution de l'équation (135) telle que $\rho(x, t<0) = 0$ est
$$\rho(x,t) = G(x,t|x_0,t_0) \ , \qquad G(x,t|x_0,t_0) = H(t-t_0)\frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \ . \tag{137}$$
G est donc la fonction de Green de l'équation de diffusion.

6. En déduire que la solution de l'équation de diffusion avec condition initiale $\rho(x,t_0) = \rho_0(x)$ à $t = t_0$ est, pour tout $t > t_0$:
$$\rho(x,t) = \int \mathrm{d}x_0\, G(x,t|x_0,t_0)\, \rho_0(x_0) \ . \tag{138}$$

3.11 Distributions x^λ

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On définit, pour x réel non nul, x^λ par

$$x^\lambda = \begin{cases} e^{\lambda \ln x} & \text{si } x > 0 \\ e^{i\lambda\pi} e^{\lambda \ln(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{139}$$

1. Pour quelles valeurs de λ la fonction $x \mapsto x^\lambda$ est-elle localement sommable ? On notera T_λ la distribution définie par x^λ dans ce cas.
2. Déterminer T'_λ lorsque $\text{Re}(\lambda) > 0$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-1, -2, \ldots\}$. Montrer qu'il existe une famille de distributions T_λ prolongeant la famille définie à la question 2, et déterminée par les conditions $T'_\lambda = \lambda T_{\lambda-1}$. Donner, pour le calcul de $\langle T_\lambda, \phi\rangle$, une formule où n'interviennent pas les valeurs des dérivées de ϕ en d'autres points que l'origine.
4. Démontrer que, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$, la suite $\langle T_{\frac{1}{n}-1}, \phi\rangle$ a une limite lorsque $n \to \infty$. On notera cette limite $\langle T_{-1}, \phi\rangle$, ce qui définit T_{-1}. Définir T_{-p} de façon analogue.
5. Montrer que la distribution T_λ est une fonction holomorphe de λ. On anticipe ici le chapitre 4 sur les fonctions de la variable complexe qui suivra ; il suffit de savoir qu'une fonction $z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ si elle est définie et dérivable en tout point de cet ouvert.

3.12 Deux équations pour des distributions

Cet exercice reprend certains aspects de l'exercice 3.4.

1. Déterminer la distribution $x\text{vp}\frac{1}{x}$.
2. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xT = 1$.
3. Déterminer la distribution $x\delta'$. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $x^2 T = 0$.

3.13 Variables conjuguées en mécanique quantique

Soit deux opérateurs hermitiens $\hat{x}$ et $\hat{p}$ à valeurs distributions tels que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. On appelle $|x\rangle$ les états propres de $\hat{x}$ avec la valeur propre $x \in \mathbb{R}$. Les $|x\rangle$ forment une base orthonormée, avec $\langle x'|x\rangle = \delta(x - x')$.

1. Montrer que les éléments de matrice (à valeur distribution) de $\hat{p}$ dans la base $|x\rangle$, notés $\langle x'|\hat{p}|x\rangle$, vérifient
$$(x' - x)\langle x'|\hat{p}|x\rangle = i\hbar\delta(x' - x) \tag{158}$$
2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $xT = a\delta$, $T \in \mathcal{D}'$.
3. Justifier l'expression de $\hat{p}$ en représentation position vue en mécanique quantique.

3.14 Diffusion

On considère dans $\mathbb{R}^2$ la fonction $E(x,t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, où H désigne la fonction de Heaviside ($H(t>0)=1$, $H(t<0)=0$).

1. Montrer que E est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et définit ainsi une distribution.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $E^\varepsilon(x,t) = \frac{H(t-\varepsilon)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Montrer que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,
$$\langle(\partial_t E^\varepsilon - \partial_x^2 E^\varepsilon, \phi\rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} \phi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x \tag{162}$$
3. Déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\partial_t E^\varepsilon - \partial_x^2 E^\varepsilon, \phi\rangle$. En déduire que $\partial_t E - \partial_x^2 E = \delta$.
4. Déterminer $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\partial_t S - \partial_x^2 S + \partial_x S = \delta$.

3.15 La distribution de Dirac n'est pas régulière

On dit qu'une distribution est régulière si on peut l'écrire sous la forme T_f avec f localement intégrable.

1. Montrer que la distribution de Dirac n'est pas une distribution régulière.
2. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynômes qui converge vers δ dans $\mathcal{D}'$. Cette question nécessite le théorème de Weierstrass (si $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ il existe $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que Q_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$).

3.16 Simplifier des distributions

Calculer

1. $T + xT'$ pour $T = \mathrm{vp}\frac{1}{x}$.
2. $T'' + \omega^2 T$ pour $T = \frac{H(x)\sin\omega x}{\omega}$.
3. $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\tau_{-h}T - T)$ pour $T \in \mathcal{D}'$ (ici τ_{-h} est l'opérateur de translation d'une quantité $-h$).

3.17 Autour de l'oscillateur harmonique forcé

On se donne une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement intégrable et telle que $G(x) = 0$ si $|x| > 1$. Il existe également $\xi \in]-1,1[$ tel que G soit $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,\xi[$ et $]\xi,1[$. Enfin, les dérivées de G en ξ et ± 1 présentent des discontinuités de première espèce.

1. Calculer $G'' + \omega^2 G$ en fonction des dérivées usuelles de G.
2. Est-il possible de déterminer G et des constantes α, β de sorte que $G'' + \omega^2 G = \delta_\xi + \alpha\delta_{-1} + \beta\delta_1$? Si oui, calculer G, α et β.

3. Soit $\phi \in \mathcal{D}$ une fonction vérifiant $\phi'' + \omega^2\phi = \psi$, $\phi(-1) = L$, $\phi(1) = M$, avec ψ, L et M donnés et connus. Montrer qu'il est possible de déterminer $\phi(\xi)$ pour tout $\xi \in]-1, 1[$, sauf pour des valeurs exceptionnelles de ω que l'on précisera.

3.18 Deux convolutions

1. Pour $a > 0$ on pose $G_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Déterminer $G_\sigma * G_\tau$.
2. On pose $H_\lambda^\alpha(x) = H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x}$ pour $\alpha > 0$ et λ complexe. Simplifier $H_\lambda^\alpha * H_\lambda^\beta$.

3.19 Équation aux valeurs propres

Soit S une distribution à support compact, montrer que la formule $L_S(f) = S * f$ définit un opérateur linéaire continu. Montrer que $f_\alpha(x) = e^{2\pi i\alpha x}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est une fonction propre de l'opérateur L_S. Quelle est la valeur propre associée ?

3.20 Un système et de la convolution

Résoudre dans $\mathcal{D}'_+$ le système

$$\begin{cases} \delta'' * X_1 + \delta' * X_2 = \delta \\ \delta' * X_1 + \delta'' * X_2 = 0 \end{cases} \tag{180}$$

4 Fonctions analytiques

4.1 L'exponentielle

On définit la fonction exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $\exp(z) = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

1. Établir l'égalité $e^a e^b = e^{a+b}$.
2. Montrer que $\exp'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(z+h)-\exp(z)}{h}$ existe pour tout z et que $\exp'(z) = \exp(z)$. La limite est prise pour $h \to 0$ avec $h \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.
4. Montrer que la restriction de exp à $\mathbb{R}$ est strictement croissante.
5. Montrer que l'image de la droite $i\mathbb{R}$ ($x = 0$) par l'exponentielle est incluse dans le cercle unité S^1.
6. Montrer qu'il existe un nombre positif minimal π tel que $e^{i\pi/2} = i$.
7. Déterminer $\exp^{-1}(1)$.
8. Soit $w \in \mathbb{C}$, supposons qu'il existe z tel que $\exp(z) = w$. Déterminer $\exp^{-1}(w)$.
9. Montrer que $\exp : i\mathbb{R} \to S^1$ est surjective.
10. Ainsi que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
11. Donner un exemple de $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $\exp : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ soit bijective.
12. Soit D un disque ouvert dans $\mathbb{C}$. Peut-on définir continument $\ln w$ sur D ? Et ce de combien de manières ? Que peut-on dire sur $\sqrt{w}$? Soit $g : z \mapsto z^2$. Déterminer $g^{-1}(]0,1[)$ et $g^{-1}(]-1,0[)$.

4.2 Fonction génératrice d'une loi normale

Soit $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ la densité de probabilité d'une loi normale de variance $\sigma^2 > 0$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) = 1$.

1. Soit la fonction définie pour $h \in \mathbb{C}$ par $G(h) = \langle e^{hx} \rangle$. Quel est son domaine de définition ? Sans calculer cette fonction, expliquer pourquoi $G(h)$ est analytique dans $\mathbb{C}$.
2. Déterminer $G(h)$ lorsque $h \in \mathbb{R}$.
3. En déduire $G(h)$ $\forall h \in \mathbb{C}$.

4.3 Prolongement d'une fonction dans un disque

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\lambda| < 1$. Montrer qu'il existe une unique fonction analytique sur le disque $D(0,1)$ de centre 0 et de rayon unité vérifiant

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall z \in D(0,1),\ (1-z)f'(z) = f(z) + f(\lambda z) \qquad (184)$$

On se propose dans la suite de montrer que la fonction $z \mapsto (z-1)f(z)$ admet un prolongement analytique g dans un disque $D(0,R)$ avec $R>1$ et $g(1)\neq 0$.

2. De manière plus générale, soit $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$. On suppose qu'il existe $z_0\in\mathbb{C}^*$ et $\alpha\in]0,1[$ tels que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{1}{z_0}\right|\leq \alpha^n \tag{187}$$
Quel est le rayon de convergence ρ de la série f ?
3. Soit $g : z\mapsto (z-z_0)f(z)$. Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor $\tilde{g}$ de g en 0 est strictement supérieur à ρ.
4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n z_0^n$ en fonction de $\tilde{g}(z_0)$.
5. Montrer que $\tilde{g}(z_0)\neq 0$.

4.4 Convergence et analyticité

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{(1-z^n)^2}$ converge normalement sur tout disque $\overline{D(0,r)}$ où $r<1$. On note $f(z)$ la somme de cette série.
2. À l'aide des familles sommables, montrer que, $\forall z\in D(0,1)$,
$$f(z)=\sum_{p\geq 1}\frac{pz^p}{1-z^p} \tag{197}$$
3. Déterminer le développement en série entière de f au voisinage de 0. En déduire que f est analytique sur $D(0,1)$.

4.5 Sur le bord du disque

Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,r)$ (disque ouvert) et continue dans le disque fermé $\overline{D(0,r)}$. Montrer que pour tout $|z|<r$ on a
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \tag{201}$$

4.6 Théorème de Liouville (en fait de Cauchy)

Soit $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dont le rayon de convergence est égal à R.

1. Montrer que pour tout $r\in [0,R[$ on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\mathrm{d}t=\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 r^{2n} \tag{205}$$

2. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et bornée. Montrer que f est une fonction constante.

3. Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe deux constantes A et B strictement positives telles que $|f(z)| \leq A + B|z|^N$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus N.

4. Soit $P(z)$ un polynôme non constant sur $\mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$. En déduire que tout polynôme non constant sur $\mathbb{C}$ a au moins une racine.

4.7 Une famille sommable

On considère, pour $z \in \mathbb{C}$, la famille $\left(\frac{z^k}{n^{k+2}}\right)_{k\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Trouver le plus grand rayon R tel que la famille soit sommable sur $|z| < R$. Montrer que sa somme $f(z)$ est holomorphe sur ce disque ouvert.

2. Montrer que la sommation à n constant transforme la famille en une série $\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ où les u_n sont des fractions rationnelles. Montrer que la somme F de ces fractions rationnelles est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Préciser les pôles de cette fonction F, leur ordre de multiplicité et les résidus correspondants.

3. La famille $\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)_{k\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ? Quelle est sa somme ?

4.8 Produit infini

1. Montrer que le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n}$ converge vers une fonction entière f. Pour ce faire, on montrera auparavant qu'il existe une constante $M(R)$ telle que $\left|(1+w)\mathrm{e}^{-w}-1\right| \leq M(R)|w|^2$ pour $|w| \leq R$.

2. Calculer $\frac{f'(z+1)}{f(z+1)} - \frac{f'(z)}{f(z)}$. En déduire la relation fonctionnelle $f(z+1) = f(1)\frac{f(z)}{z+1}$, $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(z+1)\ldots(z+k)f(z+k)$ à l'aide de $f(z)$ et de $f(1)$. En déduire le résidu en $-k$ de la fonction méromorphe $\frac{1}{f}$.

4. Montrer que la restriction de f à $[0,+\infty[$ est strictement décroissante. Trouver $\lim_{n\to+\infty} f(n)$, avec $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4.9 Rayons de convergence

1. Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} 8^n z^{3n} \tag{219}$$

$$\sum_{n\geq 1} 5^n z^{n^2} \tag{220}$$

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \mathrm{e}^{-n^2} z^{7n} \tag{221}$$

$$\sum_{n\geq 1} (9^{3n} + 4^{5n}) z^{2n} \tag{222}$$

2. Prouver que si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont respectivement R_1 et R_2 comme rayons de convergence, alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R_3 \geq \inf\{R_1, R_2\}$. Donner un exemple avec l'inégalité stricte.

4.10 Fonction analytique paire

Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ vérifiant

$$x \in]-1,1[\implies f(x) \in \mathbb{R} \text{ et } f(ix) \in \mathbb{R} \tag{223}$$

Montrer que f est paire.

4.11 Une fonction sur le demi-plan supérieur

soit $H = \{z \in \mathbb{C} | y > 0\}$ et $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} | y \geq 0\}$. Soit f une fonction continue sur $\overline{H}$ et holomorphe sur H. On impose $|f| \leq 1000$ sur $\overline{H}$ et $|f| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $|f| \leq 1$ sur $\overline{H}$.

4.12 Dérivabilités au sens de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$

1. Pour une fonction $F(x,y) = f(z = x + iy)$, y a-t-il équivalence entre la différentiabilité de F et la dérivabilité de f au sens complexe ?
2. On introduit les opérateurs différentiels

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

   agissant sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de deux variables réelles à valeurs complexes. Calculer ∂z, $\partial \bar{z}$, $\bar{\partial} z$ ainsi que $\bar{\partial}\bar{z}$.
3. Si f est holomorphe, montrer que

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,,$$

où $z = x + iy$. Récrire les conditions d'analyticité de Cauchy-Riemann et calculer ∂F, $\bar\partial F$, $\partial \bar F$ et $\bar\partial \bar F$.

4. Calculer $\partial\bar\partial$ (en supposant que l'opérateur agit sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$). Montrer que si f est holomorphe, alors

$$4\left|f'(z)\right|^2 = \Delta(|F|^2)\,.$$

4.13 Application des formules de Cauchy-Riemann

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine du plan complexe. On notera $z = x + iy$ et $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ avec u, v les parties réelles et imaginaires de f.

1. On considère un point $z_0 = x_0 + iy_0$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Montrer que les lignes $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ et $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ s'intersectent à angle droit en (x_0, y_0).
   On suppose maintenant que $f'(z_0) = 0$ et $f''(z_0) \neq 0$. Quelle est l'allure de la surface $u(x, y)$ au voisinage de (x_0, y_0) ?
2. Déterminer $f(z)$ sachant que $f(0) = 0$ et :
   a) $v(x, y) = 3x^2y - y^3$;
   b) $v(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$.
3. Quelles sont les conditions sur les nombres réels a, b, c, d pour que la fonction $p(z = x + iy) = f((ax + by) + i(cx + dy))$ soit holomorphe, f étant holomorphe ?

4.14 Singularités

Déterminer en quels points les fonctions suivantes ne sont pas holomorphes sur le plan complexe, et discuter la nature de leurs singularités :

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} \tag{224}$$

$$g(z) = \frac{3z^2-2}{z^2+2z+5} \tag{225}$$

$$h(z) = \frac{z^2-\pi^2}{\sin z} \tag{226}$$

$$l(z) = \exp 1/z \tag{227}$$

4.15 Exemple d'une frontière essentielle

Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$. Montrer que la série converge dans le disque $|z| < 1$ et qu'elle a une singularité en $z = 1$. Montrer que f satisfait les relations fonctionnelles $f(z) = z^2 + f(z^2)$, et plus généralement $f(z) = z^2 + z^4 + z^8 + \cdots + z^{2^p} + f(z^{2^p})$ pour tout p entier. En déduire que f a aussi des singularités en toute racine 2^p-ième de l'unité.

4.16 Prolongements et singularités

1. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe. Trouver la partie imaginaire $v(x,y)$ sachant que :
   a) $u(x,y) = x^3 + 3x(1-y^2)$;
   b) $u(x,y) = \cos y \cosh x$;
   c) $u(x,y) = e^{-x}[(1+x)\cos y + y \sin y]$.

2. Trouver les singularités dans le plan complexe des fonctions suivantes et discuter leur nature.
   a) $f(z) = \frac{z}{i+z}$
   b) $g(z) = \frac{3z^2+4}{z^2-16}$
   c) $h(z) = \cot z$
   d) $l(z) = \frac{\sin z - z}{z \sin z}$
3. Montrer que $f(z) = \bar{z} \tanh((\ln z)^2)$ n'est pas holomorphe.

4.17 Singularités, points de branchement, coupures

1. Déterminer les points de branchement et un choix possible de coupure des fonctions

a)	$f(z) = (z+a)^{1/2}$ où $a \in \mathbb{C}$
b)	$f(z) = (z^2+1)^{1/2}$
c)	$f(z) = z^{1/3}$
d)	$f(z) = (z^4-81)^{1/2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\sin z = i\,. \tag{228}$$
3. Déterminer, en tant que fonction multivaluée, la réciproque de la fonction
$$f(z) = \cos z \tag{229}$$
et étudier ses singularités.

4. La fonction multivaluée $f(z) = \log z$ est définie comme réciproque de l'exponentielle.
   a) Montrer que toute détermination du logarithme a pour dérivée $\frac{1}{z}$.
   b) On considère maintenant la *détermination principale* du logarithme : $\forall\, z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^+$
   $$\mathrm{Log(z) = log(|z|) + i\,arg(z)} \tag{230}$$
   où $z = |z|e^{i\theta}$ et $\arg(z) = \theta$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, montrer que Log est holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$.

4.18 Quelques intégrales sur $\mathbb{C}$

1. En notant γ l'arc de cercle joignant 3 à $i\sqrt{3}$ et d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 4$, orienté dans le sens trigonométrique, calculer
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2}.$$

2. Considérons, dans $\mathbb{C}$, les segments $\gamma_1 = [-i, 5i]$ $\gamma_2 = [-i, 2+5i]$, $\gamma_3 = [2+5i, 5i]$ (où le sens de parcours va du premier point du segment vers le second). Définissons maintenant la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $f(x+iy) = x^2 - 2iy$. Calculer
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \text{ et } \int_{\gamma_2\cup\gamma_3} f(z)\,dz.$$
Discuter le résultat.

3. Calculer les intégrales suivantes :
a) $I_a = \int_\gamma (z+1)^2 dz$; γ est le triangle de sommets $[-1, 1, i]$ orienté dans le sens anti-horaire (trigonométrique).
b) $I_b = \int_\gamma z\overline{z}\,dz$; γ est le cercle de centre $z = 0$ et rayon $R = 5$, orienté dans le sens horaire.
c) $I_c = \int_\gamma e^{\overline{z}}\,dz$; γ est le carré de sommets $[0, 1, 1+i, i]$ orienté dans le sens anti-horaire.
d) $I_d = \int_\gamma (1+2\overline{z})^2 dz$; γ est le cercle de centre $z = 0$ et rayon $R = 1$, orienté dans le sens anti-horaire.

4.19 Intégrales, équations, singularités

1. Calculer les intégrales suivantes (les courbes sont orientées dans le sens anti-horaire sauf pour (a)) :
a) $\int_\gamma \frac{1}{|z|^2}\,dz$; γ est défini par $z(t) = \cosh t + i \sinh t$, $t \in (-\infty, \infty)$. Dessiner γ.
b) $\int_\gamma z\overline{z}\,dz$; γ est le triangle de sommets $[0, 1, i]$.
c) $\int_\gamma (z-1)^2\,dz$; γ est l'union du demi-cercle $|z-1| = 1/2$, $\mathrm{Im} z > 0$ et du segment d'axe réel qui joint ses extrémités.
d) $\int_\gamma (z+\overline{z})\,dz$; γ est le carré de sommets $[0, 1, i+1, i]$.

2. Déterminer les solutions de l'équation
$$e^{z^{-2}} = \alpha$$
pour $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|\alpha| \neq 0$ le nombre de solutions qui appartiennent au disque $|z| \leq \varepsilon$ est infini pour tout ε. Ceci est un exemple du fait qu'autour d'une singularité essentielle une fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs possibles en $\mathbb{C}$ (sauf éventuellement une).

3. Déterminer les singularités (y compris en $z = \infty$) des fonctions suivantes :

$$(a)\ (z-2)^{-1} \qquad (b)\ (1+z^3)/z^2 \qquad (c)\ \sinh(1/z) \qquad (d)\ e^z/z^3 \qquad (e)\ z^{1/2}/(1+z^2)^{1/2}\,. \tag{231}$$

4.20 Séries de Taylor et de Laurent

1. Démontrer la convergence uniforme de la série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ sur tout disque de centre 0 et de rayon $R < 1$.
2. Soit une fonction $f(z)$ holomorphe sur un domaine D et $z_0 \in D$. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être représentée par une série entière

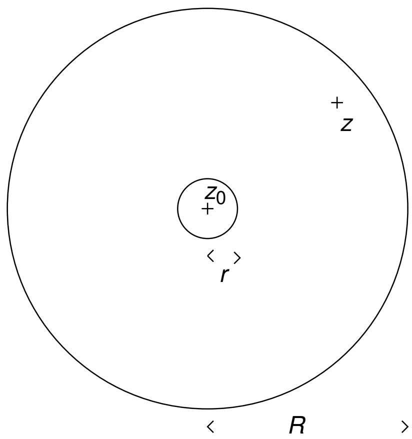
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

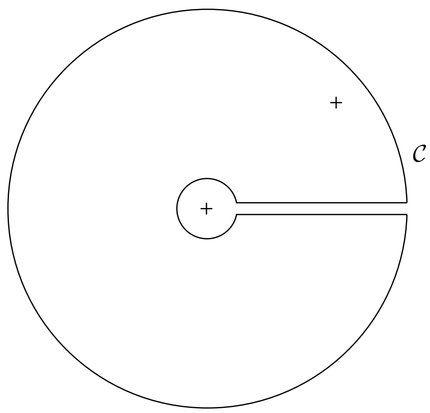
dans tout disque centré sur z_0 et contenu dans D, les coefficients de la série étant

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(y)}{(y - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}y\ .$$

Indication : utiliser d'abord la formule intégrale de Cauchy, sur un chemin γ bien choisi. Développer ensuite le dénominateur en utilisant la série géometrique.

3. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne circulaire K de centre z_0 et de rayons r et R, comme schématisé sur la figure :





Montrer que l'on peut représenter $f(z)$ dans K par la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n\ ,$$

dont les coefficients valent

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(y)}{(y - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}y\ ,$$

le chemin γ étant le cercle de centre z_0 et de rayon r.
Indication : on commencera par utiliser la formule intégrale de Cauchy sur le chemin $\mathcal{C}$ de la figure de droite, on utilisera ensuite la même stratégie que pour le point précédent.

4. On appelle résidu d'une fonction en z_0 le coefficient d_{-1} de sa série de Laurent en z_0. Donner le développement de Laurent autour de $z = 0$, son domaine de convergence, et le résidu en $z = 0$, de la fonction

$$f(z) = (z^4 + 1)\sin\left(\frac{1}{z}\right) \ .$$

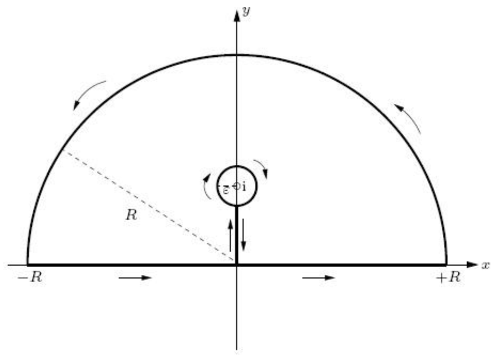
4.21 Une utilisation de la formule de Cauchy

1. On considère la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{1 + z^2} \quad , \tag{232}$$

où k est un réel positif. Sur quel domaine du plan complexe $f(z)$ est-elle analytique ?

2. Que vaut $\int_\gamma dz\ f(z)$, avec γ le chemin fermé défini sur la figure :



3. On décompose γ en trois chemins. γ_1 est le segment de l'axe réel reliant $-R$ à R, γ_2 le demi-cercle de centre l'origine et de rayon R et γ_3 le cercle de centre i et de rayon ϵ. Justifier l'absence dans cette décomposition du chemin le long de l'axe imaginaire, et exprimer $\int_\gamma dz\ \ f(z)$ en fonction des intégrales sur les chemins γ_1, γ_2 et γ_3, en précisant l'orientation des contours.
4. Montrer que la contribution de γ_2 s'annule quand $R \to \infty$.
5. Expliciter la contribution de γ_3, et prendre la limite $\epsilon \to 0$ (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée).
6. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \frac{e^{ikx}}{1 + x^2} = \pi e^{-k} \quad . \tag{233}$$

Comment devrait-on adapter le calcul pour $k < 0$?

4.22 Calculs d'intégrales à l'aide du théorème de Cauchy

1. Rappeler la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x$. En intégrant la fonction $f(z) = e^{iz^2}$ sur un chemin approprié du plan complexe, calculer

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. En intégrant la fonction $f(z) = e^{iz}/z$ dans le plan complexe, calculer

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ikx}\, e^{-x^2} \mathrm{d}x\,,$$

en utilisant l'intégrale de la fonction complexe e^{-z^2} le long d'un rectangle de base $[-R, R]$ et de hauteur bien choisie.

4.23 Calculs d'intégrales à l'aide du théorème des résidus

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration dans le plan complexe :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \qquad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2)\\
I_2 &= \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
I_3 &= \int_0^\infty \frac{\cos x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x\\
I_4 &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^4+(1-\pi^2)x^2-\pi^2)}\,\mathrm{d}x\\
I_5 &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\alpha\cos\theta} \qquad (\text{pour } -1 < \alpha < +1)\\
I_6 &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} \qquad (\text{pour } 0 < \alpha < 1)\\
I_7 &= \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad n > 1+\alpha > 0)\\
I_8 &= \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

4.24 Calculs de sommes de séries à l'aide du théorème des résidus

En utilisant la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^4 \sin \pi z}$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.$$

4.25 D'autres intégrales à calculer

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + b^4} dx \quad , \quad b > 0 \\
J_2 &= \int_0^{\pi} \sin^{2n} \theta d\theta \quad , \quad n \in \mathbb{N} \\
J_3 &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

4.26 Singularités et intégrales

1. Identifier les zéros, les pôles et les autres singularités des fonctions suivantes :

$$f_1(z) = \tan z \tag{234}$$

$$f_2(z) = \tan(1/z) \tag{235}$$

$$f_3(z) = \exp(1/z) \tag{236}$$

$$f_4(z) = z^{1/3} \tag{237}$$

$$f_5(z) = [(z-2)/z^2] \sin[1/(1-z)] \tag{238}$$

(239)

2. En effectuant une paramétrisation adéquate, calculer les intégrales suivantes (voir Figure ci-dessous) :

$$I_1 = \int_{C_1} \mathrm{d}z|z|z^2 \tag{240}$$

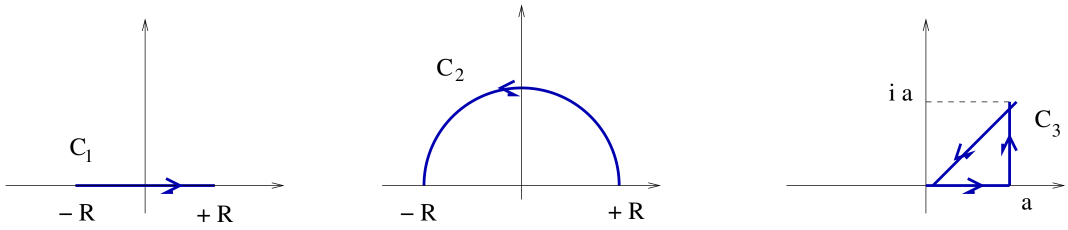
$$I_2 = \int_{C_2} \mathrm{d}z|z|z^2 \tag{241}$$

$$I_3 = \int_{C_3} \mathrm{d}z(|z|^2 + az) \tag{242}$$

3. Calculer les intégrales

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z \tag{243}$$

dans les cas suivants :



(a) $f(z) = 1$ et $\gamma = [0, 1]$ et $\gamma = i[0, 1]$.

(b) $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}$, γ étant le carré de sommets 0, 1, $1 + i$, i, parcouru dans le sens trigonométrique.

(c) $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}$, γ étant le segment reliant 0 et $1 + i$ (i.e. la diagonale du carré précédent).

(d) γ est un cercle centré sur l'origine et de rayon R, orienté dans le sens trigonométrique, avec :

   i. $f(z) = z$.

   ii. $f(z) = 1/z$.

   iii. $f(z) = 1/z^n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

   iv. $f(z) = \bar{z}$.

4.27 Et d'autres intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)\sin 2x}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x \tag{244}$$

$$I_2 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2 - i\epsilon} \tag{245}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x/2)}{x^2 - 1} \mathrm{d}x \tag{246}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \tag{247}$$

4.28 La fonction gamma d'Euler

La fonction gamma d'Euler est définie, pour les réels $x > 0$, par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}u\, e^{-u}\, u^{x-1} \ . \tag{248}$$

1. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$.
2. Démontrer la relation $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
3. En déduire les valeurs de $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n + (1/2))$ pour n entier.

4.29 Méthode de Laplace

On rappelle que la méthode de Laplace fournit un équivalent des intégrales de la forme

$$\int_a^b \mathrm{d}t\, e^{xf(t)} g(t) \underset{x\to\infty}{\sim} e^{xf(t_0)} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(t_0)}} g(t_0)\ , \tag{249}$$

quand f a un unique maximum au point $t_0 \in]a, b[$, l'intervalle d'intégration pouvant être infini.

1. Justifier brièvement ce développement.
2. Pour quelle valeur de u, notée u_0, est atteinte le maximum de l'intégrand dans (248) ? Poser $t = u/u_0$ pour mettre l'expression de $\Gamma(x + 1)$ sous la forme (249).
3. En déduire l'approximation de Stirling pour les factorielles, $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ quand $n \to \infty$.

4.30 Méthode du col

La méthode du col fournit un équivalent quand $x \to \infty$ d'intégrales dans le plan complexe, $\int_\gamma \mathrm{d}z e^{xf(z)} g(z)$, où γ est un contour contenu dans le domaine d'holomorphie des fonctions f et g.

1. Rappeler l'allure des lignes $\mathrm{Re} f(z) = \text{cste}$ et $\mathrm{Im} f(z) = \text{cste}$ au voisinage d'un point z_0 pour une fonction holomorphe avec $f'(z_0) \neq 0$. Quelles sont les lignes de plus grande pente de $\mathrm{Re} f(z)$ et $\mathrm{Im} f(z)$?
2. Tracer ces lignes pour la fonction $f(z) = z^2$, dans tout le plan complexe.
3. Rappeler l'allure des parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe $f(z)$ au voisinage d'un point z_0 où $f'(z_0) = 0$ et $f''(z_0) \neq 0$, et justifier ainsi le nom de point col (ou selle) attribué à un tel z_0.
4. Montrer qu'une déformation opportune du contour γ au voisinage du point col z_0 permet d'appliquer la méthode de Laplace et d'obtenir

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\, e^{xf(z)}\, g(z) \underset{x\to\infty}{\sim} \pm\, e^{xf(z_0)} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0)|}} g(z_0) e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}} \tag{250}$$

   où $f''(z_0) = |f''(z_0)| e^{i\alpha}$, le signe dépendant du sens de parcours de l'intégrale.
5. On veut retrouver le développement de Stirling par cette méthode du col.
   (a) Que vaut, pour n entier positif, l'intégrale

$$\oint_\gamma \mathrm{d}z\, \frac{e^{(n+1)z}}{z^{n+1}} \tag{251}$$

   quand γ est un contour fermé entourant l'origine ?
   (b) Mettre l'intégrand sous la forme $e^{(n+1)f(z)}$, et étudier la fonction f, en particulier la position de son point col, et les courbes $\mathrm{Im} f(z) = \text{cste}$ passant par ce point.
   (c) En déformant de manière appropriée le contour γ, obtenir de nouveau l'approximation de Stirling.

4.31 Autour de la fonction d'Airy

1. On cherche l'équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction d'Airy définie sous forme intégrale comme
$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + xs\right)\,\mathrm{d}s. \tag{252}$$
   (a) Par un changement de variable, mettre cette fonction sous la forme
$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^{3/2}\left(\frac{1}{3}z^3+z\right)}\,\mathrm{d}z. \tag{253}$$
   (b) Étudier la fonction $f(z) = i(z^3/3 + z)$, en particulier la position de ses points-cols, les courbes $\mathrm{Im}f(z) = \text{cste}$ passant par ces points, et les secteurs du plan complexe pour lesquels $\mathrm{Re}f(z) \to -\infty$ quand $|z| \to \infty$.

   (c) En déduire l'équivalent
$$\mathrm{Ai}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}. \tag{254}$$

2. Considérons la fonction $I(x)$ définie pour $x > 0$ par
$$I(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\,\frac{e^{-xt}}{1+t}. \tag{255}$$
   (a) Tracer l'allure de l'intégrand en fonction de t, pour différentes valeurs de x, et en déduire l'allure de la fonction $I(x)$. Discuter le cas $x < 0$.

   (b) Montrer que l'on peut écrire le développement asymptotique suivant pour $x \to \infty$,
$$I(x) = a_1\frac{1}{x} + a_2\frac{1}{x^2} + \cdots + a_n\frac{1}{x^n} + R_n(x) \qquad \text{avec} \quad R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \tag{256}$$
   en déterminant les coefficients a_n et le reste $R_n(x)$. *Indication : vous pouvez faire des intégrations par partie dans (255).*

   (c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$?

5 Transformées de Fourier et de Laplace

5.1 Formule sommatoire de Poisson

1. En traitant le peigne de Dirac $Ш_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nT)$ comme une fonction T-périodique (on peut par exemple imaginer chaque pic de Dirac comme une Gaussienne très piquée), calculer les coefficients de sa décomposition en série de Fourier, et en déduire que $Ш_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x/T}$.
2. En utilisant le résultat précédent, montrer que
$$\widehat{Ш}_T(k) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{2\pi n}{T}\right) \ , \tag{257}$$
autrement dit que
$$\widehat{Ш}_T = \frac{2\pi}{T} Ш_{\frac{2\pi}{T}} \ . \tag{258}$$
Le peigne de Dirac est donc sa propre transformée de Fourier (à des facteurs d'échelle près).
3. Déduire de ce résultat la formule sommatoire de Poisson entre une fonction f et sa transformée de Fourier $\hat{f}$:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \ , \tag{259}$$
valide tant que les deux membres de l'équation existent.
4. Cette formule est utile dans le contexte de l'analyse numérique : on considère la somme de Riemann d'une fonction $f(x)$ à décroissance rapide, avec un pas d'intégration Δx,
$$\Sigma(\Delta x) = \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x) \ . \tag{260}$$
En utilisant la formule sommatoire de Poisson, donner une estimation de l'erreur faite quand on remplace l'intégrale par cette somme discrète,
$$E(\Delta x) = \Sigma(\Delta x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \ , \tag{261}$$
en terme de la transformée de Fourier de f.
Écrire explicitement $E(\Delta x)$ pour $f(x) = e^{-x^2}$, et étudier son comportement quand $\Delta x \to 0$.
5. Cette formule est aussi utile pour le calcul analytique de sommes de séries. Considérez la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, pour $a > 0$, et calculez sa transformée de Fourier. Déduire de la formule sommatoire de Poisson la valeur de
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \ , \tag{262}$$
puis par un passage à la limite calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5.2 Des sommes bien connues

1. Soit f la fonction paire 2π-périodique telle que $f(x) = \pi - x$ pour $x \in [0, \pi]$. Développer f en série de Fourier et en déduire la valeur de $\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Développer en série de Fourier la fonction f 2π-périodique telle que $f(x) = \cos\alpha x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$. En déduire l'expression de $\cot x$ sous la forme d'une somme d'une série de fonctions, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
3. Développer en série de Fourier la fonction de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [0, 2\pi[$. En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$.
4. Développer en série de Fourier la fonction f 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$. En déduire les valeurs de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2+1}$ et de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

5.3 Grandes déviations

1. On se donne N variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ indépendantes et identiquement distribuées de densité ρ ($P(x \leq X_i \leq x + \mathrm{d}x) = \rho(x)\mathrm{d}x$). On s'intéresse aux variables aléatoires $S = \sum_{i=1}^N X_i$ et $\xi = \frac{S}{N}$. On supposera que les trois premiers moments de ρ existent. Exprimer la fonction génératrice $G(z) = \langle e^{-zS} \rangle$ de S en fonction de celle, $g(z) = \langle e^{-zX_i} \rangle$ des X_i.
2. En déduire que la densité de probabilité Q de ξ se met sous la forme $Q(\xi) = \int \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} e^{-Nf(\xi,z)}$ où l'on exprimera f en fonction de ξ, z et de $g(z)$. On précisera également le sens de $\int \mathrm{d}z$.
3. En déduire une expression approchée de Q pour N grand sous la forme $Q(\xi) \simeq \sqrt{\frac{2\pi N}{\Delta(\xi)}} e^{-Nf^*(\xi)}$ où l'on précisera l'expression de f^* et de Δ.
4. On se place dans la situation où $\rho(x) = e^{-x}H(x)$. Déterminer $g(z)$ et vérifier que $\int \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} e^{zx} g(z) = \rho(x)$. Déterminer z^* et Δ explicitement. Expliquer brièvement quel est le principe du calcul en détaillant le chemin d'intégration effectivement suivi dans le plan complexe.
5. Supposons à présent que $f(\xi, z) = -\xi z + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 2z} - 1\right)$ (comme par exemple dans l'étude de la puissance injectée par un thermostat de Langevin dans une particule colloïdale, J. Farago, J. Stat. Phys. **107**, 781 (2002), Injected power fluctuations in Langevin equation). En partant de l'expression de la question 2, donner le comportement de $Q(\xi)$ lorsque $N \to +\infty$.

5.4 Gaz de bâtons durs

Soit la fonction $Z : L \mapsto Z(L)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$Z(L) = \frac{1}{N!} \int_{[0,L-1]^N}^{\prime} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \tag{274}$$

où $\int'$ désigne une intégrale telle que pour tout couple (i, j), $|x_i - x_j| \geq 1$. Déterminer la transformée de Laplace $\hat{Z}(P)$ de $Z(L)$ par rapport à L. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice, et quels sont les sens physiques de $\ln Z(L)$ et de $\ln \hat{Z}(P)$?

6 Équations différentielles et fonctions de Green

6.1 Deux problèmes aux valeurs propres

On cherche le spectre de l'opérateur différentiel $D = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2$ dans l'espace des fonctions vérifiant $y(0) = 0$ et $y(1) = 0$.

1. Vérifier que l'on peut formuler la question en terme d'un problème de Sturm-Liouville en identifiant les fonctions p, q et s. Quel est le produit scalaire $\langle f|g\rangle$ entre deux fonctions f et g pour lequel le problème aux valeurs propres revient à étudier le spectre d'un opérateur hermitien ?
2. Soit λ une valeur propre de D. Montrer que $\lambda \geq 1/4$.
3. Déterminer les valeurs propres λ_n et les fonctions propres associées ϕ_n. Montrer qu'elles sont indexées par une entier $n \in \mathbb{N}^*$. Les valeurs propres sont-elles dégénérées ?
4. Reprendre les questions précédentes pour $D = -x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et $y(1) = 0, y(2) = 0$ (attention, à la question 2, $\lambda > 0$ et à la question 3, $n \in \mathbb{N}^*$).

6.2 Dérivée seconde

Résoudre le problème de Sturm–Liouville suivant :

$$y'' + \lambda y = 0,\ \ y(0) + y'(0) = 0,\ \ y(1) + 3y'(1) = 0 \tag{275}$$

Montrer en particulier que l'on peut écrire toutes les fonctions propres, sauf une, sous la forme $\phi_n(x) = k_n \cos k_n x - \sin k_n x$ où k_n est solution d'un équation transcendante. Donner un équivalent de k_n pour $n \to +\infty$.

6.3 Polynômes orthogonaux et formule de Rodrigues

On se donne A et B deux polynômes de degrés 1 et 2 respectivement et on considère l'équation différentielle sur $]a, b[$

$$By'' + Ay' + \lambda y = 0 \tag{278}$$

avec $\lim_{x\to a} \exp\left[\int^x \frac{A}{B}(x')\mathrm{d}x'\right] = 0$ et $\lim_{x\to b} \exp\left[\int^x \frac{A}{B}(x')\mathrm{d}x'\right] = 0$.

1. Reconnaître en cette équation différentielle un problème de Sturm-Liouville $(py')' + qy + \lambda sy = 0$, où l'on identifiera les fonctions p, q et s en fonction de A et B.
2. Soit $\phi_n(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$ une solution de l'équation différentielle. À quelle condition sur λ cette solution est-elle polynomiale de degré n et exprimer λ en fonction de n, A' et B''.

3. Si une telle fonction est solution, alors

$$c_{k+1} = -\frac{k(k-1)B''/2 + kA' + \lambda}{B'(0)k(k+1) + kA(0)} c_k \tag{279}$$

ce qui impose $\lambda_n = -\frac{n(n-1)}{2}B'' - nA'$.

4. Montrer que $\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{s(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(s(x)B(x)^n)$ est solution associée à des valeurs λ_n que l'on précisera (cette formule pour $\mathcal{P}_n$ est la formule de Rodrigues). Montrer que $\mathcal{P}_n$ est un polynôme de degré n.
5. Pour les questions 5 à 8, on choisit $a = -\infty$ et $b = +\infty$, $p(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $q(x) = 0$ et $s(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Identifier les polynômes A et B et déterminer les λ_n correspondants.
6. Soit $H_n(x) = (-1)^n\mathcal{P}_n(x)$. Déterminer explicitement H_0, H_1 et H_2. On appelle H_n le n-ème polynôme de Hermite (adoptant la convention de la physique).
7. Déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}xH_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ en fonction de m et n.
8. Relier les fonctions propres d'un oscillateur harmonique quantique unidimensionnel aux H_n, et ses niveaux d'énergie aux λ_n.
9. Pour les questions 9 à 12, on choisit $a = 0$ et $b = +\infty$, $p(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, $q(x) = 0$ et $s(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Identifier les polynômes A et B et déterminer les λ_n correspondants.
10. Soit $L_n(x) = \frac{1}{n!}\mathcal{P}_n(x)$. Déterminer explicitement L_0, L_1 et L_2. On appelle L_n le n-ème polynôme de Laguerre.
11. Déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}xL_n(x)L_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ en fonction de m et n.
12. On appelle aussi polynôme de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$ la solution corresppondant au choix $p(x) = x^\alpha\mathrm{e}^{-x}$ ($\alpha \geq 0$). Relier la partie radiale de la fonction d'onde de l'électron dans un atome d'hydrogène pour un moment angulaire indexé par ℓ aux $L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}$.
13. Pour les questions 13 à 16,On choisit $a = -1$ et $b = 1$, $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$ et $s(x) = 1$. Identifier les polynômes A et B et déterminer les λ_n correspondants.
14. Soit $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\mathcal{P}_n(x)$. Déterminer explicitement P_0, P_1 et P_2. On appelle P_n le n-ème polynôme de Legendre.
15. Déterminer $\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}xP_n(x)P_m(x)$ en fonction de m et n.
16. Soient deux points M et M repérés par $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ dans $\mathbb{R}^3$ ($OM = ||\mathbf{r}|| = r$, $OM' = r'$), tels que $\theta = \widehat{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}$. On suppose que $0 < r'/r < 1$. Exprimer $\frac{1}{||\mathbf{r}-\mathbf{r}'||}$ sous la forme d'une série en puissances de r'/r,

$$\frac{1}{||\mathbf{r}-\mathbf{r}'||} = \frac{1}{r}\sum_{\ell\geq 0}\left(\frac{r'}{r}\right)^\ell a_\ell \tag{283}$$

en reliant a_ℓ aux P_ℓ. Préciser des exemples physiques où ce développement intervient.

17. Pour les questions 17 à 20, on choisit $a = -1$ et $b = 1$, $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = 0$ et $s(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Identifier les polynômes A et B et déterminer les λ_n correspondants.

18. Soit $T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^n\Gamma(n+1/2)}\mathcal{P}_n(x)$. Déterminer explicitement T_0, T_1 et T_2. On appelle T_n le n-ème polynôme de Tchebychev.
19. Déterminer $\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ en fonction de m et n.
20. Montrer que $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Il n'y a pas d'implication immédiate et simple des polynômes de Tchebychev en physique. En revanche, ils sont récurrents en analyse numérique (par exemple en théorie du contrôle).

6.4 Marche aléaoire et modèle d'Ising bidimensionnel

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ un vecteur de $[-\pi, \pi]^2$. On introduit

$$\Gamma_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + te^{iq_y} & 1 & 1 \\ -(1 + te^{-iq_y}) & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 + te^{iq_x} \\ -1 & -1 & -(1 + te^{-iq_x}) & 0 \end{pmatrix} \tag{284}$$

1. Soit $G(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^2} \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} G_{\mathbf{q}}$ avec $G_{\mathbf{q}} = (\Gamma_{\mathbf{q}})^{-1}$. Déterminer $G_{\mathbf{q}}$ ainsi que l'équation aux différences finies dont $G(\mathbf{r})$ est solution (ici $\mathbf{r} = (x, y)$ désigne un site d'un réseau carré de pas unité ; x, y sont des entiers relatifs).
2. Montrer qu'il n'existe qu'une seule valeur de t, appelée t_c, telle que $\mathbf{q} \mapsto \det \Gamma_{\mathbf{q}}$ puisse s'annuler.
3. Soit $\mathbf{k} = \mathbf{q}/(t - t_c)$. Développer $G_{\mathbf{q}}$ au deuxième ordre en $t - t_c$ à $\mathbf{k}$ fixé. En déduire le comportement, aux grands arguments, de $G(\mathbf{r})$, lorsque $t \to t_c$.

6.5 Méthode des images

1. On commence par placer une charge ponctuelle q à une distance $z = a > 0$ d'un plan conducteur localisé en $z = 0$ maintenu à un potentiel électrostatique nul. Soit $\phi(x, y, z)$ la fonction définie par

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right] \tag{285}$$

   Montrer que pour $z > 0$ cette fonction ϕ fournit le potentiel électrostatique en un point quelconque de l'espace au-dessus du conducteur. Interpréter la formule donnant *phi* comme étant la superposition des potentiels créés par deux charges ponctuelles que l'on décrira. L'une d'entre elles est fictive : laquelle, quelle est sa charge, quelle est sa position ? En déduire la densité de charge $\sigma(x, y)$ en un point quelconque du plan conducteur.
2. On considère à présent une distribution de charge $\rho(\mathbf{r})$ quelconque dans le demi-plan supérieur. Pour en déduire le potentiel, on introduit la fonction de Green G est

telle que $-\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ dans le demi-espace $z > 0$ avec des conditions de Dirichlet $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ sur le plan en $z = 0$ (pour tout $\mathbf{r}'$), et en l'infini.

3. Soit ϕ et λ une fonction propre du laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet et soit λ sa valeur propre associée. Montrer que

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = C_{\mathbf{k}} \sin k_z z e^{ik_x x + ik_y y}, \ \lambda_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2 \tag{286}$$

où $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Déterminer $C_{\mathbf{k}}$ pour que les $\phi_{\mathbf{k}}$ soient orthonormales.

4. Déterminer la distribution $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \mathrm{d}z \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \phi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r})$.
5. Vérifier que $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}k_z \int \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \frac{\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}')}{\lambda_{\mathbf{k}}}$.
6. En déduire que l'on peut écrire $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_\infty(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G_\infty(\mathbf{r} - \mathbf{r}'^*)$ où G_∞ est la fonction de Green du problème invariant par translation dans $\mathbb{R}^3$. Qu'est-ce que $\mathbf{r}'^*$?
7. Si l'on avait imposé $\partial_z G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ en $z = 0$ (conditions de Von Neumann), quelle expression, similaire à celle obtenue à la question 6 aurait-on obtenu ? Donner un exemple de réalisation physique d'une telle condition aux limites.
8. Discuter l'interprétation de deux fonctions Green obtenues en 6 et 7 en termes de charges images.

7 Partiel du 12/11/2019 - 2 heures

7.1 Deux sommes de fonctions trigonométriques

1. Soit $\theta \neq 0 \bmod(2\pi)$, calculer $\mathrm{Re} \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}} dx$.
2. Le théorème de convergence dominée s'applique-t-il aux sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} x^n e^{i(n+1)\theta}$?
3. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$.
4. Montrer de même que, $\forall \theta \in]0,\pi[$, on a $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$.

7.2 Loi Gamma

La fonction Gamma d'Euler est définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} dt t^{x-1} e^{-t}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (elle vérifie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ sur son domaine de définition). Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$ on définit la loi $\gamma_{a,\lambda}$ par sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \chi_{\mathbb{R}_+}(x) \tag{291}$$

où $\chi_I(x)$ est la fonction de caractéristique de $I \subset \mathbb{R}$. Pour $a = 1$ cette loi se réduit à la loi exponentielle.

1. Vérifier que cette expression définit bien une densité et déterminer l'espérance de cette loi.
2. Soit V_i, $i = 1, \ldots, n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{1,\lambda}$. Déterminer la loi du vecteur $(X_1, \ldots, X_n) = (V_1, V_1 + V_2, \ldots, V_1 + \ldots + V_n)$. En déduire la loi de $X_n = V_1 + \ldots + V_n$.
3. Si X est une variable aléatoire de loi $\gamma_{a,\lambda}$, quelle est la loi de λX ?
4. Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$, montrer que $X + Y$ et X/Y sont deux variables aléatoires indépendantes dont on calculera les lois.
5. Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$, montrer que $X+Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont des variables aléatoires indépendantes. Calculer la loi de $\frac{X}{X+Y}$.
6. Désormais Y a pour loi $\gamma_{b,\lambda}$ (avec $b > 0$). Quelle est la loi de $X + Y$?
7. On se donne à présent n variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ distribuées selon une loi normale centrée en 0 et de variance unité. Montrer que la loi de $Z_1^2 + \ldots + Z_n^2$ est $\gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$. On appelle cette loi la loi du χ_n^2. On admettra que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
8. Quelle est la loi de l'énergie cinétique E_c d'un fluide (classique, non relativiste) de N particules ponctuelles de masse m évoluant en trois dimensions spatiales en contact avec un thermostat à la température T (sachant que chaque particule a sa vitesse distribuée selon une loi de Maxwell) ?

7.3 Écrantage en une dimension

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ un réel fixé. On considère une fonction $G : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $-G'' + \lambda^2 G = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ séparément. On impose de plus que $\lim_{x\to\pm\infty} G(x) = 0$ et que la fonction soit prolongeable par continuité sur tout $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la forme des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ satisfaisant cette équation différentielle. Au besoin, on introduira une ou des constantes arbitraires.
2. Montrer que G' possède un saut de discontinuité en $x = 0$. Montrer qu'il existe une constante $\sigma \in \mathbb{R}$ et u une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telles que $G' = u + \sigma H$, où H est la fonction de Heaviside.
3. Déterminer la distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donnée par $T = -G'' + \lambda^2 G$. Dans la suite la ou les éventuelles constantes indéterminées caractérisant G sont ajustées de sorte que $T = \delta$, distribution de Dirac centrée en $x = 0$.
4. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On cherche à trouver une fonction V solution de l'équation différentielle $(-V'' + \lambda^2 V) = \rho$. Déterminer la distribution $\delta * \rho$. Est-elle régulière ?
5. En déduire la fonction V solution l'équation différentielle de la question 4 sous la forme d'une convolution.
6. Si ρ est désormais la distribution donnée par $\rho(x) = \delta(x-1) - \delta(x+1)$, déterminer la distribution V solution de l'équation différentielle de la question 4.
7. On reprend à présent la première question avec $\lambda = 0$, en renommant G en G_0. En imposant que le prolongement par continuité de G_0 en 0 vérifie $\lim_{x\to0^\pm} f(x) = 0$, mais on oubliant les conditions en $\pm\infty$, quelle est la forme de la fonction G_0 ?
8. Trouver une distribution G_0 vérifiant $-G_0'' = \delta$.

7.4 La firme

Une firme a le projet de construire deux produits nécessitant l'utilisation de trois machines. La machine A ne peut travailler que 150 heures par mois, la machine B, 210 heures, et la machine C, 180 heures. Le premier produit P_1 nécessite 1 heure de la machine A et 1 heure de la machine B et il est vendu 300 euros à l'unité. Le second produit P_2 nécessite une heure de la machine A, trois heures de la machine B et 3 heures de la machine C et il est vendu 500 euros à l'unité. La firme cherche à définir le programme de fabrication lui permettant de rendre maximal son prix de revient.

Soit $x \geq 0$ le nombre de produits P_1 à fabriquer et $y \geq 0$ le nombre de produits P_2.

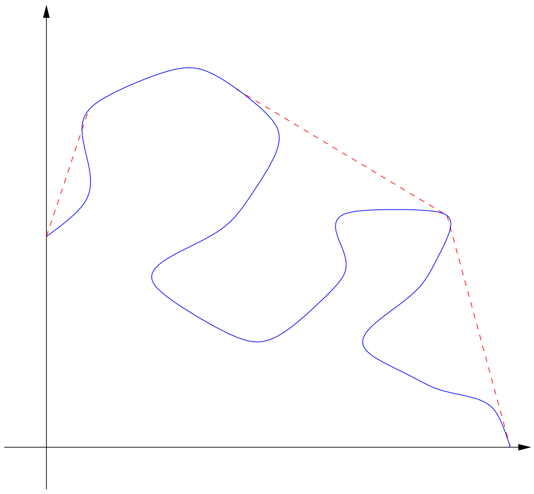
1. Écrire la fonction revenu $f(x, y)$ que l'on cherche à rendre maximale en fonction de x et de y.

2. Écrire les trois contraintes résultant des limitations des machines sous forme d'inégalités.

3. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des contraintes. Vérifier que cet ensemble est convexe (sans le démontrer, rappeler ce que cela signifie).

4. On considère les courbes $f(x, y) = R$, où R est une constante réelle. Placer quelques unes de ces courbes sur le graphe précédent. Expliquer graphiquement où se localise le maximum de f et déterminer les valeurs de x et y correspondantes.

5. Imaginons, pour cette question seulement, que les diverses contraintes sur les machines A, B, et C ne s'expriment pas de façon linéaire, mais qu'elles délimitent au contraire un domaine du plan qui, contrairement à la question 3, ne soit pas convexe. Illustrer graphiquement, à partir de la figure suivante



qui représente en trait plein le domaine considéré, pourquoi l'extremum de f se situerait nécessairement sur des points à la frontière de cet ensemble qui appartiennent aussi à son enveloppe convexe.

Prenons un peu de recul, et examinons le cas où l'on a à considérer n produits en nombres $x_1, \ldots, x_n$ définissant un vecteur x de $\mathbb{R}^n$. On émet l'hypothèse que la fonction $f(x)$ à maximiser est linéaire, $f(x) = c^T x$, où $c \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur donné. On écrit les contraintes sous la forme $\theta_i(x) = (Ax)_i - b_i \leq 0$, $x_i \geq 0$, avec A une matrice inversible $n \times n$ et b un vecteur à n composantes.

6. "Il existe alors deux vecteurs $\mu, \mu' \in \mathbb{R}^n$, avec $\mu'_i \geq 0$ vérifiant, à l'extremum de f, $A^T\mu + \mu' = c$, $Ax = b$, $x^T\mu' = 0$, et $x_i \geq 0$." Énoncer le théorème permettant une telle assertion.

7. Que peut-on dire des deux vecteur $c - A^T\mu$ et x (hormis que leurs coordonnées sont positives) ?

8. Vérifier que la méthode est compatible avec le problème bidimensionnel des premières questions du problème (préciser les valeurs des composantes de μ et de μ').