Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr

TD $N^o 4$: Correction

1 Cinématique du gonflement

1. Pour arriver au résultat on utilise la formule en fin de TD avec $\underline{u}$ les coordonnées de n'importe quel point après déformation.

$$\underline{u} = (\lambda(R)R, \Theta, \Phi)$$

Toute les dérivations se font dans les coordonnées de la base avant la déformation.
Une autre façon de le voir: soient des points M et M' du matériaux qui deviennent M_t et M'_t après déformation. On défini $\underline{da} = \underline{MM'}$ un vecteur matériel. Après la déformation, ce vecteur devient $\underline{dx} = \underline{M_t M'_t}$. On aura alors:

$$\underline{dx} = \underline{\underline{F}}\,\underline{da}$$

avec $\underline{\underline{F}}$ le *tenseur gradient de la déformation*.
Dans notre expérience, cela donne: $\lambda_R = \lambda' R + \lambda$, $\lambda_\Theta = \lambda$, $\lambda_\Phi = \lambda$.

2. L'incompressibilité se traduit par $Det(\underline{\underline{F}}) = 1$. En utilisant l'expression de $\underline{\underline{F}}$:

$$\frac{d(\lambda R)}{dR}\lambda^2 = 1$$
$$\frac{d(\lambda R)}{dR} = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. On a:

$$d(\lambda R)\lambda^2 R^2 = R^2 dR$$

Donc si on intègre entre R1 et R:

$$\lambda(R)^3 R^3 - \lambda_1^3 R_1^3 = R^3 - R_1^3$$
$$\lambda(R) = (1 + (\lambda_1^3 - 1)(\frac{R_1}{R})^3)^{1/3}$$

2 Analyse du gonflement

1. $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \mu\frac{1}{\lambda^4} + \eta & 0 & 0 \\ 0 & \mu\lambda^2 + \eta & 0 \\ 0 & 0 & \mu\lambda^2 + \eta \end{bmatrix}$

2. On a un équilibre des contraintes: $\underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$.

En utilisant les formules en annexes, on récupère:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned}$$

On rajoute les conditions aux limites pour les pressions:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r_1) &= -p_i \\ \sigma_{rr}(r_2) &= -p_e \end{aligned}$$

L'intégration de la première équation entre r_1 et r_2 donne l'équilibre des pressions:

$$p_i = p_e - 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})dr$$

3. Le changement de variable se prouvent facilement (en utilisant les questions du début).
On fait d'abord le premier changement de variable:

$$\begin{aligned} p_i &= p_e - 2\int_{R1}^{R2} \frac{1}{\lambda(R)R}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\frac{1}{\lambda(R)^2}dR \\ &= p_e - 2\int_{R1}^{R2} \frac{dR}{R}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\frac{1}{\lambda(R)^3} \end{aligned}$$

Puis on enchaîne sur le second:

$$\begin{aligned} p_i &= p_e - 2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\frac{1}{\lambda^3}\frac{\lambda^2}{1-\lambda^3} \\ &= p_e - 2\mu\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda(\frac{1}{\lambda^4} - \lambda^2)\frac{1}{\lambda(1-\lambda^3)} \\ &= p_e - 2\mu\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\frac{1+\lambda^3}{\lambda^5} \\ &= p_e - 2\mu(\frac{1}{4\lambda_1^4} - \frac{1}{4\lambda_2^4} + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}) \end{aligned}$$

4. On considère une membrane mince, donc on peut simplifier l'intégrale en s'arretant après le premier changement de variable, en utilisant $\dfrac{R_2 - R_1}{R_1} = \alpha$ et en supposant $\lambda(R) \simeq \lambda$ une constante:

$$\begin{aligned}
p_i &= p_e - 2\int_{R1}^{R2} \frac{dR}{R}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\frac{1}{\lambda(R)^3} \\
&\approx p_e - 2\alpha(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\frac{1}{\lambda^3} \\
&\approx p_e + 2\alpha\mu(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7})
\end{aligned}$$

5.