TD1 : Généralités sur les groupes

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition, associative, avec élément neutre e, et telle que tout élément de E possède un inverse à gauche. Montrer que tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche. En déduire que E est un groupe.

Exercice 2 : $\star$
Soit G un groupe tel que $g^2 = e$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 3 : $\star$
Soit G un groupe et soit H un sous-ensemble fini non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G.

a) Montrer que H est un sous-groupe de G.
b) Trouver un exemple d'un groupe G et d'un sous-ensemble non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G qui ne soit pas un sous-groupe de G.

Exercice 4 : $\star$
Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 5 :
Soit G un groupe fini.

a) Montrer que des éléments conjugués dans G sont de même ordre.
b) Deux éléments de même ordre dans G sont-ils toujours conjugués ?
c) Trouver tous les groupes abéliens finis G pour lesquels la question précédente a une réponse positive. Un exemple non abélien ?

Exercice 6 :
Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes et soit x un élément de G_1 d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x.

Exercice 7 : $\star$
Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

Exercice 8 :
Donner la liste de tous les groupes (à isomorphisme près) de cardinal inférieur ou égal à 7.

Exercice 9 : $\star\star$
Soit G un groupe tel que le quotient par son centre est monogène. Prouver que G est abélien.

Exercice 10 : $\star\star$
Soit G un groupe. Vrai ou faux ?

a) Si tout sous-groupe H de G est distingué dans G, alors G est abélien.
b) Si $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft H$, alors $K \triangleleft G$.
c) Soient x et $y \in G$ d'ordre fini. Alors xy est nécessairement d'ordre fini.

d) Si G a un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.
e) Si H et K sont des sous-groupes de G, alors $\langle H \cup K \rangle = HK$.

Exercice 11 :
Soit S un sous-ensemble non vide d'un groupe fini G. Soient $N(S) := \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$ et $C(S) := \{g \in G \mid \forall s \in S\,, gsg^{-1} = s\}$ le normalisateur et le centralisateur de S dans G. Montrer que :
a) $N(S) < G$ et $C(S) \lhd N(S)$.
b) $N(S) = G$ si et seulement si $S = \bigcup_{g \in G} gSg^{-1}$.
c) Si $H \lhd G$, alors $C(H) \lhd G$.
d) Si $H < G$, alors $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.

Exercice 12 : $\star\star$
Soit G un groupe et soit $H \lhd G$ un sous-groupe distingué.
a) Décrire les sous-groupes distingués de G/H en fonction de ceux de G.
b) Soit K un sous-groupe de G.
  i) Si K est distingué dans G et contient H, montrer que l'on a un isomorphisme $(G/H)/(K/H) \cong G/K$.
  ii) Montrer que HK est un sous-groupe de G égal à KH.
  iii) Montrer que H est distingué dans HK.
  iv) Montrer que l'on a un isomorphisme $K/(K \cap H) \cong (HK)/H$.

Exercice 13 :
Quel est le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer le groupe $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 14 : $\star\star\star$
Soit G un groupe de type fini
a) Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ?
b) Même question en supposant de plus que le cardinal de G/H est fini.

Exercice 15 : $\star\star$
On dit qu'un groupe G est d'exposant e si e est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que pour tout $g \in G$, on a $g^n = 1$. Pour quels entiers e un groupe d'exposant e est-il nécessairement commutatif ?

Exercice 16 :
a) Prouver que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b) Prouver que les sous-groupes non denses de $\mathbb{R}$ sont les $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 : $\star\star$
Soit G un groupe fini.
a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathfrak{A}_n$.
c) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$, pour tout corps k.

Exercice 18 : $\star\star\star$
Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$. Et dans $\mathfrak{A}_n$?

Exercice 19 :
Montrer que si $n \geq 2$, $\mathfrak{S}_{n+2}$ a deux sous-groupes non conjugués isomorphes à $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 20 : $\star\star\star$
Montrer que tout sous-groupe d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.