Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr, salle L273

TD N^o3: Correction

Introduction

1/ C'est un disque.

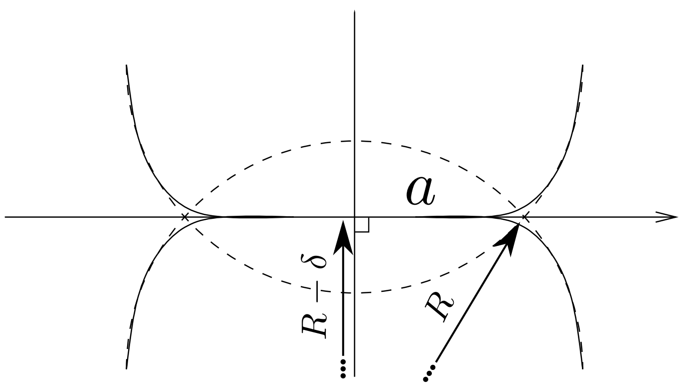

Figure 1: Deux sphères en contact.

2/ En utilisant le théorème de pythagore:

$$R^2 = (R-\delta)^2 + a^2 \quad (1)$$
$$\simeq R^2 - 2R\delta + a^2 \quad (2)$$

Donc on a bien $a^2 \sim 2R\delta$

Loi d'échelle

3/ $\delta' = \dfrac{a'^2}{2R} = \dfrac{\lambda^2 a^2}{2R} = \lambda^2\delta$
En ordre de grandeur, pour notre exemple, on peut donner une expression de la déformation: $\epsilon = \dfrac{\delta}{a} = \dfrac{a}{2R}$. Le choix de a pour la déformation vient du principe de Saint-Venant.
On peut en déduire la contrainte en utilisant la loi de hooke: $\sigma \approx E\epsilon$ avec E le module d'Young.
Donc pour la force: $F = \sigma S \approx \dfrac{Ea^3}{R}$ Enfin, $F' \approx \dfrac{Ea'^3}{R} \approx \dfrac{E\lambda^2 a^3}{R} \approx \lambda^3 F$

4/ On en déduit $F^2 \sim \delta^3$.

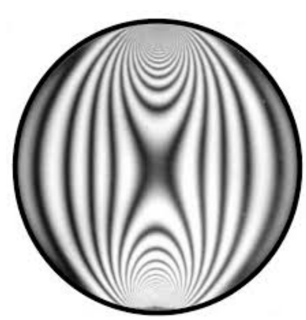

Figure 2: Photoélasticité du contact de Hertz.

Expression générale de la force de contact

5/ Géométriquement, en utilisant le théorème de pythagore, on a:

$$r^2 + (R - \delta + u_\perp)^2 = R^2 \tag{3}$$
$$r^2 + R^2 - 2\delta R + 2u_\perp R = R^2 \tag{4}$$

Donc en simplifant, on a bien $u_\perp = \delta - \dfrac{r^2}{2R}$

6/ On a $s^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$. On fait la transformation $(x, y) \to (s, \phi)$.
On voit bien sur la figure que l'on a $x' - x = s\cos(\phi + \theta)$ et $y' - y = s\sin(\phi + \theta)$.
On en déduit la Jacobienne de la transformation inverse: $Jac = \begin{bmatrix} \cos(\phi+\theta) & -s\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & s\cos(\phi+\theta) \end{bmatrix}$.
On rappelle la formule de changement de variable pour une intégrale multiple:

$$\int_{\Phi(U)} f(x, y) = \int_U f(\Phi)|\det \mathrm{Jac}\Phi| \tag{5}$$

Donc l'intégrale devient par changement de variable: $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{s_{max}(\phi)} s\dfrac{P(s,\phi)}{s}ds$.
Al-Kashi: $a^2 = (\underline{r} + \underline{s_{max}(\phi)})^2 = r^2 + s_{max}^2 + 2rs_{max}\cos(\phi)$.
On utilise (3):

$$P(s, \phi) = \frac{P_0}{a}\sqrt{a^2 - (\underline{r} + \underline{s})^2} \tag{6}$$
$$= \frac{P_0}{a}\sqrt{a^2 - r^2 - s^2 - 2rs\cos(\phi)} \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

En utilisant la formule pour $\alpha^2 = a^2 - r^2$, $\beta = r\cos\phi$ et $x = s$:

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi(-\frac{1}{2}r\sqrt{a^2 - r^2}\cos\phi + \frac{1}{2}(a^2 - r^2 + r^2\cos^2\phi)(\frac{\pi}{2} - arctan(\frac{r\cos\phi}{a^2 - r^2}))) \tag{9}$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} d\phi(a^2 - r^2 + r^2\cos^2\phi) \tag{10}$$
$$= \frac{\pi}{4}(2\pi a^2 - 2\pi r^2 + \pi r^2) \tag{11}$$

On arrive à une expression de $u_\perp$: $u_\perp(r) = \dfrac{P_0\pi(1 - \sigma^2)}{4Ea}(2a^2 - r^2)$

On a $u_\perp(r = 0) = \delta = \dfrac{P_0\pi(1 - \sigma^2)a}{2E}$

Par identification en utilisant (2), on a: $\dfrac{1}{2R} = \dfrac{\pi P_0(1 - \sigma^2)}{4Ea} = \dfrac{\delta}{2a^2}$.
Donc on retrouve bien notre résultat $a^2 \approx \delta R$.

7/ On intègre la pression sur la surface de contact:

$$
\begin{aligned}
F_{app} &= \int\int_{disc} P(x,y)dxdy && (12)\\
&= P_0 2\pi \int_0^a rdr\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} && (13)\\
&= -P_0\frac{2\pi a^2}{3}\left[(1-\frac{r^2}{a^2})^{3/2}\right]_0^a && (14)\\
&= \frac{2\pi P_0 a^2}{3} && (15)
\end{aligned}
$$

On sait en plus que $\delta = P_0\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{\pi}{2}a$ et $a = \sqrt{\delta R}$.

Donc $P_0 = \sqrt{\frac{\delta}{R}}\frac{2E}{\pi(1-\sigma^2)}$.

Finalement, $F_{app} = \frac{4E}{3(1-\sigma^2)}\delta^{3/2}R^{1/2}$.

Application: Temps de collision entre 2 balles

8/ On peut exprimer l'énergie potentielle des 2 balles par: $dE_p = F_{app}d\delta \rightarrow E_p = D\delta^{5/2}$ avec $D = \frac{8ER^{1/2}}{15(1-\sigma^2)}$.
On a aussi l'énergie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Lors de la collision, elle devient: $E_c = \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2$.

Donc pour le système dynamique: $E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + D\delta^{5/2}$

9/ On a δ_{max} pour $\dot{\delta} = 0$, donc avec la conservation de l'énergie totale, $\delta_{max} = \left(\frac{mv^2}{2D}\right)^{2/5}$

10/ On prend notre équation dynamique par conservation de l'énergie du système:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + D\delta^{5/2} && (16)\\
\frac{d\delta}{dt} &= (v^2 - \frac{2D}{m}\delta^{5/2})^{1/2} && (17)\\
dt &= (v^2 - \frac{2D}{m}\delta^{5/2})^{-1/2}d\delta && (18)
\end{aligned}
$$

On intègre l'égalité:

$$\tau = \int_0^{\delta_{max}} \frac{d\delta}{\sqrt{v^2 - \frac{2D}{m}\delta^{5/2}}} = \frac{1}{v}\int_0^{\delta_{max}} \frac{d\delta}{\sqrt{1-\frac{2D}{mv^2}\delta^{5/2}}}$$

Si on pose $u = \dfrac{\delta}{\delta_{max}}$:

$$\tau = \frac{1}{v}(\frac{mv^2}{2D})^{2/5} \int_0^1 du(1-u^{5/2})^{-1/2} \qquad (19)$$

Donc finalement, $t_{contact} = 2\,\tau = 3.94\,\delta_{max}/v$.
Pour des billes en métal de 1 cm à 1m/s:

$$\begin{aligned} \sigma &\simeq 0.3 \\ E &\simeq 200\,\mathrm{GPa} \\ \rho &\simeq 8.10^3\,\mathrm{kg/m^3} \\ R &\simeq 0.01\,\mathrm{m} \\ v &\simeq 1\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Tout cela donne

$$\begin{aligned} D &\simeq 1.2.10^{10}\ \mathrm{kg\cdot m^{-1/2}\cdot s^{-2}} \\ m &\simeq 33\,\mathrm{g} \\ \delta_m &\simeq 18\,\mu\mathrm{m} \\ t_{contact} &\simeq 70\,\mu\mathrm{s} \end{aligned}$$