

Mécanique quantique – L3

Sylvain Nascimbène

Séance de tutorat du 20 novembre 2019

Systemes à deux niveaux

1 Spin 1/2

1. On considère un état $|+\rangle$, vecteur propre de S_z pour la valeur $\hbar/2$. Calculer les valeurs moyennes des observables S_z , S_x , S_z^2 , S_x^2 pour cet état. Ces valeurs sont-elles modifiées si on considère l'état $e^{i\phi}|+\rangle$?
2. Même question si on considère un état (vecteur propre de $S_{\vec{u}}$) $|+\rangle_{\vec{u}} = \cos(\theta/2)|+\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|-\rangle$ où θ et ϕ sont les coordonnées sphériques du vecteur unitaire \vec{u} .
3. Lorsqu'on effectue une mesure du spin selon Ox dans l'état $|+\rangle_{\vec{u}}$, quelle est la probabilité de mesurer $\hbar/2$?
4. Quelle observable a pour vecteurs propres $|a\rangle = \frac{|+\rangle + i|-\rangle}{\sqrt{2}}$ et $|b\rangle = \frac{|+\rangle - i|-\rangle}{\sqrt{2}}$ correspondant aux valeurs propres $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$? L'exprimer dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.
5. Calculer la valeur moyenne de \vec{S}^2 .

2 Molécule d'ammoniac

La molécule d'ammoniac est constituée d'un atome d'azote et de 3 atomes d'hydrogène, organisés sous forme de pyramide, l'atome d'azote occupant le sommet et les atomes d'hydrogène formant la base en triangle équilatéral. Il existe deux positions équivalentes possibles pour l'atome d'azote, d'un côté ou de l'autre du plan contenant les atomes d'hydrogène. On se restreint dans cet exercice à ces deux états, notés $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$.

1. On suppose que $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ sont des états stationnaires du hamiltonien, d'énergie U_0 . Ecrire le hamiltonien développé sur la base des opérateurs $(|\phi_i\rangle\langle\phi_j|)_{i,j=1,2}$.
2. Ces deux états sont en fait couplés par effet tunnel, si bien que le hamiltonien s'écrit, dans la base $(|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle)$,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} U_0 & -V \\ -V & U_0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } V \in \mathbb{R}_+$$

Calculer les états stationnaires $|g\rangle$ (état fondamental) et $|e\rangle$ (état excité) de ce hamiltonien. Sont-ils toujours dégénérés ?

3. Les états $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ possèdent un moment dipolaire non nul, respectivement égal à d et $-d$ selon la direction Oz perpendiculaire au plan des atomes d'hydrogène. Plus précisément, on définit un opérateur moment dipolaire par

$$\hat{d} = d|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - d|\phi_2\rangle\langle\phi_2|.$$

Quel est le moment dipolaire de $|g\rangle$ et $|e\rangle$?

4. On plonge une molécule d'ammoniac dans un champ électrique de norme E , orienté selon Oz . L'interaction entre la molécule et le champ électrique est décrite par un terme supplémentaire $-\hat{d}E$ dans le hamiltonien. Calculer les nouvelles énergies propres pour toutes les valeurs de E , ainsi que les états stationnaires et leur moment dipolaire dans les limites $dE \ll V$ et $dE \gg V$. Quelle est la polarisabilité de l'état fondamental ?