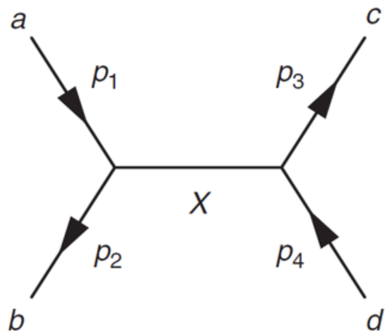
# Physique des particules – L3

# TD 3

## Exercice 1




Représenter les deux chronologies possibles pour l'évènement décrit par le diagramme de Feynman ci-dessus. Appliquer le même raisonnement qu'en cours pour calculer l'élément de matrice invariant de Lorentz associé à ce diagramme. [1]

## Exercice 2

1. En utilisant les relations de commutation entre les opérateurs position et impulsion, montrer que
$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = \mathrm{i}\hat{L}_z\,, \quad \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = \mathrm{i}\hat{L}_x\,, \quad \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = \mathrm{i}\hat{L}_y\,. \tag{1}$$
2. En déduire
$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_x\right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_y\right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_z\right] = 0\,. \tag{2}$$
3. Montrer que, si l'on pose $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$, on a
$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hat{L}_\pm\,, \quad \left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hat{L}_z\,. \tag{3}$$
4. Montrer que
$$\hat{L}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z + \hat{L}_z^2\,. \tag{4}$$

1. Cet exercice est adapté de l'exercice 5.1 du livre *Modern Particle Physics* de Mark Thomson, la figure correspond à la figure 5.5. Les exercices 2 et 4 du présent TD sont adaptés respectivement des exercices 2.15 et 2.16 du même ouvrage.

# Exercice 3 : Représentations irréductibles de dimension finie sur $\mathbb{C}$ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Soit $\{h, e, f\}$ une base d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ de dimension 3. On définit une opération bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ que l'on nomme crochet de Lie ou commutateur et que l'on note $[\cdot,\cdot]$ par :

$$[h,e] = 2e\,, \quad [h,f] = -2f\,, \quad [e,f] = h \tag{5}$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathfrak{g}^2, \quad [x,y] = -[y,x]\ . \tag{6}$$

On peut montrer que le crochet de Lie ainsi défini vérifie

$$\forall (x,y,z) \in \mathfrak{g}^3, \quad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0\,. \tag{7}$$

Un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire vérifiant (6) et (7) est appelé algèbre de Lie. On s'intéresse ici à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
On suppose qu'il existe un autre $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V$ de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et une application linéaire $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ qui vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathfrak{g}^2, \quad \phi([x,y]) = \phi(x)\circ\phi(y) - \phi(y)\circ\phi(x)\ . \tag{8}$$

Un tel couple $(V,\phi)$ est appelé représentation de dimension $p$ de $\mathfrak{g}$. On suppose enfin que la représentation est irréductible : si $W$ est un sous-espace vectoriel de $V$ invariant sous $\phi$ (i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}, \phi(x)(W) \subset W$) alors $W = \{0\}$ ou $W = V$.

1. Soit $v \in V$ un vecteur propre pour $\phi(h)$ : $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \phi(h)(v) = \lambda v$. Montrer que, s'ils sont non nuls, $\phi(e)(v)$ et $\phi(f)(v)$ sont des vecteurs propres de $\phi(h)$ et déterminer les valeurs propres associées.
2. Montrer qu'il existe un vecteur propre $v_0$ pour $\phi(h)$ (valeur propre $\lambda$) tel que $\phi(f)(v_0) = 0$ et qu'il existe un entier $n \leqslant p-1$ tel que $\phi(e)^{(n+1)}(v_0) = 0$ mais $\phi(e)^{(n)}(v_0) \neq 0$.
   Pour $k \in \{0, \cdots, n\}$ on pose $v_k = \phi(e)^{(k)}(v_0)$.
3. Montrer que
$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \phi(f)(v_k) = k(1-\lambda-k)v_{k-1}\,. \tag{9}$$
4. En déduire que $n = p-1$.
5. Calculer $\lambda$.
6. Montrer que
$$\phi(f)\circ\phi(e) + \frac{\phi(h)}{2} + \frac{\phi(h)^{(2)}}{4} = \frac{(p-1)(p+1)}{4}\,\mathrm{Id}_V\ . \tag{10}$$

   En mécanique quantique, des représentations de cette algèbre de Lie apparaissent naturellement lorsque l'on s'intéresse au moment angulaire d'une particule. Le spin $l \in \mathbb{N}/2$ est alors défini par $p = 2l+1$.
7. Expliciter les éléments de $\mathfrak{g}$ auxquels correspondent $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{L}_+, \hat{L}_-$.

8. Trouver des coefficients $\{c_k \in \mathbb{C}^* | 0 \leqslant k \leqslant 2l\}$ tels que, si l'on définit, pour $m \in \{-l, -l+1, \cdots, l\}$, $|l, m\rangle = c_{l+m} v_{l+m} \in V$, on ait

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, |l, m+1\rangle \ , \tag{11}$$

$$\hat{L}_- |l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - (m-1)m}\, |l, m-1\rangle \ . \tag{12}$$

9. Quelle est l'interprétation de l'égalité (10) en mécanique quantique ?

# Exercice 4

On rappelle l'expression des matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{13}$$

Calculer $[\sigma_i, \sigma_j]$ et en déduire qu'elles permettent de définir une représentation de spin 1/2 de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.