

TD1 Introduction aux Systèmes Dynamiques, ENS

ELEMENTS DE CORRECTION

Dynamique et Modélisation, 2020

8 février 2020

1 Tube en rotations et illusion d'optique

1. Trajectoire des deux marqueurs si $\omega_z = 0$

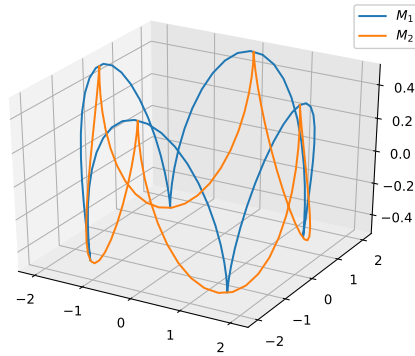
$$M_1 = \begin{cases} x &= L/2 \\ y &= R \sin(\omega_s t) \\ z &= R \cos(\omega_s t) \end{cases}, \quad M_2 = \begin{cases} x &= -L/2 \\ y &= R \sin(\omega_s t) \\ z &= R \cos(\omega_s t) \end{cases}$$

2. Trajectoire des deux marqueurs si $\omega_z \neq 0$

$$M_1 = \begin{cases} x &= L/2 \cos(\omega_z t) - R \sin(\omega_s t) \sin(\omega_z t) \\ y &= R \sin(\omega_s t) \cos(\omega_z t) + L/2 \sin(\omega_z t) \\ z &= R \cos(\omega_s t) \end{cases}$$

$$M_2 = \begin{cases} x &= -L/2 \cos(\omega_z t) - R \sin(\omega_s t) \sin(\omega_z t) \\ y &= R \sin(\omega_s t) \cos(\omega_z t) - L/2 \sin(\omega_z t) \\ z &= R \cos(\omega_s t) \end{cases}$$

3. Représentation :

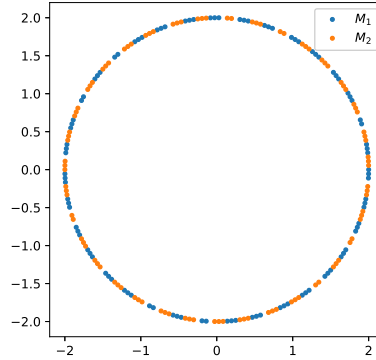


4. Systèmes dynamiques :

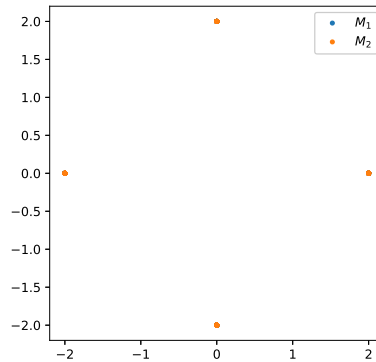
$$\dot{X}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z L/2 \sin(\omega_z \tau) - R \omega_s \cos(\omega_s \tau) \sin(\omega_z \tau) - R \omega_z \sin(\omega_s \tau) \cos(\omega_z \tau) \\ R \omega_s \cos(\omega_s \tau) \cos(\omega_z \tau) - R \omega_z \sin(\omega_s \tau) \sin(\omega_z \tau) + L/2 \omega_z \cos(\omega_z \tau) \\ -R \omega_s \sin(\omega_s \tau) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_z L/2 \sin(\omega_z \tau) - R \omega_s \cos(\omega_s \tau) \sin(\omega_z \tau) - R \omega_z \sin(\omega_s \tau) \cos(\omega_z \tau) \\ R \omega_s \cos(\omega_s \tau) \cos(\omega_z \tau) - R \omega_z \sin(\omega_s \tau) \sin(\omega_z \tau) - L/2 \omega_z \cos(\omega_z \tau) \\ -R \omega_s \sin(\omega_s \tau) \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Représentation graphique :
Un cas quasi-periodique :



Le cas sans glissement $\omega_s = 4\omega_z$:

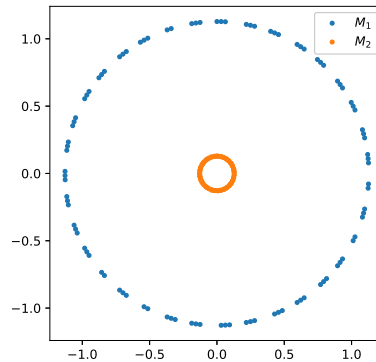


6. On voit 4 fois par tour exactement chaque marqueur si $\omega_s = 4\omega_z$ (sans condition sur L et R).

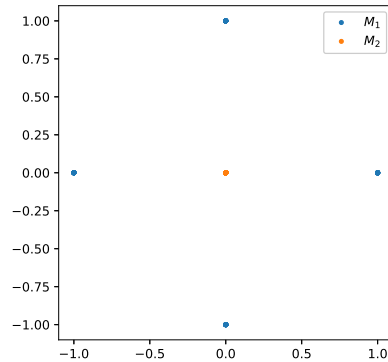
Cela correspond à une condition de non-glissement pour le marqueur qui tourne *dans le sens de la marche*, si $R = 8L$, i.e. le diamètre du tube vaut 4 fois sa longueur. Le contact avec la table se fait essentiellement sur cette extrémité pour une raison que nous verrons dans la suite du cours...

7. Représentation de la section de Poincaré pour (\dot{x}, \dot{y}) .

Un cas quasi-periodique :



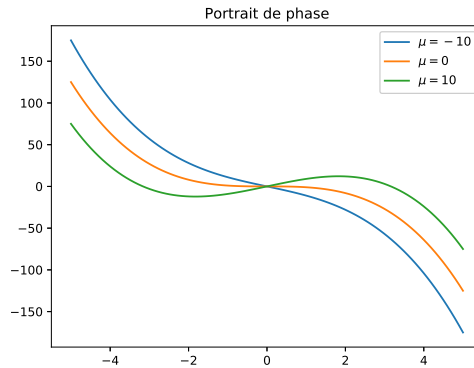
Le cas sans glissement $\omega_s = 4\omega_z$:



8. On ne voit qu'un seul des deux marqueurs car l'autre passe trop vite. Celui que l'on voit a une vitesse nulle lorsqu'il passe par $z = R$, car il s'agit d'un point de rebroussement.¹

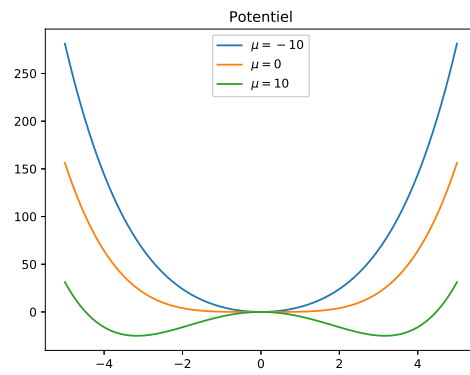
2 Le flambage d'une poutre et ralentissement critique

1. Points fixes :
 $X = 0$ pour $\mu \leq 0$
 $X = (-\sqrt{\mu}, 0, \sqrt{\mu})$ pour $\mu > 0$
 Il s'agit d'une bifurcation fourche !
2. Stabilité :
 $X = 0$ instable pour $\mu > 0$, les autres sont stables.
3. Représentation du portrait de phase :



4. Représentation du potentiel :

1. Lorsque une courbe non C^∞ en un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (i.e. n'est pas une sous-variété) est parcourue par un paramétrage C^∞ , la vitesse en M_0 est nécessairement nulle. C'est ce qui permet de dire a priori que la vitesse aux points de rebroussement est nulle.



5. Ralentissement critique :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -X^3, \\ \frac{dX}{X^3} &= -dt, \quad (\text{séparation des variables}) \\ \frac{-1}{2X^2} &= -t + \text{cste} \\ \frac{1}{2X^2} &= t + C \\ 2X^2 &= \frac{1}{t + C}, \quad \text{avec } C = (2X(0))^{-2}.\end{aligned}$$

Il s'agit d'une décroissance très lente. On parle de ralentissement critique.

Par exemple, pour $X(0) = 10$, on obtient $X(10) \simeq 0.22$.

Si on compare avec la dynamique purement linéaire avec $\mu = -1$, i.e. l'équation $\dot{X} = -X$ et la même condition initiale, on aurait eu $X(t = 10) \simeq 4.54 \cdot 10^{-4}$.