

Master 1 de Physique, voie Physique Fondamentale

2017-2018

Mécanique des fluides



Frédéric Moisy

Laboratoire FAST, Université Paris-Sud.

Dernière mise à jour : 18 octobre 2019

Table des matières

1 Cinématique des fluides	7
1.1 Descriptions Lagrangienne et Eulérienne	7
1.1.1 Les deux points de vue	7
1.1.2 Une parenthèse : Notion de "particule fluide"	8
1.1.3 Lien entre les descriptions Eulérienne et Lagrangienne	9
1.1.4 Dérivée Lagrangienne et Eulérienne	10
1.2 Trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission	11
1.2.1 Lignes de courant	11
1.2.2 Lignes d'émission, lignes de temps	12
1.3 Débit et fonction de courant	15
1.3.1 Débit massique et débit volumique	15
1.3.2 Tube de courant et conservation du débit volumique	15
1.3.3 Fonction de courant	16
1.3.4 Lien entre débit et géométrie des lignes de courant à 2 dimensions	17
1.4 Vorticité	18
2 Equations bilans	21
2.1 Volume de contrôle	21
2.2 Théorème de transport	22
2.2.1 Transport d'un champ scalaire	22
2.2.2 Généralisation au transport d'un champ vectoriel	23
2.3 Conservation de la masse	24
2.3.1 Expression globale	24
2.3.2 Expression locale	24
2.3.3 Fluide incompressible	25
2.4 Quantité de mouvement	25
2.4.1 Principe Fondamental de la Dynamique	25
2.4.2 Forces agissant sur le système	26
2.5 Applications	27
2.5.1 Variation du diamètre d'un jet débouchant	27
2.5.2 Le tuyau convergent	29
2.5.3 Traînée et portance sur une aile	30
2.5.4 Pour aller plus loin	31
3 Fluides parfaits, équation d'Euler	33
3.1 Equation d'Euler	33
3.1.1 Forme intégrale	33
3.1.2 Forme locale	34
3.2 Conditions aux limites	35
3.2.1 Conditions aux limites cinématiques	35
3.2.2 Conditions aux limites dynamiques	36
3.3 Ecoulements potentiels	37

3.3.1	Potentiel de vitesse	37
3.3.2	Circulation	38
3.3.3	Potentiels de vitesse de quelques écoulements simples	39
3.3.4	Pour aller au-delà	40
3.4	Théorème(s) de Bernoulli	41
3.4.1	Cas des écoulements stationnaires	41
3.4.2	Jet d'eau libre	43
3.4.3	L'effet Venturi	43
3.4.4	Tube de Pitot	44
3.4.5	Cas des écoulements instationnaires mais irrotationnels	45
3.4.6	Pertes de charge	46
3.4.7	Cavitation	46
4	Fluides visqueux, équation de Navier-Stokes	49
4.1	Manifestation de la viscosité	49
4.1.1	Transfert diffusif de quantité de mouvement	49
4.1.2	Origine physique de la viscosité	51
4.1.3	Temps de diffusion	51
4.2	Tenseur de gradient de vitesse	52
4.2.1	Tenseur des taux de déformation	53
4.2.2	Tenseur des taux de rotation	54
4.2.3	Cas d'un écoulement de cisaillement plan	56
4.2.4	Pour s'entraîner	56
4.3	Tenseur des contraintes visqueuses	57
4.3.1	Définition	57
4.3.2	Pression et contrainte visqueuse	58
4.4	Relation contrainte-déformation	59
4.5	Equation de Navier-Stokes	60
4.5.1	Principe Fondamental de la Dynamique pour un fluide visqueux	60
4.5.2	Dérivation de l'équation de Navier-Stokes	61
4.5.3	Conditions aux limites	62
4.5.4	Viscosité et dissipation d'énergie	63
4.6	Dynamique de la vorticité	64
4.6.1	Equation d'évolution de la vorticité	64
4.6.2	Illustration : le tourbillon de vidange d'un lavabo	64
5	Ecoulements laminaires	67
5.1	Qu'est-ce qu'un écoulement laminaire ?	67
5.1.1	Nombre de Reynolds	67
5.1.2	Illustration : sillage derrière un cylindre	68
5.1.3	Equation de Stokes	69
5.2	Force de traînée à petit nombre de Reynolds	69
5.3	Ecoulements parallèles	71
5.3.1	Ecoulement de Couette plan	71
5.3.2	Ecoulement de Poiseuille plan	72
5.3.3	Milieux poreux	73
5.4	Ecoulements quasi-parallèles, lubrification	74
6	Couches limites	77
6.1	Couche limite laminaire : analyse qualitative	78
6.1.1	Longueur d'entrée	79
6.1.2	Vorticité dans une couche limite	79
6.2	Couche limite laminaire : solution de Blasius	80
6.2.1	Force de frottement	81

6.2.2	Fluide parfait ou écoulement turbulent ?	82
6.3	Décollement de couche limite	83
A	Analyse dimensionnelle	85
A.1	Théorème π ou de Buckingham	85
A.2	Exemple de la traînée d'une sphère	87
A.3	Période des oscillations d'un pendule pesant	89
B	Hydrostatique	91
B.1	Équation locale de l'hydrostatique	91
B.1.1	Unités	91
B.2	Équilibre de la pression dans le champ de pesanteur	92
B.2.1	Cas d'un fluide de masse volumique constante	92
B.2.2	Quelques applications	93
B.2.3	Cas d'un fluide de masse volumique variable	94
B.2.4	Cas d'une atmosphère adiabatique	95
B.3	Équilibre de la pression dans un référentiel non galiléen	96
B.4	La poussée d'Archimète	97
B.4.1	Le poisson et le ludion	97
C	Techniques expérimentales	99
C.1	Tube de Pitot	99
C.2	Anémométrie à fil chaud	99
C.3	Anémométrie Laser Doppler	101
C.4	Vélocimétrie par Images de Particules	101
D	Quelques éléments sur les tenseurs	103
D.1	Qu'est-ce qu'un tenseur ?	103
D.1.1	Qu'est-ce qu'un vecteur ?	103
D.1.2	Définition d'un tenseur	104
D.2	Produit scalaire et produit tensoriel	104
D.2.1	Indices muets et libres	105
D.2.2	Opérations sur les matrices	105
D.3	Deux tenseurs importants	106
D.3.1	Symbole de Kronecker	106
D.3.2	Contraction, trace	106
D.3.3	Le tenseur de Levi-Civita	106
D.3.4	Quelques identités pratiques	107
D.4	Opérateurs différentiels	107
D.4.1	Gradient	107
D.4.2	Divergence	107
D.4.3	Laplacien	107
D.4.4	Rotationnel	108
D.4.5	Quelques relations utiles	108

Chapitre 1

Cinématique des fluides

A l'échelle macroscopique, les gaz, les liquides et les solides peuvent être décrits comme des *milieux continus*. On peut distinguer deux grandes catégories de milieux continus : les *solides*, pour lesquels les contraintes (forces appliquées) induisent des déformations d'amplitude finie (dans la limite des déformations élastiques), et les *fluides* (gaz ou liquides), pour lesquels les contraintes induisent des déformations qui se poursuivent indéfiniment dans le temps. Ainsi, la mécanique des fluides s'applique à la fois aux liquides ou aux gaz.

Ce premier chapitre traite de la *cinématique des fluides*, qui décrit la structure géométrique (la forme) d'un écoulement, liée essentiellement à la propriété de conservation de la masse. On introduira dans ce chapitre certains outils pour caractériser cette géométrie : trajectoires, lignes de courant, fonction de courant, vorticité... Mais nous ne chercherons pas à déterminer ce qui a créé cet écoulement, ni comment il va évoluer dans le temps : ces aspects relèvent de la *dynamique*, qui fera l'objet des chapitres suivants. En bref, la *cinématique* décrit comment ça coule, tandis que la *dynamique* décrit pourquoi ça coule.

1.1 Descriptions Lagrangienne et Eulérienne

1.1.1 Les deux points de vue

En mécanique du point, le point de vue naturel pour décrire les différentes quantités physiques associées à une masse ponctuelle (sa position, sa vitesse, son accélération) est le **point de vue Lagrangien** : ces quantités physiques sont des fonctions du temps uniquement.

En mécanique des fluides, cette description Lagrangienne reste évidemment possible : on peut très bien suivre la position $\vec{R}(t)$ d'une particule fluide donnée ("étiquetée"), connaissant sa position initiale \vec{R}_0 (par exemple au temps $t = 0$). Cette notion de quantité physique associée à une particule fluide donnée se généralise évidemment à toute autre quantité, comme la température, la pression, la densité etc. Si cette information *Lagrangienne* est utile dans certains cas, comme par exemple pour l'étude de la dispersion d'un traceur (colorant, polluant...), elle est en général assez difficile à manipuler par les équations.

Nous verrons dans la suite que la mise en équation de la mécanique des fluides est beaucoup plus naturelle selon le **point de vue Eulérien** : plutôt que de suivre une particule fluide donnée, on se place en un point *fixe* de l'espace, disons $\vec{r} = (x, y, z)$ dans une base Cartésienne, et l'on regarde l'évolution temporelle $A(t)$ des quantités physiques considérées en ce point fixe (A peut être la pression, la température...). La fonction temporelle $A(t)$ ainsi obtenue est évidemment différente pour chaque point considéré \vec{r} : elle est décrite par un *champ* $A(\vec{r}, t)$, fonction de l'espace et du temps.

Cette notion de **champ Eulérien** est au cœur de la *mécanique des milieux continus*, qui décrit à la fois la mécanique des solides déformables et la mécanique des fluides. Le champ $A(\vec{r}, t)$ peut être scalaire (tenseur de rang 0), vectoriel (tenseur de rang 1), ou plus généralement tensoriel de

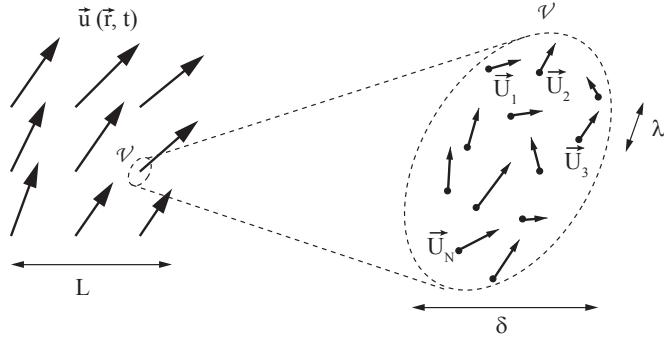


FIGURE 1.1 – Notion de particules fluides, et définition des échelles telles que $\lambda \ll \delta \ll L$. Le champ de vitesse continu $\vec{u}(\vec{r}, t)$ (à gauche) est la moyenne macroscopique des vitesses \vec{U}_α des N molécules contenues dans la particule fluide (à droite).

rang quelconque (cf. annexe D).

Quelques exemples de **champs Eulériens** utilisés en mécanique des fluides :

- Champ scalaire : pression $p(\vec{r}, t)$; température $T(\vec{r}, t)$; masse volumique (ou densité) $\rho(\vec{r}, t)$; concentration d'une espèce chimique $C(\vec{r}, t)$...
- Champ vectoriel : Vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$; vorticité $\vec{\omega}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$; gradient d'un champ scalaire, par exemple $\vec{\nabla} p$, $\vec{\nabla} T$...; champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ pour un fluide conducteur (magnétohydrodynamique)...
- Champ tensoriel de rang > 1 : gradient d'un champ vectoriel, par exemple $G_{ij}(\vec{r}, t) = \partial u_i / \partial x_j$, que l'on peut représenter comme une matrice d'indices (i, j) en chaque point \vec{r} et à chaque instant t .

D'une manière générale, on peut montrer qu'un fluide peut être entièrement décrit par la donnée de 3 champs : le champ de vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$, ainsi que 2 champs scalaires décrivant les variables thermodynamiques, par exemple la pression $p(\vec{r}, t)$ et la densité $\rho(\vec{r}, t)$ (les autres variables thermodynamiques, comme la température $T(\vec{r}, t)$, se déduisent des 2 premières par les relations d'état du fluide).

Le plus souvent, nous ferons dans ce cours l'hypothèse de densité constante, $\rho = cste$ (fluide dit *incompressible*), et nous nous restreindrons ainsi aux deux seuls champs (\vec{u}, p). Cette approximation est valable lorsque la vitesse du fluide est très inférieure à la vitesse du son (voir Section 2.3.3).

1.1.2 Une parenthèse : Notion de "particule fluide"

Dans ce qui précède, la notion de *champ* suppose implicitement que le milieu est continu. Évidemment, une telle description continue ne s'applique plus à l'échelle microscopique. Afin de définir rigoureusement dans quelle limite s'applique cette description locale, il est nécessaire d'ouvrir ici une parenthèse pour introduire le concept de *particule fluide*.

Une *particule fluide* est un petit volume \mathcal{V} contenant un nombre fixe N de constituants microscopiques du milieu considéré — des molécules, pour fixer les idées (cf. figure 1.1). Ce volume \mathcal{V} doit être suffisamment grand pour qu'il soit possible d'y calculer une moyenne sur l'ensemble des constituants microscopiques. En revanche, il doit être suffisamment petit pour que les propriétés physiques puissent y être considérées comme homogènes.

Plus spécifiquement, la taille caractéristique $\delta \simeq \mathcal{V}^{1/3}$ de ce petit volume \mathcal{V} doit être telle que

$$\lambda \ll \delta \ll L,$$

où λ est le libre parcours moyen et L l'échelle caractéristique des inhomogénéités spatiales du milieu (δ est parfois appelée "échelle mésoscopique"). En effet, si l'on choisissait $\delta \ll \lambda$, alors des

molécules pourraient traverser le volume \mathcal{V} sans interagir avec lui : un équilibre thermodynamique local ne pourrait pas être atteint dans le volume \mathcal{V} .

On définit la densité locale du fluide par $\rho(\vec{r}, t) = M/\mathcal{V}$, où $M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$ est la masse des molécules $\alpha = 1..N$ dans le volume \mathcal{V} . Au cours de son mouvement, la surface qui délimite la particule fluide pourra se déformer, son volume pourra augmenter ou diminuer, mais le nombre de molécule N , et donc la masse M , restera constante. A noter que, dans le cas d'un fluide incompressible, la conservation de la masse entraîne également la conservation du volume \mathcal{V} .

On peut définir les différentes grandeurs macroscopiques comme moyennes des grandeurs microscopiques dans le volume \mathcal{V} . Par exemple, en notant $\vec{U}_{\alpha}(t)$ la vitesse des molécules $\alpha = 1..N$, la quantité de mouvement de la particule fluide dans le volume \mathcal{V} est donnée par

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{U}_{\alpha}(t). \quad (1.1)$$

Les vitesses \vec{U}_{α} "contiennent" ainsi le déplacement moyen de la particule fluide ainsi que les fluctuations thermiques de chaque molécule α . En notant $\vec{\mathcal{P}} = M\vec{u}$, ceci définit simplement la vitesse locale $\vec{u}(\vec{r}, t)$ de la particule fluide comme la moyenne (pondérée) de la vitesse de chaque molécule dans le volume \mathcal{V} . A noter qu'en général l'ordre de grandeur de la moyenne \vec{u} est très petit devant les fluctuations \vec{U}_{α} : la moyenne des fluctuations est "presque 0", le petit écart par rapport à 0 étant précisément la vitesse \vec{u} de la particule fluide.

Dans un liquide, le libre parcours moyen est de l'ordre de la distance entre 2 molécules, soit $\lambda \simeq 0.3$ nm : on voit que l'approximation de milieu continu est amplement satisfaisante, même pour des écoulements à l'échelle cellulaire ($L \simeq 1 - 10 \mu\text{m}$ pour une bactérie, $L \simeq 0.1 \mu\text{m}$ pour un virus). En revanche, dans un gaz (dans les conditions usuelles de température et de pression) le libre parcours moyen λ est de l'ordre de 0.1 à 1 μm , bien supérieur à la distance entre 2 molécules (de l'ordre de 3 nm) : l'approximation de milieu continu sera donc justifiée pour des écoulements de taille caractéristique $L > 10 \mu\text{m}$ seulement. Dans de telles conditions, notre "particule fluide" de volume $\mathcal{V} \simeq 1 \mu\text{m}^3$ contiendra $N \simeq 10^7$ à 10^{10} molécules, ce qui assure que le calcul de la moyenne (1.1) est défini sans ambiguïté. Mais si l'on s'intéressait à des écoulements gazeux dans des canaux de l'ordre du μm , ou bien à des gaz très dilués (tels que $\lambda \gg 1 \mu\text{m}$), cette description continue ne s'appliquera plus, et il faudra adopter une approche de mécanique statistique.

Maintenant que cette notion de *particule fluide* est rigoureusement définie, on pourra en faire abstraction dans la suite, et considérer en pratique le fluide comme étant un milieu continu. Ceci permet d'utiliser simplement les opérateurs de dérivation spatiale. Par exemple, si le "gradient selon x " du champ A est défini comme la différence finie $(A(x + \Delta x) - A(x))/\Delta x$ lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, cette limite devra être comprise en fait comme $\Delta x \rightarrow \delta$. On conviendra donc de noter dans toute la suite :

$$\frac{\partial A}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow \delta} \frac{A(x + \Delta x, y, z, t) - A(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

(idem selon y et z), où $A(\vec{r}, t)$ peut être un champ scalaire, vectoriel, ou tensoriel d'ordre quelconque.

1.1.3 Lien entre les descriptions Eulérienne et Lagrangienne

Le lien entre les descriptions Eulérienne et Lagrangienne est complexe en général. En un point donné et à un instant donné, la vitesse Lagrangienne $d\vec{R}/dt$ (vitesse d'une particule fluide de position $\vec{R}(t)$ que l'on suit dans le temps) doit coïncider avec la vitesse Eulérienne (champ de vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$ évalué au point $\vec{r} = \vec{R}(t)$). On a donc :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{u}(\vec{r} = \vec{R}(t), t). \quad (1.2)$$

Cette relation semble triviale, mais elle est subtile. Considérons par exemple un champ de vitesse Eulérien **stationnaire** (c'est-à-dire tel que $\partial \vec{u} / \partial t = \vec{0}$) mais **inhomogène** (tel que \vec{u} dépend

de \vec{r}). À un instant $t + dt$, la particule fluide dont on suit la trajectoire (Lagrangienne) aura atteint un nouveau point $\vec{r} + d\vec{r}$, et "verra" donc en ce point une nouvelle vitesse Eulérienne $\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) \neq \vec{u}(\vec{r})$. Ainsi, la vitesse Lagrangienne $d\vec{R}/dt$ varie dans le temps, alors que la particule fluide est transportée par un champ de vitesse Eulérien qui lui ne varie pas dans le temps. Une vitesse Lagrangienne dépendante du temps peut donc survenir à partir d'un champ de vitesse Eulérien **stationnaire** mais **inhomogène**.

Exemple : Considérons le champ de vitesse Eulérien d'un écoulement tournant en bloc à vitesse angulaire Ω autour de l'axe z (on parle d'écoulement en "rotation solide"). Le champ de vitesse Eulérien s'écrit $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$, avec $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$, et l'on a bien $\partial \vec{u} / \partial t = 0$. Une particule fluide, initialement en position $\vec{R}(0) = R_0 \vec{e}_x$, va donc décrire un cercle de rayon R_0 à la vitesse ΩR_0 . Sa vitesse Lagrangienne $d\vec{R}/dt = \Omega R_0(-\sin(\Omega t) \vec{e}_x + \cos(\Omega t) \vec{e}_y)$, et son accélération Lagrangienne $d^2\vec{R}/dt^2 = -\Omega^2 R_0(\cos(\Omega t) \vec{e}_x + \sin(\Omega t) \vec{e}_y)$, dépendent donc bien du temps, bien que l'on ait $\partial \vec{u} / \partial t = 0$.

Exercice : Dans un tuyau de section constante rempli d'eau (supposée incompressible), on augmente le débit linéairement dans le temps. Le champ de vitesse en tout point \vec{r} du tuyau est donné par $\vec{u}(\vec{r}, t) = u_x(t) \vec{e}_x = \gamma t \vec{e}_x$. Trouver la trajectoire d'une particule fluide située au centre du tuyau et partant de $x = 0$ à $t = 0$.

1.1.4 Dérivée Lagrangienne et Eulérienne

a) pour un champ scalaire

Nous allons décrire plus systématiquement ici le lien entre dérivée Lagrangienne et Eulérienne. Il s'agit de décrire de manière générale la variation temporelle d'une quantité physique "attachée" à une particule fluide en mouvement. Pour fixer les idées, nous pouvons considérer la température T .

La variation dT/dt le long d'une trajectoire peut avoir 2 origines : la variation de température en un point donné, et la variation provenant des inhomogénéités spatiales de température explorées par la particule au cours de son déplacement. Ces 2 origines apparaissent lorsque l'on calcule la différentielle dT vis-à-vis de t et de $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz.$$

En divisant par dt , et en utilisant $u_x = dx/dt$ etc., on obtient

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}.$$

En introduisant l'opérateur scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.3)$$

on peut noter de façon compacte

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T. \quad (1.4)$$

Le terme dT/dt est la **dérivée Lagrangienne** (ou encore **dérivée totale**, ou **dérivée particulière**), et décrit l'évolution temporelle de la quantité T le long de la trajectoire (Lagrangienne) d'une particule fluide. Le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T$ est la **dérivée convective**; c'est le seul terme qui subsiste dans le cas d'un champ stationnaire mais inhomogène. Cette dérivée totale joue un rôle clef en mécanique des fluides, et intervient dans toutes les équations de transport.

Note : La dérivée Lagrangienne dT/dt est parfois aussi notée DT/Dt , afin de bien marquer la différence avec la dérivée partielle (Eulérienne) $\partial T/\partial t$ (et dans ce cas, la notation d/dt est réservée aux fonctions d'une seule variable). Nous gardons la notation d/dt dans ce cours.

Exemple : Un voyageur part le matin vers le sud. Il constate qu'il fait de plus en plus chaud : $dT/dt > 0$. S'il voyage à pied ($|\vec{u}|$ petit), il pourra interpréter cette augmentation de la température comme un effet local : le soleil monte, et $dT/dt \simeq \partial T/\partial t$. En revanche, s'il voyage très vite ($|\vec{u}|$ grand), il devra plutôt attribuer cette augmentation de la température au fait qu'il atteint rapidement des latitudes plus clémentes, et donc $dT/dt \simeq (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T$! Ainsi, l'Eq. (1.4) est la combinaison de ces 2 contributions. Pour un Paris-Marseille en train (non climatisé...) ces 2 contributions sont du même ordre de grandeur.

b) pour un champ vectoriel

Notre raisonnement précédent s'est effectué sur une quantité scalaire, la température T . Il est également possible de l'appliquer pour une quantité vectorielle, en raisonnant indépendamment pour chaque composante. Ainsi, pour la vitesse \vec{u} , on a

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \quad (1.5)$$

(attention à la position des parenthèses et du produit scalaire!)

Si l'on décompose les 3 termes de l'opérateur $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$, et que l'on projette (1.5) successivement sur les 3 axes, cette équation vectorielle devient

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_x \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_y \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_z \end{aligned}$$

Ce terme interviendra dans les chapitres suivants dans l'équation d'Euler (fluides parfaits, sans viscosité) et dans l'équation de Navier-Stokes (fluides visqueux).

1.2 Trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission

1.2.1 Lignes de courant

Pour tout champ vectoriel, on peut définir les *lignes de champ* associées, tangentes en tout point au champ vectoriel. Pour le champ de vitesse (Eulérien) $\vec{u}(\vec{r}, t)$ d'un écoulement, ces lignes de champ sont appelées *lignes de courant* (cf. figure 1.2).

Une ligne de courant, à un instant donné, est définie telles qu'en tout point, le déplacement élémentaire $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ le long de cette ligne doit être colinéaire à $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Cette colinéarité peut s'exprimer sous la forme $d\vec{r} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, ce qui donne les égalités (vérifiez-le) :

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (1.6)$$

On obtient ainsi 2 équations différentielles à 3D, ou 1 équation différentielle à 2D. Les lignes de courant s'obtiennent alors en intégrant cette (ces) équation(s) étant donné un jeu de conditions initiales $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Les lignes de courant ne peuvent jamais se croiser, sauf en un *point de stagnation*, point en lequel on a $\vec{u} = \vec{0}$ (il y a par exemple 2 points de stagnation sur la figure 1.2). En effet, la vitesse

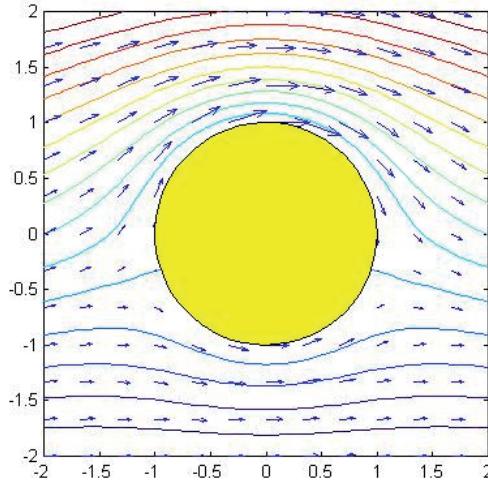


FIGURE 1.2 – Exemple de champ de vitesse eulérien (champ de vecteur, représenté ici sur un quadrillage régulier) et lignes de courant associées (tangentes en tout point aux vecteurs vitesse). L’écoulement représenté correspond à l’écoulement stationnaire 2D autour d’un cylindre en rotation. Les lignes de courant correspondent également aux trajectoires des particules (c’est une conséquence de la stationnarité).

devant être tangente à chaque ligne de courant, un $\vec{u} \neq \vec{0}$ ne pourrait pas être défini au croisement de 2 lignes.

Exercice : Calculer et dessiner les lignes de courant des écoulements 2D stationnaires suivants :

1. Cisaillement plan, $\vec{u}(\vec{r}, t) = Sy\vec{e}_x$.
2. Rotation solide, $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$, avec $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$.
3. Point hyperbolique, tel que $u_x = \gamma x$, $u_y = -\gamma y$.

Il est important de souligner qu’une ligne de courant est obtenue à un instant t donné : elle dépend de l’ensemble du champ de vitesse figé à cet instant. Si, à un instant ultérieur $t + dt$, le champ de vitesse \vec{u} change, c’est toute la ligne de courant, en amont comme en aval, qui évolue.

Propriété : si l’écoulement est stationnaire, les trajectoires des particules sont les lignes de courant. En effet, l’équation différentielle pour la trajectoire d’une particule (1.2) montre que la trajectoire est localement tangente à la vitesse *au moment où elle y passe* : $d\vec{R} = \vec{u}(\vec{r} = \vec{R}(t), t)dt$. Ainsi, si \vec{u} est stationnaire, cette équation revient simplement à dire que $d\vec{R}$ est colinéaire à \vec{u} à tout instant, et on retrouve la définition d’une ligne de courant.

Exercice : On considère l’écoulement instationnaire suivant : $(u_x, u_y) = (u_0, kt)$. Tracer les lignes de courant à deux instants différents, et montrer que les trajectoires des particules sont paraboliques.

1.2.2 Lignes d’émission, lignes de temps

En plus des trajectoires de particules et des lignes de courant, on peut citer deux autres méthodes de représentation d’un écoulement :

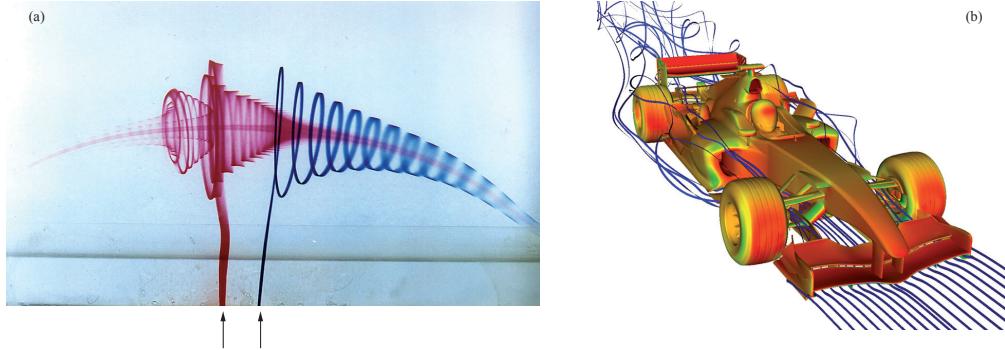


FIGURE 1.3 – Lignes d'émission : (a) réalisées expérimentalement, par injection de deux fins filets de colorants émis continument au voisinage d'un tourbillon (PMMH, ESPCI) ; (b) simulées numériquement, reproduisant l'évolution de filets de colorants émis en amont du véhicule. En amont, l'écoulement est stationnaire, et les lignes d'émission coïncident avec les lignes de courant et les trajectoires des particules. En aval, l'écoulement est instationnaire, et la topologie de ces lignes devient beaucoup plus compliquée.

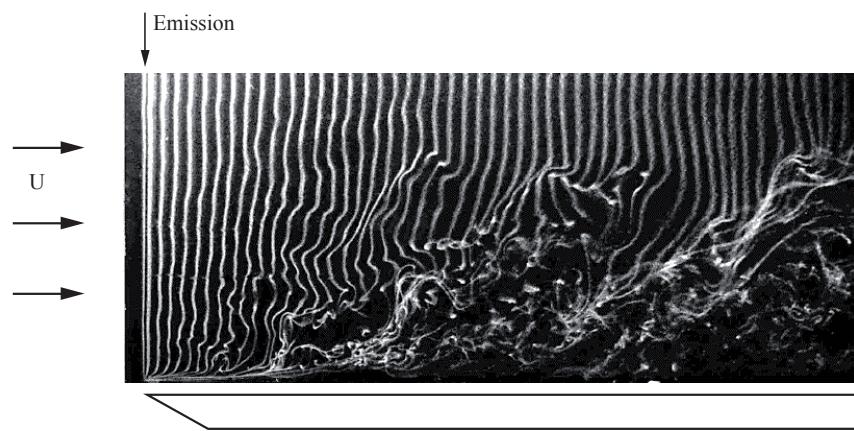


FIGURE 1.4 – Visualisation d'un écoulement de couche limite sur paroi plane par émission de *lignes de temps*. Ce sont des lignes verticales émises périodiquement, dont les particules fluides sont marquées par des micro-bulles, et advectées par l'écoulement (Université de Tokyo).

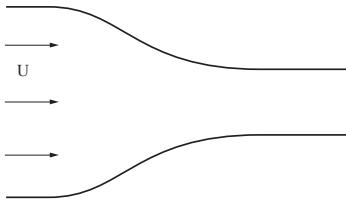
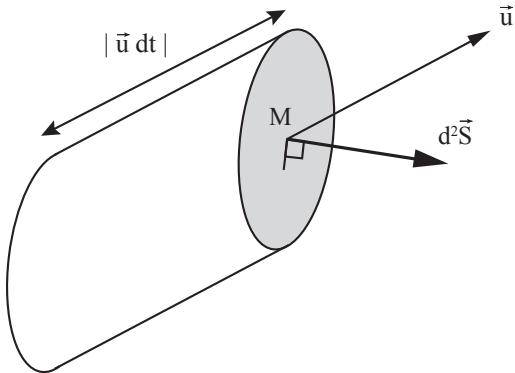


FIGURE 1.5 – Ecoulement uniforme dans une conduite convergente.

FIGURE 1.6 – Le fluide contenu dans le volume infinitésimal $(\vec{u} dt) \cdot d^2 \vec{S}$ va passer à travers la surface élémentaire $d^2 \vec{S}$ pendant le temps dt .

- **Lignes d'émission (streaklines)** : ce sont les lignes formées par la position successive de points émis d'une source fixe. Expérimentalement, ces lignes peuvent être simplement visualisées par l'injection continue d'un colorant en un point fixe de l'écoulement (cf. figure 1.3a). Pour un écoulement stationnaire, les lignes d'émission coïncident avec les lignes de courant et les trajectoires des particules. Mais pour un écoulement instationnaire, leur topologie peut être beaucoup plus compliquée, comme l'illustre la figure 1.3(b).
- **Lignes de temps (timelines)** : elles permettent de visualiser la façon dont se déforme une ligne marquée à un instant initial dans le fluide. La figure 1.4 montre un ensemble de lignes de temps émises périodiquement dans un écoulement de couche limite. Expérimentalement, ces lignes peuvent être émises par électrolyse le long d'un fin fil vertical tendu en amont de l'écoulement : des micro-bulles d'hydrogène sont émises le long du fil puis emportées par l'écoulement.

Dans la suite, nous ferons essentiellement usage des lignes de courant. Il est important de noter que les lignes de courant instantanées ne peuvent pas être visualisées expérimentalement pour un écoulement instationnaire (elles peuvent l'être en revanche à partir de simulations numériques). Cependant, pour un écoulement stationnaire (vitesse indépendante du temps), il suffit d'observer la trajectoire de particules ou les lignes d'émission de colorant pour visualiser ces lignes de courants.

Exercice : Dessiner l'allure des lignes de courant et des lignes de temps dans l'écoulement incompressible stationnaire de la figure 1.5.

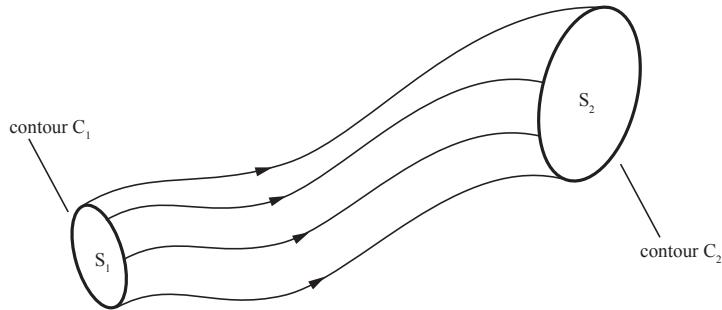


FIGURE 1.7 – Définition d'un tube de courant : l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur le contour C_1 définit un tube de courant. Pour un fluide incompressible, le débit volumique à travers S_1 doit être égal à celui à travers S_2 .

1.3 Débit et fonction de courant

1.3.1 Débit massique et débit volumique

Considérons un petit élément de surface $d^2\vec{S}$ centré en un point M de coordonnée \vec{r} quelconque, et notons $\vec{u}(\vec{r})$ la vitesse du fluide en ce point M (cf. figure 1.6). Pendant un intervalle de temps dt , le fluide contenu dans le petit volume $d^3\tau$ de longueur $|\vec{u} dt|$ va traverser la section $d^2\vec{S}$. Ce volume est égal à $d^3\tau = (\vec{u} dt) \cdot d^2\vec{S}$. Ainsi, la masse $d^3m = \rho d^3\tau = \rho(\vec{u} dt) \cdot d^2\vec{S}$, où $\rho(\vec{r})$ est la masse volumique (ou densité) locale, va franchir la surface pendant le temps dt .

Pour une surface S quelconque, on obtient donc le **débit massique** Q_m à travers la surface S (exprimé en kg s^{-1}) en intégrant le débit massique élémentaire d^3m/dt sur tous les éléments de surface, soit

$$Q_m(t) = \iint_S \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot d^2\vec{S}. \quad (1.7)$$

Par un raisonnement analogue, on peut aussi introduire le **débit volumique** à travers la surface S (exprimé en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$),

$$Q_v(t) = \iint_S \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot d^2\vec{S}. \quad (1.8)$$

Dans le cas particulier d'un fluide iso-densité ($\rho = \text{cste}$), ces 2 débits sont évidemment liés par l'équation

$$Q_m(t) = \rho Q_v(t),$$

et l'on parlera souvent simplement de "débit" (le contexte permettant de déterminer s'il s'agit de Q_m ou de Q_v). Cependant, dans le cas général d'un fluide compressible, on utilisera uniquement le débit massique $Q_m(t)$: en effet, on a vu que pour une particule fluide, c'est la masse qui est conservée et non le volume.

1.3.2 Tube de courant et conservation du débit volumique

Dans le cas particulier d'un fluide incompressible ($\rho = \text{cste}$), il est intéressant d'introduire la notion de **tube de courant** : étant donnée une surface S_1 quelconque, un tube de courant est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur le contour de cette surface S_1 (figure 1.7). Ainsi, toute ligne de courant traversant S_1 reste à l'intérieur du tube. Le volume (et donc ici la masse) de fluide traversant pendant un temps dt n'importe quelle surface S_2 s'appuyant sur ce tube de courant devra être égal au volume de fluide traversant la surface d'entrée S_1 pendant ce même

temps. Ainsi, on a **conservation du débit volumique le long du tube de courant** :

$$Q_v \Big|_{S_1}(t) = Q_v \Big|_{S_2}(t). \quad (1.9)$$

Il ne peut y avoir de débit sur la surface latérale du tube, puisque par définition cette surface est constituée de lignes de courant, tangentes à la vitesse. Ce résultat est particulièrement simple pour un écoulement confiné dans une conduite (ou tuyau), de section S variable. En effet, la paroi solide de la conduite étant étanche, celui-ci définit un tube de courant. Ainsi, le débit volumique mesuré à n'importe quel endroit le long de la conduite doit être le même. Il en va de même si la conduite se subdivise (par une jonction en Y par exemple) : la somme des débits dans chaque subdivision doit être conservée.

Pour un écoulement unidimensionnel (i.e., de la forme $\vec{u}(\vec{r}, t) = u_x(\vec{r}, t)\vec{e}_x$), on introduit parfois la notion de *vitesse débitante* (ou vitesse moyenne), telle que

$$U_Q(t) = \frac{1}{S} \iint_S \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot d^2\vec{S}. \quad (1.10)$$

Cas particulier : Si la vitesse est uniforme à travers la section (écoulement dit "bouchon"), et que les sections sont définies perpendiculaires à l'écoulement, alors l'Eq. (1.9) donne simplement

$$U_1 S_1 = U_2 S_2.$$

(dans une seringue, ca coule beaucoup plus vite dans l'aiguille que dans le piston). A noter qu'un tel profil "bouchon" peut être une bonne approximation d'un écoulement réel dans une conduite lorsque l'on peu négliger les effets de la viscosité, et dans les portions de la conduite où la section ne varie pas trop brutalement. Dans ce cas, la vitesse débitante est simplement égale à la vitesse de l'écoulement elle-même.

1.3.3 Fonction de courant

Toujours dans le cas d'un fluide incompressible, le champ de vitesse vérifie la relation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.11)$$

(cela signifie qu'en chaque point le champ de vecteurs \vec{u} ne peut ni converger ni diverger ; cette propriété sera démontrée au § 2.3.3). Dans ce cas, l'analyse vectorielle nous dit que le champ \vec{u} peut s'écrire comme le rotationnel d'un **potentiel vecteur** $\vec{\Psi}$:

$$\vec{u} = \vec{\nabla}_{\wedge} \vec{\Psi} \quad (1.12)$$

(cette équation est analogue à la relation $\vec{B} = \vec{\nabla}_{\wedge} \vec{A}$ en électromagnétisme, qui découle de la propriété $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$). Ce potentiel vecteur n'est pas unique : il est défini à un champ irrotationnel près (remplacer par exemple $\vec{\Psi}$ par $\vec{\Psi} + \vec{\nabla}\Phi$ dans l'Eq. (1.12) ne changera pas le champ de vitesse physique \vec{u} , puisque $\vec{\nabla}_{\wedge}(\vec{\nabla}\Phi) = \vec{0}$).

L'intérêt d'introduire un tel potentiel vecteur est le suivant : le théorème de Stokes dit que la circulation d'un vecteur sur un contour fermé C est égale au flux du rotationnel de ce vecteur sur une surface S s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_C \vec{\Psi} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla}_{\wedge} \vec{\Psi}) \cdot d^2\vec{S}.$$

On reconnaît dans le membre de droite de cette équation le débit volumique Q_v (1.8), d'où :

$$Q_v = \oint_C \vec{\Psi} \cdot d\vec{l}.$$

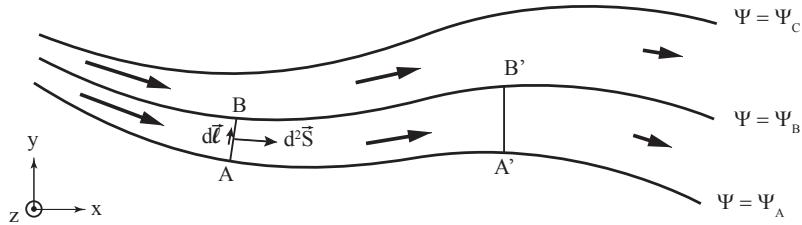


FIGURE 1.8 – Pour un écoulement 2D incompressible dans le plan (x, y) , les lignes de courant sont telles que la fonction de courant $\Psi(x, y)$ est constante. Le débit volumique (en fait, surfacique) est donné par $Q_s = \Psi_B - \Psi_A$. La vitesse $u = Q_s/AB$ est donc d'autant plus élevée que les lignes de courant sont rapprochées.

Cette relation n'est pas très exploitable dans le cas 3D général. Mais pour les écoulements 2D, elle devient très pratique. En effet, si $\vec{u} = (u_x, u_y)$ est un champ de vecteur 2D dans le plan (x, y) , alors seule la composante selon \vec{e}_z de $\vec{\Psi}$ est pertinente¹, et l'on peut écrire $\vec{\Psi} = \Psi(x, y)\vec{e}_z$. La fonction scalaire $\Psi(x, y)$ est appelée **fonction de courant**, et ses dérivées permettent de retrouver le champ de vitesse 2D :

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Propriété : la fonction de courant $\Psi(x, y)$ prend une valeur constante le long d'une ligne de courant (cf. figure 1.8). En effet, la différentielle de Ψ vaut :

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -u_y dx + u_x dy$$

et, le long d'une ligne de courant, l'Eq. (1.6) indique que $dx/u_x = dy/u_y$, d'où $d\Psi = 0$. En d'autres termes, les lignes de courant d'un écoulement incompressible à 2 dimensions peuvent être définies comme les lignes iso-niveaux de la fonction de courant Ψ (une telle propriété ne se généralise ni à 3 dimensions, ni pour un écoulement compressible).

1.3.4 Lien entre débit et géométrie des lignes de courant à 2 dimensions

Pour un écoulement 2D dans le plan (x, y) , on considère une petite surface normale à ce plan, de longueur AB et de hauteur Δz dans la direction z , telle que A et B soient sur deux lignes de courant différentes (cf. figure 1.8). La normale $d^2\vec{S}$ à l'élément de surface est dans le plan (x, y) , et peut s'écrire $d^2\vec{S} = dz(d\vec{l} \wedge \vec{e}_z)$, où $d\vec{l}$ est un élément de longueur. Ainsi, le débit volumique à travers cette surface s'écrit

$$Q_v = \iint_S \vec{u} \cdot d^2\vec{S} = \int_0^{\Delta z} dz \int_A^B \vec{u} \cdot (d\vec{l} \wedge \vec{e}_z).$$

Le débit surfacique, défini comme $Q_s = Q_v/\Delta z$ (exprimé en $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$), s'écrit donc

$$\begin{aligned} Q_s &= \int_A^B \vec{u} \cdot (d\vec{l} \wedge \vec{e}_z) = \int_A^B \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{e}_y \right) \cdot ((dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) \wedge \vec{e}_z) \\ &= \int_A^B \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \right) = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A. \end{aligned}$$

1. Les composantes selon x et y de $\vec{\Psi}$ peuvent alors être prises comme nulles sans perte de généralité ; on rappelle que Ψ est défini à un champ irrotationnel près.

On voit que plus Ψ varie vite (i.e. plus les lignes iso- Ψ sont rapprochées), plus le débit est élevé. La fonction de courant étant constante le long d'une ligne de courant ($\Psi_A = \Psi_{A'}$), on retrouve ici le fait que le débit volumique (ici surfacique) est indépendant du choix de la section AB ou $A'B'$: $Q_s = \Psi_B - \Psi_A = \Psi_{B'} - \Psi_{A'}$. Enfin, si les 2 lignes de courants passant par A et B sont suffisamment proches, on peut considérer que la vitesse entre les 2 lignes est uniforme ("écoulement bouchon"), et l'on a

$$u = \frac{\Psi_B - \Psi_A}{AB}.$$

On retrouve le fait que la vitesse est d'autant plus élevée que les lignes de courant sont proches (on pouvait déjà voir ce résultat sur la figure 1.2).

Remarque : l'introduction d'une fonction de courant (scalaire) Ψ est possible pour tout écoulement incompressible à 2 dimensions. Nous avons vu ici le cas le plus simple d'un écoulement 2D plan. Il existe une autre géométrie pour laquelle l'introduction d'une fonction de courant est possible : il s'agit des écoulements à symétrie de révolution, en coordonnées cylindriques ou sphériques. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) par exemple, ces écoulements sont de la forme $\vec{u} = (u_r(r, z, t), 0, u_z(r, z, t))$, et seule la composante selon \vec{e}_θ du potentiel vecteur est non nulle. Il est alors possible d'introduire une fonction de courant $\Psi_S(r, z)$ pour cette géométrie, dite de **fondation de courant de Stokes**, telle que $\vec{u} = \vec{\nabla}_\wedge(-(\Psi_S/r)\vec{e}_\theta)$. Des propriétés analogues à celles démontrées ici concernant le débit volumique peuvent être aussi montrées dans ce cas.

Insistons sur le fait qu'une fonction de courant ne peut être définie que pour un écoulement incompressible, vérifiant (1.11). Il n'existe pas de généralisation pour un écoulement compressible.

1.4 Vorticité

La vorticité est définie comme étant le rotationnel de la vitesse,

$$\vec{\omega}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}_\wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

et s'exprime en s^{-1} . Ce champ de vecteur décrit la rotation locale des particules fluides. Nous allons l'illustrer sur quelques cas simples.

Considérons un écoulement de "rotation solide" de vitesse angulaire Ω autour de l'axe z (figure 1.9a). Le terme "rotation solide" indique que le fluide tourne en bloc, comme un solide. Le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \Omega r \vec{e}_\theta = \vec{\Omega} \wedge \vec{r},$$

avec $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ le vecteur instantané de rotation. En coordonnées cartésiennes, ce champ de vitesse s'écrit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega \end{pmatrix} = 2\vec{\Omega}.$$

Ainsi, pour cet écoulement, la vorticité est un vecteur aligné avec le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$, et sa norme vaut 2 fois la vitesse angulaire (pour cette raison, on trouve dans certains livres l'appellation "vecteur tourbillon" pour la quantité $\frac{1}{2}\vec{\nabla}_\wedge \vec{u}$). Dans cet exemple, le champ de $\vec{\omega}(\vec{r}, t)$ est uniforme (constant dans tout l'espace).

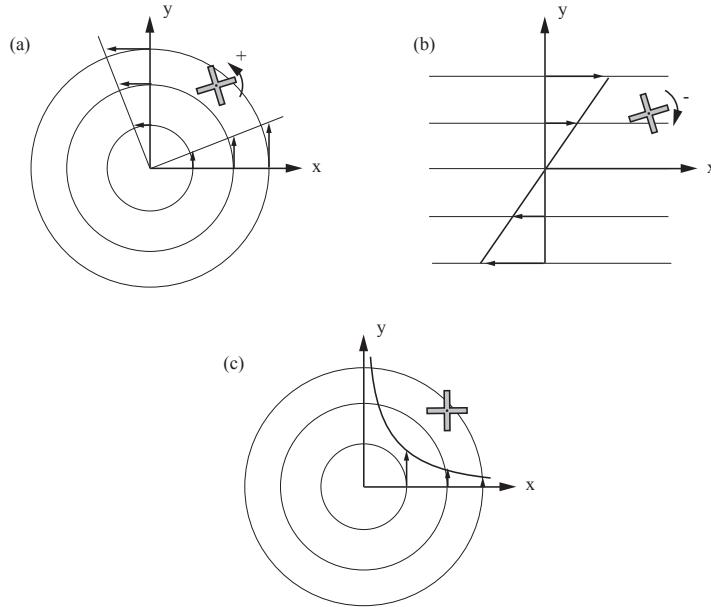


FIGURE 1.9 – Illustration de la vorticité pour 3 écoulements : (a) rotation solide, (b) cisaillement, (c) écoulement tournant avec champ de vitesse $u_\theta(r) \propto 1/r$, de vorticité nulle. La rotation du petit moulin indique la présence ou non de vorticité (son sens de rotation donne le signe de la composante ω_z).

Attention toutefois : la vorticité n'est pas nécessairement associée au fait que l'"écoulement tourne" ! Considérons un écoulement uniformément cisaillé (figure 1.9b) :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} Sy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

On obtient une vorticité non nulle, $\vec{\omega} = -S\vec{e}_z$, et pourtant les lignes de courant sont rectilignes ! En effet, le cisaillement induit bien une rotation locale des particules fluides, comme on peut s'en convaincre en plaçant un "**petit moulin**" dans l'écoulement : le différentiel de vitesse entre le haut et le bas va le mettre en rotation dans le sens anti-trigonométrique (selon $-\vec{e}_z$).

Inversement, on peut avoir un écoulement tournant de vorticité nulle. En effet, considérons un écoulement orthoradial en coordonnées cylindriques, $\vec{u} = u_\theta(r)\vec{e}_\theta$ (figure 1.9c). Les lignes de courant sont circulaires, tout comme pour l'écoulement de rotation solide. Son rotationnel s'écrit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \vec{e}_z.$$

Ainsi, on peut avoir $\vec{\omega} = \vec{0}$ à condition que $u_\theta(r) \propto 1/r$. Si l'on place notre "petit moulin" dans un tel écoulement, il ne tournera pas² : en effet, un élément de fluide va être *déformé* (étiré dans un sens et comprimé dans l'autre) et son centre sera en *translation circulaire*, et non en rotation. Cet écoulement est donc irrotationnel ($\vec{\omega} = \vec{0}$) dans tout l'espace, à l'exception de l'axe z sur lequel la vitesse est infinie (et $\vec{\omega}$ est singulier).

Pour résumer, dans le cas $u_\theta(r) \propto r$ il y a rotation pure sans déformation, tandis que dans le cas $u_\theta(r) \propto 1/r$ il y a déformation pure sans rotation (pour tout autre profil de vitesse $u_\theta(r)$, il y

2. Ceci est vrai en toute rigueur pour un moulin infiniment petit.

aura combinaison de rotation et de déformation). **La vorticité décrit donc la rotation locale des éléments de fluide, mais n'a pas de lien avec la courbure des lignes de courant.**

Comme pour tout champ de vecteur, on peut définir les lignes de champ, tangentes en tous points à $\vec{\omega}$. Ces lignes de champs sont appelées "lignes de vorticité". Etant donné que l'on a toujours $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$ (puisque $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge) = 0$), on ne peut pas avoir convergence ou divergence des lignes de vorticité. Nous reviendrons sur la vorticité pour l'étude des écoulements potentiels (irrotationnels) en Section 3.3.

Chapitre 2

Equations bilans

Dans ce chapitre, nous allons examiner comment les théorèmes fondamentaux de la physique (lois de conservation) permettent d'aborder de manière très efficace certains problèmes de mécanique des fluides. L'approche suivie ici est similaire à celle utilisée en mécanique du point ou en physique des particules pour décrire les collisions. En raisonnant sur les quantités conservées *avant* et *après* la collision, il est possible d'établir des résultats très généraux sans connaître le détail de la physique *pendant* la collision.

En mécanique du point classique, la collision de 2 objets doit toujours respecter la conservation de la masse et de la quantité de mouvement (cette dernière conservation découlant de l'absence de forces extérieures lors de la collision). Ces deux lois de conservation sont inviolables. La collision doit également conserver l'énergie, à condition de ne pas oublier l'énergie thermique : si la collision est *élastique*, toute l'énergie mécanique (ici simplement cinétique) est conservée lors de la collision. En revanche, pour une collision *inelastique*, une partie de l'énergie cinétique incidente est transformée en chaleur, et ne se retrouve pas dans l'énergie cinétique des particules après la collision. On va retrouver ces mêmes notions pour les bilans en mécanique des fluides.

Les quantités conservées que nous examinerons ici sont la masse et la quantité de mouvement. Le TD 2 (ressaut hydraulique) étend cette approche à l'énergie. L'extension à d'autres quantités, comme le moment cinétique, peut être utile dans certains problèmes, mais n'est pas examinée ici.

2.1 Volume de contrôle

Le théorème de transport permet d'étudier comment varie une quantité dans un **volume de contrôle (VC)**. Le volume de contrôle doit être intégralement immergé dans le (ou les) fluide(s). Il est délimité par la **surface de contrôle (SC)**, qui peut éventuellement coïncider par endroit avec des parois solides. On note d^2S l'élément de surface, et \vec{n} la normale sortante en tout point de la SC, avec $d^2\vec{S} = \vec{n} d^2S$. On note $\vec{V}_{SC}(\vec{r}, t)$ la vitesse de la surface de contrôle en chaque point $\vec{r} \in SC$. On distingue deux types de volumes de contrôle, correspondant aux points de vue Eulérien et Lagrangien respectivement :

1. **Volume de contrôle fixe** : la surface de contrôle est alors perméable, et le fluide et toutes les quantités physiques qu'il transporte (masse, quantité de mouvement, énergie) peut en entrer ou en sortir.
2. **Volume de contrôle matériel**, c'est-à-dire transporté par le fluide : la vitesse de la surface $\vec{V}_{SC}(\vec{r}, t)$ coïncide en tout point $\vec{r} \in SC$ avec la vitesse du fluide $\vec{u}(\vec{r}, t)$. Le volume de contrôle contient donc toujours les mêmes particules fluides, et sa masse est conservée. On peut ainsi imaginer la surface de contrôle comme une membrane imaginaire emportée par le fluide, qui serait étanche, parfaitement extensible et sans rigidité.

La première définition est souvent la plus naturelle. La seconde définition est utile pour exprimer le principe fondamental de la dynamique (PFD), en section 2.4.1, qui ne s'applique que pour un système fermé.

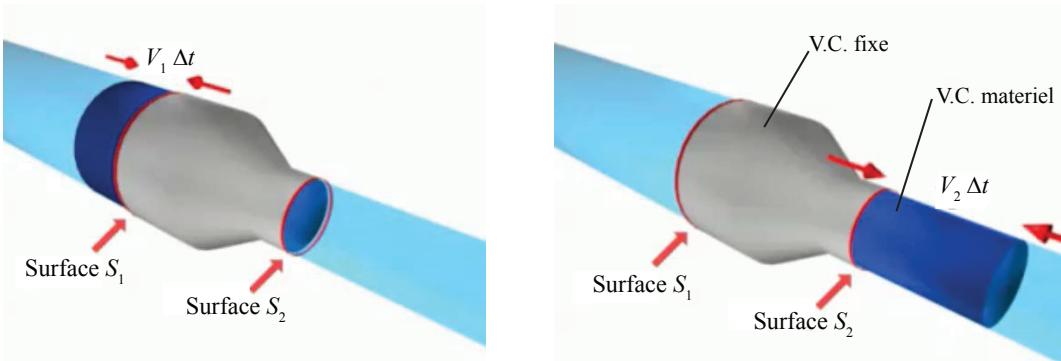


FIGURE 2.1 – Ecoulement d'un fluide dans un tuyau convergent, à deux instants t et $t + \Delta t$, illustrant les deux types de volumes de contrôle. Volume de contrôle *fixe* (en gris) : la masse entre et sort à travers la surface de contrôle. Volume de contrôle *matiériel* (en bleu) : la surface de contrôle englobe une quantité de fluide et se déplace avec lui.

2.2 Théorème de transport

2.2.1 Transport d'un champ scalaire

On s'intéresse à une quantité *extensive* $F(t)$ définie sur le volume de contrôle VC.¹ Dans un premier temps, on se restreint à une quantité scalaire (par exemple la masse m , l'énergie cinétique $m\vec{u}^2/2\dots$). On note $f(\vec{r}, t)$ la densité volumique (quantité cette fois-ci *intensive*) associée à $F(t)$:

$$F(t) = \iiint_{VC} f(\vec{r}, t) d^3\tau.$$

Ici $f(\vec{r}, t)$ peut représenter par exemple la masse volumique ρ , l'énergie cinétique par unité de volume $\rho\vec{u}^2/2$ etc. Le **théorème de transport (ou théorème de Reynolds)** établit que l'évolution temporelle dF/dt dans le volume de contrôle a deux origines : une première liée à l'évolution temporelle de la densité $f(\vec{r}, t)$, et une seconde liée au fait que la surface de contrôle peut bouger :

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} f(\vec{r}, t) d^3\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, t) d^3\tau + \iint_{SC} f(\vec{r}, t) \vec{V}_{SC} \cdot d^2\vec{S}. \quad (2.1)$$

Interprétation unidimensionnelle : Le théorème de transport correspond, à 1D, à la règle de "dérivation sous le signe somme", ou règle de Leibniz :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt}.$$

La figure 2.2 illustre cette règle. On peut donc voir le théorème de transport (2.1) comme une généralisation à 3D de la règle de Leibniz.

Dans toute la suite, **on ne considérera que le cas d'un volume de contrôle matériel** : on a donc $\vec{V}_{SC} = \vec{u}$. Le dernier terme peut alors se mettre sous la forme d'une intégrale volumique par application du théorème de Green-Ostrogradski (ou théorème de flux-divergence), et l'on obtient

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} f(\vec{r}, t) d^3\tau = \iiint_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot (f(\vec{r}, t) \vec{u}) \right] d^3\tau. \quad (2.2)$$

1. On rappelle qu'une quantité extensive est proportionnelle à la taille du système qu'elle caractérise, comme la masse ou le volume.

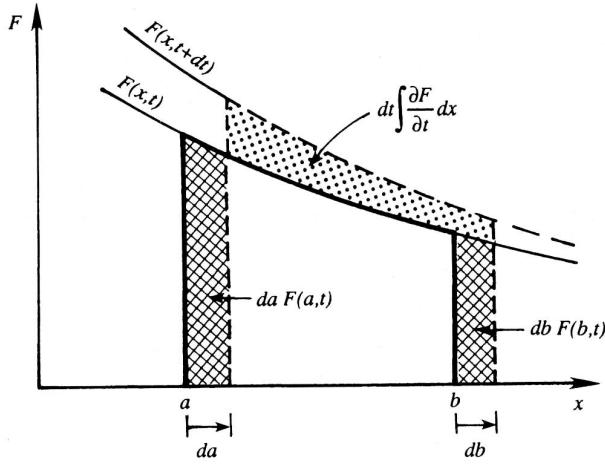


FIGURE 2.2 – Evolution, entre t et $t+dt$, de l'intégrale d'une fonction $f(x, t)$ entre des bornes $a(t)$ et $b(t)$ qui dépendent du temps.

Note : Le terme entre crochet a un air de famille avec la dérivée Lagrangienne (1.3) introduite précédemment, $d/dt = \partial/\partial t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$. Mais attention : ici la vitesse \vec{u} se trouve *dans* l'opérateur divergence.

2.2.2 Généralisation au transport d'un champ vectoriel

Le théorème de transport peut s'appliquer à une fonction scalaire, mais aussi à une fonction vectorielle. Dans les équations (2.1) et (2.2), il suffit de considérer que $F(t)$ et $f(\vec{r}, t)$ sont les composantes selon x (ou y , ou z) des vecteurs $\vec{F}(t)$ et $\vec{f}(\vec{r}, t)$. **Le théorème de transport pour une fonction vectorielle** s'écrit donc, toujours en considérant un volume de contrôle matériel ($\vec{V}_{SC} = \vec{u}$) :

$$\frac{d}{dt} \vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \vec{f}(\vec{r}, t) d^3\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \vec{f}(\vec{r}, t) d^3\tau + \oint_{SC} \vec{f}(\vec{r}, t) (\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}). \quad (2.3)$$

Attention : L'ordre des opérations est *très important* dans le terme $\vec{f}(\vec{r}, t)(\vec{u} \cdot d^2 \vec{S})$! Si l'on déplace le produit scalaire ou les parenthèses, le résultat est faux ! Un grand nombre d'erreurs dans l'application de ce théorème provient d'une interversion dans l'ordre des opérations.

L'écriture sous forme d'intégrale volumique pour un champ vectoriel, comme nous l'avons fait dans l'équation (2.2) pour un champ scalaire, nécessite le passage en notation tensorielle (on se référera à l'annexe D). On écrit l'Eq. (2.3) pour la i ème composante de \vec{F} : pour cela, on multiplie scalairement l'Eq. (2.3) par le vecteur unitaire \vec{e}_i ,

$$\frac{d}{dt} F_i(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} f_i(\vec{r}, t) d^3\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial t} f_i(\vec{r}, t) d^3\tau + \oint_{SC} f_i(\vec{r}, t) u_j d^2 S_j, \quad (2.4)$$

(avec somme implicite sur l'indice répété j), où $d^2 S_j$ est la j ème composante du vecteur sortant $d^2 \vec{S}$. La généralisation du théorème de Green-Ostrogradski pour un tenseur $A_{ijk\dots}$ de rang quelconque s'écrit

$$\oint_{SC} A_{ijk\dots} d^2 S_i = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ijk\dots} d^3\tau \quad (2.5)$$

(avec sommation sur le premier indice i , les indices suivants j, k, \dots étant libres). En appliquant à l'Eq. (2.4) ce théorème pour le tenseur de rang 2, $A_{ij}(\vec{r}, t) = f_i u_j$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} F_i(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} f_i(\vec{r}, t) d^3\tau = \iiint_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} f_i(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_i(\vec{r}, t) u_j) \right] d^3\tau. \quad (2.6)$$

Le terme $\partial(f_i u_j)/\partial x_j$ est bien un vecteur (un seul indice libre i), divergence d'un champ tensoriel de rang 2 (d'indices i, j) par contraction (sommation implicite) sur l'indice muet j .

Dans la suite, nous allons appliquer le théorème de transport successivement à la masse (scalaire) et à la quantité de mouvement (vectorielle).

2.3 Conservation de la masse

2.3.1 Expression globale

Pour appliquer le théorème de transport à la masse, on choisit $F(t) = M(t)$ et $f(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)$ la masse volumique (simplement appelée *densité*). En considérant le volume de contrôle comme étant matériel ($\vec{V}_{SC} = \vec{u}$), l'Eq. (2.1) donne :

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} f(\vec{r}, t) d^3\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) d^3\tau + \iint_{SC} \rho(\vec{r}, t) \vec{u} \cdot d^2\vec{S}. \quad (2.7)$$

On reconnaît dans l'intégrale surfacique la définition du **débit massique** $Q_m(t)$ (1.7), sauf qu'ici la surface est fermée. Le volume de contrôle étant matériel, on ne peut avoir par définition production ou destruction de la masse dans ce volume, et l'on a donc $dM/dt = 0$. Pour un écoulement stationnaire ($\partial/\partial t = 0$), l'intégrale surfacique est donc nulle elle aussi, et l'on a compensation entre le débit massique entrant et sortant.

2.3.2 Expression locale

L'application du théorème de Green-Ostrogradski permet d'obtenir une version *locale* de la conservation de la masse. L'Eq. (2.2) se réécrit :

$$\frac{d}{dt} M(t) = 0 = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho(\vec{r}, t) d^3\tau = \iiint_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{r}, t) \vec{u}) \right] d^3\tau. \quad (2.8)$$

L'intégrale volumique dans le membre de droite de (2.8) est donc nulle, et en choisissant un volume de contrôle infiniment petit (c'est-à-dire tendant vers la taille d'une "particule fluide"), on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{r}, t) \vec{u}) = 0.} \quad (2.9)$$

Cette équation, parfois appelée **équation de continuité**, exprime la **conservation locale de la masse** du point de vue Eulérien. Cette équation s'écrit sous la forme générale d'une loi de conservation pour un champ scalaire, $\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, où le rôle de la densité de courant \vec{j} est joué ici par la quantité de mouvement par unité de volume, $\vec{j} = \rho\vec{u}$.

Il est intéressant de réécrire cette équation du point de vue Lagrangien. En développant la divergence, $\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho$, et en utilisant la dérivée Lagrangienne $d/dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.10)$$

Cette équation exprime la **conservation locale de la masse** du point de vue Lagrangien. On retrouve le fait que, le long de sa trajectoire, une particule fluide voit sa densité augmenter (ou diminuer) à un taux $(1/\rho)d\rho/dt$ donné par $-\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. Par exemple, pour $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} > 0$ (écoulement de dilatation), la densité diminue.

Exercice : Comment appliquer le théorème de transport pour obtenir le résultat suivant :

$$\frac{dV}{dt} = Q_v,$$

où V est le volume et Q_v le débit volumique (1.8) ?

2.3.3 Fluide incompressible

L'application de l'équation de continuité (2.10) au cas d'un **fluide incompressible**, pour lequel on a $d\rho/dt = 0$ (conservation de la densité pour une particule fluide le long de sa trajectoire), donne immédiatement

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.11)$$

(un tel champ \vec{u} est parfois dit *solenoïdal*, en référence au champ magnétique qui vérifie également l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$). Nous avons déjà utilisé ce résultat au chapitre précédent. Le cas le plus usuel d'un fluide incompressible est celui d'un **fluide iso-densité** : on a simplement $\rho = cste$ dans tout le volume de fluide, et donc $d\rho/dt = 0$. C'est cette situation qui va principalement nous intéresser dans les chapitres qui suivent.

Il est important de noter toutefois que, dans certaines situations, on peut avoir une variation spatiale de la densité $\rho(\vec{r})$, tandis que l'écoulement reste incompressible : les particules fluides "transportent" avec elles leur densité, et l'on a toujours $d\rho/dt = 0$, et donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. C'est le cas des *fluides stratifiés*, comme les océans (stratification due à la concentration en sel ainsi qu'à la variation de température avec la profondeur) ou l'atmosphère (stratification due à la diminution de pression hydrostatique avec l'altitude).

Quand peut-on supposer qu'un écoulement est incompressible ? On peut montrer que c'est le cas en pratique lorsque la vitesse caractéristique U de l'écoulement est faible comparée à la vitesse du son c dans le milieu. Cela se traduit par un nombre de Mach

$$Ma = \frac{U}{c} \ll 1$$

(écoulement dit subsonique). On a $c \simeq 1500 \text{ m s}^{-1}$ pour l'eau, et l'hypothèse d'incompressibilité y est toujours satisfaite en pratique (à noter que, dans les conditions usuelles de température et de pression, un autre phénomène intervient au-delà de $U \simeq 10 \text{ m s}^{-1}$: la cavitation, cf. § 3.4.7). Pour l'air dans les conditions usuelles, on a $c \simeq 340 \text{ m s}^{-1}$, et les effets de compressibilité sont donc attendus dans les écoulements des applications aéronautiques (écoulements transsoniques et supersoniques). Cependant, cette situation ne sera pas examinée dans le cadre de ce cours.

2.4 Quantité de mouvement

2.4.1 Principe Fondamental de la Dynamique

L'application du théorème de transport à la quantité de mouvement permet d'exprimer le **Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)** pour un fluide. Le PFD établit que la quantité de mouvement d'une masse contenu dans un système fermé change par application de forces extérieures :

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{P}} = \sum \vec{F}_{ext}.$$

Ici la quantité de mouvement de la masse de fluide contenue dans le volume de contrôle matériel VC est

$$\vec{\mathcal{P}} = \iiint_{VC} \rho \vec{u} d^3\tau. \quad (2.12)$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème de transport sous la forme (2.3), en choisissant $\vec{F} = \vec{\mathcal{P}}$, et $\vec{f} = \rho \vec{u}$. On obtient donc

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) d^3\tau + \iint_{SC} (\rho \vec{u}) (\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}) \quad (2.13)$$

(ici encore, attention à l'ordre des opérations dans le dernier terme, qui n'est **pas** égal à $\rho \vec{u}^2 d^2 \vec{S}$!)

Ce résultat est d'une grande importance. En pratique, l'écoulement est souvent stationnaire : le terme $\partial/\partial t$ est nul. Dans ce cas, la résultante des forces extérieures agissant sur le volume de contrôle est donnée par le flux de quantité de mouvement à travers la surface de contrôle. Par simple changement de système, le principe de l'action et de la réaction permet d'interpréter $-\sum \vec{F}_{ext}$ comme la force exercée par l'écoulement dans le volume de contrôle sur la surface entourant ce volume. Par un choix judicieux du volume de contrôle, cette relation permet par exemple de déterminer la force exercée par un écoulement donné sur un obstacle (force de traînée). Nous allons voir ci-dessous 2 applications concrètes de ce résultat.

Enfin, il est possible de réécrire l'Eq. (2.13) sous forme d'une intégrale volumique, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski sous sa forme tensorielle (2.5). L'application de l'Eq. (2.6) donne

$$\sum F_{ext,i} = \iiint_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right] d^3\tau$$

Développons le terme entre crochets. La dérivée temporelle donne $\rho \partial u_i / \partial t + u_i \partial \rho / \partial t$, et le terme de divergence peut se décomposer comme

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Sur les 4 termes obtenus, la combinaison des 2 termes $u_i (\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u_j) / \partial x_j)$ s'annule du fait de l'équation de continuité (2.9), et l'on obtient :

$$\sum F_{ext,i} = \iiint_{VC} \left[\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] d^3\tau.$$

On reconnaît dans le terme entre crochets la dérivée Lagrangienne (1.3) de u_i ! En revenant en notation vectorielle, on écrit finalement la **forme intégrale du Principe Fondamental de la Dynamique** :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_{VC} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d^3\tau. \quad (2.14)$$

Ce dernier résultat est remarquablement simple. Insistons sur le fait qu'il a été obtenu sans l'hypothèse d'incompressibilité ($\rho(\vec{r}, t)$ est variable). Sa simplicité provient du fait que, pour une particule fluide matérielle, l'élément de masse $d^3m = \rho d^3\tau$ est conservé le long de la trajectoire : ainsi, la dérivée totale d/dt appliquée la quantité de mouvement \vec{P} (2.12) "entre" dans l'intégrale, et n'affecte que la vitesse \vec{u} (encore fallait-il le démontrer !)

2.4.2 Forces agissant sur le système

Il nous faut maintenant expliciter les forces extérieures s'appliquant au volume de contrôle. On peut en compter de 2 types : les forces de volume et le forces de surface,

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{VC} + \vec{F}_{SC}.$$

Les **forces de volume** peuvent s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_{VC} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d^3\tau,$$

où \vec{g} est la force par unité de masse. Il s'agit le plus souvent de l'accélération de la pesanteur, mais toute autre force volumique peut être incluse de la même façon (par exemple force centrifuge et force de Coriolis pour un fluide en rotation décrit dans le référentiel non Galiléen, force de Lorentz pour un fluide conducteur...)

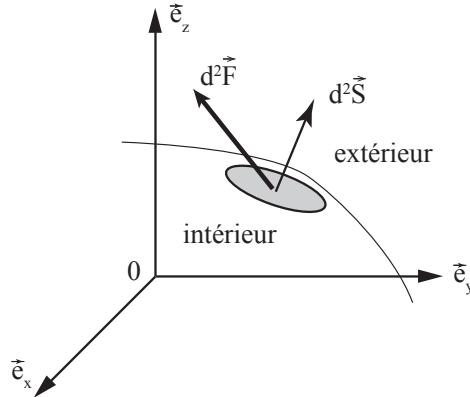


FIGURE 2.3 – Force élémentaire $d^2\vec{F}$ agissant sur une surface élémentaire $d^2\vec{S}$ délimitant une région quelconque. En l'absence de viscosité, $d^2\vec{F}$ doit être colinéaire à $d^2\vec{S}$: il s'agit d'une contrainte normale (pression). En présence de viscosité, $d^2\vec{F}$ n'est pas nécessairement colinéaire à $d^2\vec{S}$: il existe une contrainte tangentielle en plus de la pression.

Les **forces de surface**, ou **contraintes**, s'écrivent sous la forme

$$\vec{F}_{SC} = \iint_{VC} d^2\vec{F}.$$

Elles sont de 2 sortes : les *contraintes normales*, c'est-à-dire colinéaires à $d^2\vec{S}$ (il s'agit de la pression), et les *contraintes tangentielles* (associées à la viscosité), qui ne sont pas colinéaires à $d^2\vec{S}$ en général (cf. figure 2.3). Nous verrons au chapitre 4 que ces deux types de forces de surface peuvent s'écrire sous la forme $d^2\vec{F} = [\sigma]d^2\vec{S}$, où $[\sigma]$ est le tenseur des contraintes (décrit par une matrice 3×3).

Si l'on ne prend pas en compte les contraintes visqueuses (approximation des fluides parfaits, chapitre 3), on a uniquement les contraintes de pression, colinéaires à $d^2\vec{S}$

$$\vec{F}_{SC} = \iint_{SC} (-p) d^2\vec{S}.$$

Le signe $-$ devant la pression p provient simplement de la convention de signe que nous avons adoptée : lorsque la pression extérieure *appuie sur* le volume de contrôle, on doit avoir \vec{F}_{ext} dirigé vers $-d^2\vec{S}$, puisque $d^2\vec{S}$ est la normale *sortante*.

2.5 Applications

2.5.1 Variation du diamètre d'un jet débouchant

On considère l'écoulement d'eau stationnaire dans un tuyau de rayon R_0 (figure 2.4). On admet que le profil de vitesse est parabolique,

$$u_x(r) = U_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) \quad (2.15)$$

pour $r \leq R_0$ (un tel écoulement est dit *de Poiseuille*, et sera décrit plus en détail au § 5.3.2). Ce tuyau débouche dans un espace rempli d'air au repos. On suppose que le jet résultant a un rayon R_{jet} , et que l'écoulement dans le jet adopte à une certaine distance un profil "bouchon", c'est-à-dire est tel que $u_x(r) = U_{jet}$ pour $r \leq R_{jet}$. On néglige l'effet de la gravité dans ce problème.

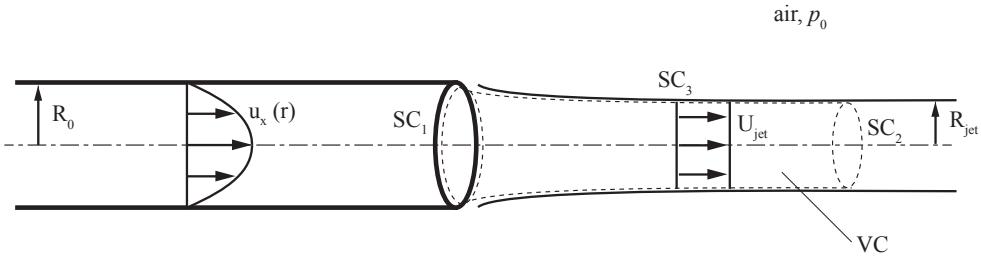


FIGURE 2.4 – Changement de section d'un jet issu d'un tuyau cylindrique lorsqu'il débouche dans de l'air au repos.

Etant donnés \$U_0\$ et \$R_0\$, on a 2 inconnues : \$U_{jet}\$ et \$R_{jet}\$. L'application des bilans de masse et de quantité de mouvement va fournir 2 équations, qui vont permettre d'obtenir ces 2 inconnues.

On considère le volume de contrôle représenté en figure 2.4. A \$t = 0\$, la surface de contrôle est constituée d'un disque d'entrée \$SC_1\$ situé juste à la sortie du tuyau, d'une surface latérale \$SC_3\$ qui épouse la forme de l'interface eau-air, et d'un disque de sortie \$SC_2\$ situé en aval dans le jet, à une distance suffisante de sorte que le rayon du jet est bien défini et n'évolue plus.

La conservation de la masse pour un écoulement incompressible et stationnaire s'écrit

$$\iint_{SC} \rho \vec{u} \cdot d^2 \vec{S} = \iint_{SC_1} \rho \vec{u} \cdot d^2 \vec{S} + \iint_{SC_2} \rho \vec{u} \cdot d^2 \vec{S} = 0$$

(il n'y a pas de débit selon la surface latérale \$SC_3\$, car la vitesse \$\vec{u}\$ y est perpendiculaire à la normale sortante \$d^2 \vec{S}\$). Compte tenu du profil (2.15), la première intégrale donne le débit massique entrant,

$$\iint_{SC_1} \rho \vec{u} \cdot d^2 \vec{S} = -2\pi\rho \int_0^{R_0} u_x(r) r dr = -\frac{\pi}{2} \rho U_0 R_0^2$$

(le signe \$-\$ provient du fait que \$\vec{u}\$ et \$d^2 \vec{S}\$ sont de direction opposée). La seconde intégrale donne de même le débit massique sortant,

$$\iint_{SC_2} \rho \vec{u} \cdot d^2 \vec{S} = 2\pi\rho \int_0^{R_{jet}} U_{jet} r dr = \pi\rho U_{jet} R_{jet}^2,$$

d'où la première loi de conservation,

$$U_0 R_0^2 = 2U_{jet} R_{jet}^2. \quad (2.16)$$

Le transport de quantité de mouvement s'écrit de même

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iint_{SC_1} (\rho \vec{u})(\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}) + \iint_{SC_2} (\rho \vec{u})(\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}).$$

Etant donné le choix du volume de contrôle, on peut admettre que les forces extérieures sont nulles ici. En effet, la pression agissant sur les 3 surfaces \$SC_1\$, \$SC_2\$ et \$SC_3\$ est supposée partout égale à la pression de l'air ambiant, aux effets de tension de surface près, car le fluide est en contact avec l'air (on détaillera plus précisément les conditions aux limites pour la pression dans le chapitre suivant). L'intégrale \$\int p d^2 \vec{S}\$ est donc nulle, et l'on a \$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}\$. En conséquence, la quantité de mouvement est conservée dans le volume de contrôle, et les flux de quantité de mouvement à travers \$SC_1\$ et \$SC_2\$ doivent se compenser.

La vitesse \$\vec{u}\$ étant selon \$\vec{e}_x\$, on projette cette équation selon \$\vec{e}_x\$. Le flux entrant de quantité de mouvement ainsi projeté s'écrit

$$\iint_{SC_1} \rho u_x (\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}) = -2\pi\rho \int_0^{R_0} u_x^2(r) r dr = -\frac{\pi}{3} \rho U_0^2 R_0^2,$$

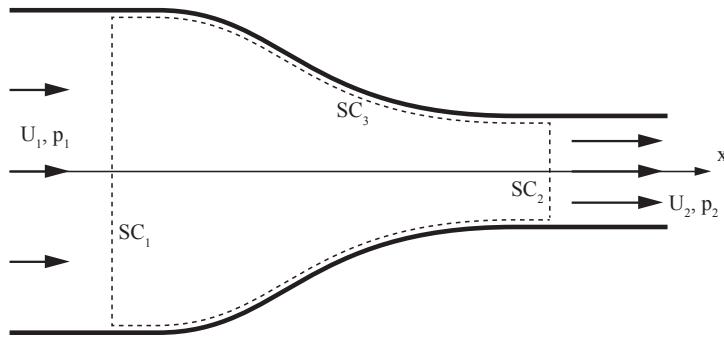


FIGURE 2.5 – Ecoulement stationnaire dans un tuyau convergent. Le fluide est accéléré : le tuyau exerce sur le fluide une force selon \vec{e}_x .

et le flux sortant

$$\iint_{SC_2} \rho u_x (\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}) = 2\pi\rho \int_0^{R_{jet}} U_{jet}^2 r dr = \pi\rho U_{jet}^2 R_{jet}^2,$$

d'où la seconde loi de conservation,

$$U_0^2 R_0^2 = 3U_{jet}^2 R_{jet}^2. \quad (2.17)$$

En combinant les deux lois de conservation (2.16) et (2.17), on obtient

$$U_{jet} = \frac{2}{3}U_0, \quad R_{jet} = \sqrt{\frac{3}{4}}R_0.$$

Ainsi, le jet doit nécessairement s'amincir ($R_{jet} \simeq 0.87R_0$) afin de satisfaire à la double contrainte de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. A noter que, dans cette approche globale, la nature de l'écoulement près de la sortie du tube n'est pas décrite : on ne sait pas ici comment, ni sur quelle distance, le profil de vitesse s'adapte de parabolique à plat. Mais cela ne nous a pas empêché de trouver le rayon du jet !

2.5.2 Le tuyau convergent

On considère un écoulement stationnaire et incompressible dans un tuyau convergent de section circulaire, passant d'une section S_1 à une section S_2 . On considère que l'écoulement est de profil plat ("bouchon") loin en amont et en aval de la région convergente. On donne U_1 , p_1 , U_2 et p_2 les vitesses et pression en amont et en aval.

En utilisant le volume de contrôle indiqué sur la figure 2.5, montrer que le fluide est soumis à la force extérieure :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho Q_v (U_2 - U_1) \vec{e}_x.$$

Avec $U_2 > U_1$, on a $\sum \vec{F}_{ext}$ selon \vec{e}_x : cette force est la cause de l'*augmentation* de la quantité de mouvement du fluide au passage de la contraction.

En déduire que la contraction (SC_3) exerce sur le fluide la force

$$\vec{F}_{SC3} = [S_2(p_2 + \rho U_2^2) - S_1(p_1 + \rho U_1^2)] \vec{e}_x$$

(l'écoulement étant stationnaire, le fluide exerce inversement une force $-\vec{F}_{SC3}$ sur la contraction). Si le fluide n'a pas de viscosité, cette force correspond uniquement à une force de pression, normale à la paroi ; la composante radiale s'annule par axisymétrie, seule reste ici la composante longitudinale.

Pour connaître la direction de \vec{F}_{SC3} , il faut une relation supplémentaire reliant la pression et la vitesse : c'est la relation de Bernoulli, qui sera démontrée dans le chapitre suivant.

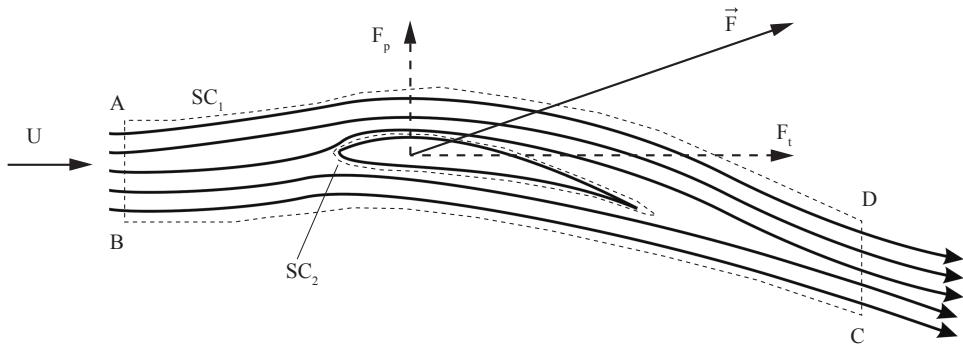


FIGURE 2.6 – Ecoulement autour d'une aile d'avion, et définition des forces de traînée et de portance.

2.5.3 Traînée et portance sur une aile

Le bilan de quantité de mouvement permet d'exprimer la force exercée par un fluide sur un objet, par exemple une aile d'avion (figure 2.6). On décompose en général cette force comme la somme de la **force de traînée** (alignée avec l'écoulement amont) et de la **force de portance** (perpendiculaire à l'écoulement amont), $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_p$. Pour faire voler un avion (en régime stationnaire), la force de portance doit compenser le poids de l'avion, $\vec{F}_p + M\vec{g} = \vec{0}$, et la force de traînée doit être compensée par la poussée des réacteurs.

Considérons un écoulement uniforme sur une aile d'avion bidimensionnelle immobile. Cette situation est celle d'une maquette d'aile fixe installée dans une soufflerie, et correspond, à un changement de référentiel près, à la situation d'une aile avançant dans un fluide au repos. On choisit ici un volume de contrôle *troué*, constitué d'une surface extérieure SC_1 définie par ABCD, telle que les surfaces AB et CD soient perpendiculaires à la vitesse amont \vec{U} , et les surfaces BC et AD soient le long de lignes de courant. En régime stationnaire, l'application du théorème de transport pour la quantité de mouvement s'écrit

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iint_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}). \quad (2.18)$$

Les forces extérieures se décomposent en forces sur SC_1 et SC_2 . La seule force sur SC_1 est la force de pression, tandis que la force sur SC_2 correspond à la force qui nous intéresse : c'est elle qui s'oppose à la traînée et à la portance, $\vec{F}_{SC_2} = -\vec{F}_t - \vec{F}_p$ (en effet, \vec{F}_{SC_2} est la force exercée *par l'aile sur le fluide*). Le flux de quantité de mouvement est nul sur SC_2 , puisque $\vec{u} \cdot d^2 \vec{S} = 0$. Le flux de quantité de mouvement sur SC_1 est nul à travers les surfaces BC et AD, car on a également $\vec{u} \cdot d^2 \vec{S} = 0$ le long des lignes de courant. Si l'on fait de plus l'hypothèse que la pression du fluide est constante sur SC_1 , alors l'Eq. (2.18) donne simplement

$$\vec{F}_t + \vec{F}_p = -\vec{F}_{SC_2} = - \iint_{AB} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}) - \iint_{CD} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d^2 \vec{S}).$$

On voit que pour avoir une portance, il est nécessaire d'avoir une déflexion de la quantité de mouvement vers le bas : en d'autres termes, le fluide "pousse" sur l'*intrados* (la surface inférieure) de l'aile. C'est ainsi que volent les avions...

Remarque : L'hypothèse de pression constante sur SC_1 suppose le fluide "parfait", c'est-à-dire sans viscosité (cette situation fera l'objet du chapitre 3). Dans ce cas, l'aile n'oppose aucune résistance à l'écoulement, et il ne peut pas exister de traînée dans cette approximation ; la portance, en revanche, peut être non nulle même pour un fluide parfait : il suffit que la géométrie de l'aile conduise à une déflexion des lignes de courant, et donc de la quantité de mouvement.

2.5.4 Pour aller plus loin

- Quelques exemples supplémentaires dans le chapitre 5 du livre de Guyon, Hulin, Petit [5].
- Une présentation très approfondie des bilans de quantité de mouvement et d'énergie dans le cas compressible se trouve dans le livre de Candel [2], avec notamment un grand nombre d'applications.
- Le livre de Acheson [1] (§ 4.12-4.13) donne une explication physique du mécanisme de génération de portance pour une aile d'avion.

Chapitre 3

Fluides parfaits, équation d'Euler

Un "fluide parfait" est un **fluide sans viscosité** (on dit parfois "inviscid"). L'équation d'évolution pour un fluide parfait est l'**équation d'Euler**, qui est simplement l'expression locale du Principe Fondamental de la Dynamique en l'absence de frottements.

Un tel fluide parfait n'existe évidemment pas dans la réalité¹. Il s'agit donc d'un concept que l'on utilise pour simplifier certains problèmes de mécanique des fluides, dans lesquels on peut négliger les effets de la viscosité. Ce modèle, lorsqu'il s'applique, peut être très efficace. En revanche, s'il est mal appliqué, ce modèle peut conduire à des résultats aberrants². Il convient de savoir utiliser la théorie des fluides parfaits à bon escient, et de savoir quand ne pas l'utiliser...

La viscosité étant la seule source de dissipation d'énergie pour un fluide, un écoulement de fluide parfait est donc un écoulement pour lequel l'**énergie mécanique (cinétique + potentielle) est conservée**. Une conséquence importante de cette conservation est qu'**un fluide parfait n'oppose pas de résistance au déplacement**. En d'autres termes, un fluide parfait au repos ne peut pas exercer sur un objet se déplaçant à vitesse \vec{U} de force colinéaire à \vec{U} . En effet, on sait que le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{U}$ correspond au travail par unité de temps de la force \vec{F} appliquée à l'objet : cette puissance transférée de l'objet au fluide doit être nécessairement nulle si l'énergie est conservée. Attention toutefois : même s'il n'existe pas de *force de traînée* \vec{F}_t (colinéaire à \vec{U}) pour un fluide parfait, il peut très bien exister en revanche une *force de portance* \vec{F}_p (perpendiculaire à \vec{U}), car on a toujours $\vec{F}_p \cdot \vec{U} = 0$ même pour $\vec{F}_p \neq \vec{0}$: une force de portance ne travaille pas. C'est l'un des succès de la théorie des fluides parfaits : bien qu'elle soit incapable d'expliquer l'existence d'une force de traînée sur une aile d'avion, elle permet d'expliquer de façon satisfaisante l'existence d'une force de portance.

La conservation de l'énergie mécanique pour un fluide parfait va conduire à dériver une relation importante en mécanique des fluides : le **théorème de Bernoulli**, qui établit la conservation de l'énergie mécanique des particules fluides le long de leur trajectoire. Dans ce chapitre, nous allons dériver le théorème de Bernoulli dans 2 situations, et nous examinerons les cas où il s'applique et ceux où il ne s'applique pas.

3.1 Equation d'Euler

3.1.1 Forme intégrale

Dans le chapitre 2, nous avons montré que l'application du théorème de transport à la quantité de mouvement avait permis d'exprimer le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) pour la

1. On peut citer malgré tout le cas de l'hélium superfluide, dont la viscosité devient nulle à la température de 0 K. Cependant, il s'agit d'un fluide quantique très particulier, dont la description sort largement du cadre de ce cours.

2. Dans son célèbre cours de physique, R. Feynman considérait les fluides parfaits sans fondement physique. Il a intitulé le chapitre correspondant "Ecoulement de l'eau sèche" [4].

masse de fluide contenue dans un volume de contrôle matériel VC sous la forme :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_{VC} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d^3\tau, \quad (3.1)$$

avec $d/dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$. Dans ce chapitre nous nous intéressons uniquement aux *fluides parfaits*, ou fluides sans viscosité (ou, plutôt, dont on pense pouvoir négliger l'effet de la viscosité). Dans ce cas, les seules contraintes sont les *contraintes de pression*. Selon le § 2.4.2, la somme des forces extérieures s'écrit donc

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d^3\tau + \iint_{SC} (-p) d^2\vec{S}.$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradski permet d'écrire l'intégrale surfacique de $-p$ comme une intégrale volumique de $-\vec{\nabla}p$, et l'on obtient l'**équation d'Euler intégrale (ou globale)** :

$$\iiint_{VC} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d^3\tau = \iiint [\rho \vec{g} - \vec{\nabla}p] d^3\tau. \quad (3.2)$$

3.1.2 Forme locale

Le résultat intégral (3.2) est valable pour tout volume de contrôle VC. En faisant tendre ce volume vers 0 (en fait, vers la taille d'une "particule fluide"), on obtient l'**équation d'Euler locale** :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g}. \quad (3.3)$$

Cette équation exprime le PFD pour une particule fluide d'un fluide parfait. Cette équation est valide pour un fluide compressible ou non.

Dans le cas d'un fluide incompressible, cette équation possède 4 inconnues : (u_x, u_y, u_z, p) . Cette équation vectorielle étant équivalente à 3 équations scalaires, il faut donc une 4ème équation afin que le système puisse avoir des solutions. Cette 4ème équation est donnée par la conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (3.4)$$

Ainsi, les équations (3.3)-(3.4) constituent un système de 4 équations à 4 inconnues, et l'on peut en chercher des solutions, connaissant les conditions aux limites du problème (décris dans la section suivante). Si le fluide est compressible, alors la densité ρ devient une 5ème inconnue, et il est nécessaire d'introduire une 5ème équation (une équation d'état, reliant p à ρ) pour rendre le système soluble.

Les cas le plus simple est le cas sans écoulement, $\vec{u} = \vec{0}$. L'équation d'Euler redonne alors l'équation de l'**hydrostatique**,

$$\vec{\nabla}p = \rho \vec{g},$$

(voir l'annexe B pour les rappels d'hydrostatique). A noter que dans le cas d'un écoulement purement horizontal, $u_z = 0$, la projection de l'Eq. (3.3) selon z donne $\partial p / \partial z = \rho g_z = -\rho g$, soit $p(z) = Cste - \rho g z$, et là encore la pression satisfait l'hydrostatique (résultat utile pour le TD 2). Dans tous les autres cas ($u_z \neq 0$), la pression comprendra deux contributions, l'une hydrostatique et l'autre dynamique.

Notons que l'équation d'Euler est une équation *non-linéaire* (\vec{u} apparaît quadratiquement). Cela signifie que, si l'on connaît une solution \vec{u}_1 des équations (3.3)-(3.4), alors $2\vec{u}_1$ ne sera pas solution de cette équation en général. Cet aspect non-linéaire rend la résolution de l'équation difficile, et est une des raisons de la difficulté de la mécanique des fluides.

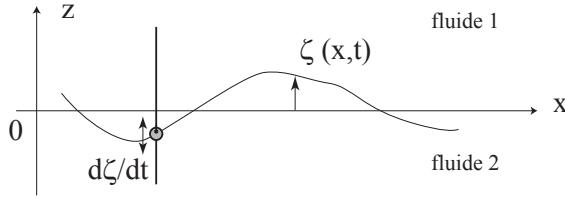


FIGURE 3.1 – Interface entre 2 fluides (cas unidimensionnel).

3.2 Conditions aux limites

Le système (3.3)-(3.4) peut être intégré connaissant les conditions aux limites. On distingue les conditions aux limites pour la vitesse (dites cinématiques) de celles pour la pression (dites dynamiques).

3.2.1 Conditions aux limites cinématiques

(i) Cas d'une paroi solide indéformable

Puisqu'il n'y a pas de frottement pour un fluide parfait, la vitesse ne s'annule pas nécessairement au contact avec une paroi. Plus précisément, la composante de la vitesse tangente à la paroi peut être quelconque (glissement du fluide sur la paroi).

En revanche, la composante de la vitesse normale à la paroi est nécessairement égale à celle de la paroi. Pour s'en convaincre, considérons le cas simple d'une paroi plane immobile, de vitesse $\vec{v}_p = \vec{0}$. Le débit de fluide à travers un élément de surface coïncidant avec la paroi, $\vec{u} \cdot d\vec{S} = \vec{u} \cdot \vec{n} dS$, doit être nul (la paroi est étanche), on a donc bien $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Si la paroi est en mouvement, il suffit de se mettre dans son référentiel et d'appliquer le même raisonnement : le débit $(\vec{u} - \vec{v}_p) \cdot \vec{n} dS$ doit être nul.

En conclusion, la condition aux limites cinématique pour un fluide parfait au contact avec une paroi animée d'une vitesse quelconque \vec{v}_p est :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v}_p \cdot \vec{n}, \quad (3.5)$$

c'est-à-dire égalité des composantes normales, tandis que la composante tangentielle est quelconque (glissement).

(ii) Cas d'une interface fluide

Le résultat précédent s'applique non seulement pour une paroi solide indéformable, mais aussi pour une interface liquide-gaz (cas d'une onde de surface, traité au TD 3), ou une interface entre deux liquides immiscibles (par exemple eau-huile). En effet, de telles "parois", bien que déformables, sont également étanches.

Considérons par exemple le cas d'une interface décrite par une fonction $z = \zeta(x, y, t)$, cf. figure 3.1. Une telle description suppose que l'interface n'est pas pliée (pas de déferlement ou de retournement). La position de l'interface est solution de l'équation $f(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0$: le fluide 1 est dans la région $f > 0$ et le fluide 2 dans la région $f < 0$. La condition aux limites cinématique peut alors s'exprimer en écrivant que la fonction f est un champ scalaire matériellement transporté par l'écoulement. Il doit donc satisfaire $df/dt = (\partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla})f = 0$, d'où :

$$u_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

où (u_x, u_y, u_z) est la vitesse du fluide évaluée à l'interface $z = \zeta(x, y, t)$. Le terme $\partial \zeta / \partial t$ correspond à la vitesse verticale de l'interface, c'est-à-dire à la vitesse d'un bouchon flottant sur l'interface à

position (x, y) contrainte. Dans le cas d'une interface quasiment plane (approximation linéaire), on a $\partial\zeta/\partial x, \partial\zeta/\partial y \ll 1$, et l'on retrouve naturellement $\partial\zeta/\partial t \simeq u_z$.

3.2.2 Conditions aux limites dynamiques

On peut distinguer de façon générique 3 situations pour la condition aux limites de la pression :

(i) Pression imposée

La pression peut être imposée de l'extérieur (par l'"expérimentateur") dans une région de l'écoulement. Dans le cas de l'écoulement dans une portion de conduite (par exemple une soufflerie), on peut imposer la pression p_1 en amont et p_2 en aval de la portion considérée.

(ii) Cas d'une paroi solide indéformable

Sur une paroi solide en contact avec le fluide parfait, la force exercée par le fluide sur la paroi ne peut être que normale à celle-ci (en effet, des contraintes tangentielles ne peuvent apparaître qu'en présence de viscosité). Dans le cas stationnaire (vitesse de paroi constante, éventuellement nulle), on doit avoir égalité entre la force paroi \rightarrow fluide et la force fluide \rightarrow paroi. Pour un petit élément de surface $d\vec{S}$ normal à la paroi, on a donc $d^2\vec{F}_{p \rightarrow f} = -p d^2\vec{S}$. Ce résultat permet, connaissant le champ de pression autour d'un obstacle, de calculer la force exercée par le fluide sur l'obstacle par intégration du champ de pression : il s'agit des fameuses force de trainée et force de portance, d'une importance fondamentale en mécanique des fluides.

(iii) Cas d'une interface fluide-fluide

Sur une interface liquide-gaz ou entre 2 liquides immiscibles, la masse de l'interface étant nulle, l'égalité entre la force fluide 1 \rightarrow fluide 2 la force fluide 2 \rightarrow fluide 1 s'applique même dans le cas instationnaire : on a donc **égalité des pressions de part et d'autre de l'interface**,

$$p_1 = p_2.$$

Si l'interface est courbée (bulle, goutte, vague etc.), il existe un terme supplémentaire lié à la tension de surface. Ce terme est la manifestation à l'échelle macroscopique de l'attraction entre les molécules. Pour un couple de fluides donnés, la **tension de surface** γ représente l'énergie par unité de surface (par exemple, on a $\gamma \simeq 0.070 \text{ J m}^{-2}$ pour l'interface eau-air).

Considérons un point P donné d'une interface courbée, entre deux fluides que l'on nomme arbitrairement *intérieur* et *extérieur* (cf. figure 3.2). En ce point P on peut introduire un plan tangent π_t et deux plans orthogonaux π_1 et π_2 . On peut montrer que l'équilibre des forces en ce point s'écrit :

$$p_{int} = p_{ext} + \gamma\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.6)$$

où κ est la courbure de l'interface, définie à partir des rayons de courbures R_1 et R_2 mesurés dans les plans π_1 et π_2 (ce sont les rayons des cercles osculateurs au point P). Le saut de pression entre l'intérieur et l'extérieur est nommé **pression de Laplace**. Les rayons de courbure sont choisis positifs lorsque le centre de courbure est du côté *intérieur*. On a donc, dans le cas de la figure 3.2, $p_{int} > p_{ext}$. A noter que la valeur de κ est intrinsèque à la surface, et ne dépend pas de l'orientation des plans π_1 et π_2 (ça n'a rien d'évident !)

Dans le cas d'une goutte (eau dans l'air par exemple) ou d'une bulle (air dans l'eau par exemple), supposée sphérique et de rayon R , les 2 rayons de courbure étant égaux, on a simplement $p_{int} = p_{ext} + 2\gamma/R$. Dans le cas d'une bulle de savon, on a $p_{int} = p_{ext} + 4\gamma/R$ (pourquoi ?)

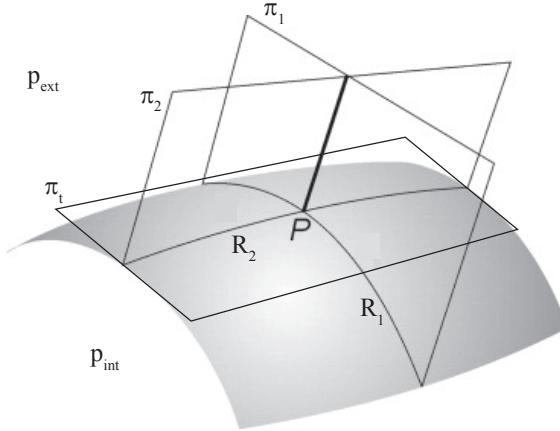


FIGURE 3.2 – En un point quelconque P d'une interface courbée entre 2 fluides, on peut définir un plan tangent π_t , et 2 plans orthogonaux π_1 et π_2 .

Pour une interface décrite par une fonction $z = \zeta(x)$ (invariante selon y , fig. 3.1), on a $R_2 = \infty$, et la courbure $\kappa = 1/R_1$ est donnée par

$$\kappa(x) = \frac{\zeta''}{(1 + \zeta'^2)^{3/2}},$$

que l'on peut approximer par $\kappa(x) \simeq \zeta''$ dans le cas de faibles pentes ($|\zeta'| \ll 1$).

3.3 Ecoulements potentiels

3.3.1 Potentiel de vitesse

Une propriété intéressante d'un fluide parfait est que, s'il est initialement irrotationnel (i.e., de vorticité nulle, voir Section 1.4), alors il le reste. En effet, nous verrons que la vorticité ne peut se créer qu'en paroi en présence de viscosité (dans les couches limites).

Rien n'impose à un fluide parfait d'être irrotationnel. Cependant, dans certains contextes (écoulement autour d'une aile d'avion, pas trop près de l'aile), cette hypothèse se trouve être bien vérifiée, et rend l'étude des écoulements irrotationnels un sujet de première importance.

Un écoulement irrotationnel est également appelé **écoulement potentiel**. En effet, on sait qu'un champ vectoriel dont le rotationnel est nul peut s'écrire comme le gradient d'un champ scalaire $\Phi(\vec{r}, t)$, appelé **potentiel de vitesse** :

$$\vec{\nabla}_\wedge \vec{u} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \Phi \tag{3.7}$$

(à ne pas confondre avec le potentiel vecteur $\vec{\Psi}$ introduit au § 1.3.3, tel que $\vec{u} = \vec{\nabla}_\wedge \vec{\Psi}$, lorsque $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$). Il en découle que la vitesse \vec{u} est perpendiculaire aux surfaces iso- Φ (cf. figures 3.3 et 3.4). Cette écriture permet une simplification de la description de l'écoulement : plutôt que de manipuler un champ vectoriel, il suffit de manipuler un champ scalaire.

Si de surcroît l'écoulement est incompressible (ce que l'on considérera toujours dans ce cours), l'équation de continuité $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ (2.11) montre que le potentiel de vitesse doit satisfaire l'équation de Laplace,

$$\nabla^2 \Phi = 0. \tag{3.8}$$

Les champs vérifiant cette équation sont dits "harmoniques". Il existe des méthodes mathématiques générales (également rencontrées en électromagnétisme) pour trouver des solutions à ce type de

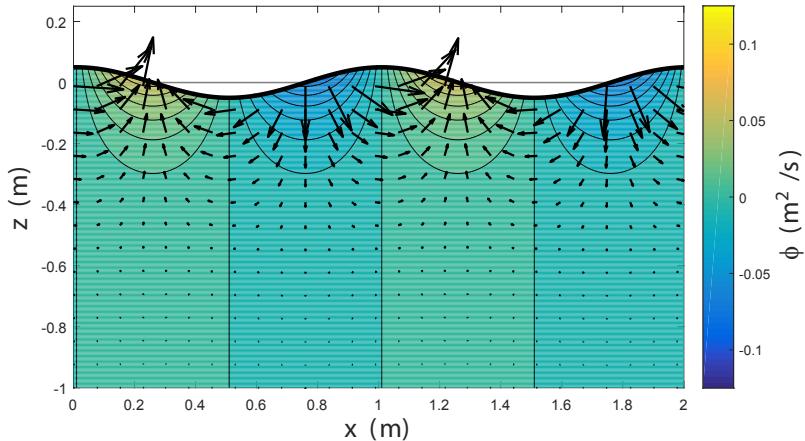


FIGURE 3.3 – Onde de surface, décrit par un écoulement potentiel. La vitesse $\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi$ est normale aux lignes iso- Φ en chaque point. La vitesse de phase (propagation de l'onde) est de gauche à droite.

problème, étant données des conditions aux limites sur la vitesse. Le problème des ondes de surface en l'absence de viscosité (voir le TD 3) est un exemple de problème que l'on peut traiter en résolvant cette équation de Laplace.

L'équation de Laplace (3.8) étant linéaire (si Φ_1 et Φ_2 sont solutions, alors $\Phi_1 + \Phi_2$ l'est aussi), on peut chercher des solutions d'un problème donné comme combinaisons linéaires d'écoulements simples (puits, sources, dipôles, etc.) : c'est le principe de superposition, dont nous allons voir quelques exemples en Section 3.3.3. Il suffit alors d'identifier les contributions Φ_1 , Φ_2 etc. telles que les conditions aux limites soient satisfaites pour $\Phi_1 + \Phi_2 +$ etc. Le TD 4 fournit un exemple de résolution de problème par cette méthode.

Remarque : la règle d'additivité précédente semble contredire le caractère non-linéaire de l'équation d'Euler (on a vu au § 3.1.2 que la somme de solutions n'étaient pas solution). Mais rien ne dit qu'un écoulement potentiel est solution de l'équation d'Euler ! L'équation (3.7) n'est qu'une paramétrisation d'un écoulement irrotationnel, mais dont on ne connaît pas a priori le champ de pression associé afin que le couple (\vec{u}, p) soit bien solution de l'équation d'Euler. Si l'on additionne 2 écoulements potentiels \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , il faut les injecter dans l'équation d'Euler afin de trouver le champ de pression associé, qui n'a aucune raison d'être donné par $p_1 + p_2$.

3.3.2 Circulation

On définit la circulation autour d'un contour fermé C par

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}. \quad (3.9)$$

Un résultat clef de la mécanique des fluides est que, pour un fluide parfait, la circulation associée à un contour matériel (un contour qui se déplace avec le fluide) reste invariante :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Il s'agit du **Théorème de Kelvin**, et se démontre en intégrant selon un contour fermé l'équation d'Euler (3.3), et en utilisant le fait que la circulation des termes du membre de droite, qui peuvent s'écrire sous forme d'un gradient, est nulle.

Pour un écoulement potentiel, on a $\Gamma = 0$, à la condition que le contour C n'entoure pas d'obstacle ni de singularité (c'est-à-dire à condition que le champ de vitesse reste défini en tout point du contour lorsque celui-ci tend vers 0). En effet, par définition d'un écoulement potentiel, on a

$$\Gamma = \oint_C (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{l} = \oint_C d\Phi = \Delta\Phi,$$

où $\Delta\Phi$ est la variation de Φ lorsque l'on parcourt toute la longueur du contour C . Si le contour C n'entoure pas d'obstacle ni de singularité, le potentiel Φ est monovalué, et reprend donc la même valeur après un tour, et l'on a bien $\Gamma = \Delta\Phi = 0$. Une autre façon de le voir est d'appliquer le théorème de Stokes, qui établit que, en l'absence de singularité, la circulation d'un champ sur un contour fermé est égale à l'intégrale du rotationnel de ce champ sur n'importe quelle surface S s'appuyant sur ce contour :

$$\Gamma = \iint_S (\vec{\nabla}_\wedge \vec{u}) \cdot d^2\vec{S} = \iint_S \vec{\omega} \cdot d^2\vec{S},$$

où $\vec{\omega} = \vec{\nabla}_\wedge \vec{u}$ est la vorticité (cf. § 1.4). La vorticité étant nulle pour un écoulement potentiel, on retrouve bien $\Gamma = 0$. Etant donné que $d\Gamma/dt = 0$, on a donc $\Gamma = 0$ à tout instant : ceci démontre que le caractère irrotationnel d'un écoulement perdure pour un fluide parfait.

La situation inverse où le contour entoure un obstacle n'a rien d'exotique, et est au contraire d'un grand intérêt pratique : c'est la situation que l'on rencontre lorsqu'un objet (une aile d'avion par exemple) est en mouvement dans un fluide. Si l'on choisit un contour qui entoure l'objet, on peut avoir $\Gamma \neq 0$, ce qui signifie que le potentiel Φ est multivalué (en un point \vec{r} donné, $\Phi(\vec{r})$ est défini à $\Delta\Phi = n\Gamma$ près, où n est le nombre de tours). On peut alors montrer que la force de portance est proportionnelle à la circulation (ce résultat est lié à l'effet Magnus, TD 4).

3.3.3 Potentiels de vitesse de quelques écoulements simples

Un grand nombre d'écoulements potentiels peuvent être décrits en superposant le potentiel de vitesse de quelques écoulements simples, qu'il est utile de connaître.

Ecoulement uniforme

Pour un écoulement uniforme $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{U}$, le potentiel de vitesse est

$$\Phi(\vec{r}) = \vec{U} \cdot \vec{r}.$$

Par exemple, pour l'écoulement $\vec{u} = U\vec{e}_x$, on a simplement $\Phi(x, y) = Ux$.

Source ou puits 2D

Une source (ou un puits) 2D est l'écoulement axisymétrique radial $\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r$ induit par un débit surfacique Q au point $r = 0$. Puisque $Q = \int u_r(r) r d\theta = 2\pi r u_r(r)$ doit être indépendant de r , le champ de vitesse est donné par

$$\vec{u}(\vec{r}) = u_r(r)\vec{e}_r = \frac{Q}{2\pi r}\vec{e}_r$$

($Q > 0$ pour une source et $Q < 0$ pour un puit). Ce champ de vitesse présente une divergence en $r = 0$, et n'est donc valable que pour $r \neq 0$. Le potentiel d'un tel écoulement s'écrit

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi} \ln(r/r_0),$$

où r_0 est une constante arbitraire, introduite pour que l'argument de la fonction \ln soit sans dimension. Bien qu'il existe une singularité en $r = 0$, la circulation Γ pour un contour C entourant la source est nulle, car $u_\theta = 0$ pour cet écoulement.

Dipôle 2D

Un dipôle est l'association de deux “pôles” d'intensité opposée, en l'occurrence une source de débit $+Q$ située en un point S_1 et un puit de débit $-Q$ situé en un point S_2 , séparés d'une distance $\vec{d} = \vec{S}_1 \vec{S}_2$. Les lignes de courant issue de la source vont donc toutes rejoindre le puit. On obtient le potentiel de vitesse d'un dipôle 2D en superposant les potentiels de vitesse de chacun des deux pôles. Par un calcul analogue au calcul classique d'un dipôle électrostatique, on obtient en champ lointain, pour des distances r grandes comparées à d ,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2},$$

où l'on a introduit le moment dipolaire $\vec{p} = Q\vec{d}$. Le champ de vitesse associé décroît en $1/r^2$, plus vite que celui en $1/r$ d'une source ou d'un puit³.

Tourbillon filiforme

Le champ de vitesse en coordonnées cartésiennes (r, θ, z) d'un tourbillon filiforme d'axe z est donné par

$$\vec{u} = u_\theta(r)\vec{e}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{e}_\theta. \quad (3.10)$$

Comme nous l'avons vu au § 1.4, ce champ de vitesse est irrotationnel, mais possède une singularité en $r = 0$ (vitesse infinie et vorticité non définie). Le potentiel associé est

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\Gamma\theta}{2\pi}.$$

On a ici un exemple de potentiel multivalué : la fonction Φ augmente d'un incrément Γ pour chaque tour effectué autour de l'axe du tourbillon. Si l'on définit le contour C comme un cercle de rayon r , on vérifie que la circulation (3.9) est bien donnée par Γ , qui n'est pas nul ici. Cet écoulement illustre bien la possibilité d'avoir $\int \vec{\omega} \cdot d^2 \vec{S} \neq 0$, bien que $\omega = \vec{0}$ en tout point hors de la singularité en $r = 0$.

NB : Bien entendu, on ne peut pas écrire de potentiel de vitesse $\Phi(\vec{r})$ pour un tourbillon de rotation solide, tel que $u_\theta(r) = \Omega r$. Mais pourquoi au fait ?...

3.3.4 Pour aller au-delà

D'autres exemples de décomposition d'écoulements potentiels comme sommes d'écoulements simples (puits, sources, dipôles...) sont donnés dans le chapitre 6 de la Ref. [5].

A noter enfin une propriété supplémentaire remarquable pour les écoulements 2D à la fois incompressibles et irrotationnels. Nous avons vu au chapitre 1 que les écoulements 2D incompressibles pouvaient être décrits par une fonction de courant Ψ , telle que $\vec{u}(x, y) = \vec{\nabla}_\wedge(\Psi \vec{e}_z)$. S'ils sont de surcroît irrotationnels, ils vérifient aussi $\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi$, et la fonction de courant Ψ est également solution de l'équation de Laplace (3.8) (pourquoi donc ?). Dans ce cas, les lignes iso- Ψ (c'est-à-dire les lignes de courant) sont perpendiculaires aux lignes iso- Φ : cette propriété est illustrée en figure 3.4, montrant l'écoulement potentiel autour d'un cylindre. Pour ce type de problème, il existe une méthode de résolution analytique, non développée ici, qui combine les 2 potentiels Φ et Ψ .

Exercice : représenter les iso- Φ et iso- Ψ des 3 écoulements décrits ci-dessus (écoulement uniforme $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{U}$, source ou puits, et tourbillon), et vérifier que ces réseaux de courbes se croisent bien à angle droit.

3. D'une manière générale, dans un développement multipolaire, plus l'ordre considéré est élevé (monopole, dipole, quadrupole etc), plus le champ associé décroît vite à l'infini.

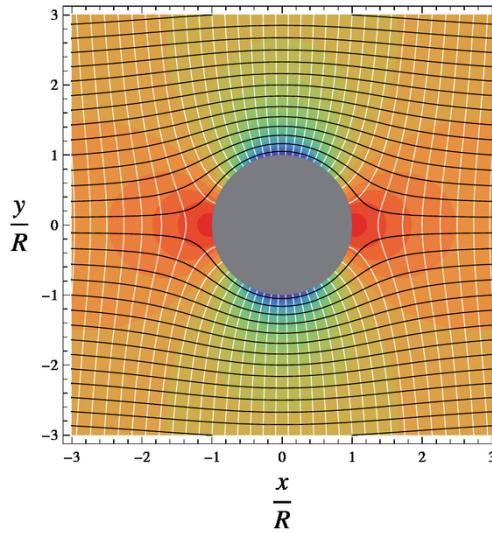


FIGURE 3.4 – Ecoulement 2D potentiel, irrotationnel et stationnaire autour d'un cylindre. Les lignes de courant (en noir) sont telles que la fonction de courant Ψ est constante, et sont perpendiculaires aux lignes iso-potentielles $\Phi = \text{cste}$ (en blanc).

3.4 Théorème(s) de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est un résultat très utile aux nombreuses conséquences pratiques, qui traduit la conservation de l'énergie mécanique pour un fluide parfait. Ce théorème découle de l'équation d'Euler, et existe sous deux variantes : stationnaire, ou instationnaire-mais-irrotationnelle.

3.4.1 Cas des écoulements stationnaires

Nous allons d'abord dériver la première variante de ce théorème, avec les hypothèses suivantes :

- Ecoulement stationnaire ($\partial/\partial t = 0$).
- Fluide parfait (viscosité nulle)
- Ecoulement incompressible (densité ρ constante)⁴

A noter que l'hypothèse d'écoulement irrotationnel (ou potentiel) n'est pas faite dans un premier temps : il peut donc exister une vorticité non nulle ici.

On part de l'équation d'Euler stationnaire :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}. \quad (3.11)$$

Afin d'obtenir une équation pour l'énergie mécanique, l'objectif est d'intégrer spatialement cette équation. Pour cela, il est nécessaire d'écrire chaque terme sous forme d'un gradient.

Le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ peut se ré-écrire sous la forme

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2}\vec{u}^2 \right) + \vec{\omega} \wedge \vec{u}, \quad (3.12)$$

où $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ est le vecteur vorticité.

Démontrons l'identité vectorielle (3.12). Pour cela, partons du produit vectoriel $\vec{\omega} \wedge \vec{u}$ sous forme tensorielle. La i ème composante du vecteur $\vec{\omega} \wedge \vec{u}$ s'écrit :

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{u})_i = \epsilon_{ijk} \omega_j u_k$$

4. Il existe une généralisation aux fluides compressibles dits *barotropes*, non décrite ici.

(voir l'Annexe D, § D.3.3, pour la définition et les propriétés du tenseur antisymétrique ϵ_{ijk}). En utilisant la définition de la vorticité, on a $\omega_j = -\epsilon_{jlm}\partial u_l/\partial x_m$, d'où

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{u})_i = -\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}\frac{\partial u_l}{\partial x_m}u_k.$$

On utilise l'identité $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ (cf. § D.3.4) ainsi que la propriété d'antisymétrie de ϵ_{ijk} , et l'on obtient :

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{u})_i = (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})\frac{\partial u_l}{\partial x_m}u_k = u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i}.$$

On reconnaît bien la i ème composante de $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ et de $\vec{\nabla}(\vec{u}^2/2)$.

Le poids (par unité de volume) $\rho\vec{g}$ est une force conservative : elle dérive de l'énergie potentielle de pesanteur (par unité de volume) ρgz :

$$\rho\vec{g} = \vec{\nabla}(\rho gz),$$

où $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ et \vec{e}_z est dirigé vers le haut. On obtient donc

$$\vec{\nabla} \left(\rho \frac{\vec{u}^2}{2} + p + \rho gz \right) = -\rho \vec{\omega} \wedge \vec{u}. \quad (3.13)$$

Le terme de gauche a bien la forme recherchée, sous forme d'un gradient. Cependant, pour conduire à une loi de conservation, cette équation doit prendre la forme $\vec{\nabla}(\dots) = 0$, de sorte que la quantité entre parenthèses soit constante. C'est le cas lorsque le membre de droite, $\vec{\omega} \wedge \vec{u}$, s'annule. Ce terme s'annule dans 2 situations : le long de chemins colinéaires à \vec{u} (il s'agit de lignes de courant), ou colinéaires à $\vec{\omega}$ (il s'agit de lignes de vorticité). La première situation est bien évidemment la plus naturelle.

Considérons une ligne de courant, décrite par une abscisse curviligne $d\vec{s} = \vec{u} dt$. En multipliant l'Eq. (3.13) scalairement par $d\vec{s}$, et en utilisant la propriété

$$d\Phi = (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{s},$$

on obtient :

$$d \left(\frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 + p + \rho gz \right) = \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \cdot d\vec{s} = \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{u} dt = 0.$$

La dernière égalité découle de $\vec{\omega} \wedge \vec{u} \perp \vec{u}$. Ainsi, la quantité entre parenthèse, appelée parfois la **charge**,

$$C = \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 + p + \rho gz, \quad (3.14)$$

vérifie $dC = 0$ le long d'une ligne de courant. C'est le **Théorème de Bernoulli : la charge C est constante le long d'une ligne de courant**. Remarquons que dans le cas statique ($\vec{u} = \vec{0}$), on retrouve l'équation de l'hydrostatique intégrée, $p(z) = C - \rho gz$. Si l'on peut négliger le terme de gravité, ce théorème exprime simplement la propriété

$$\text{Augmentation de la vitesse} \quad \rightarrow \quad \text{dépression}$$

et réciproquement.

On reconnaît dans la quantité C l'énergie mécanique (par unité de volume) d'une particule fluide : le terme $\rho\vec{u}^2/2$ est l'énergie cinétique, ρgz l'énergie potentielle de pesanteur, et la pression p l'énergie interne (on se rappellera de la relation classique en thermodynamique, $dU = -pdV$, où U est l'énergie interne. Ainsi, p est bien une énergie par unité de volume). Le théorème de Bernoulli établit donc que l'énergie mécanique d'une particule fluide est conservée le long d'une ligne de courant. Ce résultat n'est pas surprenant, puisque l'hypothèse de fluide parfait (viscosité nulle) suppose justement l'absence de dissipation. A noter que le même raisonnement s'applique



FIGURE 3.5 – Jet d'eau, montrant une trajectoire parabolique (Fontaine d'Hercule, Palais Royal d'Aranjuez, Madrid).

également aux lignes de vorticité ($\parallel \vec{\omega}$). Mais l'application aux lignes de courant ($\parallel \vec{u}$) est d'une portée pratique beaucoup plus importante.

On peut interpréter p dans l'Eq. (3.14) comme une “énergie élastique” : si le fluide ralentit, la pression augmente, comme un ressort que l'on comprimerait le long de la ligne de courant. Cette pression plus élevée “stocke” ainsi de l'énergie par compression, qui pourra être relâchée pour redonner de la vitesse.

Notons enfin que la seule force volumique considérée ici est le poids $\rho\vec{g}$ (par unité de volume). Toute autre force, à condition qu'elle dérive d'un potentiel φ , aurait pu être utilisée. Dans le cas d'une force (par unité de masse) $\vec{f} = \vec{\nabla}\varphi$, la charge conservée (3.14) se généralise à

$$C = \frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + p + \rho\varphi.$$

3.4.2 Jet d'eau libre

Un jet d'eau libre (cf. figure 3.5) fournit une jolie illustration de cette loi de conservation. L'égalité de la pression de part et d'autre de l'interface eau-air fait que la pression dans le jet est constante, égale à la pression de l'air. La loi (3.14) devient donc simplement $\frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + \rho g z = \text{cste}$: c'est la situation de la chute libre, dont la solution est une trajectoire parabolique (comme si chaque particule fluide était une masse ponctuelle indépendante et suivait sa trajectoire parabolique). Au point le plus haut du jet, la vitesse est minimale, et le jet devrait s'épaissir du fait de la conservation du débit ($\rho U S = \text{cste}$).

En réalité, cela ne marche pas toujours aussi bien que sur la figure 3.5 : si le jet n'est pas bien régulier, il va rapidement se fractionner en gouttelettes, et le frottement de l'air sur ces gouttelettes conduira à une forme assez éloignée de la parabole théorique.

3.4.3 L'effet Venturi

Considérons la ligne de courant centrale dans un tube de section variable (cf. figure 3.6). La conservation du débit volumique $Q_v = US$ (où S est la section) induit une sur-vitesse, et donc une dépression, au point le plus étroit, en B. Cette dépression est visualisée par un tube manométrique vertical, dans lequel on peut appliquer la loi de l'hydrostatique : $\rho g \Delta h_{AB} = p_B - p_A$. Ce dispositif permet, à partir d'une mesure de Δh_{AB} , d'en déduire le débit : on l'appelle **débitmètre de Venturi**.

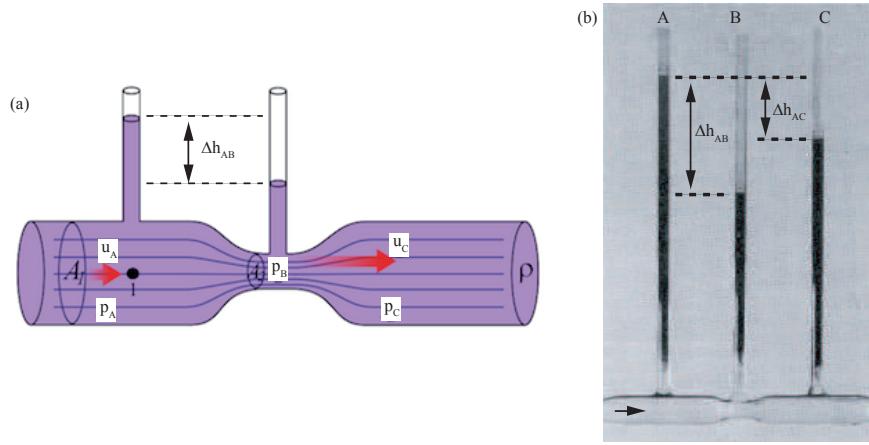


FIGURE 3.6 – Débitmètre de Venturi. (a) Schéma de principe. (b) Illustration de l'effet de charge (on devrait avoir $p_C = p_A$ en l'absence de dissipation, soit $\Delta h_{AC} = 0$).

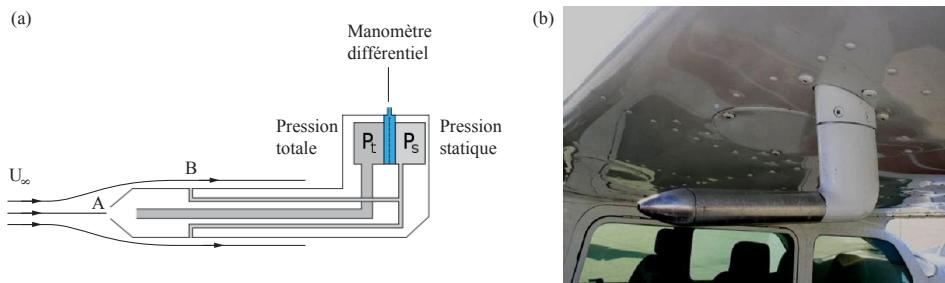


FIGURE 3.7 – Tube de Pitot. (a) Schéma de principe. (b) Tube de Pitot utilisé en aéronautique.

Exercice : Exprimer le débit volumique Q_v en fonction de Δh_{AB} et des sections S_A et S_B .

3.4.4 Tube de Pitot

Le tube de Pitot, déjà évoqué au § C.1, est un dispositif destiné à mesurer la vitesse d'un fluide, reposant sur le théorème de Bernoulli (cf. figure 3.7). Cet outil est très utilisé en aéronautique pour déterminer la vitesse de l'avion (plus précisément, sa vitesse relative par rapport au vent).⁵

Le principe du tube de Pitot est de mesurer la pression en 2 points : sur le point de stagnation (face à l'écoulement) et sur le côté. Considérons 2 lignes de courant voisines, venant de l'infini avec une vitesse U_∞ et une pression p_∞ . Puisque $U_A = 0$, l'équation de Bernoulli sur la ligne de courant finissant au point de stagnation s'écrit

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_A \quad (3.15)$$

(étant donnée la petite taille du tube et la faible densité de l'air, on peut négliger le terme de

5. Une sonde de Pitot défectueuse, du fait de l'engivrement, serait responsable du crash du vol Rio-Paris en 2009.

pensanteur). Sur la ligne de courant venant contourner la pointe, on a :

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2. \quad (3.16)$$

Si l'on considère que cette deuxième ligne de courant est très faiblement défléchie (tube bien profilé), on à $U_B \simeq U_\infty$, et en combinant les Eq. (3.15) et (3.16) on obtient :

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2.$$

Ainsi, il suffit de mesurer la différence de pression $\Delta p = p_A - p_B$ pour en déduire la vitesse,

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}.$$

Cette mesure peut se faire soit à l'aide d'un "manomètre en U" (cf. figure B.5), soit à l'aide d'un manomètre différentiel à membrane (mesure de la force par unité de surface par déplacement d'une membrane entre les 2 compartiments à pression p_A et p_B).

3.4.5 Cas des écoulements instationnaires mais irrotationnels

La généralisation de l'équation de Bernoulli pour les écoulements instationnaires est impossible : en effet, on ne peut pas écrire en général le terme instationnaire de l'équation d'Euler, $\partial \vec{u} / \partial t$, sous forme d'un gradient.

Toutefois, nous avons vu au § 3.3 que cette opération est possible dans le cas particulier de l'écoulement *irrotationnel* (ou *potentiel*). Dans ce cas, on peut écrire $\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi$, où Φ est le potentiel de vitesse, et le terme instationnaire $\partial \vec{u} / \partial t$ peut alors s'écrire sous la forme $\vec{\nabla}(\partial \Phi / \partial t)$ par permutation des dérivées spatiale et temporelle. Ainsi, l'équation d'Euler instationnaire,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g},$$

peut s'écrire sous la forme

$$\vec{\nabla} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho \vec{u}^2 + p + \rho g z \right) = 0. \quad (3.17)$$

Il faut remarquer que, contrairement au cas précédent, le membre de droite est ici toujours 0, quelle que soit le chemin d'intégration, du fait que $\vec{\omega} = \vec{0}$ par hypothèse. On obtient la **version instationnaire-mais-irrotationnelle du théorème de Bernoulli : la charge**

$$C(t) = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho (\vec{\nabla}\phi)^2 + p + \rho g z, \quad (3.18)$$

est donc constante dans tout l'espace, et pas seulement le long des lignes de courant. En revanche, $C(t)$ peut maintenant dépendre du temps. Rappelons que, dans le cas examiné précédemment (rotationnel mais stationnaire), le membre de droite $\vec{u} \wedge \vec{\omega}$ conduisait à une constante uniquement le long de lignes de courant (colinéaires à \vec{u}) ou de vorticité (colinéaires à $\vec{\omega}$).

Le résultat (3.17), étant restreint aux écoulements irrotationnels, a donc une portée moins grande que l'Eq. (3.14). Mais, lorsqu'il s'applique, il est très puissant, car la constante est la même quelque soit la ligne de courant considérée, ce qui permet dans certains cas de simplifier le problème.

Application : Le problème des ondes de surface (figure 3.3) se traite à l'aide de cette version instationnaire-mais-irrotationnelle du théorème de Bernoulli (cf. TD 3).

Exercice : On considère de nouveau le tourbillon filiforme d'axe z et de circulation Γ (cf. § 3.10). Exprimer le champ de pression $p(r, z)$, étant donnée la condition aux limites : $p(r = \infty, z = 0) = p_0$. Montrer que la pression est singulière selon l'axe du tourbillon. Remarque : ce problème peut se résoudre via le théorème de Bernoulli, ou directement via l'équation d'Euler.

3.4.6 Pertes de charge

Il existe deux raisons pour lesquelles l'équation de Bernoulli ne s'applique plus pour un écoulement réel :

- l'effet de la viscosité, qui va transformer une partie de l'énergie mécanique en énergie thermique (le fluide chauffe...). Ainsi, le bilan d'énergie que nous avons effectué, qui ne prend pas en compte l'énergie thermique, n'est plus respecté.
- l'effet d'instationnarités et/ou la présence de vorticité : c'est le cas lorsque l'écoulement devient turbulent.

A noter que, dans ce dernier cas, l'énergie mécanique de l'*écoulement moyen* est transférée sous forme d'énergie cinétique des fluctuations de vitesse turbulentes (tourbillons), qui à leur tour vont dissiper leur énergie par viscosité. Bref, en fin de compte, c'est encore la viscosité qui est coupable...

Une des manifestations de la dissipation d'énergie est que, pour un écoulement dans une conduite horizontale de section constante, la pression du fluide diminue au lieu de rester constante (nous y reviendrons au chapitre 5). Cette diminution de pression est appelée **perte de charge**.

Il n'existe pas de généralisation du théorème de Bernoulli pour un écoulement instationnaire et rotationnel. Cependant, en fonction de la nature de l'écoulement, de l'importance des effets visqueux (caractérisés par le nombre de Reynolds), les ingénieurs savent modifier empiriquement ("à la main") l'équation de Bernoulli pour rendre compte de la dissipation, en introduisant un **coefficent de perte de charge** Δp :

$$\frac{1}{2}\rho\vec{u}_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho\vec{u}_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p. \quad (3.19)$$

On distingue en général les pertes de charge *régulières*, réparties de long de l'écoulement (par exemple dans un tube de section constante), et les pertes de charge *singulières*, localisées à une région de l'écoulement où les hypothèses de fluide parfait ne s'appliquent plus. Ce phénomène de perte de charge singulière est visible sur la figure 3.6(b) : en l'absence de dissipation, on devrait avoir $p_c = p_A$, car $z_c = z_A$ et $u_C = u_A$ par conservation du débit. Les niveaux des manomètres permettent de visualiser directement la perte de charge $\Delta p = \rho g \Delta h_{AC}$, due à l'écoulement tourbillonnaire à l'aval de la contraction.

3.4.7 Cavitation

Une conséquence remarquable de l'équation de Bernoulli est que, lorsque la vitesse augmente beaucoup, la pression diminue beaucoup, et peut même devenir en théorie négative... Même si cela ne pose pas de problème du point de vue des équations de la mécanique des fluides (où la pression n'intervient que par son gradient, et donc la référence de pression n'importe pas), cela pose évidemment un problème pour la relation d'état du fluide.

Ce phénomène de cavitation intervient typiquement lorsque la vitesse est d'ordre $u = \sqrt{2p_0/\rho}$, où p_0 est la pression de référence. Dans le cas de l'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$), en prenant $p_0 = 1 \text{ atm}$, on obtient $u \simeq 14 \text{ m s}^{-1}$, ce qui est tout-à-fait atteignable expérimentalement. Dans le cas de l'air en revanche, ($\rho \simeq 1,210 \text{ kg m}^{-3}$), l'écoulement deviendra supersonique bien avant que la pression dynamique n'atteigne 0.

La conséquence de cette chute de pression pour un écoulement rapide dans l'eau est visible sur la figure 3.8 : en contournant l'obstacle, l'écoulement est accéléré, la pression diminue, jusqu'à atteindre la pression de vapeur saturante (de l'ordre de 20 mbar pour de l'eau à 20°C). Il y a alors changement de phase liquide-vapeur (l'eau bout !) : c'est le phénomène de **cavitation**.



FIGURE 3.8 – Phénomène de cavitation. L’écoulement accélère en contournant l’obstacle ; sa pression diminue, jusqu’à déclencher l’apparition de bulles de vapeur.

En pratique, la présence d’air dissout dans l’eau fait que le phénomène de cavitation intervient à des pressions moins basses que la pression de vapeur saturante. Ce phénomène pose des problèmes de bruit (repérage acoustique de projectiles sous-marins) et d’endommagement des hélices par corrosion.

Chapitre 4

Fluides visqueux, équation de Navier-Stokes

Après avoir abordé les fluides parfaits au chapitre 3, nous introduisons ici un ingrédient supplémentaire : la viscosité, responsable de l'existence de contraintes de frottement dans le fluide, qui peut se manifester sous forme d'une force de traînée sur un objet en déplacement dans un fluide. La prise en compte de la viscosité dans le bilan de quantité de mouvement va permettre de dériver l'équation de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles. Des solutions de cette équation dans des géométries d'écoulement simples seront abordées dans le chapitre suivant.

4.1 Manifestation de la viscosité

4.1.1 Transfert diffusif de quantité de mouvement

Avant d'expliquer l'origine de la viscosité, nous allons d'abord faire une analogie avec le transfert de chaleur (loi de Fourier). Lorsqu'un milieu continu (solide ou fluide) est soumis à une différence de température, il se crée un flux de chaleur de la région chaude vers la région froide. Si la différence de température est maintenue aux extrémités, ce flux de chaleur va conduire à l'établissement d'un profil de température stationnaire. Dans le cas contraire, la température va progressivement s'homogénéiser, et tendre vers une température intermédiaire à temps long.

Considérons pour fixer les idées un fluide entre 2 plaques planes, en $y = 0$ et $y = h$, à températures T_1 et T_2 , avec $T_2 > T_1$ (cf. figure 4.1).¹ Un flux de chaleur donné par la loi de Fourier, $\vec{j}_Q = -k\vec{\nabla}T$, va prendre place de haut en bas, où k est la conductivité thermique. Pendant le régime transitoire, une particule fluide donnée va donc gagner de la chaleur δQ si le flux $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q$ ne s'équilibre pas sur toute sa surface. L'évolution de la température de cette particule fluide s'obtient par la relation différentielle $\delta Q = \rho c_p dT$, conduisant au final à l'équation de diffusion de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T, \quad (4.1)$$

où l'on a introduit le coefficient de diffusivité thermique, $\kappa = k/\rho c_p$, exprimé en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Cette équation a bien la forme générale d'une **équation de diffusion : dérivée 1ère en temps et 2nde en espace**. A temps long, il va s'établir un profil de température linéaire, $T(y) = T_1 + (T_2 - T_1)y/h$, tel que le flux de chaleur \vec{j}_Q soit constant (on a $\vec{j}_Q = -k \Delta T/h \vec{e}_y$) et $\partial T / \partial t = 0$.

Venons-en à la viscosité. On peut imaginer une expérience analogue à notre expérience de transfert de chaleur, en remplaçant la température par la quantité de mouvement horizontale. On suppose donc deux plaques en $y = 0$ et $y = h$, animées de vitesses horizontales 0 et U respectivement. Cette géométrie porte le nom d'**écoulement de Couette plan**. Un flux de quantité

1. Si l'on chauffait au contraire le fluide par le dessous, cette géométrie pourrait donner lieu à une phénomène de convection thermique (mise en mouvement du fluide par force de flottaison), qui ne sera pas considéré pas ici.

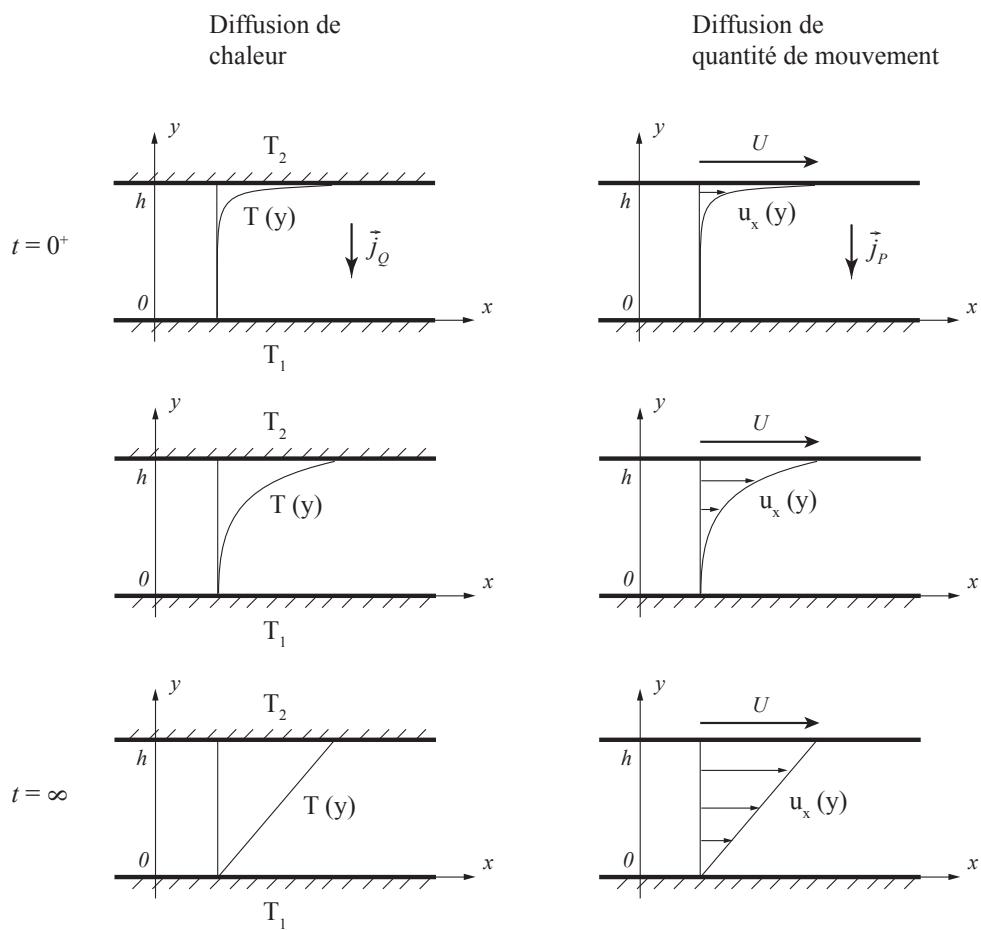


FIGURE 4.1 – Analogie entre transfert de chaleur (à gauche) et transfert de quantité de mouvement (à droite).

de mouvement $\vec{j}_P \propto -\vec{\nabla}(\rho u_x)$, analogue à la loi de Fourier, va prendre place ; ici, le coefficient de proportionnalité (analogue de k) ne porte pas de nom particulier. Dans cette expression, ρu_x est considérée comme une quantité scalaire, composante horizontale de la quantité de mouvement (par unité de volume). Ainsi, la quantité de mouvement va se propager de proche en proche, de haut en bas, par un effet d'entraînement visqueux. L'équation de diffusion obtenue, analogue à l'Eq. (4.1), s'écrit ici

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_x, \quad (4.2)$$

où l'on a introduit la **viscosité cinématique** ν , analogue à la diffusivité thermique κ dans le problème thermique. ν s'exprime aussi en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ (en fait, le coefficient qui apparaît dans une telle équation de diffusion s'exprime toujours en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$, quelque soit la quantité diffusée). En poursuivant l'analogie, il va s'établir à temps long un profil de vitesse linéaire, $u_x(y) = Uy/h$, tel que le flux de quantité de mouvement \vec{j}_P soit constant et $\partial u_x / \partial t = 0$.

Ainsi, la viscosité est la quantité qui caractérise le **transfert par diffusion de quantité de mouvement**. A noter que, dans cet exemple, nous avons choisi une géométrie telle que la quantité de mouvement est diffusée *perpendiculairement* au mouvement. Rien n'empêche à la quantité de mouvement d'être également diffusée *le long* du mouvement. Cependant, cette situation est en pratique masquée par le *transport convectif* (i.e., c'est le mouvement du fluide lui-même qui transporte la quantité considérée, ici la quantité de mouvement). Ce transport convectif, lorsqu'il existe, est en général bien plus efficace que le transport diffusif.

4.1.2 Origine physique de la viscosité

La viscosité assure donc le transfert diffusif de quantité de mouvement d'une couche fluide à la suivante. Qu'est-ce qui est à l'œuvre à l'échelle microscopique pour assurer ce transfert ?

L'agitation thermique (mouvement Brownien) des molécules fait que celles-ci ne restent pas confinées dans le volume \mathcal{V} d'une "particule fluide". En entrant et sortant, elles entrent en collision avec d'autres molécules. Ce faisant, elles échangent de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique avec les molécules voisines. Les lois de conservation sur les collisions élastiques en mécanique du point montrent que les particules rapides cèdent énergie et quantité de mouvement aux particules lentes, tendant ainsi vers une homogénéisation spatiale de ces propriétés.

La viscosité, qui assure le transfert diffusif de la quantité de mouvement, est donc la manifestation macroscopique des collisions à l'échelle moléculaire. Ces collisions assurent le transfert de chaleur (diffusivité thermique κ) et de quantité de mouvement (viscosité cinématique ν). Dans la géométrie de l'écoulement de Couette (figure 4.1b), les molécules rapides des couches de fluide supérieures vont "contaminer" les molécules lentes des couches inférieures, et ainsi les entraîner vers la droite de proche en proche. Dans un fluide parfait (sans viscosité), la plaque supérieure glisserait sans frotter à la vitesse U sur un fluide qui resterait au repos.

A noter que cette description uniquement en terme de collisions élastiques est surtout pertinente pour les gaz ; d'ailleurs, on a $\nu \simeq \kappa$ pour les gaz ($\nu/\kappa \simeq 0.67$ dans le cas de l'air), montrant bien qu'il s'agit essentiellement du même mécanisme physique à l'œuvre pour ces deux types de transfert. Pour les liquides, la nature des forces de cohésion entre les molécules complique un peu cette description (pour l'eau, on a $\nu/\kappa \simeq 7.1$).

4.1.3 Temps de diffusion

Quel est le temps nécessaire à l'établissement du profil de vitesse (ou de température) dans l'expérience de la figure 4.1 ? L'interprétation microscopique de la viscosité nous suggère de regarder la vitesse de transmission d'une information dans le modèle de la marche aléatoire (mouvement Brownien). On sait qu'un marcheur aléatoire parcourt une distance $\ell = a\sqrt{N}$ après N pas, où a est la taille d'un pas, soit $\ell \simeq a\sqrt{t/\tau}$ au bout d'un temps t (τ étant le temps moyen entre 2 collisions). On obtient ainsi la loi de diffusion

$$\ell(t) \simeq \sqrt{\nu t} \quad (4.3)$$

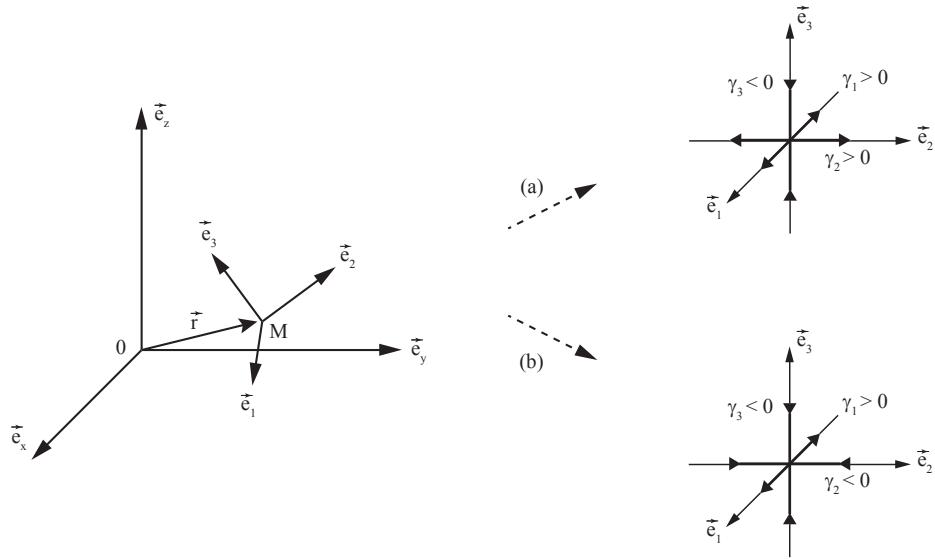


FIGURE 4.2 – Au voisinage d'un point M, on diagonalise le tenseur de déformation e_{ij} . Localement, pour un fluide incompressible, l'écoulement peut avoir soit la structure (a) (deux directions dilatantes et une contractante), soit la structure (b) (vice-versa).

où, dans notre modèle simple, on interprète le coefficient de diffusion comme a^2/τ (qui s'exprime bien en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$). **D'une manière générale, un comportement en \sqrt{t} est systématiquement rencontré dans les problèmes de diffusion.**

Ceci répond à notre question : pour communiquer l'information "je bouge" (ou "je chauffe") de $y = h$ à $y = 0$, il faut un temps τ_v tel que $\ell(\tau_v) = h$, soit

$$\tau_v = \frac{h^2}{\nu}. \quad (4.4)$$

Si l'on prend $h = 10 \text{ cm}$, avec $\nu_{eau} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$, on obtient $\tau_v = 10^4 \text{ s} \simeq 3 \text{ h}$; un processus de diffusion est toujours très lent aux échelles macroscopiques.

Remarque : on peut vérifier qu'une résolution des équations différentielles (4.1) et (4.2) (voir par exemple la Ref. [5], § 2.1) conduit bien à des solutions dont le temps caractéristique est donné par (4.4).

4.2 Tenseur de gradient de vitesse

La lecture de l'annexe D est vivement conseillée pour se familiariser avec la notation tensorielle utilisée ci-dessous.

Afin d'incorporer l'effet de la viscosité dans l'équation d'Euler, il est nécessaire ici de faire un petit retour sur une notion de cinématique non abordée au chapitre 1 : le tenseur de gradient de vitesse. En effet, à l'échelle locale, le mouvement d'une particule fluide peut toujours se décomposer en trois contributions : une **translation**, une **rotation**, et une **déformation** (à volume constant ou non, selon que le fluide est incompressible ou compressible). Seules les deux premières contributions existent pour un solide indéformable. Assez naturellement, pour un fluide, nous verrons que c'est la troisième contribution, la déformation, qui est responsable de la dissipation d'énergie.

On considère l'écoulement au voisinage d'un point M, avec $\vec{r} = \vec{OM}$ (cf. figure 4.2). Pour caractériser l'évolution d'un petit élément de fluide, comparons la vitesse aux points \vec{r} et $\vec{r} + \delta\vec{r}$.

En notant δr_i les composantes du vecteur $\delta \vec{r}$, un développement limité donne

$$u_i(\vec{r} + \delta \vec{r}) \simeq u_i(\vec{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j \quad (4.5)$$

(avec sommation implicite sur l'indice j). Ainsi, un écoulement est localement caractérisé par une vitesse de translation d'ensemble, $\vec{u}(\vec{r})$, ainsi que par le **tenseur de gradient de vitesse** (exprimé en s^{-1}),

$$G_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\vec{r}, t).$$

Dans une base Cartésienne (x, y, z) , ce tenseur de rang 2 se représente comme une matrice 3×3 :

$$[G](\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

et le développement précédent s'écrit $\vec{u}(\vec{r} + \delta \vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + [G]\delta \vec{r}$. Si l'écoulement est incompressible, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, et donc $tr[G] = G_{ii} = \partial u_i / \partial x_i = 0$.

On va se placer dans la suite dans le référentiel associé au point M. Ainsi, on peut considérer que $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{0}$, et se concentrer dans la suite sur l'effet du tenseur G_{ij} .

Le tenseur G_{ij} peut se décomposer en une partie symétrique,² $e_{ij} = (G_{ij} + G_{ji})/2$ (telle que $e_{ij} = e_{ji}$) et une partie antisymétrique $\omega_{ij} = (G_{ij} - G_{ji})/2$ (telle que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$) :

$$G_{ij}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{e_{ij}(\vec{r}, t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\omega_{ij}(\vec{r}, t)}. \quad (4.6)$$

La partie symétrique e_{ij} est le **tenseur des taux de déformation**, et la partie antisymétrique ω_{ij} est le **tenseur des taux de rotation** (On les nomme aussi simplement *tenseur de déformation* et *tenseur de rotation*). Considérons chaque contribution séparément.

4.2.1 Tenseur des taux de déformation

On considère dans un premier temps un écoulement de déformation pure, avec $\omega_{ij} = 0$ et $G_{ij} = e_{ij}$. On se place pour simplifier au point $\vec{0}$ (i.e., $O = M$). Ainsi, le développement (4.5) donne simplement, au voisinage de $\vec{0}$,

$$u_i(\delta \vec{r}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j = e_{ij} \delta r_j. \quad (4.7)$$

Pour comprendre comment ce tenseur va décrire les contractions et dilatations de la particule fluide selon les 3 directions de l'espace, il est nécessaire d'étudier ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

Le tenseur e_{ij} étant symétrique, il a 6 composantes indépendantes (3 diagonales + 3 non diagonales). La matrice $[e]$ est diagonalisable, et dans sa base propre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ elle peut s'écrire sous la forme

$$[e](\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Chaque valeur propre γ_i est associée à une direction propre \vec{e}_i (attention, les valeurs propres et les directions propres associées peuvent être différentes en chaque point \vec{r} et à chaque instant t).

2. On trouve également souvent la notation s_{ij} dans les livres.

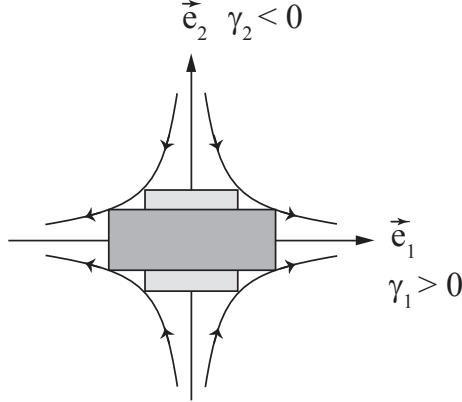


FIGURE 4.3 – Evolution d'un élément de fluide, initialement carré, dans un écoulement de déformation pure, dans le cas $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 < 0$. Si l'écoulement 2D est incompressible ($\gamma_1 + \gamma_2 = 0$), la surface de l'élément de fluide est inchangée.

Selon chacune de ces directions propres, l'écoulement est unidirectionnel (cf. figure 4.3). En effet, l'Eq. (4.7) montre que, si $\delta\vec{r}$ est choisi selon la direction propre \vec{e}_1 par exemple, on a

$$u_1(\delta\vec{r}) = e_{11}\delta r_1 = \gamma_1\delta r_1 \quad (4.8)$$

(idem pour 2 et 3). De plus, si δr_i est suffisamment petit, on a $u_i = d\delta r_i/dt$. Ainsi, pendant un temps dt , une particule initialement en position δr_i ira en position $\delta r_i(1 + \gamma_i dt)$. La direction propre \vec{e}_i est dite *dilatante* si $\gamma_i > 0$ (écoulement divergent), et *contractante* si $\gamma_i < 0$ (écoulement convergent).

Donc le fluide contenu dans un petit volume $\delta r_1\delta r_2\delta r_3$ à l'instant t occupera le volume $\delta r_1\delta r_2\delta r_3(1 + \gamma_1 dt)(1 + \gamma_2 dt)(1 + \gamma_3 dt) \simeq \delta r_1\delta r_2\delta r_3[1 + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)dt] + o(dt^2)$ à l'instant $t + dt$: le volume aura augmenté d'un ratio $\sum_i \gamma_i = tr[e]$. Ceci est illustré à 2D en figure 4.3, avec $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 < 0$. Ainsi, la trace de $[e]$, qui n'est autre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$, renseigne bien sur la dilatation ou la contraction de l'écoulement.

Dans toute la suite, on ne considère que le cas d'un fluide incompressible. On a donc

$$tr[e] = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0.$$

Si l'on ordonne les valeurs propres par ordre décroissant, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$, il existe donc 2 situations possibles pour $\gamma_i \neq 0$:

- (a) Deux directions dilatantes ($\gamma_1, \gamma_2 > 0$) et 1 contractante ($\gamma_3 < 0$) ;
- (b) Une direction dilatante ($\gamma_1 > 0$) et 2 contractantes ($\gamma_2, \gamma_3 < 0$).

La géométrie de ces deux types d'écoulement est illustrée en figure 4.2.

Exercice : Montrer que, de manière générale pour un écoulement de déformation, les lignes de courant sont des branches d'hyperbole au voisinage de 0.

4.2.2 Tenseur des taux de rotation

On considère maintenant au contraire un écoulement de rotation pure, avec $e_{ij} = 0$ et $G_{ij} = \omega_{ij}$. Comme précédemment, on se place au voisinage en $\vec{r} = \vec{0}$, et le développement (4.5) donne

$$u_i(\delta\vec{r}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta r_j = \omega_{ij}\delta r_j. \quad (4.9)$$

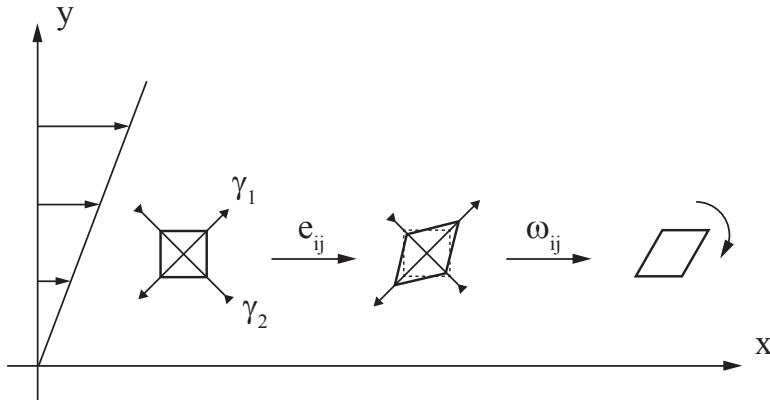


FIGURE 4.4 – L’écoulement de cisaillement correspond à la somme d’un écoulement de déformation, décrit par le tenseur symétrique e_{ij} , et d’un écoulement de rotation, décrit par le tenseur antisymétrique ω_{ij} .

On ne peut pas chercher comme précédemment les directions propres associées à ce tenseur : une matrice antisymétrique a des valeurs propres imaginaires pures, qui ne sont pas associées à des vecteurs propres réels. En revanche, on peut chercher à déterminer le vecteur instantanné de rotation autour duquel tourne la particule fluide, et la vitesse angulaire associée.

Par antisymétrie, le tenseur ω_{ij} n’a que 3 éléments non nuls indépendants, ω_{12} , ω_{13} et ω_{23} . On peut montrer que ce tenseur contient en fait la même information que la vorticité $\vec{\omega}$ vue au § 1.4, et décrit donc la rotation locale des éléments de fluide. En effet, la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ s’écrit, en notations tensorielles,³

$$\omega_i = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\epsilon_{ijk} G_{jk} = -\epsilon_{ijk} \omega_{jk}.$$

Cette égalité est d’ailleurs vraie même en présence de déformation : en effet, on a $\epsilon_{ijk} e_{jk} = 0$, car le produit d’un tenseur antisymétrique et d’un tenseur symétrique est forcément nul, donc on a toujours $\epsilon_{ijk} G_{jk} = \epsilon_{ijk} \omega_{jk}$. En écrivant pour chaque composante, $\omega_1 = -\epsilon_{123} \omega_{23} - \epsilon_{132} \omega_{32} = -\omega_{23} + \omega_{32} = 2\omega_{32}$ et ainsi de suite, on peut donc identifier les 3 termes du tenseur ω_{ij} ,

$$[\omega](\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Cette matrice ne contient rien de plus que les 3 composantes de la vorticité $\vec{\omega}$. Si on identifie avec $\vec{u} = [\omega] \delta \vec{r}$, on retrouve

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge \delta \vec{r},$$

donc localement l’écoulement est bien en rotation autour de l’axe donné par la direction de $\vec{\omega}$, à vitesse angulaire $|\vec{\omega}|/2$, conformément à ce que nous avons vu au § 1.4. Rappelons que $[\omega]$, comme $\vec{\omega}$, dépendent à priori de \vec{r} et de t .

Ainsi, étant donnée une matrice $[\omega]$ quelconque, on peut identifier les composantes de $\vec{\omega}$ selon l’Eq. (4.10), et en déduire la direction et l’amplitude de la rotation locale. Ceci achève notre analyse locale de la structure de l’écoulement au voisinage d’un point quelconque.

³. Attention, on utilise le même symbole ω pour le vecteur et le tenseur ; c’est le nombre d’indices qui permet de les distinguer.

4.2.3 Cas d'un écoulement de cisaillement plan

Illustrons l'utilisation de ces outils pour l'analyse de l'écoulement de cisaillement plan, déjà évoqué au § 1.4, dont le champ de vitesse 2D est donné par $(u_x, u_y) = (Sy, 0)$. Pour cet écoulement, seule la composante $G_{xy} = \partial u_x / \partial y = S$ du tenseur de gradient de vitesse est non nulle. Le tenseur G_{ij} est uniforme en espace, et s'écrit sous forme matricielle dans le référentiel (x, y) :

$$[G] = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La décomposition en parties symétrique et antisymétrique donne

$$[e] = \begin{pmatrix} 0 & S/2 \\ S/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\omega] = \begin{pmatrix} 0 & S/2 \\ -S/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur de taux de déformation $[e]$ n'est pas diagonal, donc les directions \vec{e}_x, \vec{e}_y ne sont pas directions propres. Si l'on diagonalise cette matrice (on résout $\det([e] - \gamma I) = 0$), on obtient les valeurs propres $\gamma_1 = S/2$ (dilatante) et $\gamma_2 = -S/2$ (contractante). Dans la base propre (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , la matrice $[e]$ se réécrit

$$[e] = \begin{pmatrix} S/2 & 0 \\ 0 & -S/2 \end{pmatrix}$$

On vérifie au passage que l'on a bien $\text{tr}[e] = \gamma_1 + \gamma_2 = 0$: l'écoulement 2D est bien incompressible (on a évidemment $\gamma_3 = 0$ selon la 3ème direction). La recherche des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres donne :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On voit que ces vecteurs propres sont perpendiculaires entre eux, et font un angle à 45° par rapport à la direction de l'écoulement (cf. figure 4.4). On en conclut que les particules fluides sont étirées selon \vec{e}_1 à un taux $S/2$, comprimées selon \vec{e}_2 à un taux $-S/2$, et tournent autour de \vec{e}_z à vitesse angulaire $-S$. Ainsi, dans un écoulement de cisaillement, on a mélange de rotation et de déformation dans une proportion telle que le déplacement selon y est nul, et l'écoulement reste purement selon x .

4.2.4 Pour s'entraîner

- 1) Caractériser l'écoulement décrit par le champ de vitesse

$$\begin{cases} u_x &= 2\gamma x \\ u_y &= -\gamma y + \Omega z \\ u_z &= -\Omega y - \gamma z \end{cases}$$

Représenter qualitativement les lignes de courant.

- 2) Caractériser le champ de déformation au voisinage d'un point $r = r_0 \neq 0$ pour l'écoulement irrotationnel axisymétrique donné par

$$\vec{u}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

(Γ est la circulation du tourbillon, cf. chapitre 3). Les directions propres dépendent-elles de la distance r_0 à l'axe du tourbillon ?

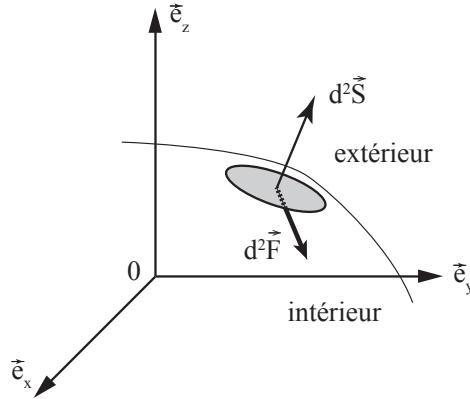


FIGURE 4.5 – Force élémentaire quelconque $d^2\vec{F}$ agissant sur une surface élémentaire quelconque $d^2\vec{S}$.

4.3 Tenseur des contraintes visqueuses

4.3.1 Définition

Une contrainte est une force par unité de surface, qui s'exprime en N m^{-2} ou en Pa (Pascal). On distingue les contraintes normales et les contraintes tangentielles. Bien que ces deux types de contraintes aient évidemment la même unité, l'usage est d'utiliser plutôt le Pa pour la contrainte normale, et le N m^{-2} pour la contrainte tangentielle.

Pour définir complètement une contrainte, il est nécessaire de spécifier la direction de la normale à la surface $d^2\vec{S}$, ainsi que la direction de la force élémentaire $d^2\vec{F}$ (figure 4.5). La relation de proportionnalité entre 2 vecteurs non nécessairement alignés doit donc s'écrire sous forme matricielle : $d^2\vec{F} = [\sigma]d^2\vec{S}$. On peut réécrire cette relation sous forme tensorielle

$$d^2F_i = \sigma_{ij} d^2S_j \quad (4.11)$$

(avec sommation sur j) : la contrainte σ_{ij} est bien un tenseur de rang 2. Donc σ_{ij} est la i ème composante de la force \vec{F} par unité de surface $d^2\vec{S}$ normale à la direction x_j . L'élément de surface $d^2\vec{S}$ étant orienté selon la convention de la *normale sortante*, c'est la portion de fluide "extérieure" (vers où pointe $d^2\vec{S}$) qui applique la force $d^2\vec{F}$ vers la portion de fluide "intérieure" (cf. figure 4.5).

Par exemple, si la surface est dans le plan (x, y) , on a $d^2\vec{S} = dx dy \vec{e}_z$. Si la force est selon $d^2\vec{F} = d^2F(\vec{e}_x + 2\vec{e}_z)/\sqrt{5}$, on a 2 éléments non nuls du tenseur de contrainte : $\sigma_{xz} = \sigma_0/\sqrt{5}$ (contrainte tangentielle) et $\sigma_{zz} = 2\sigma_0/\sqrt{5}$ (contrainte normale), avec $\sigma_0 = d^2F/dx dy$ la norme de la contrainte.

Propriété non triviale : bien que cela ne saute pas aux yeux dans la définition (4.11), **le tenseur des contraintes est symétrique** :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (4.12)$$

Nous admettrons ici cette propriété (la démonstration peut être trouvée en Ref. [5], pp. 163-164).

Exemple : Dans la géométrie de l'écoulement de Couette plan (figure 4.6), considérons la plaque supérieure, en $y = h$, animée d'une vitesse $U > 0$ selon x . Le système considéré est le fluide, donc l'élément de surface sortant est $d^2\vec{S} = dx dz \vec{e}_y$. La paroi supérieure tire le fluide vers la droite avec une force $d^2\vec{F}$, orientée selon \vec{e}_x . On a donc une contrainte locale $\sigma_{xy} = d^2F_x/d^2S_y > 0$. L'écoulement étant homogène sur toute la plaque, on peut aussi écrire de façon globale $\sigma_{xy} = F/S$.

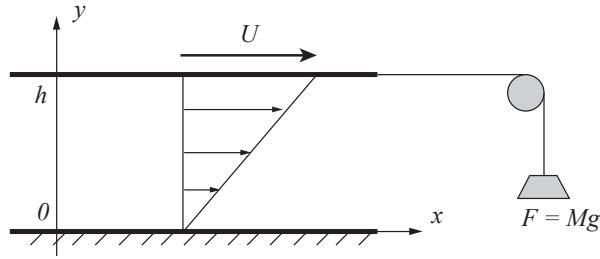


FIGURE 4.6 – La force F nécessaire pour mettre en mouvement la plaque supérieure de surface S à vitesse U est (en régime stationnaire) $F = \eta S U / h$, soit une contrainte $\sigma = F/S = \eta U/h$, où η est la viscosité dynamique.

Par la propriété de symétrie (4.12), on a aussi $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$. Il n'y a pas d'autre élément non nul à ce tenseur dans cette géométrie :

$$[\sigma] = \frac{F}{S} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.2 Pression et contrainte visqueuse

En l'absence d'écoulement (annexe B), ou bien en présence d'écoulement mais sans frottement (chapitre 3), nous avons vu que la seule contrainte est normale : il s'agit de la pression. La pression est une contrainte *isotrope* : en effet, la force exercée par l'extérieur est

$$d^2 \vec{F} = -p d^2 \vec{S}, \quad (4.13)$$

quelque soit l'orientation de $d^2 \vec{S}$. Cette propriété d'isotropie est évidente si l'on considère que la pression est un scalaire, et ne "connait" donc pas l'orientation de l'espace. [Illustration physique : la valeur de la pression atmosphérique au niveau de mon doigt, $p_0 = 10^5$ Pa, est due au poids de la colonne d'air (par unité de surface) au-dessus de mon doigt (30 N, équivalent 3 kg, sur 3 cm^2). Bien que cette colonne d'air soit au-dessus et non en-dessous, il est clair que l'air appuie sur mon doigt selon toutes les directions, de sorte que la résultante est nulle et que mon doigt n'est pas écrasé vers le sol par le poids de l'air. Même si l'*origine* (ici hydrostatique) de la pression est *anisotrope*, la pression elle-même est donc bien *isotrope*.]

En comparant les équations (4.11) et (4.13), on a immédiatement

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad (4.14)$$

soit, en notation matricielle,

$$[\sigma] = -p[I].$$

Si on considère maintenant un écoulement avec viscosité, il existe des contributions supplémentaires, à la fois normales (comme la pression) mais aussi tangentielles. On note alors :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (4.15)$$

où l'on a regroupé dans le tenseur σ'_{ij} tout ce qui n'est pas la pression. En notation matricielle, on a

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -p + \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xy} & -p + \sigma'_{yy} & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{xz} & \sigma'_{yz} & -p + \sigma'_{zz} \end{pmatrix}$$

(σ_{ij} et δ_{ij} étant symétriques, σ'_{ij} l'est aussi).

4.4 Relation contrainte-déformation

Dans les sections précédentes nous avons défini un objet *cinématique* (le tenseur de gradient de vitesse), qui dépend de l'écoulement, et un objet *dynamique* (le tenseur de contrainte). Comment relier ces deux objets ? En d'autres termes, comment un fluide soumis à un tenseur de contrainte donné va-t-il couler ? Ou inversement, à quelles forces va donner lieu un écoulement donné ?

Il est clair que la relation contrainte-écoulement ne peut pas faire intervenir la vitesse elle-même : en effet, pour un écoulement de vitesse constante, on peut faire un changement de référentiel de sorte que la vitesse soit nulle, ce qui par définition ne peut donner lieu à une force de frottement. Par un argument similaire de changement de référentiel, on voit que la contribution de rotation ω_{ij} du tenseur de gradient de vitesse ne peut pas non plus donner lieu à une force de frottement. On en déduit donc que seul le tenseur de taux de déformation, e_{ij} , peut engendrer une contrainte (et donc dissiper de l'énergie). Le tenseur de contrainte visqueuse σ'_{ij} ne peut donc être relié qu'au tenseur de déformation e_{ij} .

On définit un **fluide Newtonien** comme un fluide pour lequel cette relation contrainte-déformation est **linéaire, locale et instantanée**. En toute généralité, une telle relation peut s'écrire $\sigma'_{ij} = A_{ijkl} e_{kl}$, où A_{ijkl} est un tenseur de rang 4 (81 composantes !). Des propriétés de symétries (non discutées ici) permettent de simplifier considérablement cette relation dans le cas incompressible. On admet la **relation contrainte-déformation (ou relation constitutive) pour un fluide Newtonien incompressible** :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.16)$$

Le coefficient de proportionnalité, qui était un tenseur de rang 4, est ici un simple scalaire : il s'agit (à un facteur 2 près) de la **viscosité dynamique** η , exprimée en Pa s, ou $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$, encore appelé Poiseuille (Pl). La **viscosité cinématique** ν , exprimée en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$, est telle que $\eta = \rho\nu$. Cette relation est "tensoriellement valide", puisqu'on a proportionnalité entre 2 tenseurs symétriques de rang 2.

Exemple Une illustration immédiate est fournie par l'écoulement de Couette plan, tel que $u_x(0) = 0$ et $u_x(y = h) = U$ (figure 4.6). Le profil de vitesse solution de ce problème est $u_x(y) = Uy/h$, soit $\partial u_x / \partial y = U/h$, soit encore un taux de déformation $e_{xy} = U/2h$ constant dans tout l'écoulement (Eq. 4.6). Par l'Eq. (4.16), on obtient donc $\sigma_{xy} = 2\eta e_{xy}$, soit

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{U}{h} \quad (4.17)$$

(à noter que $\sigma'_{xy} = \sigma_{xy}$ ici, ces 2 tenseurs ne se différenciant que par la pression sur la diagonale). La force que doit fournir la plaque supérieure, de surface S , pour imposer cet écoulement ou, inversement, la résistance qu'oppose le fluide au mouvement de la plaque, est donc $\vec{F} = (\eta US/h)\vec{e}_x$. Cet écoulement de Couette plan permet donc de mesurer la viscosité du fluide, par mesure de la force F nécessaire pour imposer une vitesse U donnée. En pratique, un *rhéomètre* sur le principe de l'écoulement de Couette utilise une géométrie circulaire, plus facile à mettre en œuvre.

Si nous avons un écoulement quelconque, selon les 3 directions de l'espace, alors la composante selon x de la force élémentaire $d^2\vec{F}$ appliquée sur un élément de surface quelconque $d^2\vec{S}$ s'écrit

$$d^2F_x = \left(-p + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) d^2S_x + \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) d^2S_y + \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) d^2S_z$$

(de même pour d^2F_y et d^2F_z).

On ne s'intéresse dans la suite qu'aux fluides Newtoniens, décrits par la loi de proportionnalité (4.16). L'air et l'eau, et d'une manière générale les fluides purs, sont Newtoniens. Les fluides non

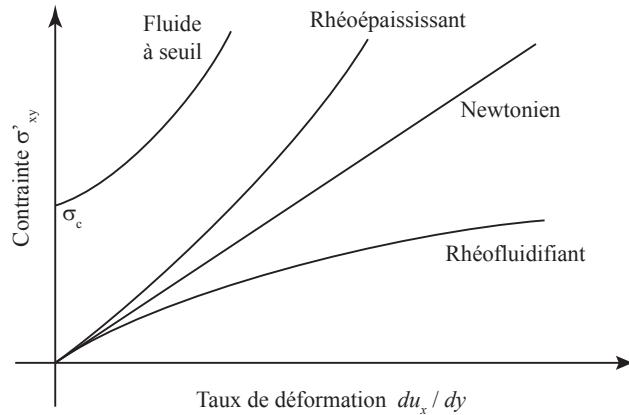


FIGURE 4.7 – Allure de la loi contrainte-déformation pour quelques classes de fluide. Par définition, le fluide Newtonien est tel que la loi contrainte-déformation est linéaire. Les fluides *rhéofluidifiants* (respectivement *rhéoépaisseurs*) sont tels que le rapport contrainte/déformation (la viscosité effective) est une fonction décroissante (respectivement croissante) du taux de déformation. Les *fluides à seuils* sont des fluides qui ne s'écoulent que pour une contrainte supérieure à une contrainte seuil σ_c .

Newtoniens, en revanche, peuvent présenter une viscosité apparente plus grande ou plus petite selon la contrainte à laquelle ils sont soumis : la figure 4.7 illustre la loi contrainte-déformation pour quelques classes de fluide. Parmi les fluides non Newtoniens, citons les gels, mousses, pâtes, peintures... Il existe une grande variété de fluides non Newtoniens, on ne peut donc pas donner de relation contrainte-déformation générique comme pour les fluides Newtoniens. La caractérisation de ces fluides est le domaine de la *rhéologie* (voir par exemple le chapitre 4 du livre Guyon, Hulin, Petit [5]).

4.5 Equation de Navier-Stokes

4.5.1 Principe Fondamental de la Dynamique pour un fluide visqueux

On reprend la forme intégrale du Principe Fondamental de la Dynamique, établie au chapitre 2 :

$$\iiint_{VC} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d^3\tau = \sum \vec{F}_{ext}. \quad (4.18)$$

Il existe deux types de forces extérieures agissant sur le volume de contrôle : les forces volumiques, \vec{F}_{VC} et les forces surfaciques, \vec{F}_{SC} . Les forces volumiques sont les mêmes qu'au chapitre 3 : on peut les regrouper sous forme

$$\vec{F}_{VC} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d^3\tau$$

(où $\rho \vec{g}$ est classiquement l'accélération de la gravité, mais peut inclure toute autre force par unité de volume). Pour ce qui est des forces surfaciques,

$$\vec{F}_{SC} = \iint_{SC} d^2\vec{F},$$

nous n'avions considéré au chapitre 3 que la contrainte de pression (contrainte normale). Il faut maintenant généraliser en tenant compte également des contraintes tangentielles. Puisque $d^2F_i =$

$\sigma_{ij} d^2 S_j$ (4.11), on a

$$F_{SC,i} = \iint_{SC} \sigma_{ij} d^2 S_j.$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski en notation tensorielle, cette intégrale surfacique peut se réécrire comme une intégrale volumique de la divergence de σ_{ij} ,

$$F_{SC,i} = \iiint_{VC} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d^3 \tau$$

(voir l'Annexe D pour la divergence d'un tenseur). En introduisant la décomposition $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}$ (4.15), on obtient alors

$$F_{SC,i} = \iiint_{VC} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} \right] d^3 \tau.$$

Nous sommes donc parvenus à écrire entièrement le PFD (4.18) sous forme d'une intégrale triple ! Comme d'habitude, on fait maintenant tendre le volume de contrôle vers 0 (en fait, vers le volume d'une "particule fluide") afin d'obtenir une équation locale :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}. \quad (4.19)$$

Cette équation est le **Principe Fondamental de la Dynamique pour une particule fluide avec contraintes quelconques**. Remarquons que pour un fluide parfait, on a $\sigma'_{ij} = 0$, et l'on retrouve simplement l'équation d'Euler (3.3).

4.5.2 Déivation de l'équation de Navier-Stokes

Il ne reste plus qu'une étape : exprimer le tenseur de contrainte σ'_{ij} en fonction du tenseur de déformation. En prenant la divergence $\partial/\partial x_j$ de l'Eq. (4.16), et en tenant compte de l'incompressibilité ($\partial u_j / \partial x_j = 0$), on obtient

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

(on a supposé que η était spatialement homogène). En reportant dans le PFD (4.19), on obtient enfin l'**équation de Navier-Stokes pour un fluide Newtonien incompressible** :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

que l'on peut maintenant réécrire sous forme vectorielle,

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{u}.$$

La encore, prendre $\eta = 0$ redonne simplement l'équation d'Euler (3.3). En divisant par ρ et en introduisant la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$, on peut aussi écrire

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (4.20)$$

(on retrouve bien dans le 1er et le dernier terme l'Eq. (4.2) que l'on avait obtenue dans une géométrie particulière). Cette équation est fondamentale : elle contient tous les ingrédients nécessaires pour résoudre l'ensemble des problèmes de mécanique des fluides Newtoniens incompressibles.

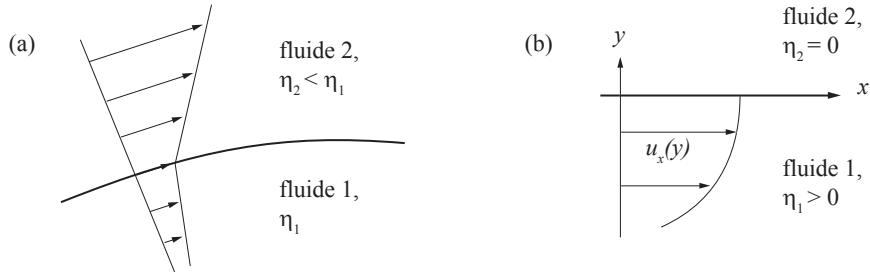


FIGURE 4.8 – Conditions aux limites à l'interface entre 2 fluides immiscibles. (a) Egalité des vitesses à l'interface, et rapport entre les pentes (dérivées de vitesse) donné par le rapport entre les viscosités η_2/η_1 . (b) Cas de l'interface libre, avec $\eta_2 = 0$, conduisant à une dérivée nulle de la vitesse du fluide 1 près de l'interface.

4.5.3 Conditions aux limites

L'équation (4.20) est un ensemble de 3 équations scalaires à 4 inconnues, (\vec{u}, p) . Elle doit donc, pour pouvoir être intégrée, être complétée d'une 4ème équation, à savoir $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ (équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible), ainsi que des conditions aux limites.

Comme pour les fluides parfaits, nous allons distinguer les conditions aux limites cinématiques (sur la vitesse) et dynamiques (sur les contraintes).

Conditions aux limites cinématiques

Pour un fluide parfait, on avait égalité entre les composantes normales à la paroi de la vitesse du fluide et celle de la paroi : $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v}_p \cdot \vec{n}$ (3.5). Pour un fluide visqueux, cette condition est plus forte : on a une **condition de non-glissement à la paroi**, aussi appelée **condition d'adhérence**, qui impose une égalité complète (vectorielle) de la vitesse de la paroi et celle du fluide :

$$\vec{u} = \vec{v}_p. \quad (4.21)$$

Bref, il reste toujours, au contact d'une paroi immobile, une fine couche de fluide immobile (ce qui rend le nettoyage à l'aspirateur pratique mais imparfait !)

Conditions aux limites dynamiques

Pour l'interface entre liquide et gaz, ou entre deux liquides immiscibles, l'égalité des contraintes normales (pression) que l'on avait pour un fluide parfait (relire le § 3.2.2), doit être généralisée pour un fluide visqueux par l'égalité entre les toutes les contraintes (normales et tangentielles).

Considérons pour simplifier une interface plane en $y = 0$ entre deux fluides 1 et 2, chaque fluide étant animé d'une vitesse selon x (cf. figure 4.8a). La condition aux limites cinématique (4.21) montre que $u_x|_1(x, 0) = u_x|_2(x, 0)$. Les composantes non-nulles du tenseur de contraintes sont $\sigma_{xy} = \sigma'_{xy}$ de part et d'autre du plan $y = 0$, et décrivent la force élémentaire $d^2 F_x$ appliquée à la surface élémentaire normale à $d^2 S_y$. Même si l'interface a une accélération, la somme des forces doit y être nulle car l'interface a une masse nulle. En utilisant la relation contrainte-déformation applicable à un fluide Newtonien (4.16), on obtient donc

$$\eta_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_1 = \eta_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_2. \quad (4.22)$$

Le profil de vitesse au voisinage de l'interface doit nécessairement avoir l'allure donnée en figure 4.8(a), le rapport des pentes étant donné par le rapport des viscosités η_1/η_2 .

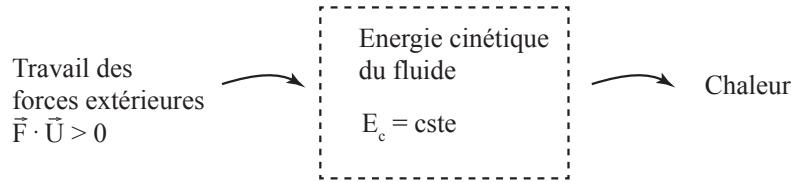


FIGURE 4.9 – Bilan d'énergie cinétique pour l'écoulement de Couette plan stationnaire : l'apport d'énergie (travail de la force exercée par la plaque supérieure) et compensé par la perte d'énergie sous forme de chaleur (travail des contraintes visqueuses dans le volume fluide).

On peut généraliser la relation (4.22) pour une interface d'orientation quelconque. On doit avoir $d^2 F_i(1 \rightarrow 2) = -d^2 F_i(2 \rightarrow 1)$. En utilisant (4.11), et étant donné que les normales sortantes sont de signe opposé, on obtient :

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_1 = \sigma_{ij} n_j \Big|_2, \quad \text{soit} \quad [\sigma] \vec{n} \Big|_1 = [\sigma] \vec{n} \Big|_2$$

A noter que l'interface est considérée ici comme plane. Si elle est courbe, il doit exister un terme de contrainte normale supplémentaire : il s'agit du saut de pression de Laplace, déjà discuté en Sec. 3.2.2.

Un cas particulier important de la condition aux limites (4.22) concerne le cas où l'on peut négliger la viscosité de l'un des fluides. C'est le cas de l'interface eau-air : on a $\eta_{air}/\eta_{eau} \simeq 0,02$. Dans ce cas, la contrainte coté air est négligeable, et l'Eq. (4.22) se résume à la **condition de surface libre** :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_{eau} = 0.$$

Cette condition signifie que le profil se raccorde perpendiculairement à l'interface (pente nulle), cf. figure 4.8(b).

4.5.4 Viscosité et dissipation d'énergie

Pour l'instant, nous avons relié la viscosité à la force (contrainte), mais pas à l'énergie. Dans la géométrie de l'écoulement de Couette plan, la plaque supérieure en mouvement impose une force au fluide. Le fluide "répond" en opposant à cette force motrice une force de frottement, de sorte que leur somme soit nulle et qu'un régime stationnaire soit atteint.

Les théorèmes fondamentaux de la physique nous disent que la variation d'énergie cinétique d'un système est donnée par le travail des forces extérieures agissant sur lui. Ainsi, en se déplaçant de $\delta \vec{x}$, la plaque supérieure apporte de l'énergie cinétique au système, via le travail $\vec{F} \cdot \delta \vec{x} > 0$, soit un travail par unité de temps (puissance) $\vec{F} \cdot \vec{U} > 0$. Puisque l'écoulement est stationnaire, l'énergie cinétique du fluide n'augmente pas : il existe donc une dissipation d'énergie dans le volume qui vient compenser ce travail apporté (figure 4.9). Cette dissipation d'énergie correspond au travail des contraintes visqueuses $[\sigma']$ dans le volume, qui transforme l'énergie cinétique en chaleur. On peut montrer que cette dissipation d'énergie par unité de volume s'écrit (§ 5.3 de la Ref [5]) :

$$\frac{de}{dt} = -\sigma'_{ij} e_{ij} = -2\eta e_{ij} e_{ij} = -\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.23)$$

(avec sommation sur i et j , soit 9 termes en tout). Le produit $e_{ij} e_{ij}$ étant la trace de $[e]^2$, de valeurs propres positives, il est donc nécessairement positif⁴ : on a bien $de/dt < 0$. Cette perte d'énergie

⁴. En effet, la matrice $[e]^2$ correspond au tenseur $e_{ij} e_{jk}$, dont la trace est $e_{ij} e_{jk} \delta_{ik} = e_{ij} e_{ji} = e_{ij} e_{ij} \dots$ voir l'Annexe D si on est perdu...

cinétique se traduit par un échauffement du fluide : l'augmentation de température par unité de temps pour une masse m de fluide est $dT/dt = -(de/dt)/mc_p$, où c_p est la chaleur massique.

Dans l'écoulement de Couette plan, pour lequel on a vu que $\partial u_x/\partial y = U/h$, cette dissipation d'énergie est homogène dans tout le volume, et vaut

$$\frac{de_c}{dt} = -\frac{1}{2}\eta \frac{U^2}{h^2},$$

cette perte d'énergie étant compensée par la puissance $\vec{F} \cdot \vec{U} > 0$ fournie par l'expérimentateur.

4.6 Dynamique de la vorticité

4.6.1 Equation d'évolution de la vorticité

De même que l'équation de Navier-Stokes (4.20) décrit l'évolution de la vitesse dans un fluide visqueux, il est possible de dériver une équation décrivant l'évolution de la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ (cf. Section 1.4). Pour cela, on part de l'équation de Navier-Stokes en décomposant le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ sous la forme déjà vue à l'Eq. (3.12) :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) + \vec{\omega} \wedge \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u},$$

et on applique l'opérateur rotationnel $\vec{\nabla} \wedge$ à l'ensemble des termes. En permutant les opérateurs $\vec{\nabla} \wedge$ avec $\partial/\partial t$ et ∇^2 , et en utilisant le fait que $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdots) = \vec{0}$, on obtient

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) = \nu \nabla^2 \vec{\omega}.$$

Enfin, en utilisant l'identité $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (4.24)$$

Dans le membre de gauche on reconnaît la dérivée Lagrangienne de la vorticité $d\vec{\omega}/dt$ (cf. Section 1.1.4) : comme toute quantité physique la vorticité $\vec{\omega}$ est transportée par l'écoulement \vec{u} .

Le dernier terme de cette équation, $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$, analogue au terme $\nu \nabla^2 \vec{u}$ de l'équation de Navier-Stokes ou au terme $\kappa \nabla^2 T$ de l'équation de Fourier, décrit la diffusion de la vorticité par l'effet de la viscosité. Ainsi, via l'agitation thermique, la vorticité des particules fluides peut se propager de proche en proche. Par exemple, une forte concentration locale de vorticité (un tourbillon filiforme par exemple) peut s'étaler radialement, conduisant au final à un tourbillon plus large mais moins intense.

Reste le terme nouveau $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$, qui décrit le phénomène d'**étirement tourbillonnaire** : la vorticité peut être amplifiée ou amortie selon quelle se trouve sur des lignes de courant en étirement ou en compression (nous illustrons cette propriété dans la section suivante). Remarquons que ce terme est nécessairement nul dans le cas d'un écoulement 2D (pourquoi?).

On peut noter enfin que l'équation (4.24) confirme un résultat déjà vu en Section 3.3.2 : en l'absence de viscosité, un écoulement initialement irrotationnel le reste à tout instant. En effet, si $\vec{\omega} = \vec{0}$ à un instant donné, l'équation (4.24) donne simplement $d\vec{\omega}/dt = \vec{0}$.

4.6.2 Illustration : le tourbillon de vidange d'un lavabo

Afin de comprendre l'origine physique du terme $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ dans l'équation (4.24), considérons par exemple l'écoulement de vidange d'un lavabo, que l'on va supposer parfaitement symétrique (figure 4.10). Supposons qu'il existe, à l'instant $t = 0$, une petite rotation du fluide⁵ autour de

5. Une telle petite rotation initiale n'ayant, à coup sûr, aucun lien avec la rotation de la Terre !

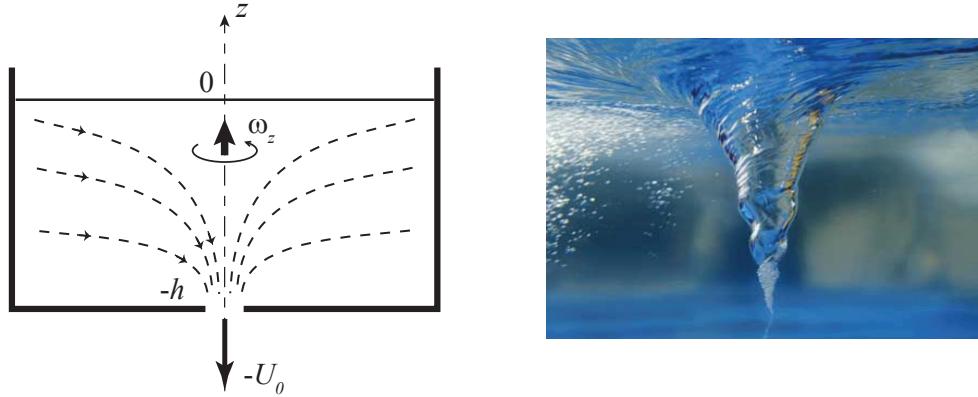


FIGURE 4.10 – Le tourbillon de vidange d'un lavabo. Par étirement tourbillonnaire, due à la convergence des lignes de courant vers l'axe du lavabo, une vorticité verticale initiale résiduelle ω_z est amplifiée.

l'axe de symétrie à vitesse angulaire Ω_0 . Ainsi, la composante verticale de la vorticité en $r = 0$ vaudra $\vec{\omega}(t = 0) = 2\Omega_0 \vec{e}_z$ (cf. Section 1.4 pour l'origine du facteur 2). La vitesse verticale u_z évolue de 0 (près de la surface, en $z = 0$) à $-U_0$ (au fond du lavabo, en $z = -h$). Il existe donc un gradient vertical de vitesse vernal, $\partial u_z / \partial z \simeq U_0/h = \gamma > 0$. En $r = 0, z = 0$, où la vitesse est nulle, et en négligeant le terme de viscosité, la projection selon z de l'équation (4.24) devient simplement

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \omega_z \frac{\partial}{\partial z} u_z \simeq \gamma \omega_z.$$

Cette équation différentielle montre que la vorticité (et donc la vitesse angulaire) va augmenter exponentiellement, $\omega_z(t) \simeq \omega_z(0) \exp(\gamma t)$: le fluide va se mettre à tourner de plus en plus vite, ce qui est un phénomène bien connu. Pourquoi ? Parce que du fait de l'existence du gradient de vitesse $\partial u_z / \partial z > 0$, l'incompressibilité impose qu'il existe un écoulement radial vers le centre, $u_r < 0$. Cet écoulement radial va transporter la vorticité ω_z vers $r = 0$, et va donc augmenter la quantité de vorticité en $r = 0$.

Une analogie permet de comprendre ce phénomène : considérons un patineur artistique (cylindrique !) de masse m et de moment d'inertie initial $I_0 \simeq mR_0^2$, où R_0 le rayon typique sur lequel est répartie initialement la masse. Si ce patineur tourne à une vitesse angulaire initiale Ω_0 , son moment cinétique (vertical) vaut $J_0 \simeq I_0\Omega_0$. S'il concentre sa masse près de l'axe de rotation (par exemple en rapprochant les bras et la jambe libre de l'axe), à une distance typique $R < R_0$, il se mettra à tourner plus vite, car son moment cinétique doit être conservé (pourquoi ?). Sa vitesse finale Ω sera donc telle que $I\Omega = I_0\Omega_0$, d'où $\Omega = \Omega_0(R_0/R)^2 > \Omega_0$.

Le mécanisme d'étirement tourbillonnaire dans le cas de la vidange de lavabo est une illustration du principe général de conservation du moment cinétique (valable lorsque les forces sont centrales, c'est-à-dire ici si l'on peut négliger les effets du frottement). En pratique, la divergence exponentielle de vorticité n'est évidemment pas physique : au bout d'un certain temps, la viscosité va nécessairement freiner cet étirement tourbillonnaire (cf. le terme $\nu \nabla^2 \omega_z \simeq -\nu \omega_z/a^2$, où a est le rayon du tourbillon), et la vitesse angulaire va finir par se stabiliser vers une valeur finie, mais qui peut être très supérieure (de 3 à 4 ordres de grandeur) à la vitesse angulaire initiale.

Chapitre 5

Ecoulements laminaires

Ce chapitre est consacré à l'étude de solutions particulières de l'équation de Navier-Stokes, vue au chapitre précédent, dans le cas où les effets visqueux sont prépondérants par rapport aux effets inertIELS. Dans ce cas, l'équation se réduit à l'**équation de Stokes**, et les solutions sont dites "**laminaires**". Ce terme signifie que l'écoulement peut être vu comme des "lames" de fluides glissant régulièrement les unes sur les autres, par opposition à un écoulement turbulent où les lignes de courant s'enchevêtrent (ce terme de "laminaire" n'est pas très judicieux toutefois : un écoulement de fluide parfait, non visqueux par définition, aurait très bien pu être qualifié de laminaire aussi...)

Après avoir introduit le nombre de Reynolds, qui compare les effets visqueux et inertIELS, ce chapitre décrit les solutions d'écoulements laminaires en géométrie parallèle (Couette, Poiseuille) et quasi-parallèle (lubrification), et finit par le problème de la force de traînée subie par un objet en déplacement dans un fluide visqueux.

5.1 Qu'est-ce qu'un écoulement laminaire ?

5.1.1 Nombre de Reynolds

Le point de départ de ce chapitre est l'équation de Navier-Stokes pour un fluide Newtonien incompressible, démontrée au chapitre précédent :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (5.1)$$

Dans cette équation, 3 termes font intervenir la vitesse : le terme instationnaire $\partial \vec{u} / \partial t$, l'accélération convective $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$, et le terme visqueux $\nu \nabla^2 \vec{u}$. La nature de l'écoulement va dépendre fortement de l'importance relative de ces termes.

Afin d'évaluer l'importance des différents termes de l'Eq. (5.1), on forme les rapports des ordres de grandeur correspondants. En notant L , U et T les échelles caractéristiques de longueur, de vitesse et de temps, on a :

- $[\partial \vec{u} / \partial t] = U/T$,
- $[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}] = U^2/L$,
- $[\nu \nabla^2 \vec{u}] = \nu U/L^2$.

On peut donc former 2 nombres sans dimension indépendants. Le premier est le nombre de Reynolds,

$$Re = \frac{[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}]}{[\nu \nabla^2 \vec{u}]} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\eta},$$

qui joue un rôle fondamental en mécanique des fluides (le choix des échelles U et L pour construire ce nombre dépend de la géométrie exacte de l'écoulement). Ainsi, si $Re \ll 1$ (écoulement lent et/ou visqueux et/ou de petite taille), l'écoulement est dominé par les effets de la viscosité : il est dit **laminaire**. Au contraire, si $Re \gg 1$, il est dominé par l'inertie : il sera alors turbulent.

Le second nombre sans dimension indépendant que l'on peut former est :

$$N = \frac{[\partial \vec{u} / \partial t]}{[\nu \nabla^2 \vec{u}]} = \frac{L^2}{\nu T}.$$

Ce nombre s'interprète comme un rapport d'échelles de temps. Nous avons vu au § 4.1.3 que le temps *diffusif* (ou *visqueux*) à une échelle L était donné par $\tau_v = L^2 / \nu$ (4.4). On a donc $N = \tau_v / T$. Pour avoir un écoulement "**laminaire**", il faut que la viscosité ait le temps d'agir pour diffuser la quantité de mouvement d'une "lame" de fluide à l'autre. Il faut donc $\tau_v \ll T$, soit $N \ll 1$.

Au final, un écoulement sera laminaire si l'on a simultanément

$$Re \ll 1 \quad \text{et} \quad N \ll 1. \quad (5.2)$$

Si l'écoulement est stationnaire, on retiendra simplement la condition $Re \ll 1$ (en effet, on a dans ce cas simplement $N = 0$). Dans la plupart des cas, la condition $Re \ll 1$ suffira pour qualifier un écoulement de laminaire (le contrexemple avec $Re \ll 1$ et $N \gg 1$ correspond à la situation d'un fluide visqueux oscillé à haute fréquence, non envisagé ici).

Notons que, dans le cas extrême opposé d'un écoulement turbulent ($Re \gg 1$), on a $T \simeq L/U$ (l'écoulement change en un temps du même ordre de grandeur que le temps de parcours de la distance L à la vitesse U), et donc $Re \simeq N$: la distinction entre ces deux nombres tous deux $\gg 1$ ne présente pas d'intérêt dans ce cas.

5.1.2 Illustration : sillage derrière un cylindre

Afin d'illustrer l'influence de la viscosité, et donc du nombre de Reynolds, sur un écoulement donné, considérons la situation classique de l'écoulement autour d'un cylindre (figure 5.1). Un cylindre immobile de diamètre D est placé dans un fluide de viscosité cinématique ν en écoulement uniforme à la vitesse U . On définit alors simplement le nombre de Reynolds comme $Re = UD/\nu$. A petit nombre de Reynolds ($Re < 6$), l'écoulement est parfaitement laminaire, symétrique entre l'amont et l'aval. Pour Re de l'ordre de 40, il se forme en aval du cylindre deux tourbillons symétriques stationnaires. Au-delà d'une valeur critique, de l'ordre de 60, ces tourbillons deviennent instationnaires et se détachent périodiquement, formant une série de tourbillons appelée "allée de Bénard von Kármán". Pour $Re \simeq 5000$, l'écoulement devient désordonné, puis forme un sillage pleinement turbulent pour $Re \simeq 10^5$.

Cet exemple illustre bien le fait que le nombre de Reynolds de transition entre écoulement laminaire et turbulent n'a aucune raison de valoir précisément 1. D'ailleurs, un écoulement à $Re = 1$ sera le plus souvent laminaire. Plus important, la valeur de ce nombre de Reynolds de transition dépend fortement de la géométrie considérée : il est de l'ordre de 100 dans le cas du sillage derrière un cylindre, mais peut être bien plus grand (de l'ordre de 10^3 ou 10^4) dans le cas d'un écoulement quasi-parallèle, comme dans le cas du sillage autour d'un obstacle bien profilé comme une aile d'avion, ou d'une couche limite sur une plaque plane.

Quelques ordres de grandeur

- Une bactérie (taille $1 \mu\text{m}$, vitesse $30 \mu\text{m/s}$) : $Re \simeq 3 \times 10^{-5}$.
- Une larme glisse sur ta joue : $Re \simeq 20$.
- Ecoulement sanguin dans une artère : $Re \simeq 1000$.
- Un homme qui marche : $Re \simeq 3 \times 10^4$.
- Une voiture à 130 km/h : $Re \simeq 5 \times 10^6$.
- Un airbus A320 : $Re \simeq 3 \times 10^8$.
- Un cyclone de 40 km de diamètre : $Re \simeq 10^{11}$.

Dans ces exemples, les deux premiers sont laminaires, le 3ème est transitionnel, et les suivants sont turbulents.

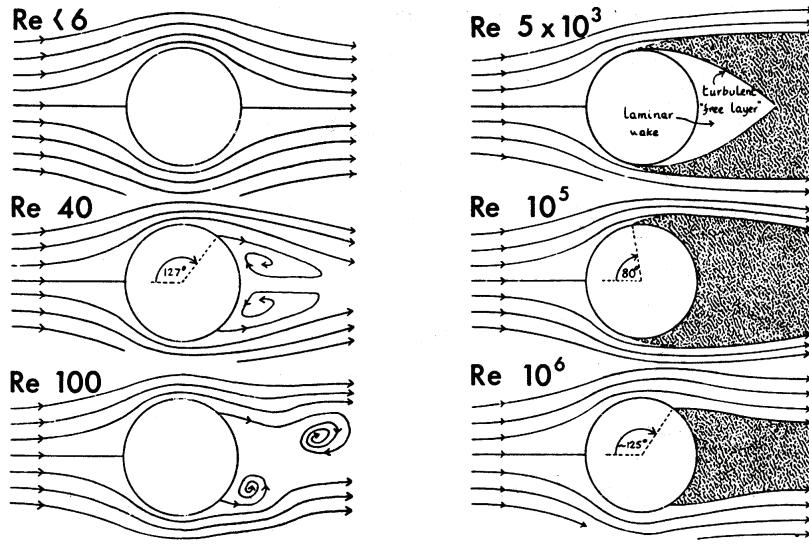


FIGURE 5.1 – Sillage en aval d'un cylindre pour différents nombres de Reynolds.

5.1.3 Equation de Stokes

Pour les écoulements laminaires ($Re \ll 1$ et $N \ll 1$), on peut négliger les termes non-linéaire ($\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$) et instationnaires ($\partial \vec{u} / \partial t$) de l'équation de Navier-Stokes (5.1), et l'on obtient **l'équation de Stokes**

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} = \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (5.3)$$

Quelques propriétés intéressantes de cette équation :

- Elle est *linéaire* vis-à-vis de \vec{u} : si \vec{u}_1, p_1 et \vec{u}_2, p_2 sont solutions de l'Eq. (5.3) pour une géométrie donnée, alors $\vec{u}_1 + \vec{u}_2, p_1 + p_2$ est aussi solution pour cette géométrie. Nous allons utiliser cette propriété d'additivité des solutions dans la suite.
- Elle est *réversible* dans le temps : si on change le signe de \vec{u} et de p , l'équation est la même (en d'autre terme, si on rejoue le film à l'envers, l'écoulement est toujours physique).
- Les causes (conditions aux limites) et les conséquences (l'écoulement) sont reliées de façon instantanée : l'écoulement s'arrête aussitôt que les conditions aux limites s'arrêtent, car la viscosité propage l'information de l'arrêt instantanément dans tout le fluide (penser au cas d'une cuillère dans du miel).

5.2 Force de traînée à petit nombre de Reynolds

Un problème important de la mécanique des fluides est celui de la résistance à l'avancement d'un objet dans un fluide visqueux : quelle force faut-il appliquer à un objet donné pour le faire avancer à vitesse U dans un fluide de viscosité dynamique η ? Ou (par changement de référentiel), quelle force faut-il appliquer pour conserver immobile un objet donné dans un fluide s'écoulant à vitesse U ? D'une manière générale, la démarche à suivre est la suivante : (i) déterminer l'écoulement compatible avec les conditions aux limites ; (ii) calculer la pression et la contrainte visqueuse à la surface de l'objet ; (iii) intégrer ces deux quantités sur la surface pour obtenir la force totale.

Sans résoudre complètement les calculs (assez compliqués), nous pouvons nous contenter d'une analyse en ordre de grandeur. Considérons un objet de taille caractéristique R dans un écoulement uniforme de vitesse U . A petit nombre de Reynolds, l'écoulement va contourner l'objet sur une distance caractéristique de l'ordre de R . La contrainte visqueuse σ' (4.16) va donc être d'ordre

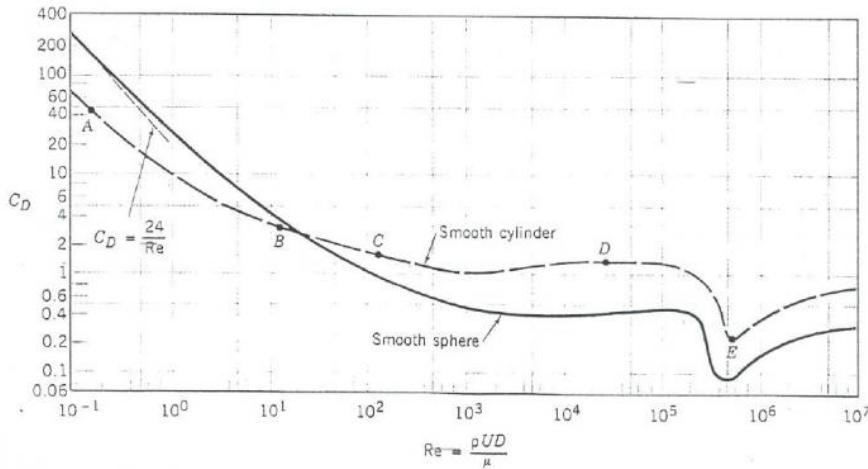


FIGURE 5.2 – Coefficient de trainée C_x en fonction du nombre de Reynolds pour une sphère et un cylindre. Le régime d’écoulement laminaire correspond à $Re < 1$, pour lequel on observe $C_x \propto 1/Re$.

$\eta U/R$. En intégrant sur la surface de l’objet, d’ordre R^2 , on obtient une force de traînée (ou force de Stokes)

$$F \simeq \eta RU.$$

Cette proportionnalité entre F et U , analogue à la proportionnalité entre Δp et Q_v pour l’écoulement de Poiseuille, Eq. (5.7), est caractéristique des écoulements laminaires. Par exemple, dans le cas d’une sphère, le calcul complet de l’écoulement (donné par exemple dans le livre Guyon, Hulin, Petit [5]) donne une force de traînée

$$F = 6\pi\eta RU.$$

On exprime souvent la force de traînée de manière adimensionnelle, en introduisant le coefficient de traînée C_x (ou C_D , comme *drag*), défini comme

$$C_x = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}, \quad (5.4)$$

où S est la “surface frontale”, ou surface de l’objet projetée dans le plan orthogonal à \vec{U} . Le choix de cette normalisation est judicieux à grand nombre de Reynolds (ce qui est précisément l’inverse du cas étudié ici). En effet, à grand nombre de Reynolds, la traînée visqueuse est négligeable, et la force est principalement due à la différence de pression entre l’amont et l’aval de l’objet, que l’on attend (via le théorème de Bernoulli) d’ordre $\Delta P = \frac{1}{2}\rho U^2$, d’où $C_x \simeq \text{cste}$ (la constante n’étant plus alors qu’une fonction de la forme de l’objet, de son aérodynamisme par exemple). Inversement, à petit nombre de Reynolds, la contrainte visqueuse est prépondérante, et l’équation (5.4) donne, en prenant $S \simeq R^2$,

$$C_x \simeq 1/Re. \quad (5.5)$$

Dans le cas de la sphère, avec $F = 6\pi\eta RU$, on obtient $C_x = 24/Re$ (si l’on définit le nombre de Reynolds sur le diamètre $2R$ de la sphère).

La figure 5.2 représente, en coordonnées logarithmiques, le coefficient de traînée C_x en fonction du nombre de Reynolds pour une sphère et un cylindre. On observe bien la décroissance en $1/Re$, caractéristique des écoulements laminaires, à petit nombre de Reynolds, jusqu’à $1 - 10$ environ : cela donne la gamme de validité de notre hypothèse d’écoulement laminaire. Après une gamme

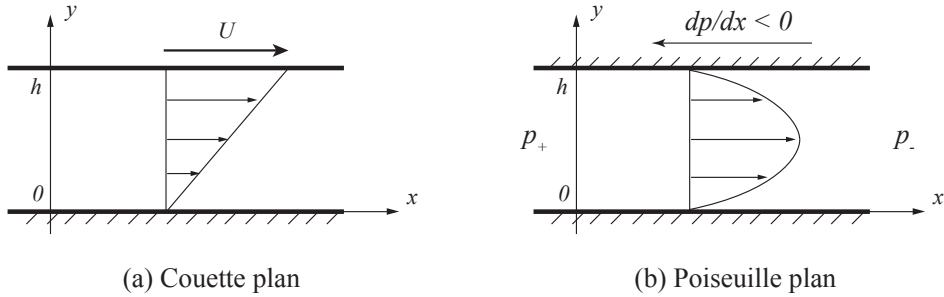


FIGURE 5.3 – Les 2 solutions de base d'un écoulement parallèle plan laminaire : (a) Ecoulement de Couette, généré par une condition aux limites de vitesse ; (b) Ecoulement de Poiseuille, généré par une condition aux limites de pression.

intermédiaire, entre 10 et 1000, le C_x commence à devenir constant (de l'ordre de 0.4 pour une sphère) : c'est le régime inertiel, pour lequel la force de traînée est dominée par la différence de pression de type Bernoulli entre l'amont et l'aval. Toutefois, l'histoire n'est pas aussi simple : un phénomène inattendu apparaît pour $Re \simeq 10^5 - 10^6$: c'est le phénomène de “crise de traînée”, chute du coefficient de traînée liée à un changement brutal de la forme des lignes de courant autour de corps non profilés, que l'on peut deviner en figure 5.1 (amincissement brutal du sillage turbulent). Mais au-delà de cette crise de traînée, le C_x devient indépendant de Re pour de bon.

Enfin, le fait que $C_x \simeq$ cste à grand nombre de Reynolds semble contredire l'intuition que lorsque les effets de la viscosité deviennent négligeables, l'écoulement peut être décrit par la théorie des fluides parfaits, qui prédit $C_x = 0$ puisqu'il n'y a pas de dissipation (voir la discussion de l'introduction du chapitre 3) : c'est ce que l'on appelle le **paradoxe de D'Alembert**. Nous y reviendrons en Section 6.2.2.

5.3 Ecoulements parallèles

L'équation de Stokes s'intègre facilement dans le cas des écoulements parallèles. Ces écoulements sont tels que $\vec{u}(\vec{r}, t) = u_x(\vec{r}, t)\vec{e}_x$. De tels écoulements sont nécessairement invariants selon x , on a donc

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = u_x(y, z, t)\vec{e}_x$$

(comment le montre-t-on ?) Dans ce cas, on voit que le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ de l'équation de Navier-Stokes est *géométriquement nul* : les écoulements parallèles sont régis par l'équation de Stokes (5.3), même si le nombre de Reynolds est élevé.

La propriété de linéarité de l'équation de Stokes est très utile pour les écoulements parallèles. Nous allons définir dans la suite deux écoulements modèles (figure 5.3), dits de Couette (forçage en vitesse) et de Poiseuille (forçage en pression), et nous montrerons que tout écoulement parallèle peut s'écrire comme la superposition de ces 2 écoulements modèles.

5.3.1 Ecoulement de Couette plan

Nous avons déjà rencontré cette géométrie au § 4.1 : Une plaque plane en $y = h$ avance à vitesse $\vec{U} = U\vec{e}_x$, tandis que la plaque plane en $y = 0$ est immobile (figure 5.3a). La pression est indépendante de x ici. L'écoulement étant stationnaire, la projection selon x de l'Eq. (5.3) donne simplement

$$\nabla^2 u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$$

(on retrouve bien l'Eq. (4.2) en régime stationnaire). Ainsi, u_x doit être un polynôme de degré 1, $u_x(y) = Ay + B$. Les 2 conditions aux limites de non-glissement, $u_x(0) = 0$ et $u_x(h) = U$, permettent d'identifier les 2 constantes d'intégration, et l'on a :

$$u_x(y) = U \frac{y}{h}.$$

Notons que le cisaillement est constant, $\partial u_x / \partial y = U/h$, ce qui montre que la contrainte visqueuse, $\sigma'_{xy} = \eta U/h$, est la même pour chaque "lame" de fluide horizontale.

5.3.2 Ecoulement de Poiseuille plan

Cette fois-ci, les parois sont immobiles, mais l'écoulement est forcé par un gradient de pression horizontal (figure 5.3b) : on "souffle" à gauche (ou, de façon équivalente, on "aspire" à droite). On note $\Delta p/L = (p_+ - p_-)/L > 0$ ce gradient, où L est la longueur du canal. L'écoulement étant 1D, on a $u_y = 0$, et l'Eq. (5.3) donne $\partial p / \partial y = 0$, soit $p = p(x)$. La projection selon x de (5.3) donne donc

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Or $\partial p / \partial x$ est indépendant de y (car p est indépendant de y), mais aussi de x (car $\partial / \partial x$ appliqué à l'équation ci-dessus donne 0), donc $\partial p / \partial x = \text{cste} = -\Delta p / L < 0$. La solution de cette équation est un polynôme de degré 2, $u_x(y) = Ay^2 + By + C$. Les conditions aux limites de non-glissement, $u_x(0) = u_x(h) = 0$ permettent là encore d'identifier les constantes d'intégration, et l'on obtient

$$u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{L} y(h-y). \quad (5.6)$$

Il s'agit d'un profil de vitesse parabolique, maximum en $y = h/2$, et tel que $u_x > 0$ si $\Delta p / L = -\partial p / \partial x > 0$ (ça coule des hautes vers les basses pressions).

On remarque que la contrainte visqueuse, $\sigma'_{xy} = \eta \partial u_x / \partial y$, est extrémale aux parois : ça frotte plus là où le profil est le plus pentu. La contrainte s'annule au centre, en $y = h/2$: en effet, le profil est presque plat au voisinage du centre (écoulement bouchon), et donc ne dissipe pas. (Remarque : on a $\sigma'_{xy}(0) = -\sigma'_{xy}(h)$, et pourtant les 2 parois exercent toutes deux une force selon $-\vec{e}_x$; pourquoi ?)

Exercice : Montrer que, dans un tuyau cylindrique de rayon R , on a

$$u_x(r) = U_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

et exprimer U_{max} en fonction de $\Delta p / L$. Montrer que le débit volumique est

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{L}, \quad (5.7)$$

soit une vitesse débitante (1.10) $U_Q = Q_v / \pi R^2 = (R^2 / 8\eta) \Delta p / L$.

Perte de charge

Pour avoir un écoulement laminaire unidimensionnel tel que $u_x > 0$, il est nécessaire d'imposer un gradient de pression $\partial p / \partial x < 0$. La pression diminue donc le long d'une ligne de courant, par opposition au cas d'un écoulement de fluide parfait (sans viscosité), pour lequel l'équation de Bernoulli (3.14) conduit à $p = \text{cste}$. Ainsi, la diminution linéaire de pression le long de l'écoulement dans le cas laminaire correspond bien à la notion de **perte de charge régulière** introduite au § 3.4.6 (on aurait $C = \text{cste} - \Delta p x / L$ selon la définition (3.14)), et s'explique ici par le frottement visqueux avec les parois.

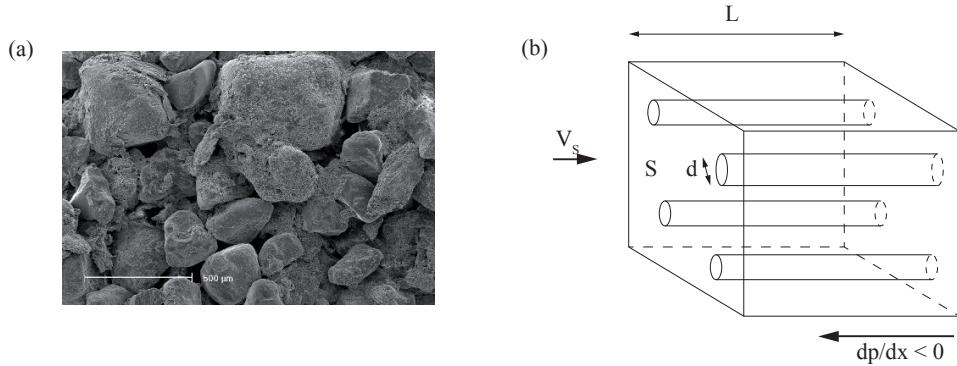


FIGURE 5.4 – Ecoulement dans un milieu poreux. (a) grains de sable cimentés (Univ. Liverpool) ; (b) modélisation des pores sous forme de canaux cylindriques parallèles.

Un écoulement parallèle peut-il être turbulent ?

Nous avons dit que le terme non-linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ est *géométriquement nul* pour un écoulement parallèle, et que l'écoulement reste laminaire même à grand nombre de Reynolds. Peut-on en déduire qu'un écoulement de Couette ou de Poiseuille n'est jamais turbulent ?

Si, un écoulement parallèle peut être turbulent : au-delà d'un certain nombre de Reynolds, l'écoulement laminaire continue à être solution de l'équation de Navier-Stokes, mais cette solution est instable ! L'écoulement cesse d'être parallèle de façon instantanée, même s'il est bien parallèle en moyenne temporelle, et le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ n'est plus nul, même en moyenne (joie des non-linéarités : la moyenne de u^2 n'est pas nulle même si la moyenne de u l'est...). Cette instabilité est assez subtile : elle nécessite des perturbations d'amplitude non infinitésimale pour déclencher la turbulence, contrairement au cas d'une bille en haut d'une colline, qui est instable même pour des perturbations d'amplitude infinitésimale. Ce scénario de transition vers la turbulence, dit *sous-critique*, constitue un domaine de recherche très actif aujourd'hui.

En résumé, bien que la condition de nombre de Reynolds Re petit ne soit pas *géométriquement* nécessaire à l'obtention des solutions laminaires de Couette et de Poiseuille, ces écoulements ne sont pertinents en pratique que pour des nombres de Reynolds modérés (typiquement $Re = UD/\nu < 2300$ pour l'écoulement de Poiseuille circulaire, et $Re = Uh/\nu < 1400$ pour l'écoulement de Couette plan).

5.3.3 Milieux poreux

Une application intéressante de la loi de Poiseuille concerne les écoulements dans les milieux poreux. Les milieux poreux, par exemple les sols, sont des matériaux constitués de cavités ou de pores, que l'on peut décrire comme un réseau de canaux connectés entre eux (figure 5.4). La petite taille de ces canaux (diamètres de l'ordre de 10 à 100 μm par exemple pour certaines roches) fait que l'écoulement peut effectivement y être considéré comme laminaire (petit nombre de Reynolds).

On peut décrire la vitesse *moyenne* (ou débitante) à travers un milieu poreux entièrement saturé par un liquide de viscosité dynamique η par la **loi de Darcy**,

$$\vec{V}_s = -\frac{K}{\eta}(\vec{\nabla}p - \rho\vec{g}), \quad (5.8)$$

où K est la perméabilité du milieu, exprimée en m^2 (on utilise souvent l'unité du Darcy, 1 darcy = 1 μm^2). On peut retrouver cette loi en modélisant de façon très simplifiée un milieu poreux comme un ensemble de canaux parallèles, de diamètre d et de longueur L . Le débit volumique sur un milieu de surface S est $Q_v = SV_s$. On peut identifier ce débit à la somme des débits des

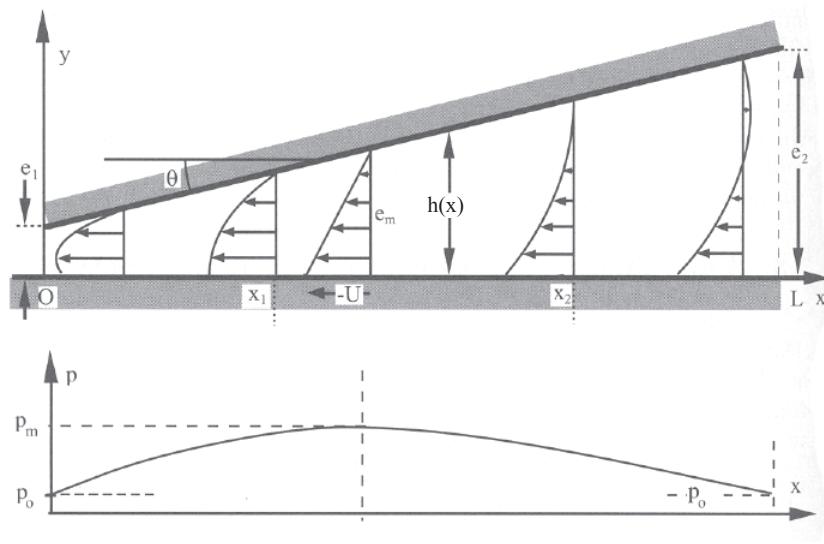


FIGURE 5.5 – Ecoulement quasi-parallèle, entre deux plaques faisant un angle $\theta \ll 1$. La répartition de pression dans cet écoulement fait apparaître une force verticale, dite *force de sustentation*. D'après Ref. [5].

écoulements de Poiseuille dans chaque canal (5.7). On suppose que l'on a N canaux de diamètre d sur la surface S , la surface occupée par les canaux est $N\pi(d/2)^2$. En introduisant la fraction de surface occupée par les canaux $\phi = N\pi(d/2)^2/S$ (appelée la *porosité*), on obtient

$$K = \frac{\phi d^2}{32}. \quad (5.9)$$

Ce modèle est très simplifié, et néglige beaucoup de paramètre, comme la tortuosité des canaux, l'hétérogénéité de leur diamètre etc. Néanmoins, les perméabilités K mesurées via la loi (5.8) donne des valeurs proches de l'estimation grossière de l'Eq. (5.9) : $K < 0.05 \mu\text{m}^2$ pour du calcaire, $K \simeq 20 - 200 \mu\text{m}^2$ pour du sable, et $K \simeq 1000 \mu\text{m}^2$ pour un filtre de cigarette...

Remarque : Il est intéressant de constater que la loi de Darcy (5.8) décrit un écoulement potentiel, de la forme $\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi$, tel qu'introduit pour les fluides parfaits : il suffit de choisir le potentiel $\Phi = -Kp/\eta$. Ceci semble paradoxal, puisque les écoulements potentiels ont été introduits pour les fluides parfaits, donc sans viscosité, et que la loi de Darcy s'applique au contraire aux écoulements dominés par la viscosité dans les canaux du milieu poreux. Cela vient du fait que \vec{V}_s dans l'Eq. (5.8) n'est pas la vraie vitesse du fluide dans les canaux, mais est une vitesse effective, moyennée à l'échelle du milieu dans son ensemble.

5.4 Ecoulements quasi-parallèles, lubrification

Pour un écoulement exactement parallèle, nous venons de voir que le terme non-linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ est exactement nul, quel que soit le nombre de Reynolds. Pour un écoulement quasi-parallèle, ce terme est non nul, mais pourra être néanmoins négligeable comparé au terme visqueux, pour des nombres de Reynolds "grands mais pas trop". Nous allons voir que, dans cette situation, l'écoulement pourra alors être décrit par des combinaisons d'écoulements de Couette et de Poiseuille, comme pour un écoulement strictement parallèle.

Considérons un écoulement plan entre 2 parois quasi-parallèles (figure 5.5). Pour fixer les idées, la paroi en $y = 0$ est en mouvement à vitesse U , et celle en $y = h(x)$ est fixe (un simple changement de référentiel permet d'échanger les rôles). On suppose la pente $\partial h / \partial x$ (qui correspond également

à la pente des lignes de courant) est faible. On note U l'ordre de grandeur de la vitesse horizontale, L et h_0 les échelles de longueur horizontale et verticale, et $\theta \simeq \partial h / \partial x$ l'ordre de grandeur de la pente des lignes de courant. La relation d'incompressibilité ($\partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y = 0$) montre que l'ordre de grandeur de la vitesse verticale est $V \simeq \theta U$. Ainsi, l'ordre de grandeur de la composante selon x de $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ est :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_x = \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x \simeq \frac{U^2 \theta}{h_0}.$$

De même, l'ordre de grandeur de la composante selon x de $\nu \nabla^2 \vec{u}$ est :

$$\nu \nabla^2 \vec{u}_x \simeq \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_x \simeq \frac{\nu U}{h_0^2}.$$

Ainsi, on a $|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_x| \ll |\nu \nabla^2 \vec{u}_x|$ si

$$Re = \frac{Uh_0}{\nu} \ll \frac{1}{\theta}. \quad (5.10)$$

Or, on s'est placé dans la situation où $\theta \ll 1$. L'Eq. (5.10) nous dit donc que le terme non-linéaire est négligeable à condition que le nombre de Reynolds Re soit petit devant un nombre grand, $1/\theta$. C'est une condition beaucoup moins restrictive que dans le cas d'un écoulement quelconque, pour lequel on doit avoir $Re \ll 1$. On voit que, dans le cas d'un écoulement exactement parallèle, pour lequel on a $\theta = 0$, on retrouve bien que le terme non-linéaire est négligeable même à $Re \rightarrow \infty$ (à une réserve près, discutée en section 6.2.2).

De façon similaire, le terme instationnaire $\partial u_x / \partial t$ est négligeable devant le terme visqueux $\nu \nabla^2 \vec{u}_x$ si le nombre $N = h_0^2 / \nu T$ est $\ll 1$, en d'autres termes si le profil de vitesse laminaire a le temps de s'établir par diffusion visqueuse pendant l'échelle de temps de variation des conditions aux limites.

Ainsi, les écoulements quasi-parallèles sont déterminés, dans la limite $Re \ll 1/\theta$ et $N \ll 1$, en résolvant l'équation de Stokes (5.3), soit en projetant sur x et y :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g &= 0. \end{aligned}$$

On peut intégrer la première équation par rapport à y , en considérant que $\partial p / \partial x$ est indépendant de y : on obtient ainsi dans le cas général un écoulement de la forme $u_x(y) = Ay^2 + By + C$, où les 3 constantes d'intégration A, B, C sont déterminées à partir des conditions aux limites (en général, non glissement ou contrainte nulle en $y = 0$ et/ou en $y = h(x, t)$). Cette méthode de résolution est générale, et s'applique à toute une classe d'écoulements quasi-parallèles.

Une propriété remarquable de ces écoulements quasi-parallèles est l'apparition d'une **force de sustentation** (selon y), et plus de la force de frottement usuelle (selon x). Une illustration claire de cette force est obtenue en faisant glisser une feuille de papier juste au-dessus d'une surface bien lisse : celle-ci va "planer", son poids étant compensé par la force de sustentation (attention : cette force ne doit pas être confondue avec la portance, qui est un effet purement inertiel, sans viscosité). La sustentation des écoulements quasi-parallèles est au contraire un effet purement visqueux.

La **lubrification** des pièces mécaniques en mouvement de translation est un exemple d'application de cette force de sustentation : le fin film d'huile entre les pièces en mouvement est en écoulement quasi-parallèle, et la force de sustentation qui en résulte "repousse" les pièces, les évitant d'entrer en contact solide.

Chapitre 6

Couches limites

Nous avons vu que pour les écoulements rapides (grands nombres de Reynolds), il est parfois possible de négliger les effets de la viscosité, et d'utiliser le concept de *fluide parfait* (équation d'Euler, théorème de Bernoulli). Toutefois, même à très grand nombre de Reynolds, cette approximation posera toujours problème au voisinage d'une paroi : en effet, la *condition d'adhérence* (égalité entre vitesse du fluide et vitesse de la paroi au contact de celle-ci) fait que la viscosité y jouera toujours un rôle prépondérant, car le nombre de Reynolds local y sera nécessairement petit. Ainsi, il existe nécessairement une région près de la paroi, éventuellement très fine, dans laquelle les effets de la viscosité sont prédominants : c'est la *couche limite*.

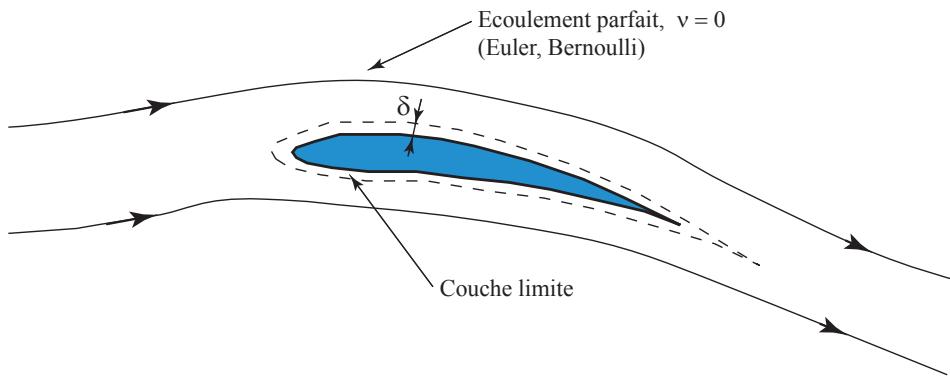


FIGURE 6.1 – En présence de parois solides, on peut découper l'écoulement en deux régions : une région loin des parois, où la viscosité est négligeable, et où on peut appliquer la théorie des fluides parfaits (équations d'Euler et de Bernoulli), et une fine région d'épaisseur δ près de la paroi, où les effets de la viscosité doivent être pris en compte. En pratique, l'épaisseur réelle δ est beaucoup plus fine (de l'ordre du mm pour une aile d'avion)

La notion de couche limite joue un rôle central en mécanique des fluides. Même si la fraction de l'espace occupée par les couches limites peut être minuscule, ses effets peuvent être néanmoins importants, et même primordiaux dans certains problèmes. Une stratégie de résolution approchée pour des écoulements complexes en présence de parois, comme dans le problème de l'écoulement autour d'une aile d'avion (figure 6.1), est de découper le problème en deux régions, et d'utiliser l'hypothèse de fluide parfait irrotationnel (équation d'Euler) loin des parois, et l'hypothèse de fluide visqueux (équation de Stokes) près des parois, en raccordant les 2 solutions à la transition entre les deux régions. Toutefois, cette stratégie simple échoue dans certains cas, comme dans le phénomène de *décollement de couche limite*, qui joue par exemple un rôle clef dans les problèmes de portance en aéronautique. Par ailleurs, même lorsque cette stratégie fonctionne, les écoulements

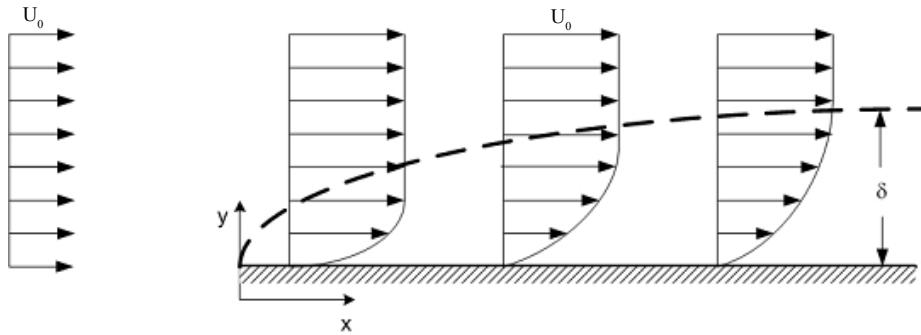


FIGURE 6.2 – Evolution du profil de vitesse pour un écoulement de couche limite au-dessus d'une plaque plane. D'après Schlichting (1958).

de couche limite peuvent être parfois très complexes, et donner lieu à des recirculations secondaires ou des instabilités, qui peuvent à leur tour rétroagir sur l'écoulement loin des parois...

Enfin, notons que la notion de couche limite peut être étendue au cas d'autres quantités que la vitesse : on parle par exemple de *couche limite thermique*, pour décrire la région où est encaissée une forte différence de température sur une faible épaisseur au voisinage d'une paroi, qui joue un rôle très important dans les problèmes de transfert de chaleur. Nous ne développerons pas ce point dans le cadre de ce cours.

6.1 Couche limite laminaire : analyse qualitative

On abordera dans un premier temps le cas de la couche limite dans la géométrie la plus simple, celle d'une plaque plane semi-infinie, représentée en figure 6.2. On peut distinguer le cas d'une couche limite *laminaire* ou *turbulente*, selon la valeur du nombre de Reynolds défini ainsi

$$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}, \quad (6.1)$$

où U_0 est la vitesse loin de la plaque et x est la distance parcourue le long de la plaque plane ($x = 0$ est parfois appelé le *bord d'attaque* de la plaque). Pour un nombre de Reynolds jusqu'à $Re_x \simeq 10^5$ environ, la couche limite reste généralement laminaire.

On considère un écoulement uniforme, de vitesse U_0 selon \vec{e}_x , au-dessus d'une plaque plane semi-infinie, en $y = 0$ et $x \geq 0$ (profondeur supposée infinie selon z). Loin de la plaque, on suppose que les effets de la viscosité sont négligeables, et que l'on peut utiliser l'approximation de fluide parfait. Ainsi, on a $\vec{u}(x, y) = U_0 \vec{e}_x$, et le théorème de Bernoulli indique que dans ces conditions on a simplement $p(x, y) = cste$. En $y = 0$, la condition d'adhérence indique que l'on doit avoir $\vec{u}(x, 0) = \vec{0}$. Il doit donc exister une distance $\delta(x)$, appelée *épaisseur de couche limite*, sur laquelle la vitesse horizontale passe de 0 à "presque" U_0 (on reviendra plus loin sur une définition plus rigoureuse de δ).

Afin d'estimer $\delta(x)$, on peut reprendre le raisonnement fait au § 4.1.3, et considérer le temps nécessaire pour que l'information "je n'avance pas" ait eu le temps de diffuser verticalement depuis la paroi. Pendant un temps Δt , une particule fluide avance d'une distance $\Delta x = U_0 \Delta t$. Pendant ce même temps, la quantité de mouvement nulle en $y = 0$ diffuse verticalement, selon une distance $\Delta y = \sqrt{\nu \Delta t}$ (cf. équation 4.3). En simplifiant Δt et prenant $\delta(x) \simeq \Delta y$, on obtient

$$\delta(x) \simeq \sqrt{\nu x / U_0} \quad (6.2)$$

(que l'on peut réécrire sous la forme $\delta(x)/x \simeq Re_x^{-1/2}$, avec la définition de Re_x donnée en (6.1)). Moins le fluide est visqueux, ou bien plus l'écoulement est rapide, et plus cette couche limite va

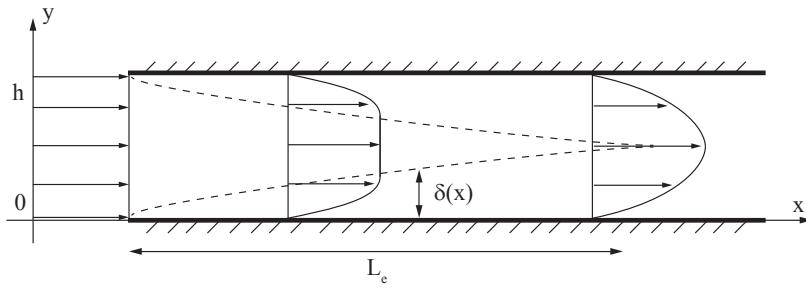


FIGURE 6.3 – Etablissement du profil de vitesse parabolique de Poiseuille par diffusion de la quantité de mouvement nulle depuis les parois vers le centre.

être fine. Pour un écoulement d'air (de viscosité cinématique $\nu_{air} = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) s'écoulant à vitesse $U_0 = 1.5 \text{ m s}^{-1}$ sur une plaque plane de longueur $L = 10 \text{ cm}$, on aurait $\delta(x = L) \simeq 1 \text{ mm}$ en bout de plaque. Le nombre de Reynolds vaut ici $Re_x = U_0 x / \nu_{air} = 10^4$, valeur pour laquelle la couche limite peut encore être considérée comme laminaire, ce qui justifie les hypothèses faites *a posteriori*.

6.1.1 Longueur d'entrée

Nous avons vu en section 5.3.2 que la solution laminaire pour un écoulement unidimensionnel dans un tuyau infiniment long (et donc invariant par translation selon x) est donnée par un profil de vitesse parabolique, dit de Poiseuille. Pour un tuyau de longueur finie, à quelle distance de l'entrée faut-il se placer pour que cette invariance soit respectée ? Il faut pour cela que le profil de vitesse parabolique (5.6) ait le temps de s'établir, c'est-à-dire que l'effet de la viscosité, initialement confiné au voisinage immédiat des parois, ait le temps d'envahir tout le tuyau. Qualitativement, la longueur d'entrée L_e peut donc être définie comme la distance x au bout de laquelle les couches limites sur les parois opposées se rejoignent (voir la fig. 6.3), soit, étant donnée l'équation (6.2), $L_e \simeq D Re$, avec D le diamètre du tuyau et $Re = U_0 D / \nu$ le nombre de Reynolds.

Cette longueur d'entrée est loin d'être négligeable pour $Re \simeq 2000$ (limite de validité de l'écoulement de Poiseuille laminaire dans un tuyau cylindrique) : il faudrait 20 m de tuyau de 1 cm de diamètre pour avoir un profil parabolique bien établi ! En pratique, un préfacteur numérique arrange la situation : on a en fait $L_e \simeq 0,03 D Re \simeq 60 \text{ cm}$ seulement (heureusement que l'on ne dimensionne pas les expériences avec l'analyse dimensionnelle...)

6.1.2 Vorticité dans une couche limite

Il est instructif de considérer le problème de formation d'une couche limite du point de vue de la vorticité. La vorticité est en effet nulle loin de la paroi (écoulement potentiel), et non nulle au contact avec la paroi. On rappelle que la vorticité ne décrit pas la courbure des lignes de courant, qui restent ici essentiellement rectilignes, mais la rotation des éléments de fluides : ainsi, comme on l'a vu en Section 1.4 (voir en particulier la figure 1.9b), le cisaillement $\partial u_x / \partial y > 0$ près de la paroi se traduit par une composante selon z de la vorticité $\omega_z = \partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y < 0$, et les particules fluides tournent dans le sens horaire dans la couche limite.

L'équation d'évolution de la vorticité (4.24) projetée selon l'axe z s'écrit, et tenant compte du fait que \vec{u} est essentiellement selon x et que les variations spatiales sont essentiellement selon y ,

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} \simeq \nu \nabla^2 \omega_z \simeq \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}.$$

Cette équation est identique à l'équation de diffusion la chaleur (4.1) ! On peut donc faire l'analogie avec une plaque chauffante, dont la chaleur émise serait diffusée verticalement et emportée

horizontalement par l'écoulement. Ici, la plaque agit comme une source de vorticité $\omega_z < 0$ en $y = 0$, et celle-ci est diffusée verticalement et emportée horizontalement par l'écoulement.

6.2 Couche limite laminaire : solution de Blasius

Dans le cas stationnaire, en négligeant la gravité, et en prenant l'approximation $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$, les équations de Navier-Stokes selon x et y s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \\ \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

De manière similaire aux écoulements de lubrification développés en § 5.4, on a $(\partial p/\partial y)/(\partial p/\partial x) \simeq u_y/u_x \ll 1$: le gradient de pression $\vec{\nabla}p$ est essentiellement horizontal (les isobares sont verticales) : **la pression dans la couche limite est égale à la pression au-dessus de la couche limite.**¹ L'écoulement pour $y > \delta(x)$ étant de vitesse constante, on a donc $p = \text{cste}$, et le problème se résume à

$$\left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}. \quad (6.3)$$

Attention : nous ne pouvons pas prendre $u_y = 0$ dans cette équation : en effet, selon une ligne horizontale $y = \text{cste}$, on a $\partial u_x / \partial x < 0$ par effet de la diffusion de quantité de mouvement faible du bas vers le haut. En conséquence de l'incompressibilité, on doit avoir $\partial u_y / \partial y > 0$. Avec $u_y = 0$ en $y = 0$, cela implique $u_y > 0$ pour tout $y > 0$: il doit nécessairement exister un (léger) écoulement ascendant dans ce problème, et au final les deux contributions au terme non linéaire sont du même ordre de grandeur.

Le résultat de l'analyse dimensionnelle (6.2) suggère de chercher à l'équation (6.3) des solutions auto-similaires de la forme

$$u_x = U_0 f(\xi),$$

où l'on a introduit la coordonnée réduite $\xi = y/\delta(x)$, avec $\delta(x) = \sqrt{\nu x/U_0}$, $f(0) = 0$ et $f(\infty) = 1$. On a alors besoin de calculer les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{U_0}{2x} \xi f'(\xi), \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{U_0}{\delta(x)} f'(\xi), \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{U_0}{\delta(x)^2} f''(\xi).$$

On obtient u_y en intégrant l'équation d'incompressibilité :

$$u_y = \frac{U_0 \delta(x)}{2x} \int_0^\xi \xi f'(\xi) d\xi.$$

En posant $F(\xi) = \int^\xi f(\xi) d\xi$, l'équation aux dérivées partielles (6.3) peut se réécrire sous forme de l'équation différentielle ordinaire suivante, dite *équation de Blasius* :

$$2F''' + FF'' = 0. \quad (6.4)$$

Cette équation n'a pas de solution analytique, mais peut être intégrée numériquement : la solution $f(\xi) = F'(\xi)$ est tracée en figure 6.4.

On peut montrer que cette solution présente la propriété² $f(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, ce qui indique qu'au voisinage de $y = 0$ le profil de vitesse est très proche d'une droite, de pente

1. C'est en vertu de ce résultat que l'on a pu utiliser la relation de Bernoulli pour expliquer le fonctionnement du tube de Pitot, § 3.4.4.

2. La propriété $f''(0) = 0$ est liée au fait que $\partial^2 u_x / \partial y^2$ est lié pour un écoulement visqueux à $\partial p / \partial x$, et que le gradient de pression horizontal est nul hors couche limite pour un écoulement parfait uniforme.

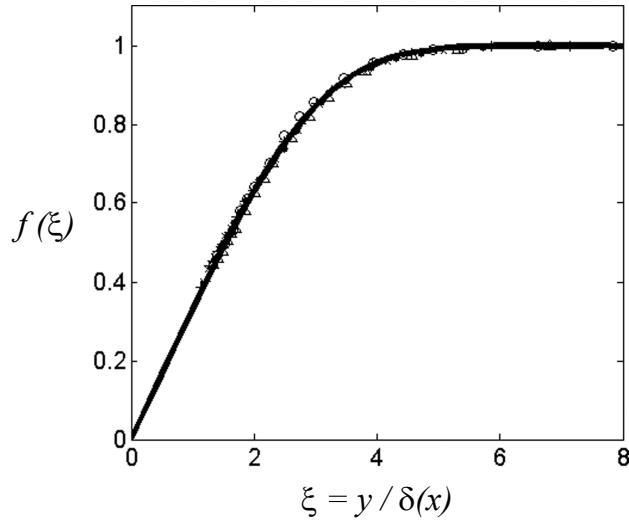


FIGURE 6.4 – Profil de vitesse adimensionné, tel que $u_x(y) = U_0 f(\xi)$, solution numérique de l'équation différentielle (6.4). Les points représentent des mesures expérimentales. D'après Patten et al. (2013).

$f'(0) \simeq 0.332$, qui raccorde de façon assez brutale avec la limite $f(\infty) = 1$: on a $f(\xi) \simeq 0.99$ pour $\xi \simeq 5.0$. Ainsi, si l'on définit par convention $\delta_{0.99}(x)$ l'épaisseur telle que $u_x = 0.99U_0$, on a

$$\delta_{0.99}(x) = 5.0 \sqrt{\nu x / U_0},$$

ce qui est bien en accord avec l'analyse dimensionnelle (6.2). La valeur du préfacteur numérique dépend bien évidemment du choix sur la "tolérance" du raccordement de u_x à U_0 , définie ici arbitrairement à 1 % près.

6.2.1 Force de frottement

A partir de la solution numérique de l'équation de Blasius, il est possible d'en déduire la force exercée par le fluide sur la plaque plane. La contrainte pariétale (force de frottement selon x par unité de surface en $y = 0$) s'écrit

$$\sigma'_{xy}(x, y = 0) = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\eta U_0}{\delta(x)} f'(0) = 0.332 \rho U_0 \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}.$$

On note que cette contrainte diverge en $1/\sqrt{x}$ sur le bord d'attaque de la plaque, en $x = 0$. Toutefois, cette divergence est intégrable : si l'on calcule la force intégrée sur une plaque de dimension $L_x \times L_z$, on a

$$F_x = L_z \int_0^{L_x} \sigma'_{xy}(x, 0) dx = 0.664 \rho \nu^{1/2} L_z L_x^{1/2} U_0^{3/2}.$$

Comme pour la force de trainée d'un objet dans un écoulement uniforme (Section 5.2), on peut adimensionner cette force en introduisant le coefficient de frottement

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 L_x L_z}.$$

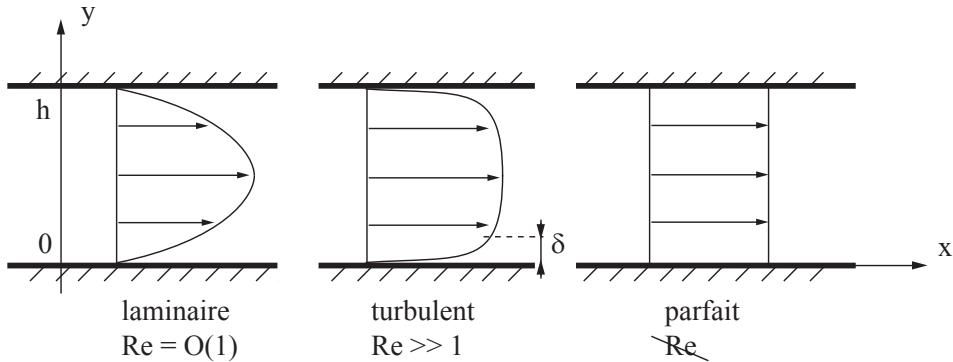


FIGURE 6.5 – Ecoulement parallèle entre 2 plaques planes, dans les cas laminaire, turbulent, et fluide parfait. Le cas laminaire correspond au profil parabolique de Poiseuille. Le cas turbulent est plus plat au centre, et présente de forts gradients dans les couches limites. Ce profil turbulent tend ainsi vers le profil "bouchon" du cas du fluide parfait, mais garde néanmoins un raccordement à 0 aux parois (condition de non-glisement).

On obtient :

$$C_x = 1.3/\sqrt{Re}, \quad \text{avec } Re = U_0 L_x / \nu.$$

Cette décroissance est similaire, quoi que moins forte, à celle en $C_x \propto 1/Re$ (équation 5.5) obtenue pour un objet dans un écoulement uniforme à petit nombre de Reynolds. Cette décroissance montre qu'à grand nombre de Reynolds, on a $C_x \rightarrow 0$, et les effets de la viscosité deviennent négligeables, comme attendu. Cependant, ce résultat $C_x \propto 1/\sqrt{Re}$ n'est valable que dans le cas laminaire, à faible Re . Dans le cas turbulent, la couche limite devient instable, et les fluctuations turbulentes induisent un frottement plus élevé que celui que nous venons de calculer, conduisant à une loi $C_x(Re)$ décroissant moins rapidement que $1/\sqrt{Re}$ (voire même indépendante de Re dans le cas d'une couche limite sur paroi rugueuse).

6.2.2 Fluide parfait ou écoulement turbulent ?

La remarque précédente nous amène à question assez subtile et centrale en mécanique des fluides : celle de la différence entre un écoulement à grand nombre de Reynolds (*a priori* turbulent) et un écoulement parfait.

Dans la limite $Re \gg 1$ les effets de la viscosité sont négligeables, et l'écoulement est dominé par l'inertie. On pourrait penser naturellement que cette viscosité négligeable signifie que l'on peut prendre simplement $\nu = 0$ dans l'équation de Navier-Stokes (5.1), et retrouver ainsi l'équation d'Euler (3.3) qui décrit les écoulements des fluides parfaits. Cependant, **ce passage à la limite ne marche pas : un écoulement à viscosité non nulle ne tend pas, lorsque $\nu \rightarrow 0$ ($Re \rightarrow \infty$), vers un écoulement de fluide parfait, tel que $\nu = 0$.** Il s'agit d'une limite singulière.

En effet, les écoulements parfaits, étudiés au chapitre 3.3, ne correspondent pas à une réalité physique. Ils sont une simplification des écoulements réels, qui marche uniquement *dans les régions de l'espace où la viscosité est négligeable*. Le problème est que les régions de l'espace où la viscosité reste importante, à savoir dans les couches limites près des parois, continuent à jouer un rôle essentiel même dans la limite $Re \gg 1$.

La figure 6.5 illustre ce passage à la limite singulier : Le profil de vitesse de l'écoulement dans un tuyau, parabolique dans le cas laminaire (cf. Eq 5.6), tend progressivement vers un profil bouchon à mesure que le nombre de Reynolds augmente (par exemple, en augmentant la vitesse). Cependant, la condition de vitesse nulle à la paroi (4.21) reste valide même à $Re \gg 1$, et impose donc un raccordement de plus en plus raide avec le profil bouchon, sur une épaisseur de couche

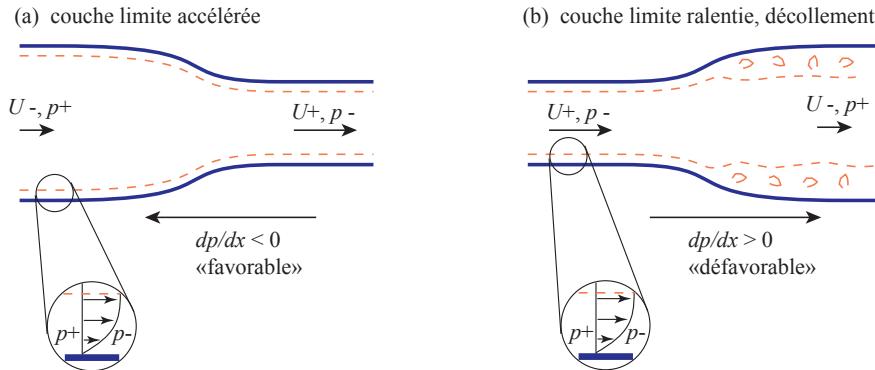


FIGURE 6.6 – Couches limites dans un tuyau convergent ou divergent. Dans le premier cas, l’écoulement est accéléré, le gradient de pression “favorable”, et la couche limite reste collée à la paroi. Dans le second cas, l’écoulement est décéléré, le gradient de pression “défavorable”, et la couche limite décolle de la paroi, laissant une zone de faible vitesse (et éventuellement de forte turbulence) près de la paroi.

limite $\delta \rightarrow 0$. La contrainte visqueuse à la paroi $\sigma'_{xy}(y = 0, h)$ (force de frottement par unité de surface), donnée par

$$\sigma'_{xy}(y = 0) = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y}(y = 0) \simeq \frac{\eta U}{\delta}$$

(voir l’Eq. 4.17), devient donc infiniment grande dans la limite $Re \rightarrow \infty$. Ceci est en contradiction avec l’hypothèse de fluide parfait, pour lequel la condition de glissement à la paroi (3.5) autorise un profil strictement plat pour tout y , et donc $\sigma'_{xy}(y = 0, h) = 0$ (pas de frottement).

D’une manière générale, un écoulement turbulent frotte beaucoup et dissipe beaucoup d’énergie, alors qu’un écoulement de fluide parfait ne frotte pas et ne dissipe pas d’énergie. Même si le terme visqueux est négligeable dans l’équation de Navier-Stokes dans la limite $Re \gg 1$, il reste néanmoins essentiel pour expliquer ce frottement important que l’on n’aurait pas en posant naïvement $\nu = 0$ dans l’équation. On voit donc que la limite $\nu \rightarrow 0$ est à manipuler avec précaution !

6.3 Décollement de couche limite

Dans le cas de la couche limite sur plaque plane traité précédemment, la pression est indépendante de x car (en vertu du théorème de Bernoulli) la vitesse du fluide loin de la paroi est elle-même indépendante de x . Si maintenant on considère des parois courbes, il va exister dans la région d’écoulement parfait des accélérations et des décélérations, et donc des variations de pression, qui pourront être (ou non) compatibles avec les variations de pression dans la couche limite. Nous allons voir que la situation d’un écoulement décéléré conduit à un raccordement de pression incompatible entre fluide parfait et couche limite, et provoque le phénomène dit de *décollement de couche limite*, qui joue un rôle très important en aéronautique.

Afin de comprendre qualitativement ce phénomène, examinons les deux écoulements de la figure 6.6 : il s’agit d’un écoulement dans un tuyau, soit convergent (a), soit divergent (b). Dans le centre du tuyau, hors couche limite, on peut appliquer la théorie des fluides parfaits, et donc l’équation de Bernoulli. Ainsi, dans le cas convergent (a), la conservation du débit (vitesse \times section) impose une accélération du fluide, et donc une diminution de la pression : le gradient de pression selon la direction de l’écoulement x est $\partial p / \partial x < 0$. Dans le cas divergent (b), on a au contraire une décélération du fluide, et donc une augmentation de pression, et $\partial p / \partial x > 0$.

Examinons maintenant de plus près ce qui se passe dans les couches limites : localement, on a un écoulement dominé par la viscosité, et donc la pression doit y être régie par l’équation de Stokes,

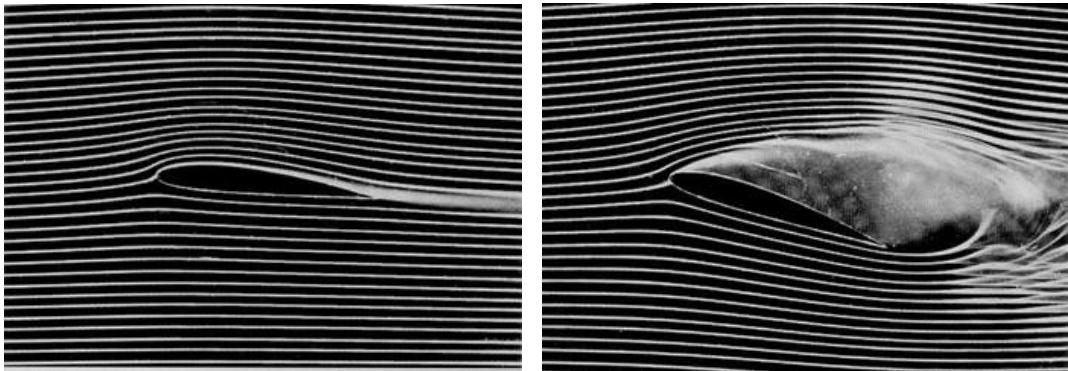


FIGURE 6.7 – Phénomène de décollement de couche limite. A faible angle d’incidence (à gauche), la couche limite sur l’extrados (au-dessus de l’aile) reste collée. A fort angle (à droite), la couche limite décolle, créant une zone de turbulence importante, associée à une chute de la portance et à une augmentation de la traînée.

qui se projette selon x sous la forme $\partial p / \partial x = \eta \partial^2 u_x / \partial y^2$. L’écoulement étant essentiellement selon x , la pression varie peu selon y , et la pression dans la couche limite est donc presque égale à la pression loin de la paroi. Dans le cas (a), où $\partial p / \partial x < 0$, on a donc $\partial^2 u_x / \partial y^2 < 0$, et donc localement le profil de vitesse est de la forme $u_x \simeq Ay + By^2$ (écoulement de type Poiseuille) avec $B = (\partial p / \partial x) / 2\eta < 0$, soit une courbure compatible avec le profil classique de couche limite. En revanche, dans le cas (b), on a cette fois-ci $u_x \simeq Ay + By^2$ avec $B > 0$, soit une courbure inverse de celle attendue : il y a donc incompatibilité du raccord, et l’hypothèse d’une couche limite collée à la paroi ne peut pas être satisfaite. Il doit donc exister un point x où l’écoulement change de nature : c’est le phénomène de décollement de couche limite.

A quelle condition ce phénomène a-t-il lieu ? Si la décélération de l’écoulement (et donc la divergence des lignes de courant) reste faible, on s’attend à ce que la couche limite reste collée à la paroi ; c’est le cas en pratique pour des angles de divergence inférieurs à $10\text{--}20^\circ$. Ainsi, pour un obstacle dit “profilé” (ou “aérodynamique”), comme une aile d’avion en incidence faible (figure 6.7, gauche), la décélération n’est jamais trop importante et les couches limites restent collées aux parois. En revanche, pour un obstacle non profilé, comme un cylindre (figure 5.1), ou bien pour un obstacle profilé mais à angle d’incidence élevé (figure 6.7, droite), la décélération est brutale en aval de l’obstacle et on observe le phénomène de décollement. Si le profil arrière d’une voiture présente un angle bien marqué (bequet arrière), on devine facilement que c’est à cet endroit que décollera la couche limite. En revanche, si le profil en aval varie de façon continue, comme pour une aile d’avion, la position précise du point de décollement est très difficile à anticiper.

Le phénomène de décollement à forte incidence a des conséquences importantes en aéronautique : en créant entre la paroi et la couche limite décollée une “zone morte”, de faible vitesse, la pression au-dessus de l’aile augmente, et la portance de l’aile (qui est liée à la différence de pression entre le dessous et le dessus de l’aile) chute brutalement : on dit que l’aile “décroche”. En même temps, le coefficient de traînée augmente brutalement, ce qui est lié au fait qu’une partie de l’énergie cinétique de l’écoulement est convertie en fluctuations de vitesse dans la zone de sillage turbulent en aval de l’aile : c’est le phénomène de “crise de traînée”, déjà évoqué en Section 5.2. Pour toutes ces raisons, de nombreuses stratégies visent à repousser le plus en aval possible le point de décollement de la couche limite, par différentes stratégies de volets, d’aspiration de couche limite etc.

Annexe A

Analyse dimensionnelle

Cette annexe est reprise du cours de M. Rabaud [6].

Les mathématiciens et les physiciens théoriciens résolvent des équations adimensionnées dont les paramètres et les coefficients sont des nombres réels ou complexes. Pourtant concrètement le physicien cherche des relations entre des quantités qui ont une dimension ; des forces, des énergies, des viscosités, des tailles ou des masses volumiques par exemple. Ces dimensions sont toutes exprimables dans une base de dimensions, par exemple le Système International (SI), ou simplement masse, longueur et temps dans la plupart des applications en mécanique. Ce choix n'est pas unique, on peut par exemple préférer un système construit avec une force, une énergie, etc.

L'analyse dimensionnelle joue un rôle important dans tous les domaines de la physique. Mais c'est probablement en mécanique des fluides qu'elle est la plus utile. Nous savons qu'une équation, pour avoir un sens, doit être "homogène en dimension". Mais on peut aller un peu plus loin, et prédire à partir d'une hypothèse réaliste sur les paramètres pertinents la dépendance d'une quantité en fonction des autres variables et d'un certain nombre de "nombres sans dimension" dont la mécanique des fluides est si friande.

Présentons maintenant plus formellement la méthode de l'analyse dimensionnelle avant d'étudier un exemple au §A.2.

A.1 Théorème π ou de Buckingham

Traduit de l'article de B. Castaing [3], pages 62-64.

Il semble que l'analyse dimensionnelle ait été utilisée au moins depuis Galilée. Elle est utilisée depuis longtemps pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides, et c'est maintenant un outil courant en physique. [...]

L'idée de base est bien connue. Imaginons qu'une expérience ait été réalisée avec des conditions aux limites particulières et que tout ait été exprimé dans le Système International (SI ou MKSA). Pour l'exprimer en CGS nous multiplions simplement les nombres représentants les longueurs par 10^2 , les masses par 10^3 , les densités par 10^{-3} . Mais imaginons que nous oublions de le faire et changions simplement le nom des unités. Notre résultat serait celui d'un nouveau problème où les longueurs seraient 10^2 fois plus petites, les masses 10^3 fois plus petites et les densités 10^3 fois trop grandes. En résolvant notre problème, nous avons donc résolu toute une classe de problèmes équivalents. En réalité ce n'est peut-être pas très utile car peu de liquides ont des densités 10^3 fois supérieures à celle de l'eau par exemple! Certaines quantités doivent être maintenues constantes (la vitesse de la lumière par exemple) si elles ont quelques importances.

Formalisons cela en utilisant les travaux de Edgar BUCKINGHAM (Phys. Rev., **14**, 345 (1914)). Soit y_1, \dots, y_n les paramètres (conditions aux limites, quantités importantes) et y la quantité inconnue.

Nous recherchons une relation mathématique :

$$y = f(y_1, \dots, y_n).$$

Soit A_1, \dots, A_m les m dimensions *indépendantes* (M pour la masse, T pour le temps, \dots). Nous verrons que le nombre de dimensions indépendantes n'est pas déterminé de façon évidente mais supposons qu'il le soit. Alors les dimensions des y_i s'expriment en fonction des A_j :

$$[y_i] = A_1^{\alpha_{1i}}, \dots, A_m^{\alpha_{mi}}.$$

L'expression :

$$y_1^{x_1} y_2^{x_2} \cdots y_n^{x_n}$$

sera sans dimension si les m équations :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x_i = 0$$

sont satisfaites. Nous pouvons alors former $n - m$ quantités sans dimensions "indépendantes" : π_1, \dots, π_{n-m} . Prenons ces quantités comme nouveaux paramètres, et appelons y'_1, \dots, y'_m les paramètres restants. Ces y'_i ont des dimensions indépendantes et il existe des exposants β_i tels que :

$$[y] = [y'_1]^{\beta_1} \cdots [y'_m]^{\beta_m}.$$

Alors l'expression

$$\pi = y y'_1^{\beta_1} \cdots y'_m^{\beta_m}$$

est sans dimension et est une fonction de tous les paramètres :

$$\pi = h(y'_1 \cdots y'_m, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Ni π , ni les valeurs de π_i ne dépendent du système d'unité. Nous pouvons donc choisir ces unités pour que tous les $y'_i = 1$ et :

$$\pi = h(1 \cdots 1, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}) = g(\pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Ceci est le théorème de Buckingham : une quantité inconnue sans dimension peut uniquement dépendre des nombres sans dimension formés à partir des paramètres. Le cas le plus intéressant correspond au cas où on ne peut former aucun paramètre sans dimension. Alors la fonction g est une constante g_0 et le problème est entièrement résolu à cette constante multiplicative près :

$$y = g_0 y'_1^{\beta_1} \cdots y'_m^{\beta_m}.$$

On peut choisir autant de dimensions indépendantes que l'on veut. Cela introduit simplement des facteurs de conversion qui agissent comme de nouveaux paramètres. Cela n'a pas d'intérêt sauf si l'on sait que ces facteurs ne peuvent pas intervenir dans le problème. Par exemple, on considère habituellement que le temps et une longueur ont des dimensions différentes. Pourtant, à cause de la théorie de la relativité, c'est artificiel et cela introduit un « facteur de conversion » qui est la vitesse de la lumière. En mécanique classique, nous savons que ce paramètre ne va pas intervenir, ce qui donne tout son intérêt à distinguer le temps et l'espace.

- **Attention, l'analyse dimensionnelle est un outil extrêmement puissant, mais aussi très dangereux ! Si l'on oublie ou si l'on se trompe sur le choix des variables physiques à considérer le résultat devient faux. Le « sens physique » doit permettre de sélectionner les variables indépendantes pertinentes.**

A.2 Exemple de la traînée d'une sphère

Appliquons maintenant ce théorème sur un premier exemple concret. On cherche à calculer la force de traînée d'une sphère dans un liquide visqueux. On recherche une solution stationnaire F_D du problème. De quoi peut-elle dépendre ? Certainement du rayon R de la sphère, de la vitesse U de déplacement de l'obstacle par rapport au liquide et de la viscosité ν du liquide (cette propriété sera décrite dans le chapitre 4) quantité qui différerie par exemple le mouvement dans l'eau du mouvement dans du miel. L'analyse dimensionnelle nous donne :

- dimension de R , une longueur. Ce que l'on note $[R] = L$.
- $[U] = L/T$ où T est un temps.
- $[\nu] = L^2/T$.
- $[F_D] = ML/T^2$ où M est une masse.

Comme il n'y a pas de masse dans les trois premières variables on ne peut pas avoir d'équation du type $F_D = f(R, U, \nu)$. Il y a forcément une autre variable contenant une unité de masse qui intervient dans le problème. Peut-être la masse volumique ρ du fluide. Attention si l'on met ici autre chose comme la masse volumique de la sphère, ou sa masse, ... on peut trouver des résultats justes au niveau des dimensions mais incorrects au point de vue de la physique. L'intuition physique a donc beaucoup d'importance à ce niveau. Formellement on peut tout à fait mettre ici la masse de l'expérimentateur, ou même celle de sa belle-mère, mais ce n'est pas forcément pertinent !

Supposons donc que nous écrivions que $F_D = f(R, U, \nu, \rho)$ nous aurons donc à satisfaire l'équation aux dimensions $[F_D] = [R]^\alpha [U]^\beta [\nu]^\gamma [\rho]^\delta$ soit $ML/T^2 = L^\alpha (L/T)^\beta (L^2/T)^\gamma (M/L^3)^\delta$. Ce qui nous donne un système de 3 équations et 4 inconnues, avec par exemple comme solution $\delta = 1$, $\gamma = 2 - \alpha$, $\beta = \alpha$ avec α libre. On peut donc écrire

$$F_D = R^\alpha U^\alpha \nu^{2-\alpha} \rho F(Re)$$

où $Re = \frac{U 2R}{\nu} = \frac{U D}{\nu}$ est appelé le nombre de Reynolds et c'est le seul nombre sans dimensions que l'on peut fabriquer avec les variables R, U, ν, ρ (vérifier le). Pour $\alpha = 2$ on peut écrire une forme équivalente plus simple :

$$F_D = \rho U^2 R^2 F'(Re).$$

On définit souvent le coefficient de traînée (sans dimension), C_D parfois aussi appelé C_x en français par :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A},$$

où $A = \pi R^2$ est l'aire de la section de l'obstacle.

Notre analyse dimensionnelle nous prédit que $C_D = f(Re)$. C'est en effet ce que l'on observe expérimentalement (figure A.1). À faible nombre de Reynolds on peut montrer que le résultat exact est $C_D = 24/Re$. Ceci montre que la force de traînée F_D augmente d'abord comme la vitesse à faible Re puis comme le carré de la vitesse lorsque $C_D \simeq \text{cste}$, sauf au moment du décrochement appelé crise de traînée pour $Re \simeq 400\,000$.

Lorsque le Reynolds n'est pas très petit devant l'unité, Oseen a calculé le terme correcteur (valable si $Re \leq 5$) : $C_D = \frac{24}{Re} (1 + \frac{3}{16} Re)$.

Il existe ensuite des formules empiriques approchées qui donnent d'assez bon résultats jusqu'à la crise de traînée ($Re \leq 400\,000$) par exemple la relation de White :

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4.$$

• Applications :

- Calculer de la traînée sur une balle de tennis à 200 km/h. $R = 33$ mm, $\nu_{air} = 15 \cdot 10^{-6} m^2/s$, $\rho_{air} = 1,29 \text{ Kg/m}^3$. Comparer au poids de la balle ($M = 50$ g).

Notons que si la sphère n'est pas lisse (cas d'une balle de golf par exemple, du duvet de la balle de tennis) il apparaît au moins une nouvelle variable sans dimension (par exemple le rapport rugosité/rayon comme sur la figure A.2).

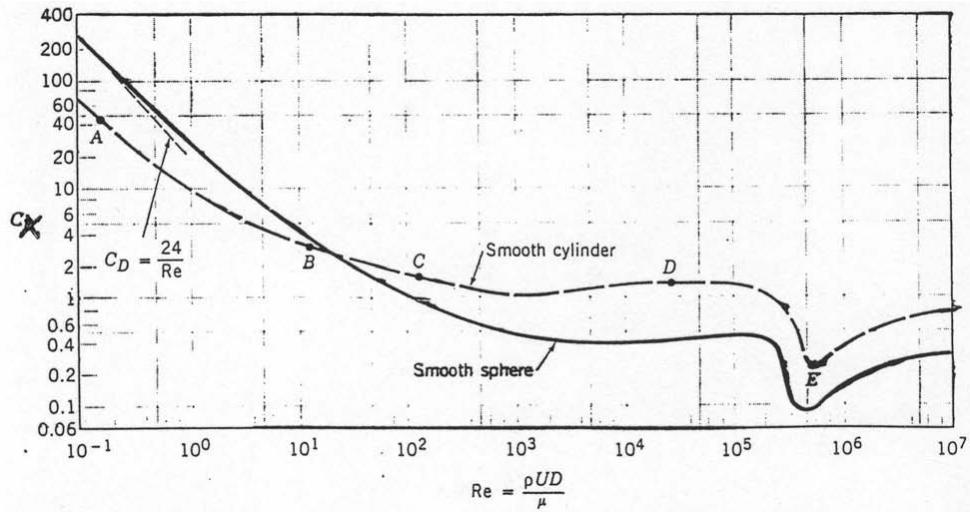


FIGURE A.1 – Evolution de la traînée adimensionnée d'une sphère ou d'un cylindre par unité de longueur en fonction du nombre de Reynolds. Noter les échelles logarithmiques. D'après Munson, page 441.

De même s'il existe plus d'une dimension (ellipsoïde plutôt que sphère par exemple) alors l'analyse dimensionnelle prédit l'existence d'au moins un autre nombre sans dimension, par exemple le rapport grand axe sur petit axe a/b si on a affaire à une ellipsoïde de révolution. Ensuite le problème peut aussi dépendre de l'angle α entre l'axe de l'ellipsoïde et l'écoulement. Alors on aura $C_D = f(Re, a/b, \alpha)$.

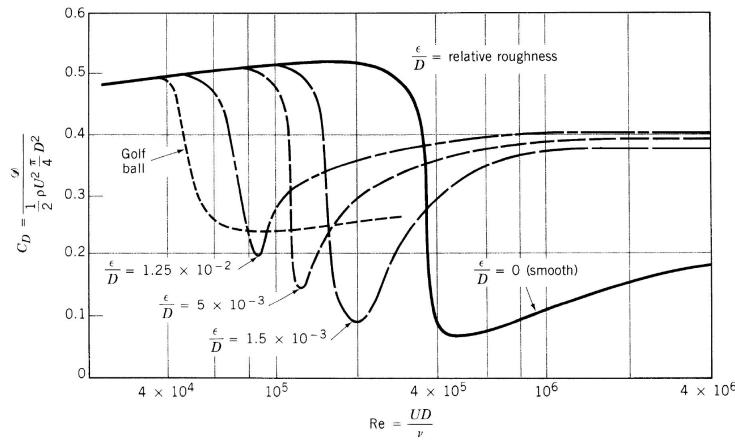


FIGURE A.2 – Effet de la rugosité sur la crise de traînée d'une sphère. D'après Munson.

- Calculer le fardage (force de traînée) dû au mât de 20 mètres de haut d'un voilier dans un vent de 30 Nœuds ($\simeq 60$ km/h) si $R = 10$ cm (le C_D d'un cylindre est environ le double de celui d'une sphère dans cette gamme de nombre de Reynolds).
- Calcul de la traînée sur une plaque plane infiniment mince. Pour une plaque mince de largeur b et de longueur l (dans le sens de l'écoulement) on pose $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = f(Re, b/l)$, où $A = b \times l$ et $Re = Ul/\nu$. On suppose que $b \ll l$. Pour $Re < 10^5$ on trouve expérimentalement $C_D = 1,33 Re^{-1/2}$ et pour $Re > 10^6$ on trouve $C_D^{1/2} \log(Re C_D) = 0,242$ ([2] p. 307). Calculer la force de traînée sur la quille d'un monocoque de type "60 pieds open". On

prendra $b = 3$ m, $l = 0,5$ m, $U = 10$ Nœuds, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. On trouve alors $C_D \simeq 3,710^{-3}$ et $F_D = 73$ N. On trouverait certainement nettement plus en tenant compte de l'incidence non nulle de la quille.

- En ces temps de record ... En athlétisme et particulièrement pour un 100 mètres il paraît que l'on ne peut espérer battre un record du monde par temps froid. Ceci est sans doute dû à l'augmentation de la force de traînée avec une baisse de température. En effet de 30°C à 10°C , la masse volumique de l'air ρ_{air} augmente d'environ 10 % ce qui augmente d'autant la force de traînée $F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$.
- Toujours en athlétisme la plupart des records ne sont validés que si le vent favorable est inférieur à 2 m/s. Regardons l'effet sur la force de traînée d'un vent favorable de 2 m/s. Un coureur de 100 m à une vitesse de l'ordre de $100 \text{ m}/10 \text{ s} = 10 \text{ m/s}$. Il a donc selon qu'il y a du vent ou pas une vitesse relative de 8 ou 10 m/s. Comme la force de traînée $F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$ varie comme le carré de la vitesse apparente, la force de traînée avec un vent dans le dos de 2 m/s est près de 40 % plus faible que sans vent. C'est donc un énorme avantage.

A.3 Période des oscillations d'un pendule pesant

Soit un pendule constitué d'une masse ponctuelle m pouvant osciller librement sous l'action de la gravité au bout d'une tige de longueur l . On recherche une expression pour la période T des oscillations.

1. Si l'on suppose que $T = f(l)$ uniquement, l'analyse dimensionnelle nous montre que c'est impossible.
2. Si l'on suppose que $T = f(l, g)$ l'analyse dimensionnelle prédit que $T \propto \sqrt{l/g}$ ce qui n'est pas mal du tout sachant que le résultat exact pour de petites oscillations est $T = 2\pi\sqrt{l/g}$!
3. Si l'on suppose que $T = f(l, g, a)$ où a est l'amplitude horizontale des oscillations on trouve $T = \sqrt{l/g} F(a/l)$.
4. Si l'on suppose que $T = f(l, g, m)$ on trouve que T ne peut pas dépendre de m sans dépendre d'autres variables faisant intervenir la dimension d'une masse.
5. enfin si l'on suppose que $T = f(l, g, m, \eta, a)$ où η est la viscosité de l'air, on voit apparaître d'autres nombres sans dimensions possibles.

Annexe B

Hydrostatique

Cette annexe est reprise du cours de M. Rabaud [6].

B.1 Equation locale de l'hydrostatique

Un cas apparemment très simple qu'il faut pourtant savoir résoudre est le cas où il n'y a pas d'écoulement. Dans ce cas, on a $\vec{u} = \vec{0}$ partout puisque le fluide est "statique". La seule contrainte est la contrainte de pression (par définition les contraintes visqueuses, tangentielles, n'apparaissent qu'en présence d'un écoulement). Le Principe Fondamental de la Dynamique (2.14) se résume donc à

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d^3\tau + \oint_{SC} (-p) d^2\vec{S} = \vec{0}$$

où \vec{g} regroupe l'ensemble des forces volumiques par unité de masse ; on ne va considérer ici que la situation où $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ est l'accélération de la pesanteur (avec \vec{e}_z dirigé vers le haut). L'application du théorème de Green-Ostrogradski à l'intégrale double permet d'écrire

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d^3\tau + \iiint_{VC} (-\vec{\nabla}p) d^3\tau = \vec{0}$$

Ainsi, tous les termes sont maintenant sous la forme d'une intégrale volumique. On peut donc raisonner sur un petit élément de fluide en faisant tendre le volume de contrôle vers 0, et l'on obtient **l'équation locale de l'hydrostatique**,

$$\vec{\nabla}p = \rho \vec{g}. \quad (\text{B.1})$$

B.1.1 Unités

L'unité officielle de pression dans le Système International (SI) est le Pascal (Pa), c'est-à-dire 1 Newton par mètre carré : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Cette valeur est très faible comparée à la pression atmosphérique. On utilise donc souvent son multiple l'hectopascal ($1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$). La pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer vaut alors par définition $1 \text{ atm} = 1013,250 \text{ hPa}$.

Il existe toutefois un très grand nombre d'autres unités de pression encore utilisées, dont l'usage est déconseillé en physique :

- Le bar. Par définition, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.
- L'atmosphère : $1 \text{ atm} = 1013,250 \text{ hPa}$.
- Le torr, en hommage à TORRICELLI et à son manomètre à mercure : $1 \text{ torr} = 1 \text{ mm de mercure}$, et donc par définition $760 \text{ torr} = 1 \text{ atm}$.
- Le $\text{kg/m}^2 \simeq 10^4 \text{ Pa}$ sur Terre.

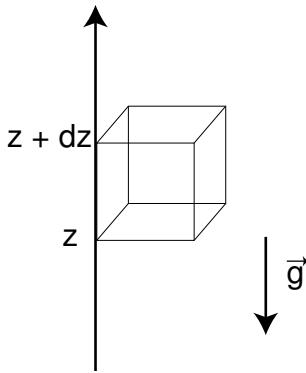


FIGURE B.1 – Volume élémentaire de gaz en équilibre hydrostatique.

- Le PSI, unité anglo-saxonnes utilisées par exemple pour régler la pression des pneus de vélo. C'est l'abréviation de "Pound per Square Inch", la livre par pouce carré valant ... 45,965 Pa sur Terre.

B.2 Equilibre de la pression dans le champ de pesanteur

Considérons un fluide au repos. Chaque particule fluide est en équilibre. Considérons une particule fluide cubique dont les faces basse et haute sont respectivement à l'altitude z et $z + dz$, c'est-à-dire que nous considérons l'axe Oz dirigé vers le haut et donc opposé au sens de l'accélération de la gravité \vec{g} (figure B.1). Les forces de pression sur chaque face s'écrivent $\vec{df} = -p \vec{dS}$ avec \vec{dS} dirigé vers l'extérieur du cube (normale sortante).

L'équilibre des forces horizontales (ici uniquement de pression) s'écrit : $df_x(x) + df_x(x+dx) = 0$. Soit $p(x)dS - p(x+dx)dS = -\frac{\partial p}{\partial x}dSdx = 0$. Et finalement $\partial p / \partial x = 0$. De même on trouve $\partial p / \partial y = 0$.

L'équilibre des forces verticales de pression et de gravité s'écrit :

$$df_z(z) + df_z(z+dz) - \rho d\tau g = 0,$$

où par convention $\|\vec{g}\| = g > 0$. Soit

$$p(z)dS - p(z+dz)dS - \rho dS dz g = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) dS dz = 0.$$

Et finalement

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

On peut donc écrire sous forme vectorielle : $\vec{\nabla}p = \rho \vec{g}$, et l'on retrouve logiquement la relation (B.1).

B.2.1 Cas d'un fluide de masse volumique constante

Si le fluide est incompressible ρ ne dépend pas de la pression p . Si de plus le fluide est de masse volumique homogène (indépendante de la position) alors l'équation de la pression s'intègre facilement et l'on trouve :

$$p(z) = p(0) - \rho g z.$$

Avec z dirigé vers le haut (si z était dirigée vers le bas un signe + remplace le signe -). La pression dans le fluide diminue avec l'altitude et augmente avec la profondeur. Par exemple en mer, si on

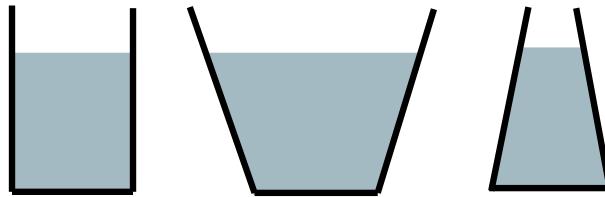


FIGURE B.2 – Paradoxe de Stevin : La pression au fond de ces trois récipients est-elle la même ? Oui ? Pourtant la pression exercée par chacun de ces verres sur le sol est différente. Comment est-ce possible ?

choisit $z = 0$ en surface $p(0) = p_{atm}$ et z dirigé vers le bas $p(z) = p_{atm} + \rho g z$. En plongée, à une profondeur de l'ordre de 10 m, $\rho g z$ vaut environ une fois pression atmosphérique, donc la pression totale vaut deux fois la pression atmosphérique. En apnée le volume de vos poumons est donc pratiquement diminué de moitié !

Par 3200 m de profondeur au large de la Galice, l'épave du tanker "Prestige" est soumise à une pression de 321 fois la pression atmosphérique, soit une force équivalente à 3210 tonnes par m^2 de coque (mais s'il y a de l'eau de part et d'autre de la coque, cette force est compensée par une force opposée de l'autre côté).

Nota : On appelle parfois *pression statique* la quantité $p^* = p(z) \pm \rho g z$. Cette quantité reste constante partout dans un fluide en équilibre hydrostatique.

B.2.2 Quelques applications

- Paradoxe de Stevin : Pascal a montré que la pression au fond d'un récipient ne dépend que de la hauteur d'eau et pas de la forme du récipient (figure B.2). Pourtant la masse de liquide dans chaque récipient est différente et le poids du récipient est réparti sur la même surface. Pouvez-vous expliquer ce paradoxe, appelé paradoxe de Stevin du nom de l'ingénieur flamand Simon Stevin (1548-1620) de Brugge qui l'a imaginé.
- Le siphon : La figure B.3 représente un tuyau reliant les deux récipients. Expliquer pourquoi une fois amorcé ce siphon permet de vider le récipient le plus haut dans le récipient le plus bas. Au XVIIème siècle l'explication courante était encore que "la nature a horreur du vide". Pascal a montré qu'un siphon peut pourtant fonctionner à la pression atmosphérique en utilisant deux liquides de densité différente (par exemple de l'eau salée et colorée et de l'eau pure) (figure B.4).
- Manomètre en "U" : Dans un tel manomètre rempli d'un liquide (en gris sur la figure B.5) on mesure la différence de hauteur h entre les deux branches qui donne la différence de pression : $P_B - P_A = \rho_{gris}gh$.
- Vérin hydraulique : Un vérin hydraulique est basé sur le fait qu'un liquide au repos transmet *intégralement* la pression et pas les forces. La figure B.6 montre un vérin rempli d'huile fermé par deux bouchons étanches de surface S_A et S_B . Comme les pressions en A et B sont proches (h petit), si $S_A \gg S_B$ alors $F_A = P_A S_A \gg F_B = P_B S_B$. On réalise ainsi une très forte démultiplication. Avec un tel vérin un mécanicien pourrait soulever à la main un Airbus pour changer une roue du train d'atterrissement. C'était aussi le principe des premiers ascenseurs hydrauliques fonctionnant à la pression de l'eau de la ville. On vérifie que pour un tel système les travaux des forces sont égaux. En effet, $W_A = \vec{F}_A \cdot \vec{\Delta l}_A = P_A S_A \Delta l_A$, et comme $S_A \Delta l_A = S_B \Delta l_B$ on a bien $W_A = W_B$. Il faudra donc beaucoup de coups de pompe sur le vérin pour soulever l'Airbus !
- Baromètre à mercure : La figure B.7 représente l'expérience historique de Torricelli de 1644 réalisée à Florence. Au niveau de la mer lorsque $h > 760$ mm un espace vide apparaît dans le haut d'un tube rempli de mercure (le "vif-argent" à l'époque) puis retourné dans un bac de mercure. La hauteur de mercure dans le tube varie légèrement de jour en jour (variation de la pression atmosphérique) et en altitude (1 cm de moins au sommet de la

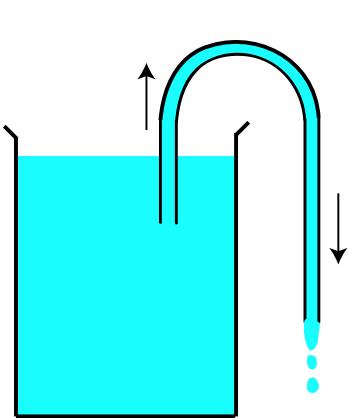


FIGURE B.3 – Schéma d'un siphon

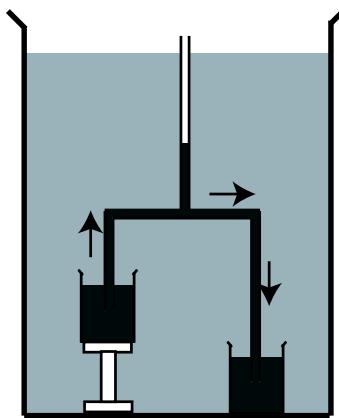


FIGURE B.4 – Siphon à deux liquides de Pascal

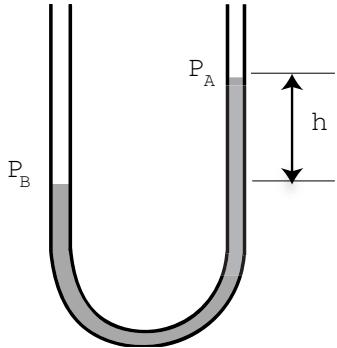


FIGURE B.5 – Schéma d'un manomètre en "U"

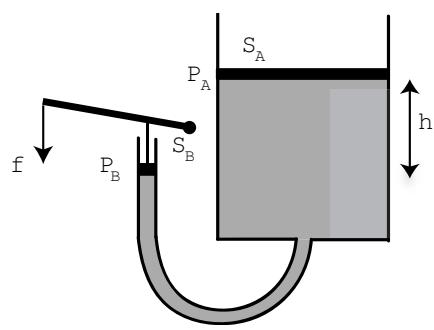


FIGURE B.6 – Schéma d'un vérin hydraulique

tour de Pise). En toute rigueur on n'obtient pas le vide mais la phase gazeuse du liquide utilisé à sa pression de vapeur saturante pour la température de l'expérience. Dans le cas du mercure cette pression de vapeur saturante est très faible et Torricelli a donc bien été la première personne à réaliser le vide. Ce résultat a mis longtemps à être accepté par la communauté et Pascal a refait en 1646 cette expérience le long d'une des tours d'une église de Rouen avec un long tube rempli de vin !

— Expérience du "crève-tonneau" de Pascal. On raconte que Pascal s'était déclaré capable de faire exploser n'importe quel tonneau avec un long et mince tuyau et un verre d'eau.

B.2.3 Cas d'un fluide de masse volumique variable

L'atmosphère et l'océan sont des exemples de fluides dont la densité varie avec l'altitude. C'est ce que l'on appelle des fluides stratifiés.

Cas général

Pour un fluide compressible la masse volumique est variable. En général il existe une équation d'état thermodynamique pour ce fluide, par exemple $f(p, V, T) = 0$ ce qui veut dire que $\rho = \rho(p, T)$. Dans ce cas l'équation B.1 devient : $\vec{\nabla}p = \rho(p, T)\vec{g}$ où \vec{g} représente l'accélération des forces volumiques (pas forcément uniquement l'accélération de la gravité). Pour que le membre de droite de cette équation dérive d'un gradient il faut que $\vec{\nabla}_\Lambda(\rho\vec{g}) = 0$ soit :

$$\rho \vec{\nabla}_\Lambda(\vec{g}) + \vec{\nabla}\rho \wedge \vec{g} = 0.$$

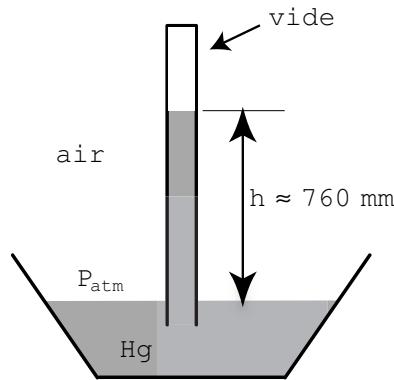


FIGURE B.7 – Expérience de Torricelli permettant la première mesure de la pression atmosphérique.

Si les forces volumiques sont conservatives, elles dérivent d'un potentiel et $\vec{g} = \vec{\nabla}\phi$. On a alors $\vec{\nabla} \wedge \vec{g} = 0$ et il suffit pour avoir un équilibre hydrostatique que $\vec{\nabla}\rho \wedge \vec{g} = 0$, soit $\vec{\nabla}\rho$ parallèle à $\vec{\nabla}\phi$ c'est-à-dire que les isochores ($\rho(p, T) = Cste$) soit aussi des isopotentiels ($\phi = Cste$). Si \vec{g} est vertical, les isobares sont horizontales, et il y a équilibre hydrostatique si les surfaces isochores sont aussi horizontales.

Cas d'un fluide barotrope (cas d'une atmosphère isotherme)

Si l'on suppose ici que ρ ne dépend que de la pression et pas de la température (ou alors que $T = Cste$), ce que l'on nomme *un fluide barotrope*, alors $\rho = f(p)$ et les isochores sont aussi des isobares. Il faut intégrer l'équation caractérisant l'équilibre de la masse de fluide : $\vec{\nabla}p = \rho(p)\vec{g}$. Que l'on peut réécrire :

$$dp = \vec{\nabla}p \cdot \vec{dl} = \rho(p)\vec{g} \cdot \vec{dl}$$

soit avec z dirigé vers le haut :

$$\int_0^z \frac{dp}{\rho(p)} = -g z.$$

Prenons le cas de l'atmosphère terrestre supposé isotherme. Si l'on suppose que le gaz satisfait à l'équation d'état des gaz parfaits $pV = nRT$ alors $\rho = \frac{m}{V} = n\frac{M}{V} = \frac{Mp}{RT}$ où M est la masse molaire du gaz. L'équilibre du gaz s'écrit alors :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz = -\frac{dz}{\lambda}$$

avec $\lambda = RT/Mg$. Ce qui donne, si on néglige logiquement les variations de g avec l'altitude, une variation exponentielle de la pression avec l'altitude $p(z) = p(0) \exp(-\frac{z}{\lambda})$ avec $\lambda \simeq 8000 \text{ m}$. Les résultats sont légèrement modifiés dans l'atmosphère réelle qui est non isotherme car en altitude l'air est plus froid donc plus dense. A 5000 mètres la pression de l'air a diminué environ de moitié, ce qui explique le manque d'oxygène ressenti par les alpinistes en haute montagne. Toutefois cette longueur caractéristique de décroissance de la pression étant grande, on pourra toujours en hydrostatique à l'échelle du laboratoire négliger la compressibilité des gaz.

B.2.4 Cas d'une atmosphère adiabatique

Une atmosphère est stable d'une part si elle est en équilibre hydrostatique (Eq. B.1) et d'autre part si cet équilibre est stable. Pour tester la stabilité il faut imaginer le déplacement vers le haut d'une petite masse d'air et montrer que la force de rappel est stabilisante, c'est-à-dire que la nouvelle masse volumique de la masse d'air est plus forte que la masse volumique du fluide

environnant. En supposant que le déplacement d'une particule fluide de dz vers le haut se fait de façon adiabatique (sans échange de chaleur) l'atmosphère marginale sera l'atmosphère adiabatique où partout la force de rappel sera nulle. Etudions cette atmosphère adiabatique.

Calculons $(d\rho/dz)_{adia}$ en considérant par exemple le fluide comme un gaz parfait, on plutôt calculons $(dT/dz)_{adia}$ ce qui s'avère plus simple.

On a $pV^\gamma = Cste$ soit $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{1/\gamma}$ ou $T/T_0 = (p/p_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. En calculant la dérivée logarithmique de cette dernière relation il vient :

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p},$$

soit

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{dp}{dz}.$$

En reportant dans (B.1) :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho T}{p} g.$$

En utilisant le fait que $pM = \rho RT$, que $\gamma = c_p/c_v$ et que $c_p - c_v = R/M$ il vient donc

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_{adia} = -g/c_p \approx -9,8 K/km.$$

Une atmosphère réelle sera stable si en chaque point sa température décroît moins vite que celle d'une atmosphère adiabatique.

B.3 Equilibre de la pression dans un référentiel non galiléen

Nous avons jusqu'à présent fait les calculs de pression dans le cas où la seule force volumique est la force de gravité. Mais les équations sont les mêmes pour n'importe quelle force volumique (par exemple la force de Laplace pour un fluide conducteur ou la force magnétique pour un fluide magnétique appelé ferrofluide) mais aussi pour n'importe quelle pseudo-force apparaissant dans un référentiel non galiléen. Dans le cas général il faudra écrire : $\vec{\nabla}p = \rho(\vec{g} - \vec{a}_e - \vec{a}_c)$ c'est-à-dire que le gradient de pression est colinéaire à la *gravité apparente*. L'accélération d'entraînement \vec{a}_e s'écrit comme la somme de l'accélération de l'origine du référentiel relatif O' , de l'accélération angulaire et de l'accélération centrifuge, et où \vec{a}_c est l'accélération de Coriolis :

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \\ \vec{a}_c &= 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}. \end{aligned}$$

Comme le fluide est au repos dans le référentiel relatif (hydrostatique) la force de Coriolis est nulle et de même la vitesse angulaire doit être constante. Si ρ est constant on peut écrire les termes restant sous la forme d'un gradient et l'on obtient :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \vec{\nabla}(-gz) - \vec{\nabla} \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \cdot \vec{r} \right) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2,$$

soit

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2} \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2 = 0.$$

Finalement, le gradient de pression est colinéaire à la "gravité apparente".

Nota : Si l'axe de rotation n'est pas vertical, dans le référentiel tournant \vec{g} n'est plus un vecteur de direction constante et le fluide n'est donc plus au repos.

- Exercices :

- Trouver la forme de la surface libre d'un récipient plein d'eau ayant un mouvement horizontal rectiligne uniformément accéléré avec $a = g/10$.
- Trouver la forme de la surface libre d'un récipient plein d'eau de forme quelconque en rotation uniforme autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire $\Omega = 10 \text{ rad/s}$.

B.4 La poussée d'Archimède

Considérons l'action des forces de pression appliquées sur un volume totalement immergé dans un liquide. Notons que ce calcul est un cas particulier du calcul général des forces s'exerçant sur une particule fluide. Sur chaque élément de surface nous avons la force normale de pression : $d\vec{f} = -p dS \vec{n}$. Rappelons que par convention, \vec{n} est la normale à la surface dS et cette expression donne alors la force appliquée par le milieu où *pointe* la normale sur le milieu d'où sort la normale. La force totale du fluide environnant sur la surface S limitant le volume V est alors :

$$\vec{F} = \vec{F}_S = \oint_S d\vec{f} = - \oint_S p dS \vec{n} = - \oint_S p d\vec{S}.$$

Calculons la projection de cette force sur n'importe quelle direction, par exemple \vec{e}_x :

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{e}_x = - \oint_S (p \vec{e}_x) \cdot d\vec{S}.$$

En appliquant le théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky) : $F_x = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (p \vec{e}_x) d\tau$. Or $\vec{\nabla} \cdot (p \vec{e}_x) = \frac{\partial p}{\partial x}$, donc $F_x = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} d\tau$. En refaisant le calcul pour les directions \vec{e}_y et \vec{e}_z on obtient :

$$\vec{F} = - \iiint_V \vec{\nabla} p d\tau.$$

Si maintenant le fluide est au repos, c'est-à-dire en équilibre hydrostatique dans le champ de gravité nous avons : $\vec{\nabla} p = \rho_{fluide} \vec{g}$ donc :

$$\vec{F} = - \iiint_V \rho_{fluide} \vec{g} d\tau = - \vec{g} \iiint_V \rho_{fluide} d\tau = - m_f \vec{g},$$

où m_f est la masse de fluide qu'occuperait ce volume V . C'est le célèbre théorème d'Archimède :

Tout corps plongé dans un liquide reçoit de la part de celui-ci une poussée dirigée de bas en haut, égale au poids du volume du liquide déplacé.

La démonstration est valable également pour un fluide stratifié où la masse volumique dépend de l'altitude. C'est cette force qui fait s'envoler un ballon gonflé à l'hélium, remonter une bulle d'air dans l'eau ou flotter un tronc d'arbre.

La poussée d'Archimède est aussi à l'origine de la dynamique atmosphérique, océanique et tellurique.

Exercices :

- Expliquer pourquoi un cube plus léger que l'eau peut rester posé au fond d'un récipient plein d'eau à condition d'être bien lisse. A quel condition va-t-il remonter ?
- Une balle de ping-pong flotte à la surface d'un seau d'eau placé dans un ascenseur. L'ascenseur démarre, que se passe-t-il pour la balle ?

B.4.1 Le poisson et le ludion

Si le poids est supérieur à la poussée d'Archimède, l'objet coule, si c'est le contraire il s'élève. On appelle *poids apparent* la somme du poids et de la poussée d'Archimède. Un ballon dirigeable ou une montgolfière en équilibre ont un poids apparent nul.

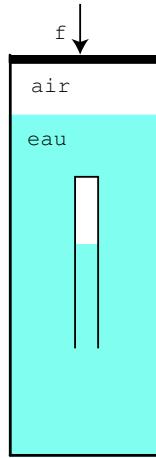


FIGURE B.8 – Schéma de principe d'un ludion

On peut se demander comment font les poissons pour flotter entre deux eaux ? Eux aussi compensent exactement leur poids par la poussée d'Archimède. Pour cela ils changent leur volume en gonflant plus ou moins leur vessie natatoire remplie d'air. En augmentant la pression de l'air dans cet organe ils diminuent de volume, augmentent leur poids apparent et descendent. Ils remontent en décomprimant le même volume d'air.

Le *ludion* est un jouet basé sur le même principe. Un tube scellé en haut (par exemple un tube de stylo Bic vide, bouché en haut à la pâte à modeler et lesté en bas par un trombone pour qu'il reste vertical) contient juste la quantité d'air nécessaire pour le faire flotter. On le place dans un récipient d'eau fermé déformable (par exemple une bouteille en plastique ou un tube fermé par une membrane déformable, cf. figure B.8). En comprimant la bouteille on augmente la pression de l'eau à l'intérieur, ce qui diminue le volume d'air dans le ludion et cause sa lente descente vers le fond. Le but du jeu est de le maintenir le plus longtemps possible entre deux eaux...

Un sous-marin lui aussi annule son poids apparent mais cette fois sans changer de volume. Il augmente sa masse totale en vidant l'air de ses ballasts et en les remplissant d'eau. Il remonte vers la surface en purgeant ses ballasts, c'est-à-dire en y injectant à nouveau de l'air venant de ses réserves d'air comprimé.

Annexe C

Techniques expérimentales

Les méthodes de description d'écoulements données au chapitre 1 (observations de trajectoires de particules, de lignes d'émission ou de lignes de temps) sont très utiles pour comprendre la nature d'un écoulement, en particulier pour déterminer s'il est stationnaire, instationnaire, turbulent, etc. En revanche, il est difficile à partir de telles visualisations d'accéder à une mesure quantitative de la vitesse de l'écoulement. Les méthodes de mesure quantitative en mécanique des fluides sont en général de type Eulériennes : on accède à l'évolution temporelle de la vitesse en un point fixe, ou en un ensemble de points, où l'on dispose un ou plusieurs capteurs de vitesse. On décrit dans cette annexe quatre méthodes couramment employées dans les laboratoires, et illustrées en figure C.1.

C.1 Tube de Pitot

Principe : Il s'agit d'une sonde de pression, de quelques mm de diamètre, que l'on dispose face à l'écoulement. La mesure de la pression permet, via l'équation de Bernoulli (cf. § 3.4.4), d'en déduire la vitesse. Ces sondes sont utilisées en aéronautique. En déplaçant le capteur, on peut reconstruire point à point un profil de vitesse (figure C.1b).

Avantage : Simple d'utilisation, bon marché et très robuste.

Inconvénient : Ces sondes de taille importante perturbent localement l'écoulement, les rendant inutilisables pour des écoulements à petite échelle. La résolution temporelle est mauvaise, les rendant utiles essentiellement pour des mesures de vitesse moyenne ou lentement variable dans le temps.

C.2 Anémométrie à fil chaud

Principe : On positionne dans un écoulement d'air (le plus souvent dans une soufflerie) un très fin fil (diamètre $\sim 10 \mu\text{m}$, longueur $\sim 1 \text{ mm}$) que l'on chauffe en y faisant circuler un courant électrique. Plus la vitesse du fluide est élevée, plus le fil va être refroidi par l'écoulement, qui va emporter la chaleur en aval. Ainsi, la mesure du courant électrique nécessaire au maintien du fil à température constante donne une mesure indirecte de la vitesse du fluide. On accède ainsi à l'évolution temporelle de la composante de la vitesse perpendiculaire au fil, par exemple $u_x(\vec{r}_0, t)$, où \vec{r}_0 est la position (fixe) du fil chaud (figure C.1a).

Avantage : Permet de mesurer les fluctuations de vitesse avec une excellente résolution temporelle, de l'ordre de 10 kHz ; c'est utile pour l'étude des écoulements turbulents, qui présentent des fluctuations rapides.

Inconvénient : Méthode de mesure intrusive (le capteur peut perturber l'écoulement). Ne fonctionne que pour des écoulements isothermes.

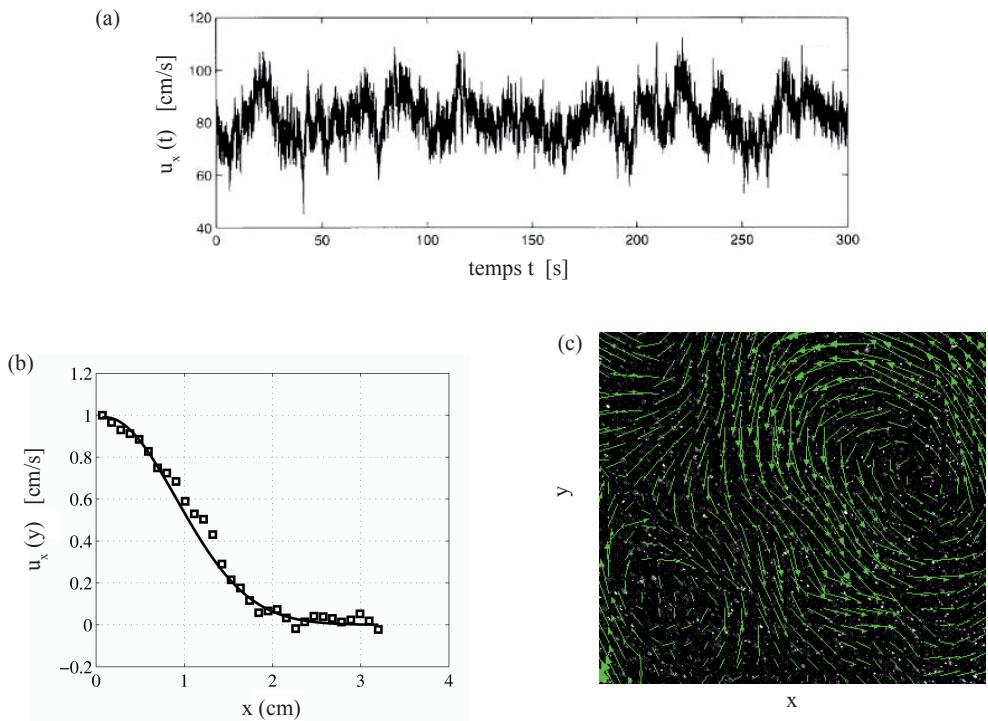


FIGURE C.1 – Mesures de vitesse expérimentale : (a) série temporelle d'une composante de la vitesse mesuré en 1 point dans un écoulement turbulent, tel qu'obtenu avec la méthode d'anémométrie à fil chaud. (b) Profil de vitesse dans un jet axisymétrique, obtenu en déplaçant un capteur le long d'un rayon. (c) Images de particules et champ de vitesse correspondant, calculé par la méthode de vélocimétrie par images de Particules (Université du Minnesota).

C.3 Anémométrie Laser Doppler

Principe : On fait interseccer deux faisceaux laser (diamètre ~ 1 mm) en un point de l'écoulement. A l'intersection de ces 2 faisceaux, il se forme un réseau de franges d'interférence (interfrange : $10 \mu\text{m}$). On injecte dans l'écoulement des petites particules solides ou des gouttelettes. Lorsque celles-ci traversent le réseau de franges, elles sont successivement éclairées ou sombres. En détectant la fréquence du clignotement de ces particules, on en déduit la composante de la vitesse perpendiculaire aux franges.

Avantage : Mesure non intrusive (pas de risque de perturber l'écoulement). Fonctionne dans les gaz et les liquides. Très bonne résolution temporelle (proche de celle du fil chaud).

Inconvénient : Nécessite un accès optique, un fluide transparent, et l'injection de particules.

C.4 Vélocimétrie par Images de Particules

Principe : Cette méthode est conceptuellement très simple : on filme des particules en suspension dans un écoulement, puis on compare 2 images successives du film. A partir d'un algorithme de corrélation, on détermine dans chaque petite portion de l'image la vitesse moyenne d'un ensemble de particules (figure C.1c). On obtient ainsi, à un instant donné, une cartographie du champ de vitesse Eulérien dans le plan de l'image ($u_x(x, y), u_y(x, y)$).

Avantage : C'est la seule méthode permettant d'avoir accès à la structure spatiale du champ de vitesse instantané.

Inconvénient : Comme pour l'anémométrie Laser Doppler, nécessite un accès optique, un fluide transparent, et l'injection de particules. La résolution temporelle est limitée par la fréquence d'acquisition de la caméra (peut atteindre 1 à 10 kHz aujourd'hui).

Remarque : Cette méthode récente se développe énormément depuis une dizaine d'années, notamment grâce à la généralisation des caméras rapides. Des versions évoluées de la PIV permettent l'accès à l'ensemble des 3 composantes de la vitesse dans le plan de l'image (PIV stéréoscopique), voire même dans tout le volume de l'écoulement (PIV tomographique).

Annexe D

Quelques éléments sur les tenseurs

Dans un certain nombre de domaines de la physique, il est nécessaire d'introduire l'outil mathématique des *tenseurs*. C'est le cas notamment pour les milieux continus, et notamment en mécanique des fluides. En mécanique des fluides, savoir manipuler les tenseurs est facultatif jusqu'à un certain point, et l'on s'en passerait volontier. Mais même pour démontrer certains résultats, comme l'équation de Navier-Stokes, ou bien pour manipuler les grandeurs associées aux fluctuations de vitesse en turbulence, leur utilisation s'avère indispensable.

Savoir manipuler les tenseurs demande un peu d'entraînement. Mais c'est un investissement qui peut s'avérer très utile : ils permettent par exemple de retrouver des relations d'analyse vectorielle (du type $\vec{\nabla}_A(\vec{\nabla}_A \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$) uniquement par quelques manipulations élémentaires. L'objectif de cette introduction n'est pas de devenir un expert en algèbre tensorielle, mais simplement d'acquérir le minimum d'aisance afin de manipuler ces quantités dans le cadre d'un cours de mécanique des fluides.

Notons que, même si le concept mathématique de tenseur est évidemment le même dans les différents domaines de la physique où ils interviennent (relativité, mécanique des fluides, des solides, etc.), les usages et les conventions de notation peuvent différer notablement d'un domaine à l'autre. Les concepts introduits ici sont donc généraux, mais les notations et les illustrations concrètes sont issues de la mécanique des fluides uniquement.

D.1 Qu'est-ce qu'un tenseur ?

D.1.1 Qu'est-ce qu'un vecteur ?

Toute collection de 3 nombres forme-t-elle un vecteur ?

La réponse est non : En effet, un vecteur \vec{u} , comme la vitesse du fluide, doit être indépendante de la base de projection choisie ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$). Si l'on choisit une autre base ($\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$), les valeurs des composantes (u'_x, u'_y, u'_z) changeront évidemment, mais la vitesse \vec{u} elle-même (par exemple sa norme, sa direction) sera *invariante*. Ainsi, pour qu'une collection de 3 nombres puisse s'appeler *vecteur*, il faut que, lors d'un changement de base, ces 3 nombres se transforment selon la règle classique $\vec{u}' = P^{-1}\vec{u}$, où P est la matrice de passage de l'ancienne vers la nouvelle base. Cette règle de transformation assure l'invariance des quantités physiques.

Cette notion d'invariance se généralise à des objets plus compliqués, les tenseurs. On peut d'ailleurs définir mathématiquement les tenseurs comme les objets restant invariants par changement de base. Mais nous allons aborder dans la suite la manipulation des tenseurs d'un point de vue pratique uniquement.

D.1.2 Définition d'un tenseur

On se place dans un espace de dimension d , avec en général $d = 2$ ou $d = 3$. On considère une quantité physique, disons a , décrite par un tenseur de rang n , que l'on note

$$a_{ijk\dots}$$

où les n indices $i, j, k\dots$ prennent des valeurs entre 1 et d . Cela signifie que le nombre minimum de quantités scalaires (= de nombres) nécessaires pour décrire complètement cette quantité physique est d^n .

Quelques exemples :

- la température T en un point est décrite par un nombre unique : c'est un scalaire, et donc un tenseur de rang 0, puisque $3^0 = 1$. Aucun indice n'est nécessaire.
- La vitesse \vec{u} est un tenseur de rang 1, car il est nécessaire d'avoir $3^1 = 3$ nombres (les projections de \vec{u} selon les 3 axes) pour décrire entièrement \vec{u} . Il suffit d'un indice, disons i , et l'on note u_i ce tenseur.
- Les dérivées spatiales de la vitesse forment un tenseur de rang 2 : en effet, il est nécessaire d'avoir $3^2 = 9$ nombres pour décrire toutes les combinaisons de dérivées spatiales. Ce tenseur, très utile en mécanique des fluides, est noté

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (\text{D.1})$$

Les tenseurs peuvent être utilisés dans des bases quelconques ; cependant, on n'utilisera ici que la base des coordonnées cartésiennes en dimension $d = 3$, avec $i = 1, 2, 3$ correspondant aux coordonnées x, y, z . Dans une telle base, un tenseur de rang 2 peut se représenter comme une matrice $d \times d$ (ici 3×3), les lignes étant numérotées par i et les colonnes par j (convention *li-co*) :

$$[G] = \begin{pmatrix} \partial u_x / \partial x & \partial u_x / \partial y & \partial u_x / \partial z \\ \partial u_y / \partial x & \partial u_y / \partial y & \partial u_y / \partial z \\ \partial u_z / \partial x & \partial u_z / \partial y & \partial u_z / \partial z \end{pmatrix}.$$

Le tenseur des contraintes, σ_{ij} , défini comme la i ème composante de la force appliquée par unité de surface normale à n_j , est un autre exemple de tenseur de rang 2.

Dans une expression comme (D.1), on sous-entend toujours $\forall i, j$. Ainsi, l'équation (D.1) correspond en fait aux 9 équations scalaires, $G_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$, etc. En revanche, si l'on note G_{xy} , on veut parler de la composante x, y (c'est-à-dire $i = 1, j = 2$) du tenseur G_{ij} . Ainsi, l'équation $G_{xy} = S$ est une unique équation scalaire.

Un tenseur est symétrique pour 2 indices i et j si $a_{ijk\dots} = a_{jik\dots}$. Un tenseur est antisymétrique pour 2 indices i et j si $a_{ijk\dots} = -a_{jik\dots}$. Pour un tenseur de rang 2, ces définitions coïncident avec les propriétés usuelles de symétrie des matrices : le tenseur a_{ji} est représenté par la matrice transposée ${}^t[a]$.

D.2 Produit scalaire et produit tensoriel

Le *produit scalaire* de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

On utilisera la convention de sommation implicite, ou convention d'Einstein : lorsque 2 indices sont répétés, une somme est sous-entendue sur toutes les valeurs possibles de l'indice, $i = 1\dots d$. Ainsi, on notera simplement

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i, \quad (\text{D.2})$$

avec en particulier $|\vec{a}|^2 = a_i a_i$. Le produit scalaire est invariant par changement de base.

Le *produit tensoriel* de 2 tenseurs de rang n et m permet de former un tenseur de rang $n + m$ qui "regroupe" les 2 tenseurs. Ainsi, le tenseur c_{ij} de rang 2 peut être défini comme

$$c_{ij} = a_i b_j. \quad (\text{D.3})$$

La représentation matricielle du tenseur c_{ij} est :

$$[c] = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

En notation vectorielle, le produit tensoriel (D.3) s'écrit $\vec{a} \otimes \vec{b} = [c]$ (on trouve parfois aussi les notations \vec{c} et \underline{c}). Cette écriture vectorielle est parfois ambiguë, et n'est pas utilisée ici.

A noter que, dans chacun des 9 équations représentées par (D.3), a_i et b_j sont des nombres (ce sont les composantes i et j des vecteurs \vec{a} et \vec{b}). Ces termes peuvent donc permutez, et l'on peut écrire aussi bien $c_{ij} = b_j a_i$ (mais pas $c_{ij} = b_i a_j$!) Attention toutefois : si l'on peut considérer que le tenseur G_{ij} de l'Eq. (D.1) est construit comme le produit tensoriel de l'opérateur $\partial/\partial x_j$ et du vecteur u_i , les faire commuter n'aurait aucun sens ici.

D.2.1 Indices muets et libres

Dans l'expression (D.2), l'indice i est dit "muet" ou "sommé" : la lettre utilisée pour écrire la somme n'a pas d'importance. Ainsi, on peut noter indifféremment

$$a_i b_i = a_k b_k = a_n b_n \dots$$

En revanche, dans l'expression (D.3), les indices i et j sont dits "libres". D'une manière générale, les indices libres sont les indices qui apparaissent une seule fois dans chaque membre d'une équation, ou dans chaque terme d'une somme. On doit avoir la même liste d'indices libres dans chaque membre de l'équation, ou dans chaque terme de la somme. On rappelle que, dans une expression comme (D.3), il est toujours sous-entendu $\forall i, j$.

Ainsi, dans l'exemple :

$$a_{ik} b_j = S_{kjl} T_{lnn} \quad (\text{D.4})$$

les indices i, l, n sont muets (ou sommés), tandis que les indices k et j sont libres : cette équation est vérifiée $\forall k, j$.

Les exemples suivants n'ont aucun sens :

$$\begin{aligned} a_{ik} &= b_i c_m \\ a_{ik} &= b_i + d_k \\ a_{ik} &= b_{ikj} \end{aligned}$$

Dans un calcul tensoriel, on prendra bien soin de vérifier, à chaque ligne, la cohérence des indices libres et muets dans chaque membre de l'équation (ce qui ne garantit pas nécessairement que l'équation soit juste !)

D.2.2 Opérations sur les matrices

Le produit matrice-vecteur $\vec{y} = A\vec{x}$ se note ainsi :

$$y_i = a_{ij} x_j$$

avec $A = [a]$ (sous-entendu : $\forall i, \sum_j$).

Le produit matriciel $C = AB$ se note :

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

(sous-entendu : $\forall i, j, \sum_k$). Là encore, l'ordre n'importe pas : on a également $c_{ij} = b_{kj} a_{ik}$ (ce qui ne veut évidemment pas dire que $C = BA$!)

D.3 Deux tenseurs importants

D.3.1 Symbole de Kronecker

Le tenseur unité δ_{ij} (encore appelé *symbole de Kronecker*) est tel que $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Ce tenseur symétrique correspond à la matrice unité,

$$[\delta] = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc, pour tout \vec{x} , l'égalité $\vec{x} = I\vec{x}$, soit :

$$x_i = \delta_{ij}x_j$$

(truc pratique : δ_{ij} permet donc de changer la lettre utilisée pour l'indice d'un tenseur).

D.3.2 Contraction, trace

L'opération de *contraction* d'une paire d'indice revient à sommer ces 2 indices ensemble : par exemple, si l'on a le tenseur de rang 3 a_{ijk} et que l'on souhaite calculer le "vecteur" a_{iji} , on écrit

$$a_{iji} = \delta_{ik}a_{ijk}.$$

La contraction permet donc de passer d'un tenseur de rang n à un tenseur de rang $n - 2$ (de 3 à 1 dans l'exemple ci-dessus). Ainsi, le produit scalaire $a_i b_i$ (de rang 0) est la contraction du produit tensoriel $a_i b_j$ (de rang 2).

Dans le cas d'un tenseur de rang $n = 2$ (représenté par une matrice), la contraction sur les 2 indices est un scalaire, appelée la *trace* (somme des éléments diagonaux) :

$$\text{tr}[c] = c_{ij}\delta_{ij} = c_{ii}.$$

La trace de $[\delta]$ est

$$\delta_{ii} = d = 3.$$

D.3.3 Le tenseur de Levi-Civita

Dans l'espace de dimension 3, on définit le tenseur antisymétrique de rang 3 ϵ_{ijk} (dit tenseur de Levi-Civita) par le produit mixte $\epsilon_{ijk} = (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k$. Ce tenseur peut se représenter comme un cube de $3^3 = 27$ éléments, dont seuls 6 sont non nuls. Ses éléments valent 1 ou -1 selon que les indices forment une suite croissante ou non (avec permutations circulaires) :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{si } i, j, k = 321, 213, 132 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce tenseur est utile pour former le produit vectoriel : le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ se note

$$c_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$$

$(\forall i, \sum_{j,k})$. En effet, on peut vérifier que l'on a bien

$$c_1 = \epsilon_{123}a_2 b_3 + \epsilon_{132}a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

(puisque $\epsilon_{123} = 1$ et $\epsilon_{132} = -1$), et ainsi de suite pour c_2 et c_3 .

D.3.4 Quelques identités pratiques

A partir de la première identité (que l'on admettra), retrouver les deux identités suivantes par contractions successives :

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} &= (d-1)\delta_{il} = 2\delta_{il} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= d(d-1) = 6\end{aligned}$$

Retrouver, à partir de la première identité, le résultat classique suivant :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

D.4 Opérateurs différentiels

D.4.1 Gradient

L'opérateur gradient $\vec{\nabla}$ s'écrit $\partial/\partial x_i$ en notation tensorielle (parfois aussi noté ∂_i). Cet opérateur peut s'appliquer à des scalaires, mais aussi à des tenseurs de rang quelconque, y compris des vecteurs. C'est là que le formalisme tensoriel devient particulièrement adapté pour la mécanique des fluides : par exemple, le tenseur de gradient de vitesse que nous avons déjà introduit,

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

est le gradient (selon x_j) de la i ème composante du vecteur \vec{u} . De manière générale, le gradient d'un tenseur de rang n est un tenseur de rang $n+1$.

L'opérateur scalaire $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}$ s'écrit $u_i \partial/\partial x_i$ en notation tensorielle. Cet opérateur s'applique lui aussi à des scalaires ou des tenseurs de rang quelconque. Il joue un rôle fondamental dans la définition de la dérivée Lagrangienne ($d/dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$), qui intervient dans les équations de Navier-Stokes.

D.4.2 Divergence

L'opérateur divergence n'est pas différent de l'opérateur gradient, si ce n'est que l'indice de l'opérateur est contracté (sommé) avec un des indices du tenseur sur lequel il s'applique. Par exemple, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ correspond simplement à

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Ainsi, la divergence d'un tenseur de rang $n > 1$ est un tenseur de rang $n-1$ (la divergence d'un scalaire n'a pas de sens). Noter que, dans l'exemple précédent, on a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = G_{ii} = G_{ij}\delta_{ij} = \text{tr}[G].$$

Exercice : montrer que, pour un fluide incompressible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$), l'accélération particulaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ peut s'écrire comme la divergence du tenseur symétrique $u_i u_j$.

D.4.3 Laplacien

L'opérateur laplacien est simplement la divergence du gradient : $\partial^2/\partial x_i \partial x_i$ (la notation répétée $\partial x_i \partial x_i$, plutôt que ∂x_i^2 , est utilisée ici pour se souvenir de la sommation implicite sur l'indice répété i). Le laplacien d'un tenseur de rang n reste un tenseur de rang n . Cet opérateur correspond à la contraction (trace) de l'opérateur Hessien $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$.

Exercice : Pour un fluide incompressible, montrer que $\partial G_{ij}/\partial x_i = 0$. Sous quelle condition a-t-on également $\partial G_{ij}/\partial x_j = 0$?

Exercice : A partir de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

obtenir la relation suivante (dite équation de Poisson)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = G_{ij} G_{ji}.$$

D.4.4 Rotationnel

Enfin, l'**opérateur rotationnel** s'obtient comme le produit vectoriel entre le "vecteur" $\partial/\partial x_i$ et le tenseur sur lequel il s'applique. Cet opérateur est utile pour définir la vorticité, $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$. Ainsi, avec l'utilisation du tenseur antisymétrique de rang 3, on a :

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

Illustration : La vorticité est un champ de divergence nulle. En effet,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_k = 0.$$

La dernière égalité est satisfait même pour un champ de vitesse qui n'est pas incompressible (i.e., tel que $\partial u_i / \partial x_i \neq 0$). En effet, on a une contraction entre le tenseur antisymétrique ϵ_{ijk} et le tenseur symétrique $\partial^2 / \partial x_i \partial x_j$. Par permutation des indices i, j , on voit immédiatement que cette contraction est nulle.

D.4.5 Quelques relations utiles

On a :

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Il s'ensuit que $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = d = 3$, en effet :

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = d = 3$$

En notant r la norme du vecteur x_i (c'est-à-dire tel que $r^2 = x_i x_i$), la relation $\vec{\nabla} r = \vec{e}_r$ s'écrit

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

Deux autres relations utiles sur les vecteurs unitaires :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j}{r} \right) = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \right) = \frac{d-1}{r} = \frac{2}{r}.$$

Bibliographie

- [1] D.J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford, 1990.
- [2] S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod Université, 1990.
- [3] B. Castaing. *An introduction to hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- [4] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1964.
- [5] E. Guyon, J.P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2001.
- [6] M. Rabaud. *Mécanique des fluides*. Notes de cours du Master 1 et Magistère 2 de Physique Fondamentale, Université Paris-Sud, 2010-2011.