Géométrie Différentielle, TD 4 du 1er Mars 2019

1. Questions diverses - A FAIRE AVANT LE TD

1– Montrer qu'un groupe de Lie connexe est engendré par tout voisinage de son élément neutre.

2– Soit G un groupe de Lie, K un sous groupe compact. Montrer que la projection canonique $\pi : G \to K\backslash G$ est propre.

3– Soit G un groupe de Lie, $H \subseteq G$ un sous groupe de Lie. Montrer que si H et $H\backslash G$ sont connexes alors G aussi.

Solution :

1– Soit G un groupe de Lie connexe, $V \subseteq G$ un voisinage de son élément neutre, $H := \langle V \rangle$ le sous groupe engendré par V. D'une part, H est ouvert dans G. En effet, si $h \in H$ alors hV est un voisinage de h dans G qui est inclus dans H. D'autre part H est fermé dans G, car son complémentaire est union de translatés de la forme gH qui sont ouverts. Comme H est non vide et G connexe, on en déduit que $H = G$.

2– On utilise qu'une application entre variétés est propre ssi elle est fermée et l'image réciproque de tout point est compacte (cf TD précédent). On pourrait aussi répondre à la question à partir de la définition du cours en utilisant qu'une submersion admet des sections locales. Soit $F \subseteq G$ un fermé. Le sous ensemble $\pi^{-1}(\pi(F)) = KF$ est fermé dans G (le vérifier par caractérisation séquentielle, en utilisant la compacité de K). On en déduit que $\pi(F)$ est fermé dans $K\backslash G$. Soit $x \in K\backslash G$, $g \in \pi^{-1}(x)$. On a $\pi^{-1}(x) = Kg$ compact. Cela conlut.

3– Il s'agit de prouver que G est connexe par arcs. Soit $g_1, g_2 \in G$. Comme $H\backslash G$ est connexe par arcs, il existe un chemin continue de Hg_1 à Hg_2. Comme la projection $H \to H\backslash G$ admet des sections locales (c 'est une submersion), on peut relever ce chemin dans G en un chemin de g_1 vers un point $h_2 g_2$ de Hg_2. Mais par connexité de H, il existe un chemin de $h_2 g_2$ vers g_2. On obtient finalement un chemin de g_1 vers g_2 en concaténant ces chemins.

On peut donner une autre preuve, plus topologique qui n'utilise pas que les objets en questions sont localement connexes par arcs. Soit $G = U \amalg V$ une partition de G en deux ouverts disjoints. Pour $g \in G$, si $Hg \cap U \neq \emptyset$, alors $Hg \subseteq U$ par connexité de H. De même pour V. On en déduit que U et V sont H-invariants (à gauche) puis que leurs projections U', V' dans $H\backslash G$ forment une partition en deux ouverts disjoints de $H\backslash G$. Par connexité du quotient, on conclut que $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

2. Équation globale d'une sous-variété

Soit N une sous-variété fermée de M.

1– Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage U_x de x dans M et une fonction C^∞ $F_x : U_x \to \mathbb{R}^+$ telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Montrer qu'il existe une fonction C^∞ $F : M \to \mathbb{R}$ telle que $N = F^{-1}(0)$.

Solution :

1– Supposons $x \in N$. Par définition d'une sous-variété comme lieu des zéros d'une submersion, on peut trouver un voisinage U_x de x dans M et une submersion $G_x : U_x \to \mathbb{R}^k$ tels que $U_x \cap N = G_x^{-1}(0)$. Posons $F_x = \sum_{i=1}^k G_{x,i}^2$. C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive sur U_x telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

Supposons $x \notin N$. Comme N est fermé, on peut choisir un voisinage U_x de x ne rencontrant pas N. On note $F_x : U_x \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à 1 : on a encore $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Soit $(U_x)_{x\in M}$ le recouvrement ouvert donné par la question précédente. Soit $(\chi_x)_{x\in M}$ une partition de l'unité adaptée à $(U_x)_{x\in M}$. On pose $F = \sum_{x\in M} \chi_x F_x$. C'est une fonction C^∞ sur M (car la somme est localement finie) ; on vérifie aisément que $N = F^{-1}(0)$.

En effet, soit y dans N et soit x_0 un point tel que $\chi_{x_0}(y) \neq 0$. Alors, $y \in U_{x_0}$ et $F_{x_0}(y)$, qui est bien défini, est nécessairement nul. Donc, $F(y)$ est nul. Réciproquement, si $F(y)$ est nul, on considère I l'ensemble des x tels que $\chi_x(y) \neq 0$, de sorte que $F(y) = \sum_{x\in I} \chi_x(y) F_x(y)$. Nécessairement, $y \in U_x$, donc $F_x(y)$ est bien défini et doit être nul. Par construction de U_x, y est alors dans $N \cap U_x$, pour n'importe quel $x \in I$; un seul aurait suffi.

3. Transversalité

1– Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous variété de codimension au moins 2, qui ne rencontre pas l'origine. Montrer qu'il existe une droite $D \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que $M \cap D = \emptyset$

2– Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une hypersurface. Montrer qu'il existe une droite $D \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $x \in M \cap D$, on a $T_x M \cap D = \{0\}$. On dit que la droite D et la sous variété M sont transverses.

Solution :

1– On considère l'application $M \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^n), x \mapsto \mathbb{R}x$. C'est une application C^∞, dont l'ensemble de départ une variété de dimension strictement inférieure à la variété d'arrivée. Par le théorème de Sard, l'image est de mesure nulle. En particulier, il existe une droite $D \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ qui n'est pas de la forme $D = \mathbb{R}x$ pour $x \in M$, i.e. telle que $M \cap D = \emptyset$

2– Considérons l'application $\Phi : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto tx$. D'après le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de Φ est de mesure nulle. En particulier Φ admet une valeur régulière $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ (pas nécessairement dans $\operatorname{Im} \Phi$). Si M contient 0, on peut de plus choisir v tel que $\mathbb{R}v \cap T_0M = \{0\}$. Vérifions que la droite $\mathbb{R}v$ convient. Soit $x \in \mathbb{R}v \cap M$, il faut montrer que $\mathbb{R}v \cap T_xM = \{0\}$. On peut supposer $x \neq 0$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $v = \Phi(t, x)$. On a $T_{(t,x)}\Phi(s, X) = sx + tX$. Comme v est une valeur régulière, $T_{(t,x)}\Phi$ doit être de rang n, i.e. $x \notin T_xM$, ce qui conclut.

4. Sous-variétés immergées

Soit $f : M \to N$ une immersion injective entre variétés. Son image $S = f(M)$ est une *sous-variété immergée* de N. Pour éviter les confusions, on appelle *sous-variété plongée* une sous-variété au sens usuel, dans cet exercice seulement.

1– Montrer qu'il existe une unique topologie et une structure de variété différentielle sur S telle que $f : M \to S$ soit un difféomorphisme.

2– On considère une action d'un groupe G par difféomorphismes sur une variété M. Montrer que les orbites de G sont des sous-variétés immergées.

3– Donner un exemple d'une action d'un groupe G par difféomorphismes sur une variété M telle que les orbites de G ne soient pas toutes des sous-variétés (plongées) de M.

4– Montrer que les orbites sont des sous-variétés (plongées) si et seulement si elles sont localement fermées.

Solution :

1– C'est une tautologie : il suffit de transporter la structure topologique et de variété différentielle de M par la bijection $f : M \to S$. Attention, la topologie de S ne coïncide *a priori* pas avec sa topologie comme sous-espace de N.

2– Soit x dans M. Notons a_x l'application orbitale de G dans M définie par $a_x(g) = g.x$. Si G_x est le stabilisateur du point x, cette application passe au quotient en une application lisse $\theta_x : G/G_x \to M$. Cette application est injective. C'est aussi une immersion. En effet, l'application a_x est de rang constant (cf. cours), donc l'application quotient θ_x l'est aussi (car on a $T_g a_x = T_{\pi(g)}\theta_x \circ T_g\pi$ où π projection quotient est une submersion surjective). Le théorème du rang constant et l'injectivité de θ_x impliquent que c'est une immersion. Les orbites de G sont donc des sous variétés immergées comme images des θ_x.

3– On peut par exemple considérer l'action libre de $\mathbb{R}$ sur le tore $S^1 \times S^1$ donnée, par $(x, y) \mapsto (x + t, y + t\alpha)$, où α est un nombre irrationnel (ici S^1 est vu comme le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). On montre sans difficulté que toutes les orbites sont denses. On peut aussi se donner un sous groupe dénombrable dense d'un groupe de Lie (vu comme groupe de Lie de dimension 0) et considérer l'action par translation à gauche. Les orbites sont dénombrable denses donc ne peuvent pas être des sous variétés.

4– On sait qu'une sous-variété est localement fermée. Réciproquement, on considère l'orbite $G.x$ d'un point et on suppose cette orbite localement fermée. L'orbite est alors localement compacte. On fixe U un voisinage ouvert de e dans G. Soit V un voisinage compact de e dans G tel que $V^{-1}V \subset U$. Considérons une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans G telle que G est recouvert par les g_iV (par séparabilité). Alors, $G.x = \cup_{i\in\mathbb{N}} g_iV.x$. Comme V est compact, les $g_iV.x$ sont compacts, donc fermés dans $G.x$. Par le lemme de Baire (valable dans des espaces localement compacts), au moins un est d'intérieur non vide. En utilisant une translation par un g_i^{-1}, cela prouve que $V.x$ est d'intérieur non vide.

Soit g dans V tel que $g.x$ est dans l'intérieur de $V.x$. Alors, $g^{-1}V.x$ est un voisinage de x et $g^{-1}V$ est contenu dans U. *Bilan* : si U voisinage ouvert de e dans G, $U.x$ est un voisinage de x dans $G.x$.

Soit finalement U un ouvert quelconque de G. Pour tout g dans U, on choisit un tel voisinage ouvert W_g de e tel que gW_g soit inclus dans U. Alors, $U.x$ contient $gW_g.x$ qui est un voisinage ouvert de $g.x$ dans $G.x$. Donc, $U.x$ est voisinage de chacun de ses points ; c'est donc un ouvert. On a montré que l'application orbitale était ouverte ; on en déduit que θ_x est aussi ouverte, donc un homéomorphisme sur son image, donc un plongement, ce qui conclut.

5. Exemple de surface modulaire

1– Montrer que le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ agit par homographie sur le demi-plan de Poincaré $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ via :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

2– A quelle condition un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ a-t-il un point fixe dans H ?

3– On considère le sous-groupe $G = \ker f$ de $SL_2(\mathbb{Z})$, où f est le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} SL_2(\mathbb{Z}) & \to & SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que $G\backslash H$ est une variété quotient.

Solution :

1– Soit $z \in H$, et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Alors $cz + d \neq 0$ et on a

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}.$$

En particulier,

$$\mathrm{Im}\,\frac{az+b}{cz+d}=\frac{1}{|cz+d|^2}(ad\ \mathrm{Im}\ z+bc\ \mathrm{Im}\ \bar{z})=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}\ z=\frac{1}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}\ z>0$$

donc H est stable par $SL_2(\mathbb{R})$. On vérifie par le calcul que

$$\left[\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\right]\bullet z=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\bullet\left[\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\bullet z\right].$$

et que $Id\bullet z=z$.

2– Soit $g:=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$. On cherche les solutions de $\dfrac{az+b}{cz+d}=z$. Si $g=\pm I_2$, tout point de H est solution. Supposons donc $g\neq\pm I_2$. On a nécessairement $c\neq 0$. Un point $z\in H$ est alors point fixe de g ssi il est solution de l'équation polynômiale de degré 2 : $cz^2+(d-a)z-b=0$.

$$\Delta=(d-a)^2+4bc=d^2-2ad+a^2+4bc=d^2+2ad+a^2+4bc-4ad=(d+a)^2-4\in\mathbb{R}$$

Etant donné l'expression des solutions de cette équation polynômiale, elle admet une solution dans H ssi $\Delta<0$ ssi $|d+a|\leqslant 1$.

3– Notons que G n'agit pas librement. En effet, l'élément $-I_2\in G$ agit trivialement sur H. On pose $Z_2:=\{I_2,-I_2\}$ sous groupe distingué de G et $PG:=G/Z_2$. On munit PG de sa structure de groupe de Lie quotient. L'action de G induit une action de PG sur H dont on montre qu'elle est libre et propre.

Liberté : Si $g:=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G-\{\pm I_2\}$ admet un point fixe dans H, alors $|a+d|\leqslant 1$ d'après la question précédente. Or c'est un nombre pair donc $a=-d$. On a $1=\det g=-a^2+4b'c'$. Or un carré ne peut être congrue à -1 modulo 4, d'où une contradiction. On a donc g sans point fixe, puis que l'action de PG sur H est libre.

Propreté : Il suffit de montrer que l'action de G sur H est propre. Notons $i:=(0,1)\in H$. On remarque que l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur H est transitive et que le fixateur de i est $SO_2(\mathbb{R})$. On a ainsi un difféomorphisme $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})\to H,[g]\mapsto g.i$. Par ailleurs, d'après la question 1, l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur H correspond à l'action par multiplication à gauche sur $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$. On est donc ramené à prouver la propreté de l'action de G sur l'espace homogène $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$. Soit $K\subseteq SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$ un compact, $\pi : SL_2(\mathbb{R})\to SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$ la projection canonique. On a $\{g\in G, g.K\cap K\neq\emptyset\}=\{g\in G, g.\pi^{-1}(K)\ \cap\pi^{-1}(K)\neq\emptyset\}$. Or $\pi^{-1}(K)\subseteq SL_2(\mathbb{R})$ est compact donc l'ensemble $\{g\in G, g.K\cap K\neq\emptyset\}$ est compact par propreté de l'action de G sur $SL_2(\mathbb{R})$, et cela conclut.

6. Restriction de fonctions C^∞

Soit M variété, X une partie de M et $f : X \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est C^∞ si, pour tout x dans X, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et une fonction lisse $g : U \to \mathbb{R}$ telle que f et g coïncident sur $X \cap U$.

1– Montrer que cette définition est équivalente à la définition par paramétrisations dans le cas où X est une sous-variété de M.

2– Si X est une sous-variété fermée de M, montrer que toute application C^∞ sur X est restriction d'une application C^∞ de M dans $\mathbb{R}$.

3– Le point précédent reste-t-il vrai pour une sous-variété quelconque ?

Solution :

1– Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ au sens des paramétrisations. Donc, pour tout x_0 de X, il existe U un ouvert de X dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ une immersion qui est un homéomorphisme sur son image U ; V est ici un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et on peut supposer que $\varphi(0) = x_0$. Par le théorème de forme normale des immersions, il existe ψ un difféomorphisme de W dans T, où W est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, T un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\psi \circ \varphi(y) = (y, 0)$, pour tout y dans V (quitte à réduire U et V). Notons π la projection sur le premier facteur pour la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$. On définit $\widetilde{f} = f \circ \psi^{-1} \circ \pi \circ \psi$. Ceci est bien défini sur W, à condition que T soit stable par π, ce qu'on peut supposer quitte à réduire T et W ; il s'agit en effet de remarquer que ψ envoie $U \cap W$ sur $\mathbb{R}^k \times \{0\}\ subset \mathbb{R}^n$. Par le même argument, $\widetilde{f}$ coïncide avec f sur $U \cap W$ (il n'y a plus de projection π à faire) donc on obtient le prolongement désiré.

Réciproquement, si φ est une paramétrisation locale de X, et si $f : X \to \mathbb{R}$ est localement restriction d'une fonction $\widetilde{f}$, alors $f \circ \varphi$ est lisse, car elle coïncide avec l'application $\widetilde{f} \circ \varphi$ qui est lisse par composition. Donc, f est bien lisse au sens des paramétrisations.

2– Notons $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement localement fini de M par des ouverts vérifiant les conditions suivantes : $U_0 = \mathbb{R}^n - F$, pour $i \geqslant 1$, on a sur chaque U_i une application f_i lisse qui coïncide avec f sur $U_i \cap F$. On considère une partition de l'unité (φ_i) subordonnée à ce recouvrement : chaque φ_i est une fonction lisse à valeurs dans $[0, 1]$ de support inclus dans U_i. De plus, $\sum \varphi_i = 1$ (la somme étant localement finie). On pose $g = \sum \varphi_i f_i$, avec $f_0 = 0$; c'est une application lisse qui prolonge f.

3– Non, c'est faux. Par exemple, on ne peut pas prolonger à $\mathbb{R}$ la fonction lisse $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ définie sur $]-1, 1[$.

7. Hypersurface algébrique

1– Soit P un polynôme homogène de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $d_xP \neq 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que
$$H = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \mid P(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$
est une sous-variété de $\mathbb{RP}^n$.

2– Montrer que pour $i, j > 0$ et $P = x_0^2 + \cdots + x_i^2 - (y_0^2 + \cdots + y_j^2)$, H est difféomorphe au quotient de $S^i \times S^j$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par antipodie sur chacun des facteurs.

Solution :

1– Une première stratégie serait de démontrer que pour tout $x \in H$ il existe une carte standard (U_i, φ_i) en ce point telle $P \circ \varphi_i^{-1}$ est une submersion en $\varphi_i(x)$. On a alors que P est une submersion en x, puis que H est une variété est une variété au voisinage de x.

On adopte une autre méthode moins calculatoire en se rappelant qu'une application de rang constant entre deux variétés qui est ouverte sur son image a nécessairement pour image une sous variété (cf. cours). Remarquons d'abord $\mathbb{RP}^n$ s'identifie au quotient de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ sous l'action de $\mathbb{R}^\star$ par multiplication scalaire (qui est libre et propre). Soit $\widetilde{H} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\},\ P(x) = 0\}$. Le sous ensemble $\widetilde{H}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ (image réciproque d'un point par une submersion) et $\widetilde{H}$ est stable sous l'action de $\mathbb{R}^\star$. On note $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ la projection, et p_H sa restriction $p_H : \widetilde{H} \to \mathbb{RP}^n$. Comme $\widetilde{H}$ est $\mathbb{R}^\star$-invariant, p_H est une application de rang constant $(= dim\widetilde{H} - 1)$. Soit $U \subseteq \widetilde{H}$ un ouvert de $\widetilde{H}$. On montre que $p_H(U)$ est ouvert dans H. Il existe $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ouvert tel que $U = \widetilde{H} \cap V$. On a $p(V)$ ouvert dans $\mathbb{RP}^n$ (car p est une submersion, donc est ouverte). Or $p(V) \cap H = p(U)$. On a donc $p(U) = p_H(U)$ ouvert dans H.

2– L'expression de P permet de définir une application

$$\begin{aligned} S^i \times S^j &\to H \\ (x_0, \ldots, x_i) \times (y_0, \ldots, y_j) &\mapsto [x_0 : \ldots : x_i : y_0 : \ldots : y_j] \end{aligned}$$

Notons la Φ. Elle est C^∞, surjective, et deux éléments $(x, y), (x', y') \in S^i \times S^j$ ont même image par Φ ssi on a $(x, y) = (-x', -y')$. L'application Φ passe donc au quotient en une bijection $\overline{\Phi} : \mathbb{Z}_2 \backslash (S^i \times S^j) \to H$ de classe C^∞ (où $\mathbb{Z}_2$ désigne $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant sur $S^i \times S^j$ par antipodie). On va montrer que $\overline{\Phi}$ est un C^∞-difféomorphisme. On reprend la notation $\widetilde{H}$ de la réponse précédente. La projection $p : \widetilde{H} \to H$ est une submersion donc admet des sections locales. Soit $z_0 \in H$, $s : z_0 \in U \to \widetilde{H}$ une section locale de p en z, on peut écrire $\overline{\Phi}^{-1} : U \to \mathbb{Z}_2 \backslash (S^i \times S^j), z \mapsto p'(\frac{\sqrt{2}}{||s(z)||} s(z))$ où $p' : S^i \times S^j \to \mathbb{Z}_2 \backslash (S^i \times S^j)$ est la projection. L'application réciproque $\overline{\Phi}^{-1}$ est donc C^∞ sur U, ce qui conclut.