Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr

TD N^o1: Les Tenseurs et Einstein

Pour tout le TD, on rappelle la signification du symbole de Levi-Civata:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ si permutation paire de (1,2,3)} \\ -1 \text{ si permutation impaire de (1,2,3)} \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

1 Quelques relations grâce aux notations d'Einstein.

1. Soit A un champ scalaire. Montrer que l'on a toujours $\underline{rot}(\underline{grad}A) = \underline{0}$.

2. Soit $\underline{A}$ un champ vectoriel. Montrer que l'on a toujours $div(\underline{rot}(\underline{A})) = 0$.

3. Soit 3 champs vectoriels $\underline{A}$, $\underline{B}$ et $\underline{C}$. Montrer que l'on a toujours $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$. On pourra utiliser la relation $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ à démontrer.

2 Déformation d'un solide

1. Considérons un carré dans un repère orthonormé $(O, \underline{e_x}, \underline{e_y})$ qui subit une déformation définie par:

$$\begin{cases} x' = x + \alpha y \\ y' = y + \beta x \end{cases} \tag{1}$$

où (x,y) et (x',y') représentent les coordonnées du carré avant et après la déformation respectivement.
Nous posons $1 \gg \alpha > 0$ et $1 \gg \beta > 0$.
Nous définissons l'angle de distorsion θ_x (reps. θ_y) comme l'angle entre le vecteur $\underline{e_x}$ (resp. $\underline{e_y}$) et son image par la transformation (1).

   (a) Tracer la figure déformée du carré.
   (b) Déterminer les 2 angles de distorsion θ_x et θ_y.
   (c) En déduire la rotation d'ensemble moyenne et le tenseur des déformations.

2. Donner un exemple de tenseur traduisant pour une déformation en 3 dimensions:

   (a) Une augmentation de volume.
   (b) Une déformation de cisaillement, sans changement de volume.
   (c) Une traction uniaxiale avec contraction transverse.

3 Quelques questions sur les tenseurs d'ordre 2

Exercice A: Montrer que la symétrie et l'antisymétrie sont des propriétés tensorielles, c'est-à-dire que ces propriétés sont conservées par changement de base orthonormée.

Exercice B: Montrer qu'un tenseur $\underline{\underline{T}}$ quelconque peut toujours se décomposer en une partie symétrique et une partie antisymétrique.

Exercice C: Soit $\underline{\underline{S}}$ un tenseur symétrique et soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur antisymétrique. Montrer que l'on a $\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{A}} = 0$. L'opérateur produit doublement contracté : est défini pour 2 tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ par: $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})$

Exercice D: Soit S un tenseur symétrique et soit $\underline{\underline{T}}$ un tenseur quelconque. Montrer que l'on a $\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T^S}}$ avec $\underline{\underline{T^S}}$ la partie symétrique de $\underline{\underline{T}}$.

Exercice E: Soit un tenseur $\underline{\underline{T}}$ symétrique d'ordre 2 en 3 dimensions. Montrer que $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}})$, $\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}})^2 - \mathrm{Tr}(\underline{\underline{T}}^2))$ et $\mathrm{Det}(\underline{\underline{T}})$ sont invariants, c'est-à-dire indépendants du système de coordonnées en base orthonormée.

4 Déterminant de matrice 3x3 avec Einstein

Soit $\underline{\underline{\mathrm{V}}}$ une matrice carrée 3x3 telle que $\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$.

En utilisant la convention de sommation d'Einstein, montrez que l'on peut écrire le déterminant de la matrice $\underline{\underline{\mathrm{V}}}$ sous la forme $Det(\underline{\underline{V}}) = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqr}\,V_{ip}\,V_{jq}\,V_{rk}$

Aide: On pourra d'abord montrer que $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6$