Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr

Correction TD N^o4 bis: Rotation d'un disque

1. Le $\underline{u}$ dans cet exercice ne correspond pas à celui de l'exercice précédent et représente le vecteur déplacement par la transformation étudiée d'un point initialement aux coordonnées (r, θ).
   On a :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{1}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) \tag{2}$$

2. L'equation selon la direction $\underline{e_r}$ donne:

$$0 = \left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}\Delta r\right)(r+\Delta r)\Delta\theta - \sigma_{rr} r\Delta\theta - \sin\frac{\Delta\theta}{2}\left(\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}\Delta\theta\right)\Delta r - \tag{3}$$

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2}\sigma_{\theta\theta}\Delta r + \cos\frac{\Delta\theta}{2}\left(\sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}\Delta\theta\right)\Delta r - \cos\frac{\Delta\theta}{2}\sigma_{r\theta}\Delta r \tag{4}$$

$$0 = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \tag{5}$$

   De la même manière selon $\underline{e_\theta}$ on trouve:

$$0 = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} \tag{6}$$

3. On équilibre l'équation précédente avec la force centripète selon $\underline{e_r}$ + axi-symétrie :

$$-\rho_s r\omega^2 = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \tag{7}$$

   avec $\rho_s = \rho e$

4. Lois de Hooke:

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \tag{8}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}). \tag{9}$$

   Donc,

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\epsilon_{\theta\theta}) \tag{10}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\theta\theta} + \nu\epsilon_{rr}). \tag{11}$$

En utilisant les expressions des déformations $\epsilon_{rr} = u'_r$ et $\epsilon_{\theta\theta} = u_r/r$:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(u'_r + \nu\frac{u_r}{r}) \tag{12}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}(\frac{u_r}{r} + \nu u'_r) \tag{13}$$

En les appliquant dans l'équation d'équilibre:

$$u''_r + \frac{u'_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{1-\nu^2}{E}\rho_s r\omega^2 \tag{14}$$

Avec le changement de variable:

$$r = e^t \tag{15}$$

$$\frac{dr}{r} = dt \tag{16}$$

$$u''_r - u_r = -\frac{1-\nu^2}{E}\rho_s e^{3t}\omega^2 \tag{17}$$

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r} - \frac{(1-\nu^2)\rho_s\omega^2}{8E}r^2 \tag{18}$$

Cas physique jusqu'au centre donc $B = 0$ et bords libre, donc $\sigma_{rr}(r = R) = 0$. Finalement:

$$u_r(r) = \frac{(3+\nu)(1-\nu^2)\rho_s\omega^2}{8E}\left(R^2 - \frac{1+\nu}{3+\nu}r^2\right)r \tag{19}$$