Formation Interuniversitaire de Physique

(L3) *(Année 2013/2014)*

Examen de "Mathématiques pour physiciens"

(28 janvier 2014 – durée : 3h00)

Barème approximatif :

Exercice I	:	25%
Exercice II	:	25%
Exercice III	:	50%

Ni les documents, ni les calculatrices, téléphones et autres appareils électroniques ne sont autorisés
4 pages imprimées
Par défaut, les notations sont celles du cours
Les exercices sont totalement indépendants

Exercice I *Variable sans mémoire*

Une variable aléatoire positive X est *sans mémoire* si et seulement si quels que soient $x, y > 0$

$$\mathbf{P}(X > x)\mathbf{P}(X > y) = \mathbf{P}(X > x + y)\,. \tag{1}$$

1. Montrer que si la v.a. positive X a une densité de probabilité exponentielle $f(x) = ae^{-ax}$, avec $a > 0$, alors elle est sans mémoire.
2. Soit $F(x)$ la fonction de répartition d'une v.a. sans mémoire. On suppose F continue et dérivable et on définit $G(x) = \ln(1 - F(x))$.
   (a) Montrer que quels que soient $x, y > 0$, $G(x + y) = G(x) + G(y)$.
   (b) Calculer $G(0)$.
   (c) Montrer que $G(1) \leq 0$ et que l'on peut donc poser : $G(1) = -a$, $(a > 0)$. (On pourra admettre que a est fini et non nul.)
   (d) Calculer $G(x)$ et $F(x)$ successivement pour tout x entier positif, puis pour tout rationnel positif, puis par passage à la limite, pour tout réel positif.
   Montrer que cela établit la réciproque de la question 1.
3. Soit E la partie entière d'une variable aléatoire $X \geq 0$ sans mémoire.
   (a) Notant que $E = n \Leftrightarrow n \leq X < n + 1$, calculez la loi de probabilité de cette nouvelle v.a. E.
   (b) Cette loi est-elle bien normalisée ?
   (c) Calculer la moyenne (ou espérance) $\langle E \rangle$.

Exercice II *Relations de Kramers–Kronig*

Soit $f(z) = u(z) + iv(z)$ une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, u et v ses parties réelle et imaginaire. On suppose que f est analytique dans le demi-plan supérieur $\Im m(z) \geq 0$ et qu'elle s'y annule comme $\frac{1}{|z|^\alpha}$, $\alpha > 0$, quand $|z| \to \infty$. On se propose de démontrer les *relations de Kramers–Kronig*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(z)}{z-x} dz \\ v(x) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(z)}{z-x} dz \end{aligned} \tag{2}$$

pour x réel, où P est la partie principale (de Cauchy). Ces relations, de grande importance en physique (optique, théorie de la diffusion,...), signifient donc que la partie imaginaire de f peut être "reconstruite" à partir de sa partie réelle, et vice versa.

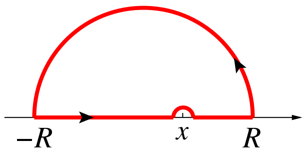

Fig. 1

- A.

  1. Calculer l'intégrale $\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-x} dz$ le long du contour de la figure 1, avec un demi-cercle de rayon ϵ autour de x.
  2. Que peut-on dire de la limite $R \to \infty$ de la contribution du grand demi-cercle ? Justifier.
  3. Que peut-on dire de la limite $\epsilon \to 0$ de la contribution du petit demi-cercle ? Justifier.
  4. Écrire $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ sous la forme : $f(x) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z)}{z-x} dz$ avec une fonction g qu'on précisera, puis en déduire les relations (2).
  5. Pourquoi le calcul précédent peut-il se redire en termes de distributions (agissant sur des fonctions d'une variable réelle z prolongeables en fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur et y décroissant à l'infini comme $|z|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$) comme

  $$\frac{1}{z - x + i\epsilon} = P \frac{1}{z-x} + C\delta(z-x) \tag{3}$$

  avec un ϵ infinitésimal positif et une constante C qu'on précisera ?

- B. On applique ces relations à la transformée de Fourier de la susceptibilité $\chi(t)$ d'un système linéaire, qui relie une source $S(t)$ à la réponse $R(t)$ du système selon

$$R(t) = \int dt' \chi(t-t') S(t') \,. \tag{4}$$

Nous supposons que la transformée de Fourier $\tilde{\chi}(\omega)$ existe et nous admettrons que la condition de causalité : $\chi(t) = 0$ pour $t < 0$, se traduit par des propriétés d'analyticité de $\tilde{\chi}(\omega)$ dans le demi-plan supérieur en ω et de décroissance en $1/|\omega|^\alpha$, $\alpha > 0$, quand $|\omega| \to \infty$.

  1. Quelles propriétés de parité la partie réelle et la partie imaginaire de $\tilde{\chi}(\omega)$ ont-elles comme conséquences de la réalité de la fonction $\chi(t)$?
  2. Montrer qu'on peut exploiter cette propriété de $\Im m \chi(\omega)$ pour écrire

  $$\Re e(\tilde{\chi}(\omega)) = \int_0^{\infty} d\omega' \phi(\omega') \Im m(\tilde{\chi}(\omega')) \tag{5}$$

  avec une fonction $\phi(\omega')$ à préciser, et donc pour exprimer $\Re e\, \tilde{\chi}(\omega)$ par une intégrale portant sur les valeurs physiques (positives) de la fréquence ω'.

Exercice III *Fonction B d'Euler*

Soit la fonction $B(p,q)$ (fonction beta d'Euler) définie par l'intégrale

$$B(q,r) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{r-1}dx \tag{6}$$

avec $\Re e(q) > 0$ et $\Re e(r) > 0$. On rappelle aussi l'expression de la fonction Γ d'Euler

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \tag{7}$$

définie pour $\Re e(x) > 0$.

- A. Changement de variables
  Dans $\Gamma(q)\Gamma(r)$ écrit comme produit de deux intégrales du type (7), avec des variables d'intégration t et u, effectuer un changement de variables $t = vx$, $u = v(1-x)$, calculer le jacobien de ce changement de variables et montrer que cela permet d'exprimer la fonction $B(q,r)$ en termes de la fonction Γ évaluée à divers arguments.

- B. Transformation de Laplace.
  On se propose de retouver l'identité précédente entre les fonctions B et Γ à l'aide de la transformation de Laplace.

  1. Calculer la transformée de Laplace de t^α, en précisant l'abscisse de sommabilité et le domaine de validité en α.
  2. En utilisant le résultat précédent, déterminer la transformée de Laplace inverse de $p^{-\beta}$ (à nouveau on en précisera le domaine de validité).
  3. Calculer **avec le minimum de calculs** la transformée de Laplace $\mathcal{L}[\phi](p)$ de la fonction

  $$\phi(t) := \int_0^t u^{q-1}(t-u)^{r-1}du \tag{8}$$

  4. En déduire l'expression explicite de $\phi(t)$
  5. Retrouver finalement la relation entre la fonction $B(q,r)$ et la fonction Γ établie à la question A.

- C. Formule de réflexion pour la fonction Γ

  1. Montrer que la relation établie plus haut à la question A ou B.5 permet de relier $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ à la fonction $B(z, 1-z)$.
  2. Dans l'intégrale (6) définissant $B(z, 1-z)$, montrer que le changement de variable $x = \frac{u}{1+u}$ permet de se ramener à une intégrale qu'on calculera par résidus, en explicitant bien le contour utilisé et les choix de détermination. En déduire l'expression de $B(z, 1-z)$ en termes de fonctions élémentaires de z.
  3. Écrire finalement l'identité qui en résulte pour Γ.
  4. Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2})$?

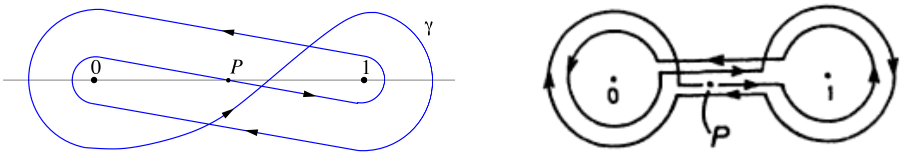

Fig. 2

- D. Contour de Pochhammer.
  Dans le plan complexe privé des deux points 0 et 1, on considère le contour γ de la figure de gauche.

  1. La courbe γ est-elle homotope à zéro ? Même question si la courbe peut traverser 1 (c'est-à-dire si on se place dans le plan complexe privé du seul point 0) ?
  2. **Sans aucun calcul**, déterminer quel est l'indice[1] de γ par rapport à un point z dans les différentes régions du plan. (On pourra colorier ou hachurer de façon différente les régions d'indice différent.)
  3. Sur la figure 2 de droite, on a représenté un contour fait de quatre segments orientés courant le long de l'axe réel, joints par des petits arcs de cercle autour de 0 et 1. On note I, II, III et IV ces quatre segments. Montrer qu'on peut déformer continûment le contour γ de la figure de gauche en celui de la figure de droite.
  4. Au point P sur le segment I, de coordonnée $z \in [0,1]$, on convient que $z^{q-1}(1-z)^{r-1}$ est un réel positif qu'on notera $r(z)$.
     En suivant le contour orienté de la figure de droite à partir de P, comment varie l'argument de $(1-z)$ le long de l'arc de cercle contournant 1 ?
     Par quel facteur la valeur de $r(z)$ est-elle multipliée sur chacun des trois segments II, III et IV suivants ?
  5. Dans $J = \oint_\gamma z^{q-1}(1-z)^{r-1}dz$, sous quelle condition sur q et r la contribution des petits arcs de cercle autour de 0 ou 1 est-elle négligeable quand leur rayon tend vers 0 ?
  6. En déduire une relation simple entre $\oint_\gamma z^{q-1}(1-z)^{r-1}dz$ et $B(q,r)$.
  7. Pour quelles valeurs de q et r l'intégrale J est-elle définie ? Qu'en conclut-on ?

Cette fonction B d'Euler a joué un rôle important dans la naissance de la théorie des cordes (formule de Veneziano).

[1] On rappelle que l'indice d'un chemin fermé γ par rapport à un point z est défini par $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$.