Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr

TD $N^o 4$: Gonflement d'un ballon

Dans cet exercice, nous allons expliquer un phénomène physique souvent observé par les enfants qui gonflent leur ballon en caoutchouc: il y a un effort initial important demandé pour commencer à gonfler le ballon et puis, au delà d'un certain seuil, le gonflement se pousuit plus aisément.

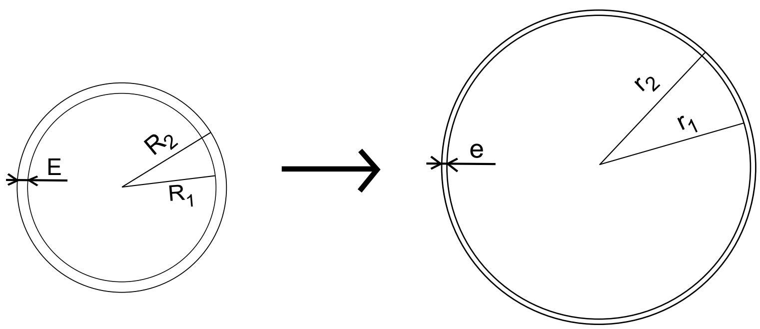

Figure 1: Ballon sphérique que l'on gonfle.

Notre ballon est assimilé à une sphère creuse de rayon intérieur et extérieur notés R_1 et R_2 dans la configuration initiale, et r_1 et r_2 dans la configuration déformée. Nous appellerons e l'épaisseur initiale de la membrane du ballon et nous supposerons qu'elle est très petite devant le rayon du ballon ($e = R_2 - R_1 << R_1 < R_2$). Le ballon est fabriqué à partir d'un matériau homogène, isotrope et incompressible. On s'intéresse au gonflement ($r_1 > R_1$) que l'on supposera quasi-statique isotherme. On négligera la masse propre du ballon et on notera les pressions intérieure et extérieure p_i et p_e respectivement.

1 Cinématique du gonflement

Compte tenu de la symétrie du problème ainsi que de l'isotropie et de l'homogénéité du matériau, nous nous intéressons à une déformation purement radiale qui sera définie en coordonnées sphériques par:

$$r = \lambda(R)R,\ \theta = \Theta,\ \phi = \Phi$$

1. Calculer le tenseur gradient $\underline{\underline{\mathrm{F}}}$ de cette transformation et l'écrire sous la forme:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \lambda_R & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\Theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\Phi \end{bmatrix}$$

2. En utilisant l'incompressibilité du matériau, montrer que l'on trouve une équation différentielle sur $\lambda(R)$ sous la forme:

$$\frac{d(\lambda(R)R)}{dR} = \frac{1}{\lambda(R)^2}$$

3. En déduire l'expression de $\lambda(R)$ en fonction de $\lambda_1 = \lambda(R_1)$.

Dans le cas d'un matériau élastique incompressible, nous pouvons obtenir le tenseur des contraintes σ par une loi néo-hookéenne:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu \underline{\underline{B}} + \eta \underline{\underline{I}}$$

où μ et η sont des paramètres matériaux et $\underline{\underline{\mathrm{B}}}$ est le tenseur de Cauchy-Green gauche et a pour expression:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T$$

2 Analyse du gonflement

1. Donner l'expression du tenseur contrainte σ pour notre ballon.
2. Donner les équations d'équilibre et les conditions aux limites.
3. En partant de l'équilibre des pressions: $p_i = p_e - 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})dr$, donner la relation entre les pressions interne p_i et externe p_e et les valeurs de dilatation λ_1 et $\lambda_2 = \lambda(R_2)$.

   On pourra utiliser, en justifiant, les changements de variable suivants:

$$r = \lambda(R)R, \;\; dr = \frac{1}{\lambda(R)^2} dR$$
$$y = \lambda(R), \;\; dy = \frac{1 - \lambda(R)^3}{\lambda(R)^2} \frac{dR}{R}$$

4. On est dans le cas d'une membrane fine, donc on peut poser $R_2 = (1+\alpha)R_1$ avec $\alpha << 1$. Montrer que la pression interne peut alors s'écrire sous la forme:

$$p_i = p_e + 2\alpha\mu(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7})$$

5. Sachant que les valeurs de μ sont toujours strictement positives, donner l'allure de l'évolution de la pression interne en fonction de la dilatation du ballon.

En coordonnées sphériques:

$$\underline{div}(\underline{\underline{A}}) = \begin{cases} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2A_{rr} - A\theta\theta - A\phi\phi}{r} + \frac{cos\theta}{rsin\theta}A_{r\theta} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{3A_{r\theta}}{r} + \frac{cos\theta}{rsin\theta}(A_{\theta\theta} - A_{\phi\phi}) \\ \frac{\partial A_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3A_{r\phi}}{r} + \frac{cos\theta}{rsin\theta}2A_{\theta\phi} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{grad}}(\underline{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}u_\phi \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}u_\theta + \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}$$