Mécanique des Milieux Continus

F. Pétrélis (cours)
T. Jules (TD), theo.jules@ens.fr, salle L273

TD N^o3: Contact de Hertz

Introduction

Nous allons étudier le contact entre 2 sphères aplaties (voir figure). Les forces de friction et la gravité sont négligées. Nous voulons évaluer la réponse de chaque sphère engendrée par l'interaction de contact.

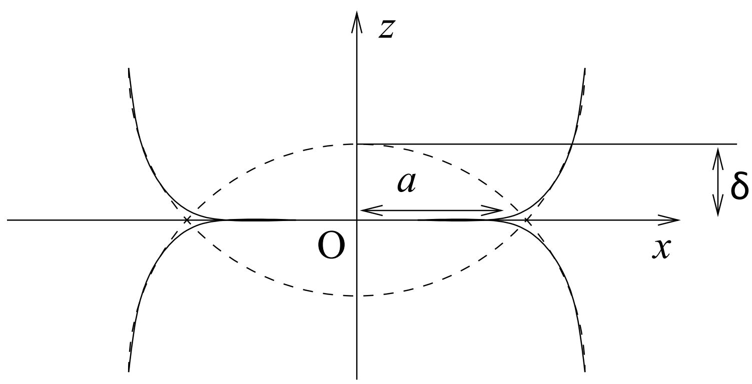

Figure 1: Deux sphères en contact.

1/ Quelle est la forme de la surface de contact ?

2/ Pour des forces faibles, montrer que $a^2 = 2\delta R$ avec R et a respectivement le rayon de la sphère et celui du disque de contact.

Loi d'échelle

Nous allons nous concentrer sur la sphère du bas. Nous supposons qu'il existe une loi de puissance entre la force appliquée F et l'aplatissement δ. En partant d'une force initiale, de telle sorte que le rayon initial soit a et l'aplatissement initial δ, nous augmentons la force appliquée pour que a devienne λa.

3/ Montrer que le nouvel aplatissement δ' est $\delta' = \lambda^2 \delta$.
Trouver une relation similaire pour la nouvelle force appliquée.

4/ En déduire la loi de puissance $F^2 \sim \delta^3$.

Expression générale de la force de contact

L'objectif de cette partie est de vérifier que la relation précédente est correcte et de trouver le préfacteur. Pour des forces faibles, on peut montrer que la composante orthogonale de déplacement est, pour $z = 0$:

$$u_\perp(x, y, z = 0) = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \int\int_{surf} dx'dy' \frac{P(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \tag{1}$$

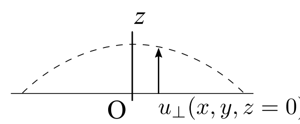

Figure 2: Vue de coté.

où $P(x, y)$ est la contrainte normale dans la zone de contact en (x, y).

5/ En utilisant des arguments géométriques, montrer que

$$u_\perp = \delta - \frac{r^2}{2R} \tag{2}$$

6/ Montrer que les expressions (1) et (2) de $u_\perp$ sont vérifiées si la force normale locale appliquée sur la sphère du bas est

$$P = P_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \tag{3}$$

Pour cela, intégrer (1) en utilisant les variables (s,ϕ) (voir figure) et (2). Est-ce que le résultat est consistant avec la question 2 ?

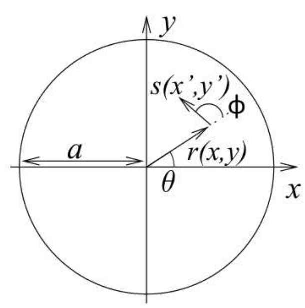

Figure 3: Vue de dessus.

7/ Donner l'expression générale de la force s'exerçant sur la sphère du bas en fonction de δ dans ce cas là.

Application: Temps de collision entre 2 balles

Considérons maintenant la collision entre 2 balles sphériques de rayon R bougeant à une vitesse relative v avant contact.

8/ Ecrire l'énergie potentielle des 2 balles en contact en fonction de δ.
Déduire de la conservation de l'énergie l'évolution dynamique de δ.

9/ Quelle est l'applatissement maximal δ_{max} lors de la collision ?

10/ Combien de temps les balles restent en contact ?

Formules

$$\int_0^y \sqrt{\alpha^2 - 2\beta x - x^2} = -\frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\beta}{\alpha})) \quad \text{avec } \alpha^2 = y^2 + 2\beta y$$

$$\int_0^1 (1 - x^{5/2})^{-1/2} dx = 1.47$$