Physique des particules – L3

TD 4

Exercice 1

À partir de la transformation d'une fonction d'onde sous rotation montrer que $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ et $\hat{L}_z$ sont les générateurs infinitésimaux des rotations autour respectivement des axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Exercice 2

1. Donner des bases des espaces vectoriels des matrices hermitiennes et antihermitiennes.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ montrer que
$$\det(I_n + \epsilon M) = 1 + O(\epsilon^2) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0\,. \tag{1}$$
3. On rappelle que $SU(2) = \{U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); U^\dagger U = I_2\,, \det U = 1\}$. En écrivant $U = I_2 + \epsilon M$, déterminer l'espace vectoriel réel auquel doit appartenir M pour que $U \in SU(2)$ au premier ordre en ϵ.

   Cet espace vectoriel, muni du commutateur des matrices comme crochet de Lie, est l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(2)$.
4. Montrer que si $M \in \mathfrak{su}(2)$ alors $\exp(M) \in SU(2)$.
5. Montrer que $\{\mathrm{i}\sigma_x, \mathrm{i}\sigma_y, \mathrm{i}\sigma_z\}$ est une base de $\mathfrak{su}(2)$.
6. Montrer que $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} ; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$.
7. Montrer qu'il existe une matrice $S \in SL_2(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall U \in SU(2),\, U^* = S^{-1} U S\,. \tag{2}$$