Lionel DJADAOJEE & Simon MESSELOT (prenom.nom@ens.fr)

TD 3 : Optimisation sous contraintes – Multiplicateurs de Lagrange

1 Contrainte géométrique

On considère une particule soumise à un potentiel $V(x,y,z) = \alpha x + \beta y - \gamma z^2$ (α, β, γ positifs), ne pouvant se déplacer que sur une ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Déterminer la position du minimum de potentiel accessible par cette particule.

2 Problème de Didon

Selon la légende, au IX^e siècle av. J.-C., Didon, arrivée sur la côte d'Afrique du Nord (actuelle Tunisie), demanda au seigneur local des terres pour s'établir. Le seigneur lui en accorda « autant qu'il en pourrait tenir dans la peau d'un bœuf » que peut couvrir la peau d'un bœuf. Après avoir découpé la peau en lanières extrêmement fines et en les mettant bout à bout, elle obtient finalement suffisamment de surface pour fonder une ville : Carthage.

Le but de cet exercice est de trouver la forme que Didon a probablement choisi pour sa ville, sachant que son périmètre est fixé.

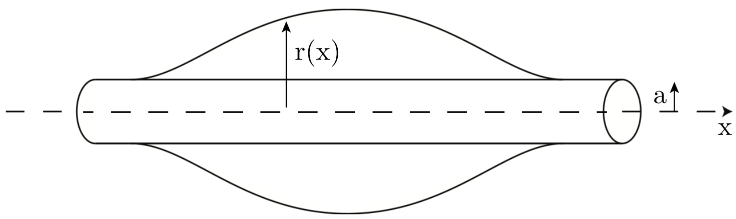
Soit un fil de longueur ℓ fixée, attaché à une droite (qui modélise la côte) aux points d'abscisses x_1 et x_2, entre lesquels on place l'origine des coordonnées. On souhaite déterminer la forme du fil $y(x)$ qui maximise la surface entourée par $y(x)$ et le segment $[x_1, x_2]$.

1. Exprimer mathématiquement le problème variationnel et la contrainte imposée. En déduire le lagrangien équivalent du problème.
2. Déduire des invariances du lagrangien une intégrale du mouvement et montrer que
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} + y = C \tag{1}$$
où C est une constante réelle.
3. Intégrer cette équation et conclure.

3 Goutte sur une fibre

On s'intéresse à la forme qu'adopte à l'équilibre une petite goutte de liquide posée sur une fibre de rayon a. On fait l'hypothèse que liquide est parfaitement mouillant, ce qui implique que l'angle de contact de celui-ci avec la fibre est nul. On suppose également que le système possède une symétrie de révolution par rapport à l'axe (Ox) où x est la coordonnée le long de l'axe de la fibre. On utilisera une représentation $r(x)$ pour le profil, et on notera γ la tension de surface de l'interface liquide/air.

1. Quelle fonctionnelle doit-on minimiser pour minimiser l'énergie de l'interface eau/air à volume fixé ? On introduira un multiplicateur de Lagrange λ. Quelle est la dimension de γ ? de λ ?
2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange. En déduire que le profil satisfait l'équation suivante :
$$\gamma\left(\frac{-\ddot{r}}{(1+\dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r\sqrt{1+\dot{r}^2}}\right) = \lambda \tag{2}$$



3. Montrer que la quantité $\lambda(r^2 - a^2) - 2\gamma\frac{r}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}$ est une constante du mouvement et déterminer sa valeur.

4. Quelle est la signification du multiplicateur de Lagrange λ ? Si le temps le permet, interpréter chaque terme de l'équation précédente.

4 Bonus : Ensemble canonique

Soit un système fermé de N particules sans interaction pouvant prendre les énergies ε_i, $1 \leq i \leq p$. On note n_i le nombre de particules d'énergie ε_i. Lorsque N est grand, on peut assimiler les fréquences n_i/N à des probabilités d'occupation p_i des énergies ε_i. On met le système en contact avec un réservoir d'énergie (thermostat) qui impose la valeur moyenne de l'énergie d'une particule à une valeur E/N.

1. À votre avis, quel est le principe variationnel que va chercher à vérifier le système ?

2. Exprimer les deux contraintes du problème. En déduire une fonction à minimiser en introduisant deux multiplicateurs de Lagrange α et β.

3. Trouver les probabilités d'équilibre p_i. Interpréter les deux constantes α et β avec votre cours de physique statistique.