Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : TD n° 4
Théorème de Cauchy et calcul d'intégrales

Emmanuel Baudin & Francesco Zamponi

1 Séries de Taylor, séries de Laurent

1. Démontrer la convergence uniforme de la série géomètrique sur tout disque de centre 0 et de rayon $R < 1$.
2. Soit une fonction $f(z)$ holomorphe sur un domaine D et $z_0 \in D$. Démontrer que la fonction $f(z)$ peut être représentée par une série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dans tout disque de rayon R, centré sur z_0 et contenu dans D dont les coefficients valent

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \ .$$

Idée : utiliser d'abord la formule intégrale de Cauchy, sur un chemin γ bien choisi. Ensuite, développer le dénominateur en utilisant la série géometrique.

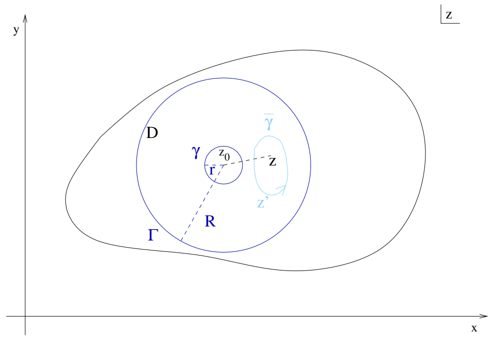
3. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne circulaire K de centre z_0 et de rayons r et R (figure). Montrer que l'on peut représenter $f(z)$ dans K par

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$$

dont les coefficients valent

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

où le chemin γ est représenté sur la figure.
Idée : on commencera par utiliser le théorème de Cauchy pour décomposer l'intégrale sur les chemins Γ et $\bar{\gamma}$. On utilisera ensuite la même strategie que pour le point précedent.



2 Calculs d'intégrales à l'aide du théorème de Cauchy

1. En intégrant respectivement la fonction $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ et $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ sur un chemin d'intégration approprié, calculer

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \ \text{ et } \ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne $\exp(-x^2)$ en utilisant l'intégrale sur le périmètre du rectangle de base $[-R, R]$ et de hauteur bien choisie.

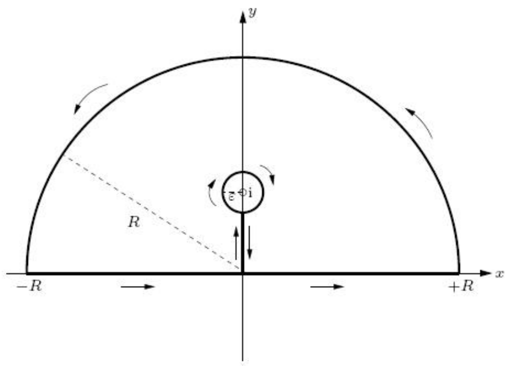
3 Une utilisation de la formule de Cauchy

1. On considère la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}kz}}{1+z^2} \quad , \tag{1}$$

où k est un réel positif. Sur quel domaine du plan complexe $f(z)$ est-elle analytique ?

2. Que vaut $\int_\gamma dz\ f(z)$, avec γ le chemin fermé défini sur la figure :



3. On décompose γ en trois chemins. γ_1 est le segment de l'axe réel reliant $-R$ à R, γ_2 le demi-cercle de centre l'origine et de rayon R et γ_3 le cercle de centre i et de rayon ϵ. Exprimer $\int_\gamma dz\ f(z)$ en fonction des intégrales sur les chemins γ_1, γ_2 et γ_3, en précisant l'orientation des contours.
4. Montrer que la contribution de γ_2 s'annule quand $R \to \infty$.
5. Expliciter la contribution de γ_3, et prendre la limite $\epsilon \to 0$ (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée).
6. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2} = \pi e^{-k} \quad . \tag{2}$$

Comment devrait-on adapter le calcul pour $k < 0$?

4 Calculs d'intégrales à l'aide du théorème des résidus

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration dans le plan complexe :

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \qquad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2)$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^4+(1-\pi^2)x^2-\pi^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\alpha\cos\theta} \qquad (\text{pour } -1 < \alpha < +1)$$

$$I_6 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} \qquad (\text{pour } 0 < \alpha < 1)$$

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad n > 1+\alpha > 0)$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$$

5 Calculs de sommes de séries à l'aide du théorème des résidus

En utilisant la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^4 \sin \pi z}$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.$$

6 Exercices maison

Calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+b^4} dx \quad , b \in \mathbb{R}$$

$$J_2 = \int_0^\pi \sin^{2n}\theta d\theta \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$J_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} \quad , a > 0 \, , a \neq 1$$

$$J_4 = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$