Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : TD n°3

Singularités et intégration des fonctions analytiques

Emmanuel Baudin & Francesco Zamponi

1 Singularités, points de branchement, coupures

1. Déterminer les points de branchement et les coupures des fonctions

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(z) = (z+a)^{1/2} \\ \text{b)} & f(z) = (z^2+1)^{1/2} \\ \text{c)} & f(z) = z^{1/3} \\ \text{d)} & f(z) = (z^4-81)^{1/2} \end{array}$$

   où $a \in \mathbb{C}$.

2. Déterminer la réciproque de la fonction

$$f(z) = \cos z$$

   et étudier ses singularités.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\sin z = i\,.$$

4. Soit la fonction

$$f(z) = \ln z\,.$$

   a) Montrer que toute détermination du logarithme a pour dérivée $\frac{1}{z}$.

   b) On considère maintenant la *détermination principale* du logarithme : $\forall\, z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^+$

$$\mathrm{Ln(z) = ln(|z|) + i\,arg(z)}$$

   où $z = |z|e^{i\theta}$ et $\arg(z) = \theta$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, montrer que Ln est holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$. Calculer la dérivée de Ln et retrouver dans ce cas particulier le résultat du point a).

2 Quelques intégrales sur $\mathbb{C}$

1. En notant γ l'arc de cercle joignant 3 à $\mathrm{i}\sqrt{3}$ et d'équation $(x-1)^2+y^2=4$, en tournant dans le sens trigonométrique, calculer
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2}.$$
On cherchera une primitive de $\frac{1}{z^2}$.
2. Considérons, dans $\mathbb{C}$, les segments $\gamma_1=[-\mathrm{i},5\mathrm{i}]$ $\gamma_2=[-\mathrm{i},2+5\mathrm{i}]$, $\gamma_3=[2+5\mathrm{i},5\mathrm{i}]$ (où le sens de parcours va du premier point du segment vers le second). Définissons maintenant la fonction $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ par $f(x+\mathrm{i}y)=x^2-2\mathrm{i}y$. Calculer explicitement
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \text{ et } \int_{\gamma_2\cup\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
Conclure.
3. Calculer les intégrales suivantes :
a) $I_a=\int_\gamma (z+1)^2 dz$; γ est le triangle de sommets $[-1,1,\mathrm{i}]$ orienté dans le sens anti-horaire (trigonométrique).
b) $I_b=\int_\gamma z\overline{z}\ dz$; γ est le cercle de centre $z=0$ et rayon $R=5$, orienté dans le sens horaire.
c) $I_c=\int_\gamma e^{\overline{z}}\ dz$; γ est le carré de sommets $[0,1,1+\mathrm{i},\mathrm{i}]$ orienté dans le sens anti-horaire.
d) $I_d=\int_\gamma dz(1+2\overline{z})^2$; γ est le cercle de centre $z=0$ et rayon $R=1$, orienté dans le sens anti-horaire.

3 Exercices maison

1. Calculer les intégrales suivantes (les courbes sont orientées dans le sens anti-horaire sauf pour (a)) :
a) $\int_\gamma \frac{1}{|z|^2}\ dz$; γ est defini par $z(t)=\cosh t+i\sinh t$, $t\in(-\infty,\infty)$. Dessiner γ.
b) $\int_\gamma dz\ z\overline{z}$; γ est le triangle de sommets $[0,1,i]$.
c) $\int_\gamma d\overline{z}\ (z-1)^2$; γ est l'union du demi-cercle $|z-1|=1/2$, $\mathrm{Im}z>0$ et du segment d'axe réel qui joint ses extrémités.
d) $\int_\gamma dz\ (z+\overline{z})$; γ est le carré de sommets $[0,1,i+1,i]$.
2. Determiner les solutions de l'équation
$$e^{z^{-2}}=\alpha$$
pour $\alpha\in\mathbb{C}$. Montrer que si $|\alpha|\neq 0$ le nombre de solutions qui appartiennent au disque $|z|\leq\varepsilon$ est infini pour tout ε. Ceci est un exemple du fait que autour d'une singularité essentielle une fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs possibles en $\mathbb{C}$.
3. Déterminer les singularités en $z=0$ et $z=\infty$ (s'il y en a) des fonctions suivantes :
$$(a)\ \ (z-2)^{-1} \qquad (b)\ \ (1+z^3)/z^2 \qquad (c)\ \ \sinh(1/z) \qquad (d)\ \ e^z/z^3 \qquad (e)\ \ z^{1/2}/(1+z^2)^{1/2}\ .$$