Mécanique quantique – L3

Emmanuel Baudin – Tom Bienaimé – Sylvain Nascimbène

TD 2 : Évolution du paquet d'onde

---

1 Fonctions d'opérateurs

Soit $\widehat{A}$ une observable, dont on note λ_α les valeurs propres et $|\psi_{\alpha,i}\rangle$ les vecteurs propres.
Soit f une fonction du plan complexe dans lui-même. On définit l'opérateur $f(\widehat{A})$ par :

$$f(\widehat{A})|\psi_{\alpha,i}\rangle = f(\lambda_\alpha)|\psi_{\alpha,i}\rangle \tag{1}$$

1. Montrer que
$$f(\widehat{A}) = \sum_\alpha f(\lambda_\alpha)\widehat{P}_\alpha, \tag{2}$$
où $\widehat{P}_\alpha$ est le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ_α.
2. À quelle condition $f(\widehat{A})$ est-elle une observable ?
3. Montrer que :
$$\widehat{P}_\alpha = \prod_{\beta\neq\alpha} \frac{\widehat{A}-\lambda_\beta}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}. \tag{3}$$
4. Soit $\widehat{R}$ un opérateur représenté dans une certaine base par la matrice :
$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Trouver les valeurs propres de $\widehat{R}$. En déduire la matrice de $f(\widehat{R}) = \exp(i\theta\widehat{R})$ dans la base de départ. Cet opérateur est-il une observable ?

À partir de maintenant, on suppose que f est développable en série entière : $f(z) = \sum_n a_n z^n$.
On a alors naturellement :
$$f(\widehat{A}) = \sum_n a_n \widehat{A}^n. \tag{4}$$

5. *Changement de base*
Soit $\widehat{U}$ un opérateur (unitaire) de changement de base.
Montrer que $\widehat{U}^\dagger f(\widehat{A})\widehat{U} = f(\widehat{U}^\dagger\widehat{A}\widehat{U})$
6. Montrer que $[\widehat{A},\widehat{B}\widehat{C}] = [\widehat{A},\widehat{B}]\widehat{C} + \widehat{B}[\widehat{A},\widehat{C}]$.

7. Soient $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ deux observables qui commutent avec $[\widehat{A}, \widehat{B}]$.
   Montrer que $[\widehat{A}, f(\widehat{B})] = [\widehat{A}, \widehat{B}]f'(\widehat{B})$.
8. À la lumière des deux dernières formules, à quelle opération linéaire usuelle ressemble l'application $[\widehat{A}, \cdot]$?

2 Opérateur d'évolution

On considère un système physique décrit par un hamiltonien $\widehat{H}$ dont on note $|\psi(t)\rangle$ l'état à l'instant t.

1. Exprimer l'état quantique du système à l'instant t en fonction de celui à l'instant t_0 et de l'opérateur d'évolution $\widehat{U}(t, t_0)$.
2. Donner le lien entre l'opérateur d'évolution et le hamiltonien. En déduire que l'opérateur d'évolution est solution de l'équation différentielle

$$i\hbar\partial_t\widehat{U}(t, t_0) = \widehat{H}(t)\widehat{U}(t, t_0),$$

   avec la condition initiale $\widehat{U}(t_0, t_0) = \widehat{\mathrm{Id}}$.
3. En considérant l'opérateur $\widehat{T}(t, t_0) = \widehat{U}^\dagger(t, t_0)\widehat{U}(t, t_0)$, montrer à partir de l'équation différentielle ci-dessus que $\widehat{U}(t, t_0)$ est un opérateur unitaire. Quelle propriété physique ceci traduit-il ?
4. On considère un hamiltonien indépendant du temps, montrer que l'opérateur d'évolution est donné par

$$\widehat{U}(t, t_0) = \exp(-i\widehat{H}(t - t_0)/\hbar).$$

3 Expansion libre d'un paquet d'ondes

On cherche à établir l'évolution temporelle de la fonction d'onde d'une particule libre.

1. Soit $|\psi_0\rangle$ l'état de la particule à $t = 0$. Si l'on note $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ et $\widehat{\psi}_0(p) = \langle p|\psi_0\rangle$, quelle relation existe il entre $\psi_0(x)$ et $\widehat{\psi}_0(p)$?
2. Donner ensuite l'expression du vecteur d'état à l'instant t en représentation impulsion.
3. En déduire que l'on a :

$$\psi(x, t) = \int dx' \; \mathcal{G}(x, x', t)\psi_0(x'),$$

   avec

$$\mathcal{G}(x, x', t) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar t}}e^{im(x-x')^2/2\hbar t}.$$

   Quel est l'analogue optique de cette relation ?

   N.B. : on rappelle que pour α complexe (de partie réelle négative), on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

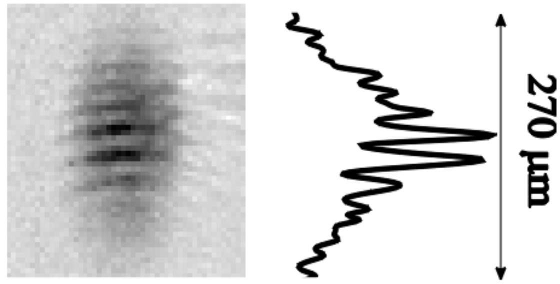

FIGURE 1 – Figure d'interférence d'atomes de Rubidium.

4. On suppose que la taille initiale du paquet d'ondes est petite devant la taille à l'instant t. Donner dans ce cas l'expression de $\psi(x, t)$.
5. Refaire le calcul avec un état de départ gaussien :

$$\psi_0(x') = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x'^2}{4\sigma^2}}.$$

   Commenter.

4 Expérience d'interférences

On prépare à $t = 0$ le système de la première partie dans une superposition de deux paquets d'ondes centrés respectivement en 0 et a.

1. En utilisant les résultats de la partie précédente, donner l'expression de la fonction d'onde du système à un instant $t > 0$ (on supposera toujours la taille initiale des paquets d'ondes petite devant la taille à l'instant t).
2. Montrer que la distribution de probabilité présente des franges d'interférences dont on donnera le pas. Quel est l'analogue optique de cette expérience ?
3. La figure suivante est tirée d'une expérience réalisée sur des atomes de ^{87}Rb de masse $m = 1,45.10^{-25}$kg. Le temps d'expansion est de 28 ms. Donner la séparation initiale des deux paquets d'ondes.