Hydrodynamique — TD 1

Cinématique des fluides - Analyse dimensionnelle

Cinématiques eulérienne et lagrangienne

On considère tout d'abord le champ de vitesse $\boldsymbol{v} = (\alpha x, -\alpha y, 0)$, avec $\alpha > 0$.

1. L'écoulement est-il compressible ? Irrotationnel ?
2. Tracer les lignes de courant associées à cet écoulement.
3. Calculer à l'instant t la position d'une particule située en $(x_0, y_0, 0)$ à $t = 0$. Tracer la trajectoire des particules.
4. Calculer la vitesse en représentation lagrangienne. Calculer l'accélération en représentation lagrangienne et comparer à l'accélération en représentation eulérienne.

Ondes de gravité - Dérive de Stokes

5. On considère l'écoulement donné par l'expression :

$$\boldsymbol{v} = (v_0 e^{kz} \sin(\omega t - kx), 0, v_0 e^{kz} \cos(\omega t - kx)) \ .$$

Ce champ de vitesse, défini pour $z \leq 0$ uniquement, est associé à une onde de gravité (vague de grande longueur d'onde) se déplaçant selon l'axe Ox dans un bassin de grande profondeur. L'interface se trouve au voisinage de $z = 0$, et on s'intéresse aux mouvements des particules de fluide induits par l'écoulement $\boldsymbol{v}$ sous la vague.

   (a) L'écoulement est-il incompressible ? irrotationnel ? Déterminer les lignes de courant.

   (b) On considère que l'amplitude A des mouvements est très petite devant la longueur d'onde. Par rapport à quelle quantité v_0 est-elle petite ?

6. Calculer les trajectoires des particules à l'ordre le plus bas.
7. En fait, il existe un mouvement de transport de matière associé à la propagation de l'onde, appelé dérive de Stokes. Ce phénomène joue un rôle important dans les océans, notamment dans le transport de matière à leur surface (voir par exemple *Stokes drift for inertial particles transported by water waves*, F. Santamaria et al., EPL, 102 (2013)).

   Déterminer l'expression de la vitesse moyenne horizontale, au premier ordre non-nul, d'une particule de fluide.

Conclusions

8. Finalement, dans un écoulement stationnaire, quel est le lien entre les lignes de courant et les trajectoires des particules ? Qu'en est-il pour un écoulement non-stationnaire ?

Analyse dimensionnelle

1. **Ondes de surface.** Les ondes à la surface entre l'eau et air sont caractérisées par une relation de dispersion reliant la pulsation ω de l'onde à son nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde. Dans le cas général les forces de rappel sont la gravité g et la tension superficielle γ (unité : $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$). On appelle h la profondeur de la cuve.
   On considère tout d'abord le cas où la seule force de rappel est la gravité.
   (a) Quels sont les paramètres pertinents du problème ?
   (b) Proposer une relation de dispersion $\omega(k)$.
   (c) Sous quelles hypothèses peut-on déterminer la relation de dispersion à un seul coefficient adimensionné près ?

   Mêmes questions pour le cas où la seule force de rappel est la tension superficielle.
   On admet qu'en présence des deux forces de rappel ω^2 est la somme des valeurs que ω^2 prend dans le cas où une seule force de rappel existe. On se place dans le cas où les relations de dispersion en présence d'une seule force de rappel sont déterminées à un seul coefficient près. Estimer le vecteur d'onde k_c qui sépare les régimes dominé par la gravité et par la tension de surface. Quel régime correspond à $k > k_c$?

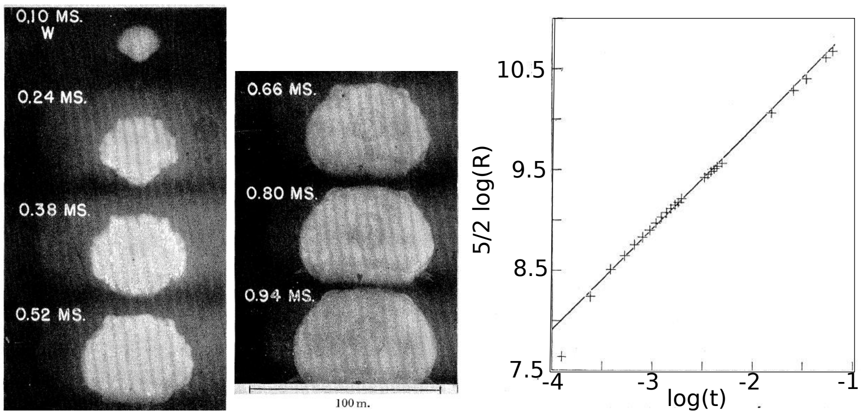

FIGURE 1 – Gauche : film d'une explosion atomique. La barre horizontale du bas indique 100 m, le temps est en ms. Droite : évolution du rayon R (en cm) de la boule de feu en fonction du temps t (en s) en échelle logarithmique. Source : *The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. II. The Atomic Explosion of 1945*, G. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 201, No. 1065. (Mar. 22, 1950), pp. 175-186.

2. **Explosion nucléaire.** On cherche à reproduire de manière simplifiée le raisonnement effectué par G. Taylor en 1950 pour déterminer l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe atomique (confidentielle à l'époque) à partir d'un film rendu public (voir figure 1). Ce film nous apprends que le rayon R de l'onde de choc suit au cours du temps une loi d'échelle. Au minimum, de quels paramètres doit dépendre le processus d'expansion de la sphère de gaz ? Relier l'évolution du rayon de l'onde de choc à l'énergie de la bombe. Calculer numériquement l'énergie de la bombe.

Analyse vectorielle, notations d'Einstein

1. Écrire div $(\overrightarrow{v})$ et la composante i de $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$ et de $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{v})$ en notations d'Einstein.
2. Montrer que div $(f\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f).\overrightarrow{v} + f\text{div}\,(\overrightarrow{v})$ en utilisant les notations d'Einstein.
3. Montrer que

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\,(v^2) - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,)\overrightarrow{v}$$