
NOTES DU COURS D'ANALYSE COMPLEXE (2020)

Références :

- L. Bonavero et J-P Demailly, *Fonctions holomorphes et surfaces de Riemann*.⁽¹⁾
- Greene—Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*.
- Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*.

De nombreux passages de ces notes sont directement empruntés aux notes précédemment rédigées par Olivier Biquard, au livre d'Henri Paul de Saint-Gervais *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire*⁽²⁾ ou aux livres cités ci-dessus.

1. accessible en ligne : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/variable_complexe.pdf

2. accessible en ligne : <http://www.lcdpu.fr/livre/?GCOI=27000100107890&fa=complements>

Fonctions holomorphes et analytiques

I.1. Définition des fonctions holomorphes

Applications linéaires complexes

Les applications $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ linéaires sur \mathbb{C} sont de la forme $z \mapsto az$ pour un certain nombre complexe $a = u + iv$. Via l'identification usuelle de \mathbb{C} avec \mathbb{R}^2 , l'application $z \mapsto az$ induit une application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. Les matrices ainsi obtenues sont exactement les *similitudes directes* : en écrivant $a = re^{i\theta}$ on a

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^* \cdot \text{SO}(2).$$

Dérivabilité au sens complexe

Définition I.1.1. — Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est

— *dérivable au sens complexe* en $z \in U$ si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe; on note alors $f'(z)$ sa valeur;

— *holomorphe sur U* si f est dérivable en tout point de U et si la fonction $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ est continue.

La fonction f est donc \mathbb{C} -dérivable en z si et seulement si

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h) \quad \text{quand } h \rightarrow 0, \quad (1)$$

autrement dit si

- f est différentiable au sens réelle en $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, et
 - $d_z f$ est \mathbb{C} -linéaire.
- (2)

Remarque. Dans de nombreux livres, on ne demande pas que f' soit continue. On verra que cette condition est effectivement superflue. Elle est toutefois bien pratique pour aller directement à l'essentiel.

Premières propriétés des fonctions holomorphes

On déduit de (2) les propriétés suivantes :

- Si f est holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ de dérivée f' constante égale à 0, alors f est constante sur chaque composante connexe de U .
- Les règles de calculs pour les fonctions réelles sur \mathbb{R} s'appliquent et donnent les dérivées complexes de

$$f + g, \lambda f, fg, f^n, f \circ g, f^{-1}, \dots$$

I.2. Équations de Cauchy–Riemann

Dans ce paragraphe on identifie librement \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 (et vice versa) *via* les coordonnées usuelles $z = x + iy$.

On rappelle que si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction définie sur un ouvert du plan et différentiable en z (au sens réel), alors sa différentielle $d_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application \mathbb{R} -linéaire de matrice

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array} \right) \quad \text{où } f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

La proposition suivante découle alors de la caractérisation des applications \mathbb{C} -linéaires parmi les applications \mathbb{R} -linéaires.

Proposition I.2.1. — *Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ différentiable (au sens réel) est \mathbb{C} -dérivable en $z = x + iy$ si et seulement si, posant $f = P + iQ$, on a :*

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Les équations aux dérivées partielles (3) sont appelées *équations de Cauchy–Riemann*.

On peut revisiter cela de manière plus algébrique : la différentielle de f est un élément de l'espace vectoriel *réel* $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de dimension 4. Cet espace s'identifie à la complexification de l'espace des différentielles réelles :

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$$

et devient ainsi un espace vectoriel complexe de dimension 2 ; la base réelle (dx, dy) de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ demeure une base de l'espace complexifié.

L'espace $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est somme directe des deux sous-espaces complexes de dimension 1,

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}),$$

respectivement constitués des applications \mathbb{C} -linéaires et anti- \mathbb{C} -linéaires (c'est-à-dire satisfaisant $A(\lambda z) = \bar{\lambda}A(z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$). Ces sous-espaces sont respectivement engendrés par

$$dz = dx + i dy \quad \text{et} \quad d\bar{z} = dx - i dy.$$

Revenons maintenant à la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Il est d'usage de noter $\partial f / \partial z$ et $\partial f / \partial \bar{z}$ les coefficients de df dans la base $(dz, d\bar{z})$, de sorte que

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Le calcul explicite du changement de base de (dx, dy) vers $(dz, d\bar{z})$ donne :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

La fonction f est \mathbb{C} -dérivable si et seulement si sa différentielle est \mathbb{C} -linéaire, c'est-à-dire un multiple de dz . On retrouve ainsi les équations de Cauchy–Riemann qui se réécrivent de manière plus compacte sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Notations. On pose

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Formellement tout se passe comme si ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ étaient les deux dérivées partielles par rapport à deux variables indépendantes z et \bar{z} , et on peut

ainsi facilement les calculer sur toute fonction exprimée en termes de z et \bar{z} ; ils satisfont ainsi à toutes les identités qui en découlent :

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \partial_z = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

etc...

I.3. Formulation géométrique

Étant donnée une application linéaire L d'un espace vectoriel euclidien $(E, \|\cdot\|)$ dans lui-même, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L préserve les angles,
- L est une similitude : il existe une constante $c \neq 0$ telle que $\|L(v)\| = c\|v\|$ pour tout vecteur v de E .

Le mot français similitude insiste sur la préservation de la forme; en allemand, on trouve l'adjectif *winkeltreu*, qui insiste lui sur la préservation des angles.

Un difféomorphisme entre deux ouverts du plan euclidien est dit *conforme* si sa différentielle vérifie ces propriétés en chaque point. L'expression « *semblable en ses parties infiniment petites* » était aussi couramment employée, en français comme en allemand. Une fois qu'on identifie le plan au plan complexe \mathbb{C} , on a vu que le difféomorphisme était holomorphe ou anti-holomorphe. On notera les analogies entre les racines grecques et latines : *morphe* et *forme*, de même que l'idée de préservation véhiculée par les préfixes *holo-* et *con-*.

Le fait qu'une application \mathbb{C} -linéaire non-nulle de \mathbb{C} dans lui-même soit une similitude se traduit donc dans notre contexte par :

Les fonctions holomorphes conservent les angles.

On parle d'application *conforme*. Précisons un peu plus le sens de cette phrase : soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$ deux courbes de classe C^1 dans un ouvert U de \mathbb{C} qui se coupent en un point z_0 de U .

Quitte à reparamétriser les courbes, on peut supposer qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$. On suppose de plus qu'elles ont un vecteur tangent en z_0 , c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(t_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma_2}{dt}(t_0) \neq 0.$$

On regarde maintenant leurs images par une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Les deux courbes $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ contenues dans $f(U)$ se

coupent en $f(z_0)$. Leurs vecteurs tangents en ce point vérifient les égalités

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t_0) = f'(z_0) \cdot \left(\frac{d\gamma_1}{dt} \right)(t_0) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2)(t_0) = f'(z_0) \cdot \left(\frac{d\gamma_2}{dt} \right)(t_0).$$

Les vecteurs tangents aux courbes $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ en $f(z_0)$ sont donc les images par l'application linéaire « multiplication par $f'(z_0)$ » des vecteurs tangents à γ_1 et γ_2 en z_0 . Si on suppose que $f'(z_0)$ n'est pas nul, l'angle des courbes images $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ en $f(z_0)$ est le même que celui des courbes γ_1 et γ_2 en z_0 .

A parte historique : de la cartographie aux fonctions holomorphes

La science de la cartographie, aussi bien terrestre que céleste, a amené les savants de l'Antiquité à se poser la question de la représentation d'une portion de sphère sur une carte plane. *La Géographie* de Ptolémée présente déjà plusieurs solutions. Il devient vite apparent que les distorsions sont inévitables et se manifestent sous différents aspects en altérant les formes, les distances, les aires, etc.

En 1569, Mercator propose une projection qu'il réalise dans une carte du monde, dont les propriétés sont particulièrement adaptées à la navigation. Sa méthode de construction est empirique mais ouvre la voie au rapprochement de l'analyse mathématique et de la cartographie. C'est au dix-huitième siècle qu'elles se rejoignent définitivement à la suite d'une série de travaux de Johann Heinrich Lambert, Leonhard Euler et Joseph Louis Lagrange. Lambert publia ses travaux en 1772; ils donnent naissance à la cartographie mathématique moderne. Selon Lagrange, Lambert est le premier à avoir formulé certains des problèmes issus de la représentation d'un morceau de sphère sur un plan en termes d'équations aux dérivées partielles.

En 1822, inspirée par des méthodes et des problèmes cartographiques, la Société royale de Copenhague propose comme sujet pour l'attribution de son prix la question de « représenter les parties d'une surface donnée sur une autre surface de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original dans les parties infiniment petites ». C'est l'occasion pour Gauss, passionné de cartographie, tant théoriquement que sur le terrain, de prouver l'existence d'une représentation conforme locale des surfaces analytiques réelles, premier pas vers les questions d'uniformisation. L'explication de ce théorème est le but principal de cet *a parte*.

De la pratique à la théorie

Premières constructions. — Écrit par Ptolémée au deuxième siècle de notre ère, le traité de cartographie *La Géographie* fera autorité jusqu'à la Renaissance. Il décrit (et applique) plusieurs méthodes pour représenter aussi précisément que possible le monde connu sur une carte plane. Les géomètres et astronomes de l'Antiquité étaient néanmoins conscients de l'impossibilité de représenter une portion de la sphère par une carte plane en préservant toutes les informations pertinentes (distances, angles, aires, etc.), c'est-à-dire isométriquement.

En termes modernes, cette impossibilité est une des conséquences de la courbure de la sphère, courbure définie par Gauss pour les surfaces (voir le cours de Géométrie Différentielle). Évidemment les astronomes ne disposaient pas d'une artillerie mathématique aussi sophistiquée, mais il est certain qu'une des manifestations de cette courbure s'était déjà présentée à eux. On peut par exemple penser à un triangle géodésique obtenu en coupant la sphère en huit, dont tous les angles sont droits et qui de ce fait n'est pas représentable dans le plan, voir la figure 1.

Ajoutons aussi que, même si Ptolémée et ses inspireurs (Ératosthène au troisième siècle avant notre ère, Hipparque le siècle suivant) considéraient déjà un modèle avec une planète ronde, les questions posées par la représentation de la voûte céleste posent le

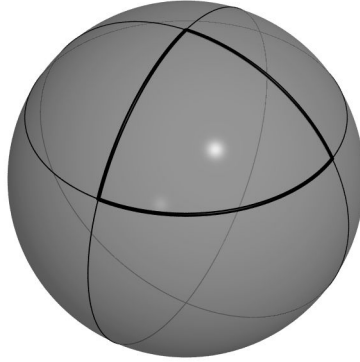


FIGURE 1. Un triangle sphérique

problème d'une représentation plane intelligente de la sphère indépendamment de la question de la forme de la Terre.

Les contraintes de représentation de grandes portions d'une sphère dépendent de l'usage à laquelle la carte est destinée. Un gouverneur collectant des impôts proportionnels à l'aire cultivée, un marin naviguant avec sa boussole et son astrolabe ou un astronome observant la voûte céleste n'ont pas les mêmes besoins. Sans prendre en compte (d'importantes) questions esthétiques, il peut paraître pertinent de demander, par exemple :

- que les aires soient préservées (ou, évidemment, multipliées par une même constante) : on parle alors de carte *équivalente*;
- que les angles soient préservés (carte *conforme*) ;
- que les distances par rapport à un point de référence soient préservées (carte *équidistante*) ;
- que certaines courbes privilégiées soient envoyées sur des segments de droite. On pense naturellement aux géodésiques (carte *orthodromique*), mais un marin privilégiera volontiers les routes à cap constant (carte *loxodromique*)...

On peut évidemment multiplier les contraintes qu'on veut imposer à notre carte, ce qui donne autant de problèmes différents à résoudre ou pour lesquels on prouve qu'il n'y a pas de solutions. Le livre [Sny1993] constitue une bonne introduction à cette histoire de la cartographie.

Les savants de l'Antiquité disposaient, avant même la contribution de Ptolémée, de plusieurs projections. Une étape intermédiaire cruciale, tant théoriquement que pratiquement, est l'introduction des concepts de latitude et de longitude, déjà connus d'Hipparque. Le but est de donner un moyen de représenter deux villes distantes dans un même système de coordonnées. Pour cela, des critères astronomiques, notamment d'observation des étoiles, peuvent être utilisés. Typiquement, étant données deux villes

A et B dans l'hémisphère Nord, si une étoile donnée est toujours visible par un observateur en A mais qu'un observateur en B voit au cours de la nuit cette étoile se lever et se coucher, on peut en déduire que A est plus au nord que B.

Une façon de construire une carte est donc d'imposer des contraintes sur les images du réseau des cercles à latitude constante – appelés *parallèles* – et des grands cercles à longitude constante – appelés *méridiens* – dans la carte. Les cartographes appellent cette image le *graticule*. Ainsi, les cartes *rectangulaires* sont celles où les parallèles et les méridiens sont envoyés sur des droites, respectivement horizontales et verticales : le graticule est composé de rectangles. Et parmi celles-ci la carte *équirectangulaire* (aussi appelée *plate carrée*), antérieure à *La Géographie* de Ptolémée, traduit de plus par un espacement constant des écarts égaux de latitude et de longitude. Le graticule est donc un réseau carré (figure 2).

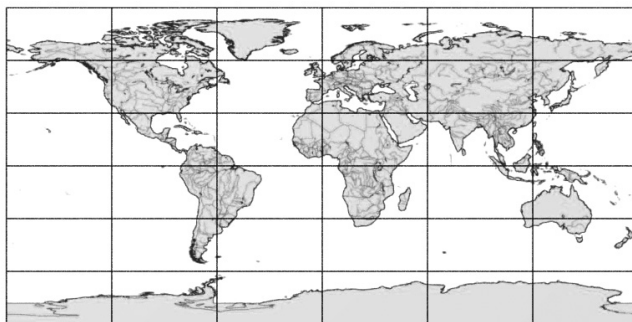


FIGURE 2. La plate carrée

Une autre méthode naturelle de construction de cartes est de faire de simples opérations géométriques dans l'espace contenant la sphère afin d'en obtenir une image plane : on peut projeter sur un plan orthogonalement ou par rapport à un point, voire sur un cône ou un cylindre fictif avant de le déplier. Une très ancienne mise en application de cette pratique est la projection stéréographique. Connue d'Hipparque et probablement antérieure, elle est obtenue en projetant la surface de la Terre sur un plan tangent en un point (par exemple le pôle Sud) par rapport au point diamétralement opposé (figure 3). On obtient ainsi une carte plane représentant toute la surface terrestre, sauf le point de projection. Évidemment, la distorsion introduite par cette méthode augmente quand on s'éloigne du point de tangence.

La propriété essentielle de cette carte est sa conformité : les angles dessinés sur la sphère sont égaux à ceux sur la carte. Cette propriété, précieuse pour les cartes du ciel comme pour les cartes terrestres ou maritimes, semble avoir été remarquée et démontrée pour la première fois par le célèbre astronome anglais Edmond Halley à la fin du dix-septième siècle. Le livre [HiCo1932] contient une preuve élégante de ce fait, elle est

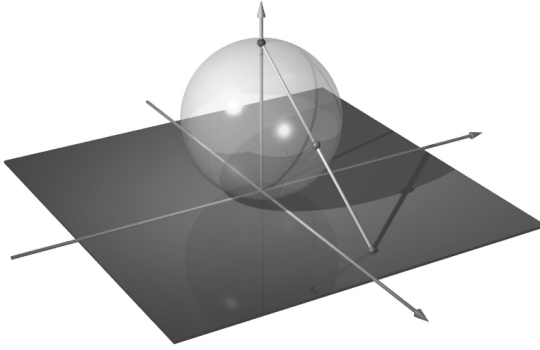


FIGURE 3. Projection stéréographique

en partie exposé au Chapitre 9 du film « Dimensions » d'Aurélien Alvarez, Étienne Ghys et Jos Leys.

Même si on peut encore leur trouver des applications (la projection stéréographique sert encore à tracer des cartes du ciel et la carte équirectangulaire reste le moyen le plus simple de tracer sur ordinateur une carte représentant des villes dont on connaît les latitudes et longitudes), ces deux cartes ne sont plus guère utilisées. Le planisphère qui nous est le plus familier est celui dû à Mercator en 1569.

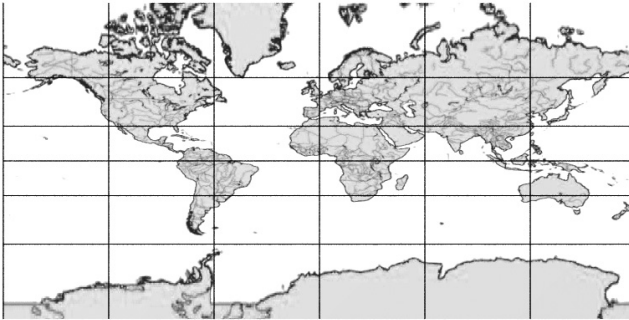


FIGURE 4. La projection de Mercator

Le but de Mercator était de construire une carte rectangulaire, dans le même esprit que la plate carrée. La contrainte supplémentaire que Mercator se fixe est d'imposer aux routes à cap constant d'être envoyées sur des droites, ce qui rend l'utilisation pour la navigation plus aisée. Cela impose d'espacer de plus en plus les images des parallèles

au voisinage des pôles, ce qui est la cause des distorsions des aires auxquelles nous sommes habitués. Mercator a effectivement construit un modèle de sa carte, probablement en calculant par une méthode graphique l'écartement nécessaire entre deux parallèles dont la latitude diffère de dix degrés. Après la projection stéréographique, celle de Mercator est la deuxième construction d'une projection conforme.

Introduction du calcul différentiel. — D'un point de vue mathématique, le dix-huitième siècle marque le renouveau de la conception et de l'étude de cartes géographiques, grâce à l'application du calcul différentiel. Le pionnier dans ce domaine est Johann Heinrich Lambert.

Également connu pour ses travaux en sciences physiques (*loi de Beer-Lambert* décrivant l'absorption de lumière par une solution chimique en fonction de sa concentration) et surtout pour la première preuve de l'irrationalité de π , Lambert a défini dans son ouvrage *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*⁽¹⁾ et en particulier dans *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land und Himmelscharten*⁽²⁾ [Lam1772], écrit entre 1765 et 1772, de nombreuses méthodes de représentations cartographiques, et a ouvert la voie à l'étude analytique systématique des différentes contraintes, notamment l'équivalence et la conformité. Pratiquement, on lui doit par exemple la *projection conique conforme de Lambert*, projection officielle pour les cartes de France métropolitaine, mais il est aussi l'auteur des premières preuves analytiques de la conformité des cartes stéréographiques et de Mercator, qu'Euler redémontrera en 1777 dans [Eul1777].

Remarquant la traduction effectuée par Lambert des questions cartographiques dans un langage mathématique, Lagrange [Lag1779] entrevoit que le sujet permet de poser des questions plus générales que la réalisation de cartes conformes et la démonstration de leurs propriétés. Pour lui se pose la question de déterminer toutes les cartes conformes que l'on peut faire de la surface de la Terre, en affinant même le modèle communément utilisé : il postule que la forme de la Terre est plutôt « sphéroïdique », c'est-à-dire une surface « engendré[e] par la révolution d'une courbe quelconque autour d'un axe fixe ».

En résumant l'histoire de la conception de cartes, Lagrange note, sans explicitement citer Mercator, que la conception de cartes conformes qui ne soient pas directement obtenues par projection de la surface terrestre sur un cône ou un cylindre tangent a permis d'aborder le problème sous un angle plus général et plus fécond, et a transformé le problème pratique en question mathématique :

Cette recherche [de cartes conformes], également intéressante par les artifices analytiques qu'elle demande et par l'utilité dont elle peut être pour la perfection des Cartes géographiques, me paraît digne de l'attention des Géomètres et propre à fournir la matière d'un Mémoire.

1. *Contribution à l'utilisation des mathématiques et à leur application.*

2. *Notes et commentaires sur la construction des cartes terrestres et célestes.*

Il propose donc de déterminer toutes les représentations conformes d'un solide de révolution. L'idée est ici d'imiter la projection de Mercator, c'est-à-dire d'expliciter les contraintes sur l'espacement des parallèles qu'impose la condition de conformité.

Introduisons les notations : la surface considérée est obtenue en faisant tourner un arc plan autour de l'axe joignant ses extrémités : les *pôles*. Une des coordonnées sur la surface sera donc la longitude φ , l'autre étant la longueur s de l'arc joignant le point de la courbe à l'un des pôles (dans le cas de la sphère de rayon égal à un, c'est le complément à $\pi/2$ de la latitude). Chaque point (φ, s) de la surface appartient donc à un cercle (le parallèle) de rayon noté $q(s)$. Dans le cas de la sphère, ce rayon est le sinus de s , autrement dit le cosinus de la latitude.

Avec ces notations, la métrique riemannienne⁽³⁾ (appelée aussi première forme fondamentale) de la surface s'écrit $ds^2 + q(s)^2 d\varphi^2$. Représenter conformément la surface revient donc à exprimer x et y , les coordonnées d'un point du plan, en fonction de s et φ , afin de satisfaire la relation de proportionnalité entre formes quadratiques suivante :

$$dx^2 + dy^2 = n(s, \varphi)^2 (ds^2 + q(s)^2 d\varphi^2).$$

Ici n est une fonction qui ne s'annule pas et qui représente le facteur de dilatation des distances au point considéré.

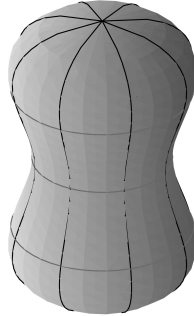


FIGURE 5. Une surface de révolution

Lagrange introduit alors un système de coordonnées solution de cette équation, généralisation au cadre de son étude de la projection de Mercator. Soit en effet les coordonnées

$$\begin{aligned} u(s) &= \int_0^s \frac{d\sigma}{q(\sigma)} \\ v &= \varphi. \end{aligned}$$

3. N'hésitons pas à employer la terminologie métrique « riemannienne » en parlant d'un théorème bien antérieur à Riemann.

Ce changement de variables vérifie

$$du^2 + dv^2 = \frac{ds^2}{q(s)^2} + d\varphi^2 = \frac{1}{q(s)^2} (ds^2 + q(s)^2 d\varphi^2)$$

et définit donc (localement, hors des pôles) un système de coordonnées conformes pour la surface de révolution.

Le mémoire se poursuit sur la question de déterminer les autres systèmes de coordonnées conformes, maintenant que l'un d'eux est connu, et sur le cas particulier des cartes dont le graticule (c'est-à-dire les réseaux des images des méridiens et des parallèles) est formé de cercles, pour des raisons pratiques de conception. L'aboutissement théorique de l'évolution de la cartographie fournit en tout cas ici le premier exemple de coordonnées conformes sur une famille relativement générale de surfaces.

Le problème de la représentation conforme vu par Gauss

En 1822, la Société royale des sciences de Copenhague propose pour son prix le problème de la représentation des parties d'une surface donnée sur une autre surface donnée de telle sorte que la représentation soit « semblable à l'original dans les parties infiniment petites ». C'est en 1825 que Gauss publie dans les *Astronomische Abhandlungen* de Schumacher son mémoire célèbre sur le sujet, que l'on retrouve dans ses *Œuvres* [Gau1825].

Le terme de *représentation conforme* n'est introduit par Gauss qu'en 1844 dans l'article I de la première partie de son mémoire sur la géodésie supérieure. Ce mémoire dépasse largement le problème tout particulier des cartes géographiques et joue dans la théorie des fonctions un rôle analogue à son travail *Disquisitiones generales circa superficies curvas* dans la théorie des surfaces.

Gauss démontre que *toute surface (analytique) est localement conformément équivalente au plan euclidien* (et donc que deux surfaces analytiques quelconques sont toujours localement conformément équivalentes)⁽⁴⁾. On appelle *carte conforme* un système de coordonnées locales $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans lequel la métrique prend la forme $m(x, y)(dx^2 + dy^2)$. Le théorème de Gauss s'énonce alors :

Théorème I.3.1 (Gauss). — *Soit g une métrique riemannienne analytique réelle, définie au voisinage d'un point p sur une surface analytique. Alors il existe une carte conforme $V \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie sur un voisinage ouvert de p et à valeurs dans le plan euclidien.*

On explique maintenant les grandes lignes de la magnifique démonstration de Gauss.

Après avoir pris des coordonnées au voisinage de p , on dispose donc d'une métrique analytique g dans un voisinage U de l'origine dans \mathbb{R}^2 .

Commençons par démontrer un théorème exactement analogue mais dans le cas où l'ouvert U est muni d'une métrique *lorentzienne* g . On se donne donc en chaque point de U une forme quadratique de signature $(+, -)$ et il s'agit de montrer que cette métrique lorentzienne est conforme à la métrique lorentzienne standard $dx^2 - dy^2$ de \mathbb{R}^2

4. Mentionnons que, pour Gauss, les surfaces sont plongées dans l'espace et munies de la métrique induite.

(pour une généralisation évidente du concept de conformité dans le cadre lorentzien). Voici comment on procède.

En chaque point de U , la métrique g définit deux droites sur lesquelles elle s'annule : les deux directions isotropes. Localement, on peut trouver deux champs de vecteurs non singuliers qui paramètrent ces directions. Lorsqu'on les intègre, on définit ainsi deux réseaux de courbes isotropes qui s'intersectent transversalement. Pour la métrique lorentzienne standard $dx^2 - dy^2$, ces courbes ne sont bien entendu que les droites parallèles de pente ± 1 .

On fixe maintenant l'origine O comme point base dans U et on choisit arbitrairement un point P_0 de \mathbb{R}^2 . Par le point O passent deux courbes isotropes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Par P_0 passent deux droites isotropes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de la métrique lorentzienne standard de \mathbb{R}^2 . On envoie \mathcal{C}_1 sur \mathcal{D}_1 par un difféomorphisme f_1 arbitraire, et \mathcal{C}_2 sur \mathcal{D}_2 par un autre difféomorphisme f_2 . Soit maintenant un point m de U suffisamment proche de l'origine. Par m passent deux courbes isotropes $\tilde{\mathcal{C}}_1$ et $\tilde{\mathcal{C}}_2$. Quitte à restreindre l'ouvert U en un ouvert plus petit V , on peut supposer que $\tilde{\mathcal{C}}_1$ intersecte \mathcal{C}_2 en un seul point p_2 , et l'autre, $\tilde{\mathcal{C}}_2$, intersecte \mathcal{C}_1 en un seul point p_1 .

La carte ψ que l'on cherche à construire est celle qui envoie le point m de V sur le point $M = \psi(m)$ de \mathbb{R}^2 , intersection des droites isotropes de \mathbb{R}^2 passant par les points $P_1 = f_1(p_1)$ et $P_2 = f_2(p_2)$. La transformation ψ ainsi définie envoie courbes isotropes de V sur droites isotropes de \mathbb{R}^2 et donc directions isotropes de la métrique lorentzienne g sur V sur directions isotropes de la métrique lorentzienne standard de \mathbb{R}^2 .

Remarquons – c'est un point important – que deux formes quadratiques de signature $(+, -)$ sur un espace vectoriel réel de dimension 2 sont proportionnelles si et seulement si elles ont les mêmes directions isotropes.

On peut donc écrire $\psi_*g = m(x, y)(dx^2 - dy^2)$ où m est une fonction qui ne s'annule pas. Autrement dit, ψ est une carte conforme et le théorème de Gauss est établi *dans le cadre lorentzien* (sans hypothèse d'analyticité).

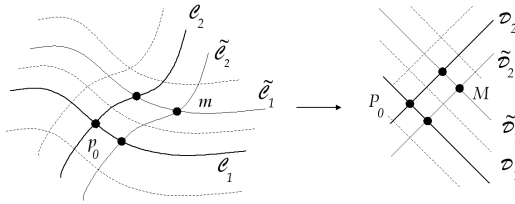


FIGURE 6. Théorème de GAUSS, version lorentzienne

Dans le cas où g est une métrique *riemannienne* analytique réelle, il n'y a bien sûr pas de direction isotrope. Mais c'est la même idée qui est mise en œuvre avec, cependant, plus d'imagination. Exprimons d'abord les idées en termes modernes. On commence par complexifier l'ouvert U en un ouvert $\hat{U} \subset \mathbb{C}^2$; c'est un voisinage ouvert de U considéré maintenant comme contenu dans \mathbb{C}^2 . On notera $\hat{g}_0 = dx^2 + dy^2$ la

métrique « riemannienne complexe » standard de \mathbb{C}^2 , où x et y sont les coordonnées (complexes!) usuelles sur \mathbb{C}^2 (à strictement parler ce n'est pas une métrique riemannienne puisque cette forme quadratique prend des valeurs complexes). Les coefficients de la métrique g étant des fonctions analytiques réelles, on peut – quitte à diminuer \hat{U} – prolonger g de manière unique en une métrique \hat{g} analytique complexe (*i.e.* holomorphe) sur l'ouvert \hat{U} . Puisque les coefficients de g sont réels, \hat{g} est invariant par la conjugaison complexe $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$. Sur \mathbb{C}^2 on dispose de deux réseaux transverses de droites complexes isotropes pour la métrique standard \hat{g}_0 , d'équations $y = \pm i x + \text{cste}$. Sur \hat{U} on dispose de deux champs de droites complexes holomorphes, isotropes pour la métrique \hat{g} . On les intègre pour obtenir deux champs de courbes holomorphes se coupant transversalement (ces courbes dans \mathbb{C}^2 correspondent à des surfaces dans \mathbb{R}^4).

On envoie alors l'origine O de U sur un point réel arbitraire P_0 de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Par O passe une courbe complexe isotrope \mathcal{C}_1 . Par O passe également la courbe complexe \mathcal{C}_2 transformée par conjugaison complexe de la courbe \mathcal{C}_1 . À l'aide de ces courbes on définit, exactement comme dans le cadre lorentzien, une transformation $\hat{\psi}$ d'un voisinage \hat{V} de O inclus dans \hat{U} , à image dans \mathbb{C}^2 . Le difféomorphisme $\hat{\psi}$ a la propriété additionnelle d'être invariant par la conjugaison complexe. Il induit donc un difféomorphisme de $V = \hat{V} \cap \mathbb{R}^2$ sur son image $\hat{\psi}(\hat{V}) \cap \mathbb{R}^2$. Le fait que la complexification d'un difféomorphisme ψ préserve les directions isotropes de la complexification d'une métrique signifie précisément que la carte est conforme. Le théorème de Gauss est établi. \square

Gauss ne s'exprime pas exactement de cette manière même si c'est la méthode qu'il emploie.

Il écrit d'abord g sous la forme

$$g = a(x, y) dx^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2, \quad ac > b^2.$$

Puis il décompose la forme quadratique en un produit de deux formes linéaires conjuguées (qui définissent les directions isotropes) :

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{a} \left(a dx + (b + i\sqrt{ac - b^2}) dy \right) \left(a dx + (b - i\sqrt{ac - b^2}) dy \right) \\ &= \frac{1}{a} \omega \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Ici ω est ce que l'on appelle aujourd'hui (et plus loin) une 1-forme holomorphe des variables complexes (x, y) . L'équation $\omega = 0$ peut être considérée comme une équation différentielle dont les solutions prennent localement la forme $f(x, y) = \text{cste}$ pour une certaine fonction f localement définie au voisinage de l'origine. Autrement dit, ω prend la forme $h df$ pour une certaine fonction h . En décomposant f en parties réelle et imaginaire $u + i v$, il vient

$$\omega = h(du + i dv) \quad (\text{et donc aussi } \bar{\omega} = \bar{h}(du - i dv))$$

d'où finalement

$$g = \frac{h\bar{h}}{a} (du^2 + dv^2).$$

Les coordonnées (u, v) obtenues sont réelles, par construction ; le coefficient de dilatation $m := \frac{df}{a}$ est visiblement une fonction analytique réelle de (x, y) . Le théorème I.3.1 est donc établi. \square

Bien entendu, les cartes conformes locales ψ ne sont pas uniques. Deux d'entre elles diffèrent par une transformation conforme du plan. Il s'agit donc de décrire la nature des transformations $(x, y) \mapsto (X, Y)$ entre ouverts de \mathbb{R}^2 préservant la structure conforme standard ce qui s'exprime par $dX^2 + dY^2 = m(x, y)(dx^2 + dy^2)$ pour une certaine fonction m .

Autrement dit, il faut et il suffit que la différentielle soit une similitude en tout point. Si l'on suppose que l'orientation est préservée (similitude directe), ceci s'écrit en formules

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

On reconnaît bien sûr les équations de « Cauchy-Riemann » qui expriment que $X + iY$ est une fonction holomorphe de $x + iy$. On trouve d'ailleurs cette manière d'exprimer le caractère conforme d'une carte en termes de $dx + i dy$ dès 1777 chez Euler!

Résumons en termes modernes ce que Gauss obtient.

Toute surface (analytique et orientée) peut être représentée par des cartes locales conformes préservant l'orientation à valeurs dans le plan euclidien, identifié au plan complexe. Deux de ces cartes diffèrent d'un « changement de cartes » holomorphe.

On dit maintenant que toute métrique riemannienne sur une surface orientée définit une *surface de Riemann*.

Le théorème de Gauss que l'on a démontré dans le cas des métriques analytiques réelles reste vrai pour des métriques C^∞ ou même mesurables, mais il est alors bien plus difficile. Il sera démontré par Korn en 1914 et Lichtenschtein en 1916 dans le cadre C^∞ , et finalement par Ahlfors et Bers en 1960 dans le cadre mesurable (voir [Ahl2006]).

Gauss ne s'en tient pas là et illustre sa méthode par de nombreux exemples : il commence par représenter la surface d'un plan, puis celle d'un cône et d'une sphère sur un plan. Mais Gauss ne perd pas de vue le problème concret qui a soulevé cette question de l'Académie et c'est pourquoi il termine son mémoire en développant le cas d'un ellipsoïde de révolution. La détermination des cartes conformes sur un ellipsoïde qui n'est pas de révolution nécessite l'utilisation des intégrales elliptiques dont on parlera plus loin.

I.4. Fonctions analytiques complexes

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

Séries entières

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe de dérivée f' holomorphe, alors on peut définir f'' , puis éventuellement $f^{(3)}, f^{(4)}, \dots$ si les dérivées successives sont holomorphes.⁽⁵⁾

Proposition I.4.1. — Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$ et ses dérivées successives sont

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}.$$

Démonstration. — On sait que $f = \sum f_n$ (où $f_n = a_n z^n$) est de classe de C^∞ sur $D(0, R)$ et que $df = \sum df_n$ avec $d_z f_n(h) = n a_n z^{n-1} h$; de sorte que

$$d_z f(h) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \right) \cdot h.$$

Donc f est holomorphe avec $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$. On conclut par récurrence sur k . \square

Réciproquement, pour tout constante $F_0 \in \mathbb{C}$, la série entière

$$F(z) = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \frac{z^n}{n}$$

est convergente sur $D(0, R)$ et y définit une *primitive* de f .⁽⁶⁾

Définition I.4.2. — Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *analytique complexe* si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de U .

Être analytique est une *propriété locale*.

Exercice. Montrer que la somme d'une série entière est analytique complexe à l'intérieur de son disque de convergence.

Comme corollaire de la proposition I.4.1 on obtient :

5. On verra que c'est toujours le cas.

6. On les obtient toutes en faisant varier F_0 .

Corollaire I.4.3. — Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique complexe, alors elle est holomorphe.

L'un des buts principaux de ce premier chapitre est de montrer la réciproque.

I.4.1. Exemples : fonctions exponentielle et logarithme

La fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est définie par la série entière de rayon de convergence infini

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad (4)$$

elle vérifie

$$\exp(z) \exp(z') = \exp(z + z').$$

Si $z = x + iy$ on a $\exp(z) = e^x e^{iy}$, donc

$$\exp(z) = w \Leftrightarrow z = \log|w| + i \arg(w)$$

où $\arg(w)$ n'est défini qu'à un multiple de 2π près.

Définition I.4.4. — Une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une *détermination du logarithme* sur U si pour tout $t \in U$, on a :

$$\exp(f(t)) = t.$$

Exercice. Montrer qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur \mathbb{C}^* .

Proposition I.4.5. — S'il existe une détermination du logarithme f sur U connexe, alors l'ensemble des déterminations du logarithme sur U est

$$\{f + 2ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. — Si g est une autre détermination, alors la fonction

$$h(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2i\pi}$$

est continue sur U . Elle ne prend que des valeurs entières et est donc nécessairement constante. \square

Sur \mathbb{C} privé d'une demi-droite, il est possible de trouver une détermination du logarithme : soit $d_\theta = \mathbb{R}_- \cdot e^{i\theta}$, on peut définir

$$\log_\theta : \mathbb{C} - d_\theta \rightarrow \mathbb{C}; \log_\theta(w) = \log|w| + i \arg_\theta(w),$$

où $\arg_\theta(w) \in]\theta - \pi, \theta + \pi[$.

Définition I.4.6. — On appelle *détermination principale du logarithme* la fonction \log_0 définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. On la note simplement \log .

Il découle de $\exp \circ \log(z) = z$ que $\log' z = 1/z$. En particulier, pour $z \in \mathbb{D} := D(0, 1)$, on a :

$$\log'(1+z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots$$

Puisque $\log 1 = 0$, on déduit de la proposition I.4.1 que, pour $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

La fonction \log est donc holomorphe sur $D(1, 1)$.

Exercice. Montrer plus généralement que \log_θ est holomorphe sur $\mathbb{C} - d_\theta$.

I.5. Intégration le long des chemins

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

Définition I.5.1. — On appelle *chemin C^1 par morceaux* une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ telle qu'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_k = b$ avec $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ de classe C^1 . Sauf précision du contraire, on oriente un tel chemin dans le sens des paramètres croissants.

Si γ est un chemin C^1 par morceaux, on définit sa *longueur* par

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue et si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est un chemin C^1 par morceaux, on peut intégrer f le long de γ . *Par définition,*

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (5)$$



On n'a pas défini une « intégrale complexe », mais simplement remarqué que la fonction $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ étant continue par morceaux sur $[a, b]$ y est intégrable *comme fonction de la variable réelle* et on a défini l'intégrale de $f(z)dz$ le long du chemin comme l'intégrale de cette fonction de variable réelle.

Le bon objet à intégrer le long d'un chemin est une 1-forme différentielle. Dans la paragraphe I.7 on introduit le strict nécessaire à savoir sur les formes différentielles pour ce cours; on renvoie aux cours de Géométrie Différentielle pour la théorie générale. On verra en particulier que l'intégrale (5) ne dépend que du chemin géométrique (orienté) et non du chemin paramétré.

Exemple. Considérons la fonction $z \mapsto 1/z$ sur l'ouvert $U = \mathbb{C}^*$. Elle est holomorphe donc continue. Intégrons-la sur le cercle unité :

$$\begin{aligned} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i dt \\ &= 2i\pi. \end{aligned}$$

I.6. Le théorème de Cauchy

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

I.6.1. Formule de Cauchy

Théorème I.6.1 (Cauchy). — Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\overline{D(z_0, R)} \subset U$. Alors, pour tout $z \in D(z_0, R)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Démonstration. — Quitte à faire une translation par $-z_0$, on peut supposer $z_0 = 0$. On commence alors par remarquer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,R)} \frac{dw}{w-z} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}}{Re^{it}-z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{Re^{it}} \right)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{R^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt \\ &= 1; \end{aligned}$$

de sorte que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Considérons donc la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f((1-\lambda)z + \lambda w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f((1-\lambda)z + \lambda Re^{it})}{Re^{it}-z} Re^{it} dt. \end{aligned}$$

Puisque z est fixé et que le dénominateur ne s'annule pas sur le domaine d'intégration, la fonction de (λ, t) dans l'intégrale est continue et différentiable. La fonction g est donc continue, dérivable et

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'((1-\lambda)z + \lambda Re^{it}) Re^{it} dt.$$



Ici on utilise la continuité de f' .

Maintenant, si λ est non nul, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'((1-\lambda)z + \lambda Re^{it}) Re^{it} dt = \left[\frac{1}{i\lambda} f((1-\lambda)z + \lambda Re^{it}) \right]_0^{2\pi} = 0.$$

La fonction g' est donc constante égale à 0 sur $]0, 1]$ et g est donc constante sur $[0, 1]$. Puisque $g(0) = 0$ on conclut que $g(1) = 0$, ce qu'on voulait démontrer. \square

I.6.2. Analyticité des fonctions holomorphes

Il découle en particulier du théorème I.6.1 que, pour tout $z \in D(0, R)$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(w)}{1 - \frac{z}{w}} \frac{dw}{w} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0, R)} f(w) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} \right) \frac{dw}{w} \quad (\text{convergence normale car } \left| \frac{z}{w} \right| < 1) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \left(\int_{\partial D(0, R)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right); \end{aligned}$$

de sorte que f est développable en série entière sur $D(0, R)$.

En translatant par z_0 , on obtient plus généralement :

Théorème I.6.2 (Cauchy). — Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et soit $z_0 \in U$. Alors f est développable en série entière au voisinage de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour } z \in D(z_0, R)$$

où

$$R = \sup\{r > 0 : D(z_0, r) \subset U\} = d(z_0, \partial U)$$

et

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

En particulier, toute fonction holomorphe est de classe C^∞ , ses dérivées successives sont holomorphes et, si $z \in D(z_0, R)$,

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}} dw. \quad (6)$$

I.7. Formes différentielles

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

I.7.1. 1-formes

Définition I.7.1. — Une 1-forme différentielle complexe sur U est une application continue $U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Par exemple, la différentielle df d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 est une 1-forme différentielle.

Toute 1-forme différentielle peut s'écrire

$$\alpha = u dx + v dy, \quad u, v \in C^0(U, \mathbb{C}).$$

En particulier, pour une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , on a $df = \partial_x f dx + \partial_y f dy$.

Si $\alpha = u dx + v dy$ et $z \in U$, on note

$$\alpha_z = u(z) dx + v(z) dy \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}).$$

Si $\varphi : V \rightarrow U$ est un difféomorphisme C^1 entre ouverts de \mathbb{C} , alors on définit le *tiré en arrière* $\varphi^* \alpha$ de α comme la 1-forme différentielle sur V définie par

$$(\varphi^* \alpha)_z = \alpha_{\varphi(z)} \circ d_z \varphi.$$

On observe la compatibilité avec les différentielles de fonctions

$$\varphi^* df = d(f \circ \varphi)$$

pour toute fonction f , d'où résulte la formule de calcul

$$\varphi^*(u dx + v dy) = (u \circ \varphi) d(x \circ \varphi) + (v \circ \varphi) d(y \circ \varphi). \quad (7)$$

Considérons maintenant un chemin C^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ de subdivision associée $[a, b] = \cup_{i=1}^k [a_{i-1}, a_i]$.

Définition I.7.2. — L'intégrale d'une 1-forme $\alpha = u dx + v dy$ le long du chemin γ est définie par la formule

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \alpha &= \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} (\dot{x}(t)u(\gamma(t)) + \dot{y}(t)v(\gamma(t))) dt. \end{aligned}$$

Proposition I.7.3. — L'intégrale d'une 1-forme sur un chemin vérifie les propriétés suivantes.

1. *Indépendance de la paramétrisation du chemin* : si $\psi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ est un difféomorphisme croissant C^1 par morceaux et $\delta = \gamma \circ \psi$ (autre paramétrisation du même chemin géométrique orienté), alors

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\delta} \alpha.$$

2. *Invariance par difféomorphisme* : si $\varphi : V \rightarrow U$ est un difféomorphisme, alors

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\varphi^{-1} \circ \gamma} \varphi^* \alpha.$$

3. *Majoration* :

$$\left| \int_{\gamma} \alpha \right| \leq \text{long}(\gamma) \sup_{t \in [a, b]} \sqrt{u(\gamma(t))^2 + v(\gamma(t))^2}.$$

4. Si $\alpha = df$ pour une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, alors

$$\int_{\gamma} \alpha = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Démonstration. — 1. Quitte à subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles, on peut supposer que le chemin γ et la difféomorphisme ψ sont C^1 . L'égalité désirée s'écrit alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt &= \int_{a'}^{b'} \alpha_{\gamma(\psi(s))}(\varphi'(s) \dot{\gamma}(\psi(s))) ds \\ &= \int_{a'}^{b'} \alpha_{\gamma(\psi(s))}(\dot{\gamma}(\psi(s))) \psi'(s) ds \end{aligned}$$

qui est exactement la formule de changement de variables $t = \varphi(s)$.

2. Résulte immédiatement des définitions.
 3. Conséquence des définitions et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 4. Quitte à subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles, on peut supposer que le chemin γ est C^1 , on a alors :

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b d_{\gamma(t)} f(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

Remarque. Dans 1. le difféomorphisme est croissant, ce qui signifie qu'il préserve l'orientation du chemin. Si on considère le chemin $\bar{\gamma}$ obtenu en parcourant le chemin γ dans l'autre sens, on a :

$$\int_{\bar{\gamma}} \alpha = - \int_{\gamma} \alpha.$$

I.7.2. 2-formes

Définition I.7.4. — Une 2-forme différentielle β sur U est une application continue $U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\wedge_{\mathbb{R}}^2 \mathbb{C}, \mathbb{C})$; elle s'écrit

$$\beta = w \, dx \wedge dy, \quad w \in C^0(U, \mathbb{C}).$$

On peut donc voir une 2-forme comme la donnée (variant continûment), en chaque point, d'une 2-forme linéaire alternée sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Exemple. Étant donné deux 1-formes a et b , le produit extérieur $a \wedge b$, défini par

$$(a \wedge b)(X, Y) = a(X)b(Y) - a(Y)b(X),$$

est alterné, si bien que $a \wedge b$ est une 2-forme. Plus explicitement, on a :

$$(u \, dx + v \, dy) \wedge (w \, dx + z \, dy) = (uz - vw) \, dx \wedge dy.$$

On définit à nouveau le tiré en arrière $\varphi^* \beta$ de β par

$$(\varphi^* \beta)_z = \beta_{\varphi(z)} \circ \wedge^2 d_z \varphi = \det(d_z \varphi) \beta_{\varphi(z)}.$$

Il vérifie :

$$\varphi^*(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \varphi^* \alpha_1 \wedge \varphi^* \alpha_2$$

et la formule de calcul

$$\varphi^*(w \, dx \wedge dy) = (w \circ \varphi) \det(d\varphi) \, dx \wedge dy.$$

Définition I.7.5. — Si $\beta = w \, dx \wedge dy$ est une 2-forme différentielle sur U à support compact, ou plus généralement si w est intégrable, on définit l'intégrale de β :

$$\int_U \beta = \int_U w(x, y) \, dx \, dy.$$

Proposition I.7.6 (Invariance par difféomorphisme)

Si $\varphi : V \rightarrow U$ est un difféomorphisme C^1 préservant l'orientation, c'est-à-dire tel que $\det(d\varphi)$ soit partout strictement positif, alors

$$\int_V \varphi^* \beta = \int_U \beta.$$

Démonstration. — La formule de changement de variables $(x, y) = \varphi(x', y')$ donne

$$\int_U \beta = \int_V w(\varphi(x', y')) |\det d_{(x', y')} \varphi| dx' dy'.$$

Maintenant, par hypothèse $|\det d_{(x', y')} \varphi| = \det d_{(x', y')} \varphi$. Donc

$$\int_U \beta = \int_V w(\varphi(x', y')) \det d_{(x', y')} \varphi dx' dy' = \int_V \varphi^* \beta.$$

□

Remarque. Il résulte de la démonstration que si φ renverse l'orientation (autrement dit si $\det(d\varphi)$ est partout strictement négatif) alors $\int_V \varphi^* \beta = -\int_U \beta$.

I.7.3. Différentielle extérieure

Définition I.7.7. — La *différentielle* d'une 1-forme $\alpha = u dx + v dy$, avec u et v de classe C^1 , est la 2-forme définie par

$$d\alpha = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

La différentielle satisfait la propriété de Leibniz :

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha, \quad f \in C^1(U, \mathbb{C}), \quad \alpha \text{ 1-forme de classe } C^1;$$

et la propriété d'invariance

$$d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha).$$

Si α est donnée dans la base $(dz, d\bar{z})$, on obtient :

$$d(f dz + g d\bar{z}) = (\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f) dz \wedge d\bar{z} = -2i(\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f) dx \wedge dy.$$

Définition I.7.8. — Une 1-forme différentielle α de classe C^1 est dite *fermée* si $d\alpha = 0$.

Pour tout fonction $f \in C^2(U, \mathbb{C})$ la symétrie des dérivées secondes s'écrit

$$d(df) = 0,$$

c'est-à-dire df est fermée. (On étudiera la réciproque plus loin).

A parte physico-mathématique : équation d'Euler et formule de Green–Riemann

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 que l'on écrit $f = P + iQ$ avec P et Q réelles.

Si f est holomorphe alors $\partial_z \partial_{\bar{z}} f = 0$ de sorte que les fonctions réelles P et Q vérifient

$$\Delta P = \Delta Q = 0,$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$$

est le laplacien.

Définition 1.7.9. — Une fonction $u \in C^2(U)$ est dite *harmonique* si $\Delta u = 0$.

On vient de faire remarquer que si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe alors $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont harmoniques.

Interprétation physique

À une fonction $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 on associe un *champs de vecteur*, c'est-à-dire une application continue de U dans \mathbb{R}^2 ,

$$\vec{v} = \operatorname{grad} u = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right)$$

appelé *champs de gradient*.

Notons \langle, \rangle le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 . On peut associer à chaque 1-forme différentielle réelle α sur U le champ de vecteurs \vec{v}_α qui lui est *dual* :

$$\alpha(\cdot) = \langle \vec{v}_\alpha, \cdot \rangle.$$

Exemple. Le champs de vecteur dual à la 1-forme réelle du est le champs de gradient $\operatorname{grad} u$.

En général, si $\vec{v} = v_x \partial_x + v_y \partial_y$, la forme duale est $\alpha = v_x dx + v_y dy$.

La structure complexe sur U permet maintenant de définir un opérateur J , dit *presque complexe*, de rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens positif sur les champs de vecteurs. À l'aide de J on peut tourner à la fois les vecteurs et les formes différentielles réelles⁽⁷⁾ :

$$\begin{aligned} * \vec{v} &:= J(\vec{v}), \text{ si } \vec{v} \text{ est un champs de vecteurs,} \\ * \alpha &:= -\alpha \circ J, \text{ si } \alpha \text{ est une 1-forme.} \end{aligned} \tag{8}$$

7. Attention au signe, qui est conventionnel.

La dualité entre champs de vecteurs et formes différentielles permet de définir point par point le produit scalaire de deux 1-formes, comme étant celui des champs de vecteurs duaux. En notant vol la forme d'aire euclidienne associée à \langle, \rangle et à l'orientation usuelle de \mathbb{R}^2 , on a alors les formules

$$\begin{cases} \text{vol}(*\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle, & \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in TS \\ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \text{vol} = \alpha_1 \wedge * \alpha_2, & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in T^*S, \end{cases} \quad (9)$$

qui se démontrent facilement en calculant dans une base orthonormée.

Toujours à l'aide de la dualité entre formes et vecteurs, on peut définir les notions de *rotationnel* et de *divergence* d'un champ de vecteurs.

Définition 1.7.10 (Rotationnel et divergence). — Soit \vec{v} un champ de vecteurs lisse sur S et $\alpha = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$ la forme duale de \vec{v} . La 2-forme $d\alpha$ est le produit de la forme d'aire vol par une fonction lisse appelée *rotationnel* de \vec{v} :

$$d\alpha = \text{rot } \vec{v} \cdot \text{vol}.$$

La 2-forme $d(*\alpha)$ est le produit de la forme d'aire vol par une fonction lisse appelée *divergence* de \vec{v} :

$$d(*\alpha) = \text{div } \vec{v} \cdot \text{vol}.$$

La « formule de Green–Riemann » affirme que, pour tout compact $K \subset U$, à bord lisse ∂K , on a

$$\int_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle dl = \int_K \text{rot } \vec{v} \cdot \text{vol}, \quad (10)$$

où \vec{t} est le vecteur tangent unitaire sur ∂K et dl l'élément de longueur sur ∂K . Le terme de gauche ci-dessus s'appelle la *circulation* de \vec{v} le long de la courbe ∂K . Le champ \vec{v} est dit *irrotationnel* si son rotationnel est identiquement nul, ou, de manière équivalente, si la 1-forme α est fermée.

La formule (10) se réécrit sous la forme plus compacte suivante : si α est une forme C^1 sur U , alors

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha. \quad (11)$$

Cette dernière formule est un cas particulier du théorème de Stokes. On la démontre dans le paragraphe suivant.

Remarque. En appliquant (11) à $*\alpha$ on obtient :

$$\int_{\partial K} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dl = \int_K \text{div } \vec{v} \cdot \text{vol},$$

où \vec{n} est le vecteur normal unitaire sortant sur le bord ∂K . Le terme de gauche ci-dessus s'appelle le *flux* de \vec{v} au travers de la courbe ∂K . Si \vec{v} modélise un écoulement, ce terme exprime la variation infinitésimale de la quantité de fluide contenue dans K . L'écoulement est dit *incompressible* si la divergence de v est nulle ou, de manière équivalente, si la forme $*\alpha$ est fermée.

Fonctions holomorphes et écoulements incompressibles et irrotationnels

Si $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 et harmonique, alors son champ de gradient $\vec{v} = \text{grad } u$ est à la fois irrotationnel et incompressible. C'est une conséquence de la relation

$$\Delta u := \text{div grad } u$$

Considérons maintenant le champ $*\vec{v}$. On a les égalités

$$\text{rot}(*\vec{v}) = \text{div } \vec{v} \quad \text{et} \quad \text{div}(*\vec{v}) = -\text{rot } \vec{v}.$$

Étant donnée une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, le champ dual de la partie réelle de df , autrement dit le champ \vec{v} défini par

$$\text{Re } df = \langle \vec{v}, \cdot \rangle,$$

est irrotationnel et de divergence nulle. Ceci permet de comprendre les propriétés locales des points critiques des champs de vecteurs irrotationnels de divergence nulle. Au voisinage d'un tel point, nous verrons qu'il existe une coordonnée holomorphe locale z et un entier n tels que l'on ait : $f(z) = z^n$. Nous obtenons donc $df = nz^{n-1}dz$, puis $\langle \vec{v}, \cdot \rangle = \text{Re}(nz^{n-1}dz)$. Les lignes de champ correspondant au cas où $n = 3$ sont représentées sur la figure 7.

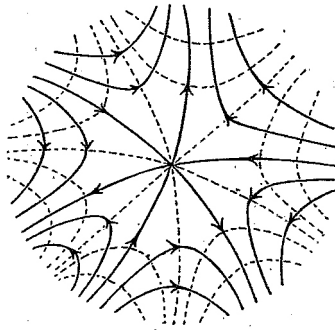


FIGURE 7. Figure extraite du livre de Klein [Kle1882c] : voisinage d'un point critique

I.8. Formule de Green–Riemann

Définition I.8.1. — Un compact $K \subset \mathbb{C}$ est dit à bord C^1 par morceaux si pour tout point $z_0 \in \partial K$, il existe des coordonnées (u, v) associées à un repère affine de \mathbb{R}^2 d'origine z_0 , et un rectangle ouvert $R = \{-\varepsilon < u < \varepsilon\} \times \{-\delta < v < \delta\}$ assez petit de sorte que $K \cap R = \{(u, v) \in R : v \geq h(u)\}$, où h est une fonction de classe C^1 par morceaux sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ avec $h(0) = 0$ et $\sup |h| < \delta$.

Le bord ∂K est donc paramétrisable par un nombre fini d'arcs de classe C^1 par morceaux; il ne possède qu'un nombre fini de points anguleux, et l'angle en chacun de ces points n'est pas nul. On supposera que les repères intervenant dans la définition ci-dessus sont toujours orientés positivement par rapport à l'orientation définie par la base canonique de \mathbb{R}^2 ; on oriente alors ∂K en orientant les arcs $u \mapsto (u, h(u))$ dans le sens des u croissants. On laisse en exercice de vérifier que cette orientation est bien définie de manière cohérente.

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

Théorème I.8.2 (Formule de Green–Riemann). — Soit $K \subset U$ un compact à bord C^1 par morceaux, et α une 1-forme C^1 sur U . Alors

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha.$$

Démonstration. — Traitons d'abord le cas particulier où α est à support dans un rectangle R tel que ou bien $\partial K \cap R = \emptyset$ (c'est-à-dire $R \subset \text{int}(K)$), ou bien $\partial K \cap R$ est le graphe d'une fonction h , et $K \cap R$ est la partie située au-dessus du graphe.

Quitte à changer les coordonnées, on peut de plus supposer que $R = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\delta, \delta]$. Écrivons $\alpha = u dx + v dy$.

1. Si $R \subset \text{int}(K)$, alors on a

$$\int_K d\alpha = \int_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

En effet, $u = v = 0$ sur ∂R , donc

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx = v(\varepsilon, y) - v(-\varepsilon, y) = 0$$

et

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy = u(x, \delta) - v(x, -\delta) = 0.$$

Comme par ailleurs le support de u et v ne rencontre pas ∂K , on conclut que $\int_{\partial K} \alpha = 0 = \int_K d\alpha$.

2. Si $K \cap R = \{(x, y) \in R : y \geq h(x)\}$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_K d\alpha &= \int_{K \cap R} d\alpha = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \int_{h(x)}^{\delta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{h(x)}^{\delta} v(x, y) dy \right) + v(x, h(x))h'(x) \right. \\ &\quad \left. - \left(\underbrace{u(x, \delta)}_{=0} - u(x, h(x)) \right) \right] \\ &= \int_{h(\varepsilon)}^{\delta} \underbrace{v(\varepsilon, y)}_{=0} dy - \int_{h(-\varepsilon)}^{\delta} \underbrace{v(-\varepsilon, y)}_{=0} dy \\ &\quad + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))) dx, \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \alpha &= \int_{\partial K \cap R} u(x, y) dx + v(x, y) dy \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(x, h(x)) dx + v(x, h(x))h'(x) dx, \end{aligned}$$

puisque l'arc $\partial K \cap R$ peut être paramétrisé par $y = h(x)$. Par conséquent $\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha$.

L'outil technique pour se ramener au cas particulier où α est à support dans un rectangle R comme ci-dessus est les partitions de l'unité. En effet, d'après la définition initiale de ce paragraphe, chaque point $z_0 \in K$ admet comme voisinage un tel rectangle. Par compacité de K on peut donc trouver un nombre fini de rectangles ouverts R_j comme ci-dessus dont la réunion recouvre K . Soit (χ_j) une partition de l'unité subordonnée aux (R_j) , c'est-à-dire des fonctions $\chi_j : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ de support contenu dans R_j telles que $\sum_j \chi_j = 1$ sur K . En décomposant $\alpha =$

$\sum_j \chi_j \alpha$, on est ramené à montrer la formule de Green–Riemann pour chaque $\chi_j \alpha$, dont le support est inclus dans R_j .

□

Réinterprétons maintenant la condition qu’une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en termes de formes différentielles :

Lemme I.8.3. — *La fonction f est holomorphe si et seulement si la 1-forme différentielle $\alpha = f(z)dz$ satisfait $d\alpha = 0$.*

Démonstration. — On a vu que $d(f(z)dz) = -\partial_{\bar{z}}f dz \wedge d\bar{z}$, et la condition que f soit holomorphe est $\partial_{\bar{z}}f = 0$. □

La formule de Green–Riemann implique donc le théorème fondamental suivant qui généralise la formule de Cauchy.

Théorème I.8.4 (Cauchy). — *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et soit $K \subset U$ un compact à bord C^1 par morceaux. Alors*

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0.$$

On peut retrouver la formule de Cauchy I.6.1 en appliquant ce théorème à la fonction holomorphe

$$g(w) = \frac{f(w)}{w - z} \quad \text{sur } \overline{D(z_0, R)} - D(z, r)$$

et en faisant tendre r vers 0.

Exemple. On peut calculer la transformée de Fourier de la gaussienne $f(x) = e^{-x^2}$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - i\xi x} dx \\ &= e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x - i\frac{\xi}{2}\right)^2} dx \\ &= e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \int_{\text{Im} z = \xi/2} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

On applique maintenant le théorème I.8.4 au rectangle $K = [-r, r] \times [0, \xi/2]$. Comme $|e^{-z^2}| = e^{-\text{Re} z^2}$, les intégrales sur les deux segments verticaux tendent vers 0 quand r tend vers l’infini, et on obtient donc à la

limite

$$\int_{\operatorname{Im} z = \xi/2} e^{-z^2} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Il en résulte

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}. \quad (12)$$

Bibliographie

- [Ahl2006] ———, *Lectures on quasiconformal mapping, second edition. With supplemental chapters by C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard*. Univ. Lecture Series 38, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 2006.
- [Eul1777] L. EULER – « De repraesentatione superficiei sphaericae super plano / De projectione geographica superficiei sphaericae / De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russi usitata », *Acta Acad. Sci. Imper. Petropol.* 1777. Traduction allemande : « Drei Abhandlungen über Kartenprojection », Engelmann, Leipzig, 1898.
- [Gau1825] C. F. GAUSS – « Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche so auszubilden », in *Astronomische Abhandlungen [tome 3]*, éd. par H.C. Schumacher, Altona, 1825. = [?], vol. 4, p. 189–216. Traduit dans : « Solution générale de ce problème : représenter les parties d’une surface donnée sur une autre surface donnée », Hermann, Paris, 1915.
- [HiCo1932] D. HILBERT & S. COHN-VOSSEN – *Anschausche Geometrie*, Springer, Berlin, 1932. Traduction anglaise : *Geometry and the imagination*, Chelsea, New York, 1952. Réimpression, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 1998.
- [Kle1882c] ———, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882. Traduction anglaise (édition révisée) : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, Dover, Mineola (NY), 2003.
- [Lag1779] J.-L. LAGRANGE – « Sur la constructions des cartes géographiques », *Nouveau Mémoire de l'Académie de Berlin* (1779), p. 161–210. *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892, t. 4, p. 637–692.

- [Lam1772] J. H. LAMBERT – « Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten », *Beyträge zum gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* [t. 3], Buchhandlung der Realsschule, Berlin, 1772, 6^e article. Rééd. par A. Wangerin, W. Engelmann, Leipzig, 1894.
- [Sny1993] J. SNYDER – *Flattening the Earth : Two Thousand Years of Map Projections*, Univ. of Chicago Press, 1993.