HYDRODYNAMIQUE — TD SOUTIEN 2

## Ressaut hydraulique

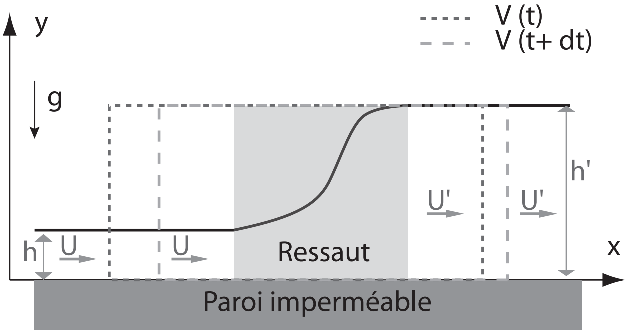


FIGURE 1 – Schéma du ressaut hydraulique.

Un ressaut est une zone où la vitesse varie brutalement (voir figure 1 et l'écoulement autour d'un jet dans un évier). Nous considérons l'écoulement stationnaire d'un liquide incompressible de masse volumique $\rho$ sur une paroi imperméable. Un gaz de pression $p_0$ uniforme se trouve au-dessus de ce liquide. Nous considérons que la vitesse du liquide est uniforme et selon $x$ avant le ressaut : $\overrightarrow{v} = U\overrightarrow{i}$ et que sa hauteur vaut $h$. La vitesse vaut $U'$ et la hauteur $h'$ après le ressaut. L'effet de la viscosité est négligé en dehors du ressaut.

Le but est d'écrire les relations entre $U$, $U'$, $h$ et $h'$ sans étudier les détails du ressaut.

1. Écrire la relation liée à l'incompressibilité du fluide. On pourra utiliser les volumes de contrôle $V(t)$ et $V(t+dt)$ de la figure 1.
2. Nous supposons que la pression loin du ressaut est égale à la pression hydrostatique. Écrire la pression en amont et en aval du ressaut.
3. Écrire le bilan de quantité de mouvement entre $t$ et $t+dt$ en utilisant les volumes de contrôle de la figure.
4. Le but des questions suivantes est de retrouver ce résultat par une autre méthode.

   Écrire l'équation qui traduit le bilan local de quantité de mouvement pour un fluide parfait.
5. En déduire que pour un volume d'intégration $V$ fixe de surface $S$, si le fluide est parfait et incompressible, dans une direction $i$ pour laquelle la gravité est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v_i = -\int_S (\rho v_i v_j + p\delta_{i,j})n_j \tag{1}$$

6. Utiliser cette équation pour en déduire une relation entre $U$, $U'$, $h$ et $h'$. Comparer avec le résultat de la question 3.

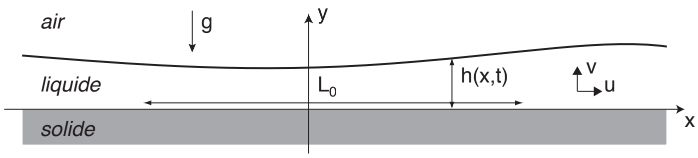


FIGURE 2 – Écoulement en eau peu profonde.

## Modèle de Saint-Venant

On considère un liquide incompressible de masse volumique $\rho$ en écoulement le long d'une paroi horizontale $y=0$ (voir figure 2). De l'air à pression $p_0$ se trouve au-dessus de ce liquide. L'écoulement est supposé parfait, mais n'est pas forcément irrotationnel. On se place dans la limite des eaux peu profondes, ce qui se traduit par le fait que la modulation de la surface libre en $x$ se fait sur une longueur $L_0$ grande devant la hauteur de la surface libre $h_0$. On note $\varepsilon = h_0/L_0$. On néglige tout effet dû à la tension de surface.

1. Que vaut la pression dans le fluide si on suppose $h(x,t) = h_0$, $u(x,y,t) = U_0$ et $v(x,y,t) = 0$ ?
2. Les questions suivantes visent à établir les équations du modèle de Saint-Venant. Les vitesses $u(x,y,t)$ et $v(x,y,t)$ dépendent dans toute la suite de $x$, $y$ et $t$.

   Écrire le bilan de masse dans la tranche comprise entre $x$ et $x+\mathrm{d}x$, dans l'intervalle de temps $[t, t+\mathrm{d}t]$. En déduire une équation sur la vitesse moyenne $U(x,t) = \frac{1}{h(x,t)}\int_0^{h(x,t)} u(x,y,t)\,\mathrm{d}y$.
3. En utilisant l'équation d'incompressibilité, exprimer en ordre de grandeur $V_0$ (vitesse typique selon $y$) en fonction de $U_0$ (vitesse typique selon $x$).
4. Donner l'ordre de grandeur des différents termes des équations de la conservation de la quantité de mouvement. On prendra comme pression adimensionnée $\tilde{p} = p/(\rho U_0^2)$. Effectuer les simplifications possibles.
5. Calculer la pression à l'ordre le plus bas.
6. Calculer div $(u\vec{v})$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse $\vec{v} = u\vec{e_x} + v\vec{e_y}$. Montrer :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (vu)}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2}$$

7. On pose $F(x,y,t) = h(x,t) - y$. La surface libre est définie par $F(x,y,t) = 0$. On considère une particule fictive $\underline{x}(t), \underline{y}(t)$ qui appartient à la surface libre à tout temps. On appelle $\underline{\vec{V}}$ la vitesse de cette particule. Montrer que :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{\vec{V}}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ (F)\right](\underline{x}(t), \underline{y}(t), t) = 0 \tag{3}$$

   Justifier que l'on peut remplacer $\underline{\vec{V}}$ par la vitesse du fluide à l'interface dans l'équation précédente. L'équation alors obtenue est appelée condition aux limites cinématiques à la surface libre.
8. Donner la condition aux limites cinématique à la surface libre en fonction de $h$, $u$ et $v$ et de leurs dérivées.

9. En intégrant l'équation (2) entre 0 et $h(x,t)$, et en utilisant le théorème de Leibnitz, montrer que :
$$\frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u^2 \mathrm{d}y = -gh\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{4}$$
10. On fait l'hypothèse
$$\int_0^h u^2 \mathrm{d}y = h(x,t) \times (U(x,t))^2. \tag{5}$$
Que signifie cette hypothèse ? Est-elle raisonnable ?
11. En utilisant l'équation de conservation de la masse, l'équation (4) et l'équation (5), montrer :
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{6}$$
12. On considère maintenant le modèle formé de l'équation de conservation de la masse et de l'équation (6).
Linéariser ces équations en posant $U(x,t) = U_0 + \xi U_1(x,t)$ et $h(x,t) = h_0 + \xi h_1(x,t)$, avec $\xi \ll 1$
13. On recherche des solutions sous la forme d'ondes progressives $U_1 = A\exp(ikx - i\omega t)$ et $h_1 = B\exp(ikx - i\omega t)$, avec $\omega \geq 0$
Calculer la relation de dispersion de ces ondes. On posera $c = \sqrt{gh_0}$ et le nombre de Froude $\mathrm{Fr} = U_0/c$. Ces ondes sont-elles dispersives ?
14. Tracer les relations de dispersion selon les valeurs de Fr.
15. On fait osciller un petit obstacle immergé en $x = 0$ à la pulsation $\omega_0$. Décrire les trains d'ondes résultant de cette oscillation.