HYDRODYNAMIQUE — TUTORAT 7

On se propose dans ce tutorat de décrire les déformations d'une couche mince de fluide dans deux cas limites : en fluide parfait, et en fluide visqueux. Le premier exemple concerne la dérivation des équations de Saint Venant, que vous avez déjà évoqué dans le cadre du tutorat sur le ressaut hydraulique. Le second exemple concerne l'enduction centrifuge, un procédé utilisé pour déposer une fine couche liquide sur un substrat par rotation autour d'un axe vertical.

Equation de Saint Venant

On considère un problème bidimensionnel dans le plan (x, z), avec $h(x)$ la hauteur de fluide. La paroi en $z = 0$ est immobile, et l'interface en $z = h$ est dit libre.

1. Sous quelle condition peut-on négliger les effets de viscosité ? En ordre de grandeur, donner des bornes approximatives de validité en temps et en espace de l'approximation de fluide parfait pour une couche de fluide d'épaisseur $h_0 = 1$ m.

Le principe du calcul de Saint Venant est de considérer la vitesse $\bar{U}$ moyennée sur l'épaisseur :

$$\bar{U} = \frac{1}{h(x)} \int_0^h u_x dz \tag{1}$$

2. Utiliser la condition d'incompressibilité pour dériver une équation reliant la hauteur de fluide h et le flux moyen $\bar{U}h$ de matière en x.
3. En ordre de grandeur, comparer u_x et u_z. Proposer un développement perturbatif pour u_x, u_z et p en fonction d'un petit paramètre ϵ. Quelle serait la signification physique de ϵ ici ?
4. Ecrire le bilan de quantité de mouvement selon z. Simplifier à l'ordre 0 en ϵ l'expression. Que vaut donc le profil vertical de pression ?
5. Ecrire le bilan de quantité de mouvement selon x, et en déduire le système d'équation de Saint Venant.
6. En utilisant de nouveau un développement perturbatif pour h et $\bar{U}$ en un petit paramètre a dont on précisera la signification, en déduire l'équation verifiée par h à l'ordre linéaire. Pouvait on retrouver se résultat par analyse dimensionnelle ?

Enduction centrifuge

L'enduction centrifuge («spin coating») est une technique expérimentale très utilisée en microélectronique et en microfluidique pour déposer une couche mince sur un substrat solide. Ce substrat est un disque très plat («wafer» de silicium par exemple) de rayon R sur lequel est versé un liquide très visqueux. Le disque est ensuite mis en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire ω. On observe que la hauteur h du liquide diminue au cours du temps. En pratique, la rotation est arrêtée lorsque la hauteur souhaitée est atteinte.

On appelle h_0 la hauteur initiale du liquide (supposée uniforme), η la viscosité dynamique du liquide et ρ sa masse volumique. De l'air à la pression p_0 se trouve au-dessus du liquide. La hauteur h_0 vérifie $h_0 \ll R$. Pour simplifier l'étude, on se limitera au cas $r \gg h_0$ (cette condition permet uniquement de simplifier les calculs, il n'y a pas de phénomène singulier en $r = 0$).

Valeurs numériques : $\omega = 1\,000\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $h_0 = 100\ \mu\mathrm{m}$, $R = 100$ mm, $\rho = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\eta = 10\ \mathrm{Pa \cdot s}$.

1. Expliquer qualitativement pourquoi l'épaisseur du film diminue avec le temps.

Dans ces questions, on se place dans le référentiel où le disque est immobile.

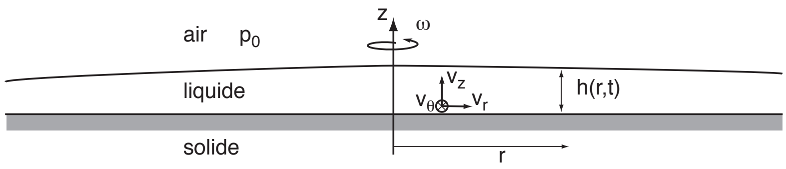

FIGURE 1 – Schéma d'un dispositif d'enduction centrifuge.

2. Quelles sont les équations vérifiées par le champ de vitesse ? Quelles sont les conditions aux limites ?
3. On fait l'hypothèse que $v_\theta = 0$ dans ce référentiel. En utilisant l'équation d'incompressibilité, déduire une relation en ordre de grandeur entre v_r et v_z.
4. Simplifier les équations du mouvement. Calculer $v_r(r, z, t)$ en fonction notamment de $h(r, t)$.
5. On appelle $q(r, t)$ le débit à travers un cylindre de rayon r centré en $r = 0$. En effectuant un bilan de volume, donner la relation entre q et h.
6. En déduire $h(r, t)$. Application numérique pour $t = 100$ s. Après combien de temps la hauteur h_0 n'influe t-elle plus sur la valeur de $h(r, t)$?
7. Dans cette question, on vérifie que v_θ est bien négligeable. Écrire l'équation qui permet de déterminer v_θ. Montrer que $|v_\theta(z = h)| \ll |v_r(z = h)|$.

Dans cette question, on se place dans le référentiel du laboratoire.

8. Que vaut v_θ ? Peut-on négliger tous les termes inertiels dans ce référentiel ? Commenter.

En coordonnées cylindriques dans un référentiel galiléen :

$$\text{div}\,(\mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{(v_\theta)^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{(v_r v_\theta)}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

$$\sigma_{rz} = \eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$