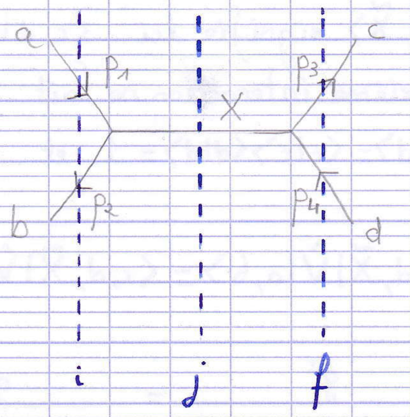
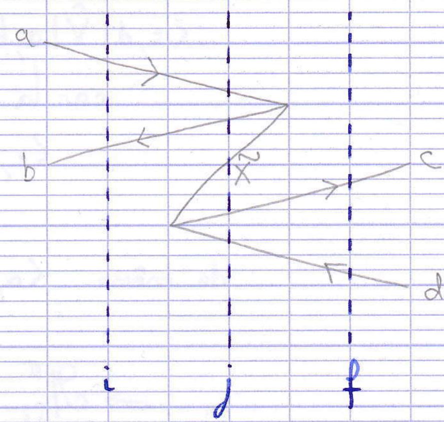
TD 3 : physique des particules.

Exercice 1 :

I





II

Pour ces diagrammes ordonnés dans le temps :

- l'impulsion (spatiale) est conservée à chaque interaction car $[\hat{\vec{p}}, \hat{V}] = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{p}_X = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = -\vec{p}_{\tilde{X}}$$

- X et $\tilde{X}$ ont la même masse m_X mais des charges opposées
- l'énergie n'est a priori pas conservée à chaque interaction, seulement entre l'état final et l'état initial : $E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \neq E_X, E_{\tilde{X}}$
- puisque $\vec{p}_X^{\,2} = \vec{p}_{\tilde{X}}^{\,2}$ on a $E_X = E_{\tilde{X}} = \sqrt{m_X^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}$

$$T_{fi} = \cancel{\langle f | \hat{V} | i \rangle} + \sum_{j \neq i} \frac{\langle f | \hat{V} | j \rangle \langle j | \hat{V} | i \rangle}{E_i - E_j} + \ldots \simeq T_{fi}^{I} + T_{fi}^{II}$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \sqrt{2E_1 2E_2 2E_3 2E_4}\, T_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{I} + \mathcal{M}_{fi}^{II}$$

Configuration I : $|j\rangle = |X\rangle$, $T_{fi}^{I} = \dfrac{\langle c, d | \hat{V} | X \rangle \langle X | \hat{V} | a, b \rangle}{E_1 + E_2 - E_X}$

$\sqrt{2E_3 2E_4 2E_X} \langle c, d | \hat{V} | X \rangle$ est invariant de Lorentz ; on considère l'interaction la plus simple possible : $\sqrt{2E_3 2E_4 2E_X} \langle c, d | \hat{V} | X \rangle = g$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{fi}^{I} = \sqrt{\cancel{2E_1} \cancel{2E_2} \cancel{2E_3} \cancel{2E_4}} \times \frac{g}{\sqrt{\cancel{2E_3} \cancel{2E_4} 2E_X}} \frac{g}{\sqrt{\cancel{2E_1} \cancel{2E_2} 2E_X}} \frac{1}{E_1 + E_2 - E_X}$$

$$\mathcal{M}_{fi}^{I} = \frac{g^2}{2E_X (E_1 + E_2 - E_X)} .$$

Configuration II : $|j\rangle = |a, b, c, d, \tilde{X}\rangle$

$\langle c, d | \hat{V} | a, b, c, d, \tilde{X}\rangle$ signifie ici $\langle c, d | c, d\rangle \times \langle \emptyset | \hat{V} | a, b, \tilde{X}\rangle$

car la deuxième interaction ne fait intervenir ni c ni d

$\langle c, d | c, d\rangle = \langle c|c\rangle\langle d|d\rangle = 1$ et $\langle \emptyset | \hat{V} | a, b, \tilde{X}\rangle = \dfrac{g}{\sqrt{2E_1 2E_2 2E_X}}$

de même $\langle a, b, c, d, \tilde{X} | \hat{V} | a, b\rangle = \langle c, d, \tilde{X} | \hat{V} | \emptyset\rangle = \dfrac{g}{\sqrt{2E_3 2E_4 2E_X}}$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{fi}^{II} = \frac{g^2}{-2E_X(E_3+E_4+E_X)} = -\frac{g^2}{2E_X(E_1+E_2+E_X)}.$$

Finalement: $$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g^2}{2E_X}\left[\frac{1}{E_1+E_2-E_X} - \frac{1}{E_1+E_2+E_X}\right] = \frac{g^2}{(E_1+E_2)^2 - E_X^2}$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g^2}{(E_1+E_2)^2 - (\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2 - m_X^2}$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g^2}{q^2 - m_X^2} \quad \text{où} \quad q^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$$

q^μ est la 4-impulsion de la particule échangée s'il y avait conservation de la 4-impulsion à chaque sommet d'interaction.

Exercice 2 :

1). $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \qquad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \qquad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$

$[\hat{x},\hat{p}_x] = [\hat{y},\hat{p}_y] = [\hat{z},\hat{p}_z] = i \qquad [\hat{x},\hat{y}] = [\hat{x},\hat{z}] = [\hat{y},\hat{z}] = 0$

$[\hat{p}_x,\hat{p}_y] = [\hat{p}_x,\hat{p}_z] = [\hat{p}_y,\hat{p}_z] = 0$

$\Rightarrow [\hat{L}_x,\hat{L}_y] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] = \hat{y}\hat{p}_x[\hat{p}_z,\hat{z}] + \hat{p}_y\hat{x}[\hat{z},\hat{p}_z] = i\hat{L}_z$

calcul similaire pour $[\hat{L}_y,\hat{L}_z]$ et $[\hat{L}_z,\hat{L}_x]$

Remarque : en notation indicielle, $\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$ $\qquad [\hat{x}_i,\hat{x}_j] = [\hat{p}_i,\hat{p}_j] = 0$

($\varepsilon_{123} = 1$, ε_{ijk} complètement antisymétrique) $\qquad [\hat{x}_i,\hat{p}_j] = i\delta_{ij}$

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j] = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}[\hat{x}_k\hat{p}_l, \hat{x}_m\hat{p}_n] = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\left(\hat{x}_k[\hat{p}_l,\hat{x}_m]\hat{p}_n + \hat{x}_m[\hat{x}_k,\hat{p}_n]\hat{p}_l\right)$$
$$= i\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\left(-\delta_{lm}\hat{x}_k\hat{p}_n + \delta_{kn}\hat{x}_m\hat{p}_l\right)$$
$$= i\left(-\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jln}\hat{x}_k\hat{p}_n + \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmk}\hat{x}_m\hat{p}_l\right)$$
$$= i\left(\cancel{\delta_{ij}\delta_{kn}\hat{x}_k\hat{p}_n} - \delta_{in}\delta_{kj}\hat{x}_k\hat{p}_n - \cancel{\delta_{ij}\delta_{ml}\hat{x}_m\hat{p}_l} + \delta_{im}\delta_{jl}\hat{x}_m\hat{p}_l\right)$$
$$= i(\hat{x}_i\hat{p}_j - \hat{x}_j\hat{p}_i) = i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\hat{x}_l\hat{p}_m$$
$$\Rightarrow [\hat{L}_i,\hat{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

2). $[\hat{L}_y^2,\hat{L}_x] = \hat{L}_y[\hat{L}_y,\hat{L}_x] + [\hat{L}_y,\hat{L}_x]\hat{L}_y = -i(\hat{L}_y\hat{L}_z + \hat{L}_z\hat{L}_y)$

$[\hat{L}_z^2,\hat{L}_x] = \hat{L}_z[\hat{L}_z,\hat{L}_x] + [\hat{L}_z,\hat{L}_x]\hat{L}_z = i(\hat{L}_z\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_z)$

$\Rightarrow [\hat{L}^2,\hat{L}_x] = 0$

de même, $[\hat{L}^2,\hat{L}_y] = [\hat{L}^2,\hat{L}_z] = 0$.

3). $[\hat{L}_z,\hat{L}_\pm] = [\hat{L}_z,\hat{L}_x] \pm i[\hat{L}_z,\hat{L}_y] = i\hat{L}_y \pm \hat{L}_x = \pm(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y) = \pm\hat{L}_\pm$

$[\hat{L}_+,\hat{L}_-] = [\hat{L}_x + i\hat{L}_y, \hat{L}_x - i\hat{L}_y] = 2i[\hat{L}_y,\hat{L}_x] = 2\hat{L}_z$

4). $\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + i[\hat{L}_x,\hat{L}_y] + \hat{L}_y^2 = \hat{L}_x^2 - \hat{L}_z + \hat{L}_y^2$

$\Rightarrow \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z + \hat{L}_z^2$.

Exercice 3 :

1). $\varphi(h)\big(\varphi(e)(v)\big) = \varphi([h,e])(v) + \varphi(e)\big(\varphi(h)(v)\big)$ d'après (8).

$= 2\varphi(e)(v) + \varphi(e)(\lambda v)$

$= (\lambda+2)\varphi(e)(v)$

$\Rightarrow$ si $\varphi(e)(v) \neq 0$ alors $\varphi(e)(v)$ est un vecteur propre de $\varphi(h)$ pour la valeur propre $\lambda+2$

De même : $\varphi(h)\big(\varphi(f)(v)\big) = (\lambda-2)\,\varphi(f)(v)$.

2). Soit $v \in V$ un vecteur propre de $\varphi(h)$: $\exists\, \lambda' \in \mathbb{C}$, $\varphi(h)(v) = \lambda' v$

S'ils sont tous non nuls les éléments de $\{\varphi(f)^{(k)}(v)\ ;\ 0 \leq k \leq p\}$ forment une famille libre car ce sont des vecteurs propres pour des valeurs propres différentes deux à deux : $\lambda', \lambda'-2, \dots, \lambda'-2p$.

Ceci est impossible puisque $\dim V = p \Rightarrow \exists\, k_0 \in \{1,\dots,p\}$, $\begin{cases} \varphi(f)^{(k_0-1)}(v) \neq 0 \\ \varphi(f)^{(k_0)}(v) = 0 \end{cases}$

On pose alors $v_0 = \varphi(f)^{(k_0-1)}(v)$, $\lambda = \lambda' - 2k_0 + 2$.

Le même raisonnement s'applique à $\{\varphi(e)^{(n)}(v_0)\ ;\ 0 \leq n \leq p\}$:

$\exists\, n \in \{0,\dots,p-1\}$, $\varphi(e)^{(n+1)}(v_0) = 0$ mais $\varphi(e)^{(n)}(v_0) \neq 0$.

3). Soit $k \in \{1,\dots,n\}$, $\varphi(f)(v_k) = \varphi(f)\circ\varphi(e)(v_{k-1})$

$= \varphi([f,e])(v_{k-1}) + \varphi(e)\circ\varphi(f)(v_{k-1})$

$= -\varphi(h)(v_{k-1}) + \varphi(e)\circ\varphi(f)(v_{k-1})$

$= -(\lambda+2k-2)v_{k-1} + \varphi(e)\circ\varphi(f)(v_{k-1})$.

Si $k=1$: $\varphi(f)(v_1) = -\lambda v_0$ OK

Puis on raisonne par récurrence : si pour $k \geq 2$, $\varphi(f)(v_{k-1}) = (k-1)(2-\lambda-k)v_{k-2}$

alors $\varphi(f)(v_k) = [-(\lambda+2k-2)+(k-1)(2-\lambda-k)]v_{k-1}$

$= k(1-\lambda-k)v_{k-1}$ OK.

4). On pose $W = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_0, v_1, \dots, v_n)$: par définition, $\varphi(e)(W) \subset W$

$\varphi(h)(W) \subset W$

On vient en outre de vérifier que $\varphi(f)(W) \subset W$

Comme $\{e, f, h\}$ est une base de g cela signifie que : $\forall x \in g$, $\varphi(x)(W) \subset W$.

i.e. $W \subset V$ est invariant $\Rightarrow W = V$ (car $W \neq \{0\}$ puisque $v_0 \neq 0$).

Or $\dim W = n+1$ et $\dim V = p \Rightarrow n = p-1$.

5). Dans la base $\{v_0, v_1, \dots, v_{p-1}\}$ $\varphi(h)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda+2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda+2(p-1) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Tr(\varphi(h)) = \sum_{j=0}^{p-1} (\lambda + 2j) = p\lambda + (p-1)p$$

Or $\varphi(h) = \varphi([e,f]) = \varphi(e) \circ \varphi(f) - \varphi(f) \circ \varphi(e)$

$\Rightarrow Tr(\varphi(h)) = 0$ d'où $\lambda = 1-p$.

6). Soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$: $\varphi(f) \circ \varphi(e)(v_k) = -(k+1)(\lambda+k) v_k$

$$\Rightarrow \left(\varphi(f)\circ\varphi(e) + \frac{1}{2}\varphi(h) + \frac{1}{4}\varphi(h)^{(2)}\right)(v_k) = \left[-(k+1)(\lambda+k) + \frac{\lambda+2k}{2} + \frac{(\lambda+2k)^2}{4}\right] v_k$$

$$= \left[\cancel{-k\lambda} \cancel{-k^2} - \lambda \cancel{-k} + \frac{\lambda}{2} \cancel{+k} + \frac{\lambda^2}{4} \cancel{+k\lambda} \cancel{+k^2}\right] v_k$$

$$= -\frac{\lambda(2-\lambda)}{4} v_k$$

$$= \frac{(p-1)(p+1)}{4} v_k$$

$\{v_0, \dots, v_{p-1}\}$ est une base de V donc : $\varphi(f)\circ\varphi(e) + \frac{\varphi(h)}{2} + \frac{\varphi(h)^{(2)}}{4} = \frac{(p-1)(p+1)}{4} I_V$

7). $e \mapsto \hat{L}_+$ $\quad f \mapsto \hat{L}_-$ $\quad \frac{h}{2} \mapsto \hat{L}_3$ $\quad \frac{e+f}{2} \mapsto \hat{L}_x$ $\quad \frac{e-f}{2i} \mapsto \hat{L}_y$.

8). $\hat{L}_+ |l, m\rangle = \varphi(e)(c_{l+m} v_{l+m}) = c_{l+m} v_{l+m+1}$ $\quad (-l \leq m \leq l-1)$

On aimerait que ce soit égal à $\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, c_{l+m+1} v_{l+m+1}$.

Il suffit de poser, pour $k \in \{0, \dots, 2l\}$, $c_k = \dfrac{c_0}{\prod_{j=1}^{k} \sqrt{k(2l+1-k)}}$

(en effet, si $k = l+m$, $k(2l+1-k) = (l+m)(l+1-m) = l(l+1) - (m-1)m$).

On vérifie alors que, nécessairement, l'égalité (12) est aussi vérifiée.

9). L'égalité (10) devient : $\hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_3 + \hat{L}_3^2 = l(l+1)$.

La norme du moment angulaire de la particule est fixée.

Exercice 4 :

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\sigma_y &= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = i\sigma_z\\ \sigma_y\sigma_x &= \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = -i\sigma_z\end{aligned}\right\}\ [\sigma_x,\sigma_y] = 2i\sigma_z$$

De même : $[\sigma_y,\sigma_z] = 2i\sigma_x$ et $[\sigma_z,\sigma_x] = 2i\sigma_y$

On en déduit que, en posant $\sigma_\pm = \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{2}$: $\sigma_+ = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\sigma_- = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$
on a $[\sigma_z,\sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$ $\quad [\sigma_+,\sigma_-] = \sigma_z$.

En posant $\varphi(h) = \sigma_z$, $\varphi(e) = \sigma_+$ et $\varphi(f) = \sigma_-$ on a bien une représentation de dimension 2 de $sl(2,\mathbb{C})$.
Pour déterminer le spin on calcule $\varphi(f)\circ\varphi(e) + \frac{\varphi(h)}{2} + \frac{\varphi(h)^{2}}{4}$:

$$\sigma_-\sigma_+ + \frac{\sigma_z}{2} + \frac{\sigma_z^2}{4} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\frac{3}{4} = l(l+1)$ pour $l = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ représentation de spin $\frac{1}{2}$.