TD1 : Équations de Cauchy–Riemann, séries entières, champs de vecteurs

Exercice 1

1. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Donner les relations entre $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$.
2. Établir des formules pour les dérivées holomorphes et anti-holomorphes de composées.
3. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ on définit deux formes linéaires

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}r\,(z) = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\,(z) = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}.$$

   On définit ainsi deux formes différentielles sur $\mathbb{C}^*$. Ces formes sont-elles fermées ? exactes ? Montrer qu'en tout $z \in \mathbb{C}^*$ les applications $\mathrm{d}r\,(z)$ et $\mathrm{d}\theta\,(z)$ forment une $\mathbb{C}$-base de l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}^*$ sa différentielle peut donc s'écrire

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta.$$

   Donner une interprétation géométrique de cette écriture.
4. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et de $\frac{\partial f}{\partial \theta}$. Que deviennent les équations de Cauchy–Riemann en coordonnées polaires ?
5. Discuter les ouverts connexes de $\mathbb{C}^*$ sur lesquels on peut définir un logarithme holomorphe. Faire de même pour les fonctions de la forme $z \mapsto z^\delta$ avec $\delta \in \mathbb{C}$. Comment diffèrent les différentes déterminations de ces fonctions ?

Exercice 2

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U.

1. Montrer l'équivalence entre : f est constante ; $\Re\,(f)$ est constante ; $\mathrm{Im}\,(f)$ est constante ; et $|f|$ est constante.
2. Que peut-on dire de f si $\bar{f}$ est holomorphe ?
3. On suppose qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^1\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $z \in U$ on a $\mathrm{Im}\,(f\,(z)) = F\,(\Re\,(f\,(z)))$. Montrer que f est constante. Comment ce résultat s'interprète-t-il géométriquement ?
4. Montrer que le résultat de la question 3 reste vrai sans hypothèse de régularité sur F.

Exercice 3

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient f et g des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

1. On suppose que $f\,(z) + \overline{g\,(z)}$ est réel pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = g + c$.
2. On suppose que g ne s'annule pas et que $f\,(z)\,\overline{g\,(z)}$ est réel pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = cg$.

Exercice 4

Soit m un entier naturel non-nul. Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions sommes de séries entières sur le disque unité. On suppose que $|f_1|^2 + \dots + |f_m|^2$ est constante sur le disque unité. Que peut-on dire de $f_1, \dots, f_m$?

Exercice 5

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur U tel que pour tout $z \in U$, un des coefficients du développement en série entière de f en z s'annule. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 6

Soit f une fonction somme sur $\mathbb{C}$ d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Pour tout $r \geq 0$ on note

$$M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)| \text{ et } A(r) = \sup_{|z| \leq r} \Re(f(z)). \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \Re\left(f\left(re^{i\theta}\right)\right) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta.$$

2. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $r > 0$ on a $|a_n| \leq \frac{2A(r)}{r^n}$. En déduire que pour tous $R > r > 0$ on

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R).$$

3. En déduire que, dans le cas général, on a pour tous $R > r > 0$

$$M(r) \leq \frac{R+r}{R-r} |f(0)| + \frac{2r}{R-r} A(R).$$

Il s'agit du *lemme de la partie réelle.*.

Exercice 7

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité. On suppose qu'il existe $r \in]0,1[$ tel que f est bornée par M sur $\partial\mathbb{D}(0,r)$ et qu'il existe $a \in \mathbb{D}(0,r)$ tel que $f(a) = 0$. Montrer que

$$|a| \geq \frac{|f(0)|}{M + |f(0)|} r.$$

Exercice 8

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et X un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On note $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot engendré par X et on suppose que X est complet (ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application φ_t est un difféomorphisme de U sur lui-même). Montrer que φ_t est holomorphe pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si X, vu comme une application de U dans $\mathbb{C}$, est holomorphe. En déduire qu'un tel flot n'a pas de *cycle limite*, c'est-à-dire d'orbite périodique isolée non-réduite à un point.

Exercice 9

Montrer que les champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ irrotationnels sur le disque unité ouvert sont exactements les gradients de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Quels sont les champs de vecteurs de divergence nulle sur ce même disque ?

Exercice 10

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et X un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On note $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot engendré par X et on suppose que X est complet (ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application φ_t est un difféomorphisme de U sur lui-même). Montrer que X est de divergence nulle si et seulement si $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ préserve l'aire (i.e. pour tout borélien E de U et tout $t \in \mathbb{R}$, la mesure de Lebesgue de E est la même que celle de $\varphi_t(E)$).

Exercice 11

Soit λ un nombre complexe non-nul. On considère une série entière

$$F(z) = \lambda z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n.$$

Montrer que si λ n'est pas une racine de l'unité alors il existe une série entière $\psi(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n$ telle que $b_1 \neq 0$ et $F(\psi(z)) = \psi(\lambda z)$. On dit que F est formellement conjuguée à son modèle linéaire $z \mapsto \lambda z$. Montrer que si le rayon de convergece de F est non-nul et $|\lambda| < 1$ alors on peut choisir ψ avec un rayon de convergence non-nul.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.. Montrer qu'il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{C} \to C$ à support compact et $\mathcal{C}^\infty$ telle que la restriction de $\tilde{f}$ à $\mathbb{R}$ est f et pour tout $N \geq 0$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait

$$\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(z)\right| \leq C_N \left|\operatorname{Im} z\right|^N.$$

On dit que $\tilde{f}$ est une extension presque analytique pour f.