Géométrie Différentielle, TD 1 du 8 Février 2019

1. Propriétés de base des variétés

1– Montrer que la réunion disjointe de deux variétés (de classe C^k) admet une structure naturelle de variété (de classe C^k).

2– Montrer qu'un ouvert / une composante connexe d'une variété (de classe C^k) admet une structure naturelle de variété (de classe C^k).

3– Montrer qu'une variété topologique connexe est de dimension constante et connexe par arcs.

4– Montrer qu'une variété topologique se plonge (au sens topologique) dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (et est donc métrisable).

Solution :

1– Soit M et N deux variétés d'atlas de classe C^k $\mathcal{A}_M = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, $\mathcal{A}_N = (V_j, \psi_j)_{j\in J}$. La famille $(U_i, \varphi_i)_{i\in I} \cup (V_j, \psi_j)_{j\in J}$ definit un atlas C^k sur l'ensemble $M \amalg N$, induisant une topologie séparée, dénombrable à l infinie. On munit $M \amalg N$ de l'atlas C^k maximal contenant $(U_i, \varphi_i)_{i\in I} \cup (V_j, \psi_j)_{j\in J}$.

2– Soit M une variété C^k d'atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$, et soit V un ouvert de M. Alors l'atlas restreint $(U_\alpha \cap V, \varphi_{\alpha|U_\alpha\cap V})_\alpha$ sur V en fait une variété C^k.

Comme M est localement connexe, ses composantes connexes sont ouvertes et donc sont des variétés C^k en procédant comme dans le paragraphe précédent.

3– Soit M une variété topologique et $x_0 \in M$. Soit n la dimension de M en x_0, et soit $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^{n_0})$ une carte de M au voisinage de x. Alors étant donné $y \in U$, $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^{n_0})$ est une carte de M au voisinage de y et donc la dimension de M en y est n_0.

Cela signifie que la fonction $x \mapsto \dim_x M$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est localement constante. Par connexité, elle est constante.

Une variété différentielle localement connexe par arcs (car localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$), donc toute variété connexe est connexe par arcs.

4– Soit M une variété topologique. On se donne $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de M. On peut supposer que chaque adhérence $\overline{U_i}$ s'écrit comme image réciproque d'une boule fermée par une carte de M. Cela permet de définir une famille de fonctions continues $\varphi_i : M \to [0,1]$ telles que $\{\varphi_i > 0\} = U_i$. On pose alors $\Phi : M \to [0,1]^{\mathbb{N}}, x \mapsto (\varphi_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$. L'application Φ est injective car M est séparée. Elle est continue car les φ_i sont continues. Il reste à prouver que $\Phi : M \to \Phi(M)$ est ouverte. Comme tout ouvert de M est réunion de U_i, il suffit de montrer que pour tout i on a $\Phi(U_i)$ ouvert dans $\Phi(M)$. Or $\Phi(U_i) = \Phi(M) \cap \{u \in [0,1]^{\mathbb{N}}, u_i > 0\}$ ce qui conclut.

2. Espace projectif

L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$. On va le munir d'une structure de variété de dimension n. Chaque point $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ définit une droite (celle qui le contient), notée $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$. Ainsi, $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] = [x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_n] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\star, (x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$.

Pour $i = 0, \ldots, n$, on note $U_i := \{x \in \mathbb{RP}^n,\ x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \text{ avec } x_i \neq 0\}$. On définit des fonctions $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ par

$$f_i([x_0 : \ldots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Montrer que les f_i sont des bijections et qu'elles munissent $\mathbb{RP}^n$ d'une structure de variété C^∞ (et même analytique) compacte de dimension n.

Solution :

Tout élément $x \in U_i$ admet une unique écriture sous la forme $x = [x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n]$. Ainsi, $U_i \equiv \mathbb{R}^n$ et l'application f_i est justement l'application réalisant cette identification, d'où la bijectivité. Le changement de carte $f_1 \circ f_0^{-1} : \{y \in \mathbb{R}^n,\ y_1 \neq 0\} \to \{y \in \mathbb{R}^n,\ y_1 \neq 0\}$ est donné par $f_1 \circ f_0^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1})$ qui est un difféomorphisme C^∞ (et même analytique). Idem pour les autres cartes. Ainsi la donnée $(U_i, f_i)_{i=0,\ldots,n}$ définit un atlas C^∞ sur $\mathbb{RP}^n$. Comme il est fini, la topologie induite est à base dénombrable. Pour la séparation, donnons nous deux points $x, x' \in \mathbb{RP}^n$ et $v \in x - \{0\}$, $v' \in x' - \{0\}$. On a $x \neq x' \iff (v, v')$ est une famille libre. Il existe $V, V' \subseteq \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ des voisinages ouverts de v et v' tels que pour tout $w \in V$, $w' \in V'$, on a (w, w') libre. On pose alors U, U' les projetés de V et V' dans $\mathbb{RP}^n$. Ce sont des ouverts disjoints qui contiennent respectivement x et x'. Enfin, pour la compacité, on remarque que la projection $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ est continue et que la restriction à la sphère (qui est compacte) est surjective. Ainsi $\mathbb{RP}^n$ est compact comme image d'un compact par une application continue (à valeurs dans un espace séparé).

3. Surfaces classiques

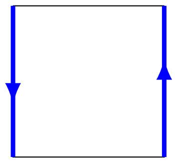
Munir les espaces topologiques suivant d'une structure de variété :

1– Le ruban de Möbius : $[0,1] \times]0,1[\ /_{(0,y) \sim (1,1-y)}$.

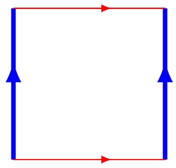
2– Le tore : $[0,1] \times [0,1]\ / \begin{smallmatrix} (0,y) \sim (1,y) \\ (x,0) \sim (x,1) \end{smallmatrix}$.

3– Le plan projectif : $[0,1] \times [0,1]\ / \begin{smallmatrix} (0,y) \sim (1,1-y) \\ (x,0) \sim (1-x,1) \end{smallmatrix}$.

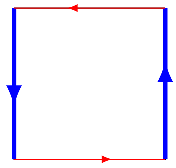
4– La bouteille de Klein : $[0,1] \times [0,1]\ / \begin{smallmatrix} (0,y) \sim (1,1-y) \\ (x,0) \sim (x,1) \end{smallmatrix}$.



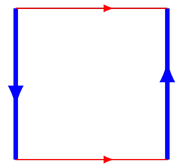
Ruban de Möbius



Tore



Plan projectif



Bouteille de Klein

Solution :

1– On considère les cartes suivantes :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[\times]0,1[\subset M & \longrightarrow &]0,1[\times]0,1[\\ (x,y) & \mapsto & (x,y) \end{array} \right. \qquad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1]\times]0,1[\subset M & \longrightarrow &]0,1[\times]0,1[\\ (x,y)\in[0,\frac{1}{2}[\times]0,1[& \mapsto & (x,y) \\ (x,y)\in]\frac{1}{2},1]\times]0,1[& \mapsto & (x,1-y) \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que φ et ψ sont des homéomorphismes. Leurs domaines de définition sont bien des ouverts de M et forment un recouvrement de M. Il reste à montrer que $\psi\circ\varphi^{-1}$ est un difféomorphisme sur son domaine de définition. Or

$$\varphi\circ\psi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[\times]0,1[\subset M & \longrightarrow &]0,1[\times]0,1[\\ (x,y)\in]0,\frac{1}{2}[\times]0,1[& \mapsto & (x,y) \\ (x,y)\in]\frac{1}{2},1]\times]0,1[& \mapsto & (x,1-y) \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme sur les ouverts $]0,\frac{1}{2}[\times]0,1[$ et $]\frac{1}{2},1]\times]0,1[$, donc c'est un difféomorphisme (la bijectivité est déjà acquise).

Les autres cas sont similaires (bien que plus fastidieux).

4. Somme connexe de deux variétés

Soient M_1 et M_2 deux variétés de dimension n, et(U_1,φ_1) (resp. (U_2,φ_2)) une carte de M_1 (resp. M_2) telle que φ_i soit un difféomorphisme de U_i sur la boule ouverte $B(0,2)$ ($\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne standard). Soit C la couronne $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2}<\|x\|<2\}$.

1– Montrer que $f : x\mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est un difféomorphisme de C.

2– On considère l'espace topologique X obtenu à partir de la réunion disjointe

$$M_1\setminus\varphi_1^{-1}(\overline{B(0,1/2)})\amalg M_2\setminus\varphi_2^{-1}(\overline{B(0,1/2)})$$

en identifiant $\varphi_1^{-1}(C)$ et $\varphi_2^{-1}(C)$ via le difféomorphisme $\varphi_2\circ f\circ\varphi_1^{-1}$.

Montrer qu'il existe une (unique) structure de variété sur X telle que les projections $M_i\setminus\varphi_i^{-1}(\overline{B(0,1/2)})\hookrightarrow X$ soient des difféomorphismes sur leurs images dans X. L'espace X muni de cette structure de variété est la *somme connexe* de M_1 et M_2, notée $M_1\#M_2$.

3– Si $n\geqslant 2$, montrer que $M_1\#M_2$ est connexe si et seulement si M_1 et M_2 sont connexes.

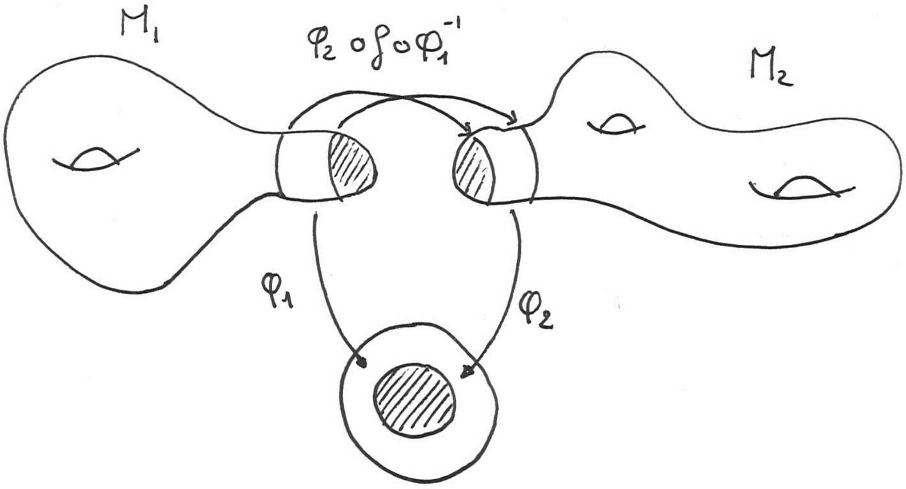
4– Montrer que $M\#S^n$ est difféomorphe à M.

5– Montrer que la somme connexe de deux plans projectifs $\mathbb{RP}^2$ est une bouteille de Klein.

Remarque : toute surface connexe compacte est difféomorphe à la sphère, à la somme connexe de k tores, ou à la somme connexe de k plans projectifs.

Solution :

1– L'application f est une involution (donc bijective), continue et différentiable (immédiat avec l'expression en coordonnées), donc c'est un difféomorphisme de C.



2– Prouvons d'abord l'unicité d'une telle structure. On notera $M_i' := M_i \backslash \varphi_i^{-1}(\overline{B(0,1/2)})$, $i = 1, 2$. Soit $\pi : M_1' \amalg M_2' \to M_1 \sharp M_2$ la projection quotient. On se donne deux structures de variétés $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sur $M_1 \sharp M_2$ telles que les $\pi(M_i') \subseteq M_1 \sharp M_2$ sont ouverts et $\pi : M_i' \to \pi(M_i')$ est un difféomorphisme. L'unicité à démontrer signifie que $Id : (M_1 \sharp M_2, \mathcal{A}) \to (M_1 \sharp M_2, \mathcal{A}')$ est un difféomorphisme. Par symétrie, il suffit de montrer que c'est une application C^∞. Sur $\pi(M_1')$, Id coïncide avec

$$(\pi(M_1'), \mathcal{A}) \underset{\pi^{-1}_{|M_1'}}{\to} M_1' \underset{\pi}{\to} (\pi(M_1'), \mathcal{A}')$$

où M_1' est muni de la structure de variété induite par M_1. Ainsi Id est bien C^∞ comme composée de fonctions C^∞, d'où l'unicité.

Construisons maintenant une structure qui convient. On identifie M_i' avec $\pi(M_i')$ ce qui permet de voir $M_i' \subseteq M_1 \sharp M_2$ avec $M_1 \sharp M_2 = M_1' \cup M_2'$. On a un atlas $\mathcal{A}_{M_1'}$ sur M_1' induit par la M_1 et idem pour M_2'. On pose $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{M_1'} \cup \mathcal{A}_{M_2'}$ qui est un ensemble de cartes recouvrant $M_1\sharp M_2$. On doit vérifier que ces cartes sont compatibles au niveau du recollement $C' := M_1' \cap M_2'$. Pour cela, il suffit de le vérifier pour un certain recouvrement de C' par des cartes de $\mathcal{A}_{M_1'}$ et des cartes $\mathcal{A}_{M_2'}$. On pose $C := B(0,2) - \overline{B(0,1/2)}$. On peut restreindre la carte φ_1 sur M_1 en une carte $\varphi_1 : C' \to C$, de même on a une carte $\varphi_2 : C' \to C$. La composée vérifie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = f_{|C}$ qui est bien un difféomorphisme de C. D'où la compatibilité des cartes.

Remarque : On pourrait vouloir détailler la preuve l'égalité $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = f_{|C}$. Pour cela, on constate que par définition, chaque point $x \in C'$ est formellement une paire $\{x_1, x_2\}$ où $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$ sont identifiés par le recollement. Plus précisément, x est de la forme $x = \{\varphi_1^{-1}(z), \varphi_2^{-1}(f(z))\}$ où $z \in C$. La carte φ_1 vu sur $M_1\sharp M_2$ consiste donc à envoyer x sur z, et la carte φ_2 à envoyer x sur $f(z)$. Ainsi la transition est bien f.

3– Si M ou N n'est pas connexe, il est immédiat que $M\#N$ n'est pas connexe.

Supposons M et N connexes.

Montrons que $M\setminus\varphi^{-1}(B(0,1))$ est connexe. Soit $f : M\setminus\varphi^{-1}(B(0,1)) \to \{0,1\}$ continue. Par connexité de S^{n-1}, f est constante sur $\varphi^{-1}(S^{n-1})$. On peut donc prolonger f en une application continue de M sur $\{0,1\}$. Par connexité de M, ce prolongement de f est constant, donc f est constante. Cela montre que $M \setminus \varphi^{-1}(B(0,1))$ est connexe. De même, $N \setminus \psi^{-1}(B(0,1))$ est connexe.

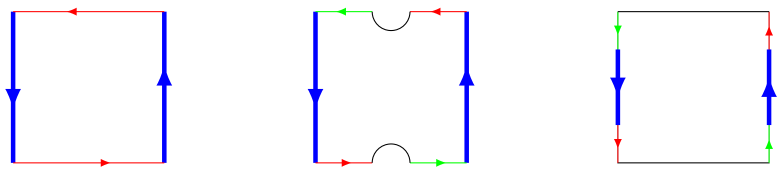
Soit $d : M\#N \to \{0,1\}$ continue. Par connexité, d est constante sur $M\setminus\varphi^{-1}(B(0,1)) \to \{0,1\}$ et $N \setminus \psi^{-1}(B(0,1))$. Par identification des bords, on en déduit que d est constante et donc que $M\#N$ est connexe.

4– On munit la sphère S^n des cartes φ_2 et ψ_2 données par les projections stéréographiques. On remarque alors que $S^n \setminus \varphi_2^{-1}(\overline{B(0,2)}) = \psi_2^{-1}(B(0,2))$. Quitte à multiplier ces cartes par des scalaires, on peut supposer $S^n \setminus \varphi_2^{-1}(\overline{B(0,1/2)}) = \psi_2^{-1}(B(0,1/2))$.

On considère alors l'application :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} M & \to & M\#S^n \\ x \in M \setminus \varphi_1^{-1}(B(0,1/2)) & \mapsto & \pi(x) \\ x \in \varphi_1^{-1}(B(0,1/2)) & \mapsto & \pi(\psi_2^{-1}(\varphi_1(x))) \end{array} \right.$$

5– On remarque qu'un plan projectif privé d'une petite boule est difféomorphe à un ruban de Möbius avec bord :



Plan projectif   Plan projectif troué =   Ruban de Möbius

En recollant deux rubans de Möbius sur leurs bords noirs on obtient une bouteille de Klein (il faut remarquer qu'un ruban de Mobius a un seul bord, et non pas deux !) : faire un dessin !

5. Grassmanniennes

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 0$. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension k. Par exemple, si $V = \mathbb{R}^{n+1}$ et $k = 1$, on retrouve l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ de l'exercice 2. L'objet de cet exercice est de généraliser l'exercice 2 en munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété C^∞ compacte.

Soit B est un sous-espace vectoriel de V dimension $n-k$. On veut construire à partir de B une carte de $\mathcal{G}_k(V)$ dont le domaine est l'ensemble des sous-espaces vectoriels supplémentaires de B, noté U_B. Soit A un supplémentaire de B. On note $\mathcal{L}(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B. On définit

$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A,B) &\to U_B \\ f &\mapsto (\mathrm{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.

2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A, B)$ et de $\mathcal{L}(A', B')$. Montrer que $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ est un C^∞-difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.

3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.

4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas faisant de $\mathcal{G}_k(V)$ une variété C^∞.

5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.

Solution :

1– L'application $\psi_{A,B}$ associe à $f : A \to B$ son graphe dans $V = A \oplus B$. La projection π_A sur A parallèlement à B réalise un isomorphisme entre le graphe et A : celui-ci est bien de dimension k. D'autre part, son intersection avec B est $\{0\}$, de sorte que $(\mathrm{Id} + f)(A) \in U_B$ et que $\psi_{A,B}$ est bien définie.

Comme une fonction est déterminée par son graphe, $\psi_{A,B}$ est injective.

Enfin, soit $C \in U_B$. Comme $C \cap B = \{0\}$, la projection $\pi_A|_C : C \to A$ sur A parallèlement à B est injective, donc un isomorphisme par dimension. Notant π_B la projection sur B parallèlement à A, on vérifie aisément que C est le graphe de $\pi_B \circ (\pi_A|_C)^{-1} : A \to B$. Ceci montre la surjectivité de $\psi_{A,B}$.

2– Le domaine de définition W de $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ est l'ensemble des $f : A \to B$ dont le graphe est un supplémentaire de B'. Si (a_i) et (b'_j) sont des bases de A et B', cette condition s'écrit $\det((a_i, f(a_i)), b'_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui montre que W est ouvert. On montre de même que l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A', B')$.

Il suffit pour conclure de montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine de définition W : en effet, le même raisonnement montrera que sa réciproque est $\mathcal{C}^\infty$, donc que c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Pour cela, fixons $x \in A'$ et montrons que $y = \psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}(f)(x)$ dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de $f \in W$. Or y est l'unique solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\pi_{A'}(y) = 0$$
$$\pi_B(x + y) = f(\pi_A(x + y))$$

Les formules de Cramer montrent alors que y dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ des coefficients de ce système, donc de f.

3– On prend pour ouverts les $U \subset \mathcal{G}_k(V)$ tels que pour tout $A \in \mathcal{G}_k(V)$ et pour tout supplémentaire B de A, $\psi^{-1}_{A,B}(U \cap U_B)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Cela définit bien une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$.

Comme les $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des homéomorphismes, on vérifie que les ouverts inclus dans U_B sont exactement les sous-ensembles de la forme $\psi_{A,B}(V)$ pour V ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Ainsi, U_B est ouvert et $\psi_{A,B}$ est un homéomorphisme.

Soit $A, A' \in \mathcal{G}_k(V)$. On peut trouver un supplémentaire commun B à A et A' de sorte que $A, A' \in U_B$. Comme U_B est séparé, on peut trouver deux ouverts de U_B séparant A et A'. $\mathcal{G}_k(V)$ est donc bien séparé.

4– C'est une conséquence immédiate des deux questions précédentes.

5– On introduit E l'ouvert de V^k constitué des familles libres et $g : E \to \mathcal{G}_k(V)$ l'application qui associe à une famille libre l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrons que g est continue. Vu la définition de la topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$, il suffit de montrer que $V_B = g^{-1}(U_B)$ est ouvert et que $g|_{V_B} : V_B \to U_B$ est continue.

Pour le premier point, choisissons une base (b_j) de B. Alors $(v_i) \in E$ appartient à V_B si et seulement si $\det(v_i, b_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui est bien une condition ouverte.

Pour le second point, il suffit de montrer que $\psi^{-1}_{A,B} \circ g|_{V_B}$ est continue. Fixons $x \in A$ et soit $(v_i) \in V_B$. Alors $\psi^{-1}_{A,B} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ est l'unique solution en y du système d'équations linéaires à $n + k$ équations et $n + k$ inconnues y et λ_i suivant :

$$\pi_A(y) = 0$$
$$x + y = \sum_i \lambda_i v_i$$

Les formules de Cramer montrent alors que $\psi^{-1}_{A,B} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ dépend de manière continue des coefficients de ce système, donc des v_i. Cela montre la continuité de g.

On peut alors conclure. Fixons un produit scalaire sur V. Si K est l'ensemble des familles orthonormales, K est compact car fermé borné dans V^k et $\mathcal{G}_k(V) = g(K)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.