Задача 1. 1. Играч хвърля 3 честни монети и 3 стандартни зара. За всяко ези получава по 1 лв, а за всяка 6-ца, по 3 лв. Колко е очакваната му печалба?

2. Играч хвърля зар, докато сумата от падналите се числа се дели на 6. Ако това се случи на k-ти ход, той печели k лв. Каква е очакваната му печалба?

3. Нека X има разпределение върху $0, 1, 2, \ldots$, така че, за $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = k-1)} = \frac{3}{k}.$$

Намерете очакването и дисперсията на X.

4. Нека броят посетителите на стадион за даден ден е $Y \sim Poi(\lambda)$. Стадионът разполага с 10 входа $E_1, \ldots, E_{10}$ и всеки посетител избира с равна вероятност кой да е от тях. Какво е разпределението, очакването и дисперсията на посетителите, влезли през вход E_1?

Задача 2. $n > 2$ човека хвърлят честна монета. Победител е този, който хвърли обратното на всички други. Ако такъв няма, играчите хвърлят отново. Нека X е броят кръгове до излъчването на победител. Какво е очакването и дисперсията на X?

Да предположим, че след излъчването на първи победител, играта продължава докато останат двама играчи. Колко е броят на очакваните ходове? Ако k-тият победител печели $100(n-k)$, колко бихте платили, за да участвате в тази игра?

Задача 3. Нека съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x, y) = cx + y$ за $x, y \geq 0, x + 2y \leq 1$ и 0 извън тази област, където c е някаква константа.

1. (0.25 т.) Намерете c, плътността на X и очакването на Y.

2. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}(Y|X = 1/2)$.

3. (0.25 т.) Намерете плътностите на случайните величини $Z = X + 2Y$ и $Z = XY$.

4. (0.25 т.) Нека $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ са независими и еднакво разпределени като (X, Y). Оценете вероятността $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > Y_1 + \cdots + Y_n)$ за големи n.