

Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.  
Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Задача 1.** (1 т.) Урна съдържа топки с номера от 1 до 10 включително. От нея се вадят 3 топки без връщане. Да дефинираме събитията, свързани с извадените топки:

1.  $A$  = "най-големият номер е 6";
2.  $B$  = "има поне две топки с четен номер";
3.  $C$  = "сумата от номерата се дели на 3".

Да се определят вероятностите на горните събития и има ли независими между тях. На колко е равно  $\mathbb{P}(A|B)$ ? Колко е очакваният брой на изтеглените четни номера, ако тегленето е с връщане?

• Нека  $c = \binom{10}{3} = 120$ . Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{5}{2}}{c} = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\binom{5}{3} + 5\binom{5}{2}}{c} = \frac{1}{2}.$$

За  $\mathbb{P}(C)$ , може или да изброите директно комбинациите, или да забележите, че възможните комбинации по mod 3 са три равни числа или 0 + 1 + 2. Следователно

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot \binom{3}{3} + \binom{4}{3}}{c} = \frac{7}{20}.$$

Пресмятаме/изброяваме директно

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{1} \cdot 2}{c} = \frac{7}{120}, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3}{120}, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{21}{120}.$$

Независими няма, а

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{7}{60}.$$

Ако топките се връщат, изтеглените топки с четни номера следват закона  $Bin(3, 1/2)$  и следователно търсеното очакване е  $3/2$ .

**Задача 2.** (1 т.) Два инструмента се използват за измерването на прахови частици във въздуха. Да допуснем, че реалното количество е  $x \text{ g/m}^3$ . В такъв случай, първият дава показание, което е с нормално разпределение със средно  $x$  и стандартно отклонение ( $\sigma$ )  $0.05x$ , а резултатът от втория също е с нормално разпределение със средно  $x$ , но със стандартно отклонение  $0.1x$ . Кой апарат бихте използвали? Колко е вероятността за всеки от апаратите да допусне грешка, която е повече от  $0.1x$ ?

Човек решава да използва средното аритметично от двата апарата. Ако измерванията им са независими, каква е вероятността за грешка над  $0.1x$  при тази процедура?

• За предпочитане е апаратът с по-малка дисперсия. Нека измерванията на първия и втория апарат са съответно  $\xi_1 \sim N(x, (0.05x)^2)$  и  $\xi_2 \sim N(x, (0.1x)^2)$ . Тогава търсените вероятности са равни на

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\xi_1 - x| > 0.1x) &= \mathbb{P}(\xi_1 < 0.9x) + \mathbb{P}(\xi_1 > 1.1x) = 2\mathbb{P}(\xi_1 < 0.9x) \\ &= 2\mathbb{P}\left(N(0, 1) < \frac{0.9x - x}{0.1x}\right) = 2\mathbb{P}(N(0, 1) < -1) \\ &\approx 0.3174. \end{aligned}$$

и аналогично

$$\mathbb{P}(|\xi_2 - x| > 0.1x) = 2\mathbb{P}(N(0, 1) < -2) \approx 0.0540.$$

Ако дефинираме  $\xi_3 = 1/2(\xi_1 + \xi_2)$ , то  $\xi_3 \sim N(x, 1/4(0.05^2 + 0.1^2)x^2)$  и

$$\mathbb{P}(|\xi_3 - x| > 0.1x) = 2\mathbb{P}\left(N(0, 1) < \frac{-0.1x}{\sqrt{1/4(0.05^2 + 0.1^2)x^2}}\right) \approx 2\mathbb{P}(N(0, 1) < -1.79) \approx 0.0734.$$

**Задача 3.** (1 т.) Нека  $\xi$  и  $\eta$  са независими случайни величини,  $\xi \sim Exp(2)$  и  $\eta \sim U(0, 3)$ , т.е.

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , \text{ако } x > 0 \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}; \quad f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \text{ако } 0 < x < 3 \\ 0 & , \text{иначе.} \end{cases}$$

Намерете корелация на  $\xi$  и  $\eta$ ,  $P(\xi < \eta)$  и плътността на  $\xi/\eta$ .

•

Корелацията е 0, т.к.  $\xi$  и  $\eta$  са независими. Разглеждайки  $0 < \eta < 3$  и  $0 < \xi < \eta$ , получаваме

$$\mathbb{P}(\xi < \eta) = \int_0^3 \int_0^y 2e^{-2x} \cdot \frac{1}{3} dx dy = \frac{1}{6} \left( 5 + \frac{1}{e^6} \right) \approx 0.8334.$$

да отбележим, че от независимостта,  $f_{\xi, \eta}(x, y) = 2/3 \cdot e^{-2x} \mathbb{1}_{x>0, 0<y<3}$ . Дефинираме  $X = \xi/\eta$  и  $Y = \eta$ . Тогава обратната трансформация е  $\xi = XY$  и  $\eta = Y$  и якобианът ѝ е равен на  $Y$ . Следователно

$$f_{X,Y}(x, y) = y f_{\xi, \eta}(xy, y) = y \frac{2}{3} e^{-2xy} \mathbb{1}_{xy>0, 0<y<3}.$$

Следователно за  $x > 0$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \frac{2}{3} \int_0^3 y e^{-2xy} dy = \frac{1}{6x^2} \int_0^3 -2xy \cdot e^{-2xy} d(-2xy) \\ &= \frac{1}{6x^2} \int_0^{-6x} t \cdot e^t dt = \frac{e^{-6x}(-6x-1) + 1}{6x^2}, \end{aligned}$$

което и търсехме. Възможно е чрез последния резултат да пресметнете по друг начин и търсената по-рано вероятност:

$$\mathbb{P}(\xi < \eta) = \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < 1\right) = \int_0^1 f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{-6x}(-6x-1) + 1}{6x^2} dx$$

**Задача 4.** (1 т.) Нека  $\xi$  и  $\eta$  са случайни величини със съвместна плътност

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} cx^3 y^2 & , \text{ако } 0 < x, y < 2 \\ 0 & , \text{иначе.} \end{cases}$$

Намерете константата  $c$ , корелацията на  $\xi$  и  $\eta$ , както и  $\mathbb{E}(\xi|\eta=1)$ .

•

$$1 = c \int_0^2 \int_0^2 x^3 y^2 dx dy = c \frac{32}{3}.$$

Следователно  $c = 3/32 = 0.09375$ . За  $x \in (0, 2)$

$$f_{\xi}(x) = \int_0^2 cx^3 y^2 dy = cx^3 \frac{8}{3} = \frac{1}{4} x^3.$$

Следователно

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{4} \int_0^2 x^4 dx = \frac{8}{5} = 1.6, \quad D\xi = \frac{1}{4} \int_0^2 x^5 dx - \frac{64}{25} = \frac{8}{75} \approx 0.1067.$$

Аналогично, за  $y \in (0, 2)$

$$f_{\eta}(y) = c \int_0^2 x^3 y^2 dx = \frac{3}{8} y^2,$$

$$\mathbb{E}\eta = \frac{3}{8} \int_0^2 y^3 dy = \frac{3}{2} = 1.5, \quad D\eta = \frac{3}{8} \int_0^2 y^4 dy - \frac{9}{4} = \frac{3}{20} = 0.15.$$

След това

$$\mathbb{E}\xi\eta = \frac{3}{32} \int_0^2 \int_0^2 xy(x^3 y^2) dx dy = \frac{12}{5} = 2.4$$

Следователно

$$Cor(\xi, \eta) = \frac{\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta}{\sqrt{D\xi D\eta}} = 0.$$

За последния въпрос

$$\mathbb{E}(\xi|\eta=0.5) = \int_0^2 x f_{\xi|\eta}(x|y=1) dx = \int_0^2 x \frac{f_{\xi, \eta}(x, 1)}{f_{\eta}(1)} dx = \int_0^2 x \frac{x^3}{4} dx = \frac{8}{5} = 1.6.$$