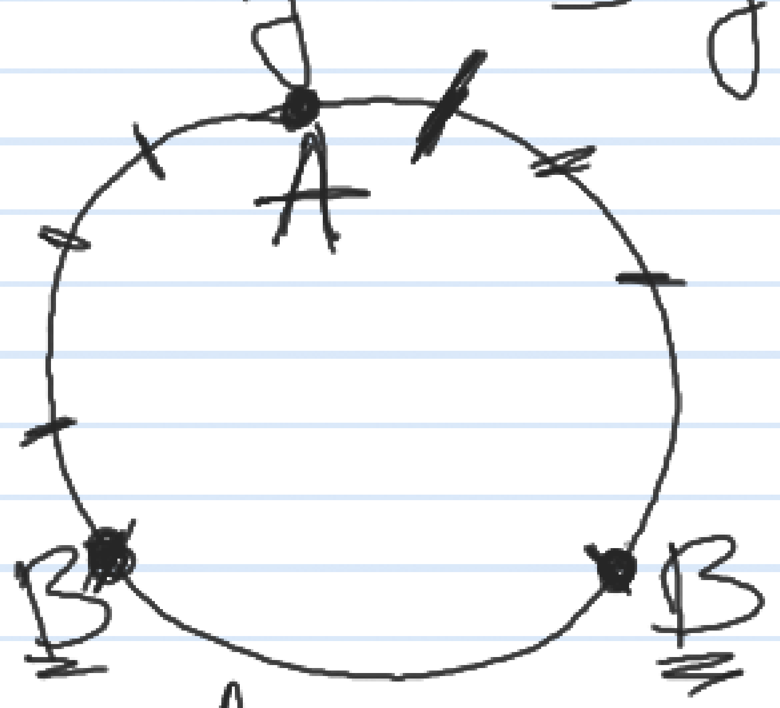
Зад. 3 n човека в кръг, A и B са хора от тях ; $r < \frac{n}{2} - 2$

P(м/у A и B да има r човека) $= ?$

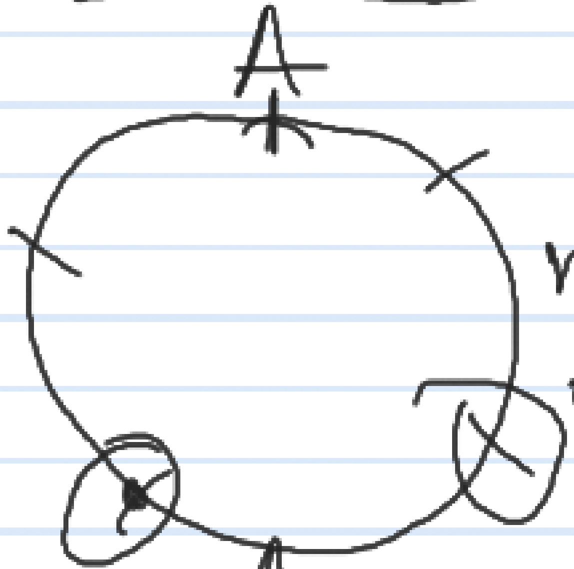
$r \geq 1 \Rightarrow \frac{n}{2} - 2 \geq 1$

$\boxed{n \geq 6}$



$$= \frac{2 \cdot \overset{\text{всички без } A \text{ и } B}{(n-2)}(n-3)\cdots 1}{(n-1)!} = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!}$$

$$= \frac{2}{n-1}$$



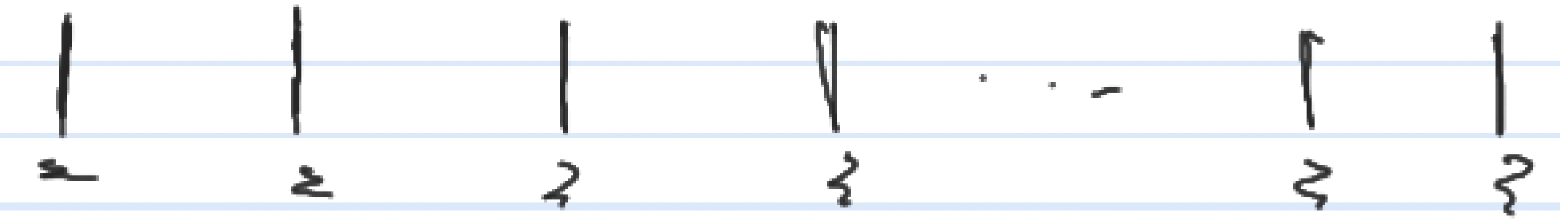
$n = 5$

r е max 1

$n = 6$

r е max 1

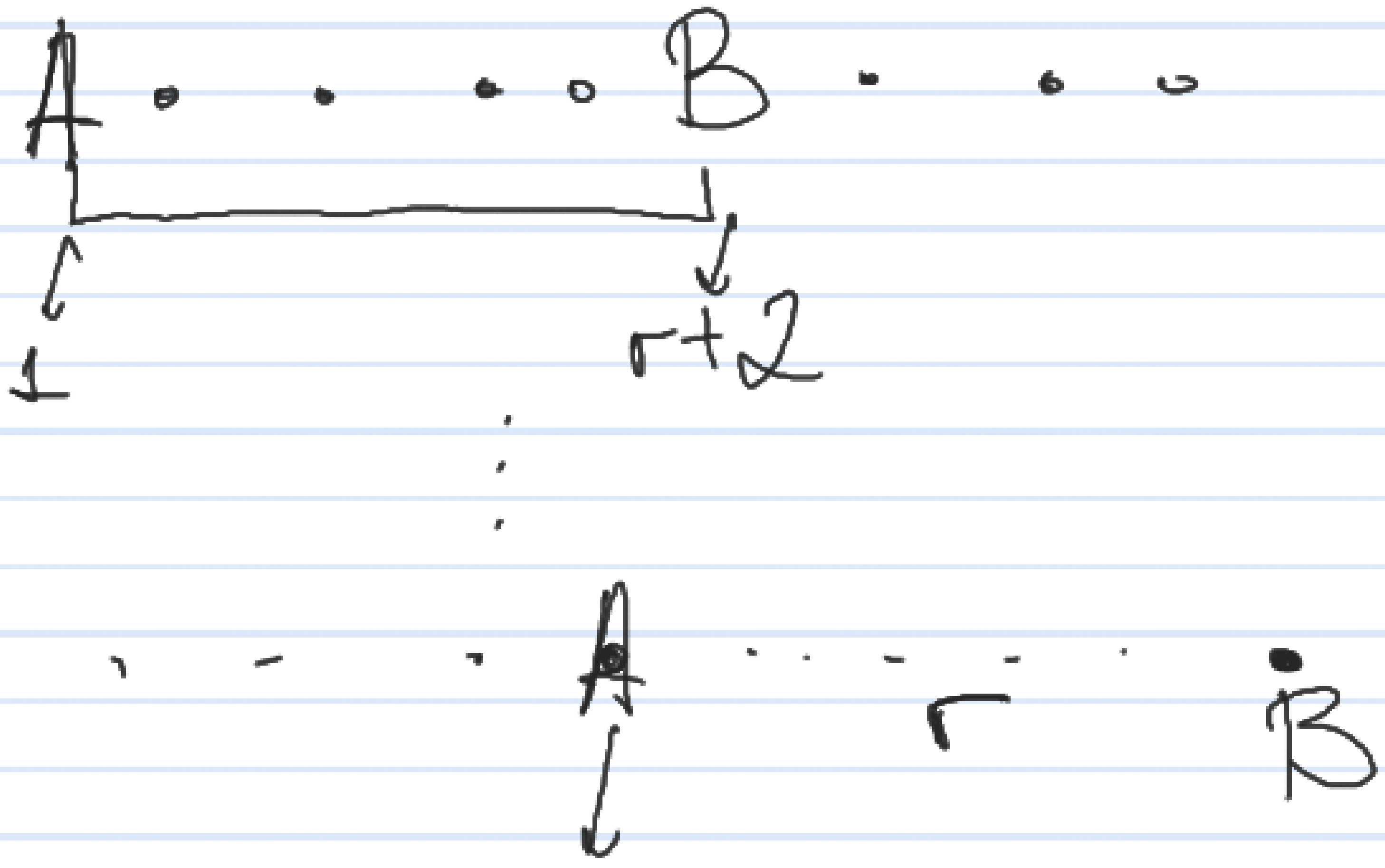
б)



A и B да има r човека

всички наредби са $n!$

$$\underline{0 \le r \le n-1}$$



$n-r-1$

$n-r-1$ възм

$+\ n-r-1$, ако B е отляво A е отдясно

$$\Rightarrow \text{отговор} = \frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – вероятностно п-во

$\Omega = \{$елементарни събития (изходи)$\}$

$\mathcal{A} = \{$комбинации от изходи$\} \subseteq 2^{\Omega}$

→ събития

$\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(σ-адитивност)

Ези / тура – два пъти

$\Omega = \{(E,T), (E,E), (T,E), (T,T)\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$= \{\emptyset, \{(E,E)\}, \{(E,T)\}, \dots$

„паднали са 2 ези“

$\{(E,T),(E,E)\}, \dots$

$\{(E,T),(T,E),(T,T)\}, \dots$

„паднало се е поне 1 тура“

$\}$ $|\mathcal{A}| = 2^4 = 16$

* Ако теглим карта

$\Omega = \{2\diamondsuit, 3\diamondsuit, \dots, A\diamondsuit, \dots \}$ – 52 ел.

$A \in \mathcal{A}$, $A =$ „изтеглили сме каро"
= {всички м-ва, в които има поне 1 каро}

Ако Ω е крайно, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ $\quad |\mathcal{A}| = 2^{52}$

$\to \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$

$A, \overline{A}$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\Omega, \emptyset$

$$\mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$1 + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Зад. 5 Урна с топки $1, 2, \dots, n$ и теглим последователно k

$\mathbb{P}$(да теглим в $\uparrow$ ред) $= ?$

а) без връщане

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in \mathbb{N} \text{ и } 1 \le a_i \le n, \ a_i \text{ са различни}\}$$

$$|\Omega| = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_1 < a_2 < \dots < a_k, \ 1 \le a_i \le n, \ a_i \in \mathbb{N}\}$$

$$|A| = \binom{n}{k}$$

$n = 4$; $1, 2, 3, 4$

$k = 3$; $\{1, 3, 4\}$

точно 1 наредба $\uparrow$

$(1, 3, 4)$

$\boxed{(1, 3, 4)}$, $(1, 4, 3)$, $(3, 1, 4)$

$(3, 4, 1)$, $(4, 1, 3)$, $(4, 3, 1)$

$$\Rightarrow \text{отг. } \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{1}{k!}$$

б) с връщане $n=4$

$k=3 \Rightarrow 1,1,2$

$$\Omega = \{(a_1,\dots,a_k) \mid \forall i\in[1,k]: a_i \in [1,n], a_i\in \mathbb{N}\} \Rightarrow |\Omega| = n^k$$

$$A = \{(a_1,\dots,a_k) \mid a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k\}$$

$|A| = ?$ $\quad x_1+\dots+x_n = k$ в $\mathbb{N}_0$

$n=4$, $k=3 \rightarrow$ 1,1,1 , 2,2,4

1,1,2 ,

$1+2+0+0 \longleftrightarrow$ 1,2,2 , . . .

$\updownarrow$

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$

#1-ци #2-ки . . .

$$\Rightarrow |A| = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

$$\Rightarrow \text{отг. е } \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n+k-1}{k}}{n^k}$$

зад. 6 10 зара

$p = \mathbb{P}(\#1\text{-ци} = \#6\text{-ци}) = ?$

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_{10}) \mid a_i \in \{1, \dots, 6\}\}$

$|\Omega| = 6^{10}$

$\square_{i_1} \quad \square_{i_2} \quad \square_{i_3} \quad \square_{i_4}$

$\begin{array}{cc} 1 & 6 \\ 6 & 1 \\ \square_i & \square_j \end{array}$

$p = \mathbb{P}(\#1\text{-ци} = \#6\text{-ци} = 0) \xrightarrow{0} \frac{4^{10}}{6^{10}}$

$+ \mathbb{P}(\quad -\|- \quad = 1) \xrightarrow{1} \frac{10 \cdot 9 \cdot 4^8}{6^{10}} = \frac{\binom{10}{2} \cdot 2 \cdot 4^8}{6^{10}}$

$\vdots \xrightarrow{2} \frac{\binom{10}{2}\binom{8}{2} 4^6}{6^{10}} = \frac{\binom{10}{4}\binom{4}{2,2} 4^6}{6^{10}}$

$+ \mathbb{P}(\quad -\|- \quad = 5)$

$\binom{10}{2}$: къде ги сложим 1-ците

$\binom{8}{2}$: къде са 6-ците

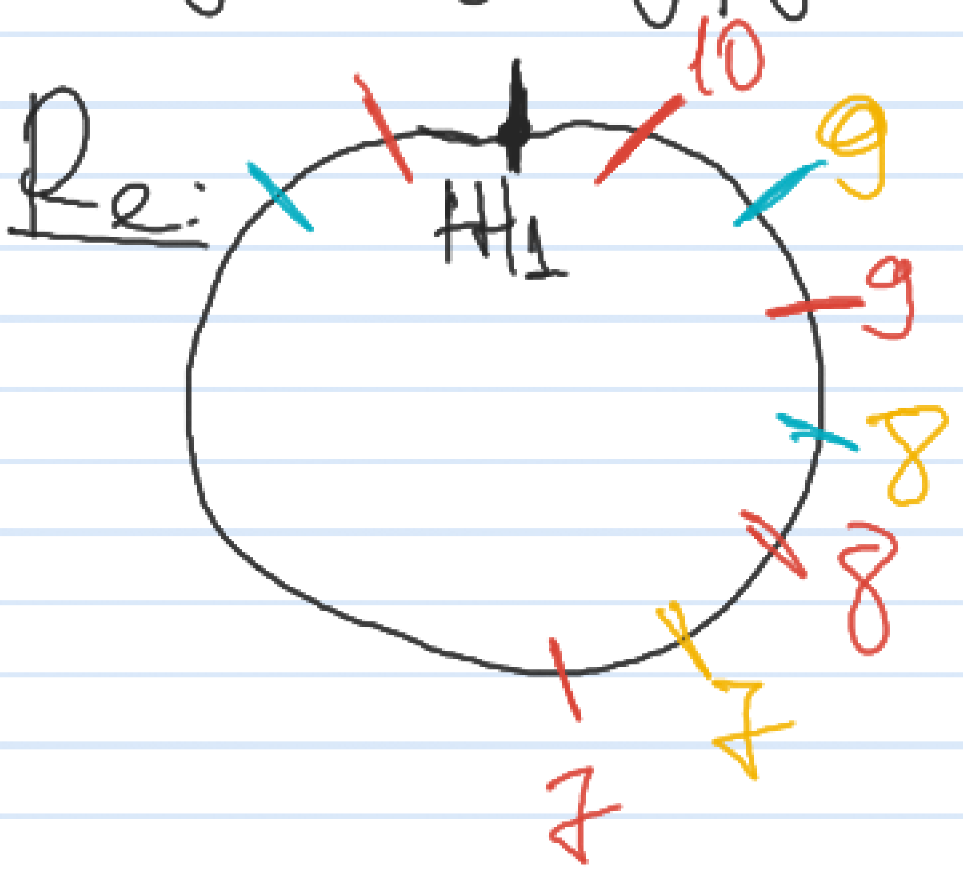
$\frac{10!}{8!2!} \cdot \frac{8!}{2!6!} = \frac{10!}{4!6!} \cdot \frac{4!}{2!2!}$

зад.11 Около маса 10М и 10Ж

$M_1, M_2, \dots, M_{10}$ $Ж_1, \dots, Ж_{10}$

P(да няма хора от един пол едно до друг) = ?

Re:

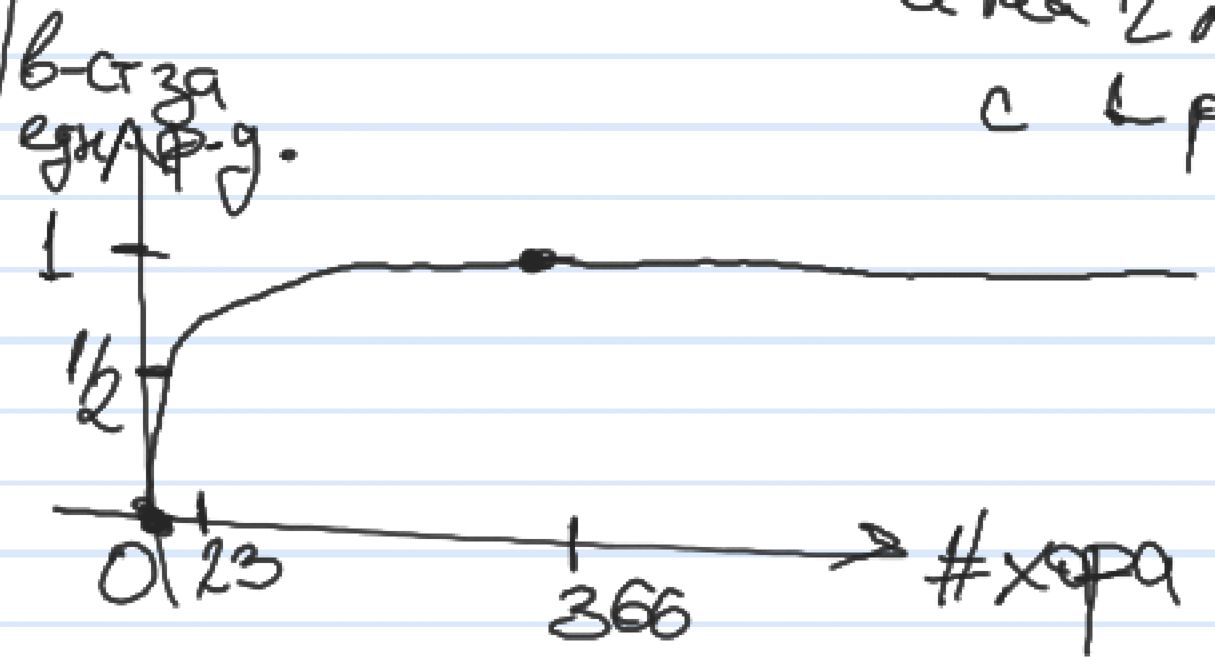


$$\frac{10!\,9!}{19!} = \frac{10!^2}{20!}\cdot 2$$

зад.12 Birthday paradox

366 човека – 100% че има 2-ма с 1 р.д.

1 човек – 0% че има 2-ма с 1 р.д.



Вероятността 3-ма да имат различни рожд. дни $= \frac{365\cdot 364\cdot 363}{365\cdot 365\cdot 365}$

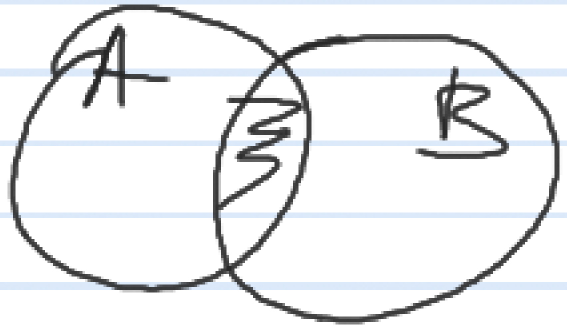
P(i-човека да имат разл. р.д.)

$$= \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-i+1)}{365^i}$$

Търсим за кое i горното е по-малко от $1/2$

$\underline{i=23}$ е най-малкото такова.

Зад. 14



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n-1 \quad n$

случайни адреси $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad a_n$

1

P(никой да не получи своето) $= ?$

Да пресметнем $1 -$ горното, т.е.

P(поне 1 човек да получи писмото си)

P(първият да получи писмото си)

$$= \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$A_i = \{ i$ е получил писмото си$\}$

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$ принцип за вкл. и изкл.

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}$$

Следов.

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n(n-1)\dots 1}$$

Сл. отг. e

$$1 - \text{горното} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{e} \approx \frac{2}{3}$$

→ условна в-ст