Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 4 часа. Успех.

Задача 1. На базата на предишни игри, Ангел моделира резултата си като сл. вел. с очакване 5011 точки и дисперсия 4000.

Приблизително колко игри ще са нужни на Ангел, за да е счита с вероятност поне 99%, че:

1. (0.5 т.) общият брой точки от тези игри ще е поне 1 милион?
2. (0.5 т.) рекордът му от тези игри ще е поне 10000 точки?

Задача 2. (1 т.) Нека ξ и η са независими случайни величини, $\xi \sim Exp(2)$ и $\eta \sim U(0,3)$, т.е.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{ако } x > 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}, \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ако } 0 < x < 3 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Намерете корелация на ξ и η, $P(\xi < \eta)$ и плътността на ξ/η.

Задача 3.

1. (0.25 т.) Нека $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, където параметрите μ и σ^2 са неизвестни и разполагаме с извадка с n наблюдения. Проверява се хипотезата

$$H_0 : \mu = 3.8 \quad \text{срещу алтернативата} \quad H_1 : \mu \neq 3.8$$

с ниво на съгласие $\alpha = 0.05$. Може ли да се отхвърли H_0, ако $n = 16$, $\overline{X} = 3.295$, и $S^2 = 1.4641$? Изведете направения тест чрез отношения на правдоподобия.

2. (0.5 т.) Нека $X \sim U(\alpha, \beta)$. Да се намерят оценки за параметрите α и β чрез метода на моментите и максималното правдоподбие. Да се провери дали те са неизместени и/или състоятелни.

Задача 4. Нека X и Y са независими $Exp(1)$ сл. вел. и $Z := \sqrt{X/Y}$.

1. (0.5 т.) Намерете функцията на разпределение F_Z и използвайки я, очакването $\mathbb{E}Z$.
2. (0.25 т.) Изразете $\mathbb{E}Z$ чрез съвместната плътност на X и Y. Заключете, че $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.[1]

Задача 5. Целта в тази задача е да намерим целочислените моменти на нормално разпределена случайна величина $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. За улеснение, първоначално ще работим със $Z \sim N(0,1)$.

1. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}\left[e^{\lambda Z}\right]$ за $\lambda > 0$. Намерете $\mathbb{E}\left[Z^k\right]$ за $k \leq 6$.
2. (0.25 т.) Докажете, че $\mathbb{E}\left[f(Z)Z\right] = \mathbb{E}\left[f'(Z)\right]$ за функции f, такива че последните две очаквания са добре дефинирани.
3. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}\left[Z^k\right]$ за всяко $k \geq 0$. Можете ли да получите респективния резултат за $\mathbb{E}\left[X^k\right]$?
4. (0.25 т.) Намерете вероятността $\mathbb{P}(Z^k > Z^{k-1})$ за $k \geq 5$.

Задача 6. Векторът $X = (X_1, \ldots, X_n)$ се нарича нормално разпределен, или още Гаусов, със средно $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ и ковариационна матрица Σ, $\Sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$, ако всяка линейна комбинация на неговите компоненти $\langle \lambda, X \rangle := \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ има едномерно нормално разпределение $N(\langle \lambda, \mu \rangle, \Sigma_{i,j} \lambda_i \lambda_j Cov(X_i, X_j))$[2]

1. (0.10 т.) Намерете функцията, пораждаща моментите на $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, $M_Y(t)$.
2. (0.25 т.) Като използвате, че ако $M_Y(t)M_W(t) = M_{Y+W}(t)$ за непразна околоност на 0, то сл.вел. Y и W са независими, както и аналогичното твърдение за повече от 2 сл. вел., докажете, че ако Гаусов вектор има некорелирани компоненти, то те са независими в съвкупност нормално разпределени сл. вел.

   До края на задачата ще считаме, че $X = (X_1, \ldots, X_n)$ е вектор от независими $N(0, \sigma^2)$ сл. вел.

3. (0.25 т.) Нека P е $n \times n$ ортогонална матрица , т.е. $PP^T = Id_n$. Докажете, че PX също е вектор от независими $N(0, \sigma^2)$ сл. вел.

[1] Гама-функцията на Ойлер се дефинира чрез $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

[2] Сумата всъщност е квадратичната форма $\Sigma_{i,j} \lambda_i \lambda_j Cov(X_i, X_j) = \lambda \Sigma \lambda^T$.

4. (0.25 т.) Нека V е k-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$ и $V^\perp$ е неговото ортогонално допълнение, т.е. $\mathbb{R}^n = V \bigoplus V^\perp$. Докажете, че проекциите на X върху V и $V^\perp$ са независими Гаусови вектори, а дължините им са независими и χ^2 разпределени с параметри съответно k и $n-k$.

   Използвайки предишната точка, може да аргументирате, че е достатъчно да разгледате случая, когато проекциите са $X_V = (X_1, \dots, X_k, 0, \dots, 0)$ и $X - X_V$.

5. (0.25 т.) Като разгледате V да бъде линейното пространството на $\mathbb{R}^n$, породено от $v = (1, \dots, 1)$, докажете, че

$$\overline{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{и} \quad (n-1)S^2 := \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 .$$

   $\overline{X}$ и са независими сл.вел. и уточенете разпределенията им.

Бонус:

Задача 7. (0.5 т.) Намерете границата

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \left(\frac{n^1}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots \frac{n^n}{n!} \right) .$$