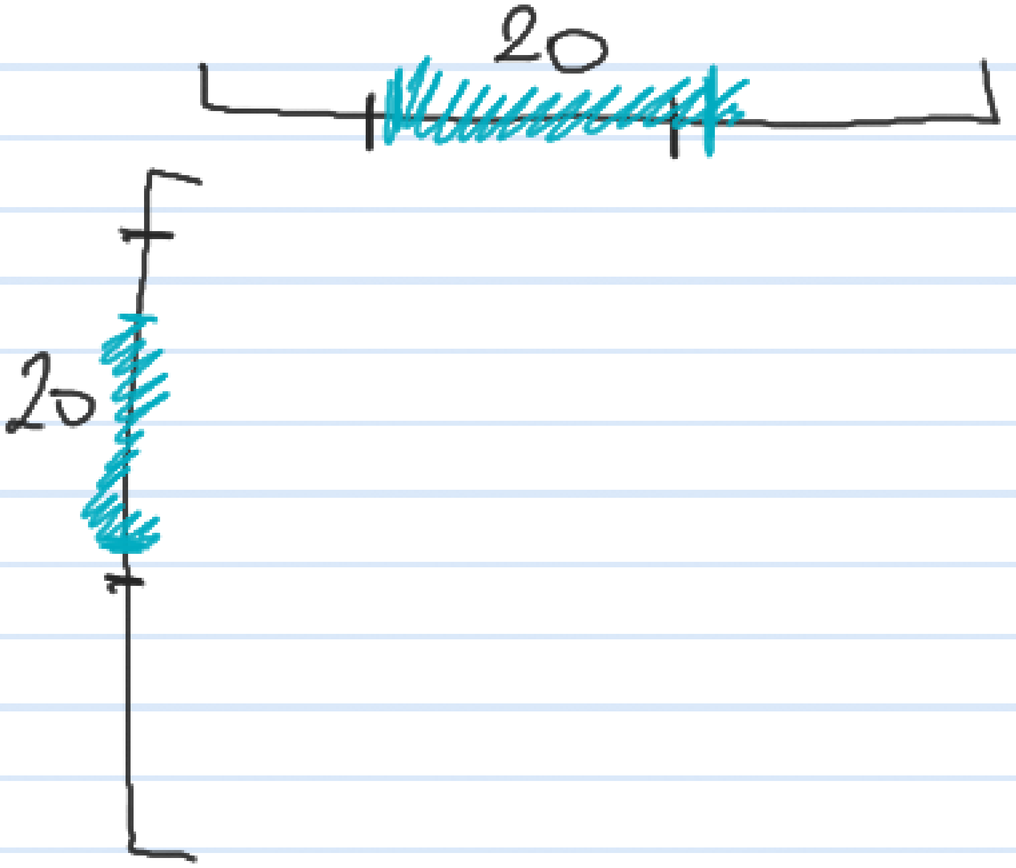
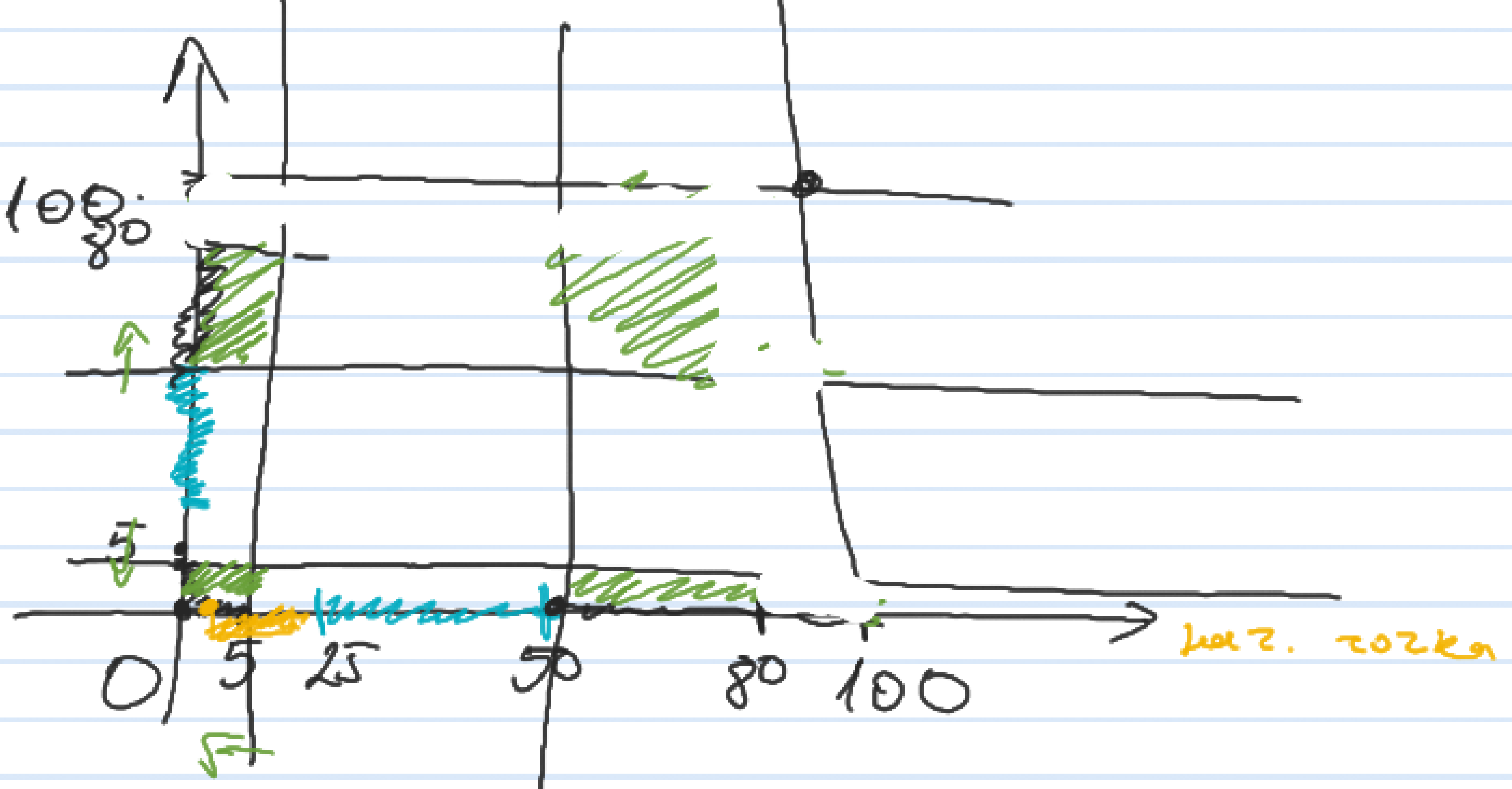




$$\frac{S_{дадено}}{S_{цяло}} = \frac{5\cdot 35 + 30\cdot 35}{100^2} = \frac{35^2}{100^2}$$

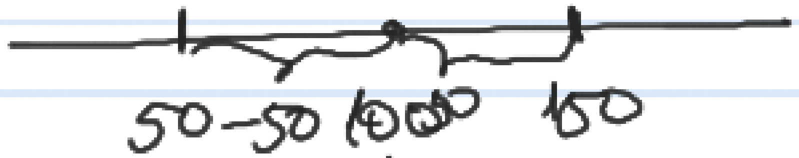
P(да няма свобод от 5 до 50 и от двете страни)

= P(——— // ——— от едната страна)^2

X	x_1	x_2	$\dots$
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\dots$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$



$$\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^4$$

$X \sim Ber(p)$

X	1	0
	p	$1-p$

$\mathbb{E}X = p$; $\mathbb{D}X = p(1-p)$

$X \sim Bin(n, p)$

$X \overset{d}{=} X_1 + \dots + X_n$ $\quad X_i$ – iid

independent

ident

distributed

(независими и еднакво разпр.)

$\mathbb{E}X = np$

$\mathbb{D}X = np(1-p)$

зад. 3 вход — A

2 лева

ези → 5 лева

тура → 0 лева

$\cancel{\frac{5}{2} = 2,5}$

X	2	2^2	2^3	…	2^n	…
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…	$\frac{1}{2^n}$	…

X = „печалбата"

$$\mathbb{E}X = 2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{2^2} + \dots + 2^n\cdot\frac{1}{2^n} + \dots$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$= \underline{\underline{\infty}}$$

St. Petersburg Paradox

б) Martingale strategy

$A \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2A$

$A \xrightarrow{\frac{1}{2}} 0$

$1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 2$ (чисто $2-1=1$)

$1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} -1$ загубаме $2 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4$ (чисто $4-1-2=1$)

загубаме $2 \xrightarrow{\frac{1}{2}}$ загубаме $4 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 8$ (чисто $8-1-2-4=1$)

загубаме $4 \rightarrow$ загубаме 8 …

X = „ходът, на който печелим"

X	0	1	2	3	4	…	n	…
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\frac{1}{2^n}$	…

$$\mathbb{E}\,\text{печалбата} = \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{4}(4-(1+2)) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

4) Два зара 5 пъти

$\mathbb{P}($„# хв. със сума 6" $=2) = ?$

$\mathbb{E}$ „# хв. със сума 6" $= ?$

Р-е: $p = \mathbb{P}($от два зара да получим сума 6$)$

$X =$ „# хв със сума 6" $\sim Bin(5, p)$

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$$

$$\mathbb{E}X = 5 \cdot p$$

$$p = \frac{\{(1,5),(2,4),(3,3),\dots\}}{36} = \frac{5}{36}.$$

зад. 5 A – 3 монети

B – 2

Печели този с повече езита

$\mathbb{P}(A$ да спечели$) = ?$

$\mathbb{P}(B$ да хв. 1 ези $\mid A$ е спечелил$) = ?$

средна печалба?

Р-е: $X =$ „езита на A", Y на B

$$\mathbb{P}(X>Y) = \mathbb{P}(X=1,Y=0) + \mathbb{P}(X=2,Y=0) + \mathbb{P}(X=3,Y=0) + \mathbb{P}((X,Y)\in\{(2,1),(3,1),(3,2)\})$$

$X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Сед. отг. на а) е

$$\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{7+8+1}{32} = \frac{1}{2}$$

$A - n+1$

$B - n$

вероятността A да спечели е $1/2$

б) $\mathbb{P}(Y=1 \mid X>Y)$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y=1 \cap X>Y)}{\mathbb{P}(X>Y)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{(2,1),(3,1)\})}{\mathbb{P}(X>Y)}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{4}}{1/2} = \frac{8}{16}$$

в) за A:

$$\frac{1}{2}(2)+\frac{1}{2}(-3) = -\frac{1}{2}$$

за B:

$$\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(-2) = \frac{1}{2}$$

Зад. 6 $\quad \mathbb{P}$

r-ти успех на (k+r)-ти опит

$\mathbb{P}(\quad) = ?$

Решение: $\mathbb{P}($r-ти успех на $(k+r)$-ти опит$)$

$$= \binom{k+r-1}{r-1} p^{r-1} \cdot (1-p)^k \cdot p$$

r-1 успеха

k неуспеха

от посл. успех

$x_1 + \quad + x_n = k$

▯

X = „брой неуспехи до r успеха"

$r \geq 1$

X приема ст-ти $0, 1, 2, \dots, \dots$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k \quad \text{за } k \in \mathbb{N}_0$$

$X \sim NB(r, p)$

$\mathbb{E}X = ?$

$$\binom{k+r-1}{r-1} = \binom{-k}{r-1}(-1)^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \; ; \; \binom{-k}{r-1} = \frac{-k(-k+1)\dots(-k-r+1)}{(r-1)!}$$

$X \sim Ge_1(p)$ – брой опити до успех

$\underbrace{\times\ \times\ \times\ \times \ldots \times\ \checkmark}$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

за $k \geq 1$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[Ge_2(p)+1] = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p}$$

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \cdot k$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \cdot k$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2}$$

$X \sim Ge_2(p)$ – брой неуспехи до успех

$\underbrace{\times\ \times\ \times \ldots \times}\ \checkmark$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^k \cdot p$$

за $k \geq 0$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^k \cdot k$$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k$$

$$= p \cdot \frac{1-p}{(p)^2} = \frac{1-p}{p}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2}$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

$X \sim NB(r,p)$

\# неуспехи до r успеха

$$\underbrace{\times\times\times}_{Geo(p)}\checkmark \dots \underbrace{\times\times\times}_{Geo(p)}\checkmark\underbrace{\times\times}_{Geo(p)}\checkmark$$

r-ти успех

тоест $X_1, \dots, X_r \sim Geo(p)$ незав., то

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_r$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_r) = r \cdot \mathbb{E}X_1 = r \cdot \frac{1-p}{p}$$

Аналог. $DX = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$

$$\mathbb{E}X = \sum k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum k \cdot \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k = r \cdot \frac{1-p}{p}$$

зад. 8 n пъти стреля

p – вероятност да улучи

m отсека

При улучване, торпедото в 1 от m-те отсека случайно (равном.).

$\mathbb{P}$(да се наводнят поне 2 отсека) = ?

до ч 25.

n, p, m

$X =$ „наводнени отсеци"

$$P(X=0 \text{ или } X=1)$$

$$= (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{k удрвания}} \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)^k}_{\substack{\text{винаги} \\ \text{в 1 фиксиран} \\ \text{отсек}}} \cdot \underbrace{m}_{\substack{\text{кой отсек сме} \\ \text{фиксирали}}}$$

$$m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{m}\right)^k (1-p)^{n-k} - m(1-p)^n$$

$$= m\left(\frac{p}{m} + 1 - p\right)^n - m(1-p)^n$$

Зад. 10 X = „сума от два зара"

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mathbb{E}X = (2+12)\cdot\frac{1}{36} + (3+11)\cdot\frac{2}{36} + \dots + (6+8)\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36}$$

$$= 14\cdot\frac{15}{36} + \frac{42}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

X_1 – 1-ви зар

X_2 – 2-ри зар $X = X_1 + X_2$

X_1	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	...			

$$\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{6}\cdot 21 = 3{,}5$$

$$DX_1 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2{,}92$$

$$DX = DX_1 + DX_2$$
$$= \frac{35}{6}$$

1000 зара

сума от 3700

Необичайно ли е?

$|X - \mathbb{E}X|$ да е голямо – отклонение

Големи отклонения при „хубави" сл. вел. са необичайно

Чебишов:

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| > a) \leq \frac{DX}{a^2}$$

В случая X = сума от 1000 зара

$$\mathbb{E}X = 1000 \cdot 3{,}5 = 3500$$

$$DX = 1000 \cdot \frac{35}{12} \approx 1000 \cdot 2{,}92 = 2920$$

$$\mathbb{P}(X > 3700) \leq \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| > 200)$$

$$\underset{\text{Чебишов}}{\leq} \frac{2920}{40000} = 0{,}073 = 7{,}3\ \%$$

Получихме, че в-стта $X > 3700$ е по-малка от 7,3 %, което можем да приемем за малко.

$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y$

Кога $\mathbb{D}(X+Y)=\mathbb{D}X+\mathbb{D}Y$?

Когато $X \perp\!\!\!\perp Y$ – X и Y са незав.

$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j)=\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)$ – незав. на дискр. сл. вел.

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbb{D}(X+Y)=\mathbb{D}X+\mathbb{D}Y\\ \mathbb{E}XY=\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y\end{gathered}}$$

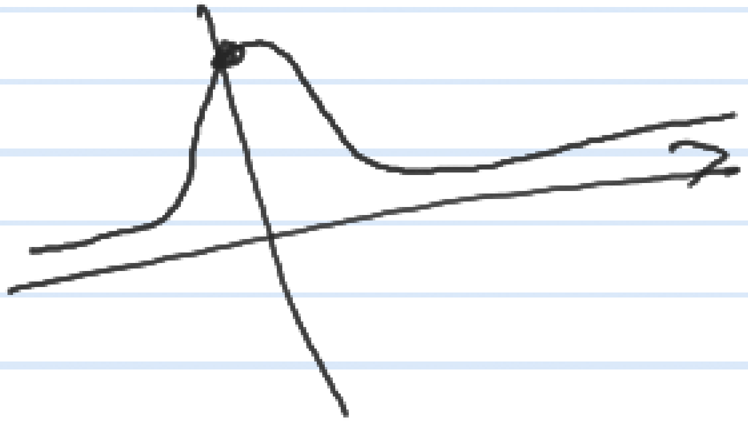
Ако $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ са нез. и едн. разпр., то

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \mathbb{E}X_1$$ (в частност трябва $\mathbb{E}X_1 < \infty$).

За големи n: $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \approx \mathbb{E}X_1$; $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mathbb{E}X_1 \approx 0$

ЦГТ: Ако $\sigma^2 = DX_1 < \infty$

$$\frac{\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mathbb{E}X_1}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \underline{\underline{N(0,1)}}$$



зад. 12 $\quad p = \frac{1}{1000}$ $\qquad$ $Bin \approx Po$

$\mathbb{P}($поне 2 пъти от 5000 изстрела$) = ?$

Р-е:

$X =$ „броят попадения" $\sim Bin(5000, p)$

$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1)$

$$= 1 - \binom{5000}{0} p^0 \underline{(1-p)^{5000}} - \binom{5000}{1} p^1 \underbrace{(1-p)^{4999}}_{\left(\frac{1}{e}\right)^5}$$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[x \to \infty]{} e$

За малки x: $(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx e$. Следователно $\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx \frac{1}{e} = e^{-1}$

$(1-x)^{\frac{1}{x}} \approx \frac{1}{e}$

$$\approx 1 - e^{-1 \cdot 5} - 5\cancel{000} \cdot \frac{1}{\cancel{1000}} \cdot e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0{,}95\ldots$$

зад. 13 7 лампи

3 дефектни

Избираме 4

$X =$ "# изтеглени дефектни"

$\mathbb{E}X = ?$

Р-е: $\mathbb{P}(X=k) = ?$ $k = 0, 1, 2, 3$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{4-k}}{\binom{7}{4}}$$

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{35}$ $\qquad \frac{7\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 35$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{3\cdot4}{35}$

$$\mathbb{E}X = 0\cdot\frac{1}{35} + 1\cdot\frac{12}{35} + 2\cdot\frac{18}{35} + 3\cdot\frac{4}{35}$$

$$= \frac{12+36+12}{35} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7}$$

С връщане, 4 тегления

$\mathbb{E}$ брой изтеглени дефектни $= \frac{3}{7}\cdot 4$

$X \sim HG(N, K, n)$

N — # предмети

K — # специални от тях

Теглим n от тях ; $X =$ „# изтеглени спец.“

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$k = 0, 1, \dots, \min(K, n)$

$0 \to \max(0, n - N + K)$

$$\mathbb{E}X = n \cdot \frac{K}{N}$$

зад. 14 средно 2 земетрес. / месец

$\mathbb{P}$(за три месеца < 4 земетр.) = ?

(X = "# земетресения за 1 месец"

$X \sim Po(\lambda)$)

$X \sim Po(\lambda)$, ако

$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ за $k = 0, 1, \dots$

* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$

$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{k} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$

$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$

$DX = \dots = \lambda$

$X_1 \sim Po$

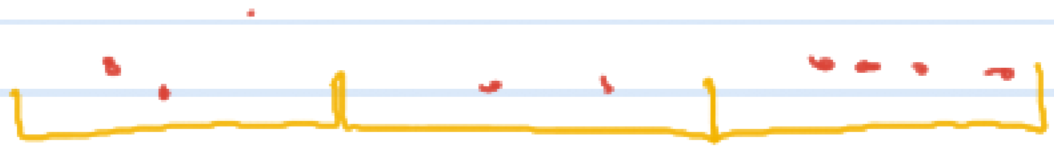
X_i = #земетр. за месец i

$X_i \sim Po(2)$

$P(X_1+X_2+X_3<4) = ?$

→ На ръка, т.е. да разгледаме възм. ст-ти за X_i

≈

→ 

$X_1+X_2+X_3 \sim Po(6)$?

* Ако е вярно, то $P(X_1+X_2+X_3<4)$

$= P(Po(6)<4) = e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}\right)$

* Нека $X_i \sim Po(\lambda_i)$ са независими

Св-к. $X_1+\dots+X_n \sim Poi(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$

За X със ст-ти в $\mathbb{N}_0$:

$$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\cdot s^k$$

За $X\sim Poi(\lambda)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot s^k = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda s} = \underline{\underline{e^{\lambda(s-1)}}}$$

$$g_{X_1+X_2}(s) = \mathbb{E}s^{X_1+X_2} = \mathbb{E}s^{X_1}\cdot s^{X_2}$$

$$\overset{\text{незав.}}{=} \mathbb{E}s^{X_1}\cdot\mathbb{E}s^{X_2}$$

$$= g_{X_1}(s)\cdot g_{X_2}(s)$$

В нашия случай: $g_{X_i}(s) = e^{\lambda_i(s-1)}$

и след. $\mathbb{E}s^{X_1+\dots+X_n} = \mathbb{E}s^{X_1}\cdot\mathbb{E}s^{X_2}\dots\mathbb{E}s^{X_n}$

$$= e^{\lambda_1(s-1)}\dots e^{\lambda_n(s-1)}$$

$$= e^{(s-1)(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}$$

$$= g_{X_1+\dots+X_n}(s)$$

$$= g_{Po(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}(s)$$

$g_{X_1}(s) = g_{X_2}(s)$, то

$X_1 \overset{d}{=} X_2$, т.е.

$\mathbb{P}(X_1=k)=\mathbb{P}(X_2=k)$ за всяко k

$$\Longrightarrow X_1+\dots+X_n \sim Po(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$$