

Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех. Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и X, Y са случайни величини.

Ако имате нужда, може да ползвате, че $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$, $\int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1)$ и $\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$.

Задача 1. Магически квадрат е таблица 3×3 , запълнена с числа, така че сборът по всички редове, колони и 2-та главни диагонала е равен.

Петокласник трябва да попълни магическия квадрат по-долу, използвайки числата от 1 до 9 точно по веднъж.

2	7	
	5	
		8

Тъй като няма желание да събира числа, решава да напише програма, която да запълва случайно квадратчетата, докато намери правилната конфигурация.

Една симулация се състои от избора на 5 равномерни числа измежду $\{1, 2, \dots, 9\}$ и поставянето им в квадрата последователно в реда отгоре надолу и отляво надясно.

1. Колко е очакването на броя познати числа при всяка симулация?
2. Колко е очакваният брой симулации до достигането на правилната наредба?
3. Можете ли да предложите число n , такова че с вероятност 99% ще сме уцелили поне веднъж след n симулации?

Можете ли да отговорите на същите въпроси, ако симулацията се състои от случайна подредба на липсващите числа, т.е. на $(1, 3, 4, 6, 9)$?

Задача 2. На всяка от страните на празен зар се записва случайно число от 1 до 6. След това този зар се хвърля n пъти. Нека X е сумата от първите $n - 1$ хвърляния, а Y - сумата от последните $n - 1$ хвърляния. Намерете $Cor(X, Y)$. Как би се променил отговорът, ако избирахме числа между 199 и 999?

Задача 3. Благотворителна организация набира доброволци, които да събират дарения за нея. Всеки доброволец говори със 100 човека на ден, като е известно, че средно 1 от 25 срещнати дарява. Размерът на дарението е фиксиран - 10 лв.

Колко най-малко доброволци трябва да набере организацията според Вас, за да е сигурна, че вероятността да събере най-малко 1 млн лева за 100 дни е поне 99%?¹

При избрания брой доброволци, каква е вероятността парите да бъдат събрани за 99 дни?

Задача 4. Механизъм е съставен от две компоненти, които са изправни за време (в часове) съответно X и Y , чиято съвместна плътност е

$$f_{X,Y}(x, y) = cxe^{-\frac{x+y}{2}}$$

за $x, y > 0$ и 0 иначе.

Намерете:

1. константата c ;
2. вероятността и двете части да работят повече от един час;
3. очакването на Y/X ;
4. очакването на X , ако $Y = 1$.

Независими ли са X и Y ?

¹Тъй като неравенството на Чебишов е грубо, използването му не е удачно.