Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.

С m, n, k ще бележим неотрицателни цели числа.

Задача 1.

1. (0.25 т.) В урна има 4 жълти, 5 зелени и 2 сини камъчета. След като изтегли едно от тях, човек хвърля стандартни зарчета, както следва: ако е избрал жълто, хвърля един зар, ако е избрал зелено - два и ако е избрал синьо - три. Ако се е паднала сума 3 от хвърлените зарчета, то каква е вероятността да е избрал зеленото камъче?

2. (0.25 т.) Стандартен зар се хвърля пет пъти. Намерете вероятности за събитията
$A = \{$максималното паднало се число е поне 3$\}$ и
$B = \{$произведението на всички паднали се числа се дели на 10$\}$.

3. (0.25 т.) Човек хвърля две неправилни монети (вероятността за ези на всяка от тях е 1/3). Ако му се паднат еднакви страни, той има право да изтегли две топки от урна, съдържаща 4 черни и 2 бели топки и печели толкова лева, колкото е броят на изтеглените бели топки. Ако му се паднат различни страни от монетите, той хвърля зар, и ако му се падне четно число, той трябва да даде 3лв. Намерете разпределението на печалбата на играта и докажете, че не е справедлива. Колко лева трябва да даде играчът, за да бъде справедлива?

Задача 2.

1. (0.25 т.) Нека $X \sim Ge(p)$, т.е. $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$ за $k \geq 0$; Докажете свойството липса на памет: за всеки $m, n \geq 0$, $\mathbb{P}(X > m + n | X \geq n) = \mathbb{P}(X > m)$.

2. (0.25 т.) Докажете обратното твърдение, ако Y е сл. вел. със стойности в $\{0, 1, 2, \dots\}$ и за всеки $m, n \geq 0$, $\mathbb{P}(Y > m + n | Y \geq n) = \mathbb{P}(Y > m)$, то $Y \sim Ge(p)$ за някое $p \geq 0$.

3. (0.25 т.) Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими случайни величини и дефинираме $X_{\min} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$ и аналогично $X_{\max}$. Кои от изразите

$$\mathbb{P}(X_1 > m)^n,\ \mathbb{P}(X_1 \leq m)^n,\ \mathbb{P}(X_1 \leq m),\ 1 - m\mathbb{P}(X_1 > m)^n,\ 1 - \mathbb{P}(X_1 > m)^n, (1 - m)(1 - \mathbb{P}(X_1 > m)^n)$$

изразяват вероятностите съответно $\mathbb{P}(X_{\min} \leq m)$ и $\mathbb{P}(X_{\max} \leq m)$? Докажете го.

4. (0.25 т.) Хвърлят се 5 стандартни зара едновременно. Ако на някой/някои от заровете се падне шестица, той/те се отстранява, а останалите се хвърлят отново, докато не останат зарове. Нека K е общият брой хвърляния. Намерете $\mathbb{P}(K \leq n)$ и $\mathbb{P}(K = n)$.

Задача 3. Известен вид евристични алгоритми са генетичните такива. При тях се формира начална „популация” от хромозоми, кодиращи възможни решения на даден проблем, която с времето „еволюира” към по-добра, откъдето и наименованието им.

Конкретно, да предположим, че искаме да инициализираме n хромозоми (булеви вектора) с дължина m. Всички гени (елементи на векторите / битове) са независими $Ber(1/2)$ сл. вел.

1. (0.5 т.) Каква е вероятността всичките вектори да са различни? Какъв е очакваният общ брой на 1-ците във всички вектори? Колко е очакваният брой на вектори с под $m/4$ нули?

2. (0.5 т.) Какъв е очакваният брой повторения, т.е. брой еднакви двойки вектори, измежду m-те вектора? Отговорете на същия въпрос, ако елементите на векторите са независими $Ber(p)$ с $p \in (0, 1)$. За кое p очакваните повторения са минимални?

3. (0.5 т.) **Бонус: Какъв е очакваният брой уникални вектори?*

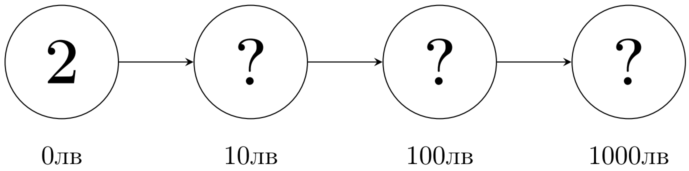
4. (0.5 т.) ***Бонус: При фиксирано m, от какъв порядък трябва е минималното n, за което вероятността всичките хромозоми да бъдат различни да бъде по-малка от 50%?*

Задача 4. В телевизионно лотарийно шоу се използва случаен генератор, който избира равномерно цяло число от 1 до 5. Играта е следната[1]:

- Избира се случайно число (числото 2 в примера);
- Играчът има право да се откаже, в такъв случай печели сумата под последното изтеглено число, или да се опита да познае дали следващото число ще бъде по-малко или по-голямо от предишното. **Гарантирано е, че последователните числа са различни**;

[1] https://shorturl.at/bjlqU

- ако не познае, не печели нищо и играта свършва. Ако познае, има право да продължи, докато стигне голямата награда от 1000лв.



1. (0.5 т.) Предложете стратегия и пресметнете вероятността играчът да спечели, както и очакваната печалба при нея, ако играчът е решил да познава точно k пъти за $k = 0, 1, 2, 3$. Сравнете със стратегията, когато играчът избира винаги случайно по-голямо/по-малко независимо с вероятност $1/2$.

2. *(0.25 т.) Бонус: Напишете псевдокод, който решава горната задача при избор на число между* 0 *и* n*, т избора на участника и съответно награди* $c_0, \ldots, c_n$.

3. *(0.5 т.) Бонус: Напишете псевдокод, който би определил дали е оптимално да се откажете или да се опитате да познаете след края на всеки рунд в общия вид на играта от точка 2.*