Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.

Задача 1.

1. (0.25 т.) В урна има 2 жълти, 3 зелени и 4 сини камъчета. След като изтегли едно от тях, човек хвърля стандартни зарчета, както следва: ако е избрал жълто, хвърля един зар, ако е избрал зелено - два и ако е избрал синьо - три. Ако се е паднала сума 3 от хвърлените зарчета, то каква е вероятността да е избрал зеленото камъче?

2. (0.25 т.) Стандартен зар се хвърля пет пъти. Намерете вероятности за събитията $A = \{$максималното паднало се число е поне 3$\}$ и $B = \{$произведението на всички паднали се числа се дели на 10$\}$.

3. (0.25 т.) 7 топки попадат случайно и независимо в 7 кутии. Нека X_i е броят на кутиите, в които има точно i топки. Намерете разпределението на X_3, очакването $\mathbb{E}[X_3]$ и $\sum_{i=1}^{7} i\mathbb{E}[X_i]$.

Задача 2. Изпит се състои от 15 въпроса, като всеки има 5 възможни отговора. Студент знае отговорите на 10 от въпросите и тъй като се притеснява, отговаря правилно на тях с вероятност 90 %. Тъй като не знае отговорите на останалите 5, за тях избира отговор на случаен принцип. Нека X е случайната величина, отбелязваща броя верни отговори на студента от всичките 15 въпроса. Намерете:

1. (0.5 т.) $\mathbb{P}(X > 12)$, очакването и дисперсията на X;

2. (0.5 т.) вероятността студентът да е отговорял правилно само на въпросите, които знае, при условие, че е отговорил правилно на 3 въпроса.

Задача 3.

1. (0.25 т.) Нека X е случайно число измежду $\{0, 1, 2\}$ и $Y \sim Ber(2/3)$ е независима от него сл. вел. Намерете съвместното разпределение и корелацията на X и $Z := (X + Y)(\text{mod } 3)$.

2. (0.25 т.) Нека X е равномерно случайно число от $\{1, \dots, 6\}$. Намерете пораждащата функция на X и изразете чрез нея $\mathbb{E}[X]$ и DX.

3. (0.5 т.) Нека X и Y са случайни величини със стойности в $\{0, 1, \dots\}$. Вярно ли е, че ако X и Y са независими, то за всяко $s \geq 0$, $g_X(s)g_Y(s) = g_{X+Y}(s)$? А вярно ли е, че ако всяко $s \geq 0$, $g_X(s)g_Y(s) = g_{X+Y}(s)$, то X и Y са независими? Докажете твърденията си.

Задача 4. Нека n е естествено число. Избираме естествени u_i по следния начин: u_1 е равномерно случайно измежду $[1, n]$, u_2 измежду $[1, u_1 - 1]$, u_3 измежду $[1, u_2 - 1]$ и т.н., докато $u_\ell = 1$ за някое $\ell \leq n$. Нека E_n е множеството от избраните числа, т.е. $E_n := \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$.

1. (0.5 т.) Намерете $\mathbb{P}(k \in E_n)$ за $k \leq n$.

2. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{P}(2 \in E_n | 3 \notin E_n)$.

3. (0.5 т.) Намерете $\mathbb{E}[|E_n|]$.