Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.
Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Задача 1. (1 т.) На стрелбище момче плаща 2 лева, за да участва в игра с три изстрела. Ако уцели три пъти, печели 10 лева, ако уцели два пъти - 5, а при едно попадение - 1 лев. Да предположим, че вероятността му за уцелване при един изстрел е $1/3$. Честна ли е играта[1]? За кои стойности на най-голямата печалба играта би била благоприятна за играча?

Ако момчето е на печалба, каква е вероятността да е уцелило на третата стрелба?

Задача 2. Разполагаме с две кутии с топки. В първата има 4 бели и 6 черни, а във втората - 7 бели и 3 черни. От всяка урна случайно се изважда по 1 топка. Към извадените две топки се прибавя една бяла и се поставят в трета кутия.

1. (0.4 т.) Каква е вероятността случайно избрана топка от третата кутия да бъде бяла?
2. (0.6 т.) Да допуснем, че теглим от третата кутия по 1 топка с връщане, докато изтеглим бяла. Нека X е броят изтеглени топки от третата кутия. Какво е очакването на X? Мислите ли, че X има геометрично разпределение?

Задача 3. (1 т.) В торба има $n \in \mathbb{N}$ монети със стойности съответно числата от 1 до n. Човек бърка и взима шепа монети. Да предположим, че вероятността за всяка монета да бъде изтеглена, т.е. да се озове в шепата, е $p \in (0, 1)$. Какво е очакването на изтеглената сума S?

Задача 4.

1. (0.4 т.) Нека $A, B \subset \Omega$ са събития. Припомнете кога наричаме A и B независими и кога несъвместими. Възможно ли е A и B да бъдат независими, ако

   (а) са несъвместими;

   (б) $A \subset B$?

   Ако да, при какви условия?

2. (0.6 т.) Припомнете кога наричаме две дискретни случайни величини X и Y независими и кога еднакво разпределени.

   Нека X, Y и Z са еднакво разпределени и независими две по две. Да допуснем, че вероятността да приемат еднакви стойности е 0. Намерете $\mathbb{P}(X < Y), \mathbb{P}(Y < Z)$ и $\mathbb{P}(Z < X)$.

   Припомнете формулата за включване и изключване за 3 събития.

   Докажете, че $\min\{\mathbb{P}(X < Y), \mathbb{P}(Y < Z), \mathbb{P}(Z < X)\} \leq 2/3$. [2]

[1] Наричаме една игра честна, ако очакваната печалба от нея е 0.

[2] Можете ли да конструирате пример, за който се достига равенство? Съществува прост такъв при подходящ избор на вероятности и събития от типа $(X = n_1, Y = n_2, Z = n_3)$.