*Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.*
*Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**Задача 1.** (1 т.) На стрелбище момче плаща 2 лева, за да участва в игра с три изстрела. Ако уцели три пъти, печели 10 лева, ако уцели два пъти - 5, а при едно попадение - 1 лев. Да предположим, че вероятността му за уцелване при един изстрел е 1/3. Честна ли е играта[1]? За кои стойности на най-голямата печалба играта би била благоприятна за играча?

• (0.6т за основната част + 0.1т за$y > 12$) Нека най-голямата печалба е $y$. Тогава

$$\mathbb{E}X = (-2) \cdot \binom{3}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^3 + (-1) \cdot \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) + (y-2) \cdot \binom{3}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{y-2}{27} .$$

Следователно играта е благоприятна за момчето, ако $y > 12$ и неблагоприятна за $y < 12$. В частност, за $y = 10$ играта не е честна.

Ако момчето е на печалба, каква е вероятността да е уцелило на третата стрелба?

• (0.3т) Ако пишем $Y$ за попадение и $N$ за пропуск, вероятността играчът да не е уцелил на третия изстрел е

$$\mathbb{P}(YYN|\{YYN, YNY, NYY, NNN\}) = \frac{2/27}{3 \cdot 2/27 + 1/27} = \frac{2}{7} .$$

Следователно отговорът е $1 - 2/7 = 5/7$.

**Задача 2.** Разполагаме с две кутии с топки. В първата има 4 бели и 6 черни, а във втората - 7 бели и 3 черни. От всяка урна случайно се изважда по 1 топка. Към извадените две топки се прибавя една бяла и се поставят в трета кутия.

1. (0.4 т.) Каква е вероятността случайно избрана топка от третата кутия да е бяла?

   • Да дефинираме събитията $A =$"изтеглили сме бяла от третата кутия" и $B_{xy} =$"изтеглили сме $x$ от първата и $y$ от втората кутия където $x, y \in \{W, B\}$ за бяла(W) и черна(B). Тогава, от формулата за пълната вероятност, търсената вероятност е

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_{WW})\mathbb{P}(B_{WW}) + \mathbb{P}(A|B_{BW})\left(\mathbb{P}(B_{BW}) + \mathbb{P}(B_{WB})\right) + \mathbb{P}(A|B_{BB})\mathbb{P}(BB) \\ &= 1 \cdot \frac{4 \cdot 7}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 + 6 \cdot 7}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 3}{100} = \frac{7}{10} .\end{aligned}$$

2. (0.6 т.) (0.3 т, ако са сметнали всичко вярно, смятайки го като геометрично с вероятността от а) Да допуснем, че теглим от третата кутия по 1 топка с връщане, докато изтеглим бяла. Нека $X$ е броят изтеглени топки от третата кутия. Какво е очакването на $X$? Мислите ли, че $X$ има геометрично разпределение?

   • Ако имаме три бели в третата кутия, то теглим бяла на първия ход.

   Ако имаме две бели и черна, то броят изтеглени топки следва $Ge(2/3)$ и следователно очакваният брой изтеглени топки е 3/2. Аналогично, за бяла и две черни, броят изтеглени топки следва $Ge(1/3)$ и очакването му е 3. Следователно

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \mathbb{E}(X|B_{WW})\mathbb{P}(B_{WW}) + \mathbb{E}(X|B_{BW})\left(\mathbb{P}(B_{BW}) + \mathbb{P}(B_{WB})\right) + \mathbb{E}(X|B_{BB})\mathbb{P}(BB) \\ &= 1 \cdot \frac{28}{100} + \frac{3}{2} \cdot \frac{54}{100} + 3 \cdot \frac{18}{100} = \frac{163}{100} .\end{aligned}$$

   Ако $X$ беше геометрично разпределено, то от 1. би трябвало $X \sim Ge(7/10)$ и очакването му би трябвало да е 10/7, което видяхме, че не е вярно.

**Задача 3.** (1 т.) В торба има $n \in \mathbb{N}$ монети със стойности съответно числата от 1 до $n$. Човек бърка и взима шепа монети. Да предположим, че вероятността за всяка монета да бъде изтеглена е $p \in (0, 1)$. Какво е очакването на изтеглената сума?

• (0.1-0.2+ за частични разсъждения) За $k = 0, 1, \ldots, n$, нека $X_k$ е равно 1, ако сме изтеглили монетата $k$ и 0 иначе. $X \sim Ber(p)$ по условие и следователно $\mathbb{E}X_k = p$, което по линейност на очакването води до $\mathbb{E}S = \mathbb{E}(1X_1 + 2X_2 + \ldots nX_n) = 1\mathbb{E}X_1 + 2\mathbb{E}X_2 + \cdots + n\mathbb{E}X_n = pn(n+1)/2$.

**Задача 4.** 1. (0.4 т.) Нека $A, B \subset \Omega$ са събития. Припомнете кога наричаме $A$ и $B$ независими и кога несъвместими. Възможно ли е $A$ и $B$ да бъдат независими, ако

[1] Наричаме една игра честна, ако очакваната печалба от нея е 0.

(а) са несъвместими;

(б) $A \subset B$?

Ако да, при какви условия?

•(0.4 - по 0.1 за двете дефиниции и двата примера) Наричаме $A$ и $B$ несъвместими, ако $A \cap B = \emptyset$ и независими, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Следователно отговорът и на двете точки е да, като нужно условия за (а) е $\mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(B) = 0$, а за (б) - $\mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(B) = 1$.

2. (0.6 т.) (0.1 т за всяка дефиниция, 0.1 за $\mathbb{P}(X < Y) = 1/2$, 0.1 за формулата за вкл и изкл, като макс 0.3 от горните 0.4, 0.3 за последната част) Припомнете кога наричаме две дискретни случайни величини $X$ и $Y$ независими и кога еднакво разпределени.

   • Наричаме дискретните сл. вел. $X$ и $Y$ еднакво разпределени, ако за всяко $a \in \mathbb{R}$ имаме, че $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(Y = a)$ и независими, ако за всеки $a, b \in \mathbb{R}$ е изпълнено $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)$.

   Нека $X, Y$ и $Z$ са еднакво разпределени и независими две по две. Да допуснем, че вероятността да приемат еднакви стойности е 0. Намерете $\mathbb{P}(X < Y), \mathbb{P}(Y < Z)$ и $\mathbb{P}(Z < X)$.

   • $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y)$, тъй като са независими и еднакво разпределени. Следователно от $\mathbb{P}(X = Y) = 0$ и $1 = \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X = Y)$, намираме, че търсените вероятности са по $1/2$.

   Припомнете формулата за включване и изключване за 3 събития.

   •

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\,. \qquad (1)$$

   Докажете, че $a = \min\{\mathbb{P}(X < Y), \mathbb{P}(Y < Z), \mathbb{P}(Z < X)\} \le 2/3$. [2]

   • Нека $A = \{X < Y\}, B = \{Y < Z\}$ и $C = \{Z < X\}$. Да забележим, че трите имат празно сечение, което води тривиално до това, че последното събираемо в (1) е 0. Остава да съобразим, че

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \le 1\,,$$

   което, чрез (1), води до $1 \ge 3a - 1$, което искахме да докажем.

   *Всъщност, последният резултат показва, че ако $X$, $Y$ и $Z$ са съответните групи от хора, които подкрепят първи, втори и трети кандидат при избори, то е възможно, който и да спечели, $2/3$ от избирателите да предпочитат друг кандидат. Например при популация от трима души и кандидати $A$, $B$ и $C$, то предпочитанията им може да са $A > B > C, B > C > A, C > A > B$. Тази идея на езика на вероятностите може да се запише като* $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2, Z = 3) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3, Z = 1) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 1, Z = 2) = 1/3$. *Сходен на последния резултат е забелязан от дъо Кондорсе в края на 18-ти век (вижте Condorcet paradox).*

[2] Можете ли конструирате пример, за който се достига равенство? (Съществува прост такъв при подходящ избор на вероятности и събития от типа $(X = n_1, Y = n_2, Z = n_3)$.