зад. 1

1. $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3} \mathbb{1}_{\{\text{монета } i = \text{ези}\}} + 3\cdot \mathbb{1}_{\{\text{зар } i = 6\}}\right]$

$= 3\cdot\mathbb{P}(\text{монета } 1 = \text{ези}) + 3\cdot 3\cdot \mathbb{P}(\text{зар } 1 = 6)$

$= \frac{3}{2} + \frac{9}{6} = 3.$

2. Независимо от сумата до рунд i, точно 1 стойност на зара би я направила $\equiv 0 \pmod 6$ след този рунд

$\Rightarrow$ # рундове $\sim Ge(1/6)$

Нека $p := 1/6$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{печалба}] = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p\cdot (1-p)^{k-1}$

$= \frac{p}{1-p} \sum k\cdot(1-p)^k = \frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{p^2}$

$= 1/p = 6.$

Горното реално е $\mathbb{E}[Ge(1/6)]$.

3. $\dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=k-1)} = \dfrac{3}{k}$, т.е. $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{3}{k}\mathbb{P}(X=k-1)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{3}{k}\cdot\frac{3}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{1}\mathbb{P}(X=0)$$

$$= \frac{3^k}{k!}\mathbb{P}(X=0).$$

Т.к. $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = 1$, то

$$\mathbb{P}(X=0)\Big(\underbrace{1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\ldots}_{=e^3}\Big) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0) = e^{-3} \text{ и } \mathbb{P}(X=k) = e^{-3}\cdot\frac{3^k}{k!}$$

$$\Rightarrow X \sim Poi(3)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{D}X = 3.$$

4. Да пресметнем пораждащата ф-я на X = # посетители от вход 1.
Нека Y = общ брой посетители $\sim Poi(\lambda)$

$$\mathbb{E}s^X = \sum \mathbb{E}[s^X \mid Y=k] \cdot \mathbb{P}(Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{k} 1_{\{\text{посетител } i \text{ е избрал вкус } 1\}}}\right] \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}s^{X+Y} = \mathbb{E}s^X \mathbb{E}s^Y$

$$\overset{\text{нез.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}s^{1_{\{\text{пос. } 1 \text{ е избрал вкус } 1\}}}\right)^k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}s^0 + \frac{1}{10}s^1\right)^k \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\left(\frac{9}{10} + \frac{s}{10}\right)\lambda}$$

$$= e^{\frac{\lambda}{10}(s-1)}$$

Т.к. за $Z \sim Poi(\lambda)$

$$\mathbb{E}s^Z = \sum s^k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s}$$

$$= e^{\lambda(s-1)}, \text{ то}$$

от $\mathbb{E}s^X = e^{\frac{\lambda}{10}\cdot(s-1)} \Rightarrow \underline{X \sim Poi\left(\frac{\lambda}{10}\right)}$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = DX = \frac{\lambda}{10}$.

Всъщност доказахме (вижте лекциите), че

$Bin(Poi(\lambda), p) \sim Poi(\lambda p)$.

Зад. 2 | 1. $\mathbb{P}_n$(да има победител)

$= \mathbb{P}_n$(1 хвърля ези и всички други тура)

$+ \mathbb{P}_n$(1 хвърля тура и —"— —ези)

$$= 2 \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} \text{ за } n \geq 3.$$

$$X \sim Ge\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{2^{n-1}}{n} =: \frac{1}{p}$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2}.$$

2.) Всички раздадени пари са $100((n-1)+\dots+2)$

$$= 100 \cdot \left(\frac{(n-1)n}{2} - 1 \right) =: S$$

По симетрия, $\mathbb{E}$[печалба на играч i] не зависи от i $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\text{печалба на играч } i] = S$$

$$= n\,\mathbb{E}[\text{печалба на играч } 1]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{печалба на играч}] = \frac{1}{n} S$$

и това е честната цена.

За $\mathbb{E}$ #ходове, т.к. от 1) при n играча те са $\frac{2^{n-1}}{n}$ $\Rightarrow$

отг. е $\frac{2^{n-1}}{n} + \frac{2^{n-2}}{n-1} + \dots + \frac{2^2}{3}$

$$= \sum_{k=3}^{n} \frac{2^{k-1}}{k}.$$

~~зад~~ Зад. 3. 1.2.3 - стандартни

4. $\mathbb{P}(X_1+\dots+X_n > Y_1+\dots+Y_n)$

$= \mathbb{P}(Z_1+\dots+Z_n > 0)$ за $Z_i = X_i - Y_i$

ЦГТ

$\approx \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{-n\mathbb{E}Z_1}{\sqrt{n\mathbb{D}Z_1}}\right)$

$\mathbb{E}Z_1 = \mathbb{E}[X-Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$

= сметнато в 1.

$\mathbb{D}Z_1 = \mathbb{E}[(X-Y)^2] - (\mathbb{E}Z_1)^2$

$= \underbrace{\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2}_{\text{от 1.}} - 2\underbrace{\mathbb{E}[XY]}_{\text{от 3, или директно}} - (\mathbb{E}Z_1)^2$

от по-горе