Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.
Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Задача 1. Резервоар се пълни в началото на седмицата със сл.вел. $X \in [0,1]$ единици, а през седмицата се употребява сл.вел. Y. Нека съвместната плътност на тези две случайни величини е

$$f_{X,Y}(x,y) = 3x\mathbb{1}_{\{0\le y\le x\le 1\}} = \begin{cases} 3x, & \text{ако } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. (0.25 т.) Намерете вероятността в дадена седмица резервоарът да бъде запълнен с най-много 1/2 единици и да бъдат изразходвани повече от 1/4.

   •
   $$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{4}\right) = \int_{1/4}^{1/2}\int_{1/4}^{x} 3x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{1/4}^{1/2} 3x\left(x - \frac{1}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{128}\,.$$

2. (0.75 т.) Намерете $Cov(X,Y)$.

   • За $x \in [0,1]$
   $$f_X(x) = \int_0^x 3x\,\mathrm{d}y = 3x^2$$
   и следователно
   $$\mathbb{E}X = \int_0^1 x3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\,.$$
   Аналогично за $y \in [0,1]$
   $$f_Y(y) = \int_y^1 3x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left(1-y^2\right) \quad \text{и значи} \quad \mathbb{E}Y = \frac{3}{2}\int_0^1 y(1-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\,.$$
   Последното нужно количество е
   $$\mathbb{E}XY = \int_0^1\int_0^x xy3x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{2}x^4\,\mathrm{d}x = \frac{3}{10}$$
   и следователно отговорът е
   $$Cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \frac{3}{160}\,.$$

Задача 2. (1 т.) На спирките за градски транспорт се инсталират информационни табла с размери 10×100 диода. Доставени са качествени материали, като можем да моделираме времето на изправност на един диод чрез експоненциална сл. вел. със средно 10 години.

Опитът показва, че ако работят по-малко от 75% от диодите, информацията често е неразбираема и таблото трябва да се ремонтира. Каква е вероятността да трябва да бъде извършен ремонт след 3 години експлоатация?

• Всеки диод следва разпределението $Exp(1/10)$ и вероятността да работи поне три години е

$$\mathbb{P}(Exp(1/10) > 3) = \int_3^\infty \frac{1}{10}e^{-1/10x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-1/10x}\right]_3^\infty = e^{-3/10} =: p\,. \tag{1}$$

Следователно за $i = 1, 2, \ldots, 1000$ случайните величини

$$X_i = \mathbb{1}_{\{\text{диод i работи след три години}\}} = \begin{cases} 1, & \text{ако диод i работи след три години;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

следват разпределение $Ber(p)$. Напомняме, че то има очакване p и дисперсия $p(1-p)$. Тъй като дисперсията е крайна, можем да използваме централната гранична теорема за много добро приближение, т.к. $n := 1000$ е "сравнително голямо":

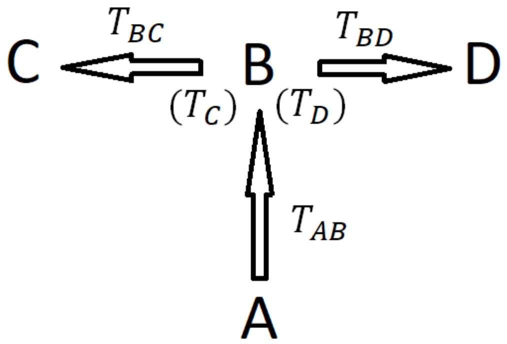
$$\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n < 750\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{750 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
$$\approx \mathbb{P}\left(N(0,1) < 0.66\right) = \Phi(0.66) \approx 74.54\%\,.$$

Задача 3. Да предположим, че можем да моделираме възвръщаемостите на три актива A, B и C като независими нормално разпределени случайни величини $N(3,2), N(3,3), N(1,10)$ и че разполагате с 5 единици за инвестиции.

1. (0.25 т.) Как бихте разпределили парите си, за да максимизирате очакваната печалба?
   - Всички комбинации от вида $x \cdot A + (5-x) \cdot B$ за $x \in [0,5]$ имат максималното очакване от 15.
2. (0.25 т.) Между всички възможности от 1., един начин за избор е да предпочетем разпределението с най-малка дисперсия. Кое е то?
   - $D(xA + (5-x)B) = 2x^2 + 3(5-x)^2 = 5x^2 - 30x + 75$, чийто min се достига за $x = 30/10 = 3$.
3. (0.5 т.) Рисков инвеститор залага 5-те си единици в независим актив $D \sim N(-2,20)$. Каква е вероятността неговата инвестиция да е по-успешна от тази в 2.?
   - Портфолиото от 2. е $\sim N(15,30)$.

$$\mathbb{P}(N(15,30) < N(-10,500)) = \mathbb{P}(N(25,530) < 0) = \mathbb{P}\left(N(0,1) < \frac{-25}{\sqrt{530}}\right) \approx \Phi(-1.09) \approx 13.79\% \,.$$

Задача 4. X и Y пътуват заедно от град A до B. След пристигането си, изчакват съответно автобуси до C и D. Предполагаме, че пътуванията траят съответно $T_{AB} \sim Exp(3), T_{BC} \sim Exp(4)$ и $T_{BD} \sim Exp(5)$, а изчакванията в B са $T_C \sim Exp(1)$ и $T_D \sim Exp(2)$, като така дефинираните времена са независими. Нека ξ и η са времената на пътуване на X и Y.



1. Намерете $\mathbb{P}(T_C + \ln(\mathbb{E}T_D) > 0)$.
   - Подобно на (1) и т.к. $\ln(1/2) = -\ln 2$, търсената вероятност е

$$\mathbb{P}(T_C > \ln 2) = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} \,.$$

2. Намерете $Cor(\xi, \eta)$.
   - $\xi = T_{AB} + T_C + T_{BC}$ и $\eta = T_{AB} + T_D + T_{BD}$. От независимостта, $D\xi = 1/9 + 1 + 1/16 = 169/144$ и $D\eta = 1/9 + 1/4 + 1/25 = 361/900$. Директно се проверява, че

$$Cov(X_1 + X_2, X_3) = \mathbb{E}\left((X_1 + X_2)X_3\right) - \mathbb{E}(X_1 + X_2)\mathbb{E}(X_3) = Cov(X_1, X_3) + Cov(X_2, X_3)$$

и следователно $Cov(\xi, \eta) = Cov(T_{AB}, T_{AB}) = DT_{AB} = 1/9$, което води до

$$Cor(\xi, \eta) = \frac{1/9}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{40}{247} \approx 0.1619 \,.$$