Легенда: - задача, представяща основен материал от курса; - трудна задача; - интересен пример; - задача от контролно (К1 и К2) или изпит (И).

Задача 1. Нека M е множество с n елемента (ще пишем $|M| = n$) и $a_1, \dots, a_k \in M$. Припомнете по колко начина можем изберем

(а) k различни елемента от M, т.е. $\{a_1, \dots, a_k\}$ (C_n^k);

(б) k-орка от различни елементи на M, т.е. $(a_1, \dots, a_n), a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ (V_n^k);

(в) k-орка от елементи на M, т.е $(a_1, \dots, a_n)$.

Задача 2. Колко решения има уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$, ако

(а) $x_1, \dots, x_k$ са естествени числа;

(б) $x_1, \dots, x_k$ са неотрицателни цели числа?

По колко начина можем да изберем k елемента от множество с n елемента, ако допускаме и повторения, т.е. k-елементно мултиподмножество?

Задача 3. Припомнете принципа за включването и изключването.

Задача 4. По колко начина можем да разпределим k различими частици в n различни клетки, ако

(а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;

(б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;

(в) няма празна клетка?

Отговорете на същите въпроси при положение, че частиците са неразличими.

Задача 5. Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако

(а) не се допуска повторение на цифри;

(б) допуска се повторение на цифри;

(в) не се допускат повторения и числото е нечетно?

Задача 6. Пет различими топки се разпределят в три различни кутии A,B и C. Да се намери броят на всички различни разпределения, за които:

(а) кутията A е празна;

(б) само кутията A е празна;

(в) точно една кутия е празна;

(г) поне една кутия е празна;

(д) няма празна кутия.

Задача 7. Колко е броят на думите с дължина n и съдържащи само символите a, b и c, такива че

(а) започват с a;

(б) съдържат точно k пъти символа a;

(в) съдържат точно k пъти символа a, при което и първият, и последният символ е a;

(г) съдържат съответно k_1, k_2 и k_3 пъти, $k_1 + k_2 + k_3 = n$, от символите a, b и c.

Задача 8. Нека $A = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}$. Колко са подмножествата на A, които съдържат поне един елемент a_i и поне един елемент b_j?

Задача 9. Да предположим, че номерата на колите са равномерно разпределени. Каква е вероятността номерът на случайна лека кола

(а) да не съдържа еднакви цифри;

(б) да има точно две еднакви цифри;

(в) да има три еднакви цифри;

(г) да има две двойки еднакви цифри;

(д) да има една и съща сума от първите две и последните две цифри?

Задача 10. Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно r човека. А ако се нареждат в кръг?

Задача 11. Картите от (случайно наредено) стандартно тесте се теглят последователно. А печели, ако се обърне седмица спатия, а B, ако се обърнат общо две аса. Каква е вероятността А да спечели? А ако B чака две поредни аса?

Задача 12. Хвърлят се 10 различими зара. Каква е вероятността да се паднат равен брой единици и шестици?

Задача 13. Застрахователна компания води статистика за своите клиенти

- всички клиенти посещават поне веднъж годишно лекар;
- 60% посещават повече от веднъж годишно лекар;
- 17% посещават хирург;
- 15% от тези, които посещават повече от веднъж годишно лекар, посещават хирург.

Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава само веднъж годишно лекар, да не е бил при хирург?

Задача 14. Хвърлят се два зара. Каква е вероятността сумата от падналите се числа да е по-малка от 8, ако се знае, че тя е нечетна? Независими ли са двете събития?

Задача 15. (Birthday paradox) Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността поне двама от тях да имат един и същ рожден ден да е по-голяма от 1/2?

Задача 16. Двама играчи последователно хвърлят монета. Играта печели този, който първи хвърли ези. Каква е вероятността за спечелване на играта за всеки от играчите? А ако печели този, който хвърли същото като падналото се непосредствено преди това?

Задача 17. В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. Каква е вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена, ако

1. след всяко изваждане топката се връща обратно в урната;
2. извадените топки не се връщат обратно?

Задача 18 (Monty Hall problem)**.** Зад една от 3 затворени врати има чисто нова кола, а зад другите две няма нищо. Избирате врата, след това водещият отваря една от останалите две врати, зад които няма нищо. Сега трябва да решите - сменяте ли избраната врата или запазвате първоначалния си избор?

Задача 19 (Boy or Girl paradox)**.** X има две деца. Ако по-старото е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета? А ако знаете, че поне едно от тях е момче, каква е вероятността и двете да са момчета?

Задача 20 (Reservoir sampling)**.** Нека *data* е масив с различни елементи, индексирани от 1. Каква е вероятността след изпълнението на следния алгоритъм:
sample да бъде равно на $A[1]$? А на $A[3]$? А да бъде равно на последния елемент от A?"

Algorithm 1: Reservoir Sampling for 1 Element

sample $\leftarrow$ the first element of *data*;
for $i \leftarrow 2$ **to** *the number of elements in data* **do**
  $j \leftarrow$ a random integer between 1 and i (inclusive) **if** $j = 1$ **then**
    sample $\leftarrow$ the i-th element of *data*
return *sample*

Задача 21 (Simpson's Paradox)**.** Долната таблица показва истински данни от успеваемостта на две лекарства при лечение на бъбречни камъни:

Лечение / Размер на камъните	А	Б
Малки	93% (81/87)	87% (234/270)
Големи	73% (192/263)	69% (55/80)
Общо	78% (273/350)	83% (289/350)

Кое лечение е по-добро?

Задача 22. (И, КН 2024)

1. (0.5 т.) Нека Ω е множество с 10 елемента. По колко начина можем да изберем негови три подмножества $A, B, C \subset \Omega$, така че да е изпълнено равенството

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1 + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)?$$

2. (0.5 т.) Нека Ω е множеството от ненамаляващи функции от $\{1, \dots, 10\}$ в $\{1, \dots, 20\}$. Каква е вероятността равномерно случаен негов елемент да бъде строго растяща функция?

Задача 23. Разполагаме с три стандартни зара и един, чиито страни са само шестици. По случаен начин избираме три от заровете и ги хвърляме. Да се определи вероятността да се паднат

1. три шестици;
2. различни цифри;
3. последователни цифри?

Задача 24 (Kahneman, Thinking Fast and Slow)**.** В град с две фирми за таксита, синя и зелена, през нощта се случва катастрофа с участието на такси, от която шофьорът на таксито бяга. Разполагате със следните данни:

- 85% от всички таксита са зелени и 15% са сини;
- свидетел дава показания, че таксито е било синьо;
- експертиза установява, че свидетелят определя правилно синьо/зелено в 80% от случаите и греши в останалите 20%.

Каква е вероятността колата наистина да е била синя?

Задача 25. Разполагаме с тест за рядко заболяване, който е точен в 99% от случаите и при заразените (когато трябва да е положителен), и при незаразените (когато трябва да е отрицателен). Ако знаете, че 0,5% от населението има това заболяване, каква е вероятността случайно избран човек с положителен тест да е болен?

Задача 26. На изпит се явяват 100 студенти, 55 момчета и 45 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.7, а момчетата - с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Задача 27. Играч залага 5 лева и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици печели 100 лева, а ако хвърли точно една шестица - 5 лева. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта?

Задача 28. Човек хвърля честна монета и при ези прави крачка напред, а иначе - назад. Каква е вероятността след 10 хвърляния да се намира:

1. на мястото, откъдето е тръгнал;
2. на разстояние 2 крачки от началната си позиция;
3. на 5 крачки пред началната си позиция?

Задача 29. Два зара се хвърлят последователно пет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които сумата от резултатите е шест, да бъде точно 2? Да се намери средната стойност на този брой.

Задача 30.

- (St. Petersburg paradox) Казино предлага следната игра: играч плаща A лева. След това хвърля монета, докато хвърли ези. Ако това се случи на n-тия ход, печели 2^n лева. При какви стойности на A бихте участвали?
- (Martingale strategy) Да разгледаме по-стандартна игра - казино предлага коефициент 2 при игра на ези/тура, т.е. при залог А, бихме спечелили чисто А. Играч залага само на ези, докато спечели, като удвоява залога си всеки път, когато не спечели. Каква е очакваната му печалба? Бихте ли пробвали?

Задача 31. А хвърля 3 монети, а В - 2. Печели този, който хвърли повече езита и взима всичките 5 монети. В случай на равен брой печели Б. Каква е вероятността А да спечели? Ако е спечелил А, каква е вероятността В да е хвърлил точно едно ези? Каква е средната печалба на играчите?

Задача 32. Подводница стреля n пъти последователно по кораб. Всяко торпедо улучва с вероятност p. Корабът има m отсека и ако торпедо улучи кораба, вероятността да наводни кой да е от тях е една и съща. Каква е вероятността корабът да бъде потопен, ако за това е необходимо да се наводнят поне два отсека?

Задача 33. Нека съществуват две равно вероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $H_0 : p_0 = 1/2$ и $H_1 : p_1 = 2/3$. Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако при провеждането на 200 опита са настъпили 120 успеха?

Задача 34. Хвърлят се два зара. Нека случайната величина X е сумата от падналите се точки. Да се намери разпределението, очакването и дисперсията на X, ако заровете са

1. правилни;
2. $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(6) = 1/4, \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = 1/8$.

Ще бъде ли необичайно, ако при хвърлянето на 1000 зара сумата е била повече от 3700?

Задача 35. В Патагония на месец се регистрират средно две слаби земетресения. Каква е вероятността за три месеца да има по-малко от четири слаби земетресения?

Задача 36. A и B стрелят по мишена, като стрелят едновременно, а ако никой не улучи - стрелят отново. A улучва с вероятност 0.2, а B - с 0.3. Каква е вероятността A да улучи, а B - не. Какъв е средният брой изстрели, необходими за уцелване на мишената?

Задача 37. (К1, КН 2024) A и B играят последователно партии, като A печели една партия с вероятност 2/3, а B - с 1/3. Равни партии не са възможни. Играта продължава докато някой спечели две последователни партии. Нека X е случайната величина „брой на изиграните партии". Да се определи разпределението и математическото очакване на X.

Задача 38. Нека ξ, η са независими случайни величини с разпределение $P(\xi = k) = P(\eta = k) = q^k p, k = 0, 1, \dots, p > 0, p + q = 1$. Нека $\zeta = \max(\xi, \eta)$.

1. Да се намери разпределението на ζ.
2. Да се намери разпределението на $\tau = (\zeta, \xi)$.

Задача 39. В урна има 3 бели и 2 черни топки. От урната теглим последователно без връщане топки. Нека ξ е номерът на тегленето на първата бяла топка. След това продължаваме да теглим, докато се появи черна топка. Нека η е номерът на опита на тегленето на първата черна топка след първата бяла. Дефинираме $\eta = 6$, ако няма такава. Да се определи

- съвместното разпределение на η и ξ;
- $\mathbb{P}(\eta > 2|\xi = 1)$ и $\mathbb{P}(\eta = 3|\xi < 3)$.

Задача 40. От числата $1, 2, 3, 4$ и 5 се избират по случаен начин три. Нека случайната величина $X =$ „средното по големина от избраните три”, а $Y =$ „най-малкото от избраните числа”. Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y;
2. маргиналните разпределения на X и Y;
3. да се провери дали X и Y са независими;
4. ковариацията и коефициента на корелация на X и Y;
5. разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина $Z = X - 2Y$.

Задача 41. Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека X е броят езита, паднали се при първите три хвърляния, а Y - броят езита от последните две. Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y;
2. условните разпределения на X и Y, т.е. $\mathbb{P}(X = k|Y = l)$ и $\mathbb{P}(Y = k|X = l)$ за подходящи k и l;
3. $\mathbb{P}(X = Y), \mathbb{P}(X > 1|Y = 1)$ и $P(X + Y > 2|X = 2)$;
4. разпределенията на $E(X|Y)$ и $E(Y|X)$.

Задача 42. (К1, КН 2024)

1. (0.25 т.) Нека X е случайно число измежду $\{0, 1, 2\}$ и $Y \sim Ber(2/3)$ е независима от него сл. вел. Намерете съвместното разпределение и корелацията на X и $Z := (X + Y)(\text{mod } 3)$.
2. (0.25 т.) Нека X е равномерно случайно число от $\{1, \dots, 6\}$. Намерете пораждащата функция на X и изразете чрез нея $\mathbb{E}[X]$ и DX.
3. (0.5 т.) Нека X и Y са случайни величини със стойности в $\{0, 1, \dots\}$. Вярно ли е, че ако X и Y са независими, то за всяко $s \geq 0$, $g_X(s)g_Y(s) = g_{X+Y}(s)$? А вярно ли е, че ако всяко $s \geq 0$, $g_X(s)g_Y(s) = g_{X+Y}(s)$, то X и Y са независими? Докажете твърденията си.

Задача 43. Нека n е естествено число. Избираме естествени u_i по следния начин: u_1 е равномерно случайно измежду $[1, n]$, u_2 измежду $[1, u_1 - 1]$, u_3 измежду $[1, u_2 - 1]$ и т.н., докато $u_\ell = 1$ за някое $\ell \leq n$. Нека E_n е множеството от избраните числа, т.е. $E_n := \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$.

1. (0.5 т.) Намерете $\mathbb{P}(k \in E_n)$ за $k \leq n$.
2. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{P}(2 \in E_n|3 \notin E_n)$.
3. (0.5 т.) Намерете $\mathbb{E}[|E_n|]$.

Задача 44. Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека X е броят езита, паднали се при първите три хвърляния, а Y - броят езита от последните две. Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y;
2. условните разпределения на X и Y, т.е. $\mathbb{P}(X = k|Y = l)$ и $\mathbb{P}(Y = k|X = l)$ за подходящи k и l;
3. $\mathbb{P}(X = Y), \mathbb{P}(X > 1|Y = 1)$ и $P(X + Y > 2|X = 2)$;
4. разпределенията на $E(X|Y)$ и $E(Y|X)$.

Задача 45. Билетите в лотария имат номера от 0 до 999999. Да се определи вероятността случайно избран билет

1. да има сума от цифрите, равна на 21;
2. да има равна сума от първите три и последните три цифри;
3. сумата от първите три цифри да е с 2 по-голяма от сумата на последните три.

Задача 46. Магически квадрат е таблица 3x3, запълнена с числа, така че сборът по всички редове, колони и 2-та главни диагонала е равен.

Петокласник трябва да попълни магическия квадрат по-долу, използвайки числата от 1 до 9 точно по веднъж.

2	7	
	5	
		8

Тъй като няма желание да събира числа, решава да напише програма, която да запълва случайно квадратчетата, докато намери правилната конфигурация.

Една симулация се състои от избора на 5 равномерни числа измежду $\{1, 2, \dots, 9\}$ и поставянето им в квадрата последователно в реда отгоре надолу и отляво надясно.

1. Колко е очакването на броя познати числа при всяка симулация?
2. Колко е очакваният брой симулации до достигането на правилната наредба?
3. Можете ли да предложите число n, такова че с вероятност 99% ще сме уцелили поне веднъж след n симулации?

Можете ли да отговорите на същите въпроси, ако **симулацията се състои от случайна подредба на липсващите числа, т.е. на $(1, 3, 4, 6, 9)$?**

Задача 47. (И, СЕМ 2023) Монета с вероятност p за ези се хвърля n пъти. Нека E е събитието „пада се ези при първото хвърляне“, а F_k е събитието „точно k пъти се пада тура“. За кои двойки цели числа (n, k) събитията E и F_k са независими?

Задача 48. Да предположим, че всяка секунда стреличка попада в случайно квадратче на решетката по-долу.

- Колко е очакваното време докато във всяко квадратче има поне по една стреличка?
- Колко е очакваното време до първия момент, в който има две стрелички в някое от квадратчетата?
- Можете ли да обобщите, ако решетката е $n \times n$?

Задача 49. Нека $(X_1, \dots, X_n)$ е случайна пермутация на числата от множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ и $S = X_1 + \dots + X_n$.

1. Намерете $\mathbb{E}S$ и DS.
2. Докажете, че за две случайни величини X и Y е изпълнено $D(X + Y) = DX + DY + 2Cov(X, Y)$.
3. Изразете $\mathbb{E}S$ чрез $\mathbb{E}X_i$. Намерете $\mathbb{E}X_i$, $\mathbb{E}X_i^2$ и DX_i за всяко i.
4. Изразете DS чрез DX_i и $Cov(X_i, X_j)$. Намерете $Cov(X_i, X_j)$ за всеки i, j.

Задача 50. Разглеждаме информация, съставена от 8 бита. Поради шум при изпращането между сървъри, всеки бит може да бъде предаден погрешно с вероятност p.

0	1	0	0	0	1	1	1

1. Каква е вероятността съобщението да бъде правилно предадено между два сървъра - А и В, които са свързани директно? Какво е очакването на правилния брой битове в крайното съобщение?

2. Можете ли да отговорите на същите въпроси от от а), ако съобщението минава (точно по веднъж) през $n = 3$ междинни сървъра? *Какви са резултатите при $n \to \infty$?

Задача 51. Метод за решаване на двубои във футбола е изпълняването на дузпи. Можем да считаме, че това се случва по следния начин: първо се изпълняват 5 кръга по 1 дузпа за всеки отбор. Ако има равенство след тях, се продължава докато някой от отборите отбележи, а другият - не.

Да предположим, че играчите на единия от отборите отбелязват с вероятност 75 %, а на другия - с вероятност 80%. Приемаме също, че изпълненията са независими.

1. Каква е вероятността през първите 5 рунда двата отбора да са отбелязвали в едни и същи рундове?

2. Каква е вероятността след първите 5 кръга да има равенство? А след първите 10 кръга?

3. Какъв е очакваният брой дузпи, които ще се изпълнят общо от двата отбора?

Задача 52. $n > 2$ човека хвърлят честна монета. Победител е този, който хвърли обратното на всички други. Ако такъв няма, играчите хвърлят отново. Нека X е броят кръгове до излъчването на победител. Какво е очакването и дисперсията на X?

Да предположим, че след излъчването на първи победител, играта продължава докато останат двама играчи. Колко е броят на очакваните ходове? Ако k-тият победител печели $100(n-k)$, колко бихте платили, за да участвате в тази игра?

Задача 53. 1. Играч хвърля 3 честни монети и 3 стандартни зара. За всяко ези получава по 1 лв, а за всяка 6-ца, по 3 лв. Колко е очакваната му печалба?

2. Играч хвърля зар, докато сумата от падналите се числа се дели на 6. Ако това се случи на k-ти ход, той печели k лв. Каква е очакваната му печалба?

3. Нека X има разпределение върху $0, 1, 2, \ldots$, така че, за $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = k-1)} = \frac{3}{k}.$$

Намерете очакването и дисперсията на X.

4. Нека броят посетителите на стадион за даден ден е $Y \sim Poi(\lambda)$. Стадионът разполага с 10 входа $E_1, \ldots, E_{10}$ и всеки посетител избира с равна вероятност кой да е от тях. Какво е разпределението, очакването и дисперсията на посетителите, влезли през вход E_1?

Задача 54. Някои от стандартните разпределения, с които сме се запознали са $Ber(p)$, $Bin(n, p)$, $Ge(p)$, $Poi(\lambda)$.

Нека X_1 и X_2 са независими и еднакво разпределени случайни величини с някой от горните закони (т.е. имаме 4 различни възможности). Изпълнено ли е, че X_1X_2 или $X_1 + X_2$ имат същия тип разпределение като X_1 (евентуално с други параметри)? Аргументирайте се напълно.

Ако отговорът е не във всички случаи, можете ли да дадете пример, в който имаме подобна ситуация?

Задача 55. Нека X_1, X_2 и X_3 са независими и еднакво разпределени сл. вел. с очакване μ и дисперсия σ^2. Страничен наблюдател иска да оцени очакването $\mathbb{E}f := \mathbb{E}f(X_1, X_2, X_3)$, но вижда една тяхна реализация: (x_1, x_2, x_3). Една възможност е да оцени $\mathbb{E}f$ чрез $f(x_1, x_2, x_3)$. Друга такава е да опита изкуствено да увеличи наблюденията си, като разгледа и допълнителни три наредби $(x_2, x_1, x_3), (x_3, x_2, x_1)$ и (x_1, x_3, x_2) и осредни резултата и по тях. Преценете има ли разлика в точността на оценките от двете процедури, като пресметнете съответните очаквани стойности и дисперсии, ако:

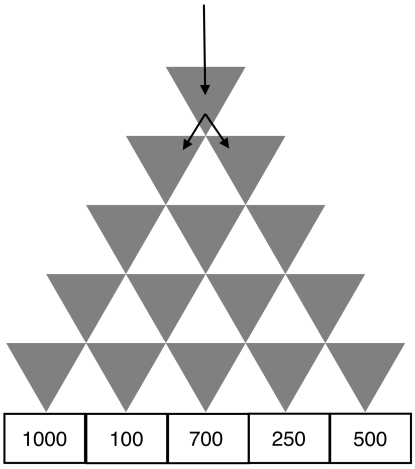
1. $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$;

2. $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 - X_3$;

3. $f(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 - X_3$.

Пример: При наблюдение $(3, 8, 1)$*, за функцията в точка 3, едната оценка е* $3 \cdot 8 - 1 = 23$*, а другата, след добавянето на* $(8, 3, 1), (1, 8, 3)$ *и* $(3, 1, 8)$ *е* $((3 \cdot 8 - 1) + (8 \cdot 3 - 1) + (1 \cdot 8 - 3) + (3 \cdot 1 - 8))/4 = 11.5$

✎ **Задача 56.** Играч в „Треска за злато" [1] пуска топче в пирамидата на късмета в най-горния триъгълник, като то пада в един от долните два с равна вероятност.



1. Каква е разпределението и очакваната печалба при едно пускане?
2. Ако регламентът е, че имате право да пускате топчета докато някое попадне при печалба 1000лв, колко средно топчета ще пуснете? Колко ще е очакваната Ви печалба?
3. При началната наредеба водещият Ви предлага да пермутира случайно печалбите. Бихте ли се съгласили или бихте останали с началното разпределение? А как бихте наредили печалбите, ако имахте тази възможност?

Поради различни аномалии се усъмнявате, че топчето пада вляво/вдясно с равна вероятност. Нека p е вероятността да се отклони наляво.

4. Пускате 3 топчета и те се озовават при печалба 100 лв. Кое е това p, за което това е най-вероятно?
5. Получавате информация, че предаването разполага с две пирамиди: една с $p = 1/2$ и една с $p = 1/3$. Тъй като не знаете коя използват в момента, можете да приемете, че вероятността е равна за коя да е от тях. Ако при две пускания топчетата се озовават по средата (700 лв), каква е апостериорната вероятност да е избрана машината с $p = 1/3$

✎ **Задача 57.** Разполагаме с две кутии с топки. В първата има 4 бели и 6 черни, а във втората - 7 бели и 3 черни. От всяка урна случайно се изважда по 1 топка. Към извадените две топки се прибавя една бяла и се поставят в трета кутия.

1. Каква е вероятността случайно избрана топка от третата кутия да бъде бяла?
2. Да допуснем, че теглим от третата кутия по 1 топка с връщане, докато изтеглим бяла. Нека X е броят изтеглени топки от третата кутия. Какво е очакването на X? Мислите ли, че X има геометрично разпределение?

✎ **Задача 58.** (К1, СЕМ 2023)

1. Нека $X \sim Ge(p)$, т.е. $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$ за $k \geq 0$; Докажете свойството липса на памет: за всеки $m, n \geq 0$, $\mathbb{P}(X > m + n | X \geq n) = \mathbb{P}(X > m)$.
2. Докажете обратното твърдение, ако Y е сл. вел. със стойности в $\{0, 1, 2, \dots\}$ и за всеки $m, n \geq 0$, $\mathbb{P}(Y > m + n | Y \geq n) = \mathbb{P}(Y > m)$, то $Y \sim Ge(p)$ за някое $p \geq 0$.
3. Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими случайни величини и дефинираме $X_{\min} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$ и аналогично $X_{\max}$. Кои от изразите

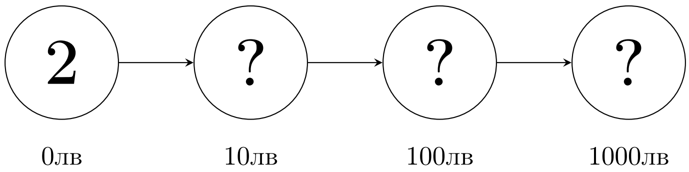
   $$\mathbb{P}(X_1 > m)^n,\ \mathbb{P}(X_1 \leq m)^n,\ \mathbb{P}(X_1 \leq m),\ 1 - m\mathbb{P}(X_1 > m)^n,\ 1 - \mathbb{P}(X_1 > m)^n, (1-m)(1 - \mathbb{P}(X_1 > m)^n)$$

   изразяват вероятностите съответно $\mathbb{P}(X_{\min} \leq m)$ и $\mathbb{P}(X_{\max} \leq m)$? Докажете го.
4. (0.25 т.) Хвърлят се 5 стандартни зара едновременно. Ако на някой/някои от заровете се падне шестица, той/те се отстранява, а останалите се хвърлят отново, докато не останат зарове. Нека K е общият брой хвърляния. Намерете $\mathbb{P}(K \leq n)$ и $\mathbb{P}(K = n)$.

[1] https://bit.ly/3nRl2pG, https://bit.ly/3Bc0bj0.

Задача 59. (К1, СЕМ 2023) В телевизионно лотарийно шоу се използва случаен генератор, който избира равномерно цяло число от 1 до 5. Играта е следната[2]:

- Избира се случайно число (числото 2 в примера);
- Играчът има право да се откаже, в такъв случай печели сумата под последното изтеглено число, или да се опита да познае дали следващото число ще бъде по-малко или по-голямо от предишното. **Гарантирано е, че последователните числа са различни**;
- ако не познае, не печели нищо и играта свършва. Ако познае, има право да продължи, докато стигне голямата награда от 1000лв.



1. Предложете стратегия и пресметнете вероятността играчът да спечели, както и очакваната печалба при нея, ако играчът е решил да познава точно k пъти за $k = 0, 1, 2, 3$. Сравнете със стратегията, когато играчът избира винаги случайно по-голямо/по-малко независимо с вероятност $1/2$.
2. *Бонус: Напишете псевдокод, който решава горната задача при избор на число между* 0 *и* n*, т избора на участника и съответно награди* $c_0, \ldots, c_n$.
3. *Бонус: Напишете псевдокод, който би определил дали е оптимално да се откажете или да се опитате да познаете след края на всеки рунд в общия вид на играта от точка 2.*

[2] https://shorturl.at/bjlqU

Задача 60. Даден е кръг с радиус R. Върху диаметъра по случаен начин е избрана точка A. През точка A е прекарана хорда перпендикулярна на диаметъра. Каква е вероятността хордата да бъде по-къса от R?

Задача 61. Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан през един и същи ден. Всеки от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент от денонощието. Каква е вероятността параходите да не се засекат, ако за разтоварването на първия са необходими 6, а за втория 4 часа?

Задача 62. Автобусите от линия A се движат на интервали от пет минути, а от линия B на десет минути, независимо от автобусите от линия A. Каква е вероятността

1. автобус от A да дойде преди автобус от Б;
2. пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути?

Задача 63. Дадена е отсечка с дължина K. По случаен начин се избират две други отсечки с дължина по-малка от K. Каква е вероятността от трите отсечки да може да се построи триъгълник?

Задача 64. Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от K да може да се построи триъгълник?

Задача 65. Дадена е магнетофонна лента с дължина 100м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснат съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 25 и 50м, считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?

Задача 66. По случаен начин и независимо едно от друго се избират две числа x и y в интервала (0, 1]. Каква е вероятността на събитията

1. $xy \leq 1/4$;
2. $x + y \leq 1$ и $x^2 + y^2 \geq 1/2$;
3. $xy \geq 2/5$ и $x^2 + y^2 \leq 1$?

Задача 67. Разделяме случайно отсечка с дължина 1 на 3 части. Каква е вероятността те да могат да образуват триъгълник?

☺ **Задача 68.** (Bertrand Paradox) Да разгледаме равностранен триъгълник, вписан в окръжност с радиус 1. Каква е вероятността случайно избрана хорда от тази окръжност да е по-дълга от страната на триъгълника?

Задача 69. Дадена е случайна величина X с плътност $f_X(x) = \begin{cases} c(x^2+2x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$. Намерете

1. константата c;
2. $\mathbb{E}X$ и DX;
3. вероятността X да е по-малка от математическото си очакване;
4. очакването на случайната величина $X^2 + 3X$.

Задача 70. Върху окръжност $k(O, r)$ е фиксирана точка A, а точка B попада по случаен начин върху окръжността. Да се намери математическото очакване на лицето на $\triangle AOB$.

Задача 71. Нека $X \sim U(0, 7)$ е времето на безотказна работа в години на даден апарат. Съгласно гаранцията на апарата, той ще бъде заменен с нов на петата година или преди това, в случай на дефект. Нека Y е времето до смяната на апарата. Да се пресметнат $\mathbb{P}(Y < 4)$, $\mathbb{E}Y$ и DY. Ако са продадени 1000 апарата, колко средно ще трябва да се подменят преди петата година?

Задача 72. Във вътрешността на кръг с радиус R случайно се избират точките A и B. Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус AB да лежи във вътрешността на кръга.

Задача 73. В магазин работят две касиерки. Предполагаме, че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е експоненциално разпределена случайна величина с математическо очакване 8(мин) за първата опашка и 5(мин) за втората. Клиент, избрал по случаен начин опашка, е чакал по-малко от 4 минути. Каква е вероятността той да е бил на първата опашка?

Задача 74. Времето за преглед на пациент е експоненциално разпределена случайна величина с очакване 30(мин). За преглед има записани двама пациенти - първият за 11:00, а вторият за 11:30, като и двамата пристигат в точно определения час. Ако прегледът на първия не е завършил, вторият изчаква. Да се пресметне средно колко време ще прекара вторият пациент в поликлиниката.

Задача 75. Нека случайната величина $X \sim Exp(\lambda)$. Да се намерят плътностите на случайните величини

- $Y = -X$;
- $Y = 2X - 1$;
- $Y = \sqrt{X}$;
- $Y = X^\alpha$ за $\alpha > 0$.

Задача 76. Лъч (светлина) минава от точката $(0, 2)$ към т. $(0, 1)$ и се пречупва случайно, сключвайки ъгъл $\theta \in (-\pi/2; \pi/2)$ с Oy. Нека X е точката, в която пречупеният лъч пресича Ox. Да се намери плътността на X.

Задача 77. Монета, за която вероятността за падане на ези е $3/4$ се хвърля 2000 пъти. Каква е вероятността броят на падналите се езита да е между 1475 и 1535?

Задача 78. Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е настроено така, че през фиксиран час, в случаен момент X ще запали лампите, а в момент Y ще ги угаси. Нека съвместната плътност на случайните величини X и Y е $f_{X,Y}(x, y) = cxy, 0 < x < y < 1.$. Да се намери

1. константата c;
2. маргиналните плътности и математическите очаквания;
3. вероятността лампите да бъдат запалени преди 45-тата минута и да светят по-малко от 10 минути;
4. колко е средното време на светене, ако лампите са запалени на 15-тата минута;
5. каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20 минути?

Задача 79. Върху страните на квадрат, независимо една от друга, по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е a.

Задача 80. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1/(X_1 + X_2)$.

Задача 81. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim U(0, 1)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1 + X_2$.

Задача 82. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на случайната величина

1. $Y = \max(X_1, X_2)$;
2. $Y = \min(X_1, X_2)$.

Задача 83. Нека ξ и η са независими случайни величини, $\xi \sim Exp(2)$ и $\eta \sim U(0, 3)$, т.е.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{ако } x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ако } 0 < x < 3 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Намерете корелация на ξ и η, $P(\xi < \eta)$ и плътността на ξ/η.

Задача 84. *(K2, CEM 2020)* Точка A попада случайно в окръжност $k(O, 1)$ с център O и радиус 1. Нека случайната величина X е равна на $|OA|$. Можете ли да предположите колко са модата и медианата? Аргументирайте се. Колко бихте очаквали да е $\mathbb{E}X$? *(Мода на дискретно разпределение наричаме стойността с най-голяма вероятност. В непрекъснатия случай, по аналогия, се интересуваме от стойността, която максимизира f_X. Наричаме a медиана на разпределението на X, ако $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq a) = 1/2$.)*

1. Намерете функцията на разпределение, плътността, очакването и дисперсията на X.
2. Нека сега разгледаме 3 точки, A_1, A_2 и A_3, които попадат случайно и независимо една от друга в същата окръжност. Колко е очакването на разстоянието до най- близката до центъра? А до най-отдалечената? *(Бонус: Намерете очакваното разстояние до средната точка. Би ли трябвало то да е равно на $\mathbb{E}X$?)*

Задача 85. *(K2, ВиС 2021)* На спирките за градски транспорт се инсталират информационни табла с размери 10×100 диода. Доставени са качествени материали, като можем да моделираме времето на изправност на един диод чрез експоненциална сл. вел. със средно 10 години.

Опитът показва, че ако работят по-малко от 75% от диодите, информацията често е неразбираема и таблото трябва да се ремонтира. Каква е вероятността да трябва да бъде извършен ремонт след 3 години експлоатация?

Задача 86. *(K2, ВиС 2021)*Да предположим, че можем да моделираме възвръщаемостите на три актива A, B и C като независими нормално разпределени случайни величини $N(3, 2), N(3, 3), N(1, 10)$ и че разполагате с 5 единици за инвестиции.

1. Как бихте разпределили парите си, за да максимизирате очакваната печалба?
2. Между всички възможности от 1., един начин за избор е да предпочетем разпределението с най-малка дисперсия. Кое е то?
3. Рисков инвеститор залага 5-те си единици в независим актив $D \sim N(-2, 20)$. Каква е вероятността неговата инвестиция да е по-успешна от тази в 2.?

Задача 87. Ентусиаст се интересува от стойността на π, като разполага с компютър, но няма достъп интернет. По тази причина, решава да симулира голям брой равномерно разпределени случайни точки в $[0, 1] \times [0, 1]$ и да разгледа каква част от тях попадат във вписаната за този квадрат окръжност.

Можете ли да обясните как това може да доведе до оценка за π и защо? Колко точки трябва да се симулират, така вероятността грешката да бъде по-малка от 0.001 е 95%?

Задача 88. Попълваме случайно 1 байт, т.е. можем и да кажем, че разглеждаме числата от $00000000_{(2)}$ до $11111111_{(2)}$, т.е. от $0_{(10)}$ до $255_{(10)}$. Ако избираме първия бит (отляво надясно) да бъде 1 с вероятност 1/2, втория да бъде 1 с вероятност 1/4 и т.н.

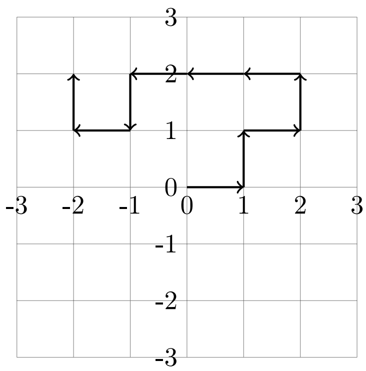
0	1	0	0	0	1	1	1

1. Какъв е очакваният брой единици?
2. Какво е очакването на числото, което представлява полученият байт в десетична бройна система? В примера от по-горе, числото е 71.

Задача 89. Цената на имот в близост до ФМИ е 250 000 евро. Опитен брокер може да договори различна цена, като процента, с който изменя цената е сл.вел $X_1 \sim N(-10, 10)$. В случай, че преговаряте сами, може да промените цената с $X_2 \sim N(0, 100)$ процента, като X_1 и X_2 са независими.

1. Каква е вероятността цената да е по-добра, ако преговаряте сами, отколкото с брокер?
2. Каква е вероятността да се договори цена под 225 000 евро във всеки от случаите?

Задача 90. *(К2, СЕМ 2022)* Точка започва да се движи от началото на координатната система успоредно на някоя от осите, като всеки път избира равномерно една от посоките и се премества на 1 в съответната посока. На картинката по-долу може да видите примерна реализация на маршрут от 10 стъпки.

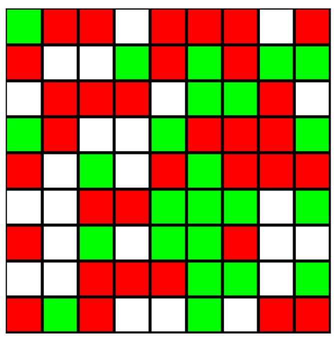


1. Каква е вероятността след 1000 стъпки x-координатата да бъде по-голяма от 10?
2. Намерете очакването и дисперсията на квадрата от разстоянието до центъра след 100 стъпки.

Задача 91. *(К2, СЕМ 2022)* Нека $X_0 \sim Exp(1)$ и $X_n = 2X_{n-1} + \epsilon_n$ за $n \in \mathbb{N}$, където ϵ_n са независими $N(0, 1)$ случайни величини.

1. Намерете $\mathbb{E}X_n$ и DX_n.
2. Нека $S_{n,1} = \sum_{i=1}^{n}(X_n - 2X_{n-1})^2$ и $S_{n,2} = \sum_{i=1}^{n}|X_n - 2X_{n-1}|$. Намерете $\mathbb{E}S_{n,1}$ и $\mathbb{E}S_{n,2}$.
3. Можете ли да отговорите на въпросите от 1. и 2., когато $\epsilon_i \sim N(1, 2)$?

Задача 92. *(И, СЕМ 2022)* Квадратчетата от решетка 9x9 се оцветят по случаен начин в един от цветовете бяло, зелено и червено.



1. Какъв е очакваният брой на квадратчетата, които са оцветени в бяло или зелено? Каква е вероятността те да бъдат поне 60?

   Хоризонтално (вертикално) знаме ще наричаме три последователни хоризонтални (вертикални) клетки, оцветени в бяло, зелено и червено от ляво надясно (от горе надолу).

2. Вярно ли е, че броят хоризонтални знамена е биномно разпределен и ако да, с какви параметри?
3. Какво е очакването на броя хоризонтални знамена?

4. Независими ли са броевете хоризонтални и вертикални? Какъв е очакваният общ брой на хоризонтални И вертикални знамена?

Задача 93. *(И, СЕМ 2022)* Нека $X_1, X_2, \dots$ независими $Exp(1)$ сл. вел. и $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Намерете плътността на S_2 и докажете по индукция, че плътността на S_n е

$$f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

2. Нека $N_t := \max\{n : S_n \le t\}$. Докажете, че $\mathbb{P}(N_t \ge n) = \mathbb{P}(S_n \le t)$ и че $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \le t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \le t)$.

3. Намерете разпределението на N_t.

Задача 94. *(И, ВиС 2023)* Нека $U \sim U(0,1)$ и $V \sim U(-\pi/2, \pi/2)$.

1. Метод за генериране на псевдослучайно число между 0 и 1 чрез U е да се избере (обикновено голямо) естествено число M и да се пресметне дробната част на MU, $X := \{MU\}$. Намерете $\mathbb{E}X, DX$ и $Cor(U,X)$. Какво е мнението ви за този метод?

2. Нека $U_1, \dots, U_{100} \sim U$ са iid. Какво е очакването на всяко от тях? А на най-голямото и най-малкото измежду им?

3. Намерете плътността, очакването и дисперсията на сл. вел $Y := \operatorname{tg} V$.

4. Нека $Z \sim Cauchy(1)$, т.е. $f_Z(x) = 1/(\pi(1+x^2))$ за $x \in \mathbb{R}$. Докажете, че сл.вел. $1/Z$, $2Z/(1-Z^2)$ и $(3Z - Z^3)/(1-3Z^2)$ имат еднакви разпределения.

Задача 95. *(И, ВиС&СЕМ 2023)* Нека съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x,y) = cx + y$ за $x, y \ge 0, x + 2y \le 1$ и 0 извън тази област, където c е някаква константа.

1. Намерете c, плътността на X и очакването на Y.

2. Намерете $\mathbb{E}(Y|X = 1/2)$.

3. Намерете плътностите на случайните величини $Z = X + 2Y$ и $Z = XY$.

4. Нека $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ са независими и еднакво разпределени като (X, Y). Оценете вероятността $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > Y_1 + \dots + Y_n)$ за големи n.

Задача 96. *(К2, ВиС 2023)* Законът на Бенфорд[3], известен още като „законът за първа цифра", е емпирично наблюдение, че в много реални бази от данни, първата ненулева цифра (при това не само в десетично представяне!) не е равномерно разпределена, а е най-често 1. Десетичното разпределние на Бенфорд пък е разпределение върху $\{1, 2, \dots, 9\}$, за което вероятността на цифрата d е $\log_{10}(1 + 1/d)$.

Намерете с точност 0.01 вероятността първата ненулева цифра в десетичното представяне на X да бъде 1 за:

1. $X \sim N(0,1)$;

2. $X \sim Exp(1)$;

3. $X = U_1/U_2$ за независими $U_1, U_2 \sim U(0,1)$. Намерете $\mathbb{E}X$.

4. *бонус: X = „случайна положителна степен на 2".* Формално, намерете $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n$ започва с 1) за $X_n = 2^{U_n}$, $U_n \sim U(\{1, 2, \dots, n\})$.

Сравнете с разпределението на Бенфорд.[4]

Задача 97. *(К2, ВиС 2023)* Нека $X_1, X_2 \sim \Gamma(3,2)$, т.е $f_X(x) = 4x^2e^{-2x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}$.

1. Намерете плътността $Y = X_1/(X_1 + X_2)$.

2. Намерете $Cor(X_1, X_2)$ и $Cor(X_1 + X_2, Y)$.

3. Независими ли са $X_1 + X_2$ и Y?

[3] Забелязан от Newcomb в логаритмични таблици през 1881 и при по-голям набор от данни от Benford през 1934.

[4] Ако имате време, може да опитате да пресметнете вероятностите и за цифрите, по-големи от 1 и да сравните с разпределението на Бенфорд.

Задача 98. *(К2, ВиС 2023)* Според компания за производство на чипове, само 1 на всеки 1000 чипа е неизправен.

1. Как бихте оценили вероятността от 100 чипа да има поне 1 неизправен чрез ЦГТ? Какви други начини бихте предложили?

2. Неравенството на Бери-Есен гласи, че ако $X_1, \ldots, X_n$ са iid сл. вел. и

$$\mu := \mathbb{E}X_1, \sigma := \sqrt{DX}, \rho := \mathbb{E}\left[|X-\mu|^3\right] < \infty, Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

то

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{\rho}{2\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Как това може да е полезно при евентуално решение на 1.? При какви n, грешката при приближение чрез ЦГТ би била под 0.001, ако приемете че информацията, дадена от компанията е вярна?

Задача 99. Хвърля се зар, на две от чиито страни е изписана цифрата 1, на други две – цифрата 3, на една от оставащите две страни – цифрата 5, а на последната страна – цифрата 7. Нека сл.вел. X е резултатът от едно хвърляне на зара.

- Да се намери разпределението, математическото очакване и дисперсията на X. Да се намери вероятността при 5 хвърляния, общият брой на 3-ките и 7-ците да бъде 4.

- Намерете приблизително вероятността сумата от 100 хвърляния да надвишава 2222. А 4444?

- Намерете очаквания брой хвърляния до падането на стотната 7-ца. Колко е очакваният брой тройки до този момент?

Задача 100. (И, ВиС&СЕМ 2024)

1. (0.5 т.) Нека $q \in (0,1)$ и $U_1 \sim U(0,1)$. Да дефинираме и $X := 1 + \left\lfloor \frac{\ln(U_1)}{\ln(q)} \right\rfloor$, където с $\lfloor x \rfloor$ бележим цялата част на числото x, например $\lfloor 1.15 \rfloor = 1$ и $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Какви стойности приема X? Намерете разпределението и очакването му.

2. (0.25 т.) Нека $U_1, U_2 \sim U(0,1)$ са независими и $Y := \ln(U_1)/\ln(U_2)$. Намерете плътността и очакването на Y.

3. (0.25 т.) Вярно ли е, че $1 + \lfloor \ln(U_1)/\ln(U_2) \rfloor$ има геометрично разпрделение? Обяснете защо.