зад. 8 $\Omega = \{$ходят на лекар$\}$

$A = \{$посещават > 1 лекар$\}$

$P(A) = 60\% \Rightarrow P(\overline{A}) = 40\%$

$B = \{$посещават хирург$\}$

$P(B) = 17\%$

$P($от B, ако знаем, че е от A$) = 15\%$

всички

$= \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$

Търси се $P(\overline{B}|\overline{A})$?

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

$= 60\% \cdot 15\%$

$= \dfrac{\cancel{60}^{3}}{100} \cdot \dfrac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{100}_{2}}$

$= \dfrac{9}{100} = 9\%$

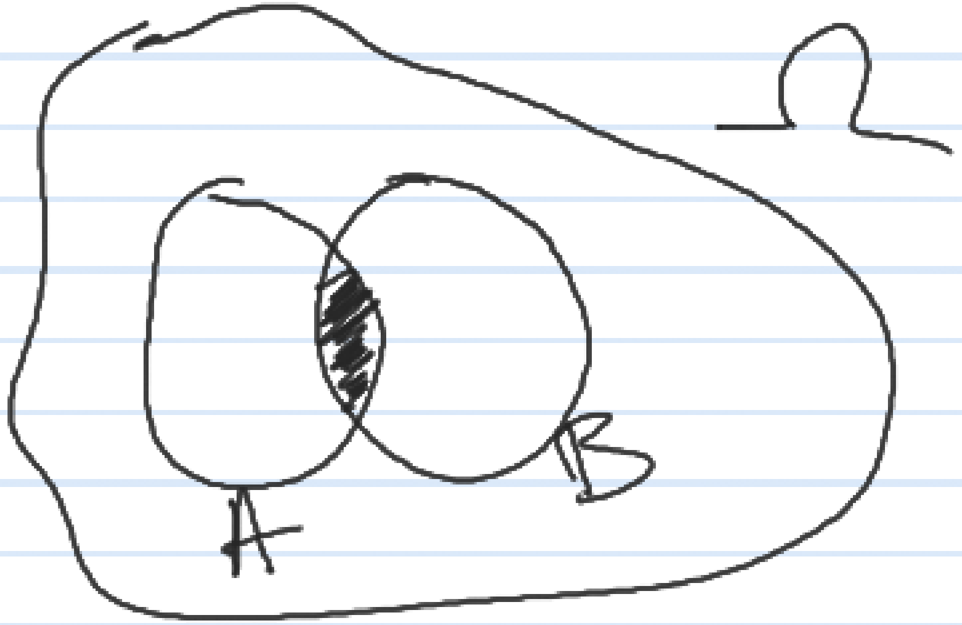
$P(\overline{B}|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$

$= \dfrac{P(\overline{A \cup B})}{40\%} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{40\%}$

$$= \frac{100\% - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{40\%}$$

$$= \frac{100\% - (60\% + 17\% - 9\%)}{40\%}$$

$$= \frac{100 - 68}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5} = \underline{\underline{80\%}}$$



Вероятността на A, ако знаем, че сме в B (т.е. B се е случило)

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \mid B)$$

условна в-ст

$\mathbb{P}(B) > 0$

A и B са независими

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Ако $\mathbb{P}(B) > 0$, то горното е екв. на

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A),$$

т.е. „B не влияе на A".

A и B се наричат несъвместими, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$

(или $A \cap B = \emptyset$)

Хвърляме монета веднъж

$A = \{$хвърляме ези$\}$

$B = \{$хвърляме тура$\}$

$A \cap B = \emptyset$ – няма как от 1 хвърляне и двете

$\Rightarrow$ несъвместими

За независимост:

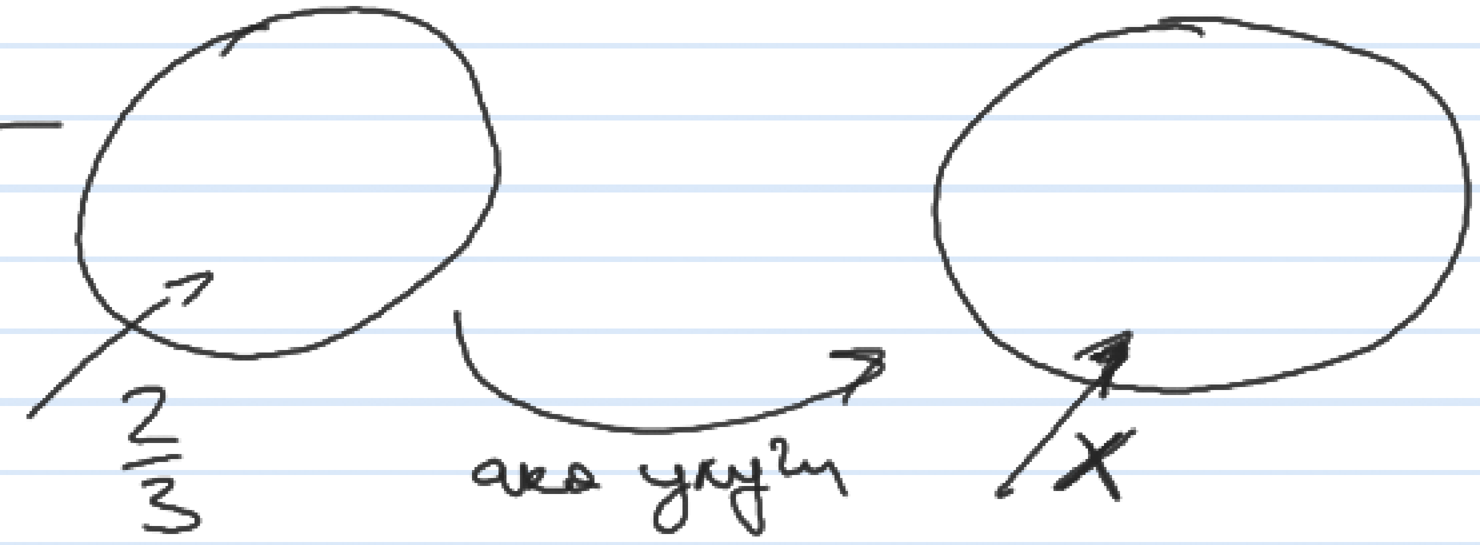
$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = 0$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$

$\Rightarrow$ не са независими.

Зад. 7



$P($да уцелим и 2-те$) = 1/2$

$$\frac{2}{3} \cdot x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

зад. 9 2 зара

$\mathbb{P}(\text{сумата} < 8 \mid \text{нечетна})$

$A = \{\text{сумата} < 8\}$

$B = \{$ —||— е нечетна $\}$

$\mathbb{P}(A \mid B) = ?$

Независими ли са?

Решение: (след това - зад 13, 4, 16, 17, 18, 19) "примери"

Намираме $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) \ ?$$

сума	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
начини	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2+4+6+4+2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3} = \frac{2+4+6}{2+4+6+4+2}$$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

$\Rightarrow$ не са независими

зад. 41 | 52 карти

$A_{пол}$ – 7-ца ♦

Влег – общо 2 аса

$P(A_{пол}) = ?$

Р-е: Б.О.О. можем да считаме че тестето се състои $\boxed{7, A, A, A, A}$

В такъв случай имаме 5 наредби

7AAAA

A7AAA

⋮

AAAA7

$\frac{2}{5} = P(A\ спечели)$

□ □ … □ □ □ □ □

$$\frac{\binom{52}{5}\cdot 47!\cdot \underbrace{2}_{7\text{-ца}}\cdot \overbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{\text{аса}}}{52!}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{52!}}{5!\,\cancel{47!}}\cdot \cancel{47!}\cdot 2\cdot 4!}{\cancel{52!}}$$

$$= \frac{2}{5}$$

7, 7, 7, 7, A, A, A, A

7, A, A, A, A

П П | П П

A A → | 7

↓ ↓ | A 7

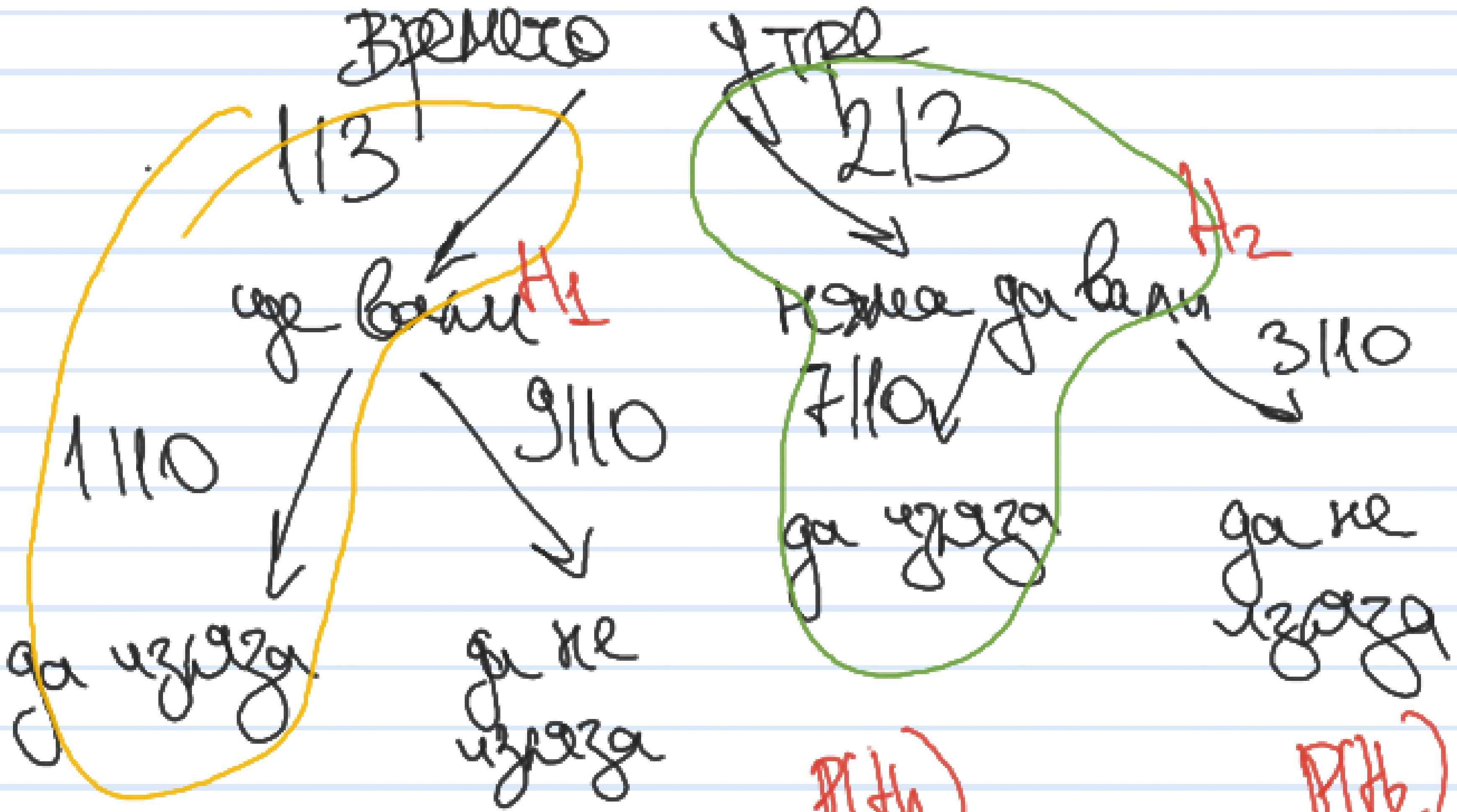
$\frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}$

P(две поредни аса)

$= P(B$ да снежи$) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

P(за A да сн.) $= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{25}$

Времето утре



$$P(\text{изгаза утре}) = \overset{P(H_1)}{\frac{1}{3}} \cdot \underset{P(A|H_1)}{\frac{1}{10}} + \overset{P(H_2)}{\frac{2}{3}} \cdot \underset{P(A|H_2)}{\frac{7}{10}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A|B)\cdot P(B) = P(A\cap B)}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \quad H_i \cap H_j = \emptyset \text{ за } i \neq j$$

$$\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} H_i = \Omega, \quad \bigsqcup_{i=1}^{n} = \Omega$$

$$P(A) = P(A\cap H_1) + P(A\cap H_2) + \dots + P(A\cap H_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\cdot P(H_i)$$

зад. 13 I и II се редуват. I е първи

Печели 1-ят, хвърлил ези

$P(I) = ?$

$P(II) = 1 - P(I)$

Р-е: E

TTE

TTTTE

$\vdots$

Следов.

$P(I) = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2} + \dots$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots\right)$

$* \; 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

за $|x| < 1$

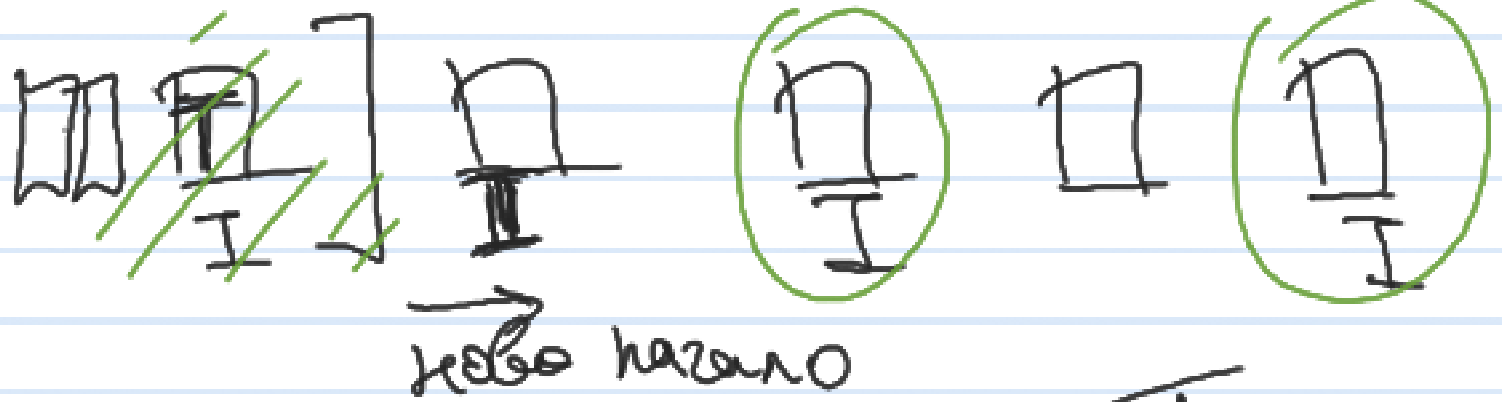
$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Друго решение:

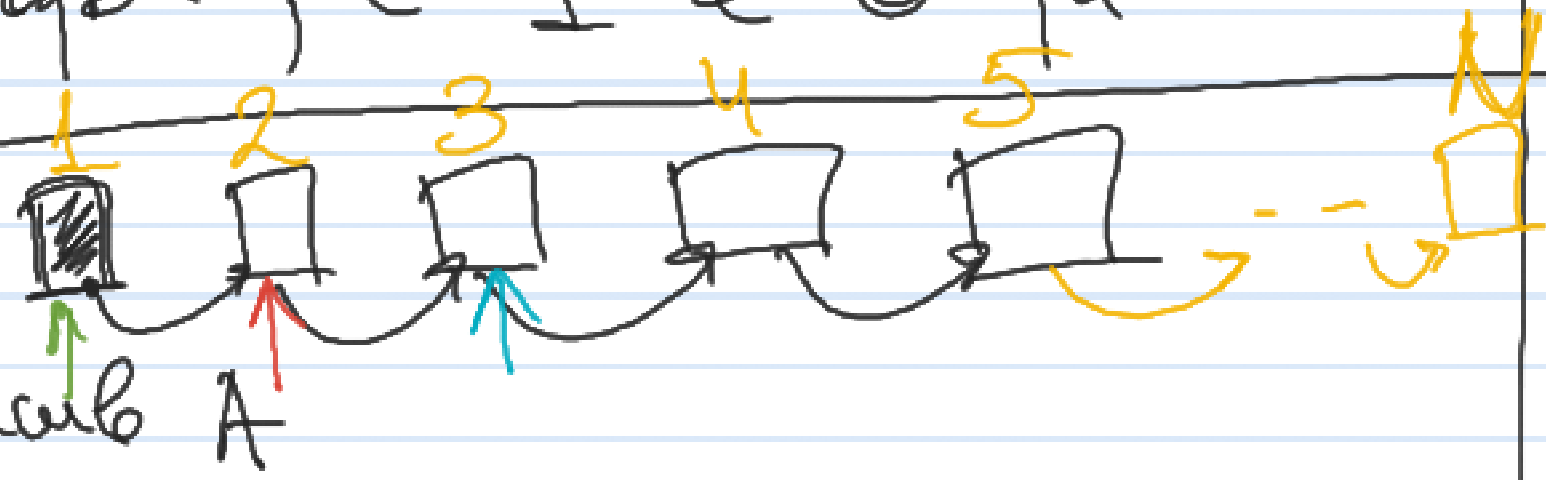
$P(I) = \underset{\text{ези на 1-я ход}}{\frac{1}{2}} + \underset{\text{тура на I-я}}{\frac{1}{2}} P(II) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - P(I))$

$\Rightarrow P(I) = \frac{2}{3}$



В новата игра II е първи, а I е втори

зад. 18



На стъпка k избираме случайно (равн.) число от $\{1, \dots, k\}$

Ако изберем 1, слагаме $A[k]$ на позиция 1

$\mathbb{P}(A[1]$ да не се е променил след алгор.$) = ?$

Решение:

$\mathbb{P}(A[1]$ да не се е пром.$)$
$= \mathbb{P}($да нямаме смяна$)$
$= \mathbb{P}($да нямаме смяна на стъпка 2$) \cdot$
$\mathbb{P}($ — " — 3$) \cdot$
$\vdots$
$\mathbb{P}($ — " — $N)$

2 от $\{1,2\}$ 2,3 от $\{1,2,3\}$ 2,…,N от $\{1,\dots,N\}$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdots \frac{\cancel{N-1}}{N} = \frac{1}{N}$$

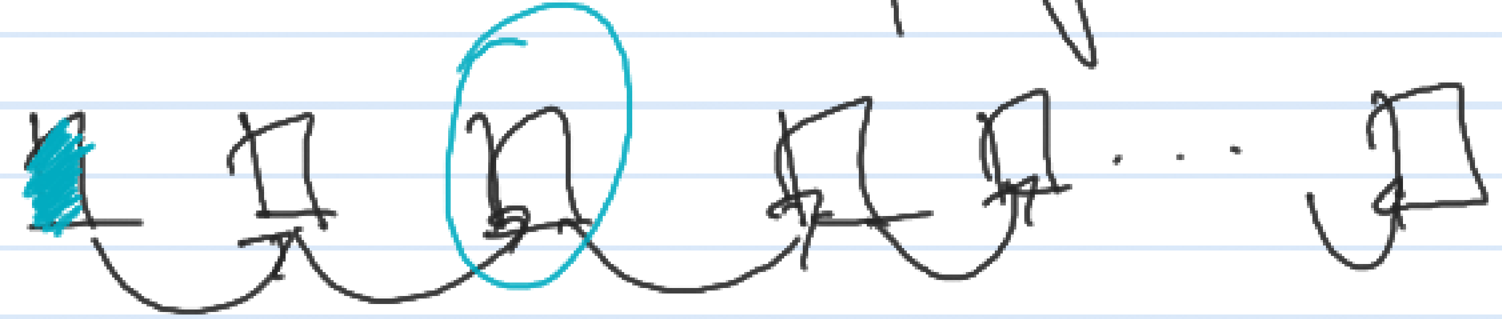
P(началният A[3] да е на поз. 1 след алг.) = ?

$= \mathbb{P}$(на стъпка 3 местим A[3] в началото)

$\cdot\, \mathbb{P}$(да няма смени след ст. 3)

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdots \frac{\cancel{N-1}}{N} = \frac{1}{N}$$

Reservoir sampling



Ако знаем N

изб. точно случ. число $\{1, \dots, N\} - X$

изход: A[X]

Ако не знаем N – алг. връща (чрез A[1] вкарва) случ. ел., при това с 1 пробягване.

Аналогично P(нач. A[k] да е на 1-ва поз след алг.) $= \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdots \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$.