Легенда: 📘*- задача, представяща основен материал от курса;* ★*- трудна задача;* ☺ *- интересен пример;* ✎ *- задача от контролно (К1 и К2) или изпит (И).*

📘 **Задача 1.** Нека M е множество с n елемента (ще пишем $|M| = n$) и $a_1, \dots, a_k \in M$. Припомнете по колко начина можем изберем

(а) k различни елемента от M, т.е. $\{a_1, \dots, a_k\}$ (C_n^k);

(б) k-орка от различни елементи на M, т.е. $(a_1, \dots, a_n), a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ (V_n^k);

(в) k-орка от елементи на M, т.е $(a_1, \dots, a_n)$.

📘 **Задача 2.** Колко решения има уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$, ако

(а) $x_1, \dots, x_k$ са естествени числа;

(б) $x_1, \dots, x_k$ са неотрицателни цели числа?

По колко начина можем да изберем k елемента от множество с n елемента, ако допускаме и повторения, т.е. k-елементно мултиподмножество?

📘 **Задача 3.** Припомнете принципа за включването и изключването.

Задача 4. По колко начина можем да разпределим k различими частици в n различни клетки, ако

(а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;

(б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;

(в) няма празна клетка?

Отговорете на същите въпроси при положение, че частиците са неразличими.

Задача 5. Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако

(а) не се допуска повторение на цифри;

(б) допуска се повторение на цифри;

(в) не се допускат повторения и числото е нечетно?

Задача 6. По колко начина може да се избере 4-членна делегация от 12 кандидати, ако

(а) няма ограничения за участие в нея;

(б) A и B не трябва да участват заедно;

(в) C и D могат да участват само заедно?

Задача 7. Пет различими топки се разпределят в три различни кутии A,B и C. Да се намери броят на всички различни разпределения, за които:

(а) кутията A е празна;

(б) само кутията A е празна;

(в) точно една кутия е празна;

(г) поне една кутия е празна;

(д) няма празна кутия.

Задача 8. Колко е броят на думите с дължина n и съдържащи само символите a, b и c, такива че

(а) започват с a;

(б) съдържат точно k пъти символа a;

(в) съдържат точно k пъти символа a, при което и първият, и последният символ е a;

(г) съдържат съответно k_1, k_2 и k_3 пъти, $k_1 + k_2 + k_3 = n$, от символите a, b и c.

Задача 9. Нека $A = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k\}$. Колко са подмножествата на A, които съдържат поне един елемент a_i и поне един елемент b_j?

★ **Задача 10.** (а) По колко начина можем да стигнем от точката $(0, 0)$ до т. (n, n) в стандартна квадратна решетка, ако правим единични стъпки само надясно и нагоре? А ако трябва да не преминаваме над диагонала, свързващ тези две точки?

(б) По колко коректни начина можем да съставим дума от n откриващи и n закриващи скоби (пример: ’(())’ е коректна, а ’())(’ - не)?

Задача 11. Да предположим, че номерата на колите са равномерно разпределени. Каква е вероятността номерът на случайна лека кола

(а) да не съдържа еднакви цифри;

(б) да има точно две еднакви цифри;

(в) да има три еднакви цифри;

(г) да има две двойки еднакви цифри;

(д) да има една и съща сума от първите две и последните две цифри?

Задача 12. Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно r човека. А ако се нареждат в кръг?

Задача 13. Картите от (случайно наредено) стандартно тесте се теглят последователно. А печели, ако се обърне седмица спатия, а B, ако се обърнат общо две аса. Каква е вероятността А да спечели? А ако B чака две поредни аса?

Задача 14. От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \ldots, n$; k пъти последователно се вади по една топка. Каква е вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако

(а) извадката е без връщане;

(б) извадката е с връщане?

Задача 15. Хвърлят се 10 различими зара. Каква е вероятността да се паднат равен брой единици и шестици?

Задача 16. Застрахователна компания води статистика за своите клиенти

- всички клиенти посещават поне веднъж годишно лекар;
- 60% посещават повече от веднъж годишно лекар;
- 17% посещават хирург;
- 15% от тези, които посещават повече от веднъж годишно лекар, посещават хирург.

Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава само веднъж годишно лекар, да не е бил при хирург?

Задача 17. Хвърлят се два зара. Каква е вероятността сумата от падналите се числа да е по-малка от 8, ако се знае, че тя е нечетна? Независими ли са двете събития?

Задача 18. Около маса сядат 10 мъже и 10 жени. Каква е вероятността лица от еднакъв пол да не седят едно до друго?

☺ **Задача 19.** (Birthday paradox) Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността поне двама от тях да имат един и същ рожден ден да е по-голяма от $1/2$?

Задача 20. Двама играчи последователно хвърлят монета. Играта печели този, който първи хвърли ези. Каква е вероятността за спечелване на играта за всеки от играчите? А ако печели този, който хвърли същото като падналото се непосредствено преди това?

Задача 21. Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n-те различни адреса и изпратила писмата. Каква е вероятността никой да не получи своето писмо?

Задача 22. В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. Каква е вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена, ако

1. след всяко изваждане топката се връща обратно в урната;
2. извадените топки не се връщат обратно?

Задача 23 (Monty Hall problem)**.** Зад една от 3 затворени врати има чисто нова кола, а зад другите две няма нищо. Избирате врата, след това водещият отваря една от останалите две врати, зад които няма нищо. Сега трябва да решите - сменяте ли избраната врата или запазвате първоначалния си избор?

Задача 24 (Boy or Girl paradox)**.** X има две деца. Ако по-старото е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета? А ако знаете, че поне едно от тях е момче, каква е вероятността и двете да са момчета?

Задача 25 (Reservoir sampling)**.** Нека *data* е масив с различни елементи, индексирани от 1. Каква е вероятността след изпълнението на следния алгоритъм:

Algorithm 1: Reservoir Sampling for 1 Element

```
sample ← the first element of data;
for i ← 2 to the number of elements in data do
    j ← a random integer between 1 and i (inclusive) if j = 1 then
        sample ← the i-th element of data
return sample
```

sample да бъде равно на $A[1]$? А на $A[3]$? А да бъде равно на последния елемент от A?"

Задача 26 (Simpson's Paradox)**.** Долната таблица показва истински данни от успеваемостта на две лекарства при лечение на бъбречни камъни:

Лечение / Размер на камъните	А	Б
Малки	93% (81/87)	87% (234/270)
Големи	73% (192/263)	69% (55/80)
Общо	78% (273/350)	83% (289/350)

Кое лечение е по-добро?

Задача 27. (И, КН 2024)

1. (0.5 т.) Нека Ω е множество с 10 елемента. По колко начина можем да изберем негови три подмножества $A, B, C \subset \Omega$, така че да е изпълнено равенството

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1 + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)?$$

2. (0.5 т.) Нека Ω е множеството от ненамаляващи функции от $\{1, \ldots, 10\}$ в $\{1, \ldots, 20\}$. Каква е вероятността равномерно случаен негов елемент да бъде строго растяща функция?

Задача 28. (К1, СЕМ 2023)

1. В урна има 4 жълти, 5 зелени и 2 сини камъчета. След като изтегли едно от тях, човек хвърля стандартни зарчета, както следва: ако е избрал жълто, хвърля един зар, ако е избрал зелено - два и ако е избрал синьо - три. Ако се е паднала сума 3 от хвърлените зарчета, то каква е вероятността да е избрал зеленото камъче?

2. Стандартен зар се хвърля пет пъти. Намерете вероятности за събитията
$A = \{$максималното паднало се число е поне 3$\}$ и
$B = \{$произведението на всички паднали се числа се дели на 10$\}$.

Задача 29. Дадени са две партиди от съответно 12 и 10 изделия. Във всяка има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Каква е вероятността то да е дефектно?

Задача 30. Разполагаме с три стандартни зара и един, чиито страни са само шестици. По случаен начин избираме три от заровете и ги хвърляме. Да се определи вероятността да се паднат

1. три шестици;

2. различни цифри;

3. последователни цифри?

Задача 31. Дадени са n урни, всяка от тях има с m бели и k черни топки. От първата урна се тегли топка и се прехвърля във втората, след това от втората една топка се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Задача 32. (К1, СЕМ 2023)

1. В урна има 4 жълти, 5 зелени и 2 сини камъчета. След като изтегли едно от тях, човек хвърля стандартни зарчета, както следва: ако е избрал жълто, хвърля един зар, ако е избрал зелено - два и ако е избрал синьо - три. Ако се е паднала сума 3 от хвърлените зарчета, то каква е вероятността да е избрал зеленото камъче?

2. Стандартен зар се хвърля пет пъти. Намерете вероятности за събитията
   $A = \{$максималното паднало се число е поне 3$\}$ и
   $B = \{$произведението на всички паднали се числа се дели на 10$\}$.

Задача 33. В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират три топки, които след играта се връщат обратно в кутията. За втората игра също случайно се избират три топки. Каква е вероятността те да са нови?

Задача 34. Петнадесет изпитни билета съдържат по два въпроса и покриват целия конспект от 30 въпроса. Студент може да отговори на 25 въпроса. Каква е вероятността той да вземе изпита, ако за това е нужно той да отговори на двата въпроса в един билет или на един от двата въпроса, а след това и на посочен въпрос от друг билет?

Задача 35 (Kahneman, Thinking Fast and Slow)**.** В град с две фирми за таксита, синя и зелена, през нощта се случва катастрофа с участието на такси, от която шофьорът на таксито бяга. Разполагате със следните данни:

- 85% от всички таксита са зелени и 15% са сини;
- свидетел дава показания, че таксито е било синьо;
- експертиза установява, че свидетелят определя правилно синьо/зелено в 80% от случаите и греши в останалите 20%.

Каква е вероятността колата наистина да е била синя?

Задача 36. Разполагаме с тест за рядко заболяване, който е точен в 99% от случаите и при заразените (когато трябва да е положителен), и при незаразените (когато трябва да е отрицателен). Ако знаете, че 0,5% от населението има това заболяване, каква е вероятността случайно избран човек с положителен тест да е болен?

Задача 37. На изпит се явяват 100 студенти, 55 момчета и 45 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.7, а момчетата - с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Задача 38. В компютърен център има три принтера А, Б и В. Заявките за печат се изпращат към първия свободен принтер. Вероятностите заявка да бъде изпратена към А, Б или В са съответно 0.6, 0.3 и 0.1. Вероятността за всеки от принтерите да провали печатането е съответно 0.01, 0.05 и 0.04. Ако печатането на даден документ е било прекратено, каква е вероятността причината да е грешка в принтера А?

Задача 39. Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна която не се вижда също да е бяла?

Задача 40. Изпит се провежда по следния начин: във всеки билет има написан един въпрос с четири отговора, от които само един е верен. Предполагаме, че студент знае 90% от въпросите, а ако не знае верния отговор, налучква. Каква е вероятността студент, който е отговорил правилно, да не е знаел верният отговор, а да е налучкал?

Задача 41. Трима ловци едновременно стрелят по заек, като повтарят това докато поне един от тях уцели. Ако заекът е убит от един куршум. Каква е вероятността той да е изстрелян от първия ловец, ако те уцелват с вероятност, съответно 0.2, 0.4 и 0.6?

Задача 42. Раздаваме последователно картите от стандартно тесте карти. Ако за първи път видим червено асо на 6-та позиция, каква е вероятността след това да видим първо червено преди черно асо?

Задача 43. Играч залага 5 лева и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици печели 100 лева, а ако хвърли точно една шестица - 5 лева. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта?

Задача 44. Човек хвърля честна монета и при ези прави крачка напред, а иначе - назад. Каква е вероятността след 10 хвърляния да се намира:

1. на мястото, откъдето е тръгнал;
2. на разстояние 2 крачки от началната си позиция;
3. на 5 крачки пред началната си позиция?

Задача 45. Два зара се хвърлят последователно пет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които сумата от резултатите е шест, да бъде точно 2? Да се намери средната стойност на този брой.

Задача 46.

- (St. Petersburg paradox) Казино предлага следната игра: играч плаща A лева. След това хвърля монета, докато хвърли ези. Ако това се случи на n-тия ход, печели 2^n лева. При какви стойности на A бихте участвали?
- (Martingale strategy) Да разгледаме по-стандартна игра - казино предлага коефициент 2 при игра на ези/тура, т.е. при залог А, бихме спечелили чисто А. Играч залага само на ези, докато спечели, като удвоява залога си всеки път, когато не спечели. Каква е очакваната му печалба? Бихте ли пробвали?

Задача 47. А хвърля 3 монети, а В - 2. Печели този, който хвърли повече езита и взима всичките 5 монети. В случай на равен брой печели Б. Каква е вероятността А да спечели? Ако е спечелил А, каква е вероятността В да е хвърлил точно едно ези? Каква е средната печалба на играчите?

Задача 48. Извършва се серия от независими бернулиеви опити с вероятност за успех на p. Да се пресметне вероятността r-тия успех да настъпи точно на $(k+r)$-тия опит. Алтернативна формулировка: Нека $X_1, X_2, \dots \sim Ber(p)$ са независими еднакво разпределени случайни величини (н.е.р.с.в. / iid). Как бихте формулирали въпроса на задачата чрез X_i?

Задача 49. (Banach's matchbox problem) Пушач носи в джоба си две кутии кибрит с по n клечки. Всеки път, когато иска да запали, той избира произволна кутия и вади една клечка. След известно време той забелязва, че едната кутия е празна. Каква е вероятността в този момент в другата да са останали точно $k \le n$ клечки?

Задача 50. Подводница стреля n пъти последователно по кораб. Всяко торпедо улучва с вероятност p. Корабът има m отсека и ако торпедо улучи кораба, вероятността да наводни кой да е от тях е една и съща. Каква е вероятността корабът да бъде потопен, ако за това е необходимо да се наводнят поне два отсека?

Задача 51. Нека съществуват две равно вероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $H_0 : p_0 = 1/2$ и $H_1 : p_1 = 2/3$. Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако при провеждането на 200 опита са настъпили 120 успеха?

Задача 52. Хвърлят се два зара. Нека случайната величина X е сумата от падналите се точки. Да се намери разпределението, очакването и дисперсията на X, ако заровете са

1. правилни;
2. $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(6) = 1/4, \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = 1/8$.

Ще бъде ли необичайно, ако при хвърлянето на 1000 зара сумата е била повече от 3700?

Задача 53. От урна съдържаща 5 бели и 3 черни топки се избират последователно, една по една топки докато се появи бяла. Да се намери разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина X = "брой на изтеглените черни топки"при извадка

1. без връщане;
2. с връщане.

Опитът се повтаря 1000 пъти. Да се оцени вероятността да са извадени повече от 900 черни топки.

Задача 54. Вероятността за улучване на цел при един изстрел е равна на 0.001. За поразяване са необходими поне две попадения. Каква е вероятността за поразяване на целта, ако за това са нужни две попадения и са направени 5000 изстрела?

Задача 55. В кутия има 7 лампи, от които 3 са дефектни. По случаен начин се избират за проверка 4 лампи. Да се намери разпределението на случайната величина $X =$ „брой на изпробваните дефектни лампи" и да се пресметне нейното очакване.

Задача 56. В Патагония на месец се регистрират средно две слаби земетресения. Каква е вероятността за три месеца да има по-малко от четири слаби земетресения?

Задача 57. 80% от принтерите за домашна употреба работят добре при инсталирането им, а останалите имат нужда от допълнителни настройки. Фирма продава 10 принтера за една седмица. Намерете вероятността поне 9 от тях да работят без нужда от допълнителни настройки. Каква е съответната вероятност това да се случи за пет поредни месеца? Каква е вероятността, първата седмица, за която това не се случва да е точно 21-та?

Задача 58. A и B стрелят по мишена, като стрелят едновременно, а ако никой не улучи - стрелят отново. A улучва с вероятност 0.2, а B - с 0.3. Каква е вероятността A да улучи, а B - не. Какъв е средният брой изстрели, необходими за уцелване на мишената?

Задача 59. (К1, КН 2024) A и B играят последователно партии, като A печели една партия с вероятност $2/3$, а B - с $1/3$. Равни партии не са възможни. Играта продължава докато някой спечели две последователни партии. Нека X е случайната величина „брой на изиграните партии". Да се определи разпределението и математическото очакване на X.

Задача 60. Нека ξ, η са независими случайни величини с разпределение $P(\xi = k) = P(\eta = k) = q^k p, k = 0, 1, \ldots, p > 0, p + q = 1$. Нека $\zeta = \max(\xi, \eta)$.

1. Да се намери разпределението на ζ.
2. Да се намери разпределението на $\tau = (\zeta, \xi)$.

Задача 61. В урна има 3 бели и 2 черни топки. От урната теглим последователно без връщане топки. Нека ξ е номерът на тегленето на първата бяла топка. След това продължаваме да теглим, докато се появи черна топка. Нека η е номерът на опита на тегленето на първата черна топка след първата бяла. Дефинираме $\eta = 6$, ако няма такава. Да се определи

- съвместното разпределение на η и ξ;
- $\mathbb{P}(\eta > 2 | \xi = 1)$ и $\mathbb{P}(\eta = 3 | \xi < 3)$.

Задача 62. Хвърляме два червени и един син зар. Нека ξ е броят на шестиците върху червените зарове, а η е броя на двойките върху трите зара. Да се определи

- съвместното разпределение на η и ξ;
- $\mathbb{P}(\xi > 0 | \eta = 1)$.

Задача 63. От числата $1, 2, 3, 4$ и 5 се избират по случаен начин три. Нека случайната величина $X =$ „средното по големина от избраните три", а $Y =$ „най-малкото от избраните числа". Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y;
2. маргиналните разпределения на X и Y;
3. да се провери дали X и Y са независими;
4. ковариацията и коефициента на корелация на X и Y;
5. разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина $Z = X - 2Y$.

Задача 64. (К1, КН 2024)

1. (0.25 т.) Нека X е случайно число измежду $\{0, 1, 2\}$ и $Y \sim Ber(2/3)$ е независима от него сл. вел. Намерете съвместното разпределение и корелацията на X и $Z := (X + Y)(\text{mod } 3)$.
2. (0.25 т.) Нека X е равномерно случайно число от $\{1, \ldots, 6\}$. Намерете пораждащата функция на X и изразете чрез нея $\mathbb{E}[X]$ и DX.

3. (0.5 т.) Нека X и Y са случайни величини със стойности в $\{0, 1, \dots\}$. Вярно ли е, че ако X и Y са независими, то за всяко $s \geq 0$, $g_X(s)g_Y(s) = g_{X+Y}(s)$? А вярно ли е, че ако всяко $s \geq 0$, $g_X(s)g_Y(s) = g_{X+Y}(s)$, то X и Y са независими? Докажете твърденията си.

Задача 65. Нека n е естествено число. Избираме естествени u_i по следния начин: u_1 е равномерно случайно измежду $[1, n]$, u_2 измежду $[1, u_1 - 1]$, u_3 измежду $[1, u_2 - 1]$ и т.н., докато $u_\ell = 1$ за някое $\ell \leq n$. Нека E_n е множеството от избраните числа, т.е. $E_n := \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$.

1. (0.5 т.) Намерете $\mathbb{P}(k \in E_n)$ за $k \leq n$.
2. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{P}(2 \in E_n | 3 \notin E_n)$.
3. (0.5 т.) Намерете $\mathbb{E}\left[|E_n|\right]$.

Задача 66. Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека X е броят езита, паднали се при първите три хвърляния, а Y - броят езита от последните две. Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y;
2. условните разпределения на X и Y, т.е. $\mathbb{P}(X = k | Y = l)$ и $\mathbb{P}(Y = k | X = l)$ за подходящи k и l;
3. $\mathbb{P}(X = Y), \mathbb{P}(X > 1 | Y = 1)$ и $P(X + Y > 2 | X = 2)$;
4. разпределенията на $E(X|Y)$ и $E(Y|X)$.

Задача 67. Билетите в лотария имат номера от 0 до 999999. Да се определи вероятността случайно избран билет

1. да има сума от цифрите, равна на 21;
2. да има равна сума от първите три и последните три цифри;
3. сумата от първите три цифри да е с 2 по-голяма от сумата на последните три.

Задача 68. Магически квадрат е таблица 3х3, запълнена с числа, така че сборът по всички редове, колони и 2-та главни диагонала е равен.

Петокласник трябва да попълни магическия квадрат по-долу, използвайки числата от 1 до 9 точно по веднъж.

2	7	
	5	
		8

Тъй като няма желание да събира числа, решава да напише програма, която да запълва случайно квадратчетата, докато намери правилната конфигурация.

Една симулация се състои от избора на 5 равномерни числа измежду $\{1, 2, \dots, 9\}$ и поставянето им в квадрата последователно в реда отгоре надолу и отляво надясно.

1. Колко е очакването на броя познати числа при всяка симулация?
2. Колко е очакваният брой симулации до достигането на правилната наредба?
3. Можете ли да предложите число n, такова че с вероятност 99% ще сме уцелили поне веднъж след n симулации?

Можете ли да отговорите на същите въпроси, ако **симулацията се състои от случайна подредба на липсващите числа, т.е. на $(1, 3, 4, 6, 9)$?**

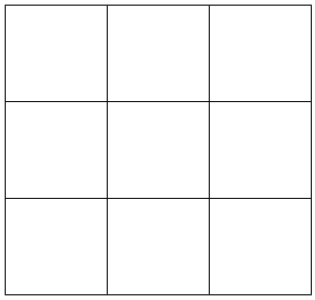
Задача 69. (И, СЕМ 2023) Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими сл. вел. със средно μ и дисперсия σ^2. Изразете чрез μ и σ очакванията на

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{и} \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

Задача 70. (И, СЕМ 2023) Монета с вероятност p за ези се хвърля n пъти. Нека E е събитието „пада се ези при първото хвърляне“, а F_k е събитието „точно k пъти се пада тура“. За кои двойки цели числа (n, k) събитията E и F_k са независими?

Задача 71. На всяка от страните на празен зар се записва случайно число от 1 до 6. След това този зар се хвърля n пъти. Нека X е сумата от първите $n-1$ хвърляния, а Y - сумата от последните $n-1$ хвърляния. Намерете $Cor(X, Y)$. Как би се променил отговорът, ако избирахме числа числа между 199 и 999?

Задача 72. Да предположим, че всяка секунда стреличка попада в случайно квадратче на решетката по-долу.



- (0.5 т.) Колко е очакваното време докато във всяко квадратче има поне по една стреличка?
- (0.3 т.) Колко е очакваното време до първия момент, в който има две стрелички в някое от квадратчетата?
- (0.2 т.) Можете ли да обобщите, ако решетката е $n \times n$?

Задача 73. Нека $(X_1, \ldots, X_n)$ е случайна пермутация на числата от множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $S = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Намерете $\mathbb{E}S$ и DS.
2. Докажете, че за две случайни величини X и Y е изпълнено $D(X+Y) = DX + DY + 2Cov(X, Y)$.
3. Изразете $\mathbb{E}S$ чрез $\mathbb{E}X_i$. Намерете $\mathbb{E}X_i$, $\mathbb{E}X_i^2$ и DX_i за всяко i.
4. Изразете DS чрез DX_i и $Cov(X_i, X_j)$. Намерете $Cov(X_i, X_j)$ за всеки i, j.

Задача 74. Разглеждаме информация, съставена от 8 бита. Поради шум при изпращането между сървъри, всеки бит може да бъде предаден погрешно с вероятност p.

0	1	0	0	0	1	1	1

1. Каква е вероятността съобщението да бъде правилно предадено между два сървъра - A и B, които са свързани директно? Какво е очакването на правилния брой битове в крайното съобщение?
2. Можете ли да отговорите на същите въпроси от от а), ако съобщението минава (точно по веднъж) през $n = 3$ междинни сървъра? *Какви са резултатите при $n \to \infty$?

Задача 75. Метод за решаване на двубои във футбола е изпълняването на дузпи. Можем да считаме, че това се случва по следния начин: първо се изпълняват 5 кръга по 1 дузпа за всеки отбор. Ако има равенство след тях, се продължава докато някой от отборите отбележи, а другият - не.

Да предположим, че играчите на единия от отборите отбелязват с вероятност 75 %, а на другия - с вероятност 80%. Приемаме също, че изпълненията са независими.

1. Каква е вероятността през първите 5 рунда двата отбора да са отбелязвали в едни и същи рундове?
2. Каква е вероятността след първите 5 кръга да има равенство? А след първите 10 кръга?
3. Какъв е очакваният брой дузпи, които ще се изпълнят общо от двата отбора?

Задача 76. $n > 2$ човека хвърлят честна монета. Победител е този, който хвърли обратното на всички други. Ако такъв няма, играчите хвърлят отново. Нека X е броят кръгове до излъчването на победител. Какво е очакването и дисперсията на X?

Да предположим, че след излъчването на първи победител, играта продължава докато останат двама играчи. Колко е броят на очакваните ходове? Ако k-тият победител печели $100(n-k)$, колко бихте платили, за да участвате в тази игра?

Задача 77. 1. Играч хвърля 3 честни монети и 3 стандартни зара. За всяко ези получава по 1 лв, а за всяка 6-ца, по 3 лв. Колко е очакваната му печалба?

2. Играч хвърля зар, докато сумата от падналите се числа се дели на 6. Ако това се случи на k-ти ход, той печели k лв. Каква е очакваната му печалба?

3. Нека X има разпределение върху $0, 1, 2, \dots$, така че, за $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = k-1)} = \frac{3}{k}.$$

Намерете очакването и дисперсията на X.

4. Нека броят посетителите на стадион за даден ден е $Y \sim Poi(\lambda)$. Стадионът разполага с 10 входа $E_1, \dots, E_{10}$ и всеки посетител избира с равна вероятност кой да е от тях. Какво е разпределението, очакването и дисперсията на посетителите, влезли през вход E_1?

Задача 78. Туристическа компания рекламира хотели на Черноморието по телефона, като се обажда многократно на всеки от $N \sim Poi(\lambda)$ човека, с чиито контакти разполагат. Човек i се съгласява на офертата им след като получи $K_i \perp\!\!\!\perp N$ обаждания, където K_i са iid, $\mathbb{P}(K_i = n) =: f(n)$ и стойността ∞ е евентуално позволена, т.е. $f(\infty) \geq 0$. Нека X_n е броят на продадените ваканции при n-ия кръг на обаждания, т.е. $X_n := \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{K_i = n\}}$.

1. Докажете, че X_n са независими случайни променливи, като $X_n \sim Poi(\lambda f(n))$.

2. Компанията се отказва от този метод след T-тия кръг от разговори, където $T := \inf\{n : X_n = 0\}$, т.е. след първия кръг, когато няма новопривлечен клиент. Нека $S = X_1 + X_2 + \dots + X_T$ е броят на привлечените клиенти до момента T . Докажете, че $\mathbb{E}(S) = \lambda \mathbb{E}(F(T))$, където $F(k) := f(1) + f(2) + \dots + f(k)$.

Задача 79. Някои от стандартните разпределения, с които сме се запознали са $Ber(p)$, $Bin(n, p)$, $Ge(p)$, $Poi(\lambda)$.

Нека X_1 и X_2 са независими и еднакво разпределени случайни величини с някой от горните закони (т.е. имаме 4 различни възможности). Изпълнено ли е, че $X_1 X_2$ или $X_1 + X_2$ имат същия тип разпределение като X_1 (евентуално с други параметри)? Аргументирайте се напълно.

Ако отговорът е не във всички случаи, можете ли да дадете пример, в който имаме подобна ситуация?

Задача 80. Нека X_1, X_2 и X_3 са независими и еднакво разпределени сл. вел. с очакване μ и дисперсия σ^2. Страничен наблюдател иска да оцени очакването $\mathbb{E}f := \mathbb{E}f(X_1, X_2, X_3)$, но вижда една тяхна реализация: (x_1, x_2, x_3). Една възможност е да оцени $\mathbb{E}f$ чрез $f(x_1, x_2, x_3)$. Друга такава е да опита изкуствено да увеличи наблюденията си, като разгледа и допълнителни три наредби $(x_2, x_1, x_3), (x_3, x_2, x_1)$ и (x_1, x_3, x_2) и осредни резултата и по тях. Преценете има ли разлика в точността на оценките от двете процедури, като пресметнете съответните очаквани стойности и дисперсии, ако:

1. $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$;

2. $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 - X_3$;

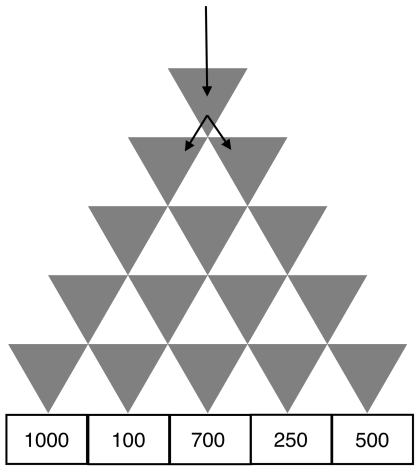
3. $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 - X_3$.

Пример: При наблюдение $(3, 8, 1)$*, за функцията в точка 3, едната оценка е* $3 \cdot 8 - 1 = 23$*, а другата, след добавянето на* $(8, 3, 1), (1, 8, 3)$ *и* $(3, 1, 8)$ *е* $((3 \cdot 8 - 1) + (8 \cdot 3 - 1) + (1 \cdot 8 - 3) + (3 \cdot 1 - 8))/4 = 11.5$

Задача 81. Играч в „Треска за злато” [1] пуска топче в пирамидата на късмета в най-горния триъ-

[1] https://bit.ly/3nRl2pG, https://bit.ly/3BcObjO.

гълник, като то пада в един от долните два с равна вероятност.



1. Каква е разпределението и очакваната печалба при едно пускане?

2. Ако регламентът е, че имате право да пускате топчета докато някое попадне при печалба 1000лв, колко средно топчета ще пуснете? Колко ще е очакваната Ви печалба?

3. При началната наредеба водещият Ви предлага да пермутира случайно печалбите. Бихте ли се съгласили или бихте останали с началното разпределение? А как бихте наредили печалбите, ако имахте тази възможност?

Поради различни аномалии се усъмнявате, че топчето пада вляво/вдясно с равна вероятност. Нека p е вероятността да се отклони наляво.

4. Пускате 3 топчета и те се озовават при печалба 100 лв. Кое е това p, за което това е най-вероятно?

5. Получавате информация, че предаването разполага с две пирамиди: една с $p = 1/2$ и една с $p = 1/3$. Тъй като не знаете коя използват в момента, можете да приемете, че вероятността е равна за коя да е от тях. Ако при две пускания топчетата се озовават по средата (700 лв), каква е апостериорната вероятност да е избрана машината с $p = 1/3$

Задача 82. Разполагаме с две кутии с топки. В първата има 4 бели и 6 черни, а във втората - 7 бели и 3 черни. От всяка урна случайно се изважда по 1 топка. Към извадените две топки се прибавя една бяла и се поставят в трета кутия.

1. Каква е вероятността случайно избрана топка от третата кутия да бъде бяла?

2. Да допуснем, че теглим от третата кутия по 1 топка с връщане, докато изтеглим бяла. Нека X е броят изтеглени топки от третата кутия. Какво е очакването на X? Мислите ли, че X има геометрично разпределение?

Задача 83. (К1, СЕМ 2023)

1. Нека $X \sim Ge(p)$, т.е. $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$ за $k \geq 0$; Докажете свойството липса на памет: за всеки $m, n \geq 0$, $\mathbb{P}(X > m + n | X \geq n) = \mathbb{P}(X > m)$.

2. Докажете обратното твърдение, ако Y е сл. вел. със стойности в $\{0, 1, 2, \dots\}$ и за всеки $m, n \geq 0$, $\mathbb{P}(Y > m + n | Y \geq n) = \mathbb{P}(Y > m)$, то $Y \sim Ge(p)$ за някое $p \geq 0$.

3. Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими случайни величини и дефинираме $X_{\min} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$ и аналогично $X_{\max}$. Кои от изразите

   $$\mathbb{P}(X_1 > m)^n,\ \mathbb{P}(X_1 \leq m)^n,\ \mathbb{P}(X_1 \leq m),\ 1 - m\mathbb{P}(X_1 > m)^n,\ 1 - \mathbb{P}(X_1 > m)^n, (1 - m)(1 - \mathbb{P}(X_1 > m)^n)$$

   изразяват вероятностите съответно $\mathbb{P}(X_{\min} \leq m)$ и $\mathbb{P}(X_{\max} \leq m)$? Докажете го.

4. (0.25 т.) Хвърлят се 5 стандартни зара едновременно. Ако на някой/някои от заровете се падне шестица, той/те се отстранява, а останалите се хвърлят отново, докато не останат зарове. Нека K е общият брой хвърляния. Намерете $\mathbb{P}(K \leq n)$ и $\mathbb{P}(K = n)$.

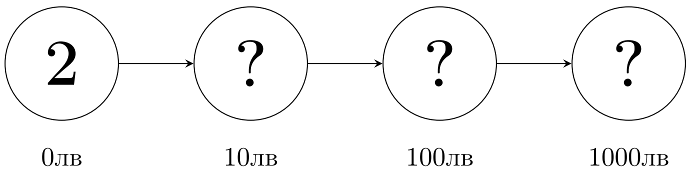
Задача 84. (К1, СЕМ 2023) Известен вид евристични алгоритми са генетичните такива. При тях се формира начална „популация” от хромозоми, кодиращи възможни решения на даден проблем, която с времето „еволюира” към по-добра, откъдето и наименованието им.

Конкретно, да предположим, че искаме да инициализираме n хромозоми (булеви вектора) с дължина m. Всички гени (елементи на векторите / битове) са независими $Ber(1/2)$ сл. вел.

1. Каква е вероятността всичките вектори да са различни? Какъв е очакваният общ брой на 1-ците във всички вектори? Колко е очакваният брой на вектори с под $m/4$ нули?
2. Какъв е очакваният брой повторения, т.е. брой еднакви двойки вектори, измежду m-те вектора? Отговорете на същия въпрос, ако елементите на векторите са независими $Ber(p)$ с $p \in (0, 1)$. За кое p очакваните повторения са минимални?
3. **Бонус: Какъв е очакваният брой уникални вектори*?
4. ***Бонус: При фиксирано m, от какъв порядък трябва е минималното n, за което вероятността всичките хромозоми да бъдат различни да бъде по-малка от 50%?*

Задача 85. (К1, СЕМ 2023) В телевизионно лотарийно шоу се използва случаен генератор, който избира равномерно цяло число от 1 до 5. Играта е следната[2]:

- Избира се случайно число (числото 2 в примера);
- Играчът има право да се откаже, в такъв случай печели сумата под последното изтеглено число, или да се опита да познае дали следващото число ще бъде по-малко или по-голямо от предишното. **Гарантирано е, че последователните числа са различни**;
- ако не познае, не печели нищо и играта свършва. Ако познае, има право да продължи, докато стигне голямата награда от 1000лв.



1. Предложете стратегия и пресметнете вероятността играчът да спечели, както и очакваната печалба при нея, ако играчът е решил да познава точно k пъти за $k = 0, 1, 2, 3$. Сравнете със стратегията, когато играчът избира винаги случайно по-голямо/по-малко независимо с вероятност $1/2$.
2. *Бонус: Напишете псевдокод, който решава горната задача при избор на число между 0 и n, m избора на участника и съответно награди $c_0, \ldots, c_n$.*
3. *Бонус: Напишете псевдокод, който би определил дали е оптимално да се откажете или да се опитате да познаете след края на всеки рунд в общия вид на играта от точка 2.*

[2] https://shorturl.at/bjlqU

Задача 86. Даден е кръг с радиус R. Върху диаметъра по случаен начин е избрана точка A. През точка A е прекарана хорда перпендикулярна на диаметъра. Каква е вероятността хордата да бъде по-къса от R?

Задача 87. Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан през един и същи ден. Всеки от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент от денонощието. Каква е вероятността параходите да не се засекат, ако за разтоварването на първия са необходими 6, а за втория 4 часа?

Задача 88. Автобусите от линия A се движат на интервали от пет минути, а от линия B на десет минути, независимо от автобусите от линия A. Каква е вероятността

1. автобус от A да дойде преди автобус от Б;
2. пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути?

Задача 89. Дадена е отсечка с дължина K. По случаен начин се избират две други отсечки с дължина по-малка от K. Каква е вероятността от трите отсечки да може да се построи триъгълник?

Задача 90. Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от K да може да се построи триъгълник?

Задача 91. Дадена е магнетофонна лента с дължина 100м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснат съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 25 и 50м, считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?

Задача 92. По случаен начин и независимо едно от друго се избират две числа x и y в интервала (0, 1]. Каква е вероятността на събитията

1. $xy \leq 1/4$;
2. $x + y \leq 1$ и $x^2 + y^2 \geq 1/2$;
3. $xy \geq 2/5$ и $x^2 + y^2 \leq 1$?

Задача 93. Разделяме случайно отсечка с дължина 1 на 3 части. Каква е вероятността те да могат да образуват триъгълник?

☺ **Задача 94.** (Bertrand Paradox) Да разгледаме равностранен триъгълник, вписан в окръжност с радиус 1. Каква е вероятността случайно избрана хорда от тази окръжност да е по-дълга от страната на триъгълника?

Задача 95. Дадена е случайна величина X с плътност $f_X(x) = \begin{cases} c(x^2+2x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$. Намерете

1. константата c;
2. $\mathbb{E}X$ и DX;
3. вероятността X да е по-малка от математическото си очакване;
4. очакването на случайната величина $X^2 + 3X$.

Задача 96. Върху окръжност $k(O, r)$ е фиксирана точка A, а точка B попада по случаен начин върху окръжността. Да се намери математическото очакване на лицето на $\triangle AOB$.

Задача 97. Нека $X \sim U(0, 7)$ е времето на безотказна работа в години на даден апарат. Съгласно гаранцията на апарата, той ще бъде заменен с нов на петата година или преди това, в случай на дефект. Нека Y е времето до смяната на апарата. Да се пресметнат $\mathbb{P}(Y < 4)$, $\mathbb{E}Y$ и DY. Ако са продадени 1000 апарата, колко средно ще трябва да се подменят преди петата година?

Задача 98. Във вътрешността на кръг с радиус R случайно се избират точките A и B. Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус AB да лежи във вътрешността на кръга.

Задача 99. В магазин работят две касиерки. Предполагаме, че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е експоненциално разпределена случайна величина с математическо очакване 8(мин) за първата опашка и 5(мин) за втората. Клиент, избрал по случаен начин опашка, е чакал по-малко от 4 минути. Каква е вероятността той да е бил на първата опашка?

Задача 100. Времето за преглед на пациент е експоненциално разпределена случайна величина с очакване 30(мин). За преглед има записани двама пациенти - първият за 11:00, а вторият за 11:30, като и двамата пристигат в точно определения час. Ако прегледът на първия не е завършил, вторият изчаква. Да се пресметне средно колко време ще прекара вторият пациент в поликлиниката.

Задача 101. Нека случайната величина $X \sim Exp(\lambda)$. Да се намерят плътностите на случайните величини

- $Y = -X$;
- $Y = 2X - 1$;
- $Y = \sqrt{X}$;
- $Y = X^\alpha$ за $\alpha > 0$.

Задача 102. Лъч (светлина) минава от точката $(0, 2)$ към т. $(0, 1)$ и се пречупва случайно, сключвайки ъгъл $\theta \in (-\pi/2; \pi/2)$ с Oy. Нека X е точката, в която пречупеният лъч пресича Ox. Да се намери плътността на X.

Задача 103. Монета, за която вероятността за падане на ези е 3/4 се хвърля 2000 пъти. Каква е вероятността броят на падналите се езита да е между 1475 и 1535?

Задача 104. Точка (X, Y) попада по случаен начин в триъгълник с върхове в точките с координати (0,0), (0,2) и (3,0). Да се намери съвместната плътност, функцията на разпределение и корелацията на X и Y.

Задача 105. Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е настроено така, че през фиксиран час, в случаен момент X ще запали лампите, а в момент Y ще ги угаси. Нека съвместната плътност на случайните величини X и Y е $f_{X,Y}(x, y) = cxy, 0 < x < y < 1.$. Да се намери

1. константата c;
2. маргиналните плътности и математическите очаквания;
3. вероятността лампите да бъдат запалени преди 45-тата минута и да светят по-малко от 10 минути;
4. колко е средното време на светене, ако лампите са запалени на 15-тата минута;
5. каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20 минути?

Задача 106. Върху страните на квадрат, независимо една от друга, по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е a.

Задача 107. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1/(X_1 + X_2)$.

Задача 108. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1 + X_2$.

Задача 109. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на случайната величина

1. $Y = \max(X_1, X_2)$;
2. $Y = \min(X_1, X_2)$.

Задача 110. Във вътрешността на триъгълник с лице 1 по случаен начин попада точка P. Правата през P, успоредна на страна на тригълника, пресичат другите му две страни в точките Q и R. Точките S и T лежат върху страна на триъгълника, така че $QRST$ е правоъгълник. Да се намери $\mathbb{E}S_{QRST}$.

Задача 111. Два инструмента се използват за измерването на прахови частици във въздуха. Да допуснем, че реалното количество е $x\ g/m^3$. В такъв случай, първият дава показание, което е с нормално разпределение със средно x и стандартно отклонение (σ) $0.05x$, а резултатът от втория също е с нормално разпределение със средно x, но със стандартно отклонение $0.1x$. Кой апарат бихте използвали? Колко е вероятността за всеки от апаратите да допусне грешка, която е повече от $0.1x$?

Човек решава да използва средното аритметично от двата апарата. Ако измерванията им са независими, каква е вероятността за грешка над $0.1x$ при тази процедура?

Задача 112. Нека ξ и η са независими случайни величини, $\xi \sim Exp(2)$ и $\eta \sim U(0,3)$, т.е.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{ако } x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ако } 0 < x < 3 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Намерете корелация на ξ и η, $P(\xi < \eta)$ и плътността на ξ/η.

Задача 113. *(К2, СЕМ 2020)* Точка A попада случайно в окръжност $k(O,1)$ с център O и радиус 1. Нека случайната величина X е равна на $|OA|$. Можете ли да предположите колко са модата и медианата? Аргументирайте се. Колко бихте очаквали да е $\mathbb{E}X$? *(Мода на дискретно разпределение наричаме стойността с най-голяма вероятност. В непрекъснатия случай, по аналогия, се интересуваме от стойността, която максимизира f_X. Наричаме a медиана на разпределението на X, ако $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq a) = 1/2$.)*

1. Намерете функцията на разпределение, плътността, очакването и дисперсията на X.
2. Нека сега разгледаме 3 точки, A_1, A_2 и A_3, които попадат случайно и независимо една от друга в същата окръжност. Колко е очакването на разстоянието до най- близката до центъра? А до най-отдалечената? *(Бонус: Намерете очакваното разстояние до средната точка. Би ли трябвало то да е равно на $\mathbb{E}X$?)*

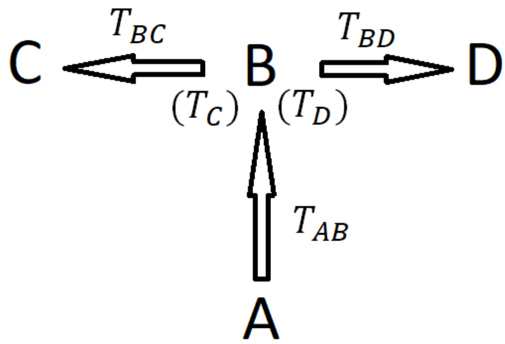
Задача 114. *(К2, ВиС 2021)* На спирките за градски транспорт се инсталират информационни табла с размери 10×100 диода. Доставени са качествени материали, като можем да моделираме времето на изправност на един диод чрез експоненциална сл. вел. със средно 10 години.

Опитът показва, че ако работят по-малко от 75% от диодите, информацията често е неразбираема и таблото трябва да се ремонтира. Каква е вероятността да трябва да бъде извършен ремонт след 3 години експлоатация?

Задача 115. *(К2, ВиС 2021)*Да предположим, че можем да моделираме възвръщаемостите на три актива A, B и C като независими нормално разпределени случайни величини $N(3,2), N(3,3), N(1,10)$ и че разполагате с 5 единици за инвестиции.

1. Как бихте разпределили парите си, за да максимизирате очакваната печалба?
2. Между всички възможности от 1., един начин за избор е да предпочетем разпределението с най-малка дисперсия. Кое е то?
3. Рисков инвеститор залага 5-те си единици в независим актив $D \sim N(-2,20)$. Каква е вероятността неговата инвестиция да е по-успешна от тази в 2.?

Задача 116. *(K2, BuC 2021)* X и Y пътуват заедно от град A до B. След пристигането си, изчакват съответно автобуси до C и D. Предполагаме, че пътуванията траят съответно $T_{AB} \sim Exp(3), T_{BC} \sim Exp(4)$ и $T_{BD} \sim Exp(5)$, а изчакванията в B са $T_C \sim Exp(1)$ и $T_D \sim Exp(2)$, като така дефинираните времена са независими. Нека ξ и η са времената на пътуване на X и Y.



1. Намерете $\mathbb{P}(T_C + \ln(\mathbb{E}T_D) > 0)$.

2. Намерете $Cor(\xi, \eta)$.

Задача 117. *(И, BuC&CEM 2021)* A и B запълват времето си като избират числа $U([0,1])$ (например чрез компютрите си) на рундове - първо и двамата избират по едно число, след това по още едно и т.н. Без особени знания по вероятности, решават да проверят колко често се падат "големи" числа - да кажем по-големи от 0.75. Методите, които са харесали са 2:

1. Всеки от двамата избира по 5 числа и пресмятат каква част от 10-те числа са по-големи от 0.75;

2. Същото като предишното, но всеки симулира по 500 числа;

   Оценете какви са средните отговори, които биха получили при всяка от процедурите. Какви са дисперсиите при различните методи? Кой метод бихте избрали и защо?

3. При голям рундове, в каква част от тях и двете числа ще бъдат по-големи от 0.75? Колко е очакваният брой рундове докато поне едното от двете числа е по-голямо от 0.75?

Ето една примерна реализация:

рунд	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
A	*0.167*	*0.518*	*0.991*	*0.364*	*0.496*
B	*0.296*	*0.840*	*0.755*	*0.143*	*0.646*

В нея пропорцията от 1. е 3/10, тази от 3. е 1/5, а броят рундове докато поне едно число е по-голямо от 0.75 - 2.

Задача 118. *(K2, BuC 2022)* Застрахователната компания „Инс 1” моделира размера на исковете, които изплаща чрез независими експоненциални сл. вел. със средно 100 лв. „Инс 1” сключва презастраховка на цена от $x > 0$ лв с „Инс 2”, която гласи, че ако постъпи иск над 300 лв към „Инс 1”, „Инс 2” ще покрие 200 лв от тях.

1. (0.25 т.) Каква е вероятността „Инс 1” да трябва да плати от своя бюджет по-малко от 200 лв за един иск?

2. (0.25 т.) Ако „Инс 2” желаят да има средна печалба от 10 лв на иск, каква е стойността на x?

3. (0.5 т.) Ако „Инс 1” желаят да има средна печалба от 10 лв на иск, колко би трябвало да е цената на полицата, която предлагат? Каква би била цената, ако не сключваха презастраховка с „Инс 2”? Защо „Инс 1” биха искали да сключат такава презастраховка при положение, че средната печалба е еднаква?

Задача 119. Нека $(X_j)_{j\geq 1}$ са независими, $X_i \sim Exp(1)$ и $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

1. (0.25 т.) Изразете функциите на разпределение на M_2 и M_n.

2. (0.75 т.) Покажете, че $Y_n = M_n - \log(n)$ е сходяща по разпределение към случайна величина Y и намерете функцията на разпределение на Y.

Задача 120. Ентусиаст се интересува от стойността на π, като разполага с компютър, но няма достъп интернет. По тази причина, решава да симулира голям брой равномерно разпределени случайни точки в $[0,1] \times [0,1]$ и да разгледа каква част от тях попадат във вписаната за този квадрат окръжност.

Можете ли да обясните как това може да доведе до оценка за π и защо? Колко точки трябва да се симулират, така вероятността грешката да бъде по-малка от 0.001 е 95%?

✎ **Задача 121.** По официални данни, историческата средна температура в София през януари е $-0.5°C$. Нека случайната величина X = "средна температура през януари в София в градуси по Целзий". Да приемем, че тя има нормално разпределение. Обикновено оценка за дисперсията се прави също от данни, но като задача ние ще разгледаме друг (непрепоръчителен) метод.

Да кажем, че даден човек разглежда температура над $20°C$ градуса като изключителна аномалия - вероятността ѝ е 1 процент. Каква оценка води това разсъждение за дисперсията на X? Каква е вероятността в такъв случай температурата да падне под $-15°C$ градуса?

✎ **Задача 122.** Да допуснем, че количеството грах в грамове в определен вид консерви може да се моделира чрез $N(\mu, 10^2)$. Ако знаем, че 15% от консервите съдържат по-малко от 250 грама грах, намерете:

1. (0.25 т.) параметъра μ;
2. (0.25 т.) процента консерви, които съдържат повече от 280 грама грах.

След промяна, да допуснем, че моделът е $N(250, \sigma^2)$.

3. (0.5 т.) Намерете σ, ако знаете, че 97% от консервите съдържат между 230 и 270 грама грах.

✎ **Задача 123.** Попълваме случайно 1 байт, т.е. можем и да кажем, че разглеждаме числата от $00000000_{(2)}$ до $11111111_{(2)}$, т.е. от $0_{(10)}$ до $255_{(10)}$. Ако избираме първия бит (отляво надясно) да бъде 1 с вероятност 1/2, втория да бъде 1 с вероятност 1/4 и т.н.

0	1	0	0	0	1	1	1

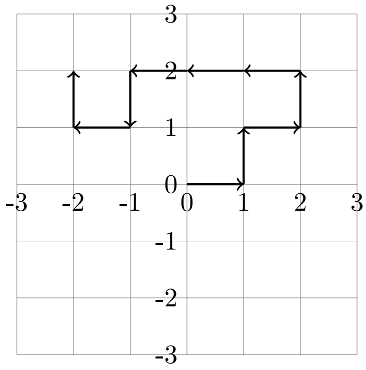
1. Какъв е очакваният брой единици?
2. Какво е очакването на числото, което представлява полученият байт в десетична бройна система? В примера от по-горе, числото е 71.

✎ **Задача 124.** Цената на имот в близост до ФМИ е 250 000 евро. Опитен брокер може да договори различна цена, като процента, с който изменя цената е сл.вел $X_1 \sim N(-10, 10)$. В случай, че преговаряте сами, може да промените цената с $X_2 \sim N(0, 100)$ процента, като X_1 и X_2 са независими.

1. Каква е вероятността цената да е по-добра, ако преговаряте сами, отколкото с брокер?
2. Каква е вероятността да се договори цена под 225 000 евро във всеки от случаите?

✎ **Задача 125.** *(K1, CEM 2022)* Избираме случайна точка X върху отсечката OA с дължина 1. След това избираме случайна точка Y върху отсечката XA. Каква е вероятността да можем да съставим триъгълник от отсечките OX, XY и YA?

✎ **Задача 126.** *(K2, CEM 2022)* Точка започва да се движи от началото на координатната система успоредно на някоя от осите, като всеки път избира равномерно една от посоките и се премества на 1 в съответната посока. На картинката по-долу може да видите примерна реализация на маршрут от 10 стъпки.



1. Каква е вероятността след 1000 стъпки x-координатата да бъде по-голяма от 10?
2. Намерете очакването и дисперсията на квадрата от разстоянието до центъра след 100 стъпки.

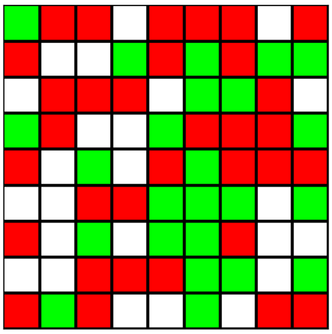
✎ **Задача 127.** *(K2, CEM 2022)* Нека $X_0 \sim Exp(1)$ и $X_n = 2X_{n-1} + \epsilon_n$ за $n \in \mathbb{N}$, където ϵ_n са независими $N(0, 1)$ случайни величини.

1. Намерете $\mathbb{E}X_n$ и DX_n.

2. Нека $S_{n,1} = \sum_{i=1}^n (X_n - 2X_{n-1})^2$ и $S_{n,2} = \sum_{i=1}^n |X_n - 2X_{n-1}|$. Намерете $\mathbb{E}S_{n,1}$ и $\mathbb{E}S_{n,2}$.

3. Можете ли да отговорите на въпросите от 1. и 2., когато $\epsilon_i \sim N(1, 2)$?

Задача 128. *(И, СЕМ 2022)* Квадратчетата от решетка 9x9 се оцветят по случаен начин в един от цветовете бяло, зелено и червено.



1. Какъв е очакваният брой на квадратчетата, които са оцветени в бяло или зелено? Каква е вероятността те да бъдат поне 60?

   Хоризонтално (вертикално) знаме ще наричаме три последователни хоризонтални (вертикални) клетки, оцветени в бяло, зелено и червено от ляво надясно (от горе надолу).

2. Вярно ли е, че броят хоризонтални знамена е биномно разпределен и ако да, с какви параметри?

3. Какво е очакването на броя хоризонтални знамена?

4. Независими ли са броевете хоризонтални и вертикални? Какъв е очакваният общ брой на хоризонтални И вертикални знамена?

Задача 129. *(И, СЕМ 2022)* Нека $X_1, X_2, \ldots$ независими $Exp(1)$ сл. вел. и $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Намерете плътността на S_2 и докажете по индукция, че плътността на S_n е

$$f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

2. Нека $N_t := \max\{n : S_n \leq t\}$. Докажете, че $\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(S_n \leq t)$ и че $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$.

3. Намерете разпределението на N_t.

Задача 130. *(И, ВиС 2023)* Нека $U \sim U(0, 1)$ и $V \sim U(-\pi/2, \pi/2)$.

1. Метод за генериране на псевдослучайно число между 0 и 1 чрез U е да се избере (обикновено голямо) естествено число M и да се пресметне дробната част на MU, $X := \{MU\}$. Намерете $\mathbb{E}X, DX$ и $Cor(U, X)$. Какво е мнението ви за този метод?

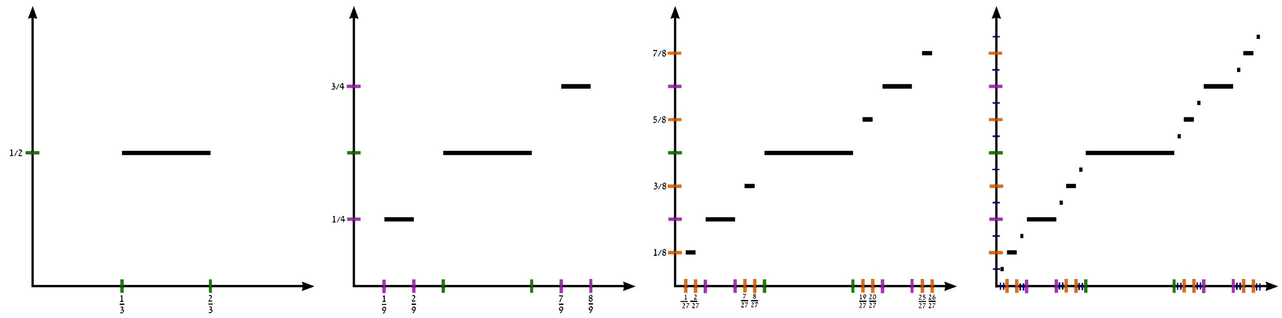
2. Нека $U_1, \ldots, U_{100} \sim U$ са iid. Какво е очакването на всяко от тях? А на най-голямото и най-малкото измежду им?

3. Намерете плътността, очакването и дисперсията на сл. вел $Y := \operatorname{tg} V$.

4. Нека $Z \sim Cauchy(1)$, т.е. $f_Z(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$ за $x \in \mathbb{R}$. Докажете, че сл.вел. $1/Z$, $2Z/(1 - Z^2)$ и $(3Z - Z^3)/(1 - 3Z^2)$ имат еднакви разпределения.

Задача 131. *(И, ВиС 2023)*

1. (0.25 т.) Дефинираме условна дисперсия чрез $D(Y|X) := \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X)$. Припомняме, че за условното очакване знаем че $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$. Кой от изразите $\mathbb{E}(D(Y|X))$, $D(D(Y|X))$, $\mathbb{E}(D(Y|X)) + D(D(Y|X))$ и $\mathbb{E}(D(Y|X)) + D(\mathbb{E}(Y|X))$ представя DY чрез $D(Y|X)$?



Фигура 1: Рекурсивно конструиране на функцията на Кантор. Източник: Wikipedia.

Конструираме функцията на Кантор $c(x) : [0,1] \to [0,1]$ по следния начин: за $x \in [1/3, 2/3]$, $f(x) := 1/2$. След това върху $[0, 1/3)$ и $(2/3, 1]$ констуираме по същия начин рекурсивно: за $x \in [0, 1/3)$, $f(x) := f(3x)/2$ и за $x \in (2/3, 1]$, $f(x) := (1 + f(3x - 2))/2$.

2. Нека X е сл. вел. с $F_X(x) = c(x)$ за $x \in (0, 1)$. Намерете $\mathbb{E}X$ и DX.

3. Докажете, че F_X е диференцируема почти навсякъде. Каква е плътността на f_X?

Задача 132. *(И, ВиС&СЕМ 2023)* Нека съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x, y) = cx + y$ за $x, y \geq 0, x + 2y \leq 1$ и 0 извън тази област, където c е някаква константа.

1. Намерете c, плътността на X и очакването на Y.

2. Намерете $\mathbb{E}(Y|X = 1/2)$.

3. Намерете плътностите на случайните величини $Z = X + 2Y$ и $Z = XY$.

4. Нека $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ са независими и еднакво разпределени като (X, Y). Оценете вероятността $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > Y_1 + \cdots + Y_n)$ за големи n.

Задача 133. *(К2, ВиС 2023)* Законът на Бенфорд[3], известен още като „законът за първа цифра", е емпирично наблюдение, че в много реални бази от данни, първата ненулева цифра (при това не само в десетично представяне!) не е равномерно разпределена, а е най-често 1. Десетичното разпределние на Бенфорд пък е разпределение върху $\{1, 2, \ldots, 9\}$, за което вероятността на цифрата d е $\log_{10}(1 + 1/d)$.

Намерете с точност 0.01 вероятността първата ненулева цифра в десетичното представяне на X да бъде 1 за:

1. $X \sim N(0, 1)$;

2. $X \sim Exp(1)$;

3. $X = U_1/U_2$ за независими $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$. Намерете $\mathbb{E}X$.

4. *бонус: X = „случайна положителна степен на 2".* Формално, намерете $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n$ започва с 1) за $X_n = 2^{U_n}$, $U_n \sim U(\{1, 2, \ldots, n\})$.

Сравнете с разпределението на Бенфорд.[4]

Задача 134. *(К2, ВиС 2023)* Нека $X_1, X_2 \sim \Gamma(3, 2)$, т.е $f_X(x) = 4x^2 e^{-2x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$.

1. Намерете плътността $Y = X_1/(X_1 + X_2)$.

2. Намерете $Cor(X_1, X_2)$ и $Cor(X_1 + X_2, Y)$.

3. Независими ли са $X_1 + X_2$ и Y?

Задача 135. *(К2, ВиС 2023)* Според компания за производство на чипове, само 1 на всеки 1000 чипа е неизправен.

1. Как бихте оценили вероятността от 100 чипа да има поне 1 неизправен чрез ЦГТ? Какви други начини бихте предложили?

[3] Забелязан от Newcomb в логаритмични таблици през 1881 и при по-голям набор от данни от Benford през 1934.

[4] Ако имате време, може да опитате да пресметнете вероятностите и за цифрите, по-големи от 1 и да сравните с разпределението на Бенфорд.

2. Неравенството на Бери-Есен гласи, че ако $X_1, \dots, X_n$ са iid сл. вел. и
$$\mu := \mathbb{E}X_1, \sigma := \sqrt{DX}, \rho := \mathbb{E}\left[|X-\mu|^3\right] < \infty, Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$
то
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}\left(Z_n \le x\right) - \Phi(x)| \le \frac{\rho}{2\sigma^3\sqrt{n}}.$$
Как това може да е полезно при евентуално решение на 1.? При какви n, грешката при приближение чрез ЦГТ би била под 0.001, ако приемете че информацията, дадена от компанията е вярна?

Задача 136. Нека X, Y са независими експоненциално разпределени сл. вел. с параметри съответно $1/\alpha$ и $1/\beta$ и $X_1, \dots, X_n$ са независими наблюдения над X.

1. (0.25 т.) Нека $\overline{X} := (X_1 + \cdots + X_n)/n$. За големи n, намерете c, такова, че $\mathbb{P}(|\alpha - \overline{X}| > c) \le 1\%$.

Нека $Z = \sqrt{X/Y}$ и $Z_1, \dots Z_n$ са независими наблюдения над Z.

2. (0.75 т.) Вярно ли е, че
$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \sqrt{\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{\mathbb{E}\left[Y\right]}}\,?$$
Ако да, го докажете, а ако не - намерете каква е границата.

Задача 137. Хвърля се зар, на две от чиито страни е изписана цифрата 1, на други две – цифрата 3, на една от оставащите две страни – цифрата 5, а на последната страна – цифрата 7. Нека сл.вел. X е резултатът от едно хвърляне на зара.

- (0.25 т.) Да се намери разпределението, математическото очакване и дисперсията на X. Да се намери вероятността при 5 хвърляния, общият брой на 3-ките и 7-ците да бъде 4.
- (0.25 т.) Намерете приблизително вероятността сумата от 100 хвърляния да надвишава 2222. А 4444?
- (0.25 т.) Намерете очаквания брой хвърляния до падането на стотната 7-ца. Колко е очакваният брой тройки до този момент?

Задача 138. (И, ВиС&СЕМ 2024) Студент от ФМИ, неудовлетворен от непредвидимостта на стандартната рулетка, решава да създаде друг вариант, в който падналите се цветове да влияят на бъдещите. Механизмът е, че

- на рулетката има само черни и червени числа;
- при $n+1$-то завъртане, вероятността за червено число е $P_n(m) := \frac{1+m}{2+n}$, където m е броят пъти, в които се е паднало червено число до този момент.

Нека $X_n := 1_{\{\text{на } n\text{-тото завъртане се е паднало червено число}\}}$. Тогава условното разпределение на X_{n+1}, знаейки историята на хвърлянията до този момент $(X_1, \dots, X_n)$, е Бернулиево с параметър за успех $P_n(\sum_{i=1}^n X_i)$. Така например, ако първите числа са били (червено, червено, черно), имаме $(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 0)$ и $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (1/2, 2/3, 3/4, 3/5)$, откъдето $\mathbb{P}(X_4 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) = P_3(2) = 3/5$.

1. (0.25 т.) Докажете, че $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{\sigma(1)} = x_1, X_{\sigma(2)} = x_2, \dots, X_{\sigma(n)} = x_n)$ за всяка пермутация σ на $\{1, \dots, n\}$, т.е. векторът $(X_1, \dots, X_n)$ и всички негови пермутации имат еднакво разпределение.
2. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{P}(X_n = 0)$, както и $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, $i \neq j$.
3. (0.25 т.) Намерете разпределението на броя паднали се червени числа W_4 след 4 опита. А какво е разпределението на W_n след n опита?
4. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{P}(X_m = 0 | X_n = 1)$ за всеки m, n.
5. (0.25 т.) Намерете вероятността n-тото и $(n+1)$-то число да са еднакви.
6. (0.25 т.) Пресметнете $\mathbb{P}(W_{n+1} = W_n + 1)$.
7. *бонус*: (0.5 т.) Докажете, че P_n има граница по разпределение и я намерете.*
8. *бонус*: (0.25 т.) Предложете алгоритъм, който явно да конструира рулетка с числа от 1 до 36, от които четните са червени и да реализира горното условие.*

Задача 139. (И, ВиС&СЕМ 2024)

1. (0.5 т.) Нека $q \in (0,1)$ и $U_1 \sim U(0,1)$. Да дефинираме и $X := 1 + \left\lfloor \frac{\ln(U_1)}{\ln(q)} \right\rfloor$, където с $\lfloor x \rfloor$ бележим цялата част на числото x, например $\lfloor 1.15 \rfloor = 1$ и $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Какви стойности приема X? Намерете разпределението и очакването му.

2. (0.25 т.) Нека $U_1, U_2 \sim U(0,1)$ са независими и $Y := \ln(U_1)/\ln(U_2)$. Намерете плътността и очакването на Y.

3. (0.25 т.) Вярно ли е, че $1 + \lfloor \ln(U_1)/\ln(U_2) \rfloor$ има геометрично разпрделение? Обяснете защо.

Задача 140. (К2, КН 2024) Целта в тази задача е да намерим целочислените моменти на нормално разпределена случайна величина $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. За улеснение, първоначално ще работим със $Z \sim N(0,1)$.

1. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}\left[e^{\lambda Z}\right]$ за $\lambda > 0$. Намерете $\mathbb{E}\left[Z^k\right]$ за $k \leq 6$.

2. (0.25 т.) Докажете, че $\mathbb{E}\left[f(Z)Z\right] = \mathbb{E}\left[f'(Z)\right]$ за функции f, такива че последните две очаквания са добре дефинирани.

3. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}\left[Z^k\right]$ за всяко $k \geq 0$. Можете ли да получите респективния резултат за $\mathbb{E}\left[X^k\right]$?

4. (0.25 т.) Намерете вероятността $\mathbb{P}(Z^k > Z^{k-1})$ за $k \geq 5$.

Задача 141. (К2, СЕМ 2023) Нека $U_1, U_2, U_3 \sim U(0,1)$ са независими. Нека $U_{(1)}, U_{(2)}, U_{(3)}$ са наредените в нарастващ ред U_1, U_2 и U_3.

Например, ако дадена реализация е $U_1 = 0.23$, $U_2 = 0.88$, $U_3 = 0.1$, *то* $U_{(1)} = 0.1$, $U_{(2)} = 0.23$, $U_{(3)} = 0.88$.

1. Намерете плътностите и очакванията на $U_{(1)} := \min\{U_1, U_2, U_3\}$ и $U_{(3)} := \max\{U_1, U_2, U_3\}$.

2. Вярно ли е, че $U_{(2)} \sim U(0,1)$. Ако да, го докажете, а ако не - намерете разпределението му.

3. Намерете дисперсията на $X := -\ln(U_1)$.

Нека $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim Exp(1)$ са независими.

4. Намерете плътностите, очакванията и дисперсиите на $S_2 := X_1 + X_2$, $S_3 := X_1 + X_2 + X_3$ и $S_4 := X_1 + \cdots + X_4$.

5. Нека $Y_k := S_k/S_n$. Докажете, че $Y_{(k)}$ и $U_{(k)}$ имат еднакви разпределения за $k = 1, 2, 3$.

В този курс няма да имаме време да разгледаме тези задачи, но те покриват началния материал по математическа статистика.

Нотация: Навсякъде ще считаме, че разполагаме с извадка от независими еднакво разпределение (iid) сл. вел. $X_1, \ldots, X_n$ с общ закон X. С $\overline{X_n}$ ще бележим $(X_1 + \cdots + X_n)/n$, като за удобство често пропускаме индекса n. С $F_X(x)$ ще бележим функцията на разпределние на X, а с f_X евентуална нейна плътност.

Точкови оценки.

Задача 142. Нека $X_{(k)}$ е k-тото най-голямо от $X_1, \ldots, X_n$. Намерете разпределението на $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ и $F_X(X_k)$ за всяко k.

Задача 143. За всяко наблюдение k, X_k дефинираме мярка за „несъгласуваност" спрямо извадката чрез отношението

$$t_k := \frac{X_k - \overline{X}}{S}, \quad \text{където}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Докажете, че $|t_k| < (n-1)/\sqrt{n}$ за всяко k.

Задача 144. Нека $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Намерете максимално правдоподобна оценка (м.п.о.) за:

1. μ като σ е известно;
2. σ като μ е известно;
3. μ и σ, като и двете са неизвестно.

Проверете дали намерените оценки са неизместени, състоятелни и ефективни.

Задача 145. Нека $X \sim Ber(\theta)$. Намерете ефективна оценка за неизвестния параметър θ.

Задача 146. Нека $X \sim Poi(\lambda)$. Да се намери ефективна оценка за параметъра λ.

Задача 147. Нека $X \sim U(0, \beta)$.

1. Да се намери м.п.о. за параметъра β. Да се провери дали намерената оценка е неизместена и състоятелна.
2. Да се провери дали $2\overline{X}$ е неизместена и състоятелна оценка за β. Да се сравнят оценките от 1. и 2.

Задача 148. За да се оцени броят на рибите в едно езеро се постъпва по следния начин: улавят се M на брой риби, маркират се и се връщат обратно в езерото. След известен период от време се улавят n риби. Оказва се, че m от тях са маркирани. Да се намери м.п.о. за N – общият брой на рибите в езерото.

Задача 149. Нека $X \sim Ge(p)$. Да се намери оценка по метода на моментите за параметъра p.

Задача 150. Нека $X \sim U(\theta_1, \theta_2)$. Да се намери оценка по метода на моментите за параметрите θ_1 и θ_2.

Доверителни интервали.

Задача 151. Нека $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Да се построи доверителен интервал с точно ниво на доверие γ

1. за μ като σ е известно;
2. за σ като μ е известно;
3. за μ като σ е неизвестно;
4. за σ като μ е неизвестно;

Задача 152. Производител на шоколадови бонбони цели да определи срока на годност на своя продукт. Предишните изследвания показват, че времето, през което, бонбоните запазват своите качества е нормално разпределена случайна величина с математическо очакване 13 месеца и стандартно отклонение 3 месеца. Въвежда се нова рецепта, като се очаква тя да удължи средния срок на годност. Наблюдавани са 16 изделия и са получени следните данни:

8	13.6	13.2	13.6	12.5	14.2	14.9	14.5
13.4	8.6	11.5	16	14.2	19	17.9	17

Да се определи доверителен интервал за средния срок на годност с точно ниво на доверие 96%. ($\overline{X} = 13.9$, $s_n \approx 2.94$)

Задача 153. Да се определи 95% доверителен интервал за очакването и 98% доверителен интервал за дисперсията по данните от задача 2.

Задача 154. Нека $X \sim \mathcal{N}(a, 2500)$. Намерете най-малкия необходим брой наблюдения над X, за да бъде определено a с точност $\varepsilon = 25$ и надежност $\alpha = 0.9$.

Задача 155. Нека $\mathbb{E}[X] = a$. При 40 наблюдения над X са получени следните оценки за a и стандартното отклонение σ_X: $a = 10400$ и $\sigma_X = 85$. Покажете, че доверителният интервал $[0.999a, 1.001a]$ покрива неизвестната стойност на a с вероятност $\gamma \approx 0.56$.

Задача 156. Нека $X \sim Exp(\lambda)$ и $\overline{X} = 64$. Намерете асимптотичен доверителен интервал за λ с асимптотично ниво на доверие $\gamma = 0.8$.

Задача 157. Нека $X \sim Ber(p)$. Да се построи асимптотичен доверителен интервал за неизвестния параметър p при ниво на доверие $\gamma = 0.98$ на база наблюдавани данни

$$0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0.$$

Задача 158. Изследвани са електромеханични токопрекъсвачи, използвани за защита на електрически вериги. Оказва се, че от 193 прекъсвача, за които теста е неуспешен, при 75 повредата е в механичната част. Да се построи 95% доверителен интервал за вероятността p - устройствата да покажат дефект заради механиката. Колко дефектни устройства трябва да се изследват, за да бъде доверителният интервал с точност ± 0.03?

Проверка на хипотези.

Задача 159. Нека X_1 е наблюдение над случайната величина X. Да се провери хипотезата

$$H_0 : f_X(x) = \begin{cases} 0.10, & \text{при } x \in [0, 0.5) \\ 0, & \text{при } x \notin [0, 0.5) \end{cases}$$

срещу алтернативата

$$H_1 : f_X(x) = \begin{cases} 1.2, & \text{при } x \in [0, 0.5) \\ 0.3, & \text{при } x \in [0.5, 1.5) \\ 1/85, & \text{при } x \in [1.5, 10) \\ 0, & \text{при } x \notin [0, 10) \end{cases}$$

с ниво на съгласие $\alpha = 0.10$.

Нека $W_1 = [0, 1)$, $W_2 = [0, 0.5] \cup [1, 1.5)$, $W_3 = [0, 0.5) \cup [0.75, 1.25)$, $W_4 = [0, 0.5) \cup [1.5, 2)$, $W_5 = [5.2, 6.2)$. Докажете, че W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 са критични области, а $W_1 \cap W_2 \cap W_3, W_1 \cap W_2 \cap W_4, W_1 \cap W_2 \cap W_5$ са оптимални критични области (о.к.о).

Задача 160. Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими наблюдения над случайната величина X. Проверява се хипотезата $H_0 : X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ срещу алтернативата $H_1 : X \sim \mathcal{N}(1, 1)$ с ниво на съгласие $\alpha = 0.05$. Да се определи о.к.о. и да се пресметне мощността на критерия при $n = 9$. Намерете най-малкото n, за което мощността на критерия е по-голяма от 0.99.

Задача 161. Извадка с обем n от една партида изделия съдържа x на брой дефектни. При ниво на съгласие $\alpha = 0.04$, да се провери хипотезата H_0 срещу алтернативата H_1

H_0 : „партидата съдържа 10% брак” срещу H_1 : „партидата съдържа 4% брак”.

Да се използва нормално приближение за определяне на о.к.о. и мощността на критерия. Да се намери най-малкото n, за което мощността на критерия е не по-малка от 0.95.

Задача 162. Нека случайната величина $X \sim \text{Po}(\lambda)$ е броят на прекъсвания на телевизионен сигнал вследствие на случайни смущение. Проверява се хипотезата $H_0 : \lambda = 1$ срещу алтернативата $H_1 : \lambda = 4$ с ниво на съгласие $\alpha = 0.03$. Да се използва нормално приближение за определяне на о.к.о. и мощността на критерия. Да се определи най-малкото n, за което мощността е не по-малка от 0.95. Ако направените наблюдения са:

$$1, 0, 2, 0, 3, 1, 0, 4, 3, 1, 0, 2, 1, 4, 0, 5,$$

може ли да се отхвърли хипотезата H_0?

Задача 163. Нека $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. При ниво на съгласие $\alpha = 0.05$ се проверява хипотезата

$$H_0 : \sigma^2 = 1 \quad \text{срещу алтернативата:}$$

1. $H_1 : \sigma^2 = 2$;
2. $H_1 : \sigma^2 = 4$.

Да се сравнят оптималните критични области и мощността на критериите в случаите 1. и 2. за $n = 10$ и $n = 20$. Съществува ли равномерно най-мощна критична област за алтернативата $H_1 : \sigma^2 > 1$?

Задача 164. Средното време за сглобяване на електронно устройство е 2.30 минути. Да предположим, че то е нормално разпределено с дисперсия 1. След въвеждане на нова организация на труда са измерени времена за сглобяване:

$$1, 1.5, 2.2, 3, 2.7, 2, 2.4, 2.6, 2.3, 1.7.$$

Може ли с ниво на доверие 0.95 да се приеме, че при използването на новата технология необходимото време е по-малко?

Задача 165. Нека $X \sim Exp(1/\theta)$. Намерете равномерно най-мощна критична област (р.н.м.к.о.) за проверка на хипотезата

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{срещу алтернативата} \quad H_1 : \theta > 1$$

с ниво на съгласие $\alpha = 0.03$. Каква е мощността на критерия при $\theta = 2$ и $n = 36$?

Задача 166. Нека $X \sim \mathrm{Ge}(p_0)$. Намерете р.н.м.к.о. за проверка на хипотезата

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{срещу алтернативата} \quad H_1 : p < p_0$$

с ниво на съгласие $\alpha = 0.03$. Може ли да се отхвърли H_0, ако $n = 49$ и $\overline{X} = 1.5$?

Задача 167. Нека $X \sim Poi(\theta)$. Намерете р.н.м.к.о. за проверка на хипотезата

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{срещу алтернативата} \quad H_1 : \theta > 1$$

с ниво на съгласие $\alpha = 0.05$. Каква е мощността на критерия при $\theta = 2$ и $n = 25$?

Задача 168. Над върху $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ са направени n независими наблюдения. Проверява се хипотезата

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{срещу алтернативата} \quad H_1 : \mu \neq 0$$

с ниво на съгласие $\alpha = 0.05$. Да се провери:

1. Съществува ли равномерно най-мощна критична област?
2. Може ли да се отхвърли хипотезата H_0, ако $n = 25$ и $\overline{X} = 0.26$?

Задача 169. Нека $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, където параметрите μ и σ^2 са неизвестни и разполагаме с извадка с n наблюдения. Проверява се хипотезата

$$H_0 : \mu = 3.8 \quad \text{срещу алтернативата} \quad H_1 : \mu \neq 3.8$$

с ниво на съгласие $\alpha = 0.05$. Може ли да се отхвърли H_0, ако $n = 16$, $\overline{X} = 3.295$, и $S^2 = 1.4641$?

Задача 170. Производител на автомобилни гуми желае да сравни качеството на произведената от него продукция с това на конкурентна фирма. Известно е, че пробегът на гумите до износване е нормална случайна величина и че средният пробег на продукцията на фирмата конкурент е 43 000 км. По 40 измервания на пробега до износване на случайно избрани гуми са получени $\overline{X} = 41770$ и $S = 8,983$. Може ли да се твърди, че произведената продукция е с по-високо ниво от това на конкуриращата фирма? Приемаме ниво на съгласие $\alpha = 0.05$.

Задача 171. При бутилирането на бира в 10 отделни партиди са наблюдавани следните средни отклонения в проценти от обявеното на етикета количество:

-1.17 -0.46 -0.09 -0.8 -0.5 0.09 -0.68 1.07 0.49 -0.18.

Предполага се, че средните отклонения са нормално разпределени с очакване $\mu = 0$ и дисперсия σ^2. Може ли при ниво на съгласие $\alpha = 0.05$ да се отхвърли хипотезата $H_0 : \sigma = 1$ срещу алтернативата $H_1 : \sigma < 1$? Като използвате нормално приближение, намерете най-малкия брой на тестваните изделия, за който мощността на критерия при $H_1 : \sigma = 4$ ще е по-голяма от 0.99.