

Trabalho Computacional II

Análise Numérica 2016-2017

Sara Cruz (79410)

Fernando Subtil (81085)

Matilde Farinha (81240)

1

O método de Runge-Kutta dado pela tabela de Butcher do enunciado é um método a 3 etapas implícito. A sua ordem será, no máximo, 6. A partir do comando `RungeKuttaOrderConditions[p,s]` obtêm-se as regras que têm de ser satisfeitas para que um método de Runge-Kutta a s etapas tenha ordem p . Os coeficientes dados pela tabela de Butcher satisfazem as regras de um método a 3 etapas até ordem 4, pelo que é essa a ordem de consistência do método apresentado. O polinómio de estabilidade de um método de Runge-Kutta é dado por

$$R(\bar{h}) = \frac{\det(I - \bar{h}A + \bar{h}\mathbf{1}b^T)}{\det(I - \bar{h}A)}.$$

Neste caso, temos

$$R(\bar{h}) = \frac{18\bar{h}^3 + 108\bar{h}^2 + 324\bar{h} + 432}{108(4 - \bar{h})}.$$

Um método RK é absolutamente estável sse $|R(\bar{h})| < 1$, e a região de estabilidade é dada pelo conjunto de pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem a condição. Obtém-se, assim, no plano complexo, a região de estabilidade do método IRK apresentado.

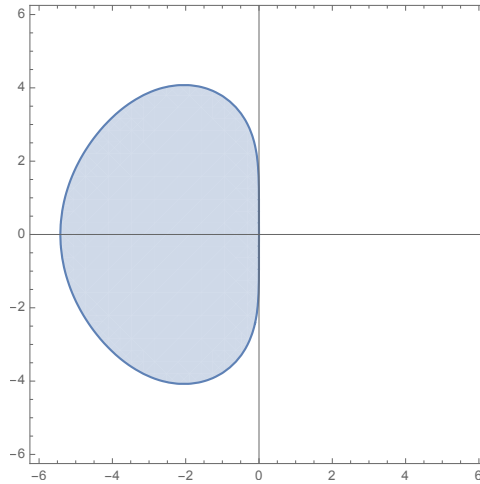


Figura 1: Região de estabilidade do método IRK

O método é condicionalmente absolutamente estável, já que a sua região de estabilidade está inteiramente no semi-plano esquerdo do plano complexo.

O método de Nyström implícito (Milne-Simpson) é um método multipasso linear a 2 passos dado pela fórmula

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}[f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n] \quad n \geq 0.$$

Este é um método implícito de ordem 4, a ordem máxima de um método multipasso linear a 2 passos consistente e zero-estável.

De facto, para este método, temos $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = -1$ e $b_2 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{4}{3}$, $b_0 = \frac{1}{3}$ e

- $\sum_{j=0}^2 a_j = 0$,
- $k=1$: $\sum_{j=0}^2 j a_j = 2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \sum_{j=0}^2 b_j$,
- $k=2$: $\sum_{j=0}^2 j^k a_j = 4 = 2(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}) = k \sum_{j=0}^2 j^{k-1} b_j$,
- $k=3$: $\sum_{j=0}^2 j^k a_j = 8 = 3(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}) = k \sum_{j=0}^2 j^{k-1} b_j$,
- $k=4$: $\sum_{j=0}^2 j^k a_j = 16 = 4(\frac{4}{3} + \frac{8}{3}) = k \sum_{j=0}^2 j^{k-1} b_j$,

confirmando a sua ordem de consistência. O primeiro polinómio característico deste método é dado por

$$\rho(z) = z^2 - 1$$

e o segundo por

$$\sigma(z) = \frac{1}{3}z^2 + \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}.$$

O primeiro polinómio característico satisfaz a condição da raiz, visto que as suas raízes são 1 e -1, ambas simples e, em módulo, iguais 1, o que confirma a sua zero-estabilidade. O polinómio de estabilidade é dado por

$$\pi(z; \bar{h}) = \rho(z) - \bar{h}\sigma(z) = z^2 - \frac{\bar{h}}{3}z^2 - \frac{4\bar{h}}{3}z - \frac{\bar{h}}{3} - 1.$$

Para que um método multipasso linear a p passos satisfaça a condição de raiz absoluta, tem de existir $h_0 > 0$ t.q. $|r_j(h\lambda)| < 1, j = 1, \dots, p \quad \forall h \in (0, h_0)$, onde $r_j(h\lambda), j = 1, \dots, p$, são as raízes do polinómio de estabilidade e $h\lambda = \bar{h}$. A região de estabilidade absoluta de um método multipasso linear a p passos é dada pelo conjunto de pontos $z \in \mathbb{C}$ onde o polinómio de estabilidade satisfaz a condição de raiz absoluta. Para este método, temos as raízes

$$r_{1,2} = \frac{-2\bar{h} \pm \sqrt{3}\sqrt{\bar{h}^2 + 3}}{\bar{h} - 3}$$

A fronteira da região de estabilidade absoluta é o segmento αi com $\alpha \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, dada por

$$\bar{h} = \frac{3(e^{2it} - 1)}{4e^{it} + e^{2it} + 1}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

A região de estabilidade absoluta é nula. Tal significa que o método é numericamente instável, *i.e.* pequenas variações nos dados produzem grandes variações nos resultados.

O método de Adams-Moulton de ordem 4 é um método multipasso de 3 passos em que os coeficientes b_j 's são dados por

$$b_j = \int_2^3 \prod_{i=0, i \neq j}^3 \frac{s-i}{j-i} ds, \quad j = 0, \dots, 3.$$

Obtém-se, assim, a fórmula

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{24}[f_n - 5f_{n+1} + 19f_{n+2} + 9f_{n+3}], \quad n \geq 0.$$

Neste método temos $a_4 = 1$, $a_3 = -1$, $a_i = 0$ para $i = 0, 1, 2$ e $b_0 = \frac{1}{24}$, $b_1 = -\frac{5}{24}$, $b_2 = \frac{19}{24}$ e $b_3 = \frac{3}{8}$, sendo as condições listadas acima também satisfeitas, o que confirma a ordem 4 do método (esta ordem havia já sido obtida por construção). O seu primeiro polinómio característico é dado por

$$\rho(z) = z^3 - z^2$$

e o segundo por

$$\sigma(z) = \frac{3}{8}z^3 + \frac{19}{24}z^2 - \frac{5}{24}z + \frac{1}{24}.$$

As raízes do primeiro polinómio característico são $z_{1,2}(\bar{h}) = 0$ e $z_3(\bar{h}) = 1$, pelo que o polinómio satisfaz a condição da raiz, e, portanto, o método é zero-estável. O polinómio de estabilidade é dado por

$$\pi(z; \bar{h}) = z^3 - z^2 - \frac{3\bar{h}}{8}z^3 - \frac{19\bar{h}}{24}z^2 + \frac{5\bar{h}}{24}z - \frac{\bar{h}}{24}.$$

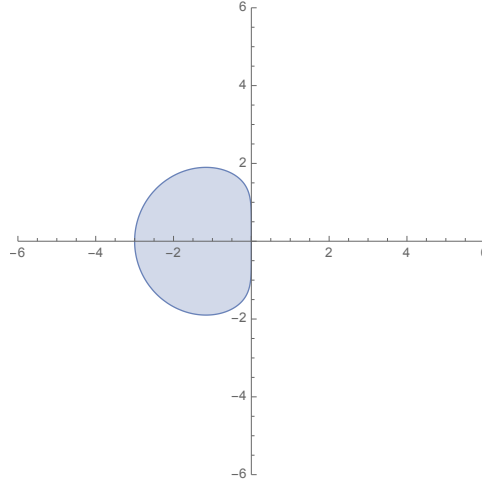


Figura 2: Região de estabilidade do método de Adams-Moulton

Dada a figura delimitada pela fronteira da região e escolhendo um ponto do seu interior, por exemplo $\bar{h} = -1$, verifica-se que todas as raízes do polinómio de estabilidade avaliadas nesse \bar{h} satisfazem a condição de raiz absoluta, pelo que a região de estabilidade absoluta corresponde ao interior da figura. A região está contida no semi-plano esquerdo, *i.e.* $\forall \bar{h} : |r_{1,2,3}(\bar{h})| < 1$ tem-se $Re(\bar{h}) < 0$, pelo que se conclui que o método é condicionalmente absolutamente estável.

O cálculo das regiões de estabilidade dos métodos é útil para a determinação de valores de h , onde $h = t_{n+1} - y_n$, que garantam um bom comportamento do método. Considerando o problema modelo

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

cujas solução exacta é $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$$

pelo que, aplicando um método numérico para aproximar a solução do problema, pretende-se que tenha o mesmo comportamento, *i.e.* que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0.$$

A região de estabilidade absoluta é dada precisamente pelos valores complexos de $h\lambda$, com $h > 0$ para os quais o limite se verifica. Obtém-se, assim, uma dependência não só do passo h , como também do valor de λ específico do problema. Para os métodos de Runge-Kutta e Adams-Moulton analisados, é possível obter uma região de estabilidade absoluta. Verifica-se que a região de estabilidade do método RK apresentada na fig.1 é maior que a região de estabilidade do método de Adams-Moulton. Ambos têm a mesma ordem, pelo, para um valor fixo de h , convergem para a solução no mesmo número de

passos. No entanto, para valores fixos de λ , como $\bar{h} = h\lambda$, se $|\lambda| > 1$ é possível considerar maiores valores de h para o passo, pelo que o número de iterações do método até atingir uma boa aproximação da solução será menor. Ambas têm valores de \bar{h} de $\mathcal{O}(1)$ no interior da região, pelo que, para valores de $0 < |\lambda| \leq 1$ os métodos são estáveis. No caso do método de Milne-Simpson, um método de Nyström implícito, a região de estabilidade é nula, com fronteira dada pelo segmento αi com $\alpha \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Como $\bar{h} = h\lambda$, com $h > 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\bar{h} = \alpha i \Leftrightarrow h\lambda = \alpha i \Leftrightarrow h = \frac{\alpha i}{\lambda} \Leftrightarrow h = \frac{\alpha i \bar{\lambda}}{|\lambda|}.$$

Para que se verifique $h > 0$ com $h \in \mathbb{R}$, é preciso que $\alpha i \bar{\lambda} > 0$, pelo que λ terá de ser da forma $c i$, com $c \in \mathbb{R}$ e tal que $\alpha c > 0$. Conclui-se, assim, que este método é estável apenas para valores de λ desta forma.

2

2.a

Considerando-se o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 200y'(t) + 199y(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ y(0) = 1, y'(0) = 197 \end{cases}$$

Escrevendo-o na forma:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) & 0 < t \leq T \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Tem-se:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix},$$

onde $z(t) = y'(t)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -199 & -200 \end{bmatrix}$$

2.b

Os valores próprios de \mathbf{A} são $\lambda_1 = -199$ e $\lambda_2 = -1$ e os vectores próprios associados $\mathbf{u}_1 = [-1 \quad 199]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [-1 \quad 1]^T$.

Um seguinte sistema diz-se rígido se os valores próprios de \mathbf{A} , $\lambda_j, j = 1, \dots, m$, tais que

$$\sigma_{max} \leq Re(\lambda_j) \leq \sigma_{min} < 0, \quad \forall j$$

se tem que $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \gg 1$. Neste caso, como os valores próprios reais tem-se $\sigma_{max} = \lambda_1 = -199$ e $\sigma_{min} = \lambda_2 = -1$, e portanto $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = 199 \gg 1$.

Conclui-se, então, que o sistema é rígido.

2.c

Os valores próprios de \mathbf{A} são distintos e, após o cálculo dos coeficientes c_1 e c_2 , obtém-se o vector de solução exacta

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-199t} \\ 199e^{-199t} - 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

2.d

As funções RK, RKM e BDF que aproximam valores de $y(t)$ segundo os métodos de Runge-Kutta, Runge-Kutta-Merson e BDF, respectivamente.

- RK: Recebe como argumentos os coeficientes do método RK em forma de matriz \mathbf{A} , e listas \mathbf{b} e \mathbf{c} , o natural \mathbf{s} (número de etapas), matriz \mathbf{An} (que pode ou não depender de t e é tal que $F(t, Y) = \mathbf{An}.Y$), lista \mathbf{Y} (valores iniciais dados), número positivo \mathbf{h} (passo) e valor \mathbf{T} (extremo superior do intervalo). Devolve as aproximações da solução do problema de valores iniciais usando o método de Runge-Kutta para os pontos $t_k, k = 0, \dots, T/h$;
- RKM: Recebe os mesmos argumentos que a função RK e devolve as aproximações da solução do problema de valores iniciais usando o método de Runge-Kutta-Merson para os pontos $t_k, k = 0, \dots, T/h$;
- BDF: Recebe como argumentos a ordem do método \mathbf{p} , a mesma matriz \mathbf{An} , lista \mathbf{Y} , número positivo \mathbf{h} e valor \mathbf{T} referidos na função RK. A implementação deste método implícito calcula as primeiras $p - 1$ iteradas usando a solução exacta. Usa-se também o método de Newton, com iterada inicial como sendo a última iteração obtida pela solução exacta (y_{p-1}), uma vez que se tem uma equação não linear. Note-se que o método desejado é de ordem 5, pelo que usando o método RKM, um método de ordem 4, para aproximar as primeiras iteradas, obtêm-se resultados pouco satisfatórios. Estas deveriam ser aproximadas por um método da mesma ordem no caso de não ser possível obter a solução exacta.

No intuito de obter uma boa análise da ordem de convergência dos métodos e de se testar as funções definidas anteriormente com valores adequados de h fez-se uma análise da região de estabilidade absoluta dos métodos nesta questão contemplados. Isto porque, a partir dos valores de \bar{h} (neste caso reais já que nesta questão os valores de λ são reais) extremos da região de estabilidade absoluta obtêm-se o intervalo a que deve pertencer h , visto que $\bar{h} = h\lambda$. Como o critério deve ser válido para os dois valores próprios do problema $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -199$, no caso de uma região de estabilidade finita, o maior valor em módulo $\lambda_2 = -199$ deve condicionar o tamanho de h .

A partir da função de estabilidade e região de estabilidade absoluta do método de Runge-Kutta calculadas anteriormente obtêm-se os valores reais extremos de \bar{h} 0 e -5.41995, sendo a sua região limitada. Logo tem-se que $h \in [0, 0.0272359]$.

O método de Runge-Kutta-Merson é dado pela tabela de Butcher

| | | | | | |
|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | 0 | 0 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{3}{2}$ | 2 | 0 |
| | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

e a sua função de estabilidade é

$$R(\bar{h}) = \frac{216\bar{h}^5 + 1296\bar{h}^4 + 5184\bar{h}^3 + 15552\bar{h}^2 + 31104\bar{h} + 31104}{31104},$$

de onde se obtêm os valores reais extremos de \bar{h} 0 e -3.54832, sendo a região limitada. Logo tem-se que $h \in [0, 0.0178308]$.

O método BDF é definido por de ordem 5 tem a forma

$$a_5 y_{n+5} + a_4 y_{n+4} + a_3 y_{n+3} + a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h f_{n+5}$$

Sendo os coeficientes a_j dados por $l'_{5-j}(0)$, para $j = 0, \dots, 5$, onde $l_{5-j} = \prod_{i=0, i \neq j}^5 \frac{s-i}{j-i}$. Calculando os coeficientes com a função `coefBDF`, obtém-se a fórmula

$$y_{n+5} - \frac{300}{137}y_{n+4} + \frac{300}{137}y_{n+3} - \frac{200}{137}y_{n+2} + \frac{75}{137}y_{n+1} - \frac{12}{137}y_n = h \frac{60}{137}f_{n+5}$$

No caso do método BDF de ordem 5 temos o polinómio de estabilidade absoluta

$$\pi(z; \bar{h}) = z^5 - \frac{300z^4 - 300z^3 + 200z^2 - 75z + 12 + 60\bar{h}z^5}{137}$$

e, para $Im(\bar{h}) = 0$, tem-se $0 \leq Re(\bar{h}) \leq 17.0667$, sendo a sua região de estabilidade ilimitada. Tem-se, portanto, $h \in]-\infty, 0] \cup [0.0857621, +\infty[$.

Sendo a sua região de estabilidade absoluta ilimitada este método deverá obter melhores aproximações que os outros para valores maiores de h . Pelos resultados anteriores temos que um bom valor de h , contudo ligeiramente grande, para analisar a qualidade das aproximações obtidas pelos métodos será $h = 0.01$.

Esboçando os gráficos dos valores obtidos para $h = 0.01$ e $T = 1$ verifica-se que todos os métodos aproximam bem a solução exacta a partir de um certo ponto. Os métodos de Runge-Kutta estabilizam rapidamente, mas o método BDF leva mais iterações até estabilizar. Podemos confirmar essas observações com os valores da tabela.

| x_n | Erro RK | Erro RKM | Erro BDF |
|-------|---|---|--|
| 0 | {0, 0} | {0, 0} | {0, 0} |
| 0.01 | {0.0237293, 4.72214} | {0.0233675, 4.65014} | {0, 0} |
| 0.02 | {0.0059243, 1.17894} | {0.00584243, 1.16264} | {0, 0} |
| 0.03 | {0.00111264, 0.221416} | {0.00109875, 0.218651} | {0, 0} |
| 0.04 | {0.000186301, 0.037074} | {0.000184205, 0.0366568} | {0, 0} |
| 0.05 | {0.0000293309, 0.00583685} | {0.0000290344, 0.00577785} | {0.0187645, 3.73413} |
| 0.06 | {4.44594 × 10 ⁻⁶ , 0.000884743} | {4.40569 × 10 ⁻⁶ , 0.000876732} | {0.0245203, 4.87954} |
| 0.07 | {6.57052 × 10 ⁻⁷ , 0.000130754} | {6.51742 × 10 ⁻⁷ , 0.000129696} | {0.00708524, 1.40996} |
| 0.08 | {9.53841 × 10 ⁻⁸ , 0.0000189821} | {9.47021 × 10 ⁻⁸ , 0.0000188453} | {0.00571505, 1.1373} |
| 0.09 | {1.36649 × 10 ⁻⁸ , 2.71999 × 10 ⁻⁶ } | {1.35831 × 10 ⁻⁸ , 2.70259 × 10 ⁻⁶ } | {0.00133261, 0.265189} |
| 0.1 | {1.9357 × 10 ⁻⁹ , 3.85954 × 10 ⁻⁷ } | {1.931 × 10 ⁻⁹ , 3.83772 × 10 ⁻⁷ } | {0.004361, 0.86784} |
| 0.11 | {2.69027 × 10 ⁻¹⁰ , 5.43527 × 10 ⁻⁸ } | {2.74518 × 10 ⁻¹⁰ , 5.40872 × 10 ⁻⁸ } | {0.00127908, 0.254536} |
| 0.12 | {0, 7.60642 × 10 ⁻⁹ } | {0, 7.58021 × 10 ⁻⁹ } | {0.00264214, 0.525785} |
| 0.13 | {0, 1.05599 × 10 ⁻⁹ } | {0, 1.05982 × 10 ⁻⁹ } | {0.00106395, 0.211727} |
| 0.14 | {0, 1.42213 × 10 ⁻¹⁰ } | {0, 1.50184 × 10 ⁻¹⁰ } | {0.00150626, 0.299745} |
| 0.15 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000776274, 0.154478} |
| 0.16 | {0, 0} | {0, 0} | {0.00085131, 0.169411} |
| 0.17 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000541862, 0.10783} |
| 0.18 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000477195, 0.0949618} |
| 0.19 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000371722, 0.0739726} |
| 0.2 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000260728, 0.051885} |
| 0.21 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000249111, 0.0495731} |
| 0.22 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000138602, 0.0275818} |
| 0.23 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000163867, 0.0326095} |
| 0.24 | {0, 0} | {0, 0} | {0.0000710899, 0.0141469} |
| 0.25 | {0, 0} | {0, 0} | {0.000106131, 0.0211201} |
| 0.26 | {0, 0} | {0, 0} | {0.0000346197, 0.00688932} |
| 0.27 | {0, 0} | {0, 0} | {0.0000677867, 0.0134896} |
| 0.28 | {0, 0} | {0, 0} | {0.0000155148, 0.00308745} |
| 0.29 | {0, 0} | {0, 0} | {0.0000427448, 0.00850621} |
| 0.3 | {0, 0} | {0, 0} | {5.92164 × 10 ⁻⁶ , 0.00117841} |
| 0.31 | {0, 0} | {0, 0} | {0.0000266318, 0.00529973} |
| 0.32 | {0, 0} | {0, 0} | {1.39961 × 10 ⁻⁶ , 0.000278521} |
| 0.33 | {0, 0} | {0, 0} | {0.0000164018, 0.00326395} |
| 0.34 | {0, 0} | {0, 0} | {5.12281 × 10 ⁻⁷ , 0.000101943} |
| 0.35 | {0, 0} | {0, 0} | {9.98672 × 10 ⁻⁶ , 0.00198736} |
| 0.36 | {0, 0} | {0, 0} | {1.14626 × 10 ⁻⁶ , 0.000228107} |
| 0.37 | {0, 0} | {0, 0} | {6.01115 × 10 ⁻⁶ , 0.00119622} |
| 0.38 | {0, 0} | {0, 0} | {1.20234 × 10 ⁻⁶ , 0.000239264} |

Figura 3: Erro para $h = 0.01$ e $T = 1$

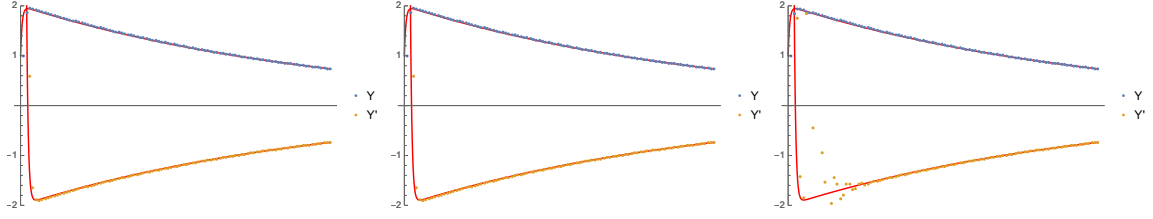


Figura 4: RK ($h = 0.01$, $T = 1$) Figura 5: RKM ($h = 0.01$, $T = 1$) Figura 6: BDF ($h = 0.01$, $T = 1$)

Para o passo $h = 0.001$ e $T = 1$ as aproximações melhoram consideravelmente. Para o método de Runge-Kutta, o erro é da ordem 10^{-7} para a aproximação de y e 10^{-3} para a aproximação de y' .

| x_n | Erro RK | Erro RKM | Erro BDF |
|-------|---|--|---|
| 0 | {0, 0} | {0, 0} | {0, 0} |
| 0.001 | { 5.79965×10^{-7} , 0.000115413} | {0.0233675, 4.65014} | {0, 0} |
| 0.002 | { 9.5062×10^{-7} , 0.000189173} | {0.00584243, 1.16264} | {0, 0} |
| 0.003 | { 1.16862×10^{-6} , 0.000232555} | {0.00109875, 0.218651} | {0, 0} |
| 0.004 | { 1.27699×10^{-6} , 0.000254121} | {0.000184205, 0.0366568} | {0, 0} |
| 0.005 | { 1.3082×10^{-6} , 0.000260331} | {0.0000290344, 0.00577785} | {0.0187645, 3.73413} |
| 0.006 | { 1.28656×10^{-6} , 0.000256025} | { 4.40569×10^{-6} , 0.000876732} | {0.0245203, 4.87954} |
| 0.007 | { 1.23013×10^{-6} , 0.000244796} | { 6.51742×10^{-7} , 0.000129696} | {0.00708524, 1.40996} |
| 0.008 | { 1.15217×10^{-6} , 0.000229283} | { 9.47021×10^{-8} , 0.0000188453} | {0.00571505, 1.1373} |
| 0.009 | { 1.0623×10^{-6} , 0.000211397} | { 1.35831×10^{-8} , 2.70259×10^{-6} } | {0.00133261, 0.265189} |
| 0.01 | { 9.67339×10^{-7} , 0.0001925} | { 1.931×10^{-9} , 3.83772×10^{-7} } | {0.004361, 0.86784} |
| 0.011 | { 8.72061×10^{-7} , 0.00017354} | { 2.74518×10^{-10} , 5.40872×10^{-8} } | {0.00127908, 0.254536} |
| 0.012 | { 7.79669×10^{-7} , 0.000155154} | {0, 7.58021×10^{-9} } | {0.00264214, 0.525785} |
| 0.013 | { 6.92226×10^{-7} , 0.000137753} | {0, 1.05982×10^{-9} } | {0.00106395, 0.211727} |
| 0.014 | { 6.10953×10^{-7} , 0.00012158} | {0, 1.50184×10^{-10} } | {0.00150626, 0.299745} |
| 0.015 | { 5.36471×10^{-7} , 0.000106758} | {0, 0} | {0.000776274, 0.154478} |
| 0.016 | { 4.68976×10^{-7} , 0.0000933261} | {0, 0} | {0.00085131, 0.169411} |
| 0.017 | { 4.08371×10^{-7} , 0.0000812657} | {0, 0} | {0.000541862, 0.10783} |
| 0.018 | { 3.54367×10^{-7} , 0.000070519} | {0, 0} | {0.000477195, 0.0949618} |
| 0.019 | { 3.06556×10^{-7} , 0.0000610046} | {0, 0} | {0.000371722, 0.0739726} |
| 0.02 | { 2.64461×10^{-7} , 0.0000526277} | {0, 0} | {0.000260728, 0.051885} |
| 0.021 | { 2.27576×10^{-7} , 0.0000452875} | {0, 0} | {0.000249111, 0.0495731} |
| 0.022 | { 1.95391×10^{-7} , 0.0000388828} | {0, 0} | {0.000138602, 0.0275818} |
| 0.023 | { 1.67411×10^{-7} , 0.0000333148} | {0, 0} | {0.000163867, 0.0326095} |
| 0.024 | { 1.43167×10^{-7} , 0.0000284903} | {0, 0} | {0.0000710899, 0.0141469} |
| 0.025 | { 1.22221×10^{-7} , 0.0000243221} | {0, 0} | {0.000106131, 0.0211201} |
| 0.026 | { 1.04173×10^{-7} , 0.0000207305} | {0, 0} | {0.0000346197, 0.00688932} |
| 0.027 | { 8.86588×10^{-8} , 0.0000176431} | {0, 0} | {0.0000677867, 0.0134896} |
| 0.028 | { 7.53514×10^{-8} , 0.0000149949} | {0, 0} | {0.0000155148, 0.00308745} |
| 0.029 | { 6.39597×10^{-8} , 0.000012728} | {0, 0} | {0.0000427448, 0.00850621} |
| 0.03 | { 5.42257×10^{-8} , 0.0000107909} | {0, 0} | { 5.92164×10^{-6} , 0.00117841} |
| 0.031 | { 4.5922×10^{-8} , 9.13847×10^{-6} } | {0, 0} | {0.0000266318, 0.00529973} |
| 0.032 | { 3.88494×10^{-8} , 7.73103×10^{-6} } | {0, 0} | { 1.39961×10^{-6} , 0.000278521} |
| 0.033 | { 3.2834×10^{-8} , 6.53396×10^{-6} } | {0, 0} | {0.0000164018, 0.00326395} |
| 0.034 | { 2.77245×10^{-8} , 5.51717×10^{-6} } | {0, 0} | { 5.12281×10^{-7} , 0.000101943} |
| 0.035 | { 2.33899×10^{-8} , 4.65458×10^{-6} } | {0, 0} | { 9.98672×10^{-6} , 0.00198736} |
| 0.036 | { 1.97169×10^{-8} , 3.92365×10^{-6} } | {0, 0} | { 1.14626×10^{-6} , 0.000228107} |
| 0.037 | { 1.66078×10^{-8} , 3.30495×10^{-6} } | {0, 0} | { 6.01115×10^{-6} , 0.00119622} |
| 0.038 | { 1.39788×10^{-8} , 2.78178×10^{-6} } | {0, 0} | { 1.20234×10^{-6} , 0.000239264} |

Figura 7: Erro para $h = 0.001$ e $T = 1$

Para os mesmos valores de h e $T = 2$ verificam-se os mesmo comportamentos. De facto, se a partir

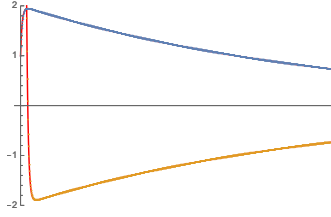


Figura 8: RK ($h = 0.001$, $T = 1$)

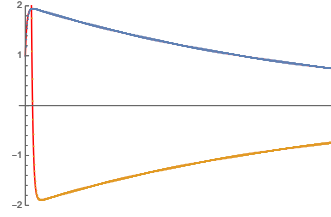


Figura 9: RKM ($h = 0.001$)

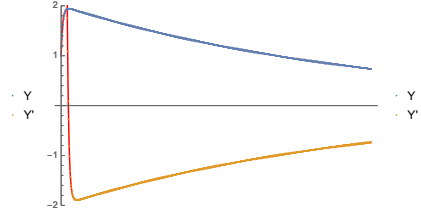


Figura 10: BDF ($h = 0.001$)

das iteradas 15 e 94 para $h = 0.01$ e $h = 0.001$, respectivamente, o erro da aproximação pelo método de Runge-Kutta é nulo, também o será para $T = 2$, pois $x_{15} = 0.15$ e $x_{94} = 0.94$ pertencem ao intervalo $[0, 1]$. Note-se que o mesmo se passa com os outros métodos.

| h | RK: T=1 | x_n | RK: T=2 | x_n | RKM: T=1 | x_n | RKM: T=2 | x_n | BDF: T=1 | x_n | BDF: T=2 | x_n |
|-------|---------|-------|---------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| 0.01 | 15 | 0.15 | 15 | 0.15 | 15 | 0.15 | 15 | 0.15 | 100 | 1. | 102 | 1.02 |
| 0.001 | 94 | 0.094 | 94 | 0.094 | 92 | 0.092 | 92 | 0.092 | 112 | 0.112 | 112 | 0.112 |

Temos então que todos os métodos aproximam de forma razoável a solução exacta, já que o erro obtido é muito baixo em praticamente todas as iteradas. Após algumas iteradas, para $h = 0.01$ e $T = 1$, é nulo para os métodos RK e RKM e da ordem 10^{-6} para o método BDF. Diminuir o valor de h melhora as aproximações iniciais do método RK, mas torna a convergência mais lenta. De notar que o erro da aproximação dada pelo método RKM converge para 0 muito rapidamente com $h = 0.001$. Verifica-se, também, que o comportamento do erro do método BDF não é constante, veja-se, por exemplo, o erro em $x_n = 0.31$ e $x_n = 0.32$ para $h = 0.01$.

2.e

Para esta alínea, foi criada uma função `tabela` que devolve já os valores dos parâmetros pedidos no formato de tabela. Esta recebe como argumentos um número positivo **h** (passo), **T** (extremo superior do intervalo), matriz **An** (que pode ou não depender de t e é tal que $F(t, Y) = A.Y$), lista **Y** (valores iniciais dados) e função **E** (solução exacta do problema). Devolve 3 tabelas referentes aos métodos RK, RKM, BDF que contêm os pontos x_n onde são calculadas as aproximações da solução, as sucessivas aproximações Y_n da solução para esses pontos, o valor da solução exacta $Y(x_n)$ nesses mesmos pontos e o valor do erro em cada ponto, ou seja, $|Y(x_n) - Y_n|$. A função devolve também o erro máximo das nossas aproximações da solução do problema.

Sabe-se que para problemas rígidos, como é o caso em análise, tem-se que os métodos implícitos são mais adequados para a resolução destes problemas, sendo que os métodos multipasso lineares com região de estabilidade finita e os explícitos não são os mais adequados para resolver este tipo de problemas. Assim sendo, o método RKM (explícito) poderia verificar-se pouco adequado para a resolução do problema em causa e o método RK e BDF deveriam aproximar bem a solução do problema (sendo métodos implícitos). Sendo os métodos de RK e RKM consistentes e absolutamente estáveis temos que estes são convergentes (ordem 4). Sendo estes métodos de Runge Kutta, um método de passo único, a consistência implica zero-estabilidade, logo tem-se convergência. Em relação ao método BDF de ordem 5, um método multipasso linear implícito, sendo este consistente e zero-estável (todos os métodos BDF com ordem menor ou igual a 6 são zero estáveis) temos que é absolutamente instável para valores pequenos e positivos de \bar{h} . Logo, apesar da ordem de convergência deste método ser superior aos outros dois temos para valores pequenos de \bar{h} que os outros apresentam melhores resultados. Concluindo, temos que o método BDF de ordem 5 se deve verificar mais eficiente para valores maiores de \bar{h} e os métodos RK e RKM serão mais estáveis para valores de \bar{h} pequenos. De facto, para $h = 0.2$ o método BDF apresenta menores valores de erro que os outros métodos e para menores valores de h os erros dos métodos RK e RKM são significativamente menores que os erros da aproximação dada pelo método BDF.

| h | erro max RK | erro max RKM | erro max BDF |
|----------|--|--|--|
| 0.02 | {0.345386, 68.7317} | {3.63542 × 10 ⁻¹⁵ , 7.23449 × 10 ⁻¹⁷ } | {0.0283834, 5.6483} |
| 0.01 | {0.0237293, 4.72214} | {0.0233675, 4.65014} | {0.0245203, 4.87954} |
| 0.005 | {0.00118574, 0.235961} | {0.000176911, 0.0352054} | {0.00669291, 1.33189} |
| 0.0025 | {0.0000584018, 0.011622} | {0.0000275799, 0.00548839} | {0.000668968, 0.133125} |
| 0.00125 | {3.26402 × 10 ⁻⁶ , 0.00064954} | {1.90618 × 10 ⁻⁶ , 0.000379329} | {0.0000340875, 0.00678341} |
| 0.001 | {1.3082 × 10 ⁻⁶ , 0.000260331} | {7.88533 × 10 ⁻⁷ , 0.000156918} | {0.0000118733, 0.00236278} |
| 0.000625 | {1.9329 × 10 ⁻⁷ , 0.0000384647} | {1.21538 × 10 ⁻⁷ , 0.000024186} | {1.37074 × 10 ⁻⁶ , 0.000272776} |

2.f

Procede-se, de seguida, a uma análise dos resultados obtidos e relacionamento com a respectivas ordens de convergência de cada método. Para tal analisou-se a majoração dos erros de discretização global para os valores de $T = 1$ e $h = \{0.02, 0.01, 0.005, 0.0025, 0.00125, 0.000625\}$. Tomando $h_0 = 0.02, \dots, h_6 = 0.000625$ e $e_i = e(h_i)$ como sendo a majoração do erro para certo h_i . Assumindo que $e(h) = Ch^r$, com algum $C > 0$ em que r é a ordem do método temos que:

$$r_i \sim \log\left[\frac{e(h_i)}{e(h_{i+1})}\right] / \log(2), \quad i = 0, \dots, 5$$

Assim sendo, podemos aproximar a ordem r dos métodos calculando os quocientes dos logaritmos. Efectuando os cálculos acima referidos temos então que se verifica as seguintes ordens de convergência para os diferentes métodos:

| r_i | RK | RKM | BDF |
|-------|---------|---------|----------|
| r_1 | 3.86346 | 57.1104 | 0.211071 |
| r_2 | 4.32282 | 7.04534 | 1.87327 |
| r_3 | 4.3433 | 2.68134 | 3.32263 |
| r_4 | 4.16129 | 3.85486 | 4.29462 |
| r_5 | 4.07781 | 3.97121 | 4.63622 |

Assim sendo, verifica-se o que tinha já sido referido em teoria. O método RK possui ordem 4 e comporta-se bem para o problema em questão. O método RKM comporta-se mal para valores maiores de h , provavelmente devido à não adequação a este tipo de problemas, tendo por isso valores de r muito variados e errados, sendo que para h menor estabiliza próximo da sua verdadeira ordem que é também 4. Já no BDF de ordem 5 nota-se também uma grande variação nos seus valores de r , não tão dispares como os do método RKM, mas efectivamente piores que o RK tendo em conta que o método tem ordem 5. Note-se também que para valores maiores de h o valor r , referente à ordem do método, aproxima-se do seu verdadeiro valor que é 5.

Para $T = 1$ e $h = \{0.01, 0.005, 0.000625\}$ estudou-se os erros das aproximações notando que o método será tão mais eficaz quanto a rapidez com que o erro volta a ser nulo após o valor inicial dado.

| h | RK: T=1 | | | RK: T=2 | | | RKM: T=1 | | | RKM: T=2 | | | BDF: T=1 | | | BDF: T=2 | | |
|----------|---------|------|-----|---------|-----|------|----------|------|-----|----------|-----|------|----------|------|-----|----------|-----|------|
| 0.02 | 51 | 51 | 101 | 101 | 51 | 51 | 101 | 101 | 51 | 51 | 101 | 101 | 51 | 51 | 101 | 101 | 51 | 51 |
| 0.01 | 15 | 101 | 15 | 201 | 15 | 101 | 15 | 201 | 99 | 101 | 101 | 201 | 99 | 101 | 101 | 201 | 99 | 101 |
| 0.005 | 26 | 201 | 26 | 401 | 24 | 201 | 24 | 401 | 93 | 201 | 93 | 401 | 93 | 201 | 93 | 401 | 93 | 201 |
| 0.0025 | 46 | 401 | 46 | 801 | 45 | 401 | 45 | 801 | 72 | 401 | 72 | 801 | 72 | 401 | 72 | 801 | 72 | 401 |
| 0.00125 | 80 | 801 | 80 | 1601 | 77 | 801 | 77 | 1601 | 94 | 801 | 94 | 1601 | 94 | 801 | 94 | 1601 | 94 | 801 |
| 0.000625 | 135 | 1601 | 135 | 3201 | 131 | 1601 | 131 | 3201 | 156 | 1601 | 156 | 3201 | 156 | 1601 | 156 | 3201 | 156 | 1601 |

Figura 11: Número de iterações até atingir um erro nulo

Para $h = 0.01$ tem-se que o erro é nulo para a 15ª iterada no caso do método de RK, para a 15ª iterada no caso do método RKM e para a 92ª iterada no caso do BDF sendo que o erro volta a oscilar e deixa de ser nulo. Para $h=0.005$ tem-se que o erro é nulo para a 26ª iterada no caso do método de RK, para a 24ª iterada no caso do método RKM e para a 91ª iterada no caso do BDF sendo que se verifica de novo uma oscilação do erro. Para $h=0.0065$ tem-se que o erro é nulo para a 135ª iterada no caso do método de RK, para a 131ª iterada no caso do método RKM e para a 156ª iterada no caso do

BDF. Testou-se também os mesmos valores de h para $T = 2$ e verificaram-se os mesmos resultados como seria de esperar. Para além disso, verifica-se que a partir de certa ordem de iteração o valor de erro vai ser sempre muito reduzido e bastante bom, sendo que podemos então concluir que os métodos implementados aproximam de forma satisfatória a solução do problema em causa.

Bibliografia

- Apontamentos Análise Numérica 2016/2017
- Alves, Carlos, *Análise Numérica (Teoria)*, IST, 2012
- Atkinson, K., *An Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Wiley, 1989
- LeVeque, Randall J., *Finite Difference Methods for Differential Equations* [Draft], University of Washington, September, 2005