

# Modelado, análisis, simulación y control de un fenómeno vibratorio

Mariana Ivette Rincón Flores, Martín Alejandro Hermosillo García, Mauricio Andrés Flores Pérez, Tom Bruno Arc

Escuela de Ingeniería y Ciencias  
Tecnológico Monterrey  
Campus Guadalajara

**Abstract**—Esta investigación busca modelar, analizar y simular las vibraciones mecánicas a las que es sometido un edificio en un terremoto. A través de la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales por medio del método de eigenvalores y eigenvectores, se busca deducir la estabilidad de los edificios para posteriormente aplicar un sistema de control que garantice la estabilidad del sistema completo.

**Index Terms**—Estabilidad; Frecuencia; Control; Sistema; Terremoto; Ecuaciones diferenciales

## I. INTRODUCCIÓN

Los terremotos plantean riesgos significativos para los edificios y las infraestructuras, y a menudo tienen consecuencias catastróficas para la vida humana, la estabilidad económica, política y social. México no es desconocido de los efectos que pueden tener dichos desastres naturales, habiendo sido víctima de dos grandes terremotos, tanto en 1985, como en 2017. Ambos sucesos ocasionaron graves daños estructurales.

El problema más grande en relación a los terremotos y su efecto en los edificios es la protección de vidas humanas. Los terremotos pueden tener consecuencias devastadoras, causando la pérdida de vidas y dejando a comunidades enteras en ruinas. Los edificios, especialmente los de varios pisos, representan un desafío particular debido a su complejidad estructural y a la cantidad de personas que pueden albergar.

El objetivo principal es garantizar la seguridad de las personas durante los terremotos, evitando o minimizando lesiones y pérdidas de vidas. En este contexto, los sistemas de control han surgido como un componente crucial para mitigar los efectos de los terremotos en los edificios y minimizar los riesgos asociados.

## II. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Cómo varía la respuesta estructural de un edificio en función de las distintas características de las ondas sísmicas, como la amplitud y la frecuencia?
- ¿Cómo afecta la ubicación de los polos del sistema a su estabilidad?
- ¿Qué tanto afecta a la estabilidad del sistema cuando los modos de vibración naturales se aproximan o son iguales a los modos de vibración del terremoto?

## III. MARCO TEÓRICO

Para modelar la dinámica estructural de un edificio de  $n$  pisos, se usarán suposiciones establecidas en [1].

- 1) Los pisos tienen masas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ . Se asume que cada piso es una masa puntual concentrada en el centro de cada piso.
- 2) Se aplica una fuerza de restauración lineal en cada piso, que se incorpora en el modelo mediante el factor de rigidez  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ .
- 3) Una oscilación horizontal del terremoto,  $E \cos(\omega t)$  del suelo con amplitud  $E$  y aceleración  $a = -E\omega^2 \cos(\omega t)$  produce una fuerza  $F = ma = mE\omega^2 \cos(\omega t)$  en cada piso del edificio.

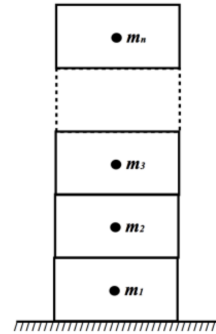


Figure 1. Modelo matemático del edificio

Al aplicar la segunda ley de Newton a los pisos del edificio se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + m_1 E \omega^2 \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) + m_2 E \omega^2 \cos(\omega t) \\ m_3 \ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) + k_4(x_4 - x_3) + m_3 E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \vdots \\ m_n \ddot{x}_n = -k_n(x_n - x_{n-1}) + m_n E \omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

en donde  $x_1, x_2, \dots$  son los desplazamientos a partir del punto de equilibrio. El sistema de ecuaciones anterior se puede representar de manera matricial definiendo la siguiente serie de matrices.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$K = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(k_{n-1} + k_n) & k_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n & -k_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

En donde  $\vec{x}$  es el vector de desplazamientos horizontales,  $M$  es la matriz de masas, y  $K$  es la matriz de rigidez (elasticidad). Por lo tanto,  $M\ddot{x} = Kx + F$ , en donde  $F$  es el vector de vibraciones forzadas que se muestra a continuación:

$$F = \begin{bmatrix} m_1 E \omega^2 \cos(\omega t) \\ m_2 E \omega^2 \cos(\omega t) \\ m_3 E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \vdots \\ m_n E \omega^2 \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Despejando para  $\ddot{x}$ , se obtiene que  $\ddot{x} = Ax + f$ , donde  $A = M^{-1}K$  y  $f = M^{-1}F$ . Es con esta matriz  $A$  con la cual se puede hacer un análisis de estabilidad del sistema y obtener los modos normales del sistema.

#### A. Estabilidad del sistema

La estabilidad del sistema se puede clasificar dependiendo de las soluciones de las raíces del polinomio característico asociado a la matriz  $A$ . Esta clasificación se puede dividir en las siguientes divisiones:

- 1) *Parte real negativa:* Cuando la parte real es negativa, el sistema es estable y se comporta como oscilador amortiguado.
- 2) *Parte real cero:* Cuando la parte real es igual a cero, el sistema se comporta como un oscilador no amortiguado.
- 3) *Parte real positiva:* Cuando la parte real es positiva, el sistema es inestable y se comporta como un oscilador inestable. Las condiciones de la parte real de las raíces del polinomio característico son condición suficiente para determinar la estabilidad del sistema. La parte imaginaria del sistema puede ocasionar cambios en la oscilación, sin embargo la estabilidad del sistema no se ve afectada.

#### B. Modos normales del sistema

Un modo normal de un sistema oscilatorio es la frecuencia a la cual la estructura deformable oscila al ser perturbada. También son conocidos como frecuencias naturales, frecuencias resonantes o modos de vibración.

La frecuencia se mide en hercios y es una medida con unidades de ciclos por segundo, que en este caso significa cuántas veces oscila el edificio de un lado a otro en un segundo. La frecuencia natural de un edificio es la frecuencia con la que el edificio oscila cuando vuelve a su posición original después de haber sido excitado. La intensidad de la fuerza de excitación afectará a la aceleración y la velocidad

de los movimientos del edificio, pero la frecuencia será la misma independientemente de la fuerza. Lo que determina la frecuencia natural de un edificio es aproximadamente su propio peso, su rigidez y su altura.

Una estructura pesada y rígida no oscilará tanto como una estructura ligera y esbelta. Por ejemplo, los rascacielos son altos y esbeltos, por lo que tienden a tener frecuencias naturales bajas y grandes deflexiones. Esto significa largas distancias para que el edificio se balancee y si la aceleración del movimiento es alta, las personas pueden sentir náuseas, lo cual no es un efecto deseado al momento de que ocurre un terremoto.

Además, estos movimientos excitan las vibraciones resonantes de las estructuras y provocan una mayor respuesta sísmica. Las estructuras con modos de vibración cercanos a la frecuencia de excitación o modos de vibración del terremoto, pueden experimentar una mayor amplificación de movimiento y por ende una inestabilidad importante en la estructura de los edificios.

Es importante mencionar que un edificio tiene un conjunto de modos normales, cada uno con su frecuencia característica, que depende de una variedad de factores, como la estructura, material y condiciones de contorno del sistema de ecuaciones diferenciales que representa al objeto. La cantidad de modos de vibración es igual a la cantidad de pisos del edificio, ya que a cada piso le corresponde un modo de vibración. Los modos de vibración de cada piso corresponden a la raíz cuadrada de los eigenvalores de la matriz  $A$ .

#### C. Control del sistema

Un sistema de control es una interconexión de componentes que forman una configuración de sistema que proporcionará una respuesta de sistema deseada. La base para el análisis de un sistema es el fundamento proporcionado por el sistema lineal, que asume una relación causa-efecto para los componentes del sistema. Dentro de los tipos de diseño de sistemas de control, existen los sistemas de lazo abierto y los de lazo cerrado.

1) *Sistemas de control de lazo abierto:* Los sistemas en los que la salida no influye en la acción de control se denominan sistemas de control de lazo abierto. En otras palabras, la salida no se mide ni se retroalimenta para compararla con la entrada.

2) *Sistemas de control de lazo cerrado:* Un sistema que mantiene una relación prescrita entre la salida y la entrada de referencia comparándolas y utilizando la diferencia como medio de control se denomina sistema de control con retroalimentación o sistema de control de lazo cerrado. En un sistema de control de lazo cerrado, la señal de error, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), se alimenta al controlador para reducir el error y llevar la salida del sistema al valor deseado.

El siguiente diagrama muestra el proceso de diseño de un sistema de control.

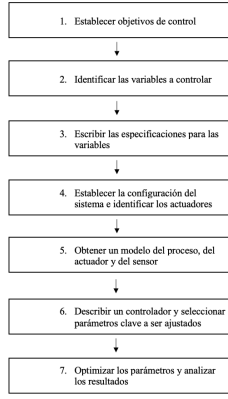


Figure 2. Diseño de sistema de control

3) *Análisis matemático*: Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representa la dinámica del sistema con precisión, o al menos de manera aproximada. Hay que tener en cuenta que un modelo matemático no es exclusivo de un sistema determinado. Es decir, un solo sistema puede ser representado por muchos modelos matemáticos.

Las dinámicas de múltiples sistemas se describen en término de ecuaciones diferenciales obtenido utilizando las leyes físicas que gobiernan al sistema. La parte más importante del análisis de sistemas de control es encontrar modelos matemáticos razonables. Para los fines de este trabajo se asume el principio de causalidad que establece que la salida actual del sistema depende de la entrada pasada y que no depende de entradas futuras.

Dependiendo del sistema a analizar y de sus condiciones particulares, puede haber modelos matemáticos más convenientes que otros. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es conveniente utilizar representaciones de espacios de estado. En el análisis de la respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas de una sola entrada y una sola salida, lineales e invariantes en el tiempo, la representación de la función de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otra. Debido al sistema en esta investigación, se decidió usar representaciones de espacios de estado. Esta representación es una técnica utilizada más en control moderno que en control clásico. No obstante, los polos, que se relacionan más con el análisis de la representación de la función de transferencia siguen siendo de interés para el análisis. En un sistema de control, los polos son los puntos en el plano complejo donde la función de transferencia del sistema se anula, por lo que determinan el comportamiento dinámico del sistema. La estabilidad de un sistema se relaciona con la capacidad del sistema de retornar a un estado estable después de una perturbación, y en términos generales para que un sistema se considere estable, se sabe que la parte real del plano complejo debe tener un valor negativo, de otra forma, se considera al sistema como inestable, que es lo que

se mencionaba en el apartado A. de esta misma sección. En el contexto de los actuadores y el control estructural de los edificios, la ubicación de los polos del sistema de control puede ser determinante para lograr una respuesta estable y controlada de la estructura ante eventos sísmicos.

#### IV. METODOLOGÍA

Para poder modelar, analizar, simular y aplicarle un sistema de control al fenómeno vibratorio se buscó desarrollar una aplicación interactiva, que recibiera una serie de parámetros físicos pertinentes al sistema y que despliegue gráficas del comportamiento del sismo, desplazamientos y velocidades del edificio y una animación de los efectos de las ondas sísmicas sobre el edificio.

Primero, se realizó un escenario particular, contemplando un edificio de cuatro pisos, para de este caso poder derivar las formas generales para realizar los cálculos matemáticos detrás de la aplicación.

Se modeló el sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento de los pisos del edificio, pero aplicándole una ley de control. Es importante mencionar que en este modelo, aún no se está considerando la fuerza provocada por el sismo. El sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + b_1 u_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) + b_2 u_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) + k_4(x_4 - x_3) + b_3 u_3 \\ m_4 \ddot{x}_4 = -k_4(x_4 - x_3) + b_4 u_4 \end{cases}$$

Al despejar para las aceleraciones de cada piso y haciendo uso de manipulación algebraica se obtiene este nuevo sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{b_1}{m_1} u_1 \\ \ddot{x}_2 = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{(k_2+k_3)}{m_2} x_2 + \frac{k_3}{m_2} x_3 + \frac{b_2}{m_2} u_2 \\ \ddot{x}_3 = \frac{k_3}{m_3} x_2 - \frac{(k_3+k_4)}{m_3} x_3 + \frac{k_4}{m_3} x_4 + \frac{b_3}{m_3} u_3 \\ \ddot{x}_4 = \frac{k_4}{m_4} x_3 - \frac{k_4}{m_4} x_4 + \frac{b_4}{m_4} u_4 \end{cases}$$

Observemos que este modelo tiene la forma  $\ddot{x} = Ax + Bu$ . Es importante notar, que en este modelo se utiliza control multivariable, es decir cada piso tiene un distinto actuador. Sin embargo, este modelo nos permite simular que algunos pisos no tengan un actuador gracias al vector  $B$  que contiene a  $b_1, b_2, b_3$  y  $b_4$ .

Es a partir de este modelo del cual se construye la representación de espacios de estado. Se definen las siguientes variables de estado.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= \dot{x}_1 \\ z_3 &= x_2 \\ z_4 &= \dot{x}_2 \\ z_5 &= x_3 \\ z_6 &= \dot{x}_3 \\ z_7 &= x_4 \\ z_8 &= \dot{x}_4 \end{aligned}$$

Y con lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} z_1 + \frac{k_2}{m_1} z_3 + \frac{b_1}{m_1} u_1 \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= \frac{k_2}{m_2} z_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} z_3 + \frac{k_3}{m_2} z_5 + \frac{b_2}{m_2} u_2 \\
\dot{z}_5 &= z_6 \\
\dot{z}_6 &= \frac{k_3}{m_3} z_3 - \frac{(k_3 + k_4)}{m_3} z_5 + \frac{k_4}{m_3} z_7 + \frac{b_3}{m_3} u_3 \\
\dot{z}_7 &= z_8 \\
\dot{z}_8 &= \frac{k_4}{m_4} z_5 - \frac{k_4}{m_4} z_7 + \frac{b_4}{m_4} u_4
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} \\ 0 \\ \frac{k_3}{m_3} \\ 0 \\ \frac{k_4}{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{(k_3+k_4)}{m_3} \\ \frac{k_4}{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{k_4}{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \\ \dot{z}_7 \\ \dot{z}_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Para este sistema se decidió utilizar un control por retroalimentación de estados. En otras palabras  $u = -kz$ . Y así, el sistema controlado se puede representar como

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + Bu \\
u &= -kz \\
\dot{z} &= Az - Bkz \\
\dot{z} &= (A - Bk)z
\end{aligned}$$

en donde la matriz de interés ya no es  $A$ , como lo era en el modelo de un edificio de control, sino  $(A - Bk)$ .

En este sistema, los polos del sistema en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica:

$$\det(sI_n - A + Bk) = 0$$

La ley de control por retroalimentación consiste en seleccionar ganancias  $k_{i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , tal que las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado estén en las ubicaciones deseadas en el plano complejo. El diseñador del sistema selecciona los polos deseados:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , para que el sistema tenga el comportamiento deseado. Lo que se busca entonces es encontrar una matriz de realimentación  $k$  tal que

$$\det(sI_n - A + Bk) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$$

Para encontrar  $k$ , se utiliza la fórmula de Ackerman para ubicación de polos.

Como fue mencionado al inicio de esta sección, el objetivo es poder encontrar el modelo general de un fenómeno vibratorio, a partir del caso particular de 4 pisos. Habiendo desarrollado la representación en espacio de estados y pudiendo obtener  $k$  por medio de la fórmula de Ackerman para lograr controlar el sistema se procedió a diseñar dos sistemas de lazo cerrado (uno con control y otro sin) en MatLab y en Simulink. Ya en estos sistemas de lazo cerrado se le añadió la fuerza generada por la onda sísmica al modelo. La fuerza generada por la onda sísmica ya no se modela con una función cosenoidal, sino con una expocosenoidal para que sea más parecido al comportamiento de un sismo en la vida real.

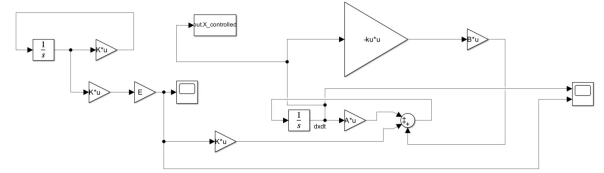


Figure 3. Diseño del sistema con ley de control

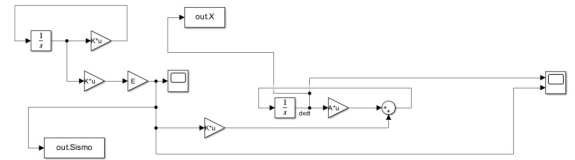


Figure 4. Diseño del sistema sin ley de control

Habiendo encontrado la metodología correcta para poder analizar la estabilidad de un edificio con cualquier cantidad de pisos y con la posibilidad de cambiar los valores de masas, constantes de restitución y condicionales iniciales y con apoyo de los sistemas de lazo cerrado diseñados, y utilizando las herramientas de MatLab y Simulink, tales como MatLab Compiler, Simulink Compiler y el App Designer, se diseñó la aplicación objetivo que permite hacer un análisis intuitivo para casos generales de un fenómeno vibratorio.

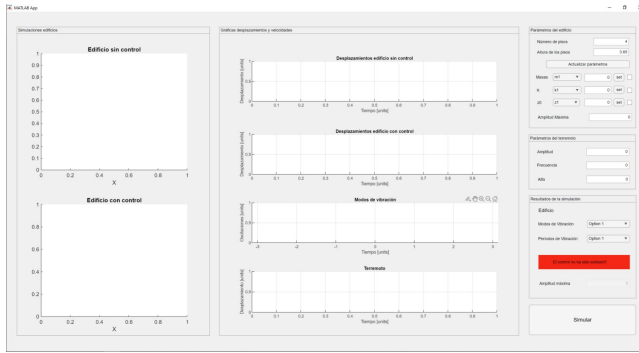


Figure 5. Interfaz de la aplicación

## V. RESULTADOS

Para demostrar el funcionamiento de la metodología propuesta y en específico de la aplicación realizada, se realizaron varias pruebas con valores diferentes de números de pisos, masas, constantes de restitución y diferentes valores de terremoto.

Para la primer prueba se utilizaron los siguientes valores para las variables:

$$\begin{aligned} \text{Número de pisos} &= 4 \\ \text{Altura de los pisos} &= 3.65 \\ m_1 = m_2 = m_3 = m_4 &= 100 \\ k_1 = k_2 = k_3 = k_4 &= 1000 \\ \text{Amplitud máxima tolerada por el edificio} &= 1 \\ \text{Amplitud del terremoto} &= 1 \\ \text{Frecuencia del terremoto} &= 5.11 \\ \text{Alfa (factor exponencial)} &= 0.01 \end{aligned}$$

Una imagen den la simulación se puede ver en:

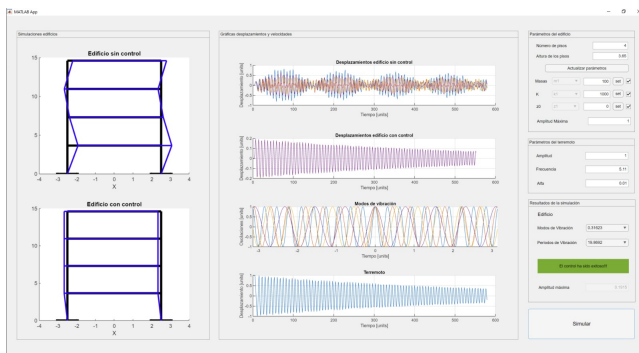


Figure 6. Simulación con 4 pisos

Como se observa en la imagen, el edificio en ausencia de control se comporta de manera periódica, mientras que el sistema con control se comporta de manera estable, soportando las vibraciones causadas por el terremoto. También se despliegan los valores de los modos y periodos de vibración por piso.

Para poder darle respuesta a la tercera pregunta de investigación planteada, se volvió a hacer la simulación con los mismos parámetros, pero cambiando la frecuencia del

terremoto a una de las frecuencias obtenidas en la simulación anterior. La simulación arrojó los siguientes resultados:

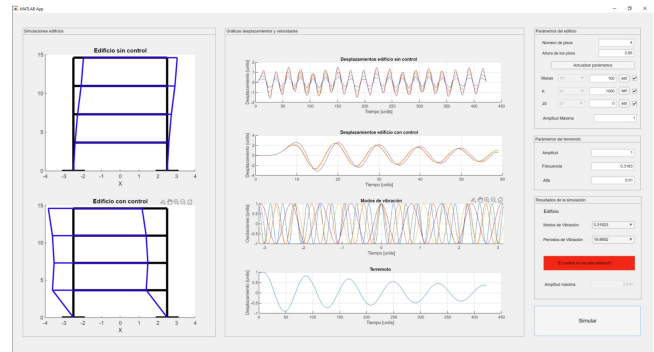


Figure 7. Simulación con 4 pisos con resonancia

Con estos parámetros, el controlador no fue exitoso. Incluso se observó que los desplazamientos de los distintos pisos con el control activo incrementó más de 10 veces que cuando no había resonancia. El desplazamiento máximo alcanzado en esta simulación por el edificio fue de 2.634 unidades, mientras que en la simulación anterior solo había llegado a 0.1915 unidades. Se observa entonces que la estabilidad del sistema se ve afectada de manera crítica cuando los modos de vibración se acercan a los modos naturales del terremoto.

Finalmente, a continuación se muestra que la aplicación también funciona con distintas cantidades de pisos. La aplicación nos vuelve a dar valores de interés, como si el edificio resiste, las frecuencias y el periodo. En esta simulación se corre con 8 pisos, más el modelo se probó para hasta 163 pisos, que es la cantidad de pisos del edificio más alto del mundo (Burj Khalifa). En todas las pruebas, se hizo la prueba de resonancia y se observaron resultados similares a los del edificio con 4 pisos. Entonces, si se consigue el objetivo de una aplicación para casos generales.

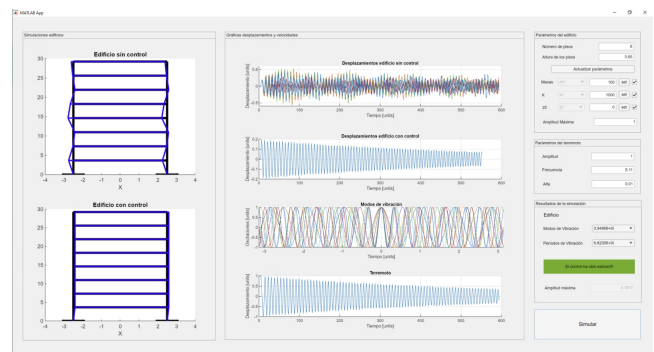


Figure 8. Simulación con 8 pisos

## VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Podemos concluir que los controladores cumplen eficazmente su principal propósito, que es mantener la estabilidad de los edificios después de ser sometidos a movimientos bruscos ocasionados por los sismos. En este contexto, los sistemas de

control son elementos cruciales para mitigar y minimizar los efectos de los terremotos, así como los riesgos asociados. La respuesta estructural de un edificio si varía considerablemente basado en parámetros como la amplitud y la frecuencia, pero la frecuencia es de suma importancia debido a la posibilidad de resonancia. Los polos dictaminan el comportamiento en cuanto a estabilidad del sistema, por lo cual fórmulas para la ubicación de polos, como la de Ackerman son de suma importancia y utilidad. Dado que México se encuentra en un territorio con una alta actividad sísmica, los resultados obtenidos en la simulación del edificio con controlador resaltan la importancia de implementar sistemas de control en un mayor número de edificios de todo el país. A pesar de que la CDMX, es la ciudad más grande e importante del país, y la más afectada por sismos, únicamente existen 6 edificios que son considerados 'antisísmicos': La Torre Latinoamericana, Reforma 222, La Torre Mayor, Torre 'El pantalón', Torre Pemex y la Sede del Senado de la República. Finalmente, en cuestiones de materiales y técnicas para mejorar la resistencia de los edificios se pueden implementar los aisladores sísmicos, que permiten que los edificios se desplacen de manera controlada durante un terremoto; y los disipadores de energía, los cuales son utilizados para absorber la energía generada por las fuerzas sísmicas.

#### REFERENCES

- [1] S. Bagai, P. Madaan, and T. Khajuria, "A mathematical model for the effect of earthquake on high rise buildings on different shapes," *DUI Journal of Undergraduate Research and Innovation*, vol. 2, pp. 180–188, 2016.
- [2] C. H. Edwards and D. E. Penney, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Pearson, 2009.
- [3] J. Eriksson, "Horizontal natural frequency in a 10 story building," *Umea University*, 2018.
- [4] BCcampus. (2019) Seismic waves and measuring earthquakes. [Online]. Available: <https://opentextbc.ca/physicalgeologyh5p/chapter/seismic-waves-and-measuring-earthquakes/>
- [5] C. Wilkins, "Earthquake modelling with differential equations," *AMSI Vacation Research Scholarships*, pp. 2–14, 2019.
- [6] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*. Prentice Hall, 2001.
- [7] E. Villota Cerna. (2009) Control moderno y Óptimo. [Online]. Available: <http://bionanouni.wdfiles.com/local--files/teaching-mt227-horario/Clase05-03.pdf>
- [8] K. Ogata, *Modern Control Engineering*. Pearson, 2010.