Análisis del movimiento en un juego mecánico de movimiento pendular

1st Alan Alcántara Nagamatsu
Tecnológico de Monterrey
Jalisco, México
A01640155@itesm.mx

2nd Marcos Esparza Arizpe
Tecnológico de Monterrey
Jalisco, México
A01634066@itesm.mx

3rd Mauricio Andrés Flores Pérez
Tecnológico de Monterrey
Jalisco, México
A01639917@itesm.mx

4th Marisol Rodríguez Mejía
Tecnológico de Monterrey
Jalisco, México
A01640086@itesm.mx

***Resumen*—Los péndulos son sistemas físicos que pueden ser utilizados con muchos propósitos. Uno de los usos de estos sistemas son los juegos mecánicos que se encuentran en los parques de diversiones. Sin embargo, su correcta implementación requiere un correcto análisis para verificar que el movimiento sea seguro tanto para las personas como para la longevidad del juego.**

***Index Terms*—péndulo, juego mecánico**

I. Introducción

I-A. *El péndulo y sus tipos*

El péndulo es un sistema físico formado por una masa suspendida de un punto fijo. Un péndulo se encuentra en reposo (equilibrio) cuando la fuerza del peso de la masa se contrarresta por la tensión de la cuerda o dispositivo del cual cuelga. No obstante, ese equilibrio se rompe al aplicar alguna fuerza externa: cuando se levanta un péndulo hacia un lado, la fuerza de la gravedad quiere tirar de él hacia abajo y la tensión en la cuerda quiere tirar de él hacia la izquierda o derecha (siempre hacia el punto de pivote). Esas fuerzas combinadas trabajan juntas para tirar de él hacia el centro, es decir, a la posición de equilibrio.

Como se trata de un movimiento armónico simple, al llegar al centro, la velocidad del péndulo es mayor, por lo que continúa más allá de la posición de equilibrio y se dirige al otro lado, el patrón continúa y cuanto más largo sea el cable utilizado en la creación de un péndulo, más tardará el péndulo en completar un giro completo o período después de que se haya puesto en movimiento.

Es importante mencionar que el movimiento de oscilación del péndulo también se ve afectado por otra fuerza aparte de las dos ya mencionadas, la resistencia del aire. Ésta siempre se opone al movimiento de la masa colgante cuando se balancea hacia adelante y hacia atrás, sin embargo, la fuerza de resistencia del aire es relativamente débil en comparación a las otras dos fuerzas.

Existen distintos tipos de péndulo, cada uno de ellos con un diseño diferente que les permite adaptarse a una función específica.

Péndulo simple: sistema compuesto por una masa puntual que cuelga de una cuerda o barra ligera y con extremo superior fijo. Al mover a la masa de su posición de equilibrio, la gravedad tira de la sacudida en un arco hacia abajo, lo que hace que se balancee y realice un movimiento armónico simple. Este tipo de péndulo es el más común y se puede ver en relojes, metrónomos y sismómetros.

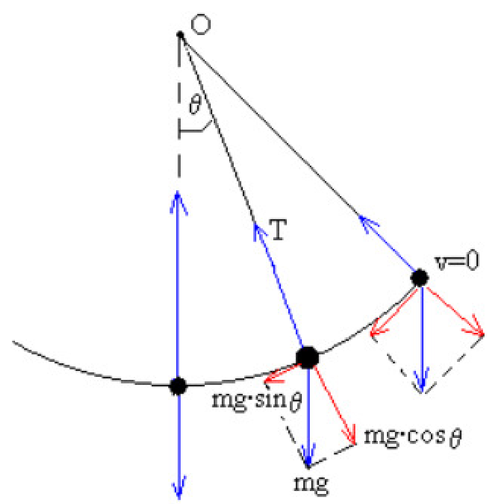

Figura 1. Diagrama de fuerzas de un péndulo simple

Péndulo de Foucault: tipo de péndulo simple que se balancea en dos dimensiones. Fue desarrollado por Jean Bernard Leon Foucault en 1851 para demostrar la rotación de la Tierra por primera vez. Al poner un péndulo de Foucault en movimiento, su balanceo tiende a rotar en dirección de las manecillas del reloj en un círculo a lo largo de aproximadamente un día y medio. Es capaz de oscilar durante mucho tiempo gracias a la gran longitud de su cable (alrededor de 16 metros), una masa simétrica y grande (aproximadamente 109 kilogramos) y un sistema electromagnético que va contrarrestando la energía perdida.

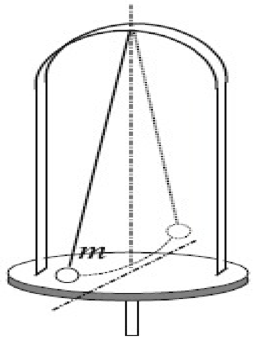

Figura 2. Diagrama de un péndulo de Focault

Péndulo doble: sistema compuesto por dos péndulos, el segundo cuelga del extremo del primero. Un péndulo doble actúa similar a un péndulo simple en los movimientos pequeños, pero se vuelve menos predecible mientras los movimientos incrementan el tamaño, por ello también se le llama péndulo caótico, ya que sus movimientos se vuelven más caóticos entre más largos son. Los péndulos dobles son usados principalmente en las simulaciones matemáticas.

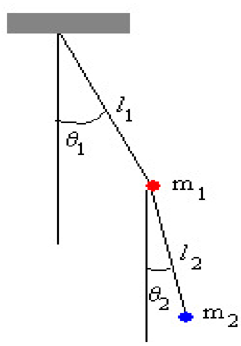

Figura 3. Diagrama de un péndulo doble

Péndulo de Newton: dispositivo compuesto por cinco bolas idénticas, cada una de ellas cuelga de un tubo por un par de hilos de igual longitud, de manera que todas ellas están en contacto y alineadas. Al separar y después soltar una de las esferas de un extremo, ésta choca con las otras, logrando que la bola que hay al otro extremo se ponga en movimiento y alcance la misma altura que la bola que se soltó inicialmente, mientras, las demás esferas están en reposo. Este péndulo está basado en la ley de transferencia de energía, demuestra su conservación y la del impulso.

Péndulo compuesto: es un sólido en rotación alrededor de un eje fijo. Tiene una masa extendida, como una barra oscilante, y puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal. Cuando se separa un ángulo de la posición de equilibrio y se suelta, sobre el sólido actúa el momento del peso, que tiene signo contrario al desplazamiento. Un ejemplo es el péndulo de Kater, diseñado para medir el valor de la aceleración de la gravedad.

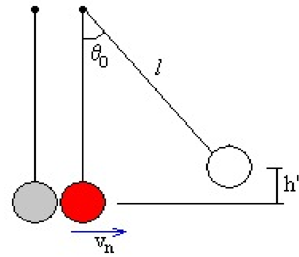

Figura 4. Diagrama de un péndulo de Newton

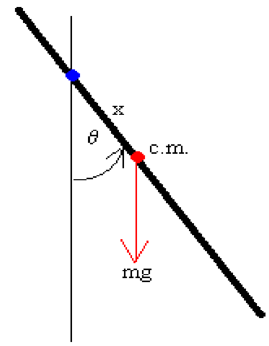

Figura 5. Diagrama de un péndulo compuesto

I-B. *Parámetros físicos que afectan al péndulo*

Los parámetros físicos que se deben de considerar son la masa (m), la longitud del hilo inextensible y de masa despreciable (l) y el ángulo de desplazamiento theta (θ) que tendrá dicho hilo con respecto de tiempo. Sobre la masa actúan dos fuerzas principalmente, el peso del mismo objeto (mg=w) y la tensión (T), para esto se necesitará la aceleración de la gravedad . El péndulo en sí, describe una trayectoria circular formando un arco de una circunferencia. Se suelen tomar en cuenta dos tipos de aceleraciones: aceleración radial (arad) que es la aceleración centrípeta de un punto de un cuerpo en rotación, en este caso el péndulo y la aceleración tangencial (atan), que es la aceleración tangencial de un punto en un cuerpo en rotación, siendo también el péndulo o el objeto colgado del hilo. En general todos estos valores se pueden obtener mediante ecuaciones o simplemente se pueden llegar a establecer como condiciones iniciales de los casos de prueba que se deseen realizar dependiendo de lo que se quiera observar y describir.

I-C. *Descripición del movimiento*

El movimiento del péndulo simple se puede describir de dos formas, como un movimiento que se asemeja a uno armónico, o como un movimiento circular.

I-C1. Movimiento no armónico - péndulo simple: Con el fin de describirlo como un movimiento que se aproxima al armónico, se puede trabajar con las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$s = l\theta \tag{1}$$

$$v = l\frac{d\theta}{dt} \tag{2}$$

$$a = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3}$$

En donde l es la longitud de la cuerda que une al objeto con el pivote, s es la longitud del arco que describe el movimiento, y θ es el angulo que se forma por la cuerda.

Una vez que se tienen esas ecuaciones definidas, es posible obtener una ecuación de movimiento general.

Debido a que las fuerzas que actuan sobre la masa son una tensión y la fuerza de gravedad, y que el componente horizontal tiende a 0, es posible utilizar la segunda ley de Newton para describir el movimiento:

$$F_t = ma_t \tag{4}$$

La cual se transforma en:

$$-mgsin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{5}$$

donde el signo negativo indica la tendencia de la masa a ir al punto de equilibrio. Recordando (2) y que l es una constante la ecuación queda reducida de la siguiente forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}sin\theta \tag{6}$$

El resultado es una ecuación diferencial de segundo orden que no es fácil de resolver por métodos análiticos, ya que su solución involucra integrales elípticas, sin embargo, se pueden utilizar ciertos métodos numéricos de integración para obtener soluciones a esta ecuación.

Aún así, se pueden buscar soluciones análiticas si se utilizan aproximaciones del ángulo . En este caso se puede usar la aproximación para ángulos pequeños con la consideración:

$$sin\theta = \theta \tag{7}$$

Esta aproximación sólo es útil para ángulos menores a 15, por lo que la ecuación de movimiento utilizando esta aproximación es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{t}\theta = 0 \tag{8}$$

Esta ecuación describe un movimiento armónico simple, por lo que es sencillo encontrar una solución análitica, la cual es:

$$\theta = Asin(wt + \Phi) \tag{9}$$

con un periodo de:

$$T = 2\pi\sqrt{I/g} \tag{10}$$

La figura 6 muestra la gráfica del movimiento de un péndulo simple. En este caso muestra dos funciones, una casi sinusoidal, que muestra un ángulo pequeño inicial y la otra que muestra un ángulo mayor. En el eje vertical se muestra el ángulo del péndulo con respecto a la vertical y el eje horizontal muestra el tiempo. Como se puede observar la aproximación para ángulos pequeños es válida, ya que describe una gráfica sinusoidal, aunque para ángulos mayores no es posible realizar dicha aproximación.

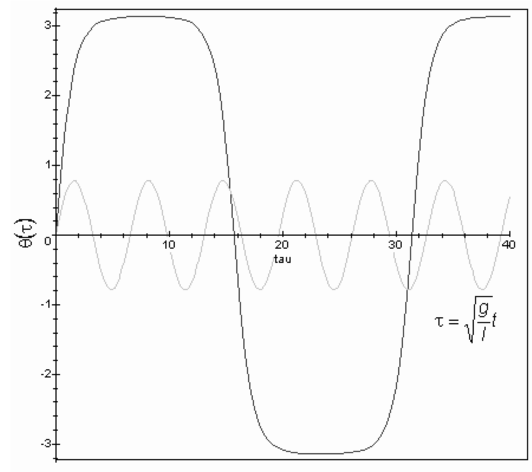

Figura 6. Oscilaciones de un péndulo con ángulos pequeños

Además se puede agregar resistencia del área a las ecuaciones anteriormente descritas, para lo cual es necesario agregar un término que representa esta fuerza de arrastre. Esa ecuación es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \beta l\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}sin\theta = 0 \tag{11}$$

Se agregó un término que es proporcional a la velocidad del péndulo, es decir a la primera derivada del ángulo y que está multiplicada por un coeficiente de arrastre del aire. Aplicando esta ecuación a un péndulo con ángulo pequeño, se obtiene la siguiente gráfica:

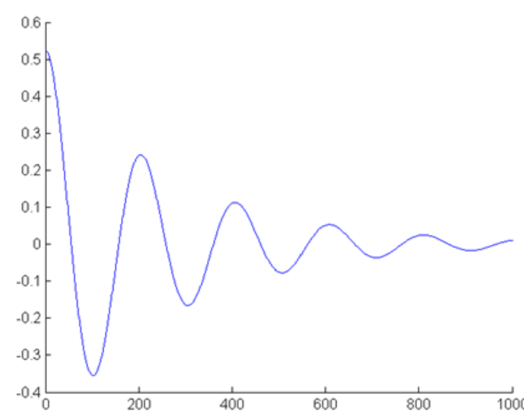

Figura 7. Oscilaciones de un péndulo con arrastre del aire

I-C2. Movimiento armónico - péndulo de torsión: En el caso de un péndulo de torsión, las ecuaciones cambian, debido a que se obtienen de un principio distinto. En este caso, se trata del torque.

Al momento de rotar el cable que esta conectado con la masa, se genera un torque que intenta vovler al punto de equilibrio. Esta interacción se puede describir de la siguiente forma:

$$\tau = -\kappa\theta \tag{12}$$

En donde τ es el torque, κ es una fuerza rotacional constante, y θ es la posición angular de un punto de referencia.

La fuerza κ se puede obtener al aplicar un valor conocido de torque con un ángulo θ que se pueda medir. Utilizando la segunda ley de newton, obtenemos:

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{13}$$

Por lo que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -I\kappa\theta \tag{14}$$

Que es la ecuación de aceleración para este tipo de péndulo. Al haber obtenido esta ecuación, es posible integrar para obtener la ecuación de velocidad y de posición:

$$w = \int -I\kappa\theta dt \tag{15}$$

$$\theta = \int\int -I\kappa\theta dtdt \tag{16}$$

Sin embargo, este tipo de péndulo es a su vez un oscilador armónico, por lo que su velocidad angular es:

$$w = \sqrt{\kappa/I} \tag{17}$$

Además se conoce que tiene un periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \tag{18}$$

I-C3. Movimiento uniformemente acelerado con trayectoria circular: En cinemática, este movimiento es aquel en el que una partícula puntual describe una trayectoria en forma de circunferencia.

En este caso, las ecuaciones de movimiento lineal uniformemente acelerado pueden ser trasladadas a este tipo de trayectoria, pero en este caso se debe tener en cuenta que la posición no será un escalar, sino un arco describiendo un ángulo que está medido en radianes. Además, debido a que la posición es un ángulo, tanto la velocidad como la aceleración son funciones con respecto al tiempo que toman en cuenta este ángulo, por lo que son llamados velocidad angular y aceleración angular.

Al igual que en un movimiento lineal, la velocidad está definida como un cambio en la posición con respecto al tiempo, pero en este caso la posición es angular. Por lo que está definida matemáticamente como:

$$w_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{19}$$

Análogamente, la aceleración angular es un cambio en la velocidad angular, por lo que es descrita matemáticamente como:

$$a_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w_z}{\Delta t} = \frac{dw_z}{dt} \tag{20}$$

La aceleración también puede ser descrita como la segunda derivada de la posición angular con respecto al tiempo, descrita matemáticamente como:

$$a_z = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{21}$$

De estas definiciones, se obtienen las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración en un movimiento circular con aceleración constante, definidas matemáticamente como:

$$a_z = cte \tag{22}$$

$$w_z = W_{0z} + a_z t \tag{23}$$

$$\theta = \theta_0 + w_{0z} + \frac{1}{2}a_z t^2 \tag{24}$$

$$w_z^2 = W_{0z}^2 + 2a_z(\theta - \theta_0) \tag{25}$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(w_z + W_{0z})t \tag{26}$$

Además de la aceleración que tiene el objeto, la cual es constante, el cuerpo también experimenta una aceleración dirigida hacia el centro de la circunferencia que describe el movimiento. Esta aceleración es llamada aceleración centrípeta y es la encargada de que el movimiento siga esa trayectoria circular. La fórmula que describe a la aceleración centrípeta es la siguiente:

$$a_c = rw^2 \tag{27}$$

I-D. Energía en un péndulo

Al igual que en muchos sistemas físicos, en el péndulo simple se encuentran dos energías interactuando, la energía cinética y la energía potencial. Debido a la ley de la conservación de la energía, la suma de la energía cinética y de la energía potencial debe ser constante en todo el punto de la trayectoria.

La energía cinética de un objeto es la energía que posee debido al movimiento. Está depende de su masa y de su velocidad. La ecuación de la energía cinética es:

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 \tag{28}$$

En un péndulo simple, la velocidad se refiere a la velocidad angular (generalmente descrita por la letra w), por lo que la fórmula puede ser escrita finalmente como:

$$KE = \frac{1}{2}Iw^2 \tag{29}$$

Debido a que la energía cinética depende de la velocidad a la que está el péndulo, ésta decrece cuando el péndulo parte de la posición de equilibrio y sube a una posición más alta e incrementa cuando de estar en una posición más alta, baja al punto de equilibrio, como se puede ver en la siguiente figura.

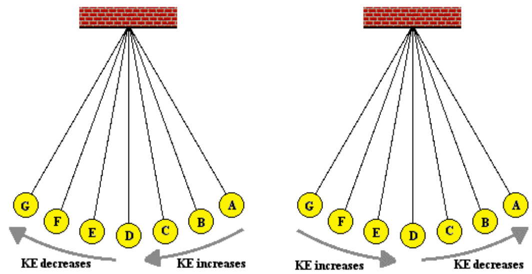

Figura 8. cambio en la energía cinética.

La energía potencial, descrita como la energía que posee un cuerpo debido a su posición se describe matemáticamente como:

$$PE = mgh \tag{30}$$

En este caso, m es la masa del objeto, g es el valor de la aceleración de la gravedad en la tierra y h la altura a la que se encuentra el objeto.

En el caso del péndulo simple, la altura debe ser calculada como un componente del lazo del cual cuelga la masa del péndulo. Por lo que la ecuación final es:

$$PE = mghb(1 - cos\theta) \tag{31}$$

En donde b es la longitud de la cuerda, de la cual cuelga la masa del péndulo.

En el caso de la energía potencial, esta alcanza su máximo cuando el objeto se encuentra lo más alejado del punto de equilibrio, y el mínimo de energía potencial se da en el punto de equilibrio como se puede ver en la siguiente figura.

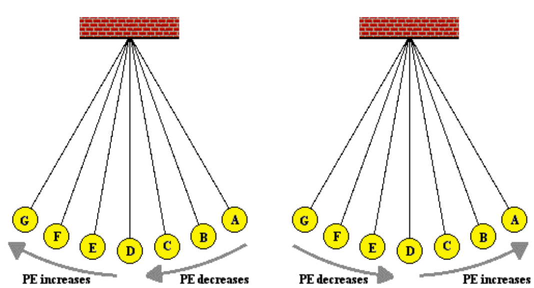

Figura 9. cambio en la energía potencial.

La energía total que se encuentra en el sistema es:

$$KE = \frac{1}{2}Iw^2 + mghb(1 - cos\theta) \tag{32}$$

La cual es constante para toda la trayectoria del péndulo. Esto se debe a las propias definiciones de la energía potencial y de la energía cinética. La energía cinética tendrá un máximo cuando su velocidad sea máxima, es decir, en el punto de equilibrio, mientras que en este punto la energía potencial tendrá un mínimo ya que su altura será la más baja en todo el trayecto de la partícula, de igual forma, la energía potencial tendrá un máximo cuando su masa se encuentre en el punto más alto, y será en este punto en donde la energía cinética tendrá un mínimo de energía, ya que su velocidad será igual a 0. De esta forma se conserva la energía en todo el trayecto del objeto.

II. Diseño de un juego mecánico

La manera en la que se diseñaría un juego mecánico sería tomando los parámetros físicos descritos anteriormente tales como la masa del objeto y la longitud del brazo que lo sostiene. En general se debe de tomar en cuenta la masa de las personas que se subirán al juego para poder plantear un margen de fuerza soportable por el brazo que sostenga el juego. El juego sería como cualquier otro, o sea un péndulo el cual oscila constantemente con un rango de ángulos ligeramente mayor a los 180°. Para ello hace falta calcular la tensión que tendrá el brazo del juego en cada uno de los instantes de tiempo para así evitar un accidente, además de su velocidad angular y sus respectivas aceleraciones tanto tangencial como radial para después obtener la aceleración angular. El juego consiste en una cabina donde se metieran cierto número de personas que se encuentren entre un cierto rango de masa. El juego comenzará a oscilar lentamente mientras aumenta su velocidad de manera constante (teniendo una aceleración constante), hasta un punto donde la velocidad se mantenga constante y su aceleración sea igual a 0. Después de cierto tiempo, la velocidad comenzará a disminuir, teniendo una aceleración negativa hasta detenerse por completo.

Referencias

[1] movarm (2020). El movimiento armónico simple. Recuperado noviembre 7, 2020, de Unirioja.es Sitio web: https://www.unirioja.es/dptos/dq/fa/pract_it/movarm/movarm.html

[2] Trigonometría y fuerzas: el péndulo (artículo) — Khan Academy. (2018). Recuperado noviembre 7, 2020, de Khan Academy Sitio web: https://es.khanacademy.org/computing/computer-programming/programming-natural-simulations/programming-oscillations/a/trig-and-forces-the-pendulum

[3] (2020). El péndulo. Recuperado noviembre 10, 2020, de Sc.ehu.es Sitio web: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo2/pendulo2.htm

[4] The physics classroom. (s.f.). Pendulum motion. Recuperado de https://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-0/Pendulum-Motion

[5] Movimiento circular uniformemente variado. (s.f.). Recuperado de https://es.khanacademy.org/science/fisica-pe-pre-u/x4594717deeb98bd3:movimiento-rectilineo-uniformemente-variado-mruv/x4594717deeb98bd3:movimiento-circular/a/movimiento-circular-uniformemente-variado-repaso

[6] Serway, A., Jewett, W., (2019). Physics for Scientists and Engineers (10th Edition), Cengage Learning.

[7] Movimiento Armónico Simple en Péndulos. (2020). Recuperado noviembre 11, 2020, de Fisicalab.com Sitio web: https://www.fisicalab.com/apartado/mas-y-pendulos

[8] Péndulos y tipos. (2014, septiembre 23). Recuperado noviembre 11, 2020, de Wordpress.com Sitio web: https://gsusj.wordpress.com/2014/09/23/pendulos-y-guia-para-su-uso/

[9] Péndulo - EcuRed. (2020). Recuperado noviembre 10, 2020, de Wordpress.com Sitio web: Ecured.cu website: https://www.ecured.cu/P%C3%A9ndulo#Tipos_de_p.C3.A9ndulos

[10] Physics Tutorial: Pendulum Motion. (2020). Recuperado noviembre 10, 2020, de Physicsclassroom.com Sitio web: https://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-0/Pendulum-Motion

[11] Physics Tutorial: Pendulum Motion. (2020). Recuperado noviembre 10, 2020, de Physicsclassroom.com Sitio web: https://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-0/Pendulum-Motion

[12] Pendulum. (2020). Recuperado noviembre 11, 2020, de Gsu.edu Sitio web: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/pend.html

[13] Taylor, S. (abril 24, 2017). History of the Pendulum. Recuperado noviembre 10, de SCIENCING Sitio web: https://sciencing.com/history-pendulum-4965313.html

[14] Foucault Pendulum. (2020). Recuperado noviembre 12, de Smithsonian Institution Sitio web: https://www.si.edu/spotlight/foucault-pendulum

[15] The physics classroom (s.f.) pendulum motion[Figura]. Recuperado de https://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-0/Pendulum-Motion

[16] The physics classroom (s.f.) pendulum motion[Figura]. Recuperado de https://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-0/Pendulum-Motion

[17] Cómo hacer simulaciones de partículas en Matlab (2014) [Figura]. Recuperado de https://dguinstation.wordpress.com/2014/08/31/como-hacer-simulaciones-de-particulas-en-matlab-iv-pendulo-1-part-2d/

[18] Oscillation of a pendulum, for "big.ºscilations (amplitude = 0.99π, black) and for "small.ºscillations (amplitude = 0.25π, grey).(2008) [Figura]. Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pend-ampl.png

[19] Franco, A. (s. f.). El pendulo simple [Ilustración]. sc.ehu.es. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/pendulo/pendulo.html

[20] Franco A. (2016) El péndulo doble [Ilustración] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/pendulo_doble/pendulo_doble.html

[21] Colaboradores de los proyectos Wikimedia. (2003). Péndulo de Foucault. [Ilustración] https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_de_Foucault

[22] Péndulo de Newton. (2016). [Ilustración]. Demostración de la conservación del momento lineal. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/cuna_newton/cuna_newton.html

[23] Franco A. (2016) El péndulo compuesto [Ilustración] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/compuesto/compuesto.html