Estimación del valor futuro de una opción financiera

Tom Arc, Mauricio Andrés Flores, Ana Paula Ponce, Erick Ramírez Romero

Escuela de Ingeniería y Ciencias
Tecnológico Monterrey
Campus Guadalajara

***Resumen*—Throughout this article, the fair price of a put option for an underlying asset that varies its value over time based on the interbank interest rate will be estimated using the Monte Carlo method and the Black and Scholes model.**

***Index Terms*—Black and Scholes model, Risk analysis, Monte Carlo, Brownian movement**

I. Introducción

Las opciones son contratos de derivados que otorgan al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar (en el caso de una opción de compra) o vender (en el caso de una opción de venta) un activo o valor subyacente a un precio predeterminado (llamado el precio de ejercicio) antes de que expire el contrato. El término "derivado"significa que el valor de una opción se deriva principalmente del activo subyacente con el que está asociado. Por lo tanto, el comprender cómo valorar el precio de un activo financiero es crucial para negociar opciones.

El análisis del valor futuro de un activo depende de factores que no se pueden controlar debido a que dependen de eventos que pueden variar aleatoriamente en el tiempo, por lo que no es posible obtener el valor futuro de un activo financiero de forma analítica, sin embargo, es posible obtener estimaciones mediante modelos probabilísticos.

En este caso, se partirá del valor de un activo y considerando el histórico de las tasas de interés, se estimará su valor después de un tiempo t. Los datos utilizados para este artículo fueron obtenidos de la página del Banco de México, considerando la tasa de interés a 28 días.

II. Descripción de la problemática

El precio de un activo financiero depende únicamente del valor presente, por lo que la evolución de un activo en el tiempo se puede modelar mediante cadenas de Markov de tiempo continuo. Durante el desarrollo de este artículo se hará uso del modelo de Black and Scholes en conjunto con el método de Monte Carlo para poder hacer una estimación del precio de un activo que cambia a lo largo del tiempo de acuerdo a las tasas de interés interbancarias y así poder asignar un precio justo a su respectiva opción financiera de *call* (Compra a futuro).

El modelo de Black and Scholes fue el primer método matemático ampliamente utilizado para calcular el valor teórico de un contrato de opción, utilizando los precios actuales de las acciones, los dividendos esperados, el precio de ejercicio de la opción, las tasas de interés, tiempo hasta el vencimiento y volatilidad esperada. El costo de un activo de un subyacente de valor S con un comportamiento logarítmico normal, con un precio de ejercicio K, volatilidad σ y deriva μ, en una cuenta de mercado B con una tasa libre de riesgo r en el tiempo T puede estimarse según el modelo de Black and Scholes con la siguiente ecuación:

$$C(t,S) = sN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{1}$$

donde:

$$d_1 = \frac{ln(s/K) + r\tau + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{ln(s/K) + r\tau + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{3}$$

El método de Monte Carlo es una técnica matemática que se utiliza para simular un proceso físico aleatorio de modo que se pueda inferir la solución deseada al problema desde el análisis del comportamiento de los números aleatorios generados de manera artificial. Se basa en dos de los teoremas más importantes de la teoría de probabilidad: La Ley de los Grandes Números y el Teorema del Límite Central (TLC).

III. Pregunta de investigación

¿Es posible determinar el precio justo de una opción de compra de un subyacente en un tiempo T a un precio S dado que actualmente cuenta con un valor K?

IV. Metodología utilizada

Primeramente se accedió al Sistema de Información Económica (SIE) de banxico [1] para poder recopilar los datos históricos de las tasas de interés interbancarias con el fin de determinar la media, desviación estándar y número de incrementos de las mismas con el objetivo de modelar una caminata aleatoria que exhibiera un comportamiento similar al de tasas de interés analizadas, las cuales datan desde el día 10 de octubre de 2021 hasta el día 10 de octubre de 2022.

Una vez que se contó con los parámetros necesarios para modelar una caminata aleatoria o movimiento browniano semejante al de las tasas de interés interbancarias se creó una función en el lenguaje de programación python según el procedimiento descrito en el libro "Statitiscal methods for financial engineering" [2]. Esta función sería utilizada para realizar una simulación de Monte Carlo de 10000 iteraciones en donde se obtendría un aproximado de la tasa interés interbancaria al cabo de un año. Posteriormente esta tasa fue usada para aproximar el valor del subyacente al termino del periodo antes mencionado.

Finalmente la aproximación del subyacente pasado el tiempo de interés fue usada como parámetro en la ecuación2 para calcular el precio justo de la acción *put* para dicho subyacente.

V. Suposiciones

- El precio de las acciones se comporta como un movimiento browniano.
- El precio de las acciones se distribuye de manera logarítmica normal.
- El retorno de las acciones se distribuye de manera normal.
- La volatilidad es constante a lo largo del tiempo.
- Las acciones no pagan dividendos.
- Las opciones solo pueden ser ejercidas al tiempo de expiración.
- El interés libre de riesgo no fluctúa con el paso del tiempo.
- Mercado sin fricción, todos los costos y restricciones asociados con las transacciones son inexistentes.
- No hay oportunidades arbitrarias en el mercado.

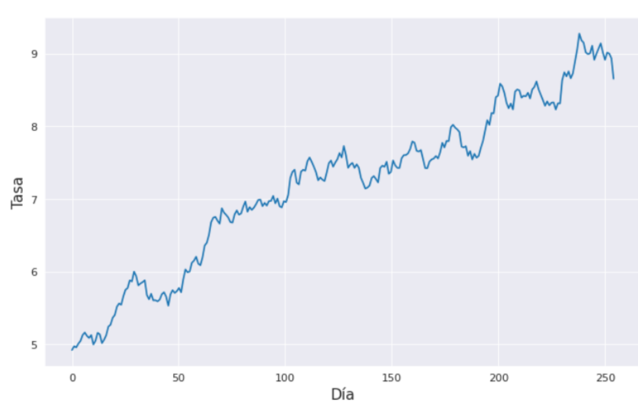

Figura 1. Simulación de la tasa para 254 días por medio del uso del movimiento browniano

VI. Resultados

Para obtener el precio actual del activo financiero subyacente, se simularon las tasas de interés por medio de un movimiento browniano. Esta simulación se realizó para obtener la predicción de la tasa de interés al día actual y así poder calcular el precio actual del activo financiero subyacente. En la figura 1 se puede observar la corrida de una simulación de estas tasas de intereses.

La anterior simulación era capaz de predecir el valor de la tasa de interés para cualquier tiempo, sin embargo, era muy poco precisa como para ser utilizada para fines prácticos. Por dichos motivos se utilizó el método de Monte Carlo para lograr una estimación precisa de la tasa de interés para el tiempo deseado. Esto se realizó corriendo múltiples instancias de la simulación de la tasa de interés para la fecha actual y promediando el resultado de todas las simulaciones. En este caso se corrieron 10000 instancias de la simulación. En la figura 2 se pueden ver todas las simulaciones para la tasa de interés.

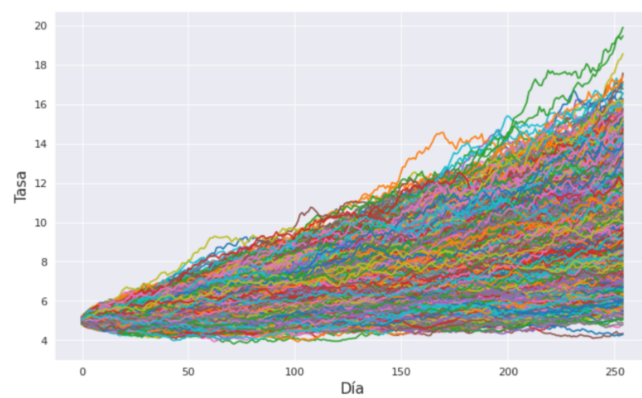

Figura 2. 10000 simulaciones de la tasa para 254 días por medio del uso del movimiento browniano

En la figura 3 se observa como entre mayor es el número de iteraciones, el valor de la tasa de interés actual comienza a converger a un valor estable, que por los datos utilizados es 9.530006. También se puede notar que con pocas iteraciones se llega a valores muy extremos e incorrectos dentro del contexto del problema.

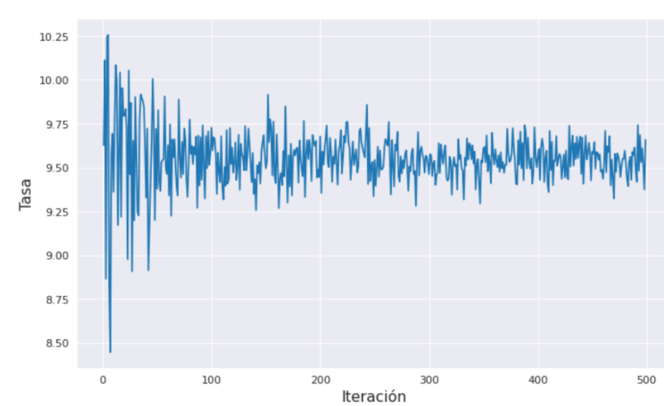

Figura 3. Cálculo de la tasa para el día 254 para diferentes iteraciones del método de Monte Carlo

La figura 4 muestra el histograma de las tasas encontradas en las 10000 iteraciones del método de Monte Carlo. Como se observa visualmente, no existe una gran variabilidad en las tasas encontradas por el método y por lo tanto se concluir que el método de Monte Carlo es aplicable y de valor para este problema y para estos datos específicamente.

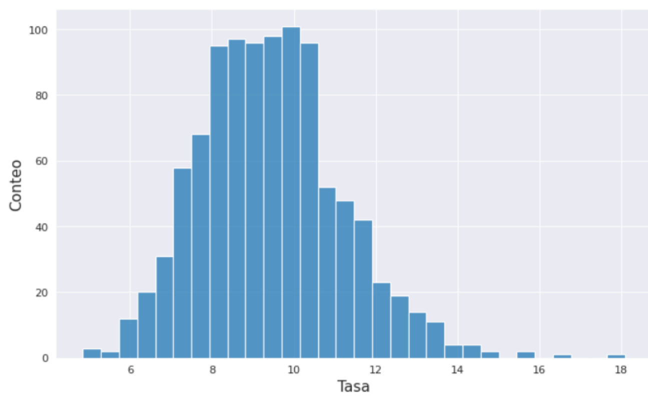

Figura 4. Distribución de las tasas encontradas utilizando el método de Monte Carlo

Finalmente para la estimación del precio de algunas opciones europeas, se utilizaron distintos valores de precio de ejercicio K, con un precio inicial del activo $s = 109{,}530006$ y distintos valores de tiempo de expiración T. Los resultados de estas simulaciones se pueden observar en la figura 5.

	K	T	s	C(s, t)
0	50	1	109.530006	59.530680
1	50	30	109.530006	59.550206
2	50	254	109.530006	59.700818
3	75	1	109.530006	34.531017
4	75	30	109.530006	34.560306
5	75	254	109.530006	34.921321
6	100	1	109.530006	9.531353
7	100	30	109.530006	9.813911
8	100	254	109.530006	13.760057

Figura 5. Gráfica con la estimación del valor de una opción europea para distintos valores de K y T

Como se puede observar en la figura 5, las estimaciones del precio de la opción europea de compra cambian levemente para valores con el mismo precio de ejercicio K, y se observa que el tiempo de expiración en estos casos no parece ser un factor tan importante como lo es el precio de ejercicio. También se observa que entre mayor sea el precio de ejercicio en comparación con el precio actual, menor es la estimación para el costo de la opción europea de compra. Esto último se puede atribuir a que entre mayor sea el precio al que se desea comprar el activo financiero en comparación con el precio actual, mayor pérdida hay para la persona que lo está comprando con ese precio de ejercicio, mientras que si una persona desea comprar a un precio de ejercicio muy bajo en comparación con el precio actual, claramente estará ganando mucho al comprar el activo en un precio más bajo que el precio actual y por tanto es mayor el costo de la opción europea de compra.

VII. Conclusiones y recomendaciones

El modelo de Black y Scholes logra estimar el precio de una opción europea de una forma sencilla y computacionalmente viable. Sin embargo, la precisión de esta estimación dependerá en gran parte del precio del activo en el tiempo actual, el cual no es tan sencillo de estimar como lo es el precio de la opción europea. Para obtener soluciones que sean de utilidad en el mercado real, es necesario del uso de técnicas numéricas como el método de Monte Carlo para estimaciones más reales de las tasas de interés. En la presente investigación se observó como el uso de las técnicas de Monte Carlo y de la ecuación de Black y Scholes pueden brindar métodos muy directos para el cálculo del precio de las opciones europeas con resultados satisfactorios si se usan bajo las condiciones adecuadas.

Referencias

[1] “Sistema de información económica,” Oct 2022. [Online]. Available: https://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?sector=18/&accion=consultarCuadroAnalitico/&idCuadro=CA51/&locale=es

[2] B. Remillard, *Statistical methods for financial engineering*. CRC Press, 2016.

[3] R. Carmona, P. D. Moral, P. Hu, and N. Oudjane, “An introduction to particle methods with financial applications,” in *in Numerical Methods in Finance of the Springer Proceedings in Mathematics*. Springer-Verlag, 2012, pp. 3–50.

[4] N. Metropolis, “The beginning of the monte carlo method,” *Los Alamos science special issue*, 1987.

[5] Vatsal, “Monte carlo method explained,” 2021. [Online]. Available: https://towardsdatascience.com/monte-carlo-method-explained-8635edf2cf58

[6] R. Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley; Sons, 2011.

[7] A. Hayes, “The black-scholes model,” 2022. [Online]. Available: https://www.investopedia.com/terms/b/blackscholes.asp