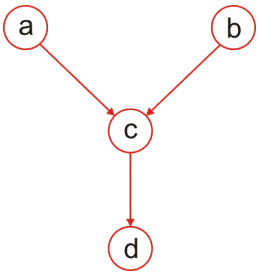
Задание 1. Байесовские рассуждения

**Курс: Байесовские методы в машинном обучении, 2018**

## Вероятностные модели посещаемости курса

Рассмотрим модель посещаемости студентами ВУЗа одной лекции по курсу. Пусть аудитория данного курса состоит из студентов профильного факультета, а также студентов других факультетов. Обозначим через $a$ количество студентов, поступивших на профильный факультет, а через $b$ – количество студентов других факультетов. Пусть студенты профильного факультета посещают лекцию с некоторой вероятностью $p_1$, а студенты остальных факультетов – с вероятностью $p_2$. Обозначим через $c$ количество студентов, посетивших данную лекцию. Тогда случайная величина $c|a,b$ есть сумма двух случайных величин, распределённых по биномиальному закону $\text{Bin}(a,p_1)$ и $\text{Bin}(b,p_2)$ соответственно. Пусть далее на лекции по курсу ведётся запись студентов. При этом каждый студент записывается сам, а также, быть может, записывает своего товарища, которого на лекции на самом деле нет. Пусть студент записывает своего товарища с некоторой вероятностью $p_3$. Обозначим через $d$ общее количество записавшихся на данной лекции. Тогда случайная величина $d|c$ представляет собой сумму $c$ и случайной величины, распределённой по биномиальному закону $\text{Bin}(c,p_3)$. Для завершения задания вероятностной модели осталось определить априорные вероятности для $a$ и для $b$. Пусть обе эти величины распределены равномерно в своих интервалах $[a_{min},a_{max}]$ и $[b_{min},b_{max}]$ (дискретное равномерное распределение). Таким образом, мы определили следующую вероятностную модель:

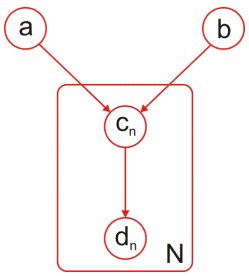



$$
\begin{aligned}
&p(a,b,c,d) = p(d|c)p(c|a,b)p(a)p(b),\\
&d|c \sim c + \text{Bin}(c,p_3),\\
&c|a,b \sim \text{Bin}(a,p_1) + \text{Bin}(b,p_2),\\
&a \sim \text{Unif}[a_{min},a_{max}],\\
&b \sim \text{Unif}[b_{min},b_{max}].
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Рассмотрим несколько упрощённую версию модели 1. Известно, что биномиальное распределение $\text{Bin}(n,p)$ при большом количестве испытаний и маленькой вероятности успеха может быть с высокой точностью приближено пуассоновским распределением $\text{Poiss}(\lambda)$ с $\lambda = np$. Известно также, что сумма двух пуассоновских распределений с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$ есть пуассоновское распределение с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$ (для биномиальных распределений это неверно). Таким образом, мы можем сформулировать вероятностную модель, которая является приближённой версией модели 1:

$$
\begin{aligned}
&p(a,b,c,d) = p(d|c)p(c|a,b)p(a)p(b),\\
&d|c \sim c + \text{Bin}(c,p_3),\\
&c|a,b \sim \text{Poiss}(ap_1 + bp_2),\\
&a \sim \text{Unif}[a_{min},a_{max}],\\
&b \sim \text{Unif}[b_{min},b_{max}].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Рассмотрим теперь модель посещений нескольких лекций курса. Будем считать, что посещения отдельных лекций являются независимыми. Тогда:




$$
\begin{aligned}
&p(a,b,c_1,\ldots,c_N,d_1,\ldots,d_N) = p(a)p(b)\prod_{n=1}^{N} p(d_n|c_n)p(c_n|a,b),\\
&d_n|c_n \sim c_n + \text{Bin}(c_n,p_3),\\
&c_n|a,b \sim \text{Bin}(a,p_1) + \text{Bin}(b,p_2),\\
&a \sim \text{Unif}[a_{min},a_{max}],\\
&b \sim \text{Unif}[b_{min},b_{max}].
\end{aligned}
\tag{3}
$$

По аналогии с моделью 2 можно сформулировать упрощённую модель для модели 3:

$$
\begin{aligned}
&p(a, b, c_1, \ldots, c_N, d_1, \ldots, d_N) = p(a)p(b)\prod_{n=1}^{N} p(d_n|c_n)p(c_n|a, b),\\
&d_n|c_n \sim c_n + \text{Bin}(c_n, p_3),\\
&c_n|a, b \sim \text{Poiss}(ap_1 + bp_2),\\
&a \sim \text{Unif}[a_{min}, a_{max}],\\
&b \sim \text{Unif}[b_{min}, b_{max}].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Задание состоит из трёх вариантов. Схема присвоения варианта приложена к заданию.

## Вариант 1

Рассматриваются модели 1 и 2 с параметрами $a_{min} = 75$, $a_{max} = 90$, $b_{min} = 500$, $b_{max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$. Провести следующие исследования для обеих моделей:

1. Вывести формулы для всех необходимых далее распределений аналитически.
2. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений $p(a)$, $p(b)$, $p(c)$, $p(d)$.
3. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины $c$ по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(c|d)$, $p(c|a, b)$, $p(c|a, b, d)$ при параметрах $a$, $b$, $d$, равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого.
4. Определить, какая из величин $a$, $b$, $d$ вносит наибольший вклад в уточнение прогноза для величины $c$ (в смысле дисперсии распределения). Для этого убедиться в том, что $\mathbb{D}[c|d] < \mathbb{D}[c|b]$ и $\mathbb{D}[c|d] < \mathbb{D}[c|a]$ для любых допустимых значений $a$, $b$, $d$. Найти множество точек $(a, b)$ таких, что $\mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]$. Являются ли множества $\{\,(a, b) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]\,\}$ и $\{\,(a, b) \mid \mathbb{D}[c|b] \geq \mathbb{D}[c|a]\,\}$ линейно разделимыми? Ответ должен быть обоснован!
5. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(c|d)$, $p(c|a, b)$, $p(c|a, b, d)$, $p(d)$.
6. Сравнить результаты для двух моделей. Показать где максимально проявляется разница между ними (привести конкретный пример, не обязательно из экспериментов выше). Объяснить причины подобного результата.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины $c$ интервал $[0, a_{max} + b_{max}]$, а для величины $d$ – интервал $[0, 2(a_{max} + b_{max})]$.

Исследование должно быть выполнено на компьютере, однако за дополнительные аналитические выкладки в пунктах 2-4 будут ставиться дополнительные баллы. При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода - любая из функций должна работать быстрее секунды на скалярных входах (для этого код должен реализовываться векторно). По всем пунктам задания должен быть проведен анализ результатов и сделаны выводы.

## Вариант 2

Рассматриваются модели 1 и 2 с параметрами $a_{min} = 75$, $a_{max} = 90$, $b_{min} = 500$, $b_{max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$. Провести следующие исследования для обеих моделей:

1. Вывести формулы для всех необходимых далее распределений аналитически.
2. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений $p(a)$, $p(b)$, $p(c)$, $p(d)$.
3. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины $b$ по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(b)$, $p(b|a)$, $p(b|d)$, $p(b|a, d)$ при параметрах $a$, $d$, равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого.
4. Определить, при каких соотношениях параметров $p_1$, $p_2$ изменяется относительная важность параметров $a, b$ для оценки величины $c$. Для этого найти множество точек $\{\,(p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]\,\}$ при $a, b$, равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого. Являются ли множества $\{\,(p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]\,\}$ и $\{\,(p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] \geq \mathbb{D}[c|a]\,\}$ линейно разделимыми? Ответ должен быть обоснован!

5. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(b|a)$, $p(b|d)$, $p(b|a,d)$, $p(d)$.

6. Сравнить результаты для двух моделей. Показать где максимально проявляется разница между ними (привести конкретный пример, не обязательно из экспериментов выше). Объяснить причины подобного результата.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины $c$ интервал $[0, a_{max} + b_{max}]$, а для величины $d$ – интервал $[0, 2(a_{max} + b_{max})]$.

Исследование должно быть выполнено на компьютере, однако за дополнительные аналитические выкладки в пунктах 2-4 будут ставиться дополнительные баллы. При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода - любая из функций должна работать быстрее секунды на скалярных входах (для этого код должен реализовываться векторно). По всем пунктам задания должен быть проведен анализ результатов и сделаны выводы.

## Вариант 3

Рассматриваются модели 3 и 4 с параметрами $a_{min} = 75$, $a_{max} = 90$, $b_{min} = 500$, $b_{max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$, $N = 50$. Провести следующие исследования для обеих моделей:

1. Вывести формулы для всех необходимых далее распределений аналитически.

2. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений $p(a)$, $p(b)$, $p(c_n)$, $p(d_n)$.

3. Реализовать генератор выборки $d_1, \dots, d_N$ из модели при заданных значениях параметров $a, b$.

4. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины $b$ по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(b)$, $p(b|d_1), \dots, p(b|d_1, \dots, d_N)$, где выборка $d_1, \dots, d_N$ 1) сгенерирована из модели при параметрах $a, b$, равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого и 2) $d_1 = \dots = d_N$, где $d_n$ равно мат.ожиданию своего априорного распределения, округленного до ближайшего целого. Провести аналогичный эксперимент, если дополнительно известно значение $a$. Сравнить результаты двух экспериментов.

5. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c_n)$, $p(d_n)$, $p(b|d_1, \dots, d_n)$, $p(b|a, d_1, \dots, d_n)$.

6. Сравнить результаты для двух моделей. Показать где максимально проявляется разница между ними (привести конкретный пример, не обязательно из экспериментов выше). Объяснить причины подобного результата.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины $c$ интервал $[0, a_{max} + b_{max}]$, а для величины $d$ – интервал $[0, 2(a_{max} + b_{max})]$.

Исследование должно быть выполнено на компьютере, однако за дополнительные аналитические выкладки в пункте 2 будут ставиться дополнительные баллы. При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода - любая из функций должна работать быстрее секунды на скалярных входах $a, b$ и одномерных входных векторах $c_n, d_n$ длины около 50 (для этого код должен реализовываться векторно). По всем пунктам задания должен быть проведен анализ результатов и сделаны выводы. За качественный анализ в пункте 4 также могут быть выставлены дополнительные баллы.

## Оформление задания

На проверку в ejudge нужно отправить Python модуль со всеми требуемыми функциями в соответствии с прототипами, приведенными в отдельном файле. Модуль должен называться name_surname.py, например, petr_ivanov.py. Модуль не должен содержать никакого main! То есть при импорте модуля никакие вычисления производиться не должны.

Перед отправкой кода в ejudge его нужно проверить с помощью выдаваемых открытых тестов. Если какой-то из них выдает предупреждение (кроме тестов по времени), то ваш код не соответствует прототипам и не может быть проверен. Предупреждения по времени говорят о том, что ваш код не достаточно эффективен, что может привести к понижению оценки.

На проверку в anytask нужно отправить:

- Тот же Python модуль, который был отправлен в ejudge.
- Отчет в формате PDF с указанием ФИО и номера варианта, содержащий описание всех проведённых исследований (вывод необходимых формул, графики, анализ и выводы). Отчет не должен содержать листинга кода и подобных вещей! Желательно для составления отчета использовать latex. Файл должен называться name_surname.pdf.

Будьте внимательны к формату названий файлов!