Zadanie 6 Chcemy znaleźć krzywą regresji w postaci

$$y = a + bx + cx^2,$$

czyli zminimalizować wartość funkcji

$$f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2,$$

a zatem rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \partial f / \partial a = 0 \\ \partial f / \partial b = 0 \\ \partial f / \partial c = 0 \end{cases}.$$

Rozpiszmy pierwszą pochodną cząstkową

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(a + bx_i + cx_i^2 - y_i) \cdot 1 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} bx_i + \sum_{i=1}^{n} cx_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) =$$
$$= 2\left(n \cdot a + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i\right),$$

po przyrównaniu do zera

$$n \cdot a + b\sum_{i=1}^{n} x_1 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Podobnie rozpisujemy drugą pochodną

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(a + bx_i + cx_i^2 - y_i) \cdot x_i = 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a + \sum_{i=1}^{n} bx_i^2 + \sum_{i=1}^{n} cx_i^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) =$$
$$= 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right),$$

po przyrównaniu do zera

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

I jeszcze raz to samo z trzecią

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2(a + bx_i + cx_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a + \sum_{i=1}^{n} bx_i^3 + \sum_{i=1}^{n} cx_i^4 - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2\right) =$$
$$= 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2\right),$$

po przyrównaniu do zera

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2.$$

Czyli pierwszemu układowi równań, równoważny jest

$$\left\{\begin{array}{c} n\cdot a + b\sum x_i + c\sum x_i^2 = \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3 = \sum y_i x_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4 = \sum y_i x_i^2 \end{array}\right. .$$

Można zapisać go w postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc} n\cdot a & b\sum x_i & c\sum x_i^2 \\ a\sum x_i & b\sum x_i^2 & c\sum x_i^3 \\ a\sum x_i^2 & b\sum x_i^3 & c\sum x_i^4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{array}\right],$$

następnie wyciągnąć wektor współczynników

$$\left[\begin{array}{ccc} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{array}\right].$$