

7. X - zmienna losowa typu ciągłego

$$E(ax+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ax f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ax f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b f(x) dx =$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_1 =$$

$$= a E(X) + b$$

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. Tydzień rozpoczynający się 9. marca

Zadania

1. Niech Σ będzie σ -ciałem zbiorów.

(a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.

(b) Założyć, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Wykazać, że $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.

(a) Opisać σ -ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.

(b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.

✓ 3. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $S = \{1, 4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ -ciało zbiorów zawierające S .

4. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

5. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2]$	$(-2; 3]$	$(3; 5]$	$(5; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

Podać postać funkcji gęstości $f(x)$.

✓ 6. Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $E(aX+b) = aE(X) + b$.

7. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $E(aX+b) = aE(X) + b$.

✓ 8. 2p. Sprawdzić, że

$$\checkmark (a) \quad B(p, q+1) = B(p, q) \frac{q}{p+q},$$

$$\checkmark (b) \quad B(p, q) = B(p, q+1) + B(p+1, q).$$

9. 2p. Udowodnić, że $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

Def. Funkcją beta nazywany wartość całki

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p > 0, q > 0.$$

Witold Karzawski