1.

a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (\cancel{p} + 1 - \cancel{p})^n = 1^n = 1$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}$$

$$= pn \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-1-k} =$$

$$= pn \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np(\cancel{p} + 1 - \cancel{p})^{n-1} =$$

$$= np\, 1^{n-1} = np$$

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 1. Tydzień rozpoczynający się 24. lutego 2021

Zadania

1. **(2p.)** Sprawdzić, że:
   (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$,
   (b) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$.
2. Sprawdzić, że
   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$,
   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$.
3. **Funkcją Γ-Eulera** nazywamy wartość całki:
   $$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t}\, dt, \quad p > 0.$$
   Wykazać, że $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$.
4. Niech $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, gdzie $\lambda > 0$. Obliczyć wartości całek:
   (a) $\int_0^\infty f(x)\, dx$,
   (b) $\int_0^\infty x\, f(x)\, dx$.
5. Wykazać, że $D_n = n$, gdzie
   $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}.$$
6. **(2p.)** Niech $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$. Mamy $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dy\, dx$. Stosując podstawienie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, wykazać, że $I^2 = 2\pi$.
7. Symbol $\bar{s}$ oznacza srednią ciągu $s_1, \dots, s_n$. Udowodnić, że:
   (a) $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2$,
   (b) $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}$.
8. **(2p.)** Dane są wektory $\vec{\mu}, X \in \mathbb{R}^n$ oraz macierz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Niech $S = (X - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (X - \vec{\mu})$ oraz $Y = A \cdot X$, gdzie macierz A jest odwracalna. Sprawdzić, że $S = (Y - A\vec{\mu})^T (A\Sigma A^T)^{-1} (Y - A\vec{\mu})$.

Witold Karczewski