Zadanie 5. Ile rozwiązań ma poniższy układ w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$.

$$\begin{cases} \lambda x &+ \lambda^2 y &+ \lambda^3 z &= 1 \\ x &+ \lambda^2 y &+ \lambda^3 z &= \lambda \\ x &+ y &+ \lambda^3 z &= \lambda^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zacznijmy od przedstawienie powyższego układu w postaci macierzowej $A\vec{X} = \vec{B}$.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 1 & \lambda^3 \end{bmatrix}, \vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Z **Twierdzenia 7.1** wiemy, że jeśli $det(A) \neq 0$ to równanie ma jedno rozwiązanie. Wyznaczmy zatem $det(A)$ korzystając z reguły Sarrusa.

$$\begin{aligned} det(A) &= \lambda^6 + \lambda^5 + \lambda^3 - \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^5 = \\ &= \lambda^6 - \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 = \\ &= \lambda^3(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = \\ &= \lambda^3(\lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1)) = \\ &= \lambda^3(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Zauważamy, że nasz wyznacznik zeruje się dla $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ lub $\lambda = -1$, zatem dla innych wartości parametru λ jest różny od zera, czyli istnieje dokładnie jedno rozwiązanie. Pozostaje nam zbadać ile rozwiązań pojawi się w pozostałych przypadkach. W tym celu dla każdego przypadku policzymy $rk(A)$ oraz $rk(A|B)$ stosując eliminację Gaussa na wierszach.

1° $\lambda = -1$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)=(2)-(3)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)=(1)+(3)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jak widać, w tym przypadku $rk(A) = 2$. Te same operacje zastosujemy na macierzy rozszerzonej.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Okazuje się, że macierz $A|B$ ma rząd równy 3, a więc $rk(A) \neq rk(A|B)$, czyli na podstawie **Faktu 7.4** mówimy, że układ nie ma rozwiązania dla $\lambda = -1$.

2° $\lambda = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)=(3)-(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rk(A) = 2$, podobnie jak wcześniej sprawdzamy $A|B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)=(3)-(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I znów $rk(A|B) = 3$, więc $rk(A) \neq rk(A|B)$ i układ nie ma rozwiązania dla $\lambda = 0$.

3° $\lambda = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)=(2)-(1),(3)=(3)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd A to tym razem 1, sprawdzamy rząd $A|B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)=(2)-(1),(3)=(3)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy $rk(A) = rk(A|B)$ zatem istnieje co najmniej jedno rozwiązanie. Ustalimy zatem zbiór rozwiązań. Po eliminacji mamy równanie $x+y+z=1$, możemy wyznaczyć z niego x. Otrzymujemy $x = 1-y-z$. Zatem zbiór rozwiązań będzie miał postać:

$$\{(1-y-z, y, z)|y, z \in \mathbb{Z}_{13}\}$$

Zmienne y i x możemy ustalić na 13^2 możliwości, więc dla $\lambda = 1$ mamy 169 możliwych rozwiązań.