Zadanie 7.11 Mamy sprawdzić, że $U, V \sim N(0,1)$, gdzie

$$U = \frac{1}{2\sqrt{15}}(-3Y_1 + 2Y_2),\ V = \frac{1}{2\sqrt{20}}(3Y_1 + 2Y_2 - 12).$$

Wiemy, że $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ ma rozkład $N(\mu, \Sigma)$, gdzie $\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ oraz $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$. Niech $X = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = AY + c$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{3}{2\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix},$$

a wektor c to

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-6}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

Niech $Z = AY = \begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix}$, jeśli A jest odwracalna, to na podstawie twierdzenia z wykładu

$$Z \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$$

$|A| \approx -0.17$, czyli macierz jest odwracalna. Zatem policzmy macierz wartości oczekiwanych zmiennej Z

$$A\mu = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{3}{2\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

Następnie macierz kowariancji

$$A\Sigma A^T = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{3}{2\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-3}{2\sqrt{15}} & \frac{3}{2\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{-5}{\sqrt{15}} & \frac{15}{\sqrt{15}} \\ \frac{7}{\sqrt{21}} & \frac{21}{2\sqrt{21}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-3}{2\sqrt{15}} & \frac{3}{2\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z powyższych równań jesteśmy już w stanie odczytać rozkład zmiennej losowej $U' = U \sim N(0,1)$ oraz $V' \sim N\left(\frac{6}{\sqrt{21}}, 1\right)$.

Żeby wyznaczyć rozkład zmiennej V możemy skorzystać z faktu, że jeśli zmienna losowa T należy do rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, to zmienna $T + b$ będzie należeć do rozkładu $N(\mu + b, \sigma^2)$.
Dowód. Łatwy dowód można przeprowadzić na MGF'ach

$$M_{T+b}(t) = e^{tb} \cdot M_T(t) = exp(tb) \cdot exp\left(t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) =$$
$$= exp\left(t(\mu + b) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Wynik jest MGF'em rozkładu $N(\mu + b, \sigma^2)$, co kończy dowód.

Korzystając z powyższego

$$V = V' + \frac{-6}{\sqrt{21}} \sim N\left(\frac{6}{\sqrt{21}} + \frac{-6}{\sqrt{21}}, 1\right) = N(0,1).$$