MDL Lista 6

Cezary Świtała

24 listopada 2020

Zadanie 2 Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

(a)

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \left|\sqrt{a_{n+1}^2 + a_n^2}\right| \end{cases}$$

$$a_{n+2}^2 = a_{n+1}^2 + a_n^2$$

$$b_n = a_n^2$$

$$a_n = \left|\sqrt{b_n}\right|$$

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 1 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \end{cases}$$

$$E^2 \langle b_n \rangle = \langle b_{n+2} \rangle = \langle b_{n+1} + b_n \rangle = \langle b_{n+1} \rangle + \langle b_n \rangle = E \langle b_n \rangle + \langle b_n \rangle$$

Anihilator: $(E^2 - E - 1) = (E - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(E - \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

Postać ogólna: $\alpha(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

Rozwiązujemy układ równań za pomocą dwóch pierwszych wyrazów:

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta & \rightarrow \quad \alpha = 1 - \beta \\ 1 = \alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$1 = (1-\beta)\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} / \cdot 2$$

$$2 = (1-\beta)(1-\sqrt{5}) + \beta(1+\sqrt{5})$$

$$2 = 1 - \sqrt{5} - \beta + \beta\sqrt{5} + \beta + \beta\sqrt{5}$$

$$1 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\beta$$

$$\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+5}{10}$$

$$\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}+5}{10} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$b_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Rozwiązanie:

$$a_n = \left|\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right|$$

(b)

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right| \end{cases}$$

$$b_{n+1}^2 = b_n^2 + 3$$

$$a_n = b_n^2$$

$$b_n = |\sqrt{a_n}|$$

$$\begin{cases} a_0 = 64 \\ a_{n+1} = b_n + 3 \end{cases}$$

$$E\langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = \langle a_n + 3 \rangle = \langle a_n \rangle + \langle 3 \rangle$$

$$(E-1)\langle a_n \rangle = \langle 3 \rangle$$

Ciąg $\langle 3 \rangle$ jest anihilowany przez $(E-1)$, zatem anihilator $\langle a_n \rangle$ to: $(E-1)^2$
Postać ogólna: $\alpha n + \beta$ Rozwiązujemy układ równań za pomocą dwóch pierwszych wyrazów:

$$\begin{cases} 64 = \beta \\ 67 = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 64 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

$$a_n = 3n + 64$$

Rozwiązanie:

$$b_n = \left|\sqrt{3n + 64}\right|$$

(c)

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1} \end{cases}$$

$$c_{n+1} = (n+1)c_n + n(n+1)c_{n-1} \qquad / : (n+1)!$$

$$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c_n}{n!} + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}$$

$$a_n = \frac{c_n}{n!}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases}$$

Ciąg a_n jest ciągiem Fibonacciego, wiemy (choćby z poprzednich zajęć) że jego wzór jawny to:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

$$c_n = a_n n!$$

Rozwiązanie:

$$c_n = \frac{n!}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Zadanie 4 Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny prze $k!$.

Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$, wtedy iloczyn k kolejnych liczb naturalnych ma postać

$$(n+1)(n+2)...(n+k)$$

Chcemy pokazać, że powyższy iloczyn dzieli się przez $k!$, czyli że:

$$\frac{(n+1)(n+2)...(n+k)}{k!} \in \mathbb{Z}$$

Pomnóżmy licznik i mianownik przez $n!$.

$$\frac{n!(n+1)(n+2)...(n+k)}{n!k!} = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{(n+k)!}{(n+k-k)!k!} = \binom{n+k}{k}$$

$\binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z}$, co kończy dowód.

Zadanie 6 Rozwiąż zależność rekurencyjną.

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1 \end{cases}$$

$$b_n = a_n^2 \quad (a_n > 0)$$

$$a_n = \left|\sqrt{b_n}\right|$$

$$\begin{cases} b_0 = 4 \\ b_n = 2b_{n-1} + 1 \end{cases}$$

$$E\langle b_n \rangle = \langle b_{n+1} \rangle = \langle 2b_n + 1 \rangle = 2\langle b_n \rangle + \langle 1 \rangle$$

$$(E-2)\langle b_n \rangle = \langle 1 \rangle$$

Ciąg $\langle 1 \rangle$ jest anihilowany przez $(E-1)$, zatem anihilator $\langle b_n \rangle$ to: $(E-2)(E-1)$
Postać ogólna: $\alpha 2^n + \beta$
Rozwiązujemy układ równań za pomocą dwóch pierwszych wyrazów:

$$\begin{cases} 4 = \alpha + \beta & \rightarrow \quad \alpha = 4 - \beta \\ 9 = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$9 = 2(4-\beta) + \beta$$

$$9 = 8 - 2\beta + \beta$$

$$\beta = -1$$

$$\alpha = 5$$

$$b_n = 5 \cdot 2^n - 1$$

Rozwiązanie:

$$a_n = \left|\sqrt{5 \cdot 2^n - 1}\right|$$

Zadanie 7 Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?

Niech a_n będzie liczbą wyrazów o parzystej liczbie a i o długości n. Będzie na nią składać się liczba wyrazów z parzystą liczbą a o długości $n-1$, czyli a_{n-1}, do których dopisano z przodu literę różną od a oraz liczba wyrazów z nieparzystą liczbą a o długości $n-1$ (oznaczmy jako b_{n-1}) do których dopisano a. Zatem

$$a_n = 24a_{n-1} + b_{n-1} \tag{1}$$

Liczba wszystkich wyrazów długości $n-1$, jest równa sumie liczb wyrazów z parzystą i nieparzystą liczbą a o długości $n-1$.

$$25^{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$b_{n-1} = 25^{n-1} - a_{n-1}$$

Podstawiamy pod (1)

$$a_n = 24a_{n-1} + 25^{n-1} - a_{n-1}$$

$$a_n = 23a_{n-1} + 25^{n-1}$$

Musimy ustalić warunek początkowy. Jest tylko jeden wyraz długości 0 – wyraz pusty, który ma parzystą liczbę liter a – równą 0. Czyli $a_0 = 1$. Otrzymujemy związek rekurencyjny.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 23a_n + 25^n \end{cases}$$

Rozwiążemy go metodą anihilatorów.

$$E\langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = \langle 23a_n + 25^n \rangle = 23\langle a_n \rangle + \langle 25^n \rangle$$

$$(E-23)\langle a_n \rangle = \langle 25^n \rangle$$

Ciąg $\langle 25^n \rangle$ jest anihilowany przez $(E-25)$, zatem anihilator $\langle a_n \rangle$ to: $(E-23)(E-25)$
Postać ogólna: $\alpha 23^n + \beta 25^n$
Rozwiązujemy układ równań za pomocą dwóch pierwszych wyrazów:

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta & \rightarrow \quad \alpha = 1 - \beta \\ 24 = 23\alpha + 25\beta \end{cases}$$

$$24 = 23(1-\beta) + 25\beta$$

$$24 = 23 - 23\beta + 25\beta$$

$$1 = 2\beta$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie:

$$a_n = \frac{1}{2}23^n + \frac{1}{2}25^n$$

Zadanie 8 Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

(a)

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1 \end{cases}$$

$$E^2 \langle a_n \rangle = \langle a_{n+2} \rangle = \langle 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1 \rangle = 2E \langle a_n \rangle - \langle a_n \rangle + \langle 3^n \rangle + \langle -1 \rangle$$

$$(E^2 - 2E + 1) \langle a_n \rangle = \langle 3^n \rangle + \langle -1 \rangle$$

Ciąg $\langle 3^n \rangle$ jest anihilowany przez $(E-3)$, ciąg $\langle -1 \rangle$ jest anihilowany przez $(E-1)$, zatem anihilator $\langle a_n \rangle$ to: $(E^2 - 2E + 1)(E-3)(E-1) = (E-3)(E-1)^3$

Postać ogólna: $an^2 + bn + c + d3^n$

(b)

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1} \end{cases}$$

$$E^2 \langle a_n \rangle = \langle a_{n+2} \rangle = \left\langle 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1} \right\rangle = 4E \langle a_n \rangle - 4 \langle a_n \rangle + \left\langle n2^{n+1} \right\rangle$$

$$(E^2 - 4E + 4) \langle a_n \rangle = \left\langle n2^{n+1} \right\rangle$$

Ciąg $\langle n2^{n+1} \rangle$ jest anihilowany przez $(E-2)^2$, zatem anihilator $\langle a_n \rangle$ to: $(E^2 - 4E + 4)(E-2)^2 = (E-2)^4$

Postać ogólna: $2^n(an^3 + bn^2 + cn + d)$

(c)

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n \end{cases}$$

$$E^2 \langle a_n \rangle = \langle a_{n+2} \rangle = \left\langle \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\rangle - 2E \langle a_n \rangle - \langle a_n \rangle$$

$$(E^2 + 2E + 1) \langle a_n \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\rangle$$

Ciąg $\left\langle \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\rangle$ jest anihilowany przez $(E - \frac{1}{2})$, zatem anihilator $\langle a_n \rangle$ to:

$(E^2 + 2E + 1)(E - \frac{1}{2}) = (E+1)^2(E - \frac{1}{2})$

Postać ogólna: $(-1)^n(an + b) + c\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Rozwiązujemy układ równań za pomocą trzech pierwszych wyrazów:

$$\begin{cases} 1 = b + c & \rightarrow \quad c = 1 - b \\ 1 = -a - b + \frac{1}{2}c \\ -\frac{5}{2} = 2a + b + \frac{1}{4}c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = -a - b + \frac{1}{2}(1-b) & / \cdot 2 \\ -\frac{5}{2} = 2a + b + \frac{1}{4}(1-b) & / \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = -2a - 2b + 1 - b \\ -10 = 8a + 4b + 1 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = -2a - 3b \\ -11 = 8a + 3b \end{cases}$$

Po dodaniu równań

$$-10 = 6a$$

$$a = -\frac{5}{3}$$
$$b = \frac{7}{9}$$
$$c = \frac{2}{9}$$

Rozwiązanie:

$$a_n = (-1)^n \left(-\frac{5}{3}n + \frac{7}{9}\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Zadanie 10 Na ile sposobów można rozdać n różnych nagród wśród czterech osób A, B, C, D tak, aby:

(a) A dostała przynajmniej jedną nagrodę. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich sposobów na rozdanie n różnych nagród wśród czterech osób, wtedy $|\Omega| = 4^n$. Aby policzyć ile jest sposobów, w których A dostaje przynajmniej jedną, odejmiemy od liczby wszystkich, liczbę takich, w których A nie dostaje żadnej, a jest ich 3^n. Mamy

$$4^n - 3^n$$

(b) A lub B nie dostała nic. Niech P_X będzie zbiorem sposobów na rozdanie n nagród, tak, że osoba X nie dostaje nic. Wtedy rozwiązaniem będzie

$$|P_A \cup P_B| = |P_A| + |P_B| - |P_A \cap P_B| = 3^n + 3^n - 2^n$$

(c) Zarówno A jak i B dostała przynajmniej jedną nagrodę. Będą to wszystkie rozwiązania minus te z poprzedniego podpunktu

$$|\Omega| - |P_A \cup P_B| = |\Omega| - |P_A| - |P_B| + |P_A \cap P_B| = 4^n - 3^n - 3^n + 2^n$$

(d) Przynajmniej jedna spośród A, B, C nic nie dostała. Analogicznie do drugiego podpunktu.

$$|P_A \cup P_B \cup P_C| = |P_A| + |P_B| + |P_C| - |P_A \cap P_B| - |P_B \cap P_C| - |P_A \cap P_C| - |P_A \cap P_B \cap P_C| =$$

$$= 3^n + 3^n + 3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 = 3 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n + 1$$

(e) Każda z 4 osób coś dostała. Analogicznie do trzeciego podpunktu, sumę zbiorów rozwijamy jak wcześniej z wzoru włączeń i wyłączeń.

$$|\Omega| - |P_A \cup P_B \cup P_C \cup P_D| = 4^n - 4 \cdot 3^n + \binom{4}{2}2^n - \binom{4}{3}$$