X, Y – niezależne zmienne

Z – funkcja zmiennej X i Y

Będziemy szukać rozkładu zmiennej Z.

$$X \sim \chi^2(n) \qquad f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad x \in (0, \infty)$$

$$Y \sim \chi^2(k) \qquad f_Y(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad x \in (0, \infty)$$

$$Z = X + Y$$

Dokonamy przejścia $(X,Y) \to (Z,V)$, wtedy gęstość brzegowa zmiennej (Z,V), będzie gęstością Z, na podstawie której wyznaczymy rozkład.

Nasze przekształcenie: $Z = X + Y$, $V = Y$

Gęstość (Z,V): $g(z,v) = f(\underbrace{x(z,v), y(z,v)}_{\text{odwrócenia przekształcenia}}) \cdot |J|$

Jacobian odwrócenia

musimy wyznaczyć

Gęstość (X,Y):

z niezależności

$$f(x,y) \overset{\downarrow}{=} f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} y^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{(x+y)}{2}}$$

Odwrócenie przekształcenia:

$$\begin{matrix} Z = X + Y \\ V = Y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Z = X + V \\ Y = V \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X = Z - V \\ Y = V \end{matrix}$$

Podstawiamy pod gęstość:

$$f(x(z,v), y(z,v)) = \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} (z-v)^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{(z\cancel{-v}\cancel{+v})}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} (z-v)^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}$$

Jacobian odwrócenia:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) = 1$$

Znamy teraz gęstość (Z,V):

$$g(z,v) = \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} (z-v)^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}$$

Znamy teraz gęstość (z,v).

$$g(z,v) = \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{k}{2})}(z-v)^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}$$

Żeby policzyć gęstość brzegową $\int_a^b g(z,v)\,dv$ musimy zbadać jak zmienił się przedział całkowania dla 'v' czyli wyrazić [a,b].

$$\begin{cases} 0<x \\ 0<y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<z-v \\ 0<v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v<z \\ v>0 \end{cases}$$

Więc mamy nowy przedział całkowania to $[0,z]$

Liczymy gęstość Z, czyli gęstość brzegową (Z,V).

$$f_Z(z) = \int_0^z g(z,v)\,dv = \int_0^z \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{k}{2})}(z-v)^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}\,dv =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^z (z-v)^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{k}{2}-1}\,dv}_{\text{Policzymy to}} = *$$

$$\int_0^z (z-v)^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{k}{2}-1}\,dv = \left| \begin{matrix} x = \frac{v}{z} \\ dx = \frac{1}{z}\,dv \\ dv = z\,dx \end{matrix} \right| = \int_0^1 (z-zx)^{\frac{m}{2}-1} \cdot (zx)^{\frac{k}{2}-1} z\,dx =$$

$$= z^{\frac{m}{2}-1} \cdot z^{\frac{k}{2}-1} \cdot z \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{m}{2}-1} x^{\frac{k}{2}-1}\,dx = z^{\frac{n+k}{2}-1} B\left(\frac{k}{2},\frac{m}{2}\right) = z^{\frac{n+k}{2}-1} \frac{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{k+m}{2})}$$

$$* = \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}\cancel{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{k}{2})}} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{n+k}{2}-1} \frac{\cancel{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}}{\Gamma(\frac{k+m}{2})} = \underbrace{\frac{e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{n+k}{2}-1}}{2^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{n+k}{2})}}_{\substack{\text{gęstość dla} \\ \text{rozkładu } \chi^2(m+k)}} = f_Z(z)$$

Zatem $Z \sim \chi^2(m+k)$