Ćwiczenia z Sieci komputerowych
Zestaw 2 – Rozwiązania

Cezary Świtała

30 maja 2022

Deklaruję zadania: 1,2,3,4,5,6,7,8

Zadanie 1 W kablu koncentrycznym używanym w standardowym 10-Mbitowym Ethernecie sygnał rozchodzi się z prędkością 10^8 m/s. Standard ustala, że maksymalna odległość między dwoma komputerami może wynosić co najwyżej 2,5 km. Oblicz, jaka jest minimalna długość ramki (wraz z nagłówkami.

Rozwiązanie: Czas propagacji wynosi

$$2500 \div 10^8 = 0,000025s.$$

Chcemy, żeby czas wysyłania był dłuższy niż dwukrotność czasu propagacji, zatem większy niż $0,00005s$. Przesyłamy 10^7 bitów na sekundę, zatem rozmiar ramki musi być większy niż

$$10^7 \cdot 0.00005s = 500$$

bitów, czyli dłuższy niż 63 bajty.

Zadanie 2 Rozważmy rundowy protokół Aloha we współdzielonym kanale, tj. w każdej rundzie każdy z n uczestników usiłuje wysłać ramkę z prawdopodobieństwem p. Jakie jest prawdopodobieństwo $P(p, n)$, że jednej stacji uda się nadać (tj. że nie wystąpi kolizja)? Pokaż, że $P(p, n)$ jest maksymalizowane dla $p = 1/n$. Ile wynosi $lim_{n\to\infty} P(1/n, n)$?

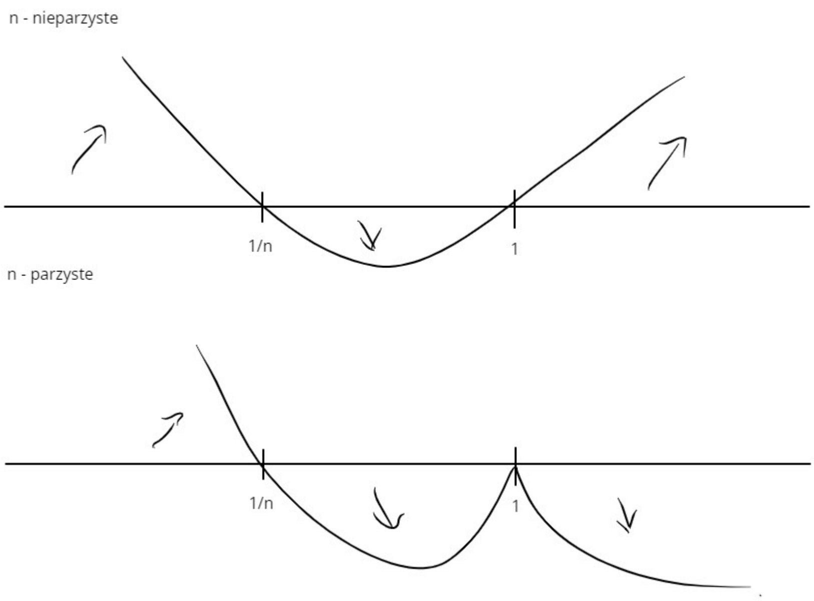
Rozwiązanie: Prawdopodobieństwo na to, że k-temu komputerowi uda się nadać to $p(1-p)^{n-1}$. Zatem

$$P(p,n) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}.$$

Żeby wyznaczyć maksima należy spojrzeć na miejsca zerowe pierwszej pochodnej.

$$\begin{gathered} P'(p,n) = n(1-p)^{n-1} - np(n-1)(1-p)^{n-2} = \\ = n(1-p)^{n-2}(1-p-np+p) = \\ = n(1-p)^{n-2}(1-np) \end{gathered}$$

Dwa miejsca zerowe: $p = 1$, $p = 1/n$. Monotoniczność można odczytać z rysunku:



Rozważamy p w zakresie od 0 do 1, zatem maksimum mamy dla $p = 1/n$. Następnie policzyć trzeba $lim_{n\to\infty} P(1/n, n)$.

$$lim_{n\to\infty} P(1/n, n) = lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}$$

Zadanie 3 Wyszukaj w sieci informację na temat zjawiska *Ethernet capture* i wytłumacz w jaki sposób ono powstaje. (Ty mianem określa się sytuację, w której jedna ze stacji nadaje znacznie częściej, choć wszystkie stacje używają algorytmu CSMA/CD.)

Rozwiązanie: Zjawisko ma miejsce kiedy jedna ze stacji przesyła dużą ilość danych i przejmuje łącze na kilkanaście kolejnych rund, gdyż z każdym wygranym konfliktem ma większą szansę na wygranie kolejnego.

Na przykład jeśli mamy łącze na którym nadawać chce jednocześnie A i B to powstanie konflikt, oba nadajniki wylosują time-out ze zbioru $\{0, 2^1 - 1\}$. Załóżmy, że wygrał A i nadał swój pierwszy pakiet. Przy próbie nadania drugiego znów wystąpi konflikt, dla B będzie to druga porażka, zatem wylosuje time-out ze zbioru $\{0, ..., 2^2 - 1\}$, dla A to pierwszy konflikt na tym pakiecie, dlatego znów wylosuje time-out z $\{0, 1\}$. A ma większe prawdopodobieństwo wygranej i z każdą kolejną wygraną próbą będzie miał większe szanse na wygranie kolejnej. W praktyce często się zdarza, że A wygrywa wszystkie konflikty, aż B się nie podda i przejdzie do wysyłania kolejnej ramki.

Mimo, że tworzy to niesprawiedliwość w przydziale czasu nadawania, to jest ona łagodzona przez fakt, że każdy nadajnik ma szansę przejąć łącze co jakiś czas. Poza tym zjawisko to ma największe szanse wystąpienia na łączach z niewielką liczbą nadajników.

Zadanie 4 Jaka suma kontrolna CRC zostanie dołączona do wiadomości 1010 przy założeniu, że CRC używa wielomianu $x^2 + x + 1$? A jaka jeśli używa wielomianu $x^7 + 1$?

Rozwiązanie: Używamy $G(x) = x^2 + x + 1$, czyli suma CRC będzie mieć 2 bity. Wiadomość $M(x) = x^3 + x$ przemnożona o x^2 i zwiększona o sumę $S(x)$ musi być podzielna przez $G(x)$, czyli chcemy

$$G(x) \mid M(x)x^2 + S(x)$$

Wystarczy dobrać $S(x)$ tak żeby wyzerowało resztę z dzielenia, a ponieważ działamy w $\mathbb{F}_2$ wystarczy że będzie równe reszcie z dzielenia.

$$S(x) = M(x)x^2 \mod G(x) = x$$

$S(x)$ kodujemy binarnie jako `10`.

Jeśli użyjemy $G(x) = x^7 + 1$ to suma CRC będzie mieć 7 bitów. Postępujemy analogicznie i dostaniemy

$$S(x) = M(x)x^7 \mod G(x) = x^3 + x$$

$S(x)$ kodujemy binarnie jako `0001010`.

Zadanie 5 Pokaż, że CRC-1, czyli 1-bitowa suma obliczana na podstawie wielomianu $G(x) = x + 1$, działa identycznie jak bit parzystości.

Rozwiązanie: Chcemy pokazać że jedno bitowa suma kontrolna CRC-1 będzie zachowywać się tak samo jak bit parzystości, tzn. będzie jedynką jeśli liczba zapalonych bitów będzie nieparzysta, a zerem wpp.

Można skorzystać z twierdzenia Bezouta, które mówi, że jeśli $\mathbb{F}$ jest ciałem, $\mathbb{F}[x]$ pierścieniem wielomianów o współczynnikach z tego ciała, zaś $f, (x - c) \in \mathbb{F}[x]$ wielomianami z tego pierścienia, to reszta z dzielenia f przez $(x - c)$ to $f(c)$.

W naszym przypadku dzielimy przez $x + 1$, zatem $c = 1$. Resztą z dzielenia, a co za tym idzie sumą kontrolną, będzie zatem wartość wielomianu $M(x)x$ w punkcie 1. Jeśli wielomian ten miał parzystą liczbę niezerowych współczynników to wynikiem będzie 0, wpp. 1, czyli suma zachowuje się jak bit parzystości.

Zadanie 6 Załóżmy, że wielomian $G(x)$ stopnia n stosowany w CRC zawiera składnik x^0. Pokaż, że jeśli wybierzemy dowolny odcinek długości n z wiadomości i dowolnie go zmodyfikujemy (zmienimy dowolną niezerową liczbę bitów w nim), to zostanie to wykryte. Czy taka własność zachodzi, jeśli $G(x)$ nie zawiera składnika równego x^0?

Rozwiązanie: Dowolne przekłamanie ciągu bitów długości nie większej niż n bitów to inaczej dodanie do oryginalnej wiadomości jakiegoś wielomianu $E(x)$. Jeśli j jest pozycją ostatniego przekłamanego bitu, to

$$E(x) = x^j e(x),$$

gdzie $e(x)$ to wielomian stopnia mniejszego niż n. Zmiana zostanie wykryta jeśli po dodaniu do oryginalnej wiadomości (podzielnej przez G) wielomianu $E(x)$, wiadomość stanie się niepodzielna. Czyli chcemy pokazać że $G(x) \nmid E(x)$. $G(x)$ jest względnie pierwsze z x^j, bo ma składnik x^0, zatem wystarczy pokazać, że nie dzieli $e(x)$.

Zauważmy, że

$$deg(G) > deg(e),$$

zatem resztą z dzielenia $e(x)$ przez $G(x)$ jest dokładnie $e(x)$, a jest ono niezerowe, czyli $G(x)$ nie dzieli też $E(x)$, więc błąd zostanie wykryty.

Własność nie musiałaby zajść, gdyby $G(x)$ nie miało składnika x^0, gdyż wtedy nie mielibyśmy względnej pierwszości. Np weźmy $G(x) = x$ i jakąś poprawną wiadomość z sumą kontrolną. Jeśli dokonamy przekłamania drugiego bitu $E(x) = x$ to nie wykryjemy tej zmiany bo podzielność się nie zmieni.

Zadanie 7 Pokaż, że kodowanie Hamming(7,4) umożliwia skorygowanie jednego przekłamanego bitu. Wskazówka: wystarczy pokazać, że odległość Hamminga między dwoma kodami wynosi co najmniej 3.

Rozwiązanie: W kodowaniu Hamming(7,4) przeplatamy bity parzystości p_1, p_2, p_4 z bitami danych d_3, d_5, d_6, d_7 tworząc wektor $[p_1, p_2, d_3, p_4, d_5, d_6, d_7]$. Bit p_1 jest bitem parzystości dla trójki bitów d_3, d_5, d_7, bit p_2 dla d_3, d_6, d_7, a bit p_4 dla d_5, d_6, d_7. W ogólności p_i jest bitem parzystości dla bitu d_x jeśli x ma jedynkę na $log_2(i) + 1$-tym bitcie od prawej. Chcemy pokazać, że dowolne dwa poprawne kody różnią się co najmniej na trzech bitach.

Obserwacja 1: Istnieje 16 poprawnych kodów, po jednym dla każdej możliwej wartości bitów danych.
Obserwacja 2: Każdy z bitów d_3, d_5, d_6, d_7 ma wpływ na co najmniej 2 bity parzystości.
Obserwacja 3: Żadne dwa różne bity spośród d_3, d_5, d_6 nie wpływają na dwa te same bity parzystości. Bit d_7 ma wpływ na trzy bity parzystości.

Weźmy dowolne dwa różne poprawne kody. Muszą one różnić się na bitach danych. Interesujące są tylko przypadki, w których różnią się na mniej niż trzech miejscach, więc albo dokładnie na jednym, albo dokładnie na dwóch (bo wpp mamy tezę za darmo).

1. Jeśli różnią się w dokładnie jednym miejscu, to z obserwacji 2 wynika, że kody muszą różnić się też na co najmniej dwóch bitach parzystości.

2. Jeśli różnią się na dwóch bitach danych i żadnym z nich nie jest d_7, to wiemy że co najmniej jeden bit parzystości (jeden z tych na które oba nie mają wpływu), też musi być inny.

3. Jeśli różnią się na dwóch bitach danych d_i, d_7 to różnić się będą też na bitcie parzystości na który nie miało wpływu d_i, gdyż d_7 ma wpływ na wszystkie trzy.

W każdym przypadku kody różnią się co najmniej 3 bitami.

Zadanie 8 Pokaż, że suma CRC stosująca wielomian $G(x) = x^3 + x + 1$ wykryje wszystkie podwójne błędy (zmianę wartości dwóch bitów), które są oddalone od siebie o nie więcej niż 6 bitów (tj. pomiędzy dwoma zmienianymi bitami jest nie więcej niż 5 innych bitów).

Rozwiązanie: Przekłamanie dwóch bitów oddalonych o mniej niż 6 bitów to inaczej dodanie do oryginalnej wiadomości jakiegoś wielomianu $E(x)$. Jeśli j jest pozycją ostatniego przekłamanego bitu, to

$$E(x) = x^j e(x),$$

gdzie $e(x)$ to wielomian w postaci $x^n + 1$, stopnia mniejszego lub równego 6. Chcemy pokazać, że po dodaniu $E(x)$, $G(x)$ nie podzieli wiadomości, czyli że $G(x) \nmid E(x)$.

$G(x)$ jest względnie pierwsze z x^j, zatem wystarczy pokazać, że $G(x)$ nie dzieli $e(x)$. Można sprawdzić każdy możliwy stopień tego wielomianu.

1. Dla $n \in \{1, 2\}$ wielomian jest niepodzielny przez $G(x)$, bo ma mniejszy stopień.

2. Dla $n = 3$ reszta x.

3. Dla $n = 4$ reszta $x^2 + x$

4. Dla $n = 5$ reszta $x^2 + x$

5. Dla $n = 6$ reszta x

W każdym przypadku dostajemy resztę zatem zmodyfikowanie dwóch bitów zostałoby wykryte.