2\. a) $\Omega = \{a, b, c\}$

$$F_1 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$F_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$$

$$F_3 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}$$

$$F_4 = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \Omega\}$$

b)

$$X(x) = \begin{cases} 1 & \text{j. } x=a \\ 0 & \text{j. } x=b \\ 1 & \text{j. } x=c \end{cases} \qquad F = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}$$

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x=a \\ 1 & \text{jeśli } x=b \\ 0 & \text{jeśli } x=c \end{cases}$$

$$Y^{-1}([1, \infty)) = \{a, b\} \notin F$$

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. Tydzień rozpoczynający się 9. marca

Zadania

1. Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.
   (a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.
   (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap_{k \in N} A_k \in \Sigma$.
2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.
   (a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.
   (b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.
3. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $S = \{1, 4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ-ciało zbiorów zawierające S.
4. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

5. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2]$	$(-2; 3]$	$(3; 5]$	$(5; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

   Podać postać funkcji gęstości $f(x)$.
6. Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $E(aX + b) = a\,E(X) + b$.
7. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $E(aX + b) = a\,E(X) + b$.
8. **2p.** Sprawdzić, że
   (a) $B(p, q+1) = B(p, q)\,\frac{q}{p+q}$,
   (b) $B(p, q) = B(p, q+1) + B(p+1, q)$.
9. **2p.** Udowodnić, że $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p, q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

<u>Def.</u> **Funkcją beta** nazywamy wartość całki

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \quad p > 0,\ q > 0.$$

Witold Karczewski