MDL Lista 12

Cezary Świtała

14 stycznia 2021

Zadanie 2 *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.
Uwaga: To zadanie nie jest tak proste, jak się wydaje.

Pokażemy implikację w obie strony.

$\Rightarrow$) Jeśli dany graf zawiera cykl Eulera, to każde jego cięcie minimalne zawiera parzystą liczbę krawędzi.

Dowód: Weźmy dowolne cięcie minimalne. Dzieli ono graf na dwie mniejsze spójne G_1 i G_2. Weźmy teraz dowolny wierzchołek v leżący na cyklu Eulera. Bez straty ogólności załóżmy, że należy on do G_1. Zauważamy, że skoro cykl Eulera przechodzi po wszystkich krawędziach grafu, to w szczególności tych które należą do cięcia, a za każdym razem kiedy jesteśmy w grafie G_1 i przechodzimy po krawędzi należącej do cięcia, to przemieszczamy się do grafu G_2 i na odwrót jeśli jesteśmy w grafie G_2, to znajdziemy się w grafie G_1. Zatem jeśli zaczniemy poruszać się po cyklu z wierzchołka v należącego do grafu G_1, to będziemy potrzebować parzystej liczby krawędzi w cięciu, aby cykl mógł powrócić do wierzchołka v (inaczej „utknęlibyśmy” w grafie G_2), co dowodzi implikacji w prawą stronę.

$\Leftarrow$) Jeśli w danym grafie wszystkie cięcia minimalne zawierają parzystą liczbę krawędzi, to graf ten zawiera cykl Eulera.

Dowód: Z wykładu wiemy, że graf zawiera cykl Eulera, wtedy i tylko wtedy kiedy wszystkie jego wierzchołki mają parzysty stopień, zatem wystarczy pokazać, że jeśli w danym grafie wszystkie cięcia minimalne zawierają parzystą liczbę krawędzi, to wszystkie wierzchołki tego grafu mają parzysty stopień. Załóżmy nie wprost, że wszystkie cięcia minimalne zawierają parzystą liczbę krawędzi i istnieje wierzchołek o nieparzystym stopniu, oznaczmy go v.

Lemat 1 Zauważamy, że każda krawędź wychodząca z v należy do jakiegoś cięcia minimalnego, wynika to z tego, że wystarczy pogrupować sąsiadów v, tak że w każdej grupie dowolne dwa wierzchołki posiadają ścieżkę ją łączącą, nieprzechodzącą przez v, wtedy usunięcie krawędzi do takiej grupy jest cięciem minimalnym, gdyż po ich usunięciu wierzchołki z grupy tracą połączenie z innymi sąsiadami v, a pominięcie jakiejś sprawia że graf się uspójnia. Każdy wierzchołek będzie należał do jakiejś grupy (choćby jednoelementowej), zatem każda krawędź będzie należała do jakiegoś cięcia minimalnego.

Lemat 2 Kolejna obserwacja, to że dowolne dwa różne cięcia minimalne składające się z wierzchołków wychodzących z v nie posiadają wspólnych krawędzi. Gdyby było inaczej istniałaby krawędź należąca do obu cięć, z wierzchołkiem v' na drugim końcu, przez który można by podróżować pomiędzy wierzchołkami w grafach odcinanych od grafu z wierzchołkiem v, zatem żadne z cięć z osobna nie rozspójniłoby grafu, więc nie byłoby cięciem.

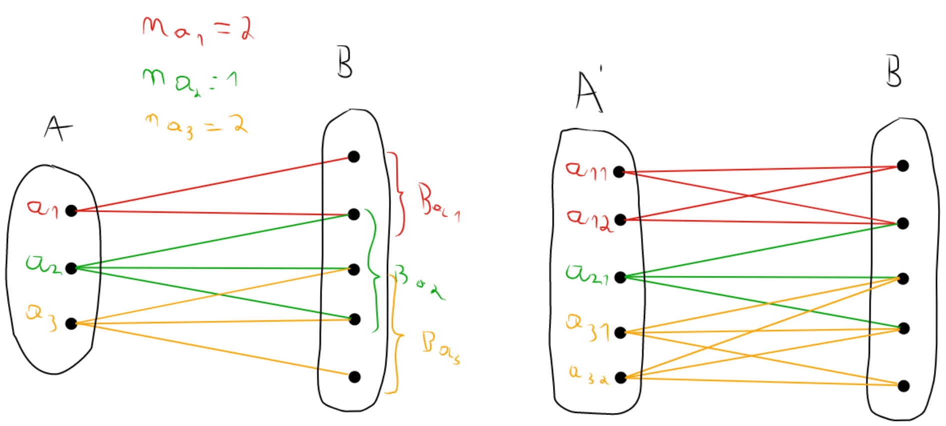
Weźmy zbiór krawędzi wychodzących z v, wiemy że ma on nieparzystą moc, bo stopień v jest nieparzysty. Korzystając z lematu 2, możemy powiedzieć, że jak z tego zbioru usuniemy te krawędzie, które należą do jakiegoś cięcia minimalnego o parzystej liczbie krawędzi, to otrzymamy zbiór o nieparzystej mocy (warto odnotować, że zatem posiada co najmniej jedną krawędź), bo odejmujemy tylko parzyste liczby krawędzi i żadnej nie odejmujemy dwa razy (bo nie ma wspólnych). Z lematu 1 wiemy, że każda krawędź należy do jakiegoś cięcia minimalnego, więc krawędzie które nam zostały należą do cięć minimalnych o nieparzystej liczbie krawędzi, co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że wszystkie cięcia minimalne mają parzystą liczbę krawędzi, i jednocześnie kończy dowód implikacji w lewą stronę.

Zadanie 3 (Problem haremu). Niech A i B będą dwoma rozłącznymi zbiorami osób. Przypuśćmy, że każda osoba a należąca do zbioru A chce poślubić (naraz) co najmniej $n_a \leq 1$ osób ze zbioru B. Jaki jest warunek konieczny i wystarczający, aby ten problem miał rozwiązanie? Wskazówka: Zastosuj klonowanie i tw. Halla.

Zadanie można z interpretować na dwa sposoby, albo elementy B są nierozróżnialne. W tej wersji tego problemu wystarczy, że $|B| \geq \sum_{a \in A} n_a$, wtedy każdemu elementowi $a \in A$ jesteśmy w stanie przyporządkować n_a nieprzyporządkowanych żadnemu elementowi z A, elementów z B, albo są rozróżnialne, wtedy dodatkowo żadne dwa elementy A nie mogą chcieć poślubić tego samego elementu B.

Można też przyjąć, że tak na prawdę każdy element $a \in A$ chce poślubić naraz $n_a \geq 1$ elementów ze zbioru B_a, gdzie $B_a \subseteq B$, $|B_a| \geq n_a$, tak jak było w oryginalnej wersji tego zadania, wtedy zadanie jest ciekawsze i ma sens w kontekście wskazówki.

Tworzymy graf dwudzielny G, na który będą składać się zbiory A' i B, gdzie A' to zbiór klonów elementów zbioru A, w którym występują one n_a razy, a B to zbiór z treści zadania. Krawędź między elementem a_{nk} zbioru A', a elementem b zbioru B, będzie oznaczać że $b \in B_{a_n}$, czyli że oryginalny element, którego klonem jest a_{nl} chce poślubić b.



Rozwiązanie tego problemu sprowadza się teraz do znalezienia pełnego skojarzenia A' z B w grafie G. Z warunku Halla, wiemy że takie istnieje wtedy i tylko wtedy kiedy $|N(A'')| \geq |A''|$ dla każdego A'' będącego podzbiorem A'. Co jest warunkiem koniecznym i wystarczającym do rozwiązania tego problemu.

Zadanie 5 Zmodyfikuj algorytm Dijkstry tak, by działał dla grafów skierowanych.

Przypomnijmy algorytm Dijkstry z wykładu. Dla spójnego grafu $G = (V, E)$ i funkcji $c : E \to R \geq 0$ zwracającej wagę krawędzi i wierzchołka startowego s. Algorytm znajdujący wagę najkrótszej ścieżki dla każdego wierzchołka $v \in V$ ma postać

$S \leftarrow \{s\}$;
$d(s) \leftarrow 0$;
dla każdego sąsiada v wierzchołka s: $t(v) \leftarrow c(s, v)$;
dla pozostałych wierzchołków: $t(v) \leftarrow \infty$;
while $S \neq V$ **do**
  $u \leftarrow argmin\{t(u) : u \notin S\}$;
  dodaj u do S;
  $d(u) \leftarrow t(u)$;
  foreach *sąsiad* $v \notin S$ *wierzchołka* v **do**
    $t(v) \leftarrow min\{t(v), d(u) + c(u, v)\}$
  end
end

Gdzie w każdej iteracji $d(v)$ to waga najkrótszej ścieżki z s do v, dla wierzchołków $v \in S$, a $t(v)$ to waga najkrótszej prawie S-owej ścieżki z s do v.

Na wykładzie został przedstawiony indukcyjny dowód poprawności tego algorytmu, który nie używał faktu że graf nie jest skierowany, wystarczy zatem zmodyfikować algorytm tak aby jako sąsiadów dowolnego wierzchołka v brał pod uwagę tylko takie wierzchołki w, że istnieje krawędź (v, w).

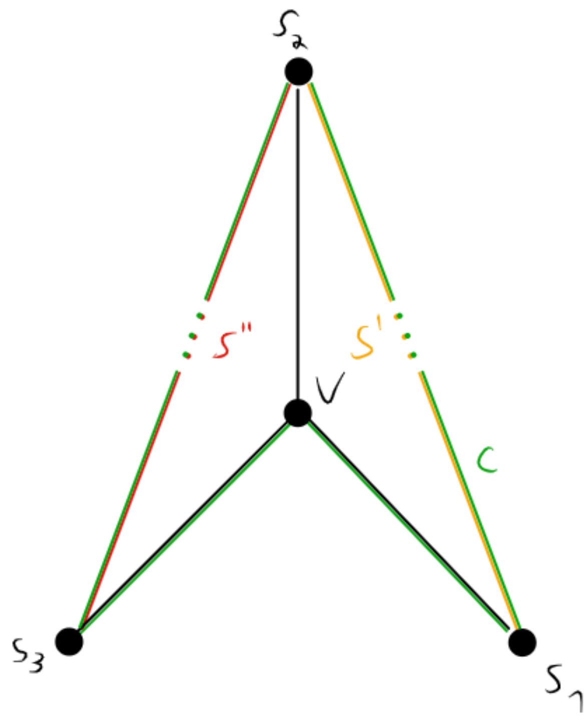
$S \leftarrow \{s\}$;
$d(s) \leftarrow 0$;
dla każdego sąsiada v wierzchołka s, takiego że istnieje krawędź (s, v): $t(v) \leftarrow c(s, v)$;
dla pozostałych wierzchołków: $t(v) \leftarrow \infty$;
while $S \neq V$ **do**
  $u \leftarrow argmin\{t(u) : u \notin S\}$;
  dodaj u do S;
  $d(u) \leftarrow t(u)$;
  foreach *sąsiad* $v \notin S$ *wierzchołka* u*, taki że istnieje* $(u, v) \in E$ **do**
    $t(v) \leftarrow min\{t(v), d(u) + c(u, v)\}$
  end
end

Dowód poprawności jest taki sam jak ten przedstawiony na wykładzie dla poprzedniej wersji.

Zadanie 8 Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl parzystej długości.

Weźmy najdłuższą ścieżkę w grafie G, oznaczmy ją S, oraz oznaczmy jeden z wierzchołków będących jej końcami v. $deg(v) = 3$, zatem ma on trzech sąsiadów – s_1, s_2, s_3. Każdy z nich musi leżeć na najdłuższej ścieżce, bo inaczej do S można by dołączyć takiego sąsiada, co wydłużyłoby ją i spowodowało sprzeczność z faktem, że jest najdłuższa.

Załóżmy, że sąsiedzi v indeksowani są według kolejności w jakiej występują na ścieżce S, wtedy s_3 to taki wierzchołek, że każdy inny sąsiad leży od niego wcześniej na ścieżce S. Zauważamy, że możemy teraz stworzyć cykl biorąc początek ścieżki S od v do s_3 (s_3 nie mogło być bezpośrednio po v, bo wcześniej leżeli wszyscy inni sąsiedzi v) i przechodząc znowu do v. Cykl ten nazwiemy C.



Ścieżki z s_1 do s_2 i z s_2 do s_3 oznaczamy odpowiednio S' i S''. Zauważamy, że za ich pomocą również możemy stworzyć cykle, odpowiednio – C' i C'', przechodząc do nich z wierzchołka v do jednego końca, i wracając do v drugim końcem (końce to sąsiedzi v).

Wystarczy teraz pokazać, że w każdym przypadku jeden z cykli C, C', C'' ma parzystą długość. Rozpatrzmy zatem parzystości długości $l(S')$ i $l(S'')$, gdzie $l(K)$ oznacza długość ścieżki K.

1. $l(S')$ i $l(S'')$ mają taką samą parzystość. Wtedy cykl C ma parzystą długość, bo suma $l(S') + l(S'')$ jest parzysta, a $l(C) = l(S') + l(S'') + 2$ (dodajemy dwie krawędzie (v, s_1) i (v, s_3)).

2. tylko jedna liczba z $l(S')$ i $l(S'')$ jest parzysta. Jeśli jest to $l(S')$, wtedy C' ma parzystą długość, bo $l(C') = l(S') + 2$ (dodajemy krawędzie (v, s_1) i (v, s_2)), a jeśli jest to $l(S'')$, wtedy C'' ma parzystą długość, bo $l(C'') = l(S'') + 2$ (dodajemy krawędzie (v, s_2) i (v, s_3)).

W obu przypadkach istnieje cykl o parzystej długości, co kończy dowód.

Zadanie 9 nk studentów, przy czym $k \geq 2$, jest podzielonych na n towarzystw po k osób i na $n \geq 2$ kół naukowych po k osób każde. Wykaż, że da się wysłać delegację $2n$ osób tak, by każde towarzystwo i każde koło naukowe było reprezentowane. (Każdy student należy do jednego towarzystwa i jednego koła.) Jeden student może reprezentować tylko jedną grupę (typu koło lub towarzystwo).

Niech T będzie zbiorem towarzystw, K zbiorem kół, S zbiorem studentów, zbiór R sumą zbiorów T i K, a $G = (S, R, E)$ grafem dwudzielnym, gdzie krawędź między studentem a organizacją, oznacza że do niej należy.

Problem znalezienia delegacji można teraz przedstawić jako szukanie pełnego skojarzenia R z S w grafie G. Z twierdzenia Halla wiemy, że takie istnieje wtedy i tylko wtedy kiedy dla dowolnego podzbioru $R' \subseteq R$ zachodzi $|R'| \leq |N(R')|$.

Załóżmy nie wprost, że nie ma takiego skojarzenia, czyli $\exists_{R' \subseteq R} |R'| > |N(R')|$. Weźmy zatem takie R' i spróbujemy oszacować od dołu $|N(R')|$. Z każdego wierzchołka w R' wychodzą dokładnie k krawędzie, bo do każdej organizacji należy k studentów. Mogą się one jednak pokrywać jeśli w R' znajdują się zarówno koła jak i towarzystwa. Najmniej sąsiadów R' uzyskamy zatem, jeśli znajdą się w nim koła i towarzystwa do których zapisani są Ci sami studenci, czyli jeśli $N(\{t | t \in R' \wedge t \in T\}) = N(\{k | k \in R' \wedge k \in K\})$, z dokładnością do k studentów, jeśli moc R' jest nieparzysta, bo wtedy jednych musi być o k więcej. Widzimy teraz, że minimalna moc $N(R')$ to $k \left\lceil \frac{|R'|}{2} \right\rceil$. Otrzymujemy nierówność

$$|R'| > |N(R')| \geq k \left\lceil \frac{|R'|}{2} \right\rceil$$

czyli

$$|R'| > k \left\lceil \frac{|R'|}{2} \right\rceil$$

Skoro $k \left\lceil \frac{|R'|}{2} \right\rceil > k\frac{|R'|}{2}$

$$|R'| > k\frac{|R'|}{2}$$

I ostatecznie skoro $k \geq 2$

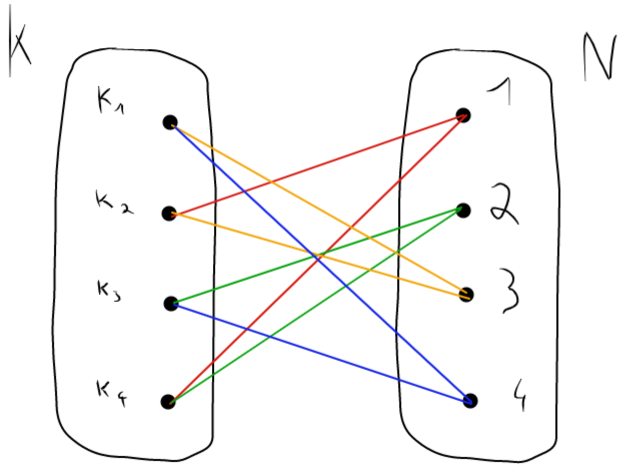
$$|R'| > k\frac{|R'|}{2} \geq |R'|$$

Czyli $|R'| > |R'|$, mamy sprzeczność, więc warunek Halla musiał być spełniony, więc istnieje takie skojarzenie, czyli istnieje rozwiązanie tego problemu.

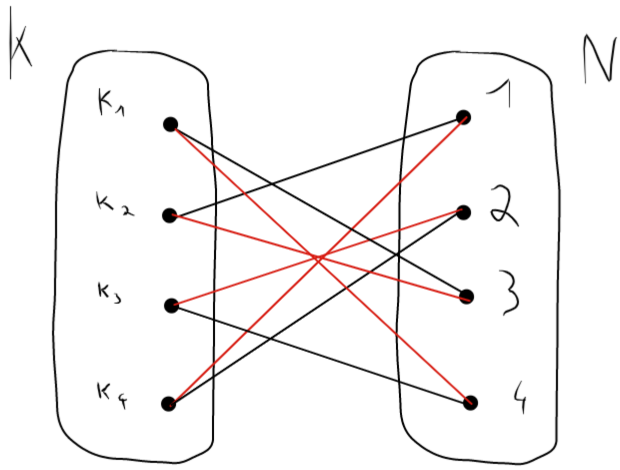
Zadanie 10 *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, ..., n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach , $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, ..., n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.
Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?
Wskazówka: Przydatne mogą okazać się skojarzenia.

Zbudujmy graf dwudzielny G, na którego składać się będą dwa zbiory wierzchołków – K oznaczający zbiór kolumn i zbiór liczb $N = \{1, 2, ..., n\}$. Krawędź z liczby do kolumny oznaczać będzie, że liczba nie pojawia się jeszcze w tej kolumnie. Przykład:

$$\begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



Problem sprowadza się teraz do znalezienia dowolnego doskonałego skojarzenia w tym grafie, gdyż da nam ono takie przyporządkowanie każdej liczby do kolumny, że każda z liczb nie występowała wcześniej w danej kolumnie, czyli definicja prostokąta łacińskiego zostanie spełniona i będziemy mogli go użyć jako nowego wiersza.



Nowy wiersz:

4 3 2 1

Wystarczy teraz pokazać, że zawsze jesteśmy w stanie znaleźć jakieś doskonałe skojarzenie. Z warunku Halla wiemy, że takie skojarzenie istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy $|N(K')| \geq |K'|$ dla każdego K' będącego podzbiorem K i $|N(N')| \geq |N'|$ dla każdego N' będącego podzbiorem N.

Weźmy zatem dowolny taki graf dwudzielny $G = (K, N, E)$ opisujący prostokąt łaciński $n \times m$, gdzie $m < n$. Weźmy dowolny podzbiór K, nazwijmy go K'. Zauważamy, że w każdej kolumnie nie występuje dokładnie $n - m$ liczb. Zatem $\forall_{k \in K'} deg(k) = n - m$, czyli zbiór krawędzi wychodzących z K', oznaczony $E_{K'}$, będzie miał moc $|K'|(n - m)$. Podobnie jest dla $N(K')$, każda liczba również nie występuje dokładnie w $n - m$ kolumnach, zatem $\forall_{n \in N(K')} deg(n) = n - m$ i zbiór krawędzi wychodzących z $N(K')$ – $E_{N(K')}$, ma moc $|N(K')|(n - m)$, zauważamy też że $E_{N(K')}$ zawiera na pewno wszystkie krawędzie z $E_{K'}$, z czego wnioskujemy nierówność

$$|N(K')|(n - m) \geq |K'|(n - m)$$

Następnie dzielimy przez $n - m$

$$|N(K')| \geq |K'|$$

Co chcieliśmy otrzymać.

Dowód dla dowolnego podzbioru N byłby zupełnie symetryczny i otrzymamy z niego $|N(N')| \geq |N'|$ dla dowolnego $N' \subseteq N$. Czyli warunek Halla jest spełniony, więc doskonałe skojarzenie istnieje, co gwarantuje możliwość dodania nowego wiersza, zgodnie z rozumowaniem wyżej.