MDL Lista 13

Cezary Świtała

28 stycznia 2021

Zadanie 1 Udowodnij uogólnienie wzoru Eulera dla grafu planarnego z k składowymi spójności.

Uogólnienie wzoru Eulera: Niech G będzie grafem planarnym o n wierzchołkach, m krawędziach, f ścianach i k spójnych składowych. Wówczas $n - m + f = k + 1$.

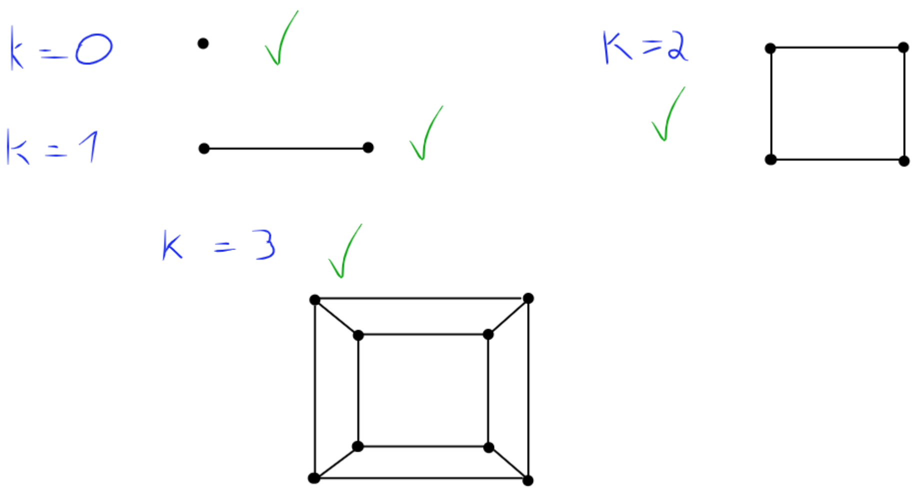
Wiemy ze wzoru Eulera, że dla każdej spójnej składowej G_k zachodzi $n_k - m_k + f_k = 2$, gdzie n_k, m_k i f_k to liczba wierzchołków, krawędzi i ścian danej składowej. Zauważamy, że każda składowa ma wspólną „zewnętrzną" ścianę z innymi. Zatem przy sumowaniu będziemy musieli odjąć $k - 1$ powtórzeń tej ściany.

$$n - m + f = \sum_{i=1}^{k} (n_i - m_i + f_i) - (k - 1) = 2k - k + 1 = k + 1$$

Co kończy dowód.

Zadanie 3 Dla jakich wartości k, kostka Q_k jest grafem planarnym? Odpowiedź uzasadnij.

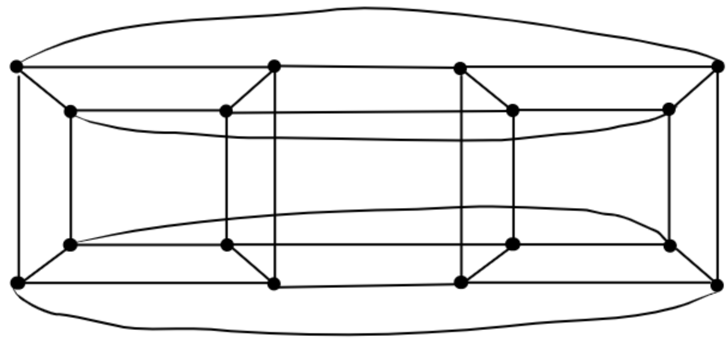
Sprawdźmy czy kostka Q_k jest grafem planarnym dla kilku pierwszych k.



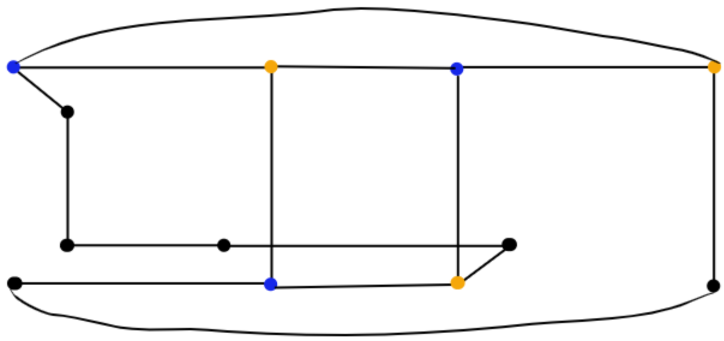
Problem pojawia się przy Q_4, gdyż zawiera on podgraf homeomorficzny z $K_{3,3}$, a z wykładu wiemy, że dowolny graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z $K_{3,3}$ lub K_5.

Obecność takiego podgrafu pokażemy przez poniższy przykład (na następnej stronie).

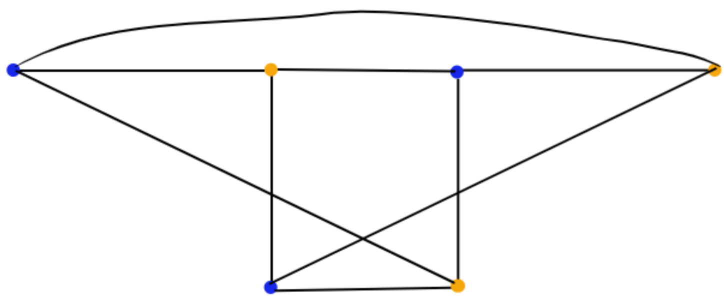
Q_4



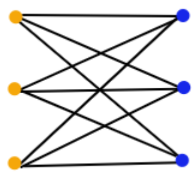
Wybieramy podgraf



Skracamy ścieżki zawierające czarne wierzchołki,
usuwając je (dopuszczalne przy homeomorfizmie)



Otrzymujemy graf $K_{3,3}$



Zatem Q_4 nie jest grafem planarnym bo zawiera graf homeomorficzny z $K_{3,3}$, a co za tym idzie żadne Q_k dla $k \geq 4$ nie będzie grafem planarnym, bo będzie zawierać w sobie Q_4 – z konstrukcji.

Zadanie 5 Niech G będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach ($n \geq 3$) i niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w grafie G, dla $i \geq 0$.

(a) Wykaż nierówność: $\sum_{i \in \mathbb{N}} (6-i)t_i \geq 12$.

(b) Wywnioskuj stąd, że graf G ma co najmniej trzy wierzchołki o stopniach 5 lub mniej.

Dodatkowo zakładam, że graf jest prosty, w innym przypadku powyższe nie działają, bo można np. dorysowywać bardzo dużo pętel na każdym wierzchołku grafu K_3.

(a)

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (6-i)t_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} 6t_i - it_i = 6\sum_{i \in \mathbb{N}} t_i - \sum_{i \in \mathbb{N}} it_i$$

$\sum_{i \in \mathbb{N}} t_i = n$, ponieważ jest to suma po liczbie wierzchołków każdego stopnia. $\sum_{i \in \mathbb{N}} it_i$ można zapisać inaczej $\sum_{v \in V} deg(v)$, gdyż zauważamy że dla każdego stopnia jest on mnożony przez liczbę wierzchołków o takim stopniu, co da nam sumę stopni wszystkich wierzchołków, a z wykładu wiemy, że jest ona równa $2|E|$.

$$6\sum_{i \in \mathbb{N}} t_i - \sum_{i \in \mathbb{N}} it_i = 6n - 2|E|$$

Wracamy do nierówności.

$$6n - 2|E| \geq 12$$

$$6n - 12 \geq 2|E|$$

$$3n - 6 \geq |E|$$

Z wykładu wiemy, że w prostym grafie planarnym o $n \geq 3$ wierzchołkach liczba krawędzi nie przekracza $3n-6$, zatem nierówność jest prawdziwa.

(b) Załóżmy nie wprost, że graf ma mniej niż 3 wierzchołki o stopniu 5 lub mniej i co za tym idzie, ma co najmniej $n-2$ wierzchołków o stopniu co najmniej 6. Z punktu (a), wiemy że $\sum_{i \in \mathbb{N}} (6-i)t_i \geq 12$. Oraz z faktu, że graf jest spójny, że $\forall_{v \in V} deg(v) \geq 1$.

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (6-i)t_i = \sum_{i=1}^{5} (6-i)t_i + \sum_{i=6}^{\infty} (6-i)t_i$$

$\sum_{i=1}^{5} (6-i)t_i \leq 10$, gdyż suma ta jest największa, równa 10, gdy mamy dwa wierzchołki o stopniu 1 (nie ma wierzchołków o stopniu 0, bo graf jest spójny). $\sum_{i=6}^{\infty} (6-i)t_i \leq 0$, gdyż t_i jest nieujemne, a $(6-i)$ niedodatnie dla $i \geq 6$, więc sumujemy tylko niedodatnie liczby. Stąd

$$\sum_{i=1}^{5} (6-i)t_i + \sum_{i=6}^{\infty} (6-i)t_i \leq 10$$

Mamy sprzeczność z punktem (a), czyli graf musiał mieć przynajmniej 3 wierzchołki o stopniu 5 lub mniej.

Zadanie 8 Czy w dowodzie wzoru Eulera można by ściągnąć do jednego wierzchołka końce jakiejś krawędzi e, ale e nie usuwać?

Zaczniemy od przypomnienia dowodu z wykładu. Dowód będzie przez indukcję po liczbie wierzchołków. Teza: dla grafu spójnego planarnego spełniony jest wzór Eulera.

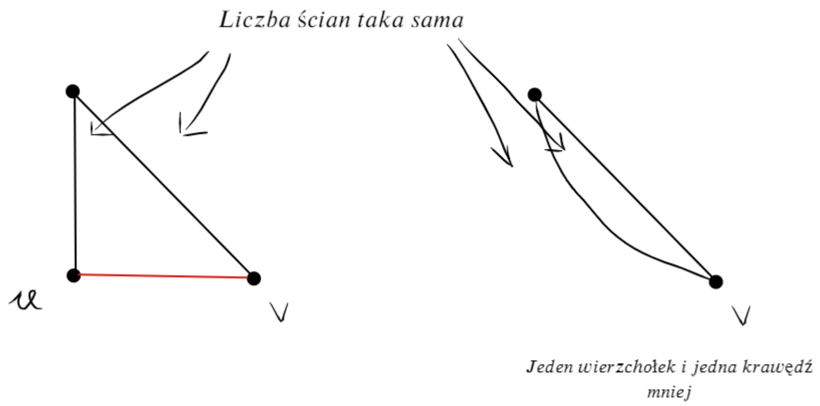
Podstawa. Dla $n = 1$. Mamy jeden wierzchołek, niech m będzie liczbą krawędzi (pętelek). Każda pętelka tworzy nową ścianę więc mamy $f = m + 1$ ścian. Zatem

$$n - m + f = 1 - m + m + 1 = 1 + 1 = 2$$

Czyli wzór Eulera zachodzi.

Krok. Weźmy dowolne n załóżmy że dla spójnego planarnego grafu G_n o n wierzchołkach teza zachodzi, pokażemy że implikuje to jej prawdziwość dla $n+1$. Weźmy dowolny graf spójny planarny G_{n+1} o $n+1$ wierzchołkach niech m będzie równe liczbie jego krawędzi, a f – ścian.

Wybierzmy dowolną krawędź e o w końcach w wierzchołkach v u u. Wykonujemy na niej operację "ściągania"(tak jak została zdefiniowana na wykładzie). Zauważamy, że wtedy zmniejsza się liczba krawędzi i wierzchołków o 1. Niezaburzona zostaje również planarność i spójność grafu.



Otrzymujemy zatem spójny, planarny, n-wierzchołkowy graf, czyli z założenia zachodzi dla niego wzór Eulera. Czyli spełniona jest równość

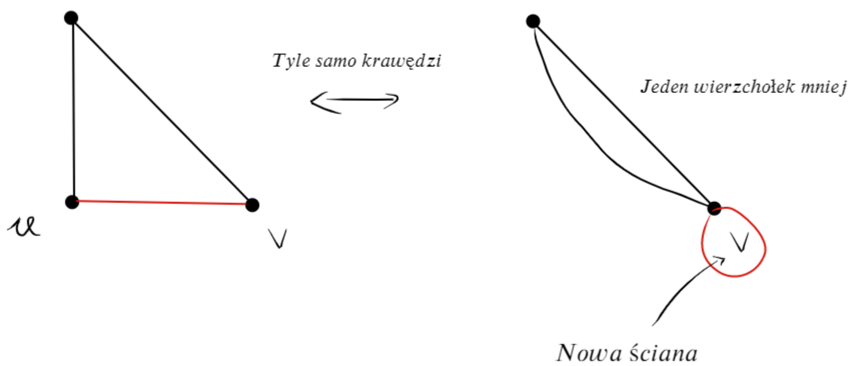
$$n - (m-1) + f = 2$$

$$n - m + 1 + f = 2$$

$$(n+1) - m + f = 2$$

Po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy wzór Eulera dla grafu G_{n+1}, czyli teza jest spełniona dla $n+1$. Co kończy dowód.

Alternatywnie: W tereści zadania mamy pytanie o to czy mogliśmy pozostawić krawędź e przy jej ściąganiu. Załóżmy, że ściągamy do wierzchołka v, jeśli pozostawimy krawędź e to utworzy ona na nim pętelkę, a co za tym idzie, nową ścianę. Liczba krawędzi pozostanie oczywiście taka sama.



Znów otrzymujemy spójny planarny graf n wierzchołkowy o $f+1$ ścianach i m krawędziach. Czyli taki, dla którego działa teza, zatem moglibyśmy dla niego zapisać równość wynikającą ze wzoru Eulera.

$$n - m + f + 1 = 2$$

$$(n+1) - m + f = 2$$

I znów otrzymujemy równanie Eulera dla większego grafu, zatem zostawienie krawędzi e nie przeszkadza w dowodzie.

Zadanie 2 Wykaż, że graf i jego graf dopełniający nie mogą być jednocześnie grafami planarnymi, jeśli graf G ma co najmniej 11 wierzchołków.

Tutaj zakładam, że grafy są proste, z definicji dopełnienia.

Z wykładu wiemy, że w prostym grafie planarnym o $n \geq 3$ wierzchołkach, liczba krawędzi m tego grafu nie przekracza $3n - 6$.

Niech m będzie liczbą krawędzi w grafie G. W dopełnieniu będzie zatem $\binom{n}{2} - m$ krawędzi (czyli wszystkie pozostałe). Bez utraty ogólności załóżmy, że graf G jest tym, który zawiera co najmniej połowę wszystkich możliwych krawędzi.

$$|E(G)| \geq \frac{\binom{n}{2}}{2}$$

Jeśli G byłby planarny, to musiałoby zachodzić

$$|E(G)| \leq 3n - 6$$

Zatem spełniona musiałaby być również nierówność

$$\frac{\binom{n}{2}}{2} \leq 3n - 6$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2! \cdot 2} \leq 3n - 6$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} \leq 12n - 24$$

$$n(n-1) \leq 12n - 24$$

$$n^2 - 13n + 24 \leq 0$$

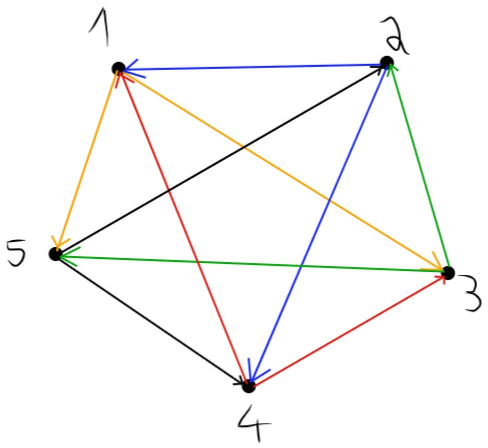
Po rozwiązaniu nierówności otrzymujemy, że n musi należeć do przedziału od $\frac{13-\sqrt{73}}{2}$ do $\frac{13+\sqrt{73}}{2}$, czyli dla naturalnych n od 2 do 10, mamy sprzeczność, bo graf ma co najmniej 11 wierzchołków.

Zadanie 12 Pokaż, że dla każdego nieparzystego naturalnego n istnieje turniej n - wierzchołkowy, w którym każdy wierzchołek jest *królem*. Wierzchołek jest królem, jeśli można z niego dojść do każdego innego wierzchołka w grafie po ścieżce skierowanej o długości co najwyżej 2.

Rozpatrzmy taki turniej n-wierzchołkowy dla nieparzystego n, że każdy wierzchołek v ma $outdeg(v) = indeg(v) = (n-1)/2$. Wiemy, że istnieje taki turniej, gdyż możemy wprost powiedzieć jak go skonstruować: dla dowolnego nieparzystego n, tworzymy n wierzchołków, numerujemy je od 1 od n.

Z każdego wierzchołka będziemy prowadzić krawędzie wychodzące do co drugiego, zgodnie z numeracją, wierzchołka, aż nie wykonamy pełnego okrążenia (poruszamy się po cyklu stworzonym z numerów tych wierzchołków, czyli po przekroczeniu n poruszamy się dalej aż nie przekroczymy numeru danego wierzchołka). Przykład na kolejnej stronie.

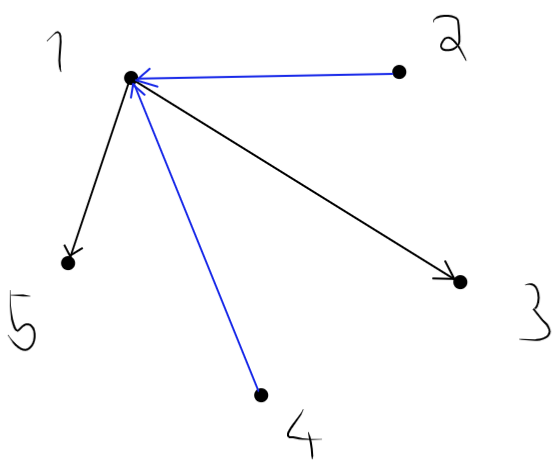
Przykład dla $n = 5$



Aby pokazać, że stopień każdego wierzchołka to dokładnie $(n-1)/2$, weźmy dowolny wierzchołek v, bez straty ogólności załóżmy że został on oznaczony numerem jeden. Zgodnie z podaną konstrukcją, poprowadzimy z niego krawędzie wychodzące do co drugiego wierzchołka, czyli w tym przypadku, do wierzchołków o nieparzystym numerze innym niż 1, kończąc gdy przekroczymy jedynkę. Liczb nieparzystych różnych od 1 zaczynając od 1 do n jest $(n-1)/2$. Zatem $outdeg(v) = (n-1)/2$.

Zauważamy, że rysując wychodzące krawędzie dla innych wierzchołków trafimy na jedynkę tylko z wierzchołków o parzystym numerze, bo wszystkich wierzchołków jest nieparzyście wiele. Parzystych jest $(n-1)/2$, czyli $indeg(v) = (n-1)/2$.

Krawędzie wychodzące i wchodzące do wierzchołka 1



Dalsza część zadania przebiegać będzie analogicznie do zadania 3 z listy 11.

Skoro wiemy, że istnieje taki turniej, w którym każdy wierzchołek ma taki sam stopień wychodzący, to weźmy dowolny wierzchołek v tego turnieju. Jeśli jest to jedyny wierzchołek, to oczywiście da się dojść z niego do każdego wierzchołka po ścieżce długości dwa, bo nie ma żadnych innych. Jeśli istnieją inne wierzchołki to weźmy jeden i nazwijmy go w. Pokażemy, że można przejść do niego ścieżką o długości co najwyżej 2 z wierzchołka v. Rozważmy przypadki.

1. W tym turnieju krawędź między v i w, jest skierowana od v do w, czyli istnieje ścieżka długości 1, zatem w tym przypadku jest to prawda, że można dotrzeć ścieżką o długości co najwyżej 2 z v do w.

2. W przeciwnym wypadku, skoro jest to turniej to musi istnieć krawędź między wierzchołkami v i w, ale widocznie jest ona skierowana z w do v. Zatem musi istnieć co najmniej jeden inny wierzchołek do którego da się dojść z v, gdyż inaczej v nie miałoby tego samego stopnia wychodzącego co w. Zbiór takich wierzchołków, do których możemy dotrzeć z v nazwiemy A.

Załóżmy nie wprost, że nie możemy dotrzeć z wierzchołka v do wierzchołka w przez żaden z wierzchołków ze zbioru A. Oznaczałoby to, że wierzchołek w miałby krawędź wychodzącą do każdego z wierzchołków w zbiorze A (musi mieć jakąś, a skoro nie możemy do niego dotrzeć, to nie może mieć wchodzącej). Wierzchołek w ma też krawędź wychodzącą do wierzchołka v, zatem miałby ich o jeden więcej niż wierzchołek v, co powoduje sprzeczność, bo każdy wierzchołek ma ich tyle samo w tym turnieju.

Zatem musi dać się dotrzeć z wierzchołka v do wierzchołka w za pomocą co najmniej jednego wierzchołka ze zbioru A, a to daje nam ścieżkę długości dwa, więc warunek jest spełniony.