8. $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad p>0,\ q>0$

a)

$$B(p,q+1) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q}\,dt = \Big|_0^1 (1-t)^q\frac{t^p}{p} + \int_0^1 q(1-t)^{q-1}\frac{t^p}{p}\,dt = \frac{q}{p}\int_0^1 (1-t)^{q-1}t^p\,dt =$$

$$= \frac{q}{p}\int_0^1 (1-t)^{q-1}\left(t^{p-1} - t^{p-1}(1-t)\right)dt =$$

$$= \frac{q}{p}\left(\int_0^1 (1-t)^{q-1}t^{p-1}\,dt - \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q}\,dt\right) =$$

$$= \frac{q}{p}\left(B(p,q) - B(p,q+1)\right) = \frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1)$$

D	I
$(1-t)^q$	t^{p-1}
$-q(1-t)^{q-1}$	$\frac{t^p}{p}$

$\Downarrow$

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1)$$

$$\frac{p+q}{p}B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p,q)$$

$$B(p,q+1) = \frac{\cancel{p}}{p+q}\cdot\frac{q}{\cancel{p}}B(p,q)$$

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$$

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. Tydzień rozpoczynający się 9. marca

Zadania

1. Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.
   (a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.
   (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1,2,3,\ldots$. Wykazać, że $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.
2. Niech $\Omega = \{a,b,c\}$.
   (a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.
   (b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.
3. Niech $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ oraz $S = \{1,4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ-ciało zbiorów zawierające S.
4. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

5. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty;-2]$	$(-2;3]$	$(3;5]$	$(5;\infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

   Podać postać funkcji gęstości $f(x)$.
6. Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $E(aX+b) = a\,E(X)+b$.
7. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $E(aX+b) = a\,E(X)+b$.
8. **2p.** Sprawdzić, że
   (a) $B(p,q+1) = B(p,q)\,\frac{q}{p+q}$,
   (b) $B(p,q) = B(p,q+1) + B(p+1,q)$.
9. **2p.** Udowodnić, że $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q)$, gdzie $p,q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

<u>Def.</u> **Funkcją beta** nazywamy wartość całki

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \quad p>0,\ q>0.$$

Witold Karczewski