Zadanie 7. Sprawdź, czy podanie poniżej macierze są dodatnio określone:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie.

Pierwsza macierz: Z **Faktu 12.6** wiemy, że macierz jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy jest symetryczna. Nasza macierz nie jest symetryczna, bo nie jest równa swojej transpozycji, zatem nie jest dodatnio określona.

Druga macierz: W tej, tak samo jak przy dwóch następnych macierzach, skorzystamy z kryterium Sylvestera, które mówi, że macierz symetryczna jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy wyznaczniki jej wiodących minorów głównych są dodatnie. Badamy zatem kolejne wyznaczniki:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$det(M_1) = 2$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(M_2) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$$

Wyznacznik drugiego minora nie jest większy od zera, więc na mocy kryterium Sylvestera macierz nie jest dodatnio określona.

Trzecia macierz:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

$$det(M_1) = 6$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(M_2) = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 2$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$det(M_3) = 30 + 8 + 8 - 16 - 20 - 6 = 4$$

Wszystkie wyznaczniki powyższych minorów są dodatnie, więc macierz jest dodatnio określona.

Czwarta macierz:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

$$det(M_1) = 6$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}$$

$$det(M_2) = 6 \cdot 15 - 7 \cdot 7 = 90 - 49 = 41$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 7 & 15 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$det(M_3) = 990 + 147 + 147 - 135 - 294 - 539 = 316$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Do policzenia wyznacznika skorzystamy z rozwinięcia Laplace'a, ale najpierw przekształcimy macierz do wygodniejszej postaci.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)=(1)-2(4)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)=(3)-(4)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Teraz rozwijamy względem pierwszej kolumny.

$$det(M_4) = (-1)^{2+1} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 15 & 7 & 3 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 \cdot (20 - 3 - 4 + 30 - 8 + 1) - 3 \cdot (-7 + 12 - 150 + 28 + 15 - 30) =$$

$$= -7 \cdot 36 - 3 \cdot (-132) = 144$$

Znów wszystkie wyznaczniki powyższych minorów są dodatnie, więc macierz jest dodatnio określona.