MDL Lista 7

Cezary Świtała

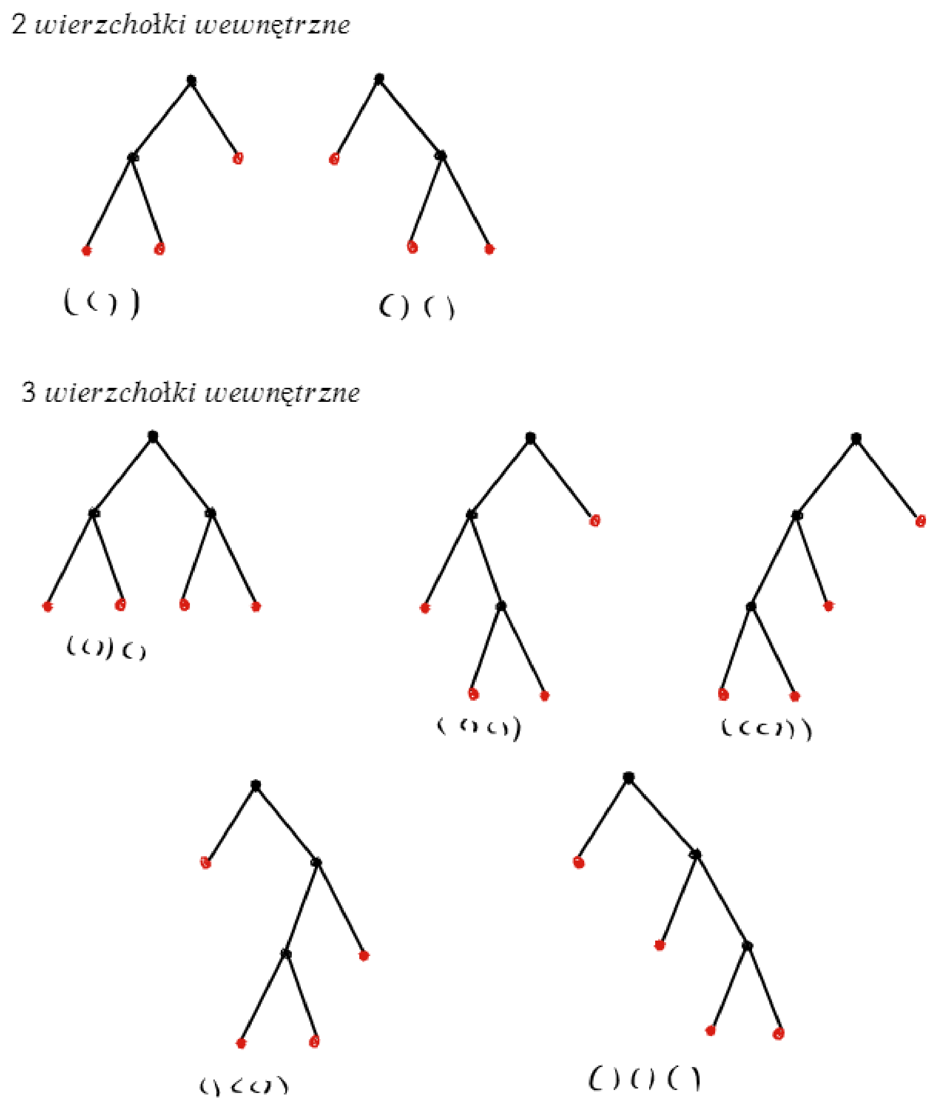
26 listopada 2020

Zadanie 2 Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.

Zbudujemy bijekcję między zbiorem drzew binarnych o n wierzchołkach wewnętrznych, a zbiorem poprawnych rozstawień n par nawiasów, pokazując tym samym ich równoliczność. Z wykładu wiemy że liczba takich rozstawień nawiasów jest równa c_n, gdzie ciąg c to *liczby Catalana*.

Niech f będzie funkcją ze zbioru drzew binarnych o n wierzchołkach wewnętrznych do zbioru poprawnych rozstawień n par nawiasów. $f(t)$ nie będzie zwracać nic jeśli t jest liściem, w przeciwnym wypadku zwraca $(f(t.lewedziecko))f(t.prawedziecko)$, czyli wynik f dla lewego dziecka t opakowany w nawias z dopisanym wynikiem f dla prawego dziecka.

Przykłady



Jest to bijekcja gdyż istnieje funkcja odwrotna (wystarczy wziąć pierwszą parę nawiasów z brzegu, utworzyć dla niej węzeł, jej wnętrze przekształcić tą funkcją i podpiąć pod lewe dziecko, a wszystko po jej prawej, po nałożeniu funkcji podpiąć pod prawe dziecko). Więc wzór, korzystając z liczb Catalana, ma postać

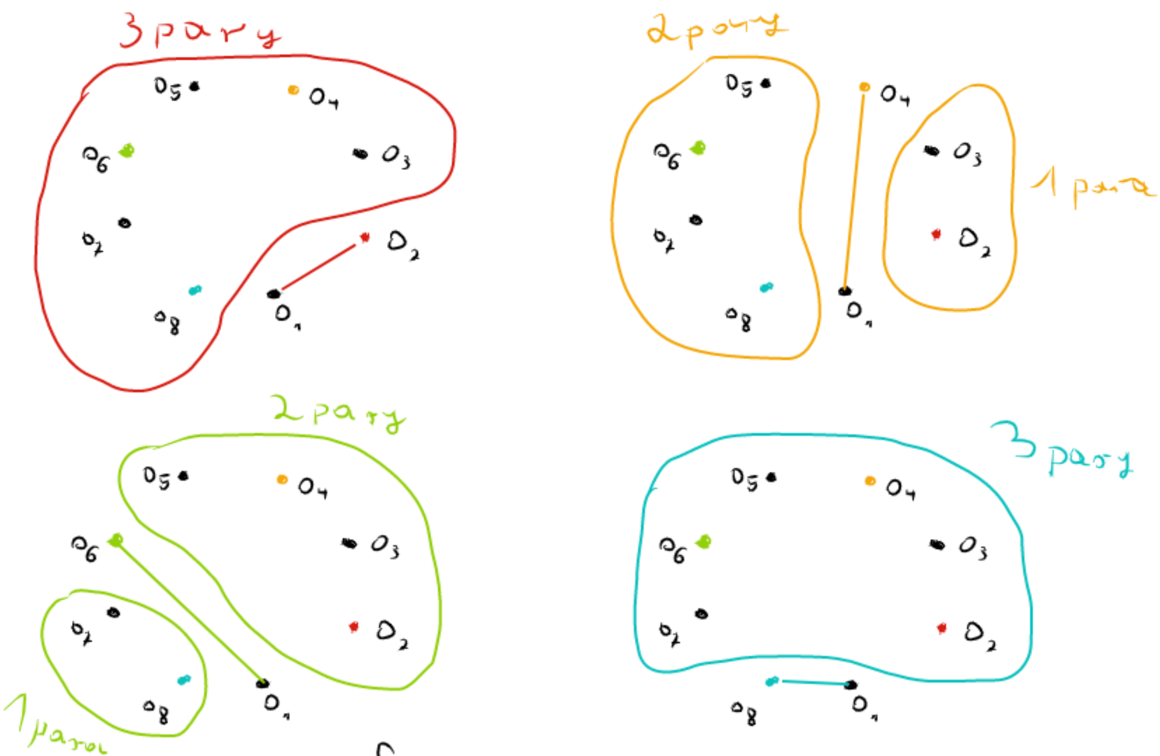
$$c_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} c_{i-1} c_{n-1} & wpp. \end{cases}$$

Zadanie 3 Ile nie krzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?

Dla danego n oznaczamy osoby $o_1, o_2, ..., o_{2n}$. Bez utraty ogólności, możemy wziąć osobę o_1 i rozpatrzeć dla niej przypadki. Zauważamy, że osoba ta może uścisnąć dłoń wyłącznie co drugiej osoby czyli w tym przypadku, osób o parzystym indeksie, gdyż po obu "stronach" uścisku musi pozostać parzysta ilość osób (dla nieparzystej, zawsze jakaś osoba nie miałaby z kim się przywitać). Zatem osoba o_1 może wykonać n uścisków.

Wykonując uścisk, osoba "dzieli" pary siedzące przy stole na te na lewo od uścisku i prawo. Wystarczy zatem policzyć na ile sposobów te dwie grupy mogą się przywitać nie krzyżując rąk, tak jakby siedziały przy okrągłym stole. Zobaczmy to na przykładzie.

Przykład dla 4 par osób



Łączenie

$$C_4 = \sum_{i=0}^{3} C_i C_{m-i-1} = \sum_{i=1}^{4} C_{i-1} C_{m-i}$$

Catalan

Witając się z osobą o_{2i}, osoba o_1 dzieli zbiór par na $i-1$ par po prawej i $n-i$ par po lewej, a przywitać się może z osobami $(o_2, o_4, ..., o_2n)$. Ogólnie wzór na wszystkie sposoby będzie wyglądał zatem tak:

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1}c_{n-i}$$

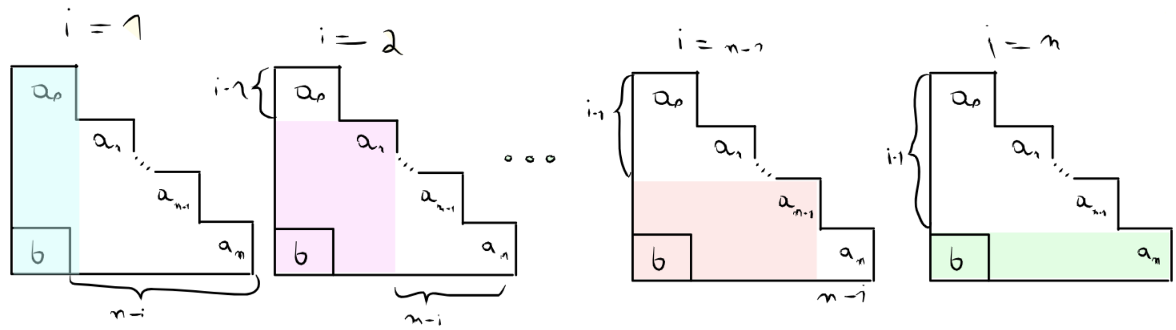
Warunkiem początkowym będzie $c_0 = 1$, gdyż istnieje tylko jeden sposób na przywitanie się zera par. Czyli otrzymujemy liczby Catalana.

Zadanie 4 Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ja podzielić na n prostokątów?

Zauważamy, że w takiej macierzy, kwadraciki 1×1 znajdujące się na przekątnej (w przykładzie poniżej oznaczone indeksowanymi literami a) muszą znaleźć się w różnych prostokątach, a skoro na przekątnej jest ich n, to znaczy że każdy z n prostokątów, na które dzielimy te schodki musi zawierać jakiś kwadrat 1×1 z przekątnej.

Weźmy kwadrat 1×1 leżący w dolnym rogu, ale nie na przekątnej. Wiemy, że po podziale kwadrat ten znajdzie się w prostokącie razem z dokładnie jednym kwadratem z przekątnej. Rozpatrujemy wszystkie przypadki i zauważamy, że w każdym powstają mniejsze macierze schodkowe. Poniżej przykład.

Przykład



Czyli sumę tych przypadków możemy zapisać w postaci

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1}c_{n-i}$$

Gdzie warunkiem początkowym jest $c_0 = 1$, gdyż istnieje jeden podział macierzy 0×0. Czyli znów otrzymujemy liczby Catalana.

Zadanie 5 Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$.

Funkcja tworząca $A(x)$ dla naszego ciągu a_n musi być równa sumie

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + 3x^4 + 7x^5 + 15x^6 + 31x^7 + ... =$$

$$= 1x^3 + 3x^4 + 7x^5 + 15x^6 + 31x^7 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i+3}(2^{i+1} - 1) =$$

$$= x^3 \sum_{i=0}^{\infty} x^i(2^{i+1} - 1) = x^3 \sum_{i=0}^{\infty}(2^{i+1}x^i - x^i) = x^3(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i+1}x^i - \sum_{i=0}^{\infty} x^i) =$$

$$= x^3(2\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} x^i) = x^3\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) = x^3\left(\frac{2-2x}{(1-2x)(1-x)} - \frac{1-2x}{(1-x)(1-2x)}\right) =$$

$$= x^3 \frac{2-2x-1+2x}{(1-2x)(1-x)} = x^3 \frac{1}{(1-2x)(1-x)}$$

Zadanie 6 Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Pokaż, że funkcja tworząca b_n postaci $(0, 0, ..., 0, a_0, a_1, a_2, ...)$, takiego, że $b_{k+i} = a_i$ oraz $b_0 = ... = b_{k-1} = 0$ jest funkcja $x^k A(x)$.

Niech $B(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu b_n, wtedy

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = b_0 + b_1 x + ... + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k + ...$$

Pierwsze k wyrazów nam się zeruje bo $b_0 = ... = b_{k-1} = 0$.

$$B(x) = b_k x^k + b_{k+1} x^{k+1} + b_{k+2} x^{k+2} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} b_{k+i} x^{k+i} = x^k \sum_{i=0}^{\infty} b_{k+i} x^i$$

Skoro $b_{k+i} = a_i$.

$$x^k \sum_{i=0}^{\infty} b_{k+i} x^i = x^k \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Z definicji funkcji tworzącej.

$$x^k \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = x^k A(x)$$

Co kończy dowód pierwszej części. A jak otrzymać funkcję tworzącą ciągu c_n postaci $(a_k, a_{k+1}, ...)$, czyli takiego, że $c_i = a_{k+i}$?

Funkcja tworząca $C(x)$ będzie musiała mieć postać

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k+i} x^i = \frac{x^k \sum_{i=0}^{\infty} a_{k+i} x^i}{x^k} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_{k+i} x^{k+i}}{x^k} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_{k+i} x^{k+i} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k} = \frac{A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k}$$

Zadanie 7 Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):

(a) na dowolne składniki. Używając jedynki możemy rozłożyć wszystkie liczby dokładnie na jeden sposób, czyli dostajemy ciąg (1,1,1,1,1,....), którego możemy zaprezentować funkcją tworzącą $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$. Używając dwójki możemy zapisać tylko liczby podzielne przez dwa i to zawsze na jeden sposób, czyli mamy ciąg $(1, 0, 1, 0, 1, ...)$, którego tworząca to $\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i}$. Uogólniając dla dowolnego k będziemy mogli rozłożyć tylko liczby podzielne przez k na jeden sposób, czyli funkcja tworząca będzie miała dla niego postać $\sum_{i=0}^{\infty} x^{ik}$. Aby podać funkcję tworzącą dla liczby podziałów za pomocą dowolnych liczb, musimy wymnożyć te przypadki.

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{ji} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^j} \right)$$

(b) na różne składniki nieparzyste. Schemat będzie dokładnie taki sam. Dla dowolnej liczby nieparzystej k możemy rozłożyć za pomocą różnych składników tylko 0 i nią samą (bo nie możemy powtarzać), w obu przypadkach na jeden sposób, czyli funkcja tworząca będzie miała postać $1 +$

x^k. Bierzemy tylko liczby nieparzyste, czyli takie w postaci $2n-1$. Czyli iloczyn tworzących dla wszystkich nieparzystych ma postać.

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2i-1})$$

(c) na składniki mniejsze od m. Tak samo jak w podpunkcie (a), ale możemy rozkładać tylko za pomocą liczb mniejszych od m zatem nasz iloczyn skończy się na $m-1$.

$$\prod_{j=1}^{m-1}\left(\frac{1}{1-x^j}\right)$$

(d) na różne potęgi liczby 2. Tak samo jak w podpunkcie (b), tylko bierzemy liczby w postaci 2^n.

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2^i})$$