Zadanie 10. Centralizatorem elementu a w grupie G nazywamy zbiór elementów przemiennych z a, czyli

$$G(a) = \{b \in G : ab = ba\}$$

Centrum grupy G nazywamy zbiór

$$Z(G) = \{a : \forall b \in G : ab = ba\}$$

(czyli: przemiennych ze wszystkimi elementami w G). Udowodnij, że dla dowolnej grupy G i elementu a centralizator $G(a)$ oraz centrum $Z(G)$ są podgrupami G. Pokaż też, że

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} G(g).$$

Rozwiązanie: Część pierwsza

W pierwszej części zadania pokażemy, że $G(a)$ oraz $Z(G)$ są podgrupami G dla dowolnej grupy G oraz elementu a. Zacznijmy od centralizatora. Weźmy dowolną grupę G i element $a \in G$. Aby zbiór $G(a)$ był podgrupą muszą zostać spełnione poniższe warunki:

1. G(a) zawiera element neutralny. Wiemy, że dla elementu neutralnego $e \in G$ prawdziwa jest równość $ae = ea$. Zatem na pewno $e \in G(a)$.

2. G(a) zamknięty na działanie. Weźmy dowolne elementy $x, y \in G(a)$, pokażemy że $xy \in G(a)$, czyli że $a(xy) = (xy)a$. Korzystając z łączności działania i definicji centralizatora:

$$a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a$$

Zatem $xy \in G(a)$.

3. Każdy element w G(a) ma element ~~przeciwny~~ odwrotny Weźmy dowolny element $x \in G(a)$, pokażemy że $x^{-1} \in G(a)$. Z definicji centralizatora:

$$\begin{aligned} ax &= xa && \cdot/x^{-1} \\ x^{-1}ax &= x^{-1}xa \\ x^{-1}ax &= ea \\ x^{-1}ax &= a && \cdot/x^{-1} \\ x^{-1}axx^{-1} &= ax^{-1} \\ x^{-1}ae &= ax^{-1} \\ x^{-1}a &= ax^{-1} \end{aligned}$$

Zatem $x^{-1} \in G(a)$.

Ze spełnienia powyższych warunków wnioskujemy, że

$$G(a) \leq G.$$

Dla centrum dowód będzie wyglądał bardzo podobnie. Weźmy dowolną grupę G i sprawdźmy czy zachodzą poniższe warunki:

1. Z(G) zawiera element neutralny. Wiemy, że dla dowolnego elementu $x \in G$ element neutralny $e \in G$ spełnia równość $ex = xe$, zatem $e \in Z(G)$.

2. Z(G) zamknięty na działanie. Weźmy dowolne elementy $x, y \in Z(G)$, pokażemy że $xy \in G(a)$, czyli że dla dowolnego $a \in G$ $(xy)a = a(xy)$. Korzystając z łączności działania i definicji centrum mamy:

$$(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy)$$

Zatem $xy \in Z(G)$.

3. Każdy element w Z(G) ma element ~~przeciwny~~ odwrotny Weźmy dowolny element $x \in Z(G)$, pokażemy że $x^{-1} \in Z(G)$. Z definicji centrum $\forall a \in G$ mamy:

$$\begin{aligned} xa &= ax & \cdot/x^{-1} \\ x^{-1}xa &= x^{-1}ax \\ ea &= x^{-1}ax \\ a &= x^{-1}ax & \cdot/x^{-1} \\ ax^{-1} &= x^{-1}axx^{-1} \\ ax^{-1} &= x^{-1}ae \\ ax^{-1} &= x^{-1}a \end{aligned}$$

Zatem $x^{-1} \in Z(G)$.

Tak jak poprzednio wnioskujemy z tego, że

$$Z(G) \leq G.$$

Rozwiązanie: Część druga

W drugiej części pokazać mamy, że dla dowolnej grupy G zachodzi równość

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} G(g).$$

Jest to równość zbiorów, zatem wystarczy że zachodzić będzie zawieranie w obie strony.

Pokażemy więc najpierw, że $Z(G) \subseteq \bigcap_{g \in G} G(g)$, czyli że $\forall_{x \in G}$: $x \in Z(G) \implies \bigcap_{g \in G} G(g)$. Niech G będzie dowolną grupą, a x będzie dowolnym elementem z $Z(G)$:

$$x \in Z(G) \iff \forall_{g \in G} : \ xg = gx \iff \forall_{g \in G} : \ x \in G(g) \iff x \in \bigcap_{g \in G} G(g)$$

Zatem $Z(G) \subseteq \bigcap_{g \in G} G(g)$. Można również zauważyć, że wszystkie zastosowane przez nas przejścia działają w obie strony, zatem pokazują one jednocześnie że $x \in \bigcap_{g \in G} G(g) \implies x \in Z(G)$, czyli że $Z(G) \supseteq \bigcap_{g \in G} G(g)$. Z faktu zawierania w obie strony wnioskujemy, że zachodzi równość tych dwóch, co kończy dowód.

No i siup