Zadanie 5. Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne dla poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla jednej z wartości oblicz odpowiadające wektory własne.

Rozwiązanie. Z **Lematu 8.10** wiemy, że da macierzy kwadratowej λ jest wartością własną wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego tej macierzy, więc zaczniemy od jego wyznaczenia metodą Sarrusa.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix} \quad A - \lambda Id = \begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} det(A-\lambda Id) = (7-\lambda)(-19-\lambda)(13-\lambda) - 1440 - 1440 - 72(-19-\lambda) + 240(7-\lambda) + 120(13-\lambda) = \\ = (-133 + 12\lambda + \lambda^2)(13-\lambda) - 2880 + 1368 + 72\lambda + 1680 - 240\lambda + 1560 - 120\lambda = \\ = (\lambda^2 + 12\lambda - 133)(13-\lambda) - 288\lambda + 1728 = \\ = 13\lambda^2 - \lambda^3 + 156\lambda - 12\lambda^2 - 1729 + 133\lambda - 288\lambda + 1728 = \\ = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = \\ = -\lambda^2(\lambda - 1) + \lambda - 1 = \\ = (\lambda-1)(1-\lambda^2) \end{gathered}$$

Zauważamy, że wielomian zeruje się dla λ równej 1, lub -1, są to zatem wartości własne macierzy. Z wielomianu możemy również odczytać ich krotności algebraiczne. Dla -1 wynosi ona 1, a więc korzystając z uwagi przy **Lemacie 8.17** możemy powiedzieć, że jej krotność geometryczna również wynosi 1. Dla 1 krotność algebraiczna wynosi 2, a jej krotność geometryczną ustalimy przy okazji wyznaczania wektorów własnych.

Zbiór wektorów własnych to $ker(A - \lambda Id)$ (**Lemat 8.14**), a więc by go wyznaczyć rozwiążemy równanie

$$(A - Id)\vec{X} = \vec{0}$$

W tym celu doprowadzimy macierz do postaci schodkowej

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)=(3)-2(1)} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)=\frac{1}{2}(2)} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)=(1)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)=(2)-5(1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz pomnożoną przez wektor zmiennych przyrównujemy do wektora zerowego zatem otrzymujemy równanie

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

Z którego mamy $x_1 = 2x_2 - x_3$, więc zbiór wektorów własnych ma postać

$$\{(2x_2 - x_3, x_2, x_3) | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(2x_2, x_2, 0) + (-x_3, 0, x_3) | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Widać, że jego baza to $\{(2,1,0), (-1,0,1)\}$, co na podstawie **Faktu 8.16** implikuje, że krotność geometryczna 1 wynosi 2.

Kolejne dwie macierze rozwiązuje się zupełnie tak samo. Przedstawię więc same rachunki, bez podobnych do powyższych komentarzy.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B - \lambda Id = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} det(B - \lambda Id) = (2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + 3 + 2(-2-\lambda) + 5(-2-\lambda) = \\ = (-6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2)(-2-\lambda) + 3 - 6 - 2\lambda - 10 - 5\lambda = \\ = -2\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda - \lambda^2 + 12 + 6\lambda - 13 - 7\lambda = \\ = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = \\ = -(\lambda+1)^3 \end{gathered}$$

Jedna wartość własna równa -1 o krotności algebraicznej 3. Analogicznie do poprzedniego przykładu wyznaczamy zbiór wektorów własnych.

$$(B + Id)\vec{X} = \vec{0}$$

$$B + Id = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)=(1)+3(3),(2)=(2)+5(3)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)=(2)-2(1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 & \rightarrow \quad x_2 = -x_3 \\ -x_1 - x_3 = 0 & \rightarrow \quad x_1 = -x_3 \end{cases}$$

Zbiór wektorów własnych ($ker(B + Id)$):

$$\{(-x_3, -x_3, x_3) | x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Baza to zbiór $\{(-1, -1, 1)\}$ o mocy 1, zatem krotność geometryczna wartości własnej -1 to 1. Kolejny przykład analogicznie:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C - \lambda Id = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} det(C - \lambda Id) = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 4(2-\lambda) = \\ = -\lambda(8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2) + 8 - 4\lambda = \\ = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda + 8 - 4\lambda = \\ = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = \\ = -(\lambda - 2)^3 \end{gathered}$$

Mamy wartość własną 2 o krotności algebraicznej 3.

$$(C - 2Id)\vec{X} = \vec{0}$$

$$C - 2Id = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)=(2)-2(1),(3)=(3)-(1)} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Zbiór wektorów własnych ($ker(C - 2Id)$):

$$\{(\frac{1}{2}x_2, x_2, x_3) | x_3, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{1}{2}x_2, x_2, 0) + (0, 0, x_3) | x_3, x_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{x_2(\frac{1}{2}, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) | x_3, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Baza to zbiór $\{(\frac{1}{2}, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a jej moc to 2, zatem krotność geometryczna wartości własnej 2 to 2.