

$$4. \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, 2] \\ 0.2 & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 0.6 & \text{dla } x \in (3, 4] \\ 0.7 & \text{dla } x \in (4, 5] \\ 1 & \text{dla } x \in (5, \infty) \end{cases}$$

↑

Dystrybucja

Wartość oczekiwana $EX = \sum_{k=2}^5 x_k p_k =$

$$= 0.4 + 1.2 + 0.4 + 1.5 = 3.5$$

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. Tydzień rozpoczynający się 9. marca

Zadania

✓ 1. Niech Σ będzie σ -ciałem zbiorów.

✓ (a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.

✓ (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Wykazać, że $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

✓ 2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.

✓ (a) Opisać σ -ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.

✓ (b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.

✓ 3. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $S = \{1, 4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ -ciało zbiorów zawierające S .

4. Wyznaczyć dystrybucję i obliczyć wartość oczekiwaną zmienną X o rozkładzie

x_k	2	3	4	5
p_k	0.2	0.4	0.1	0.3

5. Dystrybucja F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2]$	$(-2; 3]$	$(3; 5]$	$(5; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

Podać postać funkcji gęstości $f(x)$.

✓ 6. Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $E(aX + b) = aE(X) + b$.

✓ 7. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $E(aX + b) = aE(X) + b$.

✓ 8. 2p. Sprawdzić, że

✓ (a) $B(p, q + 1) = B(p, q) \frac{q}{p + q}$,

✓ (b) $B(p, q) = B(p, q + 1) + B(p + 1, q)$.

9. 2p. Udowodnić, że $\Gamma(p) \Gamma(q) = \Gamma(p + q) B(p, q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

DEF. Funkcją beta nazywamy wartość całki

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p > 0, q > 0.$$