8.

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

b) Obs 1. $B(p,q) = B(q,p)$, bo

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \left| \begin{matrix} x = 1-t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| =$$

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1}\,dx = B(q,p)$$

Obs 2. $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q} B(p,q)$, bo

$$B(p+1,q) \underset{\uparrow\ \text{z obs. 1}}{=} B(q,p+1) \underset{\uparrow\ \text{a)}}{=} \frac{p}{p+q} B(q,p) \underset{\uparrow\ \text{z. obs. 1}}{=} \frac{p}{p+q} B(p,q)$$

Dowód:

$$B(p,q+1) + B(p+1,q) = \frac{q}{p+q} B(p,q) + \frac{p}{p+q} B(p,q) =$$

$$= \cancel{\frac{q+p}{p+q}} B(p,q) = B(p,q)$$

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. Tydzień rozpoczynający się 9. marca

Zadania

1. Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.
   (a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.
   (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap_{k \in N} A_k \in \Sigma$.
2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.
   (a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.
   (b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.
3. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $S = \{1, 4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ-ciało zbiorów zawierające S.
4. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkladzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

5. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2]$	$(-2; 3]$	$(3; 5]$	$(5; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

   Podać postać funkcji gęstości $f(x)$.
6. Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $E(aX + b) = a\,E(X) + b$.
7. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $E(aX + b) = a\,E(X) + b$.
8. **2p.** Sprawdzić, że
   ✓ (a) $B(p, q+1) = B(p,q)\,\frac{q}{p+q}$,
   (b) $B(p,q) = B(p, q+1) + B(p+1, q)$.
9. **2p.** Udowodnić, że $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

<u>Def.</u> **Funkcją beta** nazywamy wartość całki

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \quad p > 0,\ q > 0.$$

Witold Karczewski