proof. 反证法. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 设它在 $[a,b]$ 不一致连续. 则由一致连续性定义, 知

$(\exists\, \varepsilon>0)(\forall\, \delta>0)(\exists\, x_1, x_2 \in E$ 且 $|x_1-x_2|<\delta)(|f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon)$.

$\because\ \delta>0$ 任意. 取一组 $\delta=\frac{1}{n}$, $(n=1,2,\cdots)$. 则对应有一组 x_{1n}, x_{2n} ~~满足条件~~. $|x_{1n}-x_{2n}|<\frac{1}{n}$ 且 $|f(x_{1n})-f(x_{2n})| \geq \varepsilon$.

对序列 $\{x_{1n}\}$ ~~$\{x_{1n}\} \subset [a,b]$, 故由~~

和 $\{x_{2n}\}$, 无法判断它们是否收敛. 但知 $\{x_{1n}\}, \{x_{2n}\} \subset [a,b]$

有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理知 它们有收敛子序列 $\{x_{1n_k}\}$ 和

$\{x_{2n_k}\}$.

设 $x_{1n_k} \to x_0$.

$\because\ \{x_{1n_k}\} \subset [a,b]$ ~~由定理~~

由引理一知 $x_0 \in [a,b]$. (因此 $I=[a,b]$ 是闭区间, 否则 x_0 不一定在 I 内)

$\therefore\ f$ 在 x_0 点连续.

$\therefore \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{1n_k}) = f(x_0)$.

又 $\because\ |x_{1n_k}-x_{2n_k}|<\frac{1}{n}$. $n\in N^+$.

$\therefore\ \{x_{1n_k}\}$ 和 $\{x_{2n_k}\}$ 收敛于同一极限值.

即 $x_{2n_k} \to x_0$.

$\therefore \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{2n_k}) = f(x_0)$.

$\because\ \{f(x_{1n_k})\}$ 与 $\{f(x_{2n_k})\}$ 收敛于同一极限值 $f(x_0)$,

故不能满足 $|f(x_{1n_k})-f(x_{2n_k})| \geq \varepsilon$. $(\forall\, n\in N^+)$.

即 ~~假设不成立~~ 由假设推出的结果与假设矛盾.