$\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$是无穷小量，那么它也必定是有界变量.

结论(2)说：如果 $f(x)=O(\varphi(x))$，$g(x)=O(\varphi(x))$，那么 $f(x)+g(x)=O(\varphi(x))$. 这就是说：如果$\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$和$\dfrac{g(x)}{\varphi(x)}$都是有界变量，那么$\dfrac{f(x)+g(x)}{\varphi(x)}$也是有界变量.

结论(3)的说明与结论(2)类似.

结论(4)依据的是这样的事实：无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量. □

以下几个极限是分析中经常遇到的，希望读者熟记.

Ⅰ.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

这一事实的证明已见于第二章 §5 的例 7.

Ⅱ.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.}$$

我们来证明Ⅱ. 首先，根据定义有

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}.$$

由此可得

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e},$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\lim\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}=\mathrm{e}.$$

于是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得 $n>N$ 时有

$$\mathrm{e}-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\mathrm{e}+\varepsilon.$$

取 $\Delta=N+1$，则当 $x>\Delta$ 时就有 $[x]>N$，因而有

$$
\underline{\mathrm{e}-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}
$$

$$
\underline{<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}<\mathrm{e}+\varepsilon.}
$$

这证明了

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.
$$

由此又可得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}\\
&=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}\\
&=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}\\
&=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\\
&=\mathrm{e}.
\end{aligned}
$$

$y=-x$

我们证明了

$$
\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.}
$$

因而有 看作单侧极限.

$$
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.
$$

Ⅱ 的另一种表述为

Ⅱ′. $\boxed{\underline{\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\mathrm{e}.}}$

利用对数函数的连续性，我们得到 由于lnx的连续性，才知道lnx的极限值取决于x的极限值. 因此相当于复合函数

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}&=\lim_{\alpha\to0}\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}\\
&=\ln\mathrm{e}=1.
\end{aligned}
$$

类似地有

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_b(1+\alpha)}{\alpha}=\log_b \mathrm{e}=\frac{1}{\ln b}.$$

这样，我们证明了：

Ⅲ.
$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1,\\&\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_b(1+\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{\ln b}.\end{aligned}}$$

由此又可得到

Ⅳ.
$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\alpha}=1.}$$

事实上，令 $\beta=\mathrm{e}^{\alpha}-1$，我们得到

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}=1.$$

类似地有

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{b^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln b.}$$

最后，我们有

Ⅴ.
$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu.}$$

事实上

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}&=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mu\ln(1+\alpha)}-1}{\alpha}\\&=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mu\ln(1+\alpha)}-1}{\mu\ln(1+\alpha)}\cdot\frac{\mu\ln(1+\alpha)}{\alpha}\\&=\mu.\end{aligned}$$

从上面的讨论，我们得到涉及某些初等函数的量阶的一些公式. 这些公式在求某些极限时很有用处.

定理 3 对于极限过程 $x\to 0$，我们有：

(1) $\sin x=x+o(x)$，$\tan x=x+o(x)$；