所以对于 $\epsilon=1>0$,存在 $\delta>0$,使得只要 $|P|<\delta$,不论相应的标志点组 ξ 怎样选择,都有

$$|\sigma(f,P,\xi)| \leqslant |\sigma(f,P,\xi)-I|+|I| < 1+|I|.$$

我们选定一个这样的分割 P. 假设 f 在 $[a,b]$ 上无界,那么至少存在分割 P 的一个闭子区间 $[x_{j-1},x_j]$,使得 f 在这闭子区间上是无界的. 我们这样来选取 ξ: 先任意选定

$$\xi_i \in [x_{i-1},x_i], \quad \forall\, i \neq j,$$

然后选择 $\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$ 满足以下条件

$$|f(\xi_j)|\Delta x_j > \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_i)\Delta x_i\right| + 1 + |I|.$$

对于这样选取的 ξ 就有

$$\begin{aligned} 1+|I| &> |\sigma(f,P,\xi)| \\ &= \left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| \\ &\geqslant |f(\xi_i)|\Delta x_j - \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_j)\Delta x_i\right| \\ &> 1+|I|. \end{aligned}$$

这一矛盾说明所作的关于 f 无界的假设不能成立. 我们用反证法证明了 f 必须在 $[a,b]$ 上有界. □

定理 2 (积分的可加性) 设 $a<b<c$. 如果函数 f 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都可积,那么它在 $[a,c]$ 上也可积,并且

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上可积的函数 f, 在这两闭区间上也是有界的. 因而存在 $K\in\mathbb{R}$,使得

$$|f(x)| \leqslant K, \quad \forall\, x \in [a,c].$$

设 P 是 $[a,c]$ 的任意一个分割, ξ 是相应于这分割的一组标志点

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c,$$

$$\xi = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m).$$

在此基础上，我们来定义分割 $\widetilde{P}$ 和相应于这分割的标志点组 $\tilde{\xi}$. 如果 b 是 P 中的一个分点，那么就取 $\widetilde{P}=P$, $\tilde{\xi}=\xi$. 如果 b 不是 P 中的分点，那么就把 b 补充作为分点，这样定义一个分割

$$\widetilde{P}: a=x_0<\cdots<x_{k-1}<b<x_k<\cdots<x_m=c,$$

并选取

$$\tilde{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_{k-1},b,b,\xi_{k+1},\cdots,\xi_m).$$

将 $\sigma(f,P,\xi)$ 与 $\sigma(f,\widetilde{P},\tilde{\xi})$ 加以比较，不相同的部分至多是：$\sigma(f,P,\xi)$ 中的加项

$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

被代之以 $\sigma(f,\widetilde{P},\tilde{\xi})$ 中的

$$f(b)(b-x_{k-1})+f(b)(x_k-b)=f(b)(x_k-x_{k-1}).$$

因而

$$\begin{aligned}|\sigma(f,P,\xi)-\sigma(f,\widetilde{P},\tilde{\xi})|&\\ \leqslant |f(\xi_k)-f(b)|(x_k-x_{k-1})&\\ \leqslant 2K|P|.&\end{aligned}$$

分割 $\widetilde{P}$ 限制在$[a,b]$和$[b,c]$上分别给出这两区间的分割 $\widetilde{P}'$ 和 $\widetilde{P}''$，而 $\tilde{\xi}$ 限制在$[a,b]$和$[b,c]$上分别给出相应的标志点组 $\tilde{\xi}'$ 和 $\tilde{\xi}''$. 我们有

$$\sigma(f,\widetilde{P},\tilde{\xi})=\sigma(f,\widetilde{P}',\tilde{\xi}')+\sigma(f,\widetilde{P}'',\tilde{\xi}'').$$

让$|P|\to 0$，上式右端趋于极限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

因而当$|P|\to 0$ 时，积分和 $\sigma(f,P,\xi)$ 有极限

$$\begin{aligned}\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)&=\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,\widetilde{P},\tilde{\xi})\\ &=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这证明了定理的论断. □

注记 (1) 在下一篇中，我们将证明，如果函数 f 在$[a,c]$上可积，那么它在$[a,c]$的闭子区间$[a,b]$和$[b,c]$上也都可积. 这时