定理　设函数 f 在区间 I 上单调．则 f 在 I 上连续的充分必要条件为 $f(I)$ 是一个区间．

证明—

Proof. 必要性由定理—得到．下面证明充分性．

proof (1). $\because$ $f(I)$ 是一个区间．

~~$\therefore$ $f(I)$ 中的每个函数值在 I~~

理解 非证明. 因为并不能举出一个实数与另一个实数相邻.

$\therefore$ 对任意一个 $y_0 \in f(I)$，它右侧与 y_0"相邻"的 y 值在 I 中有原像 x．

又 $\because$ f 在 I 上单调．设为递增．

$\therefore$ 这个 x 必在 y_0 的原像 x_0 的右边．

若 x 不与 x_0"相邻"，则 f ~~并非在 I 上都有定义~~ 在 x_0 至 x 之间无定义，与 f 在 I 上有定义矛盾．

故 x 只能与 x_0 相邻．

$\therefore$ ~~$f(I)$ 是一个区间 相邻 与 $f(I)$~~

$f(x)$ 与 $f(x_0)$ 任意近时 x 与 x_0 也任意近．

即 f 在 I 上连续．

(2). 严格证明．反证法．

设 $f(I)$ 是一个区间但 f 在 I 上不连续．设 f 在 $x_0 \in I$ 点不连续．

考虑到，单调函数的单侧极限必存在．

因此，f 在 x_0 点两侧必出现 $f(x_0^-) < f(x_0)$ 或 $f(x_0^+) > f(x_0)$ 或两者都出现．(不会有 $f(x_0^-) > f(x_0)$，否则在 x_0 左侧某个小区间内必有 $f(x) > f(x_0)$．)

由于单调性，$(f(x_0^-), f(x_0))$ 或 $(f(x_0), f(x_0^+))$ 内的任何点都不在 $f(I)$ 内．

$\therefore$ $f(I)$ 不是区间．与假设矛盾．