对于未定型的极限一些讨论.

定义 (Toeplitz 数表和变换)

对于一个由非负实数排成的无穷下三角阵，若满足

(1) 它的每一行元素之和为1，即

$$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1. \quad \forall n \in N^+.$$

(2) 它的每一列元素，随着行数的增加而趋于0，即

$$\lim_{n\to+\infty} t_{nk} = 0. \quad \forall k \in N^+.$$

则称这个矩阵为 Toeplitz 数表 $\{t_{nk}\}$.

序列变换

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k, \quad \forall n \in N^+,$$

称为 Toeplitz 变换.

Toeplitz 变换实际上是对序列 $\{\alpha_n\}$ 的前n项作加权平均所~~得的结果，组成的序列~~

Lemma. 设 $\{\alpha_n\}$ 为无穷小序列，$\{t_{nk}\}$ 为任一个 Toeplitz 序列.
则对 $\{\alpha_n\}$ 作 Toeplitz 变换所得的序列 $\{\beta_n\}$ 仍为无穷小序列.

proof:

$$|\beta_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} t_{nk}|\alpha_k|$$

对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 α_m 以后的所有 α_k 都有 $|\alpha_k| < \varepsilon$.

由于 m 固定，行数足够大时，前 m 个 $t_{nk}\alpha_k$ 之和也可以小于任意 $\varepsilon > 0$.

这样在n足够大时，把 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk}|\alpha_k|$ 拆成了任意小的两部分.

Lemma，设 $\{u_n\}$ 收敛于 a．$\{t_{nk}\}$ 为任一个 Toeplitz 数表．

则对 $\{u_n\}$ 作 Toeplitz 变换所得的序列 $\{v_n\}$ 仍收敛于 a．

proof．令 $u_n = a + \alpha_n$，转化为无穷小序列的情况．

定理（Stolz 定理）．设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 为实数序列．$\{x_n\}$ 满足条件

(1). $x_n > 0$，$\forall n \in N^+$．

(2). 严格递增．

(3). $\lim x_n = +\infty$．

若存在有穷极限

$$\lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a,$$

则有

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = a.$$

~~只为了配合 Toeplitz 数表~~来凑数，

proof．设 $x_0 = y_0 = 0$．~~增加两列中的第0项不影响结果极限~~，因极限只与尾项相关

构造 $t_{nk} = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_n}$，则为一个 Toeplitz 数表．

对 $\left\{\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right\}$ 作 Toeplitz 变换，即得 $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$．

故后者极限可由前者极限决定．

注意到，(1)．

(2). Stolz 定理中对 $\{x_n\}$ 的限制是为了满足构造 Toeplitz 数表所需递增、恒正、发散于 $+\infty$ 三个条件．

而递增又得是严格的，是因为 $\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$ 要求 $x_n \neq x_{n-1}$．

例子.

1. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足

(1) $a_n > 0$, $\forall n \in N^+$.

(2). $\lim (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = +\infty$

(3). $\lim \frac{b_n}{a_n} = l$.

则 $\lim \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = l$.

2. $\lim \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$. (其中 $p \in N^+$).

附录　斯笃兹(Stolz)定理

如果$\lim x_n=\infty$，$\lim y_n=\infty$，那么对序列$\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$的极限状况，不能利用极限的运算法则得出一般性的结论，必须作具体的分析讨论. 人们把这样的情形叫做∞/∞未定型或者∞/∞未定式. 先请看几个简单的例子.

例 1　若$x_n=n^2$，$y_n=n$，$n=1,2,\cdots$，则有

$$\lim \frac{y_n}{x_n}=\lim \frac{1}{n}=0.$$

例 2　若$x_n=2n$，$y_n=n$，$n=1,2,\cdots$，则有

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{2}.$$

例 3 若 $x_n=n$, $y_n=n^2$, $n=1,2,\cdots$, 则有

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = +\infty.$$

例 4 若 $x_n=n$, $y_n=(-1)^n n$, $n=1,2,\cdots$, 则序列 $\{y_n/x_n\}$ 无极限.

未定型的极限状况，有时比较难判定. 斯笃兹定理给我们提供了处理某些未定型极限的有效方法. 为证明这定理，先要作一些准备.

在 §1 的例 12 中，曾经讨论过如下形状的序列变换（算术平均变换）：

$$\beta_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

在那里，我们证明了：如果 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小序列，那么 $\{\beta_n\}$ 也是无穷小序列. 下面，我们讨论更一般的一种序列变换.

定义 设给定了一个由非负实数排成的无穷三角形数表（无穷三角阵）

$$\begin{array}{llll}
t_{11} & & & \\
t_{21}, & t_{22} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
t_{n1}, & t_{n2}, & \cdots, & t_{nn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

如果这数表满足条件

(1) $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$,

(2) 对任意给定的 k 都有

$$\lim_{n\to+\infty} t_{nk} = 0,$$

那么我们就把这样的数表 $\{t_{nk}\}$ 叫做托布利兹(Toeplitz)数表或者

托布利兹阵，并把序列变换

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k, \quad n = 1,2,\cdots,$$

叫做托布利兹变换.

前面提到的算术平均变换是托布利兹变换的一种特殊情形，它所对应的托布利兹数表是

$$t_{nk} = 1/n,$$
$$n = 1,2,\cdots, \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

引理 1 设$\{t_{nk}\}$是任意一个托布利兹数表，$\{\alpha_n\}$是任意一个无穷小序列，并设

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k, \quad n = 1,2,\cdots,$$

对前n项 α_n 加权平均

则有

$$\lim \beta_n = 0.$$

证明 对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $m \in \mathbf{N}$，使得只要 $k > m$，就有

$$|\alpha_k| < \varepsilon/2.$$

对这取定的 m，又可取 $p \in \mathbf{N}$充分大，使得 $n > p$ 时，有

$$t_{n1}|\alpha_1| + \cdots + t_{nm}|\alpha_m| < \varepsilon/2.$$

我们记

$$N = \max\{m, p\}.$$

于是，对于 $n > N$，就有

$$\begin{aligned} |\beta_n| &\leqslant t_{n1}|\alpha_1| + \cdots + t_{nm}|\alpha_m| \\ &\quad + t_{n(m+1)}|\alpha_{m+1}| + \cdots + t_{nn}|\alpha_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (t_{n(m+1)} + \cdots + t_{nn})\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

引理 2 设$\{t_{nk}\}$是一个托布利兹数表，$\{u_n\}$是收敛于 a 的一个实数序列，

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} u_k, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则有

$$\lim v_n = a.$$

证明 我们有

$$u_n = a + \alpha_n,$$

这里$\{\alpha_n\}$是无穷小序列. 于是

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} t_{nk}(a + \alpha_k) \\ &= a\sum_{k=1}^{n} t_{nk} + \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k \\ &= a + \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k. \end{aligned}$$

由引理 1 可知

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k\right\}$$

是无穷小序列. 因而有

$$\lim v_n = a. \quad \square$$

斯笃兹定理 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是实数序列, $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$, 并且

$$\lim x_n = +\infty.$$

如果存在有穷极限

$$\lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a,$$

~~不影响极限值，只为第一项定义.~~

那么也就一定有

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = a.$$

证明 为书写方便, 我们记

$$x_0 = y_0 = 0.$$

增加第0项是为了在 $\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$ 中增加第一项. 以配合Toeplitz数表，每一项都有对应于 $\frac{y_n}{x_n}$.

对$\{x_n\}$的要求，递增，正数，发散于$+\infty$.
都是在于构造Toeplitz数表.
要求递增是严格的，
是因为 $\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$ 要有意义.

考查托布利兹数表

$$\begin{cases} t_{nk} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_n}, \\ n = 1,2,\cdots, \quad k = 1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

用这数表对序列

$$u_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, \quad n = 1,2,\cdots,$$

作变换就得到

$$\begin{cases} v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_{nk} u_k \\ \quad = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n} \cdot \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \\ \quad = \dfrac{1}{x_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \frac{y_n}{x_n}, \end{cases}$$

$$n = 1,2,\cdots.$$

我们有

$$\lim u_n = a.$$

利用引理 2 就得到

$$\lim v_n = a,$$

即

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = a. \quad \square$$

例 5 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足条件

$$\begin{cases} \text{(i) } a_n > 0,\ a_1 + \cdots + a_n \to +\infty, \\ \text{(ii) } \lim \dfrac{b_n}{a_n} = l, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{cases}$$

则有

$$\lim \frac{b_1 + \cdots + b_n}{a_1 + \cdots + a_n} = \lim \frac{b_n}{a_n} = l.$$

例 6 考查序列

$$c_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

利用斯笃兹定理,我们得到

$$\begin{aligned}\lim c_n &= \lim \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} \\ &= \lim \frac{n^p}{(p+1)n^p - \cdots} \\ &= \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

关于更一般的未定型极限,我们将在第八章 §1 中作进一步的讨论.