$$a^p = (a^{1/n})^k > (a^{1/n})^l = a^q. \quad \square$$

我们将通过极限手续定义正数的无理指数方幂. 为此,需要用到以下两个引理.

**引理 1** 设 $a \in \mathbb{R}, a > 1$; $p, q \in \mathbb{Q}, |p-q| < 1$. 则有

$$|a^p - a^q| \leqslant a^q(a-1)|p-q|.$$

**证明** 因为有

$$|a^p - a^q| = a^q |a^{p-q} - 1|,$$

所以只须证明

$$|a^{p-q} - 1| \leqslant (a-1)|p-q|.$$

下面,我们来证明:

$$|a^r - 1| \leqslant (a-1)|r|,$$
$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad |r| < 1.$$

情形 1 $r = 0$. 对这情形结论显然成立.

情形 2 $r = m/n \in (0,1)$. 对这情形,利用关于几何平均数与算术平均数的不等式可得

$$\begin{aligned} a^r &= (a^m)^{1/n} = (a^m \cdot 1^{n-m})^{1/n} \\ &\leqslant \frac{ma + n - m}{n} = \frac{m}{n}(a-1) + 1 \\ &= (a-1)r + 1, \end{aligned}$$
$$0 < a^r - 1 \leqslant (a-1)r.$$

情形 3 $r = -s \in (-1, 0)$. 对这情形,我们有

$$\begin{aligned} |a^r - 1| &= |a^{-s} - 1| = 1 - a^{-s} \\ &= \frac{a^s - 1}{a^s} < a^s - 1 \\ &\leqslant (a-1)s = (a-1)|r|. \end{aligned}$$

综合以上几种情形,我们看到:对任意的 $r \in \mathbb{Q}$, $|r| < 1$,都有

$$|a^r - 1| \leqslant (a-1)|r|. \quad \square$$

**引理 2** 设 $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, 则有:

(1) 如果$\{p_n\}\subset\mathbf{Q}$，$p_n\to x$，那么$\{a^{p_n}\}$收敛；

(2) 如果$\{p_n\}$，$\{q_n\}\subset\mathbf{Q}$，$p_n\to x$，$q_n\to x$，那么

$$\lim a^{p_n}=\lim a^{q_n}.$$

**证明** 先对 $a>1$ 的情形给出证明.

(1) 收敛序列$\{p_n\}$是有界的，可设对于 $M\in\mathbf{N}$ 有

$$p_n\leqslant M,\quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$$

收敛序列$\{p_n\}$又是基本序列，对于任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得 $m,n>N$ 时有

$$|p_m-p_n|<\varepsilon.$$

于是，$m,n>N$ 时就有

$$\begin{aligned}|a^{p_m}-a^{p_n}|&\leqslant a^{p_n}(a-1)|p_m-p_n|\\&\leqslant a^M(a-1)\varepsilon.\end{aligned}$$

我们证明了$\{a^{p_n}\}$是基本序列，也就证明了这序列的收敛性.

(2) 收敛序列是有界的，可设对于 $M\in\mathbf{N}$ 有

$$q_n\leqslant M,\quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$$

又因为 $\lim(p_n-q_n)=0$，可设 $n>N$ 时

$$|p_n-q_n|<\varepsilon<1.$$

于是，$n>N$ 时就有

$$\begin{aligned}|a^{p_n}-a^{q_n}|&\leqslant a^{q_n}(a-1)|p_n-q_n|\\&\leqslant a^M(a-1)\varepsilon.\end{aligned}$$

我们证明了

$$\lim(a^{p_n}-a^{q_n})=0.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\lim a^{p_n}&=\lim(a^{p_n}-a^{q_n})+\lim a^{q_n}\\&=\lim a^{q_n}.\end{aligned}$$

再来考查 $0<a\leqslant 1$ 的情形. 如果 $a=1$，那么$\{a^{p_n}\}$和$\{a^{q_n}\}$都是常数序列 1,1,1,…，因而结论(1)和(2)当然成立. 如果 $0<a<1$，那么 $1/a>1$. 因为