$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0.$$

因而指数函数 a^x 的无穷大的阶比任何幂函数 x^μ 高. 为了说明这一事实,我们先来看 $\mu=k\in\mathbf{N}$ 的情形. 已经知道(第二章 § 1 的例 10)

$$\lim\frac{n^k}{a^n}=0.$$

由此易得

$$\lim\frac{(n+1)^k}{a^n}=\lim\frac{n^k}{a^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k=0.$$

对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}$, 使得 $n>N$ 时有

$$0<\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon.$$

取 $\Delta=N+1$, 则 $x>\Delta$ 时就有

$$0<\frac{x^k}{a^x}\leqslant\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}<\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0.$$

对于一般的 $\mu>0$,我们可以取 $k\in\mathbf{N}$, $k\geqslant\mu$. 于是,对于 $x\geqslant1$ 有

$$0<\frac{x^\mu}{a^x}\leqslant\frac{x^k}{a^x}.$$

因而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}=0.$$

例 10 设 $f(x)=x^\nu(\nu>0)$, $g(x)=\log_a x(a>1)$. 我们指出

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\nu}=0.$$

这说明对数函数 $\log_a x$ 是比任何幂函数 x^ν 更低阶的无穷大量. 事实上,令 $y=\log_a x$, 则有