§3 单调函数,反函数

我们把闭区间$[a,b]$,开区间(a,b),$(-\infty,b)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,+\infty)$,半开区间$[a,b)$,$(a,b]$,$(-\infty,b]$,$[a,+\infty)$,以及退化的闭区间(即单点集$\{a\}=[a,a]$)等,统称为区间. 以下引理指出所有这些类型的区间的共同特征.

引理 集合$J\subset\mathbb{R}$是一个区间的充分必要条件为:对于任意两个实数$\alpha,\beta\in J$,介于α和β之间的任何实数γ也一定属于J.

证明 条件的必要性是显然的. 我们来证明这条件也是充分的. 记

$$A=\inf J,\quad B=\sup J,$$

则显然有

$$J\subset[A,B].$$

按照确界的定义,对于任意$\gamma\in(A,B)$,存在$\alpha\in J$和$\beta\in J$,使得

$$A\leqslant\alpha<\gamma<\beta\leqslant B,$$

因而$\gamma\in J$. 这证明了

$$(A,B)\subset J.$$

再来考查A,B两点. 视A,B是否属于J,必有以下几种情形之一成立:

$$J=[A,B],\quad J=[A,B),$$

$$J=(A,B],\text{ 或者 }J=(A,B).\ \square$$

利用这一引理,可以给介值定理一个很好的几何式的陈述:

定理 1 如果函数f在区间I上连续,那么

$$J=f(I)=\{f(x)\mid x\in I\}$$

也是一个区间.

定理 1 的逆命题一般说来并不成立.

例 1 考查函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{如果 } x\neq 0,\\[2ex] 0, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

我们看到函数 f 把区间 $I=[-\eta,\eta]$ $(\eta>0)$ 映成区间 $J=[-1,1]$，但 f 并不连续.

但是，对于一类比较特殊的函数——单调函数，定理 1 的逆命题是成立的.

定理 2 设函数 f 在区间 I 上单调. 则 f 在 I 连续的充分必要条件为：$f(I)$ 也是一个区间.

证明 必要性部分即定理 1. 这里证明条件的充分性. 设 f 在 I 上递增并且 $f(I)$ 是一个区间. 我们来证明 f 在 I 连续(用反证法). 假设 f 在 $x_0\in I$ 不连续，那么至少出现以下两种情形之一：或者 $f(x_0-)<f(x_0)$，或者 $f(x_0)<f(x_0+)$. 对这两种情形，我们分别用 (λ,ρ) 表示 $(f(x_0-),f(x_0))$ 或者 $(f(x_0),f(x_0+))$. 于是，在开区间 (λ,ρ) 的两侧都有集合 $f(I)$ 中的点，但由于函数 f 的单调性，任何 $\gamma\in(\lambda,\rho)$ 都不在集合 $f(I)$ 之中，因而 $f(I)$ 不能是一个区间. 这一矛盾说明 f 必须在 I 的每一点连续. □

设函数 f 在区间 I 连续，则 $J=f(I)$ 也是一个区间. 如果函数 f 在区间 I 上还是严格单调的，那么 f 是从 I 到 $J=f(I)$ 的一一对应. 这时，对任意 $y\in J=f(I)$，恰好只有一个 $x\in I$ 能使得 $f(x)=y$. 我们定义一个函数 g 如下：对任意 $y\in J$，函数值 $g(y)$ 规定为由关系 $f(x)=y$ 所决定的唯一的 $x\in I$. 这样定义的函数 g 称为是函数 f 的反函数，记为

$$g=f^{-1}.$$

我们看到，函数 f 及其反函数 $g=f^{-1}$ 满足如下关系：

$$g(y)=x\Longleftrightarrow f(x)=y.$$

定理 3 设函数 f 在区间 I 上严格单调并且连续，则它的反函数 $g=f^{-1}$ 在区间 $J=f(I)$ 上严格单调并且连续.

证明 我们对函数 f 在区间 I 上严格递增并且连续的情形给

出证明(函数 f 在区间 I 上严格递减并且连续的情形可类似地讨论). 对于任意的 $y_1, y_2 \in J$, $y_1 < y_2$, 我们来比较 $x_1 = g(y_1)$ 与 $x_2 = g(y_2)$ 的大小. 首先, 不能有 $x_1 = x_2$, 否则将有 $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$; 其次, 也不能有 $x_1 > x_2$, 否则将有 $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$. 因而, 只能有 $x_1 < x_2$, 即 $g(y_1) < g(y_2)$. 这样, 我们证明了函数 g 在区间 J 上严格递增. 又因为 $g(J) = I$ 是一个区间, 所以 g 在 J 连续. □

例 2 函数 $f(x) = \sin x$ 在区间 $I = [-\pi/2, \pi/2]$ 上严格递增并且连续, $J = f(I) = [-1, 1]$. 因而反函数 $g(y) = \arcsin y$(即 $\sin^{-1} y$)在 J 上有定义并且连续. g 的取值范围为 $[-\pi/2, \pi/2]$.

例 3 函数 $\cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上严格递减并且连续, 它把区间 $[0, \pi]$ 映成 $[-1, 1]$. 因而其反函数 $\arccos y$(即 $\cos^{-1} y$)在区间 $[-1, 1]$ 上有定义并且连续. $\arccos y$ 的取值范围为 $[0, \pi]$.

例 4 函数 $\tan x$ 在区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上严格递增并且连续, 它把 $(-\pi/2, \pi/2)$ 映成 $(-\infty, +\infty)$. 因而 $\tan x$ 的反函数 $\arctan y$ (即 $\tan^{-1} y$)在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义并且连续. $\arctan y$ 的取值范围为 $(-\pi/2, \pi/2)$.

例 5 (算术根的存在唯一性问题) 非负实数 a 的非负的 n 次方根称为算术根. 这样的算术根是存在而且唯一的, 我们用记号

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

因为连续.

表示它. 事实上, 函数 $y = x^n$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上严格递增并且连续, 它将区间 $[0, +\infty)$ 映成区间 $[0, +\infty)$. 因而, 对任意 $a \in [0, +\infty)$, 存在唯一的 $\alpha \in [0, +\infty)$ 使得

$$\alpha^n = a.$$

这 α 即为 a 的 n 次算术根.

从上面的讨论, 我们看到: 对任意的 $n \in \mathbf{N}$, 函数 $y = x^n$ 的反函数 $x = y^{\frac{1}{n}}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有定义, 严格递增并且连续. 我们还注意到: 如果 $y > 1$, 那么 $y^{\frac{1}{n}} > 1$.

$y=1$, $y^{\frac{1}{n}}=1$ 且严格递增.