$$a^{p_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{p_n}}, \quad a^{q_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{q_n}},$$

所以结论(1)和(2)也仍然成立. □

根据这引理,我们给出以下定义.

定义 设 $a \in \mathbb{R}$, $a>0$, x 是无理数. 我们定义

$$a^x = \lim a^{q_n},$$

这里 $\{q_n\}$ 是收敛于 x 的任意有理数序列.

注记 如果 $x \in \mathbb{Q}$, $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$, $q_n \to x$, 那么仍有

$$a^x = \lim a^{q_n}.$$

→ 但对 $x\in\mathbb{Q}$，这就不是定义的. 因此只能说对无理数有以上式

这是因为我们可以把 x 视为常数序列

$$p_n = x, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

于是由引理 2 可得

$$a^x = \lim a^{p_n} = \lim a^{q_n}.$$

定理 2 对于 $a \in \mathbb{R}$, $a>0$ 和 $x, y \in \mathbb{R}$, 我们有

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;

(2) $a>1, x<y \Rightarrow a^x < a^y$,

$a<1, x<y \Rightarrow a^x > a^y$.

证明 (1) 设 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ 是有理数序列, $p_n \to x$, $q_n \to y$, 则 $p_n + q_n \to x + y$. 于是

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \lim a^{p_n + q_n} \\ &= \lim (a^{p_n} \cdot a^{q_n}) \\ &= \lim a^{p_n} \cdot \lim a^{q_n} \\ &= a^x \cdot a^y. \end{aligned}$$

(2) 我们对 $a>1$ 的情形给出证明($a<1$ 的情形可类似地讨论). 设 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ 是有理数序列, $p_n \to x$, $q_n \to y$. 因为 $x<y$, 所以对充分大的 n 就有

$$p_n < q_n,$$

于是

$$a^{p_n} < a^{q_n},$$

$$a^x = \lim a^{p_n} \leqslant \lim a^{q_n} = a^y.$$

为了得到严格的不等式，我们在 x 与 y 之间插入两个有理数 r 和 s：

由有尽小数稠密性

$$x < r < s < y, \quad r, s \in \mathbb{Q}.$$

于是

$$a^x \leqslant a^r < a^s \leqslant a^y.$$

这样，我们证明了

$$a > 1, x < y \Rightarrow a^x < a^y. \quad \square$$

引理 3 设 $a \in \mathbb{R}$，$a > 1$，$x, y \in \mathbb{R}$，$|x - y| < 1$. 则有

$$|a^x - a^y| \leqslant a^y(a - 1)|x - y|.$$

证明 设 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ 是有理数序列，$p_n \to x$，$q_n \to y$. 则对充分大的 n 有

$$|p_n - q_n| < 1.$$

于是有

$$|a^{p_n} - a^{q_n}| \leqslant a^{q_n}(a - 1)|p_n - q_n|.$$

在上式中让 $n \to +\infty$ 取极限就得到 P69, thm 7.

$$|a^x - a^y| \leqslant a^y(a - 1)|x - y|. \quad \square$$

定理 3 设 $a \in \mathbb{R}$，$a > 1$. 则指数函数 a^x 在 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 上有定义，严格递增并且连续.

证明 只剩下关于连续性的结论尚待证明. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$，$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$，$x_n \to x_0$. 则对充分大的 n 有

$$|x_n - x_0| < 1.$$

于是有

$$|a^{x_n} - a^{x_0}| \leqslant a^{x_0}(a - 1)|x_n - x_0|.$$

由此得知函数 a^x 在 x_0 点连续. $\square$

推论 设 $a \in \mathbb{R}$，$0 < a < 1$. 则指数函数 a^x 在 $\mathbb{R} = (-\infty,$

$+\infty)$有定义，严格递减并且连续.

证明 我们有

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}, \quad \frac{1}{a} > 1.$$

利用定理 3 就得到本推论. □

引理 4 设 $a \in \mathbb{R}, a > 1$. 则有

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$,

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

证明 (1) 我们有不等式

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geqslant 1 + n(a-1), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

对任何 $E > 0$，可取 $\Delta = \frac{E}{a-1} + 1$，则当 $x > \Delta$ 时，就有

$$\begin{aligned} a^x &\geqslant a^{[x]} \geqslant 1 + [x](a-1) \\ &> 1 + \frac{E}{a-1}(a-1) > E. \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} a^x &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{a^{-x}} \\ &= \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{a^u} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

设 $a \in \mathbb{R}, a > 1$. 我们看到：严格递增的连续函数 $y = a^x$ 把区间$(-\infty, +\infty)$一对一地映成区间$(0, +\infty)$. 因而对任意的 $y \in (0, +\infty)$，存在唯一的 $x \in (-\infty, +\infty)$，使得

$$a^x = y.$$

我们把这样由 y 唯一确定的 x 称为以 a 为底 y 的对数，记为

$$x = \log_a y.$$

作为指数函数 $y = a^x$ 的反函数，对数函数 $x = \log_a y$ 是连续的. 我们把这一事实写成以下定理.

定理 4 设 $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$，则

(1) 对数函数 $x = \log_a y$ 在区间$(0, +\infty)$上有定义，严格递增

$a^{\log_a x} = x$
很好理解，由定义自然成立.
$\ln x + \ln y = \ln xy$.

并且连续；

(2) $\lim\limits_{y \to +\infty} \log_a y = +\infty$, $\lim\limits_{y \to 0+} \log_a y = -\infty$.

证明 结论(1)可以从关于反函数的一般定理(§3 的定理 3)得出. 结论(2)的证明如下：对任意 $E > 0$，可取 $\Delta = a^E > 0$，于是对于 $y > \Delta$，就有

$$\log_a y > \log_a \Delta = E.$$

这证明了

$$\lim_{y \to +\infty} \log_a y = +\infty.$$

由此又可得到

$$\begin{aligned}\lim_{y \to 0+} \log_a y &= \lim_{y \to 0+} \left(-\log_a \left(\frac{1}{y} \right) \right) \\ &= \lim_{z \to +\infty} (-\log_a z) \\ &= -\infty. \quad \square\end{aligned}$$

在数学的理论研究和应用中，常常采用数 e 作为指数函数或者对数函数的底. 这里数 e 定义为

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

以 e 为底的对数称为自然对数，记为

$$\ln y = \log_e y, \quad \forall\, y > 0.$$

我们已经看到：多项式函数，有理分式函数，三角函数，反三角函数，指数函数，对数函数等函数在它们有定义的范围内都是连续的. 这些函数称为*基本初等函数*. 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合而成的函数称为*初等函数*. 于是，我们有：

定理 5 初等函数在其有定义的范围内都是连续的.

连续性的运算律和复合函数的连续性.

例 1 考查幂函数 $y = x^\mu$ ($x > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$) 的连续性. 我们可以把它视为复合函数：

$$y = x^\mu = e^{\mu \ln x}.$$

由指数函数和对数函数的连续性可知：幂函数在它有定义的范围内是连续的.