Домашная работа по дискретной математике №9. Графы

Лавренов Николай. Группа 161-2, ПМИ

15 ноября 2016 г.

№1

Нет, такой граф не существует. Известно, что одна вершина имеет степень 1. Тогда остальные 7 вершин (в случае полного подграфа на семи вершинах) содержит не более $\frac{7*6}{2} = 21$ ребер. С учетом еще одного ребра в вершину со степенью 1 получаем, что граф имеет не более 22 ребер. Но по учловию в нем 23 ребра. Значит такой граф не существует.

Ответ: нет

№2

Предположим, что граф - дерево. Это означает, что ребер в графе 9.

Оценим сумму степеней всех вершин. Известно, что у трех вершин степень по 4. Также, поскольку граф является деревом остальные семь вершин имеют степень хотя бы один. Значит суммарная степень всех вершин хотя бы $3 * 4 + 7 = 19$. С учетом ее четности понятно, что суммарная степень всех вершин хотя бы 20. Значит в графе хотя бы 10 ребер. Получаем противоречие, ведь ребер 9.

Ответ: нет.

№3

В начале оценим количество ребер в графе. По условию, степень каждой вершины хотя бы 8. Значит сумма степеней по всем вершинам хотя бы $17 * 8$. Значит ребер в графе как минимум $|E| \geqslant \frac{17*8}{2} = 17 * 4 = 68$.

Предположим, что это не так. Значит страна разделена на две компоненты связанности с a и b вершинами. Заметим, что $a + b = 17$. Максимальное количество ребер возможно, если обе компоненты - полные подграфы. Тогда ребер в нем не более, чем

$$|E| \leqslant \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2}$$

С учетом $b = 17 - a$

$$|E| \leqslant \frac{a(a-1)}{2} + \frac{(17-a)(16-a)}{2} = \frac{a^2 - a + 17 \cdot 16 - 33a + a^2}{2} = \frac{2a^2 - 34a + 272}{2} = a^2 - 17a + 136$$

Дадим ограничения на a. Для этого заметим, что, поскольку степень каждой вершины хотя бы 8, то в компоненте не может быть менее восьми вершин:

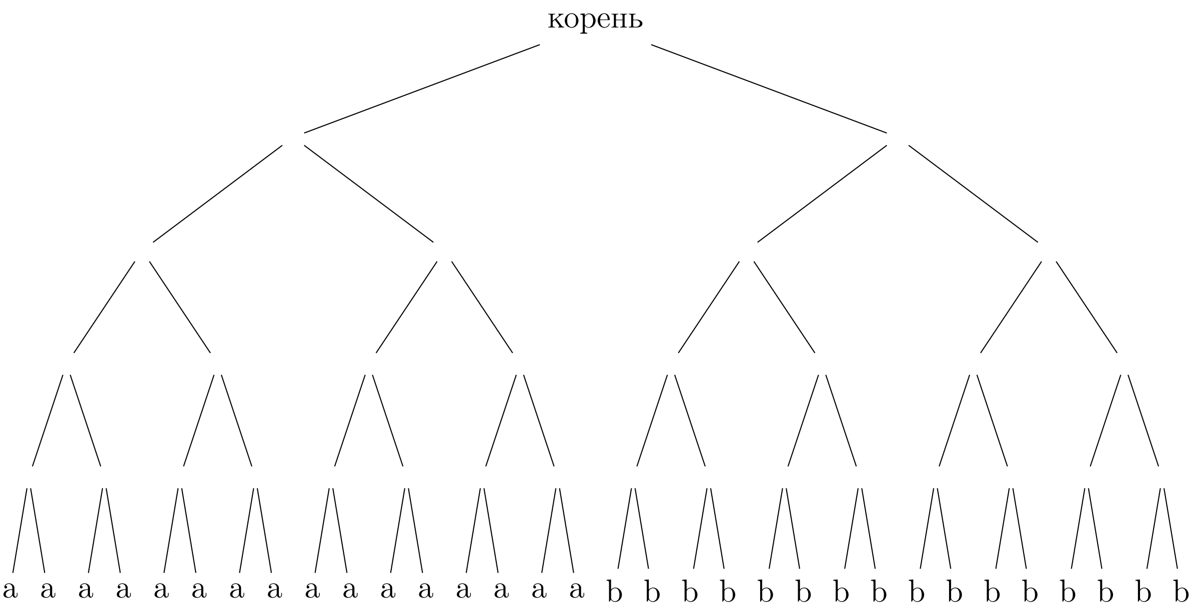
$$\begin{cases} a \geqslant 8 \\ 17 - a \geqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 8 \\ a \leqslant 9 \end{cases} \Rightarrow a \in \{8, 9\} \tag{1}$$

Если $a = 8$, то $|E| \leqslant 8^2 - 17 \cdot 8 + 136 = 64$. Если $a = 9$, то $|E| \leqslant 9^2 - 17 \cdot 9 + 136 = 64$. Значит в любом случае $|E| \leqslant 64$. Однако $|E| \geqslant 68$. Противроечние. Значит предполопжение неверно, страна не разделена на две компоненты.

Тогда граф связный, что равносильно тому, что из любой вершины можно добраться до любой.

№4

Посмотрим, как выглядят полные бинарные деревья.



Разделим листья на два типа (a и b) следующим образом: у корня есть два сына; Если путь от листа проходит через первого сына корня, то у листа тип a, иначе (тогда путь до корня пройдет через другого сына корня) - b.

Заметим, что любой путь между листьями одинакового типа не проходит через корень (хотя бы потому что существует вариант короче - через сына корня). Значит длина таких путей не больше $2(n-1)$

Также заметим, что любой путь между листьями разного типа всегда проходит через корень. А значит его длина для дерева глубины n равна $2n$.

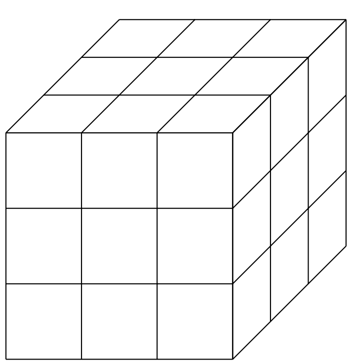
Заметим, что любой путь является частью какого-нибудь пути, начинающегося и заканчивающегося в листе.

Значит максимальная длина пути $2n$, достигается только между листьями разных типов.

Всего листьев у полного двоичного дерева глубины n будет 2^n. Очевидно, что листьев типа a и b поровну, а значит их по 2^{n-1}. Каждый путь длины $2n$ (диаметр) задается парой листьев разного типа. Получаем, что всего таких путей $2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-2}$

Ответ: 2^{2n-2}

№5

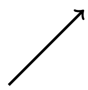


Заметим, что кубики скраю уже у границы куба. Значит с ними ничего делать не надо. Будем считать все такие кубики одной вершиной (назовем эту вершину «внешней»). Но внутри останется $(n-2)^3$ единичных кубиков. Будем считать каждый из них отдельной вершиной. Ребра между нашими вершинами - отсутсвие перегородки между ними.

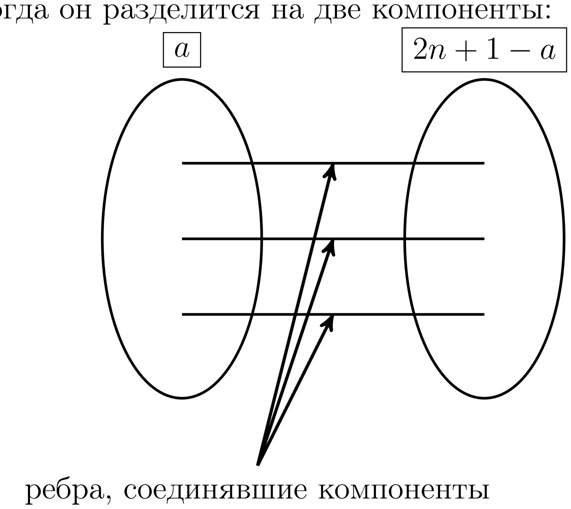
Итого у нас есть граф с $(n-2)^3+1$ вершинами. Нужно сделать так, чтобы из любой вершины была достижима «внешняя» вершина. Заметим, что это условие равносильно тому, что любая вершина достижима из любой (то есть граф связный). Но чтобы граф на p вершинах был связным, в нем должно быть хотя бы $p-1$ ребро, причем такого количества ребер хватит. Значит нужно провести (убрать перегородок) $(n-2)^3+1-1=(n-2)^3$ ребер.

Ответ: $(n-2)^3$

№6



Предположим, что можно удалить $n-1$ ребро в данном графе так, чтобы он стал несвязным. Тогда он разделится на две компоненты:



Оценим сумму степеней вершины первой и второй компоненты связанности. Будем считать, что в одной a вершин, а в другой, соответственно $2n+1-a$. Без ограничения общности будем считать, что $a \leqslant n$. Максимальная суммарная степень вершин в таком графе будет, если каждая компонента - полный подграф. Однако по условию степень каждой вершины будет не больше n. Значит в левой компоненте сумма степеней не больше $a(a-1)$ (так как $a \leqslant n$), а в правой компоненте сумма степеней не больше $(2n+1-a)n$ (так как $2n+1-a > n$). По всему графу: $a(a-1)+(2n+1-a)n = a^2-a(n+1)+2n^2+n$. После удаления $n-1$ ребра суммарная степень вершин будет $(2n-1)n-2(n-1)=2n^2-3n-2$.

Предположим, что получившиеся компоненты - не полные подграфы. Это значит, что суммарная степень вершин меньше, чем сумма степеней в случае полного подграфа:

$$\begin{aligned}
a^2-a(n+1)+2n^2+n &> 2n^2-3n-2 \\
a^2-a(n+1)+n &> -3n-2 \\
a^2-a(n+1)+4n+2 &> 0 \\
a(n+1)-4n-2 &< a^2 \\
\text{учитывая, что } n \geqslant a: & \\
a(a+1)-4n-2 \leqslant a(n+1)-4n-2 &< a^2 \\
a^2+a-4n-2 &< a^2 \\
a &< 4n+2
\end{aligned}$$

№7