Домашная работа по дискретной математике №8. Порядки

Лавренов Николай. Группа 161-2, ПМИ

6 ноября 2016 г.

№1

Дано: $(A, \leqslant)$, причем

- $\forall a \in A : a \leqslant a$;
- $\forall a, b, c \in A :$ если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$

Задается отношение $(A, \sim)$ как $\forall x, y \in A : x \sim y \Leftrightarrow x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Докажем для него рефлексивность, симметричность и транзитивность.

Так как $\forall a \in A : a \leqslant a$, значит $\forall a \in A : a \leqslant a$ и $a \leqslant a \Leftrightarrow a \sim a$ - рефлексивность.

Также $\forall x, y \in A, x \sim y \Rightarrow x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Rightarrow y \sim x$ - симметричность.

Заметим, что $\forall x, y, z \in A, x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \leqslant y, y \leqslant x, y \leqslant z, z \leqslant y \Rightarrow$(из транзитивности $\leqslant$) $x \leqslant z, z \leqslant x \Rightarrow x \sim y$ - транзитивность.

Таким образом $(A, \sim)$ - отношение эквивалентности.

№2

В множестве из четырёх элементов может быть не более $\frac{3*4}{2} = 6$ различных пар, причем все из них могут быть несравнимы. Ответ: $0, 1, 2, 3, 4, 5$ или 6.

№3

Для начала заметим, что подмножеств множества $\{1, 2, 3\}$ всего $2^3 = 8$. А различных делителей числа $42 = 2 * 3 * 7$ тоже $2^3 = 8$. Построим биекцию между элементами множеств.

Очевидно, что любой x делитель числа 42, представим как $x = 2^a * 3^b * 7^c$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$, причем каждой тройке a, b, c однозначно соответствует какой-то делитель. Построим по числам a, b, c такое множество $Y \subseteq \{1, 2, 3\}$, что $1 \in Y \Leftrightarrow a = 1$, $2 \in Y \Leftrightarrow b = 1$ и $3 \in Y \Leftrightarrow c = 1$. Понятно, что описанный способ построения задает биекцию между делителями числа 42 и подмножествами $\{1, 2, 3\}$.

Осталось показать, что при такой биекции порядки изоморфны. Пусть $x, y : 42|x, 42|y, y|x$. Это равносильно тому, что $x = 2^{a_1} * 3^{b_1} * 7^{c_1}$ и $y = 2^{a_2} * 3^{b_2} * 7^{c_2}$, причем $a_1 \leqslant a_2, b_1 \leqslant b_2, c_1 \leqslant c_2$, где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \{0, 1\}$. Построим множества Y_1 и Y_2 по описанной выше процедуре. $a_1 \leqslant a_2 \Leftrightarrow Y_1 \cap \{1\} \subseteq Y_2 \cap \{1\}$. Аналогично для b и c. Равносильно получаем, что $Y_1 \subseteq Y_2$. Значит данные частичные порядки изоморфны.

Ответ: изоморфны.

№4

Предположим, что линейные порядки $\mathbb{Z} + \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ изоморфны. Значит существует биекция $\varphi : \mathbb{Z} + \mathbb{N} \to \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

Для удобства обозначим различные множества чисел как A, B, C, D, чтобы перейти к линейным порядкам $A + B$ и $C + D (A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}', C = \mathbb{Z}, D = \mathbb{Z}')$.

Возьмем $a = 0 \in A$. Пусть $c = \varphi(a) \in C + D$. Также выберем $b = 0 \in B$. Обозначим $d = \varphi(b) \in C + D$. Из изоморфности и $a < b$ следует $c < d$. Отрезок $[a; b]$ (в $A + B$) содержит бесконечное число элементов, значит (поскольку изоморфизм порядков порождает изоморфизм отрезков) отрезок $[c; d]$ (в $C + D$) также содержит бесконечное число элементов. Это возмножно, только если $c \in C$ и $d \in D$ (ведь $c < d$).

Поскольку $d \in D = \mathbb{Z}'$, $\exists k = d - 1 \in D$. Посмотрим на образ $p = \varphi^{-1}(k)$ в $A + B$, причем $k < d \Rightarrow p < b$. Поскольку $\varphi^{-1}(d) = b$, причем b - минимум в множестве B, значит $p \in A$.

Посмотрим на отрезки $[a;p]$ и $[\varphi(a);\varphi(p)]$. Так как $a, b \in A$, отрезок $[a;p]$ содердит конечное число элементов. Однако $\varphi(a) = c \in C$ и $\varphi(p) = k \in D \Rightarrow$ отрезок $[\varphi(a);\varphi(p)]$ содержит бесконечное число элементов. Получаем противоречие, так как изоморфизм порядков не порождает изоморфизм отрезков. Значит предположение неверно, порядки $\mathbb{Z} + \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ неизоморфны.

№5

Предположим, что линейные порядки $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = A$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = B$ изоморфны. Значит существует биекция $\varphi : A \to B$, задающая изоморфизм $(\forall x, y, \in A : x \leqslant y \Leftrightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y))$.

Пусть $a = (0;0) \in A$. Пусть $b = \varphi(a) \in B$ и b задается как $b = (p;q); p, q \in \mathbb{Z}$ Возьмем элемент $r \in B$, который задается парой $(p-1, q), r < b$. Тогда отрезок в B $[r;b]$. Очевидно, что он содержит бесконечное число элементов. Рассмотрим изоморфный ему отрезок ($c = \varphi^{-1}(r) \in A$, $c < a \Rightarrow c = (0;k), k < 0$) $[c;a]$. Он содержит $1-k$ элементов, в частности конечное число элементов. Но значит эти отрезки не изоморфны. Значит наше предположение неверно и порядки A и B не изоморфны.

Ответ: линейные порядки $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ не изоморфны.

№6

В этой задаче под обозначением интервала $(a;b)$ я буду подразумевать только рациональные числа этого интервала, то есть $(a;b) \cap \mathbb{Q}$. Также под порядком на таком интервале я буду иметь в виду порядок, индуцируемый $\mathbb{Q}$ на этот интервал.

Заметим, что частичный порядок на любом интервале рациональных чисел изоморфен частичному порядку на интервале вида $(k\sqrt{2};(k+1)\sqrt{2})$, где $k \in N$. Докажем это для интервала $(0;1)$, для других это будет следовать из транзитивности изоморфности и того, что все интервалы в $\mathbb{Q}$ изоморфны.

Построим биекцию $\varphi : (0;1) \to (k\sqrt{2};(k+1)\sqrt{2})$, задающую изоморфизм. Возьмем опорное число $p \in (k\sqrt{2};(k+1)\sqrt{2})$. В частности $p \in \mathbb{Q}$. Пусть $\varphi(\frac{1}{2}) = p$. Возьмем последовательность $a_n = \frac{1}{n+2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_i > a_{i+1}$ и последовательность b_n, такую, что $b_n \in (k\sqrt{2};p)$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = k\sqrt{2}$. и $b_i > b_{i+1}$ (например можно взять последовательность уточняющих десятичных записей числа $k\sqrt{2}$ "сверху").

Для начала возьмем полуинтервалы $[a_1;\frac{1}{2})$ и $[b_1;p)$. Доопределим $\varphi()$, используя их изоморфность. Далее будем поступать итеративно, на i-ом шаге: доопределим $\varphi()$, используя изоморфность полуинтервалов $[a_{i+1};a_i)$ и $[b_{i+1};b_i)$. Важно, что все полуинтервалы берутся в правильном порядке, т. е. принадлежность разным интервалам однозначно определяет поряок на этих элементах (любой элемент из каждого следующего полуинтервала меньше предыдущих).

Таким образом мы определили изоморфность $(0;\frac{1}{2}]$ и $(k\sqrt{2};p]$. Аналогичным образом определяем изоморфность $(\frac{1}{2};1)$ и $(p;(k+1)sqrt2)$. Значит интервал $(0;1)$ изоморфен $(k\sqrt{2};(k+1)\sqrt{2})$.

Из этого следует, что порядок на $\mathbb{Q}$ изоморфен порядку на $(k\sqrt{2};(k+1)\sqrt{2}), k \in N$.

Теперь покажем, что $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ изоморфен $\mathbb{Q}$. $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ изоморфен бесконечному объединению счетного количества $\mathbb{Q}$. Пронумеруем их натуральными числами. Заметим, что i-ый из них изоморфен $(i\sqrt{2};(i+1)\sqrt{2})$. Если взять объединение таких интервалов, то мы получим интервал (по-прежнему рациональных чисел) $(0;+\infty)$. Понятно, что он изоморфен $\mathbb{Q}$. По транзитивности получаем изоморфность $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}$. Что и требовалось доказать.

Ответ: изоморфны

№7

Обозначим $(S, <)$ - лексикографический порядок на множестве бесконечных невозрастающий последовательностей натуральных чисел. Заметим, что порядок линейный (действительно, всегда можно сравнить две последовательности). И у данного порядка существует минимальный элемент - последовательность вида $0, 0, 0, \ldots$.

Докажем, что любая убывающая цепь конечна.

Докажем по индукции, что убывающая цепь из последовательностей, чисела которых, не превосходят n конечна. Заметим, что для того, чтобы все элементы цепи состояли из последовательностей, элементы которых не превосходят n достаточно, чтобы такая цепь начиналась с последовательности, первый элемент которой не превосходит n. Действительно, любой другой элемент этой последовательности не превосходит первый элемент и, следовательно, n. В то же время первые элементы остальных последовательстей не превоходят n, поскольку все эти последовательности меньше. Аналогично элементы всех таких последовательностей не могут быть больше n.

База: заметим, что если цепь начинается на $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$, то любой меньший элемент выглядит как

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p}, 0, 0, \ldots$$

Уменьшать p можно конечное число раз, значит такая цепь будет конечна.

Шаг: предположим, что все убывающие цепи из чисел, не превосходящих $k-1$ конечны. Тогда рассмотрим бесконечные цепи, состоящие из чисел, не превосходящих k.

Пусть у нас есть последовательность вида

$$\underbrace{k, k, \ldots, k}_{p \in \mathbb{N}}, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; a_n \in [0; k-1]$$

$p \in N$ показывает, что число одинаковых k в начале последовательности счетно. Если последовательность выглядела как $k, k, \ldots$, то любая меньшая последовательность либо состоит из чисел меньше k, либо выглядит как представленная выше.

Заметим, что число p чисел в начале последовательности равных k уменьшится через конечное число элементов цепи. Чтобы доказать это предположим обратное. Но по предположению индукции количество убывающих цепей, начинающихся с $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ конечно. Значит через конечное количество элементов есть элемент цепи вида $0, 0, \ldots, 0$. Любой меньший элемент имеет меньшее p. Значит предположение неверно. Получаем, что через счетное количество итераций число p уменьшится. Поскольку уменьшаться натуральное число не может бесконечное число раз, то через счетное число итераций число чисел в начале, равных k станет равным 0, то есть все числа станут меньше k. Но по предположению индукции убывающая цепь, начинающаяся с этого элемента конечна.

Таким образом любая убывающая цепь S конечна. Значит порядок на S фундированный.

Ответ: фундированное.

№8

Докажем с помощью индукции по k, что любая антицепь в множестве $\mathbb{N}^k$ с отношением координатного $(\mathbb{N}^k, \leqslant)$ порядка конечна.

База индукции: если $k = 1$, то отношение линейно, что означает, что антицепь состоит не более, чем из одного элемента. Значит любая антицепь конечна.

Шаг индукции: будем считать, что любое множество антицепей в порядке $(\mathbb{N}^{k-1}, \leqslant)$ конечно. Если множество антицепей пустое, то утверждение доказано. В противном случае можно выбрать какой-нибудь опорный элемент вида $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Выберем из всех антицепей такие, что на первом месте у них число, меньшее a_1 (то есть все цепи вида $b_1, b_2, \ldots, b_k; b_1 < a_1; \exists i \in [2; k] : b_i > a_i$, иначе это не элемент аницепи).

Заметим, что для $\forall p < a_1$ подмножество антицепей вида $p, c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ конечно по предположению индукции: цепи вида $p, c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ несравнимы тогда и только тогда, когда несравнимы цепи вида $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$, а значит их мощность не может превышать мощность множества антицепей в порядке $(\mathbb{N}^{k-1}, \leqslant)$, а оно конечно.

Поскольку различных $p < a_1$ конечное количество, то подмножество антицепей с первым элементов, не превосходящим a_1 конечно. Повторяя данные рассуждения для всех $a_2, a_3, \ldots, a_k$ получаем, что мы рассмотрели каждую антицепь хотя бы раз (Нерассмотренные элементы не могут входить в антицепь, так как они сравнимы с опорным элементов, ведь каждый элемент не меньше соответствуещего опорного). Значит множество всех антицепей в $(\mathbb{R}^k, \leqslant)$ - объединение конечного числа конечных множеств антицепей. Что и требовалось доказать.

Значит, по индукции, утверждение верно для любого $k \in \mathbb{N}$.

Ответ: нет.