№20

a) Заметим, что $f(x) = |x|$ в $x_0 = 0$ не имеет производной, в то время как $g(x) = 0$ и их произведение $h(x) = f(x)g(x) = 0$ имеют производные в $x_0 = 0$ b) Пусть $f(x) = |x|$ и $g(x) = \frac{1}{|x|}$. Тогда $h(x) = 1$ будет иметь производную

№22

Известно, что $P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$. Пусть $A_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$. Заметим, что $P_n = (A_n)'$. В свою очередь,

$$A_n = x+x^2+x^3+\cdots+x^n = x(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}) = x\frac{(x-1)(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1})}{x-1} = \frac{x(x^n-1)}{x-1}$$

Используя это, получаем:

$$P_n = (A_n)' = \left(\frac{x(x^n-1)}{x-1}\right)' = \frac{(x^{n+1}-x)'(x-1)+x(x^n-1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{((n+1)x^n-1)(x-1)+x(x^n-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^{n+1}+(n(x-1)-1)x^n-2x+1}{(x-1)^2}$$

Известно, что $Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$. Заметим, что $Q_n = (xP_n)'$. Тогда

$$Q_n = \left(\frac{x(2x^{n+1}+(n(x-1)-1)x^n-2x+1)}{(x-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(n(n+2)(x-1)^2-3x+1)x^n+3x-1}{(x-1)^3}$$

№23, a

Известно, что $f(x) = x + e^x$ $x > 0$. f монотонно возрастает (т. к. x и e^x монотонно возрастают). Тогда $D(f) = (0; +\infty), E(f) = (1; +\infty)$. Значит есть $g(x) = f^{-1}(x)$ - обратная функция, $D(f) = (1; +\infty), E(f) = (0; +\infty)$.

Причем $f' = 1 + e^x$, а значит $g' = (f')^{-1} = \frac{1}{1+e^x}$

№23, b

Дана функция $thx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

№24, a

Дано: функция f задана параметрически: $y = a(1-\cos t), x = a(t-\sin t)$. Тогда

$$f' = \frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'} = \frac{a\sin t}{a-a\cos t} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

№24, b

Дано: функция f задана параметрически:

$$y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

. Тогда

$$f' = \frac{(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}})'}{(\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}})'} = \frac{\arccos' \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'}{\arcsin' \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}} = -1$$