

Εκφραστική υλοποίηση των αλγορίθμων HTM ως βάση για περαιτέρω ανάλυση

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Κωνσταντίνος Σαμαράς-Τσακίρης

2019-06-05

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Στόχος της εργασίας	3
1.2	Θεμελιώνοντας την έννοια της νοημοσύνης	3
1.3	Γιατί μελετούμε την HTM;	5
1.3.1	Φυσικοί αλγόριθμοι	6
1.3.2	HTM ως μοντέλο του εγκεφαλικού νεοφλοιού	6

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Στόχος της εργασίας

Σε αυτήν την εργασία μελετάται μια αλγοριθμική θεωρία νοημοσύνης, η *Hierarchical Temporal Memory*. Βασικοί αλγόριθμοι της θεωρίας διατυπώνονται σε υψηλού επιπέδου γλώσσα με εκφραστική περιεκτικότητα, αποσκοπώντας στην καταπολέμηση της βασικής μορφής πολυπλοκότητας που απαντά σε αυτό το μοντέλο: την *εκφραστική πολυπλοκότητα* [12].

Με προγραμματιστική διατύπωση πιστή στη μαθηματική διατύπωση των αλγορίθμων, το έργο αυτό φιλοδοξεί να θεμελιώσει και να διευκολύνει την περαιτέρω μελέτη ενός συστήματος που, πέρα από το επιστημονικό του ενδιαφέρον, προσφέρεται για την αντιμετώπιση δύσκολων προβλημάτων τεχνητής νοημοσύνης.

1.2 Θεμελιώνοντας την έννοια της νοημοσύνης

Κάθε φυσικό σύστημα καθορίζεται από τους περιορισμούς στα σύνορά του. Ομοίως ο άνθρωπος καθορίζεται από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον του. Στην προσπάθεια να κατανοήσουμε τον άνθρωπο, το πώς λειτουργεί, το γιατί δρα με συγκεκριμένο τρόπο, σταθμό αποτελεί η κατανόηση της συμπεριφοράς που καλούμε *νοημοσύνη*.

Η συμπεριφορά είναι παρατηρήσιμη και μας δίνει μια οπτική στην εσωτερική κατάσταση, στις κρυφές μεταβλητές ενός συστήματος, οπότε ίσως αποτελεί το σημείο όπου μπορούμε να πιάσουμε το νήμα της αναζήτησης. Είναι όμως ικανοποιητικό να χαρακτηρίσουμε τη νοημοσύνη συμπεριφορά;

Ο όρος νοημοσύνη χαίρει ευρείας ερμηνείας, ευρισκόμενος στο σταυροδρόμι πολλών επιστημονικών πεδίων, από την ψυχολογία μέχρι επιστήμη υπολογιστών [7]. Όλες μάλιστα οι πιο συγκεκριμένες ερμηνείες προσπίπτουν στο ιδιαίτερα ασαφές νόημα του όρου στην καθομιλουμένη. Ίσως μπορούμε να ξεμπλέξουμε για πρακτικούς σκοπούς αυτό το κουβάρι, παρατηρώντας ότι νοημοσύνη σίγουρα επιδεικνύουν ζωντανοί οργανισμοί ως εξελικτικό χαρακτηριστικό, ως εργαλείο στη διαρκή προσαρμογή τους στο επίσης δυναμικό τους περιβάλλον.

Νοημοσύνη ως προσαρμογή

Η νοημοσύνη λοιπόν, ως προσαρμογή, προκύπτει από τη σχέση του οργανισμού με το περιβάλλον του. Αν ο οργανισμός προσαρμόζεται ταιριάζοντας υλικά του κατασκευάσματα στο περιβάλλον του, η νοημοσύνη επεκτείνει αυτήν τη δημιουργικότητα, επιτρέποντάς

του να πειραματιστεί εικονικά. [1, σελ 3]. Ας ακολουθήσουμε όμως τη σκέψη του ψυχολόγου Jean Piaget στο ζήτημα.

Προσαρμογή είναι μια δυναμική διαδικασία αλληλεπίδρασης του οργανισμού με το περιβάλλον που περιλαμβάνει 2 στάδια: *αφομοίωση* και *συμβιβασμό*. Έστω ότι ο οργανισμός μπορεί να περιγραφεί με μια σειρά εσωτερικών μεταβλητών $\{a, b, c\}$ και εξωτερικών στοιχείων του περιβάλλοντος $\{x, y, z\}$, που συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες διαδικασίες, ορίζοντας ένα μοντέλο (schema):

$$a + x \rightarrow b$$

$$b + y \rightarrow c$$

$$c + z \rightarrow a$$

Η *αφομοίωση* συνίσταται στην ικανότητα του οργανισμού να ενσωματώνει τα στοιχεία του περιβάλλοντος στις εσωτερικές του καταστάσεις και να συνεχίζει αυτές τις διαδικασίες. Μια αλλαγή όμως στο περιβάλλον, έστω $x \rightarrow x'$, αποτελεί πρόκληση. Είτε ο οργανισμός δεν προσαρμόζεται, που σημαίνει ότι ο κύκλος σπάει και ο οργανισμός παύει να επιτελεί κάποια λειτουργία του, είτε προσαρμόζεται, τροποποιώντας υποχρεωτικά το μοντέλο του για να *συμβιβαστεί* με τη νέα εξωγενή πραγματικότητα ($b \rightarrow b'$):

$$a + x' \rightarrow b'$$

$$b' + y \rightarrow c$$

$$c + z \rightarrow a$$

Σύμφωνα με αυτήν την περιγραφή, *προσαρμογή* είναι η ισορροπία της *αφομοίωσης* ($a + x \rightarrow b \dots$) με το *συμβιβασμό* ($x \rightarrow x' \Rightarrow b \rightarrow b'$).

Η προηγούμενη περιγραφή ισχύει εξίσου για τη *νοημοσύνη*. Νοημοσύνη είναι αφομοίωση, στο βαθμό που συμπεριλαμβάνει όλα τα εμπειρικά δεδομένα στη δομή της. Είναι όμως και συμβιβασμός, καθώς κατά τη διαρκή αφομοίωση αποκρίνεται στην πρόκληση των περιβαλλοντικών αλλαγών με τροποποίηση του μοντέλου που περιγράφει τον κόσμο.

Η διανοητική προσαρμογή λοιπόν, όπως κάθε προσαρμογή, συνίσταται από ένα μηχανισμό αφομοίωσης και συμπληρωματικού συμβιβασμού που διατηρούνται σε διαρκή ισορροπία. Ένα μυαλό προσαρμοσμένο στην πραγματικότητα είναι αυτό που δε δέχεται πια προκλήσεις στο νοητικό του μοντέλο για τον κόσμο, που δε χρειάζεται να τροποποιήσει περαιτέρω το μοντέλο αυτό για να εξηγήσει την εξελισσόμενη πραγματικότητα [1, σελ 5-7].

Ένας πρακτικός ορισμός

Από το συμπεριφορικό ορισμό του Turing στο γνωστό "Turing test" μέχρι το μηχανιστικό ορισμό του Piaget, και με πολλές στάσεις ενδιάμεσα στο [Lenat 4] και στο [Minsky 3], η πρακτικότητα της έννοιας τίθεται υπό αμφισβήτηση.

Ένας άξονας του ορισμού είναι η σχέση της νοημοσύνης με τη λογική. Στο [13] ο Wang χωρίζει τα συλλογιστικά συστήματα σε 3 κατηγορίες:

- Αμιγώς αξιωματικά. Όλες οι λογικές προτάσεις προκύπτουν από τα αξιώματα, χαρακτηριστικό παράδειγμα η ευκλείδεια γεωμετρία.
- Μερικώς αξιωματικά. Η γνώση δεν επαρκεί σε όλες τις περιπτώσεις και υπάρχει μηχανισμός προσαρμογής, όπως στα ασαφή συστήματα.

- Μη αξιωματικά. Χτίζονται με βάση την υπόθεση ότι η γνώση ή οι πόροι δεν επαρκούν για οποιοδήποτε συλλογισμό.

Προτείνει λοιπόν ότι η απαίτηση νοημοσύνης ισοδυναμεί με την απαίτηση μη αξιωματικού συλλογιστικού συστήματος, λόγω της ανεπάρκειας πληροφορίας και πόρων.

Προσθέτοντας άλλο ένα έρεισμα στη συζήτηση, η νοημοσύνη συσχετίζεται άμεσα με τη δημιουργικότητα [9]. Δημιουργικότητα είναι η ικανότητα παραγωγής καινοτόμων και χρήσιμων ιδεών, επομένως συνδέεται με την τέλεση των προαναφερθέντων συμβιβασμών.

Σε αναζήτηση ενός χρήσιμου ορισμού στα πλαίσια αυτής της εργασίας, μπορούμε να στραφούμε στον ορισμό του [Wang 5]:

Νοημοσύνη είναι η ικανότητα ενός συστήματος επεξεργασίας πληροφορίας να προσαρμόζεται στο περιβάλλον του με ανεπαρκή γνώση και πόρους.

Αναφερόμαστε σε σύστημα επεξεργασίας πληροφορίας, για να μπορούμε να μελετήσουμε την εσωτερική του κατάσταση και αλληλεπίδραση με το περιβάλλον αφηρημένα, σε αντιδιαστολή με ένα πρόβλημα π.χ. ρομποτικής. Το σύστημα έχει μια γλώσσα εισόδου και εξόδου, με την οποία εκφράζονται τα ερεθίσματα του περιβάλλοντος και οι δράσεις του συστήματος. Το σύστημα συνήθως έχει κάποιο σκοπό για τον οποίο παράγει δράσεις σύμφωνα με τη γνώση του, και για την επεξεργασία του δαπανά περιορισμένους πόρους.

Η προσαρμογή μπορεί να ερμηνευθεί όπως προηγούμενως, ή πιο συνοπτικά ως ότι το σύστημα μαθαίνει από τις εμπειρίες του.

Ο περιορισμός της ανεπαρκούς γνώσης και πόρων σημαίνει ότι το σύστημα υπόκειται σε αυτές τις συνθήκες:

- Περιορισμένο ως προς τους υπολογιστικούς του πόρους
- Λειτουργεί σε πραγματικό χρόνο
- Καλύπτει όλο το πεδίο των εκφράσιμων στη γλώσσα του εισόδων και εξόδων (δεν υπάρχουν άκυρες είσοδοι/εξοδοί)

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό νοημοσύνη είναι μια ισχυρή μορφή προσαρμογής.

Οι παραπάνω περιορισμοί μας οδηγούν προς την εξέταση *συστημάτων ροής (streaming)*, με *ανθεκτικότητα σε σφάλματα* και με *απόδοση που να κλιμακώνεται με τους διαθέσιμους πόρους* — υπό την προϋπόθεση της *διαρκούς προσαρμογής σε νέες συνθήκες* του περιβάλλοντος.

Η αυλαία σηκώνεται για να παρουσιαστεί το υπό μελέτη σύστημα: **Hierarchical Temporal Memory (HTM) της Numenta.**

1.3 Γιατί μελετούμε την ΗΤΜ;

Ο πρακτικός ορισμός της νοημοσύνης επιβάλλει περιορισμούς στο τι σύστημα θα θεωρήσουμε ότι επιδεικνύει χαρακτηριστικά νοημοσύνης. Για παράδειγμα, τα συστήματα εμπειρογνομόνων δεν πληρούν αρκετές από τις προδιαγραφές, ενώ πολλά συστήματα νευρωνικών δικτύων επιβλεπόμενης μάθησης που βρίσκονται τώρα σε χρήση επίσης προσπίπτουν τουλάχιστον στην προδιαγραφή της διαρκούς προσαρμοστικότητας.

1.3.1 Φυσικοί αλγόριθμοι

Ακολουθώντας τη λογική του Chazelle [12], η επιτυχία της φυσικής του 20ου αιώνα είναι σε μεγάλο βαθμό η επιτυχία της μαθηματικής έκφρασης. Με ένα μικρό σύνολο εξισώσεων μπορούμε να περιγράψουμε τι συμβαίνει στο φυσικό κόσμο. Αυτή η διαπίστωση αν μη τι άλλο σκιαγραφεί τις αρχές που διέπουν το φυσικό κόσμο: συμμετρία και κανονικότητα, η αμβροσία της συνήθους μαθηματικής διατύπωσης. Αν αυτή η παρατήρηση ήταν καθολική, τα ίδια εργαλεία θα επαρκούσαν για να περιγράψουν όλα τα επιστημονικά πεδία.

Η βιολογία διέπεται προφανώς από τους ίδιους φυσικούς νόμους και συνίσταται στην εφαρμογή τους επανειλημμένα στο βάθος των αιώνων. Παρόλο που οι αρχές είναι οι ίδιες, φαινομενολογικά η υπόθεση εργασίας είναι αντίστροφη: κάθε φαινόμενο είναι ειδικό και ξεχωριστό, αλλοιωσιμο υπό κάθε μετασχηματισμό, εκτός από ορισμένες περιπτώσεις που μπορούν να κατηγοριοποιηθούν μαζί. Γιατί οι αρχές επιτρέπουν καταστάσεις διακλάδωσης στα στοιχειώδη συστήματα που περιγράφουν και διάσπαση της συμμετρίας [11]. Έτσι, ο αναγωγισμός δε συνεπάγεται εποικοδομητισμό [2]. Με μια κομψή έκφραση: *η ιστορία είναι ο μεγάλος διασπαστής της συμμετρίας* [12].

Δίχως την απλοποιητική επιρροή της συμμετρίας, αυτή η οπτική γωνία έχει να αντιμετωπίσει μια μορφή πολυπλοκότητας διαφορετική από αυτήν που συνήθως ορίζουμε στην επιστήμη υπολογιστών: *εκφραστική πολυπλοκότητα*. Είναι ωφέλιμο αντιστοίχως να χρησιμοποιήσουμε και διαφορετική γλώσσα για τη μελέτη αυτών των φαινομένων: *τους (φυσικούς) αλγορίθμους* [12]. Παραδείγματα φυσικών αλγορίθμων εξερευνούνται στα [8], [10]

Συνδέοντας τον πρακτικό ορισμό της νοημοσύνης και τη χρησιμότητα των αλγορίθμων για να περιγράψουν *εκφραστικά πολύπλοκα* φαινόμενα, μπορούμε να επιχειρήσουμε τη μελέτη της νοημοσύνης με μια αλγοριθμική της θεώρηση. Αυτό είναι το βασικό κίνητρο για το μοντέλο που μελετά αυτή η εργασία, τη *Hierarchical Temporal Memory* (HTM).

1.3.2 HTM ως μοντέλο του εγκεφαλικού νεοφλοιού

Εποπτική εγκεφαλική ανατομία

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος χωρίζεται σε διακριτές δομές με διαφορές τόσο στο μορφολογικό, όσο και στο λειτουργικό επίπεδο. Ένας χρήσιμος τέτοιος διαχωρισμός συνίσταται από τα εξής τμήματα:

- Πρόσθιος/διάμεσος εγκέφαλος, που περιλαμβάνει τα εγκεφαλικά ημισφαίρια, τους θαλάμους, τους ιπποκάμπους κ.α.
- Παρεγκεφαλίδα, που εντοπίζεται στο πίσω μέρος του κρανίου κάτω από τα ημισφαίρια
- Εγκεφαλικό στέλεχος, που εντοπίζεται επίσης προς τα πίσω και είναι η προέκταση του νωτιαίου μυελού

Σε αυτό το σημείο αξίζει μία πολύ συνοπτική επισκόπηση των εγκεφαλικών δομών, για την καλύτερη κατανόηση της HTM.

Το εγκεφαλικό στέλεχος είναι το εξελικτικά αρχαιότερο τμήμα του εγκεφάλου και σχετίζεται με βασικές ομοιοστατικές λειτουργίες. Το μεταιχμιακό σύστημα στη βάση των ημισφαιρίων αναπτύχθηκε πριν από περίπου 250 εκατομμύρια χρόνια στα θηλαστικά και μία από τις βασικές του λειτουργίες είναι η ρύθμιση των συναισθημάτων. Αυτές οι

δομές έχουν μορφολογία πυρηνική, δηλαδή τα σώματα των νευρώνων τους συγκεντρώνονται σε σφαιροειδείς δομές από τις οποίες εκτείνονται οι άξονές τους.

Η επιφάνεια των εγκεφαλικών ημισφαιρίων είναι ο εγκεφαλικός φλοιός, με το μεγαλύτερο μέρος του να αποτελεί το νεοφλοιό, όπου οι νευρώνες (τα σώματα) είναι δομημένοι σε 6 επίπεδα, και σε μικρό μέρος τον αλλοφλοιό, που έχει 3 επίπεδα νευρώνων. Οι άξονες των νευρώνων φεύγουν από το επίπεδο του φλοιού σαν καλώδια σε πλακέτα. Ο φλοιός είναι το εξελικτικά πιο σύγχρονο τμήμα του εγκεφάλου, και ειδικά ο νεοφλοιός, που απαντά μόνο σε θηλαστικά. Εδώ εντοπίζονται λειτουργίες σχετικές με "ανώτερη συλλογιστική" και αφηρημένη σκέψη. Η παρεγκεφαλίδα επίσης έχει τη μορφή φλοιού, αλλά είναι διακριτή από τα ημισφαίρια. Σχετίζεται τουλάχιστον με τη ρύθμιση λεπτών κινήσεων. Και οι δύο αυτές δομές που οργανώνονται σε φλοιούς, αντί για πυρήνες, μοιράζονται ένα γεωμετρικό πλεονέκτημα: το μέγεθός τους μπορεί να κλιμακωθεί ευκολότερα. Αποτέλεσμα της κλιμάκωσης του μεγέθους τους είναι οι αναδιπλώσεις στην επιφάνεια του ανθρώπινου εγκεφάλου. Στον άνθρωπο ο νεοφλοιός αποτελεί περίπου τα 3/4 όλου του εγκεφάλου.

Στον τομέα της μηχανικής μάθησης εμφανίζονται 3 βασικά μοντέλα μάθησης: επιβλεπόμενη, μη επιβλεπόμενη και ενισχυτική. Υπάρχουν επιχειρήματα στη βιβλιογραφία [6] ότι 3 από τις εγκεφαλικές δομές που περιγράφηκαν εφαρμόζουν αυτά τα 3 μοντέλα αντίστοιχα: η παρεγκεφαλίδα, ο εγκεφαλικός φλοιός και τα βασικά γάγγλια.

Σημαντικά ανατομικά στοιχεία του φλοιού είναι η οργάνωση των νευρώνων του σε επίπεδα και οι αναδρομικές συνδέσεις μεταξύ τους. Έχει επίσης παρατηρηθεί ότι η πλαστικότητα των νευρικών συνάψεων στο φλοιό ακολουθεί κανόνα Hebbian: ισχυροποιούνται όταν το προσυναπτικό ερέθισμα συσχετίζεται με μετασυναπτική δραστηριότητα και εξασθενούν αλλιώς, χτίζοντας την αιτιώδη σχέση μεταξύ προσυναπτικής και μετασυναπτικής δραστηριότητας. Διατυπώνεται έτσι η υπόθεση ότι ο φλοιός μαθαίνει με μη επιβλεπόμενο τρόπο να οργανώνει την εξωγενή και εσωτερική πραγματικότητα σε έννοιες, να δημιουργεί συμβολικές αναπαραστάσεις για μεταβλητές κατάστασης.

Με δεδομένη αυτήν τη βασική ανατομία, μπορούμε να διαπιστώσουμε τι σκοπεύει να μοντελοποιήσει η ΗΤΜ.

Στόχος της ΗΤΜ

Η θεωρία της Hierarchical Temporal Memory αναπτύσσεται από την ερευνητική εταιρία Numenta, που δηλώνει το διττό της στόχο ως εξής: καταρχήν, την αλγοριθμική μοντελοποίηση της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφαλικού νεοφλοιού, και ως συνέπεια τη μελέτη των εφαρμογών της θεωρίας τούτης ως σύστημα τεχνητής νοημοσύνης. Επομένως το μοντέλο που μελετά αυτή η εργασία δεν έχει σχεδιαστεί κατά κύριο λόγο ως σύστημα τεχνητής νοημοσύνης, αλλά ως *θεωρία της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφαλικού νεοφλοιού, περιορισμένη από βιολογικά δεδομένα*. Παρόλα αυτά, εδώ δε θα συζητηθεί η νευροεπιστημονική πιστότητα του μοντέλου, μονάχα οι βιολογικές αρχές στις οποίες βασίζεται.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ανατομικά στοιχεία, μοντελοποιώντας το νεοφλοιό η ΗΤΜ δεν αποτελεί πλήρες μοντέλο του ανθρώπινου εγκεφάλου. Δεν προσφέρεται για παράδειγμα για μελέτη των συναισθημάτων ή των βασικών ομοιοστατικών μηχανισμών, αλλά μόνο των "ανώτερων συλλογιστικών". Η επιλογή αυτή δεν είναι τυχαία. Χάρη στην εξελικτική του νεότητα και γεωμετρική επεκτασιμότητα, ο νεοφλοιός δεν έχει υποστεί τόσες εξελικτικές βελτιστοποιήσεις, όσο τα υπόλοιπα τμήματα του εγκεφάλου, και διατηρεί σε μεγάλο βαθμό κοινή μορφολογία σε όλη του την έκταση. Αυτή η παρατήρηση ενδεχομένως να καθιστά το πρόβλημα της διάκρισης των θεμελιωδών αρχών λειτουργίας του από τις εξελικτικές βελτιστοποιήσεις πολύ ευκολότερο, σε σχέση με άλλα τμήματα.

Βιβλιογραφία

- [1] J. Piaget, *The Origins of Intelligence in Children*, σύνταξη υπό M. Cook, σειρά The Origins of Intelligence in Children. New York, NY, US: W W Norton & Co, 1952, 419 pagetotals. DOI: **10.1037/11494-000**.
- [2] P. W. Anderson, «More Is Different,» *Science*, τόμ. 177, αρθμ. 4047, σσ. 393–396, 4 Αύγ. 1972, ISSN: 0036-8075, 1095-9203. DOI: **10.1126/science.177.4047.393**. pmid: 17796623.
- [3] M. Minsky, *Society Of Mind*. Simon and Schuster, 15 Μαρ. 1988, 342 pagetotals, ISBN: 978-0-671-65713-0.
- [4] D. B. Lenat και E. A. Feigenbaum, «On the Thresholds of Knowledge,» *Artificial Intelligence*, τόμ. 47, αρθμ. 1, σσ. 185–250, 1 Ιαν. 1991, ISSN: 0004-3702. DOI: **10.1016/0004-3702(91)90055-0**.
- [5] P. Wang, «On the Working Definition of Intelligence,» 1995.
- [6] K. Doya, «What are the computations of the cerebellum, the basal ganglia and the cerebral cortex?» *Neural Networks: The Official Journal of the International Neural Network Society*, τόμ. 12, αρθμ. 7-8, σσ. 961–974, Οκτ. 1999, ISSN: 1879-2782. pmid: 12662639.
- [7] S. Legg και M. Hutter, «A Collection of Definitions of Intelligence,» στο *Advances in Artificial General Intelligence: Concepts, Architectures and Algorithms*, IOS Press, 2007, σσ. 17–24.
- [8] R. Paton, H. Bolouri, W. M. L. Holcombe, J. H. Parish και R. Tateson, *Computation in Cells and Tissues: Perspectives and Tools of Thought*. Springer Science & Business Media, 14 Μαρ. 2013, 349 pagetotals, ISBN: 978-3-662-06369-9.
- [9] M. Benedek, E. Jauk, M. Sommer, M. Arendasy και A. C. Neubauer, «Intelligence, Creativity, and Cognitive Control: The Common and Differential Involvement of Executive Functions in Intelligence and Creativity,» *Intelligence*, τόμ. 46, σσ. 73–83, 1 Σεπτ. 2014, ISSN: 0160-2896. DOI: **10.1016/j.intell.2014.05.007**.
- [10] A. Adamatzky, επιμελητής, *Advances in Physarum Machines: Sensing and Computing with Slime Mould*, Emergence, Complexity and Computation, Springer International Publishing, 2016, ISBN: 978-3-319-26661-9. διεύθν.: <https://www.springer.com/gp/book/9783319266619> (επίσκεψη 29/05/2019).
- [11] K. Brading, E. Castellani και N. Teh, «Symmetry and Symmetry Breaking,» στο *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, επιμελητής, Winter 2017, Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017. διεύθν.: <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/symmetry-breaking/> (επίσκεψη 29/05/2019).

-
- [12] B. Chazelle. (). Natural Algorithms and Influence Systems, διεύθυν.: <https://cacm.acm.org/magazines/2012/12/157889-natural-algorithms-and-influence-systems/abstract> (επίσκεψη 28/05/2019).
- [13] P. Wang, «Cognitive Logic versus Mathematical Logic,»