Властивості бінарних відношень

Тип	Визначення	Приклади
Рефлексивне	$\forall x \in A: (x,x) \in R$	«≤» на $\mathbb{N}$; рівність =; паралельність; “кратний (ділиться без остачі)” на множині $\mathbb{N}$
Антирефлексивне (іррефлексивне)	$\forall x \in A: (x,x) \notin R$	«<»; «>»; “старший за”
Симетричне	$\forall x,y \in A: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$	«бути родичами»; «мати однакову довжину»; перпендикулярність на множині прямих
Асиметричне	$\forall x,y \in A: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$	«<»; “старший”
Антисиметричне	$\forall x,y \in A: (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$	«≤»; відношення «бути підмножиною»
Відношення повноти (повне відношення)	$\forall x,y \in A: (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$	«≤»; “бути родичем” у сім’ї
Транзитивне	$\forall x,y,z \in A: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$	«<»; «бути предком»; “ділиться без остачі на”
Еквівалентність	Рефлексивне + симетричне + транзитивне	«≡ mod n»; «мати однакову довжину» на множині векторів; паралельність
Частковий (або нестрогий) порядок	Рефлексивне + антисиметричне + транзитивне	«≤»; “є підножиною” $\subseteq$; “ділиться на”
Строгий порядок	Асиметричне(+іррефлексивне) + транзитивне	«<»; “старший”; “довший”
Лінійний (нестрогий) порядок	Частковий порядок + повнота	«≤» на $\mathbb{N}$; «лексикографічний порядок»

Коментарі

1. **Рефлексивне** і **іррефлексивне** — взаємовиключні.

2. **Асиметричне** автоматично є *іррефлексивним*.

3. **Антисиметричне** дозволяє (x,y) і (y,x), але лише якщо x=y, але воно *не обов’язково рефлексивне.* Прикладом такого антисиметричного, але не рефлексивного відношення є відношення "бути батьком" на множині людей (ніхто не є батьком собі, тому не рефлексивне; якщо A — батько B і B — батько A, то це неможливо для A ≠ B.

4. **Еквівалентність** — це *розбиття* множини на ***<u>класи еквівалентності</u>***. Наприклад: “еквівалентність за модулем 5” 17≡22 mod 5 (дає однаковий залишок при діленні на 5) означає, що на множині натуральних чисел є 5 класів, що не перетинаються і повністю охоплюють (покривають) множину. Це підмножини {1, 6, 11,…}, {2, 7, 12, ...}, {3, 8, 13, ..}, {4, 9, 14, ...} і {5, 10, 15, ..}, що дають в остачі відповідно 1,2,3,4 і 0.

5. **Повнота і антисиметрія (чи асиметрія)** не гарантує *впорядкованість*. Прикладом повного відношення, що не є відношенням порядку, є відношення “виграє” у грі “камінь, ножиці, папір”. Це класичний приклад *нетранзитивності*

6. **Частковий порядок** — не всі елементи можуть бути порівняні (не є *повним* відношенням) Приклад: множина дільників числа 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}. Не виконується жодна з двох умов “2 кратне трьом” і “3 кратне двом”.

7. **Лінійний порядок** — це «частковий порядок + повнота», тобто зазвичай мова про *нестрогий* порядок