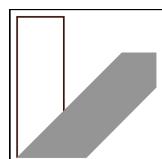


WS2010

PPA2

Komplexe Widerstände

Achim Guckenberger - Markus Sesselmann





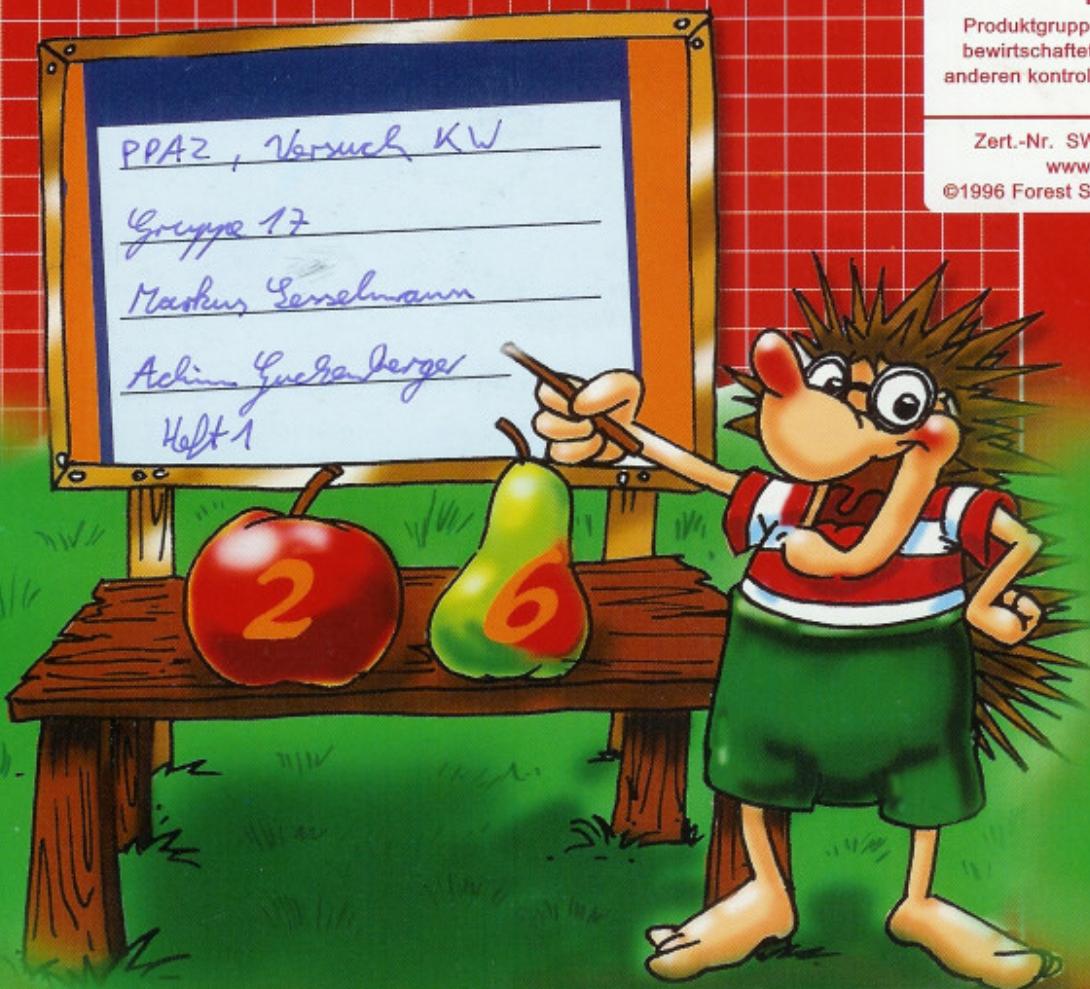
Mix

Produktgruppe aus vorbildlich bewirtschafteten Wäldern und anderen kontrollierten Herkünften

Zert.-Nr. SW-COC-004183

www.fsc.org

©1996 Forest Stewardship Council



papier ohne
optische Aufheller

bezdrobený psací papír, 80 g/qm, 16 listov, bielené bezchlódrovo • bezdrobený psací papír, 80 g/qm, 16 listov, bieleno bez chlóru • Papir za pisanje, bez upotrebe drveta, 80 g/qm, 16 listova, izbijeljano bez klorja • papier bezdrożowy, 80 g/qm, 16 kartków, wybielany bez stosowania chlóru • hârtie de scris fără conținut de lemn, 80 g/mp, 16 file, înăbiată fără clor • карты без деревянных, 80 г/кв.м., 16 листов, избелена без хлора • Письмовой папир не имеющий деревеной массы, 80 г/м², 16 листов. Видленый покосно хлором • Carta per scrivere senza fibra legnosa, 80 g/qm, 16 fogli, bianchita priva di cloro • färbentes Schreibrpapr, 80 g/m², 16 Blatt, Klorhenteken fehltet;

26

holzfreies Schreibpapier,
80 g/qm, 16 Blatt,
chlorfrei gebleicht

VERSUCH: KOMPLEXE WIDERSTÄNDE

1. Allgemeines

- Teilnehmer: Achim Guderberger, Markus Lenzmann
- Datum: 28. 10. 2010
- Titel des Versuchs: Versuch KW
- Versuchsort: In der FÜ
- Gruppennummer: 17
- Betreuer: Uli Renger

2. Einleitung und Ziel

Die Grundbausteine der Elektronik stellen ohmische Widerstände, Kondensatoren und Spulen dar. Alle drei Bauteiltypen besitzen charakteristische Eigenschaften, wie etwa die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung oder das Verhalten bei An- und Ausschaltvorgängen.

Vor allem bei diesen Schaltvorgängen ist es von großer Bedeutung, die genauen Verhaltensweise zu kennen, um Überspannungen und andere Gefahren für Gerät und Benutzer vermeiden zu können.

Die mathematische Behandlung dieser doch sehr unterschiedlichen Bauteile kann jedoch mit Hilfe der komplexen Zahlen vereinheitlicht werden, weshalb diese auch „komplexe Widerstände“ genannt werden.

Das Ziel dieses Versuches ist, sich eingehender mit diesen Bauteilen und deren insbesondere auch mit Komplikationen zu beschäftigen, um die sich ergebenden Eigenschaften besser zu verstehen. In diesem Zuge soll auch die bereits im Versuch SK erworbene Erfahrung mit dem Oszilloskop weiter ausgebaut werden.

3. Fragen zur Vorbereitung

Aufgabe 1

Der Effektivwert einer Wechselspannung ist so definiert, dass eine Gleichspannung mit diesem Wert die gleiche Leistung abringt wie die entsprechende Wechselspannung im Mittel. D.h.:
 mit $\bar{P}_{\text{Gleichg.}} = \bar{P}_{\text{Wechselg.}}$

$$\text{Bew.: } U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t) \cdot I(t) \cdot dt \quad \text{mit } T \text{ als Periode der Wechselspann.}$$

Für eine sinusförmige Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ ergibt sich folglich mit Hilfe der Beziehung $I = \frac{U}{R}$:

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U^2(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt = \\ = \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[\frac{1}{2} (wt - \sin(\omega t) \cos(\omega t)) \right]_0^T = | \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = | \omega = \frac{2\pi}{T} \\ = \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[\frac{1}{2} T - \frac{1}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \right] \\ = \frac{U_0^2}{T} \cdot \frac{1}{2} T = \\ = \frac{1}{2} \cdot U_0^2$$

Also: $U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_0$ ✓

Eine Gleichspannung der Größe $\frac{1}{\sqrt{2}} U_0$ erbringt an einem ohmschen Widerstand die gleiche Leistung, wie eine sinusförmige Wechselspannung mit der Scheitelspannung U_0 .

Ieff?

Aufgabe 2

a) Da $\tilde{U}(t) = \tilde{R} \cdot \tilde{I}(t)$, d.h. $\tilde{U} \sim \tilde{I}$ gilt, und Strom und Spannung an einem ohmschen Widerstand nicht phasenverschoben.

$$\rightarrow \varphi = 0 \quad \checkmark$$

b) Spule: $\tilde{U}(t) = i\omega L \cdot \tilde{I}(t)$

Multiplikation mit der imaginären Einheit ist gleichbedeutend mit einer Drehung um $+90^\circ$

\rightarrow Bei einer idealen Spule steht die Spannung dem Strom um 90°

vorans

$$\Rightarrow \varphi = -90^\circ, \text{ wenn } \tilde{I}(t) = I_0 e^{i \cdot (\omega t + \varphi)} \quad \checkmark$$

Bei einer reellen Spule gilt: $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$

c) Kondensator: $\tilde{U}(t) = \frac{i}{i\omega C} \cdot \tilde{I}(t) = -\frac{i}{\omega C} \cdot \tilde{I}(t)$

\rightarrow Drehung um -90°

\rightarrow Bei einem idealen Kondensator steht der Strom der Spannung um -90° vorans.

$$\Rightarrow \varphi = +90^\circ, \text{ wenn } \tilde{I}(t) = I_0 \cdot e^{i \cdot (\omega t + \varphi)} \quad \checkmark$$

Bei einem reellen Kondensator gilt: $0 < \varphi < 90^\circ$



Aufgabe 3

a) Gl. (2) aus Versuch ES: $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\omega_A t)$

mit: λ : Dämpfungskonstante

ω_0 : Eigenfrequenz

ω_A : Antriebsfrequenz

Gl. (9) aus dieser Versuch: $L \ddot{J} + R \dot{J} + \frac{1}{C} \cdot J = i\omega U_0 e^{i\omega t}$

laut: $\ddot{J} + \frac{R}{L} \dot{J} + \frac{1}{LC} \cdot J = \frac{i\omega}{L} \cdot U_0 e^{i\omega t}$

Man erkennt sofort, ^{dann} die Eigenfrequenz bei Periodenschwingung ist wie folgt ist:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \checkmark$$

$\neq \lambda =$

b) \tilde{R}_{yss} mittels Gl. (6):

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{yss} &= i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R = \\ &= R + i \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \end{aligned}$$

Folglich gilt: $| \tilde{R}_{yss} | = \sqrt{(\operatorname{Re} \tilde{R}_{yss})^2 + (\operatorname{Im} \tilde{R}_{yss})^2} =$

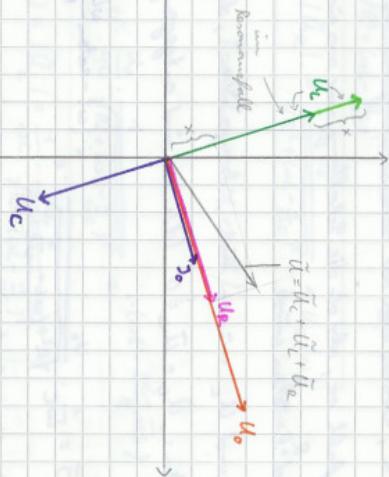
$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \checkmark$$

$$\tan \varphi = - \frac{\operatorname{Im}(\tilde{R}_{yss})}{\operatorname{Re}(\tilde{R}_{yss})} = - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \checkmark$$

$$J_0 = \frac{U_0}{| \tilde{R}_{yss} |} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

D.h.: $\tilde{J}(t) = J_0 e^{i \cdot (\omega t + \varphi)} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{i \cdot \left(\omega t - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)}$ ✓

c)



$$d\tilde{U} \tilde{J}_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{J}_0}{d\omega} &= U_0 \cdot (L - \frac{1}{\omega^2}) \cdot [R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2]^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot (L + \frac{1}{\omega^2 C}) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot (L + \frac{1}{\omega^2 C}) &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\stackrel{!}{\neq} 0$$

\Rightarrow Resonanzfrequenz = Eigenfrequenz:

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

~~Minim~~

Bei ω_r wird \tilde{J}_0 minimal, da $(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0$ gilt und somit der Nenner $R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2$ minimal wird.

- 2) Wz aus der Formel $\tan \varphi = - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ und der Tatsache, dass für $\omega = \omega_r$ $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ist, sofort folgt, dass für die Phasenverschiebung φ in Resonanzfall:

$$\boxed{\varphi = 0}$$

- 3) Der Gesamtwidstand wird im Resonanzfall minimal:

$$\tilde{R}_{ges} = R = | \tilde{R}_{ges} |$$

Da $\tilde{R}_{ges} \in \mathbb{R}$, folgt auch sofort, dass $I_r = 0$ sein muss.

4) Da $\tilde{R}_{ges} = R$, verhält sich der Schwingungsweg im Resonanzfall so, als ob die Schaltung nur aus einem ohmschen Widerstand R bestehen würde.

D.h., \tilde{U}_C und \tilde{U}_L müssen sich „komplementieren“, d.h. es muss gelten: $\tilde{U}_C + \tilde{U}_L \stackrel{?}{=} 0$ (d.h. sie sind entgegengesetzt gleich groß)

$$5) \tilde{U}_C = \tilde{R}_C \cdot \tilde{I} = \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot e^{i \cdot (\omega t - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})} = | \omega = \omega_r \\ = \frac{\sqrt{LC}}{i \cdot C} \cdot \frac{U_0}{R} \cdot e^{i \cdot \omega r t} = \\ = -i \cdot \sqrt{\frac{L}{CR^2}} \cdot \frac{U_0}{R} \cdot e^{i \cdot \frac{t}{\sqrt{LC}}} = \\ = -i \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{L}{CR^2}}}_{=Q} \cdot U_0 \cdot e^{i \cdot \frac{t}{\sqrt{LC}}} = -i \cdot Q \cdot U_0 \cdot e^{i \cdot \frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

$$\tilde{U}_L = \tilde{R}_L \cdot \tilde{I} = | \omega = \omega_r \\ = i\omega L \cdot \frac{U_0}{R} \cdot e^{i \cdot \omega_r t} = \\ = i \cdot \frac{L}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{U_0}{R} \cdot e^{i \cdot \frac{t}{\sqrt{LC}}} = i \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{U_0}{R} \cdot e^{i \cdot \frac{t}{\sqrt{LC}}} = \\ = i \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{L}{CR^2}}}_{=Q} \cdot U_0 \cdot e^{i \cdot \frac{t}{\sqrt{LC}}} = i \cdot Q \cdot U_0 \cdot e^{i \cdot \frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

Man erkennt sofort, dass $\tilde{U}_C + \tilde{U}_L = 0$ gilt.

Für die Beträge ergibt sich sofort:

$$|\tilde{U}_C| = Q U_0$$

$$|\tilde{U}_L| = Q U_0$$

Was bedeutet Q ?

$$e) \tilde{U}_R = R \cdot \tilde{J} = \frac{R \cdot U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot e^{i \cdot (\omega t - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})}$$

$$\Rightarrow |U_R| = |\tilde{U}_R| = \frac{R \cdot U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = U_R(\omega) \quad \checkmark$$

(da $|re^{it}| = r \text{ mit } r \in \mathbb{R}$)

$$\tilde{U}_C = \frac{1}{i\omega C} \cdot \tilde{J} = -i \cdot \frac{U_0}{\omega C} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot e^{i \cdot (\omega t - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})}$$

$$\Rightarrow |U_C(\omega)| = |\tilde{U}_C| = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad \checkmark$$

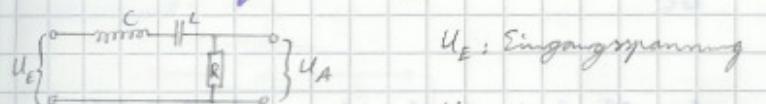
(da $|ire^{ip}| = |ir(\cos p + i \sin p)| = |ir \cos p - r \sin p| = \sqrt{r^2 \sin^2 p + r^2 \cos^2 p} = r \text{ mit } r \in \mathbb{R}$)

$$\tilde{U}_L = i\omega L \cdot \tilde{J} = i\omega L \cdot \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot e^{i \cdot (\omega t - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})}$$

$$\Rightarrow |U_L(\omega)| = |\tilde{U}_L| = \omega L \cdot \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad \checkmark$$



Eine Anwendung ist der sog. Bandpass oder Durchlassfilter:



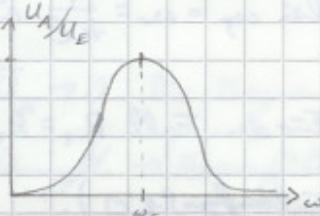
U_E : Eingangsspannung

U_A : Ausgangsspannung

$$\frac{\tilde{U}_A}{\tilde{U}_E} = \frac{R}{R + i \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Für den Resonanzfall $\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ergibt sich: $\frac{\tilde{U}_A}{\tilde{U}_E} = 1$. Die Frequenzen in der Umgebung der Resonanzfrequenz werden als nicht gedämpft, sie werden „durchgelassen“.

→ Herausfiltern von z.B. hohen und tiefen Tönen möglich.



Aufgabe 4

a) $R_1 = R_2$

Oberer Zweig: $\tilde{R}_o = R_1 + i\omega L$

Unterer Zweig: $\tilde{R}_u = R_1 + \frac{1}{i\omega C}$

$$\rightarrow \tilde{R}_{ges} = R + \left(\frac{1}{\tilde{R}_o} + \frac{1}{\tilde{R}_u} \right)^{-1} =$$

$$= R + \left[\frac{1}{R_1 + i\omega L} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{i\omega C}} \right]^{-1} =$$

$$= R + \left[\frac{R_1 - \frac{i}{\omega C} + R_1 + i\omega L}{(R_1 + i\omega L)(R_1 - \frac{i}{\omega C})} \right]^{-1} =$$

$$= R + \frac{R_1^2 - i \cdot \frac{R_1}{\omega C} + i \cdot R_1 \omega L + \frac{L}{C}}{2R_1 + i \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})} =$$

$$= R + \frac{\left[R_1^2 + \frac{L}{C} + i \cdot R_1 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \cdot \left[2R_1 - i \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{4R_1^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} =$$

$$= R + \frac{2R_1^3 - R_1^2 \cdot i \cdot \beta + 2R_1 \cdot \frac{L}{C} - i \cdot \frac{L}{C} \cdot \beta + 2R_1^2 \cdot i \cdot \beta + R_1 \cdot \beta^2}{4R_1^2 + \beta^2} =$$

$$= R + \frac{2R_1^3 + 2R_1 \cdot \frac{L}{C} + R_1 \cdot \beta^2 + i \cdot (R_1^2 \cdot \beta - \frac{L}{C} \cdot \beta)}{4R_1^2 + \beta^2} =$$

✓ $\tilde{R}_{ges} = \left(R + \frac{2R_1^3 + 2R_1 \cdot \frac{L}{C} + R_1 \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}{4R_1^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \right) + i \cdot \left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{4R_1^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \right)$

b) 1) $R_1 = R_2 = 0$

$$\rightarrow \tilde{R}'_{ges} = R + i \cdot \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \frac{-\frac{L}{C}}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \right] =$$

$$\tilde{R}'_{ges} = R - i \cdot \frac{L}{C} \cdot \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

2) Mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems (Maxima) werden

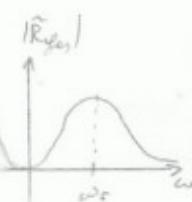
die Extremstellen von $|\tilde{R}_{ges}|$ wie folgt bestimmt:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Bei $\omega_1 = 0$ liegt ein Minimum vor und im Resonanzfall

bei $\omega_3 = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ein Maximum (von $|\tilde{R}_{ges}|$).

Für den Fall $R_1 = R_2 = 0$ ergibt sich bei ω_r eine Polstelle (nicht Teilaufgabe c)).



3) Sei $\tilde{R}_S = \left(\frac{1}{\tilde{R}_0} + \frac{1}{\tilde{R}_u} \right)^{-1}$, d.h. der komplexe Widerstand des eigentlichen Schwingkreises.

Dann gilt nach der Maschenregel:

$$\tilde{U} - \tilde{U}_R - \tilde{U}_S = \tilde{U} - R \cdot \tilde{J} - \tilde{R}_S \cdot \tilde{J} = 0$$

$$\tilde{J} = \frac{\tilde{U}}{R + \tilde{R}_S} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{R}_{\text{ges}}}$$

Im Resonanzfall ist \tilde{R}_{ges} maximal, d.h. der durch den Widerstand R fließende Strom \tilde{J} ist minimal. ✓

Berechnung von \tilde{J} :

• \tilde{R}_{ges} im Resonanzfall:

$$\text{Für } \omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ gilt: } \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (\text{nicht aus Aufgabe (3)d)(1)})$$

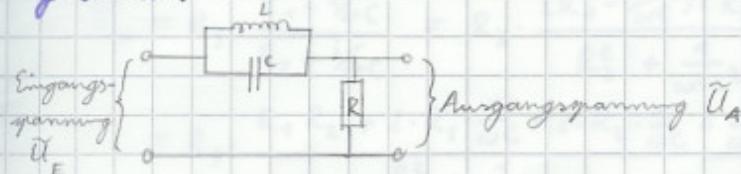
$$\begin{aligned} \rightarrow \tilde{R}_{\text{ges}} &= R + \frac{2R_1^2 + 2R_1 \cdot \frac{L}{C}}{4R_1^2} = \\ &= R + \frac{R_1^2 + \frac{L}{C}}{2R_1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{J} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{R}_{\text{ges}}} = \tilde{U} \cdot \frac{1}{R + \frac{R_1^2 + \frac{L}{C}}{2R_1}} = \tilde{U} \cdot \frac{2R_1}{2RR_1 + R_1^2 + \frac{L}{C}} = \text{minimal}}$$

Nun erkennt, dass für den idealen Schwingkreis, d.h. für

$R_1 = R_2 = 0$ sich ergibt: $\tilde{J} = 0$. Der Schwingkreis bildet also einen unendlich großen Widerstand im Resonanzfall!

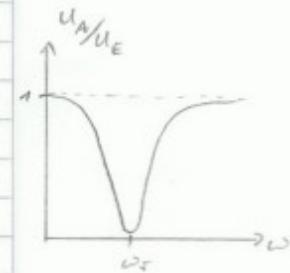
4) Eine Anwendung ist der sog. Sperrfilter bzw. auch Bandspalte genannt:



$$\frac{\tilde{U}_A}{\tilde{U}_E} = \frac{R}{R + \left(\frac{1}{i\omega L} + i\omega C \right)^{-1}}$$

$$\frac{\tilde{U}_E}{\tilde{U}_A} = 1 + i \cdot \frac{\frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega L}}{R} = 1 + i \cdot \frac{1}{R \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \infty$$

D.h. im Resonanzfall gilt: $\frac{\tilde{U}_A}{\tilde{U}_E} \rightarrow 0$ bzw. $\tilde{U}_A \rightarrow 0$. Die Frequenzen um der Resonanzfrequenz werden also gedämpft. → Herausfiltern von z.B. den mittleren Tönen möglich.



c) \tilde{R}_{ges} im Resonanzfall für $R_1 = R_2 \neq 0$ (siehe Aufgabe ④ b) 3) :

$$\tilde{R}_{\text{ges}} = R + \frac{R_1^2 + L/C}{2R_1} = R + \frac{1}{2}R_1 + \frac{L}{2R_1C} \quad \checkmark$$

Es fällt auf, dass für den idealen Schwingkreis ($R_1 = R_2 = 0$)
der gesamte Widerstand gegen Unendlich strebt.

Für den nicht-ideal Fall hat \tilde{R}_{ges} bei der Resonanzfrequenz
ein Maximum.

Im Resonanzfall pendelt die „meiste“ Energie zwischen
Kondensator und Spule hin- und her, ohne aus dem Kreis fließen
zu können. Dafür ein hoher Widerstand.

Da $\tilde{R}_{\text{ges}} \gg R$ für $\omega = \omega_r$ (Resonanzfall), ist die Phasverschiebung
zwischen dem Strom durch den Widerstand R und der treibenden
Spannung Null: $\varphi_r = 0 \quad \checkmark$

Aufgabe 5

a) Die Abgleichbedingung lautet:

$$\text{Spannungsabfall über } \tilde{R}_x \stackrel{!}{=} \text{Spannungsabfall über } R_3$$

$$\tilde{U}_x \stackrel{!}{=} \tilde{U}_3 \quad (1)$$

Der Strom im oberen Zweig (obr., der \tilde{R}_x enthält) wird als \tilde{J}_1 , der andere als \tilde{J}_2 bezeichnet.

Die Kirchhoff'sche Maschenregel liefert:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \tilde{U} - \tilde{R}_x \tilde{J}_1 - R_1 \tilde{J}_1 - \frac{1}{i\omega C} \tilde{J}_1 = 0 \\ (2) \tilde{U} - R_3 \tilde{J}_2 - R_2 \tilde{J}_2 - \frac{1}{i\omega C} \tilde{J}_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \tilde{J}_1 \cdot (\tilde{R}_x + R_1 - \frac{i}{\omega C}) = \tilde{J}_2 \cdot (R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C}) \quad (3)$$

Spannungsabfälle über \tilde{R}_x und R_3 :

$$\left. \begin{array}{l} (4) \tilde{U}_x = \tilde{R}_x \cdot \tilde{J}_1 \\ (5) \tilde{U}_3 = R_3 \cdot \tilde{J}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(1)} \tilde{R}_x \cdot \tilde{J}_1 = R_3 \cdot \tilde{J}_2 \rightarrow \frac{\tilde{J}_1}{\tilde{J}_2} = \frac{R_3}{\tilde{R}_x} \quad (6)$$

Aus (3) folgt:

$$\frac{\tilde{J}_1}{\tilde{J}_2} = \frac{R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C}}{\tilde{R}_x + R_1 - \frac{i}{\omega C}} \stackrel{(6)}{=} \frac{R_3}{\tilde{R}_x} \quad (\text{Kehrwert bilden})$$

$$\frac{\tilde{R}_x}{R_3} = \frac{\tilde{R}_x}{R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C}} + \frac{R_1 - \frac{i}{\omega C}}{R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C}}$$

$$\tilde{R}_x \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C}} \right) = \frac{R_1 - \frac{i}{\omega C}}{R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C}}$$

$$\tilde{R}_x \cdot \frac{R_2 - \frac{i}{\omega C}}{R_3 \cdot (R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C})} = \frac{R_1 - \frac{i}{\omega C}}{R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C}}$$

$$\tilde{R}_x = R_3 \cdot \frac{R_1 - \frac{i}{\omega C}}{R_2 - \frac{i}{\omega C}} = R_3 \cdot \frac{(R_1 - \frac{i}{\omega C})(R_2 + \frac{i}{\omega C})}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} =$$

$$= R_3 \cdot \frac{R_1 R_2 + i \cdot R_1 \cdot \frac{1}{\omega C} - i \cdot R_2 \cdot \frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} =$$

$$= R_3 \cdot \frac{R_1 R_2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + i \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot R_3 \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad | \cdot \frac{\omega^2 C^2}{\omega^2 C^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{R}_x = R_3 \cdot \underbrace{\frac{1 + R_1 R_2 \cdot \omega^2 C^2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}}_{=: a} + i \cdot R_3 \cdot \omega C \cdot \underbrace{\frac{R_1 - R_2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}}_{=: b} = a + ib} \quad \checkmark$$

b) 1) Auflösung der Gleichungen nach R_1 und R_3 :

$$\tilde{R}_a = i\omega L - \frac{i}{\omega C} + R = R + i \cdot \underbrace{(i\omega L - \frac{i}{\omega C})}_{b}$$

$$(1) a = \cancel{R_a} \cdot R_3 \cdot \frac{1 + R_1 R_2 \omega^2 C^2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}$$

$$\rightarrow R_3 = a \cdot \frac{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}{1 + R_1 R_2 \omega^2 C^2} \quad (1.5)$$

$$(2) b = \cancel{R_a} \cdot \cancel{R_3} \cdot \omega C \cdot \frac{R_1 - R_2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}$$

$$\stackrel{(1.5)}{=} a \cdot \omega C \cdot \frac{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}{1 + R_1 R_2 \omega^2 C^2} \cdot \frac{R_1 - R_2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2} =$$

$$= a \omega C \cdot \frac{R_1 - R_2}{1 + R_1 R_2 \omega^2 C^2}$$

$$b + R_1 \cdot b R_2 \omega^2 C^2 = a \omega C \cdot (R_1 - R_2) = R_1 \cdot a \omega C - R_2 \cdot a \omega C$$

$$R_1 \cdot (b R_2 \omega^2 C^2 - a \omega C) = -b - R_2 a \omega C$$

$$R_1 = \frac{b + R_2 \omega C \cdot a}{a \omega C - b \cdot R_2 \omega^2 C^2} \quad (2.5)$$

2) Mit Hilfe der Gleichungen (1.5) und (2.5) werden nun R_1 und R_3 berechnet:

• Für KW6(a): $\omega = 10^4 \frac{1}{s}$, $C = 0,1 \mu F$, $R_2 = 12 \Omega$

$$L = 10 mH, R = 12 \Omega$$

$$\text{Es gilt: } \tilde{R}_a = i\omega L - \frac{i}{\omega C} + R = \underbrace{R}_{a} + i \cdot \underbrace{(i\omega L - \frac{i}{\omega C})}_{b}$$

$$\rightarrow a = 12 \Omega$$

$$b = 0$$

$$\stackrel{(2.5)}{\Rightarrow} R_1 = \frac{R_2 \omega C a}{a \omega C} = R_2 = 12 \Omega$$

$$\stackrel{(1.5)}{\Rightarrow} R_3 = 12 \Omega$$

$$\Rightarrow R_1 = R_3 = 1000 \Omega = 12 \Omega \quad \checkmark$$

• Für KW6(b): $\omega = 10^4 \frac{1}{s}$, $C = 0,1 \mu F$, $R_2 = 12 \Omega$

$$R = 12 \Omega, C_w = 47 nF$$

$$\text{Es gilt: } \tilde{R}_b = \left(\frac{1}{R} + i\omega C_b \right)^{-1} = R \cdot \frac{1}{1+i\omega C_b R} =$$

$$= R \cdot \frac{1-i\omega C_b R}{1+\omega^2 C_b^2 R^2} = \underbrace{\frac{R}{1+\omega^2 C_b^2 R^2}}_a + i \cdot \underbrace{\frac{(-1) \cdot \omega C_b R^2}{1+\omega^2 C_b^2 R^2}}_b$$

$$\rightarrow a \approx 819,0679 \Omega$$

$$b \approx -384,9619 \Omega$$

$$\xrightarrow{(2.5)} R_1 \approx 360,54 \Omega \approx 361 \Omega$$

$$\xrightarrow{(1.5)} R_2 \approx 1204 \Omega \approx 1,208 \Omega$$

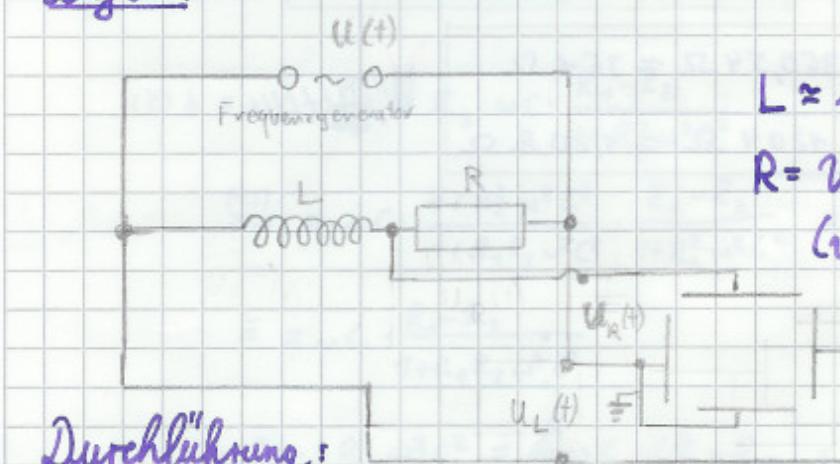
✓
✓

4. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

4.1 Qualitative Beobachtungen

4.1.1 R-L-Kombination

Aufbau:



$$L \approx 10 \text{ mH}$$

$R = \text{Widerstandsdeckade}$
(wobei $R \ll R_L$)

Durchführung:

- Es wird eine sinusförmige Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ mit der Frequenz 5 kHz angelegt
- Am ersten Kanal des Oszilloskops wird die Widerstandsspannung U_R dargestellt, welche über $I = \frac{U}{R}$ proportional zum Strom ist
- Auf dem zweiten Kanal wird die Eingangsspannung gelegt
- Die schwarze Buchse des Frequenzgenerators und die \perp -Buchsen des Oszilloskops haben die gleiche Phase
- Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Eingangsspannung für verschiedene Dämpfungswiderstände $R = 10\Omega \dots 10\text{k}\Omega$. Hierbei am Oszilloskop die Spannungen jeweils durch x-t- und x-y-Betrieb darstellen (x-t: Strom und Spannung jeweils Funktion der Zeit mit Phase φ ;
x-y: Spannung am horizontalen Ablenksystem und Strom am vertikalen aber Strom ist Funktion der Spannung) und Notierungen ins Protokollheft übertragen
- Beobachtung des Einschaltvorgangs für $R = 10\Omega \dots 10\text{k}\Omega$ und anschließende Übertragung ins Protokollheft.

Hierbei wird an L eine Rechtecksprungspannung gelegt (Kanal II), wodurch der Ein- und Durchschaltvorgang periodisch wiederholt wird. Im x-t-Modus kann die Reaktion des Ein- und Durchschalten sichtbar gemacht werden.

4.1.2 R-C-Kombination

Aufbau:

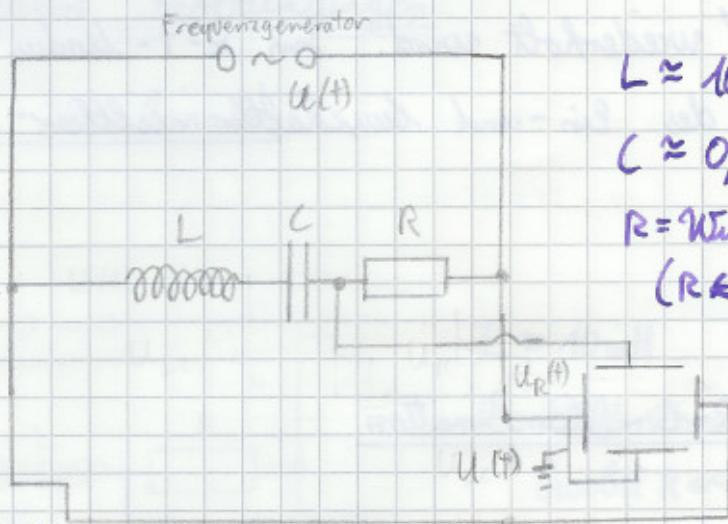
Der Aufbau ist weitgehend identisch mit dem aus 4.1.1, nur dass anstelle der Spule ein Gondensator mit $C = 0,1 \mu F$ verwendet wird.

Durchführung:

Analog 4.1.1

4.1.3 Serienschwingkreis

Aufbau:



$$L \approx 10 \text{ mH}$$

$$C \approx 0,1 \mu\text{F}$$

$R = \text{Widerstandsdichte}$
 $(R \ll |Z|)$

Durchführung:

- Es wird eine Wechselspannung mit $f = 500 \text{ Hz}$ angelegt
- Am ersten Kanal des Oszilloskops wird $U_R(t)$ ($I = \frac{U}{R}$) dargestellt
- Am zweiten Kanal wird $U(t)$ dargestellt
- Beide Kanäle haben Punkt zwischen R und Frequenzgenerator gemeinsam (da sonst Kurzschluss)
- Betrachtung des Einschaltvorgangs am Serienschwingkreis für verschiedene $R = 10 \Omega \dots 10 \text{ k}\Omega$.

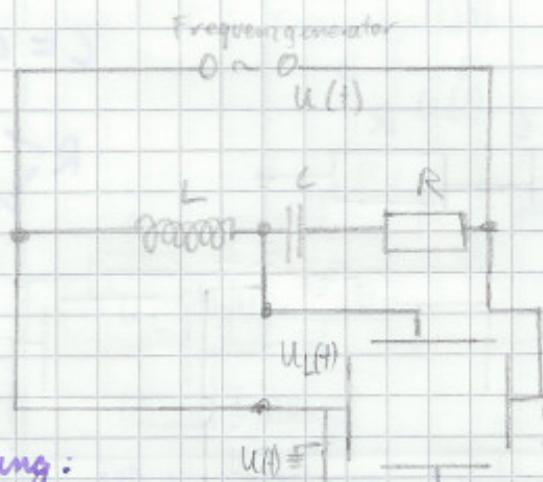
Hierbei wird an $L-C$ eine Rechteckspannung gelegt (Kanal II), um den Ein- und Ausschaltvorgang periodisch zu wiederholen.

- Übertragung der Beobachtung ins Protokollheft
- eperiodischer Grenzfall: $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
 $\Rightarrow \tilde{R} = R + i(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}) = R + i(\sqrt{\frac{L}{C}} - \sqrt{\frac{C}{L}}) = R = R_a$

4.2 Resonanz im Serienschwingkreis

4.2.1 Bestimmung der Resonanzfrequenz

Aufbau:



$$L \approx 10 \text{ mH}$$

$$C \approx 0.1 \mu\text{F}$$

$$R = 100 \Omega$$

Durchführung:

- Es wird eine Wechselspannung $U(t)$ angelegt
- Im ersten Kanal wird $U_L(t)$ dargestellt
- Im zweiten Kanal wird $U(t)$ dargestellt
- Beide Kanäle haben den Punkt zwischen Spule und Frequenzgenerator gemeinsam
- Bestimmung der Resonanzfrequenz:

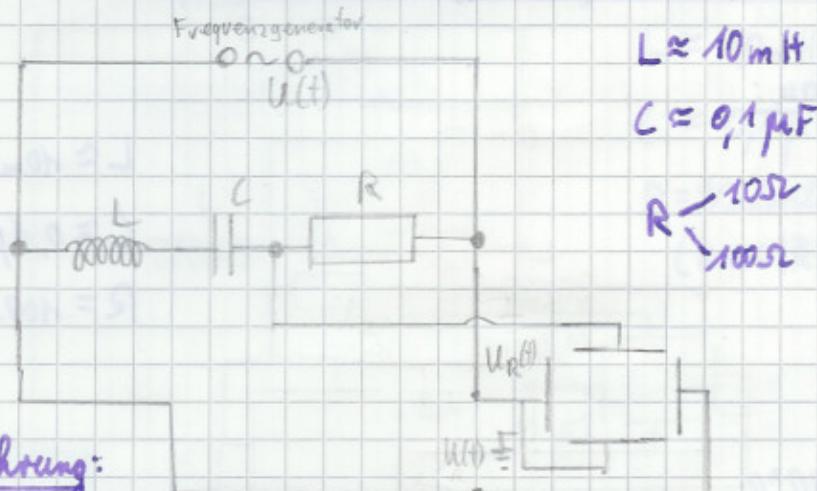
Dabei wird die Resonanz Frequenz variiert, bis bei geeigneter Darstellung ein Kreis angeregt wird, da die Amplituden gleich groß sind

Resonanzfall:

Man erwartet im Resonanzfall im x-y-Betrieb einen Kreis.

4.2.2 Messung des Stroms durch den komplexen Widerstand

Aufbau:



Durchführung:

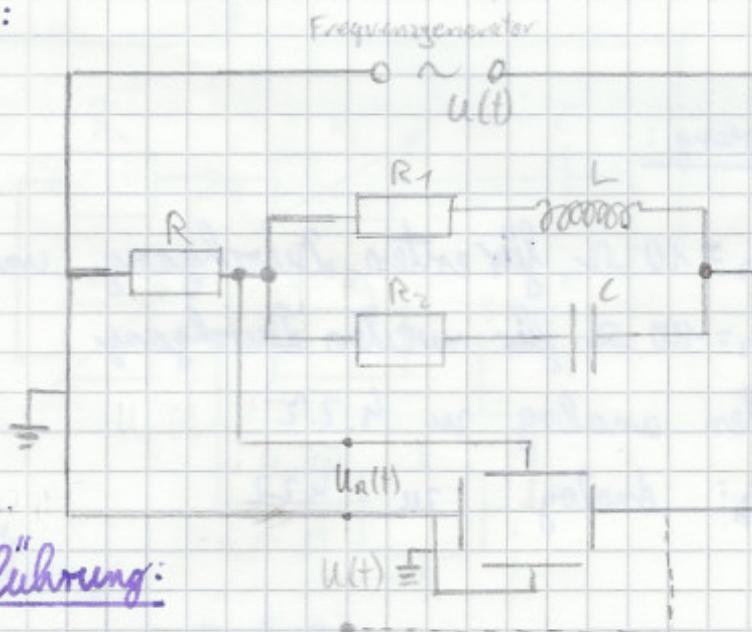
- im ersten Kanal wird U_R dargestellt
- im zweiten Kanal wird U dargestellt
- Beide Kanäle müssen den Punkt zwischen den ohmschen Widerstand und Frequenzgenerator gemeinsam haben
- Zweit-Kanal wird auf „GND“ gestellt
- Im x-y-Betrieb ist dann ein vertikaler Strich zu sehen und der Absolutwert des Stroms wird über R berechnet
- $R = 10\Omega$: Messungen für $f = 1 \dots 50 \text{ kHz}$ durchführen
- $R = 100\Omega$: Messungen für $f = 1 \dots 50 \text{ kHz}$ durchführen
- Zu beachten ist, dass in der Nähe der Resonanzfrequenz kleinere Schritte für f zu wählen sind
- Hinweis: Zur Bestimmung von I_0 wird R abgegriffen.
Diese sind nur vergleichbar bei selbem I_0 . Bei kleinen R kann I_0 abfallen, so dass I_0 nachgeregt werden muss
⇒ Umgehung des Problems durch Wählen eines nicht zu großen I_0 . Nahe bei Resonanz sollten keine Verzerrungen von U_R auftreten

Dies wird vor dem eigtl. Versch durch einen Testlauf überprüft.

4.3 Resonanz im Parallelschwingkreis

4.3.1 Bestimmung der Resonanzfrequenz

Aufbau:



$$L \approx 10 \text{ mH}$$

$$C \approx 0,1 \mu\text{F}$$

$$R \approx 100 \Omega$$

$R_1 = \text{Widerstandsdehade}$

$R_2 = \text{Widerstandsdehade}$

Durchführung:

- $R_1 = R_2 = 10 \Omega$
- Beide Kanäle des Oszilloskops müssen den Punkt zwischen Widerstand R und Frequenzgenerator gemeinsam haben
- Kanal 1: U_R
- Kanal 2: U
- Vorgehen analog zu 4.2.1

Resonanzfall:

Man erwartet im Resonanzfall eine Gerade, da die Phasenverschiebung gleich null ist.

4.3.2 Messung des Stroms

Aufbau:

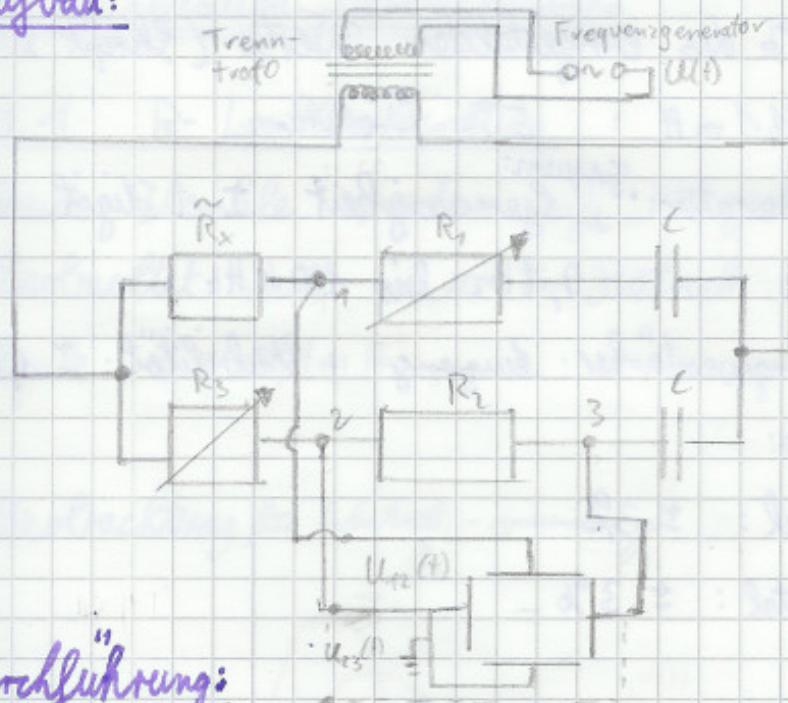
Aufbau ist identisch mit dem aus 4.3.1

Durchführung:

- $R_1 = R_2 = 10 \Omega$ für ersten Durchgang und
- $R_1 = R_2 = 100 \Omega$ für zweiten Durchgang
- Vorgehen analog zu 4.2.2
- Hinweis: analog zu 4.2.2

4.4 Messung komplexer Widerstände

Aufbau:



$$C \approx 0,1 \mu F$$

$$R_2 \approx 1 k\Omega$$

R_1 = Widerstandsdeckade

R_3 = Widerstandsdeckade

\tilde{R}_x = zu bestimmender
komplexer
Widerstand
(\tilde{R}_a bzw. \tilde{R}_b)

Durchführung:

- Anlegen einer Wechselspannung mit $f = 1,592 \text{ kHz}$ ($\omega = 10^4 \frac{1}{s}$)
- Bestimmung der komplexen Widerstände \tilde{R}_a und \tilde{R}_b

$$\tilde{R}_a: \quad L \approx 10 \mu H \quad C_0 \approx 1 \mu F \quad R_2 \approx 1 k\Omega$$

$$\tilde{R}_b:$$

$$C_b \approx 47 \text{ nF}$$

- Ein Trenntrafo wird benötigt, um die Schaltung in Primär- und Sekundärkreis aufzuspalten. Dies hat den Grund, dass Frequenzgenerator und Oszilloskop die selbe Phase benötigen.
- Bestimmung: R_1 und R_3 so einstellen, dass Oszilloskop eine horizontale gerade im x-y-Betrieb darstellt

5. Fehler der verwendeten Messgeräte

- Widerstandsdehade:

Fehler = 1% des eingestellten Wertes (Skript S. F-6)

- Spule L = 11,1 mH : 5% Toleranz

- Frequenzgenerator: Frequenzgenauigkeit ± 1 digit von
0,1 Hz bis 100 kHz

• DC-Leitungswiderstand: Ausgang : Stabilität $\pm 1,0\%$

- Oszilloskop:

• Vertikal: $\pm 3\%$

• Horizontal: $\pm 3\%$

6. Protokoll

6.1 Qualitative Beobachtungen

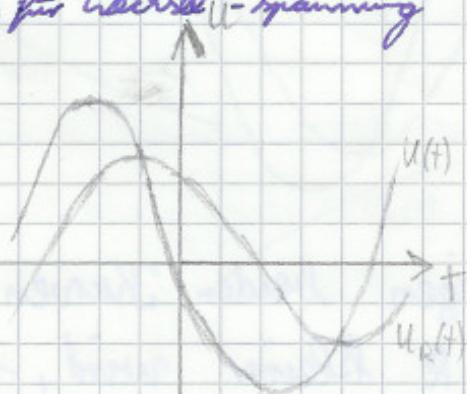
6.1.1 R-L-Kombination

Beide Kanäle werden auf „DC“ gestellt.

Beobachtet wird im x-t-Betrieb des Oszilloskops.

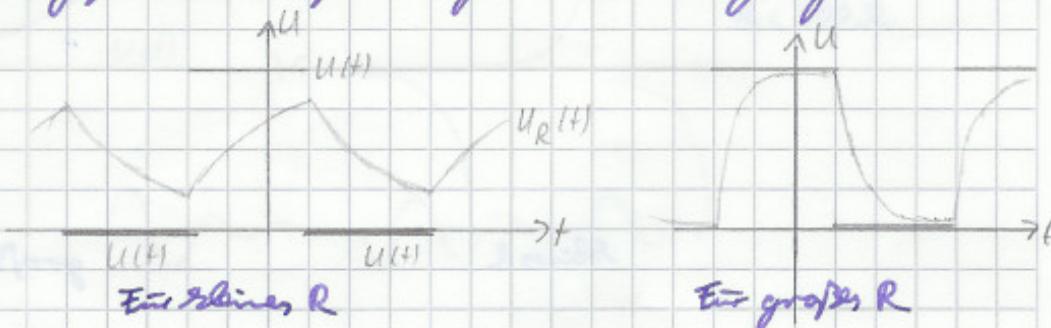
Spule: $L = 11,1 \text{ mH}$

Beobachtung für Wechselspannung



Für hohe Widerstände beträgt die Amplitudendifferenz und die Phasenverschiebung ist etwa null. Wird R erniedrigt, so sinkt die Amplitude von $U_R(t)$ und $U_R(t)$ wandert in positive t -Richtung (Phasenverschiebung). Für $R=0$ ist $U_R(t)$ ein Strich. ✓

Beobachtung für Rechteckspannung (Einschaltvorgang):



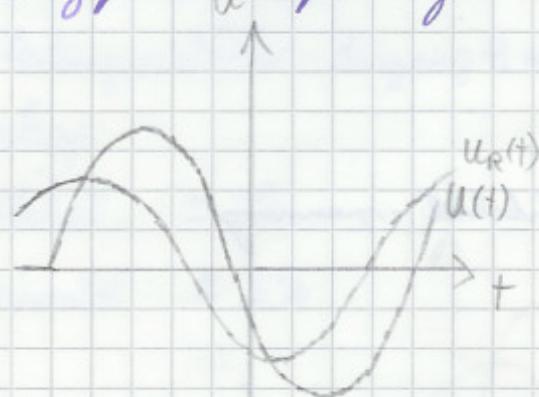
6.1.2 R-C-Kombination

Beide Kanäle sind auf „DC“ gestellt.

Beobachtet wird im x-t-Betrieb des Oszilloskops.

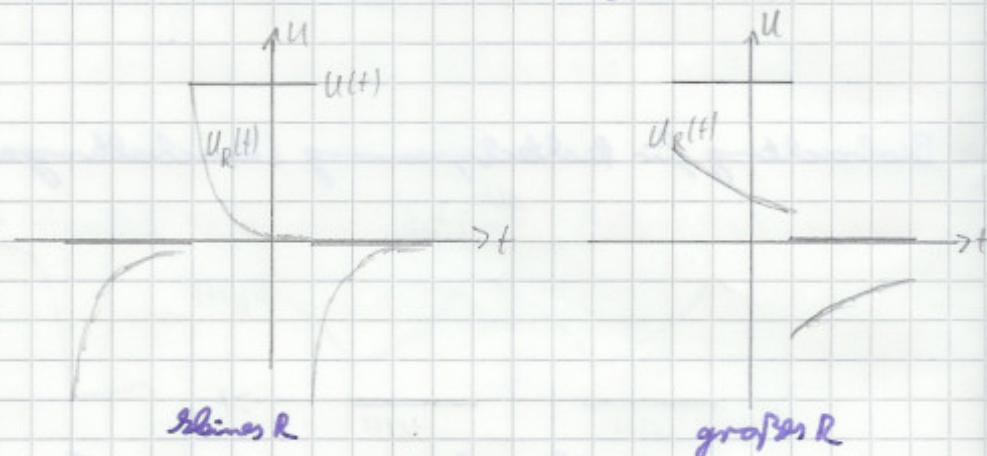
Kondensator: $C = 0,10 \mu F$

Beobachtung für Hochspannung



Für hohe R liegen beiden Kurven beinahe aufeinander. Wenn R kleiner wird, nimmt die Amplitude von $U_R(t)$ ab und $U_R(t)$ verschiebt sich in negative t-Richtung. Für $R=0$ wird $U_R(t)$ zu einem Strich.

Beobachtung für Rechtecksg. (Einschaltvorgang):



6.1.3 Serienschwingkreis

Beide Kanäle sind auf „DC“ gestellt.

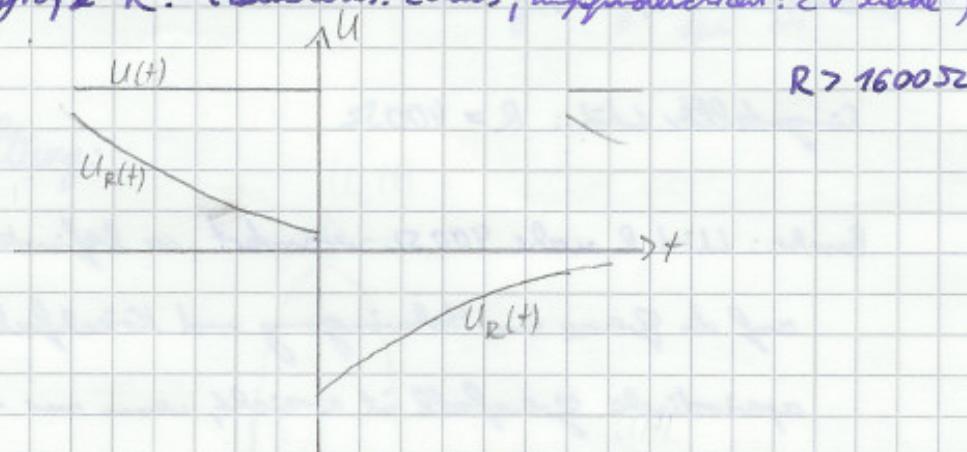
Beobachtet wird im x-t-Betrieb des Oszilloskops.

Spule: $L = 11,1 \text{ mH}$

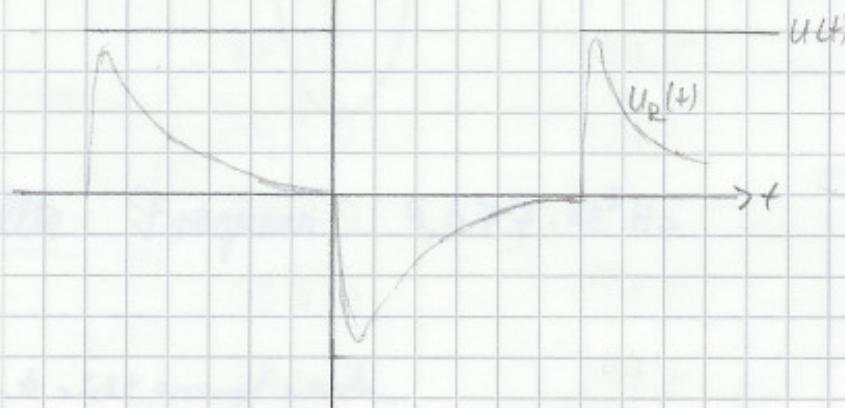
Kondensator: $C = 0,10 \mu\text{F}$

Beobachtung (für Einschaltvorgang):

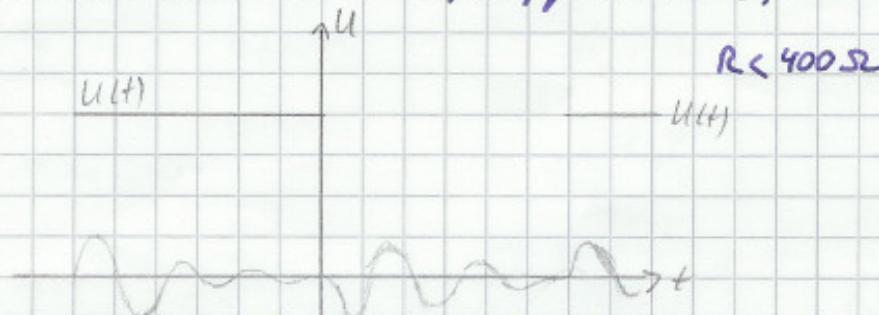
- Für große R: (Zeitbasis: 20ms, Empfindlichkeit: 2V Leide)



- Für etw. kleinere R: (Zeitbasis: 20ms, Empfindl.: 2V Leide)



- Für kleine R: (Zeitbasis 20ms, Empf.: 2V Leide)



Bestimmung von R_{**} für den aperiodischen Grenzfall:



Kanal 1: 0,2V empfindl.

Zeitbasis: 0,2ms

Eingestellte Wd.: $R = 400\Omega$

Beschr.: Wird R nahe 400Ω verändert, so befindet sich ^{man} auf der Grenze zw. Schwingung und Kriechfall. Der aperiodische Grenzfall ist erreicht, wenn nur 1 Null-durchgang vorhanden ist.

6.2 Resonanz im Linienschwingkreis

6.2.1 Bestimmung der Resonanzfrequenz

Beide Kanäle sind auf „DC“ gestellt (Empf. 5 V)

Beobachtet wird im x-y-Betrieb des Oszilloskops.

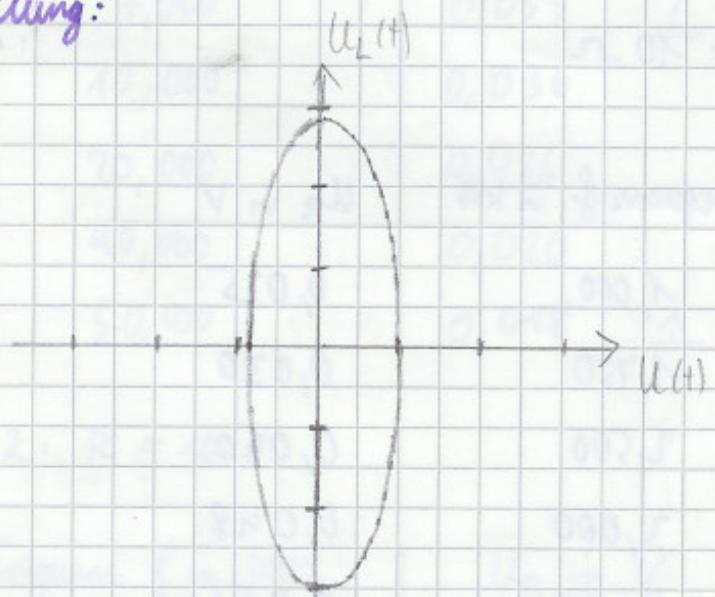
Spirale: $L = 11,1 \text{ mH}$

$$R = 100 \Omega$$

Gleichstromgenerator: $C = 0,1 \mu\text{F}$

Erwartet wird die Resonanz für $f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{2\pi} = 4,78 \cdot 10^3 \text{ Hz}$.

Beobachtung:



eingestellte Frequenz: $4,677 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

Ein Kres kann nicht erzeugt werden.

6.2.2 Messung des Stroms durch den homogenen Widerstand

Erster Kanal wird auf „DC“ gestellt.
 Zweiter Kanal wird auf „AC“ gestellt.
 Beobachtet wird im x-y-Betrieb des Oszilloskops.
 Spule : $L = 11,1 \text{ mH}$

$$\text{Kondensator: } C = 0,1 \mu\text{F}$$

Bei Frequenzgenerator wird die Amplitude auf 310 % gestellt.

$$\text{Fall 1: } R = 10 \Omega$$

Nr.	Frequenz in kHz	Uo in V
1)	1,000	0,025
2)	1,750	0,030
3)	2,500	0,040
4)	3,000	0,048
5)	3,250	0,056
6)	3,500	0,068
7)	3,750	0,080
8)	4,000	0,105
9)	4,125	0,130
10)	4,250	0,160
11)	4,375	0,220
12)	4,450	0,280
13)	4,550	0,380
14)	4,600	0,440
15)	4,650	0,520
16)	4,700	0,530
17)	4,750	0,550

$\uparrow 20 \text{ mV Spann.}$

$\uparrow 50 \text{ mV Empf.}$

$\uparrow 0,1 \text{ V Spann.}$

18)	4,800	0,440	
19)	4,850	0,360	
20)	4,900	0,320	
21)	5,000	0,240	\uparrow 0,2 V Empf.
22)	5,100	0,200	
23)	5,200	0,180	\uparrow 0,1 V Empf.
24)	5,400	0,130	
25)	5,600	0,105	
26)	6,000	0,080	
27)	7,000	0,055	\uparrow 50 mV Empf.
28)	10,000	0,036	
29)	20,000	0,026	
30)	40,000	0,020	
31)	50,000	0,018	\uparrow 20mV Empf.

Fall 2: $R = 100 \Omega$

Nr.	Frequenz f in kHz	U _R in V	
1)	1,000	0,020	
2)	2,000	0,032	
3)	3,000	0,050	
4)	3,500	0,068	\uparrow 20mV Empf.
5)	3,750	0,085	
6)	4,000	0,110	
7)	4,200	0,150	
8)	4,300	0,150	\uparrow 50mV Empf.
9)	4,400	0,240	
10)	4,450	0,280	
11)	4,500	0,320	
12)	4,550	0,350	\uparrow 0,1mV Empf.
13)	4,600	0,460	

14)	4,625	0,500
15)	4,650	0,520
16)	4,675	0,540
17)	4,700	0,560
18)	4,725	0,580
19)	4,750	0,600
20)	4,775	0,680
21)	4,800	0,660
22)	4,850	0,380
23)	4,900	0,320
24)	4,950	0,280
		↑ 0,2 mV Empf.
25)	5,000	0,250
26)	5,100	0,200
27)	5,200	0,170
28)	5,400	0,140
29)	5,600	0,110
		↑ 0,01 mV Empf.
30)	5,800	0,095
31)	6,000	0,085
		↑ 50 mV Empf.
32)	7,000	0,060
33)	8,000	0,048
34)	9,000	0,044
35)	10,000	0,040
36)	20,000	0,028
37)	30,000	0,024
38)	40,000	0,022
39)	50,000	0,020
		↑ 20 mV Empf.

6.3 Resonanz im Parallelenschwingkreis

6.3.1 Bestimmung der Resonanzfrequenz

Beide Kanäle sind auf „DC“ gestellt.

Beobachtet wird im x-y-Betrieb des Oszilloskops.

Spule: $L = 11,1 \text{ mH}$

$$R = 106 \Omega$$

Kondensator: $C = 0,1 \mu\text{F}$

$$R_1 = R_2 = 10 \Omega$$

Im Resonanzfall wird eine horizontale Gerade erwartet. Resonanz sollte bei $f = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 4,78 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ sein.

Bei $4,78 \text{ kHz}$ liegt eine Gerade vor, die allerdings nicht ganz horizontal liegt. U_R beträgt in Resonanz noch $0,2 \text{ V}$.

6.3.2 Messung des Stroms durch den komplexen Widerstand

Erster Kanal ist auf „DC“, zweiter Kanal auf „GD“ gestellt.

Beobachtet wird im x-y-Betrieb des Oszilloskops.

Spule: $L = 11,1 \text{ mH}$; Kondensator: $C = 0,1 \mu\text{F}$; $R = 106 \Omega$;

$R_1 = R_2 = \text{Widerstandsstehw.}$

$$R_1 = R_2 = 10 \Omega$$

$$R_1 = R_2 = 100 \Omega$$

Nr.	Frequenz f in kHz	U_R in V	Nr.	Frequenz in kHz	U_R in V
1)	1,000	0,760	1)	1,000	0,480
2)	2,000	0,520	2)	2,000	0,400
3)	2,500	0,420	3)	2,500	0,340 ↑ 0,2 V Empf.
4)	3,000	0,320	4)	3,000	0,280
5)	3,500	0,220	5)	3,500	0,240
6)	4,000	0,140	6)	4,000	0,200

<u>Empfl. 0,1V ↑</u>	7)	4,200	0,100	7)	4,200	0,200
	8)	4,300	0,095	8)	4,300	0,190
	9)	4,400	0,085	9)	4,400	0,185
	10)	4,500	0,075	10)	4,500	0,185
	11)	4,600	0,070	11)	4,600	0,185
	12)	4,650	0,065	12)	4,650	0,185
	13)	4,700	0,060	13)	4,700	0,185
	14)	4,800	0,060	14)	4,800	0,185
	15)	4,900	0,070	15)	4,900	0,185
	16)	5,000	0,080	16)	5,000	0,190
	17)	5,200	0,105	17)	5,200	0,195
	18)	5,400	0,120	18)	5,400	0,195
<u>Empfl. 50mV ↑</u>	19)	5,600	0,140	19)	5,600	0,200
	20)	5,800	0,260	20)	5,800	0,210
	21)	6,000	0,280	21)	6,000	0,220
	22)	7,000	0,280	22)	7,000	0,260
<u>Empfl. 0,1V ↑</u>	23)	8,000	0,360	23)	8,000	0,300
	24)	10,000	0,480	24)	10,000	0,370
	25)	15,000	0,680	25)	15,000	0,460
<u>Empfl. 0,2V ↑</u>	26)	20,000	0,800	26)	20,000	0,500
	27)	30,000	0,900	27)	30,000	0,550
	28)	40,000	0,900	28)	40,000	0,550
<u>Empfl. 0,5V ↑</u>	29)	50,000	0,950	29)	50,000	0,550

6.4 Messung komplexer Widerstände

Verwenden: $C = 0,1 \mu\text{F}$, $R_2 = 1046 \Omega$, $R_1 = R_3 = \text{Widerstandskette}$
 für \tilde{R}_a : $L = 11,1 \text{mH}$; $C_a = 1,02 \mu\text{F}$; $R = 931 \Omega$

Beide Kanäle sind auf „DC“ gestellt.

Beobachtet wird im x-y-Betrieb des Oszilloskops.

Fall 1: \tilde{R}_a



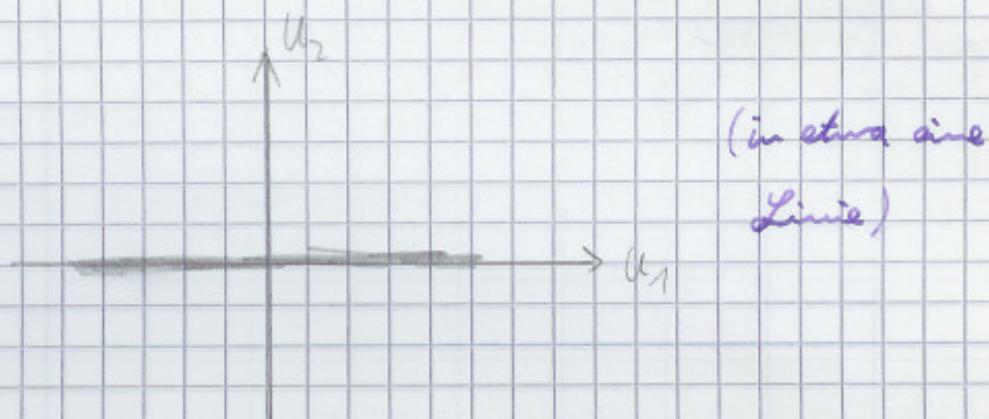
Abweichung der beiden Linien $0,02 \text{ V}$

eingestellte Werte:

$$R_1 = 1100 \Omega$$

$$R_3 = 310 \Omega$$

Fall 2: \tilde{R}_b für \tilde{R}_b : $R = 931 \Omega$; $C_b = 47 \mu\text{F}$



(in etwa eine Linie)

eingestellte Werte :

$$R_1 = 400 \Omega$$

$$R_3 = 1140 \Omega$$

28.10.10 Uli Fänger Vorlesung



Mix

Produktgruppe aus vorbildlich bewirtschafteten Wäldern und anderen kontrollierten Herkünften

Zert.-Nr. SW-COC-004183

www.fsc.org

©1996 Forest Stewardship Council



bezdrobený psací papír, 80 g/qm, 16 listů, bílé bezchlóru • bezdrobený psací papír, 80 g/qm, 16 listů, bílé bez chlóru • Papír za psaní, bez upotřebby dřeva, 80 g/qm, 16 listů, Izbjeleno bez kloru • papír bezdrobený, 80 g/qm, 16 kartkový, vybílený bez používání chlóru • hárte de enca faré continut de lemn, 80 g/mp, 16 lile, înălțătă fără clor • хартия без деревосын, 80 г/км, 16 листа, избелена без хлор • Писчий папір не містить деревої маси, 80 г/м², 16 листів, Відбіленій позичено хлору • Carta per scrivere senza fibra legnosa, 80 g/qm, 16 fogli, bianchita priva di cloro • fermentes írópapír, 80 g/m², 16 lap, klörmentesen fehérített

26

holzfreies Schreibpapier,
80 g/qm, 16 Blatt,
chlorfrei gebleicht

7. Auswertung

7.1 Qualitative Beobachtungen

7.1.1 R-L-Kombination

1) Phasenverschiebung Strom - Spannung:

- Generell wird der Spannungsabfall über U_R , welcher direkt proportional zu $\tilde{J}(t)$ ist, und die anliegende Spannung.

- Erwartung für $\tilde{U}_R(t)$:

- Nach Gl. S. KV-2 gilt: $\tilde{J}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{R + i\omega L}$

Und: $\tilde{U}_R(t) = R \cdot \tilde{J}$

$$\rightarrow \tilde{U}_R(t) = R \cdot \frac{\tilde{U}(t)}{R + i\omega L}$$

- Für große R ergibt sich annähernd: $\tilde{U}_R(t) \approx R \cdot \frac{\tilde{U}(t)}{R} = \tilde{U}(t)$, d.h. die Eingangsspannung ohne Phasenversch. und geänderte Amplitude.

- Betrachtet man $\tilde{J}(t)$ für kleine R , so gilt ca.: $\tilde{J}(t) \propto \frac{\tilde{U}(t)}{i\omega L}$, d.h. es sollte sich eine Phasenverschiebung zwischen $\tilde{U}(t)$ und $\tilde{U}_R(t)$ von $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ in positiver Zeitrichtung ergeben (Strom führt vor Spannung hinterher). Wegen $\tilde{U}_R(t) = R \cdot \tilde{J}(t)$ muss die angeregte Spannung \tilde{U}_R für kleine R dabei kleiner werden, bis für $R=0$ auch $\tilde{U}_R=0$ gilt.

- Die auf S.23 beobachteten Vorgänge decken sich mit der beschriebenen Erwartung (z.B. erreicht die Spannung nach ihres jew. Maximalwerts). ✓

2) Einschaltvorgang

- Erwartung für den Einschaltvorgang:

- Der Einschaltvorgang entspricht dem Sprung von 0V auf max. Spannung von $\tilde{U}(t)$.

- Es gilt Gl. (3) von Skript S.K.W-2 mit $\omega = 0$ (Rechteckspannung ist keine harmonische Oszillation):

$$L \cdot \ddot{I} + R \dot{I} = U_0.$$

Die Lösung hierfür ist offensichtlich (oder exp.-Ansatz):

$$\tilde{I}(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + U_0 / R, \quad A \in \mathbb{R}, \quad A = \text{konst.}$$

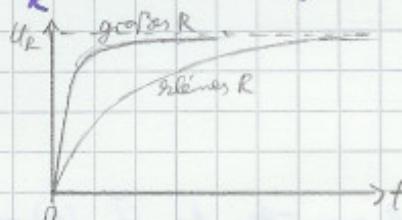
Am Anfang soll der Strom 0 sein: $\tilde{I}(0) = 0$

$$\rightarrow \tilde{I}(0) = A + \frac{U_0}{R} = 0 \rightarrow A = -\frac{U_0}{R}$$

\Rightarrow Erwarteter Verlauf für den Einschaltvorgang:

$$\tilde{I}(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

$$\text{bzw.: } \tilde{U}_R = R \cdot \tilde{I}(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$



- Die eben geschilderte Erwartung deckt sich gut mit den auf S. 23 abgebildeten Beobachtungen für den Einschaltvorgang, insbes. für große R.

Für kleine R wird nur ein mittlerer Ausschnitt des erwarteten Graphen dargestellt, da ^{noch} die Spule "nicht komplett auf- bzw. entladen ist, bevor die angelegte Spannung sich ändert.

Die fallenden Abschnitte zeigen die Entlade- d.h. Ausschaltvorgänge, welche hier als nicht weiter betrachtet werden sollen. ✓

7.1.2 R-C-Kombination

1) Phasenverschiebung Strom - Spannung

- Einheit gilt: $\tilde{U}_R \sim \tilde{J}$

- Erwartung für $\tilde{U}_R(t)$:

$$\text{Nach Skript S.KV-2 gilt: } \tilde{J}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{R + \frac{1}{i\omega C}}$$

$$\text{Und: } \tilde{U}_R(t) = R \cdot \tilde{J}(t)$$

$$\rightarrow \tilde{U}_R(t) = R \cdot \frac{\tilde{U}(t)}{R + \frac{1}{i\omega C}}$$

• Für große R: $\tilde{U}_R(t) \approx \tilde{U}(t)$, d.h. beide Graphen sollten sich annähernd überlagern.

• Für kleine R: $\tilde{J}(t) \approx \frac{\tilde{U}(t)}{\frac{1}{i\omega C}} = i\omega C \cdot \tilde{U}(t)$, d.h. es sollte sich eine Phasenverschiebung zwischen $\tilde{U}(t)$ und $\tilde{U}_R(t)$

von $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ ergeben (Strom führt Spannung voran).

Erwartung muss dabei wegen $\tilde{U}_R(t) = R \cdot \tilde{J}(t)$ die umgekehrte Spg. $\tilde{U}_R(t)$ für kleine R kleiner werden und bei $R=0$ verschwinden.

- Die auf S.24 gemachten Beobachtungen entsprechen den

Erwartungen (z.B. erreicht der Strom ein Maximum zuerst, da

deren Graph nach links gegenüber der Spg. \tilde{U} verschoben ist). ✓

2) Einschaltvorgang:

- Nach der Kirchhoffischen Maschenregel gilt für Abb. KV2 b) (S.KV-2):

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}_R(t) + \tilde{U}_C(t) = R \cdot \tilde{J}(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad | \frac{d}{dt}, \tilde{U}(t) = \text{konst} = U_0$$

$$\rightarrow \frac{\tilde{J}(t)}{C} + R \cdot \tilde{J}(t) = \tilde{U}(t) = 0$$

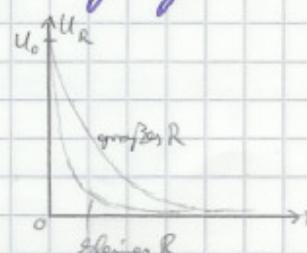
$$\rightarrow \tilde{J}(t) = J_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Es gilt, da C am Anfang keine Spannung abfällt: $J_0 = \frac{U_0}{R}$

\Rightarrow Erwarteter Verlauf für den Einschaltvorgang:

$$\tilde{J}(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

$$\text{bzw. } \tilde{U}_R = R \cdot \tilde{J}(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$



- Die Erwartungen werden, wie auf S. 24 zu sehen, erfüllt, insbes. für kleine R, da hier der Kond. schneller aufgeladen wird.

Für große R wird der Kond. so langsam aufgeladen (da nur ein kleiner Strom fließt), dass die angelegte Spannung wieder auf 0V fällt, bevor er komplett aufgeladen werden konnte; daher der Graph für großer R.

Die Abschnitte unterhalb der t-Achse zeigen den Entladenvorgang.

7.1.3 Linienschwingkreis

1) Einschaltvorgang:

- Der Einschaltvorgang entspricht einer einmaligen Auslenkung aus der Ruhelage eines harmonischen Oszillators (mit Dämpfung).

- Dies wurde im Versuch ES bereits eingehend analysiert.

Gleichung aus ES (siehe S. 4):

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Hier (S. 4): } \ddot{j} + \frac{R}{L} \dot{j} + \frac{1}{LC} \cdot j = i \cdot \frac{\omega}{L} \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t}$$

→ Es gelten die Ergebnisse aus Versuch ES mit:

$$2\lambda = \frac{R}{L} \rightarrow \lambda = \frac{R}{2L}$$

$$\text{und: } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

-Erwartung: Nach Tischl E5 sind 3 Fälle möglich:

- Schwingfall: Liegt bei kleiner Dämpfung, d.h. für $\lambda^2 < \omega_0^2$

vor: $\lambda^2 < \omega_0^2$

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$$

$$\rightarrow R < \sqrt{\frac{4L}{C}} = \frac{4 \cdot 11,1 \text{ mH}}{0,10 \mu\text{F}} \approx 666 \Omega$$

Es liegt eine gedämpfte harmonische Schwingung vor.

- Aperiodischer Fall:

Für: $\lambda^2 = \omega_0^2$

$$\rightarrow R = 666 \Omega$$

Max. 1 Nulldurchgang; schnelles Abklingen

- Überdämpfter Fall: Große Dämpf g.

Für: $\lambda^2 > \omega_0^2$

$$\rightarrow R > 666 \Omega$$

Es findet kein Nulldurchgang mehr statt und die Spannung klingt exp. schnell ab.

- Wie man sieht auf S. 25 f. sieht, werden die Erwartungen erfüllt.

- Für sehr große R (1. Diagramm) ist die Dämpfung so groß, dass die Spannung nicht genügend Zeit hat, um auf OV abzusinken, bevor sich die angelegte Spannung ändert.
- Im 2. Diagramm ist genügend Zeit vorhanden und man erhält den erwarteten Verlauf.
- Im 3. Diagramm ist die Dämpfung klein, so dass eine gedämpfte Schwingung auftritt (wie erwartet).
- Aperiod. Fall: sieht nachfolgend

2) Aperiodischer Grenzfall:

- Dies sollte, wie gerade beschrieben, bei $R = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ auftreten.

Fehlerrechnung:

$$\gamma_R = \left| \frac{\partial R}{\partial L} \cdot \gamma_L \right| = \frac{2}{\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \gamma_L = \frac{\gamma_L}{\sqrt{LC}}$$

mit: $\gamma_L = 11,1 \text{ mH } 5\%$ (siehe S.22)

$$L = 11,1 \mu\text{H}$$

$$C = 0,1 \mu\text{F}$$

$$\rightarrow \gamma_R \approx 16,66 \Omega \approx 17 \Omega$$

\Rightarrow mit $\bar{R} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 666 \Omega$ folgt:

Bei aperiodischem Grenzfall wird für $R_w = (666 \pm 17) \Omega$ erwartet.

- Gemessen wurde jedoch (S.26): $R_w = 400 \Omega$, d.h. der Wert weicht signifikant von erwarteten Wert R_w ab.

Der Fehler von R_w beträgt nach S.22 (Widerstandsschraube)

$$\text{auch nur } \gamma_{R_w} = 4 \Omega.$$

Ein großer Teil der Abweichung könnte daher kommen, dass es schwierig ist, den aperiodischen Grenzfall (ohne Kenntnis des Ergebnisses) zu finden, insbes. da für hohe Oszilloskop-Empfindlichkeit ein starkes „Rauschen“ auftritt.

Überhaupt habe wir hier frühere Versuche festgestellt, dass die Anflamme teils sehr berührungsempfindlich sind, d.h. dass der angesetzte Wert stark schwanken kann. Dies ist eine weitere Fehlerquelle.

Widerstand der verwendeten Branteile?

7.2 Resonanz im Linienschwingkreis

1) Resonanzfrequenz

- Theoretisch erwartet bei:

$$\omega_{r,\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{11,1 \cdot 10^{-3} \text{H} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \text{F}}} = 30015,011 \frac{1}{\text{s}}$$

Fehler von L (S.22): 5% $\rightarrow \Delta_L = 11,1 \cdot 10^{-3} \text{H} \cdot 5\% = 5,55 \cdot 10^{-4} \text{H}$

\rightarrow Fehler von $\omega_{r,\text{th}}$:

$$\Delta_{\omega_{r,\text{th}}} = \left| \frac{\partial \omega_{r,\text{th}}}{\partial L} \cdot \Delta_L \right| = \frac{1}{2} \cdot (LC)^{-\frac{1}{2}} \cdot C \cdot \Delta_L = \\ \approx 750,375 \frac{1}{\text{s}}$$

\Rightarrow Erwartungswert: $\boxed{\omega_{r,\text{th}} = (30,0 \pm 0,8) \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}}$

- Generatorkreis (S.27): $f = 4,677 \cdot 10^3 \text{Hz}$

$$\rightarrow \omega_{r,\text{exp}} = 2\pi f = 29,38645768 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$$

Fehler des Frequenzgenerators (S.22): ± 1 digit

$$\rightarrow \Delta_{\omega_{r,\text{exp}}} = 0,001 \text{Hz} \cdot 2\pi \approx 0,00628 \frac{1}{\text{s}}$$

\Rightarrow Generatorkreis: $\boxed{\omega_{r,\text{exp}} = (29386,458 \pm 0,006) \frac{1}{\text{s}}}$

- Auffällig ist, dass der theoretische Wert einen ziemlich großen Fehler gegenüber dem experimentellen Wert besitzt. Dies liegt daran, dass der Frequenzgenerator den eingestellten Wert sehr genau angeben kann und dass die Fehlerfortpflanzung für $\omega_{r,\text{th}}$ der Fehler sehr groß wird.

- Innerhalb der Fehlergrenzen des theoretischen Werts stimmen beide Werte überein.

- Erwartet wurde als Bild auf dem Oszilloskop ein Kreis, jedoch erhielten wir stets eine Ellipse, d.h. die Amplituden waren im Resonanzfall nicht gleich groß, was sie hätten sein sollen. Eine mögliche Fehlerquelle war, dass wir die Amplitude beim Frequenzgenerator auf 100% gestellt hatten.^{V.a.} Im Resonanzfall kann es

jedoch passieren, dass keine sinusförmige Wechselspannung mehr geliefert wird und somit das Bild verzerrt wird.

Dies ist vermutlich hier passat.

2) Resonanzkurve

Benötigte Werte:

- Fehler der Frequenz f : $\pm 1 \text{ digit} : s_f = 0,001$ (zu klein zu nehmen)

- Fehler der Spannung U_R :

- Restfehler: $3\% : s_{U_R, \text{rest}} = 0,03 \cdot U_R$

- Ablesefehler: abhängig von der Einstellung der Empfindlichkeit E : $s_{U_R} = 0,1 \cdot E$
(Hälfte der kleinsten Skaleneinheit)

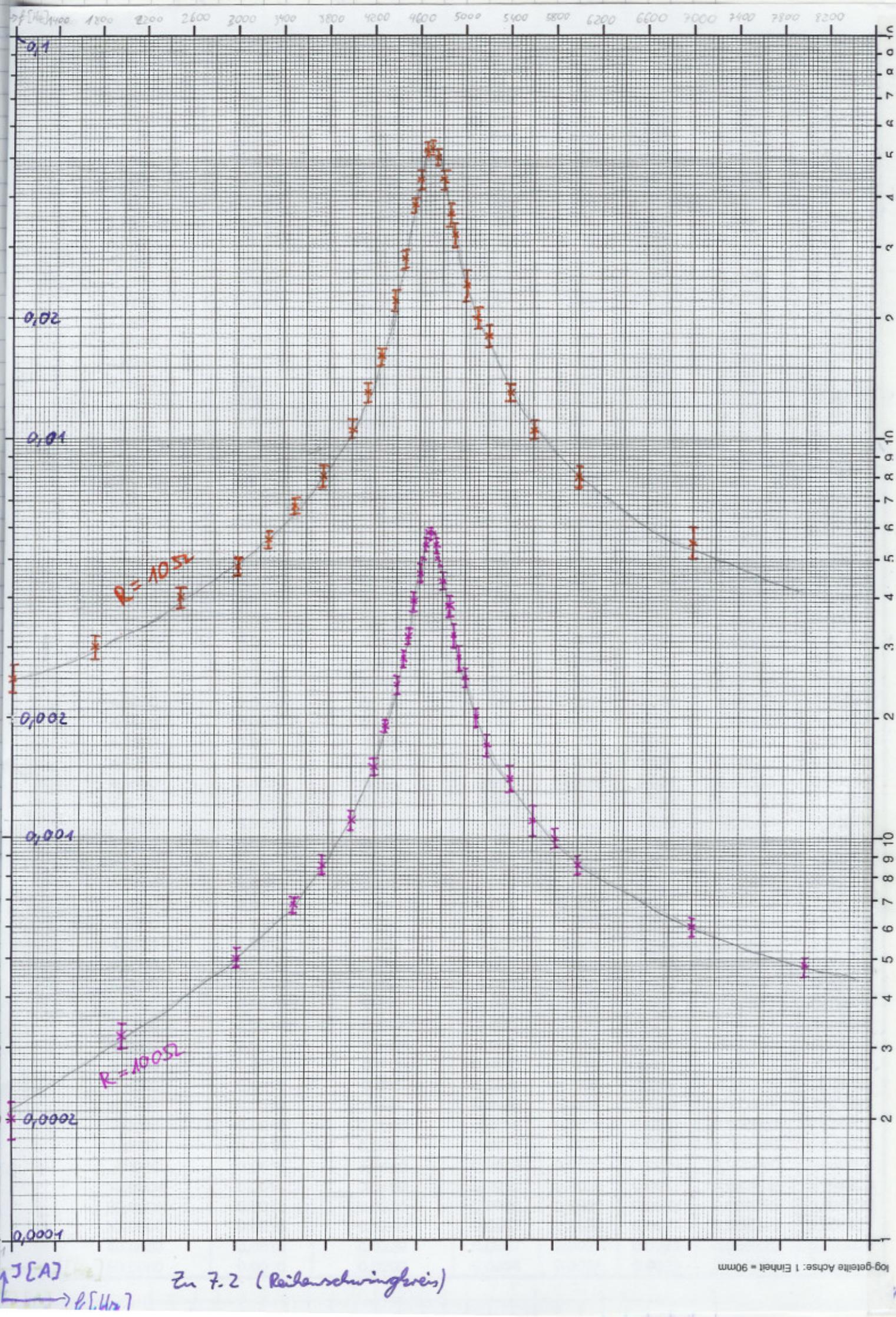
$$\Rightarrow s_{U_R} = \sqrt{s_{U_R, \text{rest}}^2 + s_{U_R^0}^2}$$

- Strom I : $I = \frac{U_R}{R}$

- Fehler des Stroms I :

$$s_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial U_R} s_{U_R}\right)^2} = \frac{s_{U_R}}{R}$$

- Die variablen Werte der Frequenz f und der Spannung U_R werden aus der Mertabelle (S. 288) von 6.2.2 entnommen



Zu 7.2 (Reilschwingkreis)

Log-log Skala: 1 Einheit = 90mm

Für $R = 10 \Omega$ (Zu 7.2: Reihenschwingkreis)

Nr.	Frequenz f [kHz]	s _f [kHz]	Spannung U _R [V]	s _{U,rest} [V]	s _{Ua} [V]	s _{UR} [V]	Strom I [A]	s _I [A]
1	1,0000	0,0010	0,0250	0,0008	0,002	0,0021	0,00250	0,00021
2	1,7500	0,0010	0,0300	0,0009	0,002	0,0022	0,00300	0,00022
3	2,5000	0,0010	0,0400	0,0012	0,002	0,0023	0,00400	0,00023
4	3,0000	0,0010	0,0480	0,0014	0,002	0,0025	0,00480	0,00025
5	3,2500	0,0010	0,0560	0,0017	0,002	0,0026	0,00560	0,00026
6	3,5000	0,0010	0,0680	0,0020	0,002	0,0029	0,00680	0,00029
7	3,7500	0,0010	0,080	0,0024	0,005	0,006	0,0080	0,0006
8	4,0000	0,0010	0,105	0,0032	0,005	0,006	0,0105	0,0006
9	4,1250	0,0010	0,130	0,0039	0,005	0,006	0,0130	0,0006
10	4,2500	0,0010	0,160	0,005	0,005	0,007	0,0160	0,0007
11	4,3750	0,0010	0,220	0,007	0,010	0,012	0,0220	0,0012
12	4,4500	0,0010	0,280	0,008	0,010	0,013	0,0280	0,0013
13	4,5500	0,0010	0,380	0,011	0,010	0,015	0,0380	0,0015
14	4,6000	0,0010	0,440	0,013	0,020	0,024	0,0440	0,0024
15	4,6500	0,0010	0,520	0,016	0,020	0,025	0,0520	0,0025
16	4,7000	0,0010	0,530	0,016	0,020	0,026	0,0530	0,0026
17	4,7500	0,0010	0,500	0,015	0,020	0,025	0,0500	0,0025
18	4,8000	0,0010	0,440	0,013	0,020	0,024	0,0440	0,0024
19	4,8500	0,0010	0,360	0,011	0,020	0,023	0,0360	0,0023
20	4,9000	0,0010	0,320	0,010	0,020	0,022	0,0320	0,0022
21	5,0000	0,0010	0,240	0,007	0,020	0,021	0,0240	0,0021
22	5,1000	0,0010	0,200	0,006	0,010	0,012	0,0200	0,0012
23	5,2000	0,0010	0,180	0,005	0,010	0,011	0,0180	0,0011
24	5,4000	0,0010	0,130	0,0039	0,005	0,006	0,0130	0,0006
25	5,6000	0,0010	0,105	0,0032	0,005	0,006	0,0105	0,0006
26	6,0000	0,0010	0,080	0,0024	0,005	0,006	0,0080	0,0006
27	7,0000	0,0010	0,055	0,0017	0,005	0,005	0,0055	0,0005
28	10,0000	0,0010	0,0360	0,0011	0,002	0,0023	0,00360	0,00023
29	20,0000	0,0010	0,0260	0,0008	0,002	0,0021	0,00260	0,00021
30	40,0000	0,0010	0,0200	0,0006	0,002	0,0021	0,00200	0,00021
31	50,0000	0,0010	0,0180	0,0005	0,002	0,0021	0,00180	0,00021

Für R = 100 Ω (Zu 7.2: Reihenschwingkreis)

Nr.	Frequenz f [kHz]	s _f [kHz]	Spannung U _R [V]	s _{U,rest} [V]	s _{Ue} [V]	s _{UR} [V]	Strom I [A]	s _i [A]
1	1,0000	0,0010	0,0200	0,0006	0,0020	0,0021	0,000200	0,000021
2	2,0000	0,0010	0,0320	0,0010	0,0020	0,0022	0,000320	0,000022
3	3,0000	0,0010	0,0500	0,0015	0,0020	0,0025	0,000500	0,000025
4	3,5000	0,0010	0,0680	0,0020	0,0020	0,0029	0,000680	0,000029
5	3,7500	0,0010	0,085	0,0026	0,005	0,006	0,00085	0,00006
6	4,0000	0,0010	0,110	0,0033	0,005	0,006	0,00110	0,00006
7	4,2000	0,0010	0,150	0,005	0,005	0,007	0,00150	0,00007
8	4,3000	0,0010	0,190	0,006	0,005	0,008	0,00190	0,00008
9	4,4000	0,0010	0,240	0,007	0,010	0,012	0,00240	0,00012
10	4,4500	0,0010	0,280	0,008	0,010	0,013	0,00280	0,00013
11	4,5000	0,0010	0,320	0,010	0,010	0,014	0,00320	0,00014
12	4,5500	0,0010	0,390	0,012	0,020	0,023	0,00390	0,00023
13	4,6000	0,0010	0,460	0,014	0,020	0,024	0,00460	0,00024
14	4,6250	0,0010	0,500	0,015	0,020	0,025	0,00500	0,00025
15	4,6500	0,0010	0,520	0,016	0,020	0,025	0,00520	0,00025
16	4,6750	0,0010	0,540	0,016	0,020	0,026	0,00540	0,00026
17	4,7000	0,0010	0,540	0,016	0,020	0,026	0,00540	0,00026
18	4,7250	0,0010	0,520	0,016	0,020	0,025	0,00520	0,00025
19	4,7500	0,0010	0,500	0,015	0,020	0,025	0,00500	0,00025
20	4,7750	0,0010	0,480	0,014	0,020	0,025	0,00480	0,00025
21	4,8000	0,0010	0,440	0,013	0,020	0,024	0,00440	0,00024
22	4,8500	0,0010	0,380	0,011	0,020	0,023	0,00380	0,00023
23	4,9000	0,0010	0,320	0,010	0,020	0,022	0,00320	0,00022
24	4,9500	0,0010	0,280	0,008	0,020	0,022	0,00280	0,00022
25	5,0000	0,0010	0,250	0,008	0,010	0,013	0,00250	0,00013
26	5,1000	0,0010	0,200	0,006	0,010	0,012	0,00200	0,00012
27	5,2000	0,0010	0,170	0,005	0,010	0,011	0,00170	0,00011
28	5,4000	0,0010	0,140	0,004	0,010	0,011	0,00140	0,00011
29	5,6000	0,0010	0,110	0,0033	0,010	0,011	0,00110	0,00011
30	5,8000	0,0010	0,095	0,0029	0,005	0,006	0,00095	0,00006
31	6,0000	0,0010	0,085	0,0026	0,005	0,006	0,00085	0,00006
32	7,0000	0,0010	0,0600	0,0018	0,0020	0,0027	0,000600	0,000027
33	8,0000	0,0010	0,0480	0,0014	0,0020	0,0025	0,000480	0,000025
34	9,0000	0,0010	0,0440	0,0013	0,0020	0,0024	0,000440	0,000024
35	10,0000	0,0010	0,0400	0,0012	0,0020	0,0023	0,000400	0,000023
36	20,0000	0,0010	0,0280	0,0008	0,0020	0,0022	0,000280	0,000022
37	30,0000	0,0010	0,0240	0,0007	0,0020	0,0021	0,000240	0,000021
38	40,0000	0,0010	0,0220	0,0007	0,0020	0,0021	0,000220	0,000021
39	50,0000	0,0010	0,0200	0,0006	0,0020	0,0021	0,000200	0,000021

3) Verhältnisse der Resonanzströme ($\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$)

$$R_\alpha := 10 \Omega ; R_\beta := 100 \Omega$$

- Erwartung (Formel S. 7 oben (für U_R im Resonanz)):

$$\frac{I_{R_\alpha}}{I_{R_\beta}} = \frac{\frac{U_0}{R_\alpha}}{\frac{U_0}{R_\beta}} = \frac{R_\beta}{R_\alpha} = \frac{100 \Omega}{10 \Omega} = 10$$

- experimentell:

$$\frac{I_{R_\alpha}}{I_{R_\beta}} = \frac{0,05300 A}{0,00540 A} = 9,814814815$$

$$\sigma_{I_{R_\alpha}} = \sigma_\alpha = 0,00260 A ; \sigma_{I_{R_\beta}} = \sigma_\beta = 0,00026 A$$

$$\Rightarrow \sigma_{\frac{I_{R_\alpha}}{I_{R_\beta}}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{I_{R_\alpha}}{I_{R_\beta}}}{\partial I_{R_\alpha}} \sigma_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{I_{R_\alpha}}{I_{R_\beta}}}{\partial I_{R_\beta}} \sigma_\beta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha}{I_\beta}\right)^2 + \left(-\frac{I_\alpha}{I_\beta^2} \sigma_\beta\right)^2} = \\ = 0,475011655 \approx 0,48$$

$$\Rightarrow \frac{I_{R_\alpha}}{I_{R_\beta}} = 9,81 \pm 0,48$$

Da der erwartete Wert im Fehlerintervall des gemessenen Wertes liegt, kann man hier sagen, dass Theorie und Praxis übereinstimmen. ✓

7.3 Resonanz im Parallelkreis

1) Resonanzfrequenz

da $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und hier auch nur von L und C abhängt und L und C genau dieselben Werte aus 7.2 (Serienschwingkreis) sind, stimmen der theoretische und der experimentelle Wert mit denen aus 7.2 (S. 40) überein.

$$\omega_{r,\text{th}} = (30,0 \pm 0,8) \cdot 10^3 \frac{1}{s}$$

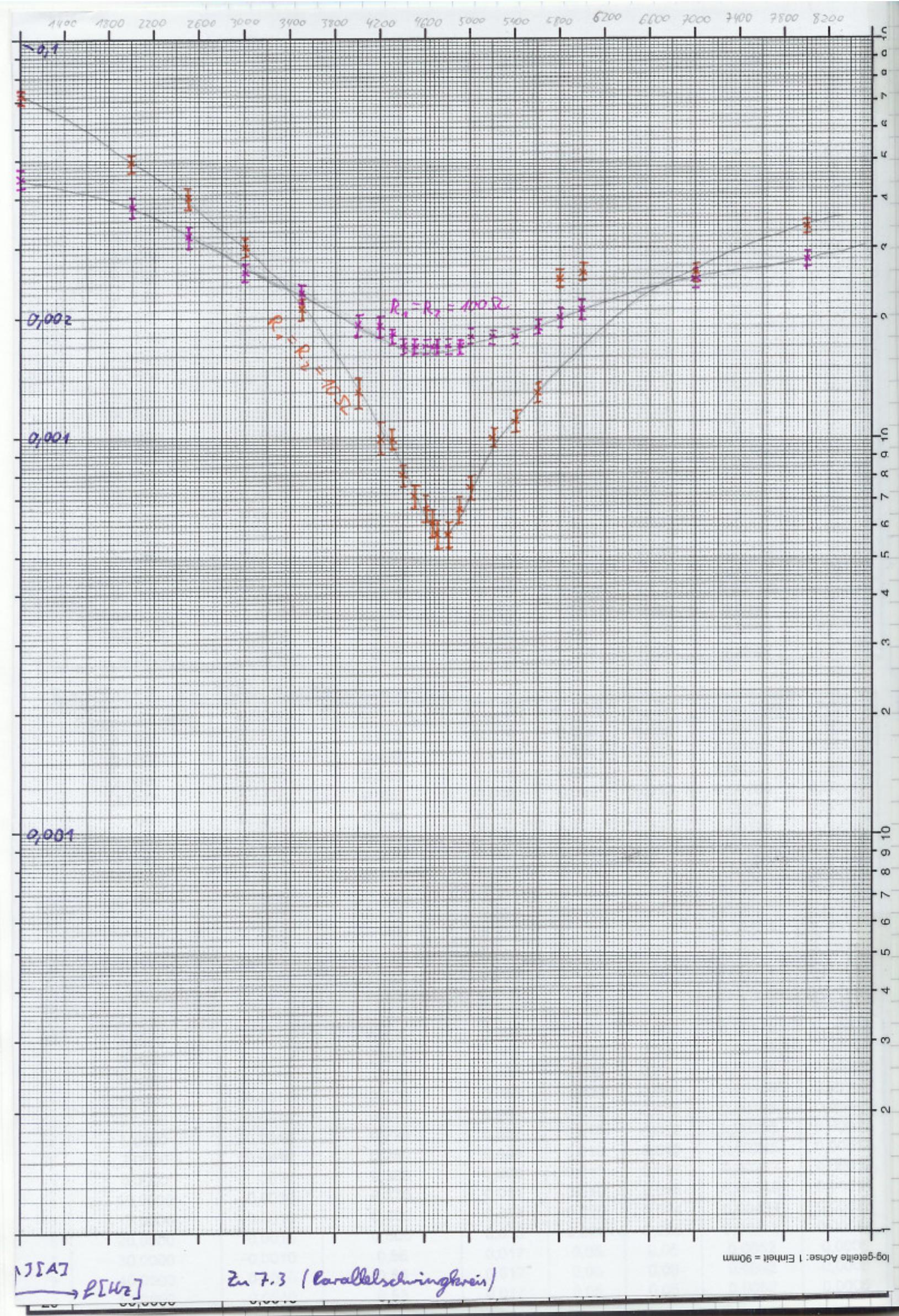
$$\omega_{r,\text{exp}} = (29386 \pm 0,006) \frac{1}{s}$$

2) Resonanzkurve

Benötigte Werte: - analog 7.2 (2)

- Die variablen Werte der Frequenz f und der Spannung U_R werden aus der Messabelle (S. 31f) von 6.3.2 entnommen

Fehler der Frequenz $f: \delta_f = 0,001$ ist zu klein, um ihn einzurichten



$R_1 = R_2 = 10 \Omega$ (zu 7.3: Parallelkreis)

Nr.	Frequenz f [kHz]	s _f [kHz]	Spannung U _R [V]	s _{U,rest} [V]	s _{Ua} [V]	s _{UR} [V]	Strom I [A]	s _i [A]
1	1,0000	0,0010	0,760	0,023	0,020	0,030	0,00717	0,00029
2	2,0000	0,0010	0,520	0,016	0,020	0,025	0,00491	0,00024
3	2,5000	0,0010	0,420	0,013	0,020	0,024	0,00396	0,00022
4	3,0000	0,0010	0,320	0,010	0,010	0,014	0,00302	0,00013
5	3,5000	0,0010	0,220	0,007	0,010	0,012	0,00208	0,00011
6	4,0000	0,0010	0,140	0,004	0,010	0,011	0,00132	0,00010
7	4,2000	0,0010	0,100	0,0030	0,010	0,010	0,00094	0,00010
8	4,3000	0,0010	0,095	0,0029	0,005	0,006	0,00090	0,00005
9	4,4000	0,0010	0,085	0,0026	0,005	0,006	0,00080	0,00005
10	4,5000	0,0010	0,075	0,0023	0,005	0,005	0,00071	0,00005
11	4,6000	0,0010	0,070	0,0021	0,005	0,005	0,00066	0,00005
12	4,6500	0,0010	0,065	0,0020	0,005	0,005	0,00061	0,00005
13	4,7000	0,0010	0,060	0,0018	0,005	0,005	0,00057	0,00005
14	4,8000	0,0010	0,060	0,0018	0,005	0,005	0,00057	0,00005
15	4,9000	0,0010	0,070	0,0021	0,005	0,005	0,00066	0,00005
16	5,0000	0,0010	0,080	0,0024	0,005	0,006	0,00075	0,00005
17	5,2000	0,0010	0,105	0,0032	0,005	0,006	0,00099	0,00006
18	5,4000	0,0010	0,120	0,0036	0,005	0,006	0,00113	0,00006
19	5,6000	0,0010	0,140	0,004	0,005	0,007	0,00132	0,00006
20	5,8000	0,0010	0,260	0,008	0,010	0,013	0,00245	0,00012
21	6,0000	0,0010	0,280	0,008	0,010	0,013	0,00264	0,00012
22	7,0000	0,0010	0,280	0,008	0,010	0,013	0,00264	0,00012
23	8,0000	0,0010	0,360	0,011	0,010	0,015	0,00340	0,00014
24	10,0000	0,0010	0,480	0,014	0,020	0,025	0,00453	0,00023
25	15,0000	0,0010	0,680	0,020	0,020	0,029	0,00642	0,00027
26	20,0000	0,0010	0,800	0,024	0,020	0,031	0,00755	0,00029
27	30,0000	0,0010	0,90	0,027	0,05	0,06	0,0085	0,0005
28	40,0000	0,0010	0,90	0,027	0,05	0,06	0,0085	0,0005
29	50,0000	0,0010	0,95	0,029	0,05	0,06	0,0090	0,0005

$R_1 = R_2 = 100 \Omega$ (zu 7.3: Reziproker Parallelkreis)

Nr.	Frequenz f [kHz]	s _f [kHz]	Spannung U _R [V]	s _{U,rest} [V]	s _{Ua} [V]	s _{UR} [V]	Strom I [A]	s _i [A]
1	1,0000	0,0010	0,480	0,014	0,020	0,025	0,00453	0,00023
2	2,0000	0,0010	0,400	0,012	0,020	0,023	0,00377	0,00022
3	2,5000	0,0010	0,340	0,010	0,020	0,022	0,00321	0,00021
4	3,0000	0,0010	0,280	0,008	0,010	0,013	0,00264	0,00012
5	3,5000	0,0010	0,240	0,007	0,010	0,012	0,00226	0,00012
6	4,0000	0,0010	0,200	0,006	0,010	0,012	0,00189	0,00011
7	4,2000	0,0010	0,200	0,006	0,010	0,012	0,00189	0,00011
8	4,3000	0,0010	0,190	0,006	0,005	0,008	0,00179	0,00007
9	4,4000	0,0010	0,185	0,006	0,005	0,007	0,00175	0,00007
10	4,5000	0,0010	0,185	0,006	0,005	0,007	0,00175	0,00007
11	4,6000	0,0010	0,185	0,006	0,005	0,007	0,00175	0,00007
12	4,6500	0,0010	0,185	0,006	0,005	0,007	0,00175	0,00007
13	4,7000	0,0010	0,185	0,006	0,005	0,007	0,00175	0,00007
14	4,8000	0,0010	0,185	0,006	0,005	0,007	0,00175	0,00007
15	4,9000	0,0010	0,185	0,006	0,005	0,007	0,00175	0,00007
16	5,0000	0,0010	0,190	0,006	0,005	0,008	0,00179	0,00007
17	5,2000	0,0010	0,195	0,006	0,005	0,008	0,00184	0,00007
18	5,4000	0,0010	0,195	0,006	0,005	0,008	0,00184	0,00007
19	5,6000	0,0010	0,200	0,006	0,005	0,008	0,00189	0,00007
20	5,8000	0,0010	0,210	0,006	0,010	0,012	0,00198	0,00011
21	6,0000	0,0010	0,220	0,007	0,010	0,012	0,00208	0,00011
22	7,0000	0,0010	0,260	0,008	0,010	0,013	0,00245	0,00012
23	8,0000	0,0010	0,300	0,009	0,010	0,013	0,00283	0,00013
24	10,0000	0,0010	0,370	0,011	0,010	0,015	0,00349	0,00014
25	15,0000	0,0010	0,460	0,014	0,020	0,024	0,00434	0,00023
26	20,0000	0,0010	0,500	0,015	0,020	0,025	0,00472	0,00024
27	30,0000	0,0010	0,55	0,017	0,05	0,05	0,0052	0,0005
28	40,0000	0,0010	0,55	0,017	0,05	0,05	0,0052	0,0005
29	50,0000	0,0010	0,55	0,017	0,05	0,05	0,0052	0,0005

3) Verhältnisse der Resonanzströme ($\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)

$$R_A = 10 \Omega, R_B = 100 \Omega, R = 106 \Omega, L = 11,1 \cdot 10^{-3} \text{ H}, C = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

• Erwartung (Formel S. 9 für $\tilde{\jmath}$):

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\tilde{U} \frac{2 R_A}{2 R R_A + (R_B)^2 + \frac{L}{C}}}{\tilde{U} \frac{2 R_B}{2 R R_B + (R_A)^2 + \frac{L}{C}}} = \frac{R_A (2 R R_B + (R_B)^2 + \frac{L}{C})}{R_B (2 R R_A + (R_A)^2 + \frac{L}{C})} = \\ = 0,125596184$$

• experimentell:

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{0,00057 \text{ A}}{0,00175 \text{ A}} = 0,325714285$$

$$\delta I_{A,B} = \beta_A = 0,00005 \text{ A}, \delta I_{A,B} = \beta_B = 0,00007 \text{ A}$$

$$\Rightarrow \delta \frac{\tilde{\jmath}}{\jmath} = \sqrt{\left(\frac{\beta_A}{I_A}\right)^2 + \left(-\frac{I_A}{I_A^2} \beta_B\right)^2} = 0,031407754$$

$$\Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = 0,326 \pm 0,031$$

Der erwartete Wert liegt nicht im Fehlerintervall des experimentellen Wertes. Der experimentelle Wert ist ca. um ein Faktor 3 größer als der erwartete.

Mögliche Fehlerursachen:

- Wie bereits geschildert, verursacht der ~~statische~~ Grammingsgenerator ~~es~~ v.a. im Resonanzfall teilweise Probleme. Auch wenn die Amplitude hier bereits auf ca. 30% reduziert wurde, könnte der verursachte Effekt aufgetreten sein. Für die genaue Meldung?

- Ebenfalls bereits erwähnt wurde, dass die Anflanten in früheren Versionen teils stark leistungsempfindlich waren.
Dies könnte auch hier der Fall gewesen sein.
- Widerstand Bauteile?

7.4 Messung komplexer Widerstände

7.4.1 Messung für KW6a (\tilde{R}_a)

Ausgleichsbed. (S. 11): $\tilde{R}_a = R_3 \cdot \underbrace{\frac{1+R_1 R_2 \omega^2 C^2}{1+R_2^2 \omega^2 C^2}}_{\alpha} + i \cdot R_3 \cdot \omega \cdot C \cdot \underbrace{\frac{R_1 - R_2}{1+R_2^2 \omega^2 C^2}}_{b}$

- Erwartete Werte:

$$\tilde{R}_a = R + i \cdot \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_a} \right)}_{b_{th}} \quad | \text{ mit: } \omega = 10^4 \frac{1}{s}; R = 931 \Omega;$$

$$\rightarrow a_{th} = R = 931 \Omega; \quad L = 11,1 \text{ mH}; \quad C_a = 1,02 \mu F$$

$$b_{th} = 12,96 \Omega$$

Fehlerberechnung:

- a_{th} hat keinen Fehler (da $a_{th} = R$, und R als fehlerfrei angenommen wird)

$$- b_{th}: \quad r_{bth} = \left| \frac{\partial b_{th}}{\partial L} \cdot r_L \right| = \omega \cdot r_L = 5,55 \Omega$$

$$\text{mit: } r_L = 5\% \cdot 11,1 \text{ mH}$$

$$\rightarrow a_{ta} = 931 \Omega$$

$$b_{ta} = (13 \pm 6) \Omega$$

- experimenteller Wert: Berechnung mittels \tilde{R}_x -Formel:

$$\text{mit: } R_1 = 1100 \Omega, R_2 = 1046 \Omega, R_3 = 910 \Omega$$

$$\sigma_{R_1} = 11,0 \Omega, \sigma_{R_3} = 9,1 \Omega \quad (\text{Wid. abhängig, } 1\% \text{ des eingestellten Werts})$$

$$C = 0,1 \mu F, \omega = 10^4 \frac{1}{s}, R = 913 \Omega$$

$$\rightarrow a_{exp} = 934,545 \Omega$$

$$\begin{aligned} \text{Fehler: } \sigma_{a_{exp}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial a_{exp}}{\partial R_1} \cdot \sigma_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_{exp}}{\partial R_3} \cdot \sigma_{R_3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{R_3 R_2 \omega^2 C^2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2} \cdot \sigma_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1 + R_1 R_2 \omega^2 C^2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2} \cdot \sigma_{R_3}\right)^2} \\ &\approx 10,599 \Omega \end{aligned}$$

$$\rightarrow a_{exp} = (935 \pm 11) \Omega$$

$$\rightarrow b_{exp} = 23,466 \Omega$$

$$\begin{aligned} \text{Fehler: } \sigma_{b_{exp}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial b_{exp}}{\partial R_1} \cdot \sigma_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial b_{exp}}{\partial R_3} \cdot \sigma_{R_3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{R_3 \omega C}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2} \cdot \sigma_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{R_1 - R_2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2} \cdot \sigma_{R_3} \cdot \omega C\right)^2} = \\ &= 4,786 \Omega \end{aligned}$$

$$\rightarrow b_{exp} = (23 \pm 5) \Omega$$

$$\tilde{R}_a \text{ ergibt sich nach: } \tilde{R}_a = a_{exp} + i b_{exp}$$

- Vergleich: Man erkennt, dass der Realteil von \tilde{R}_a , also a , bezüglich des erwarteten und experimentell bestimmten Werts innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmt.

Der erwartete und der experimentelle Imaginärteil, also b , weichen stark voneinander ab, jedoch noch nicht signifikant, da

die Fehlergrenzen „überschreite“.

auf dem Amplitudogramm

- Es wurde als Bild im Abgleich eine horizontale Linie erwartet. Das konnte wir, wie auf S. 33 zu sehen, jedoch nicht ganz erreichen, sondern nur eine sehr schmale Ellipse erzeugen, deren Halbachsen horizontal und vertikal waren. Die ^{noch} ~~genutzte~~ Spannungsdifferenz hat dabei ~~noch~~ eine Amplitude von ca. $\frac{1}{2} \cdot 0,02V = 0,01V$.
- | Das Problem war, dass es schwierig ist, abzuschätzen, welcher Widerstand als nächstes und wie stark modifiziert werden muss, um einen optimalen Abgleich näher zu kommen.

7.4.2 Messung für KW66 (\tilde{R}_b)

- Werte: $R = 33152 \Omega$, $C_b = 47 \cdot 10^{-9} F$ (Kond. in \tilde{R}_b),

$$\omega = 10^4 \frac{1}{s}, R_2 = 104652 \Omega, C = 0,1 \mu F,$$

$$R_1 = 400 \Omega, R_3 = 114052 \Omega,$$

$$\Rightarrow R_{th} = 452 \Omega, \Rightarrow R_{th} = 11,452 \Omega \quad (\text{Wid. abrunden: } 1\% \text{ der eingestellten Werte})$$

- Erwartete Werte:

Es liegt eine Parallelschaltung von einem Kond. C_b und einem Wid. R

vor, welche \tilde{R}_b bilden:

$$\tilde{R}_b = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C_b}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + i\omega C_b \right)^{-1} = \left(\frac{1 + i\omega C_b R}{R} \right)^{-1} =$$

$$= R \cdot \frac{1}{1 + i\omega C_b R} = \underbrace{\frac{R}{1 + \omega^2 C_b^2 R^2}}_{= a_{th}} - i \cdot \underbrace{\frac{R^2 \cdot \omega C_b}{1 + \omega^2 C_b^2 R^2}}_{= b_{th} \cdot (-1)}$$

Es werden beide Größen (a_{th}, b_{th}) als fehlerfrei angenommen.

Dann ergibt sich mit obigen Werten:

$$a_{th} = 781,3952$$

zolltp $\approx 1200 \Omega$ zumin

$$b_{th} = -341,9152$$

- Experimentelle Werte: Berechnung mittels Formel für \tilde{R}_x (siehe S. 47) und

obige Werte (d.h. alle Formeln sind identisch):

$$a_{exp} = 772,152 \Omega$$

$$\Rightarrow a_{exp} = 8,050 \Omega$$

$$\rightarrow a_{exp} = (772 \pm 8) \Omega$$

$$b_{exp} = -351,67152$$

$$\Rightarrow b_{exp} = 4,136 \Omega$$

$$\rightarrow b_{exp} = (-351 \pm 4) \Omega$$

Wie merkt ihr einen negativen Wert?!

- Die experimentelle und theoretische Werte weichen bzgl. der Fehlergrenzen signifikant voneinander ab, obwohl wir eine gute horizontale Gerade erzielen konnten. (Da das Aufblau jedoch statisch komplex war, konnten sich viele kleine Fehler ergeben, die sich am Ende aufsummieren.) Insbesondere wurden auch in der Rechnung viele Fehler verneachlässigt, weshalb der wahre Fehlerat deutlich größer sein muss. Punkt setzt ihn ab!

3.11.10 gut Mi Fänger 18,5 PKT