

INHALT

Versuch: komplexe Widerstände

1. Allgemeines

Teilnehmer:

- Protokoll: Dominik Müller (Gruppe 3)
- Messung: David Stöckelmann (Gruppe 1)
- Auswertung: Anna-Maria Pleyer (Gruppe 3)

Ort

Universität Bayreuth, NW II

Raum

2. OG. 02. 692

Datum

27. Oktober. 2020

Versuchsort:

einziges Platz im Raum

gut

2. Einleitung

Widerstände, Kondensatoren und Spulen sind wichtige Errungenschaften der Elektronik. Allerdings schwingt bei diesen Bauteilen der durchfließende Strom, nicht mit der angelegten Spannung, in Phase. Durch Einführung der komplexen Zahlen bzw. der komplexen Widerstände können auch, trotz Wechselstromkreis, das ~~Ohm'sche~~ Gesetz und die Kirchhoff'schen Regeln angewendet werden. Der elektr. Schwingkreis ist eine Schaltung bestehend aus einer Spule und einem Kondensator, der eine elektrische Schwingung ausführen kann. Bei diesem Schwingkreis wird Energie zwischen dem magnetischen Feld der Spule und dem elektrischen Feld des Kondensators periodisch ausgetauscht. Der elektrische Schwingkreis wird oft mit dem harmonischen Oszillator der Mechanik verglichen.
mit Dämpfung

Das Ziel des Versuches ist es, das Verhalten verschiedener Kombinationen komplexer Widerstände bei Anschaltvorgängen zu untersuchen. Wie bereits im Versuch ES werden, hier allerdings mit elektrischen Schwingkreisen, freie und erzwungenen Schwingungen genauer betrachtet, sowie die Resonanzkurve.

3. Fragen zur Vorbereitung

3.1 Frage 1

Der Effektivwert einer Wechselspannung ist jene Gleichspannung, die mit der gleichen Last, genau die gleiche Leistung umsetzt, wie im Mittel durch die Wechselspannung umgesetzt wird.

An ohmischen Verbrauchern lassen sich mithilfe der Effektivwerte von Stromstärke oder Spannung viele Formeln der Gleichstromtechnik auch für die Wechselstromtechnik anwenden.

Für eine sinusförmige Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ ergibt sich, unter Berücksichtigung der Beziehung $I = \frac{U}{R}$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (mit T ist die Periodendauer) folgendes:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt = \\ &= \frac{U_0^2}{T} \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{1}{2} U_0^2 \\ \Rightarrow U_{\text{eff}} &= \underline{\underline{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Analog gilt für den Strom:

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt \\ \Rightarrow I_{\text{eff}} &= \underline{\underline{\frac{I_0}{\sqrt{2}}}} \end{aligned}$$

3.2 Frage 1

a) Ohm'scher Widerstand:

Es gilt:

$$\tilde{U}(t) = R \cdot \tilde{I}(t)$$

daraus folgt, dass $\tilde{U} \sim \tilde{I}$ gilt.

Somit folgt, dass Strom und Spannung an einem ohm'schen Widerstand nicht phasenverschoben sind ($\varphi = 0$). ✓

b) Spule:

$$\tilde{U}_L(t) = R_L \tilde{I} = i \omega L \cdot \tilde{I}(t)$$

Der Strom (\sin) und die Spannung (\cos) sind um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben, da mit der imaginären Einheit multipliziert wird.

Also ist der Strom der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ hinterher. ✓

c) Kondensator:

$$\tilde{U}_C(t) = \tilde{Q}_C \cdot \tilde{I}(t) = \frac{1}{i \omega C} \cdot \tilde{I}(t) = \frac{-i}{\omega C} \tilde{I}(t)$$

Der Strom und die Spannung ist auch hier nicht in Phase, sondern um $\frac{\pi}{2}$ verschoben.

Hier wurde mit der negativen imaginären Einheit multipliziert. Dies bedeutet, dass der Strom der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus ist. ✓

3.3 Frage 3

a) Eigenfrequenz:

Gleichung (2) aus dem Versuch ES:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\omega_A t)$$

~~Skizze~~

wobei

λ : Dämpfung

ω_0 : Eigenfrequenz

ω_A : Antriebsfrequenz

Gleichung (9) aus dem Skript KW:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}\tilde{I} = i\omega U_0 e^{i\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}\tilde{I} = \frac{i\omega}{L}U_0 e^{i\omega t}$$

Also folgt, durch Vergleich der Formeln, für die Eigenfrequenz des elektr. Schwingkreis:

$$\underline{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \checkmark \quad \text{und} \quad \underline{\lambda = \frac{R}{2L}}$$

b) Gesamtwiderstand R_{ges} :

Für den komplexen gesamt Widerstand gilt nach

Gleichung (6) im Skript:

$$\underline{R_{ges} = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad \checkmark$$

Für den Betrag gilt:

$$|R_{ges}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Mithilfe der Gl. (8) folgt:

$$\tan(\varphi) = -\frac{\text{Im}(R_{ges})}{\text{Re}(R_{ges})} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

und

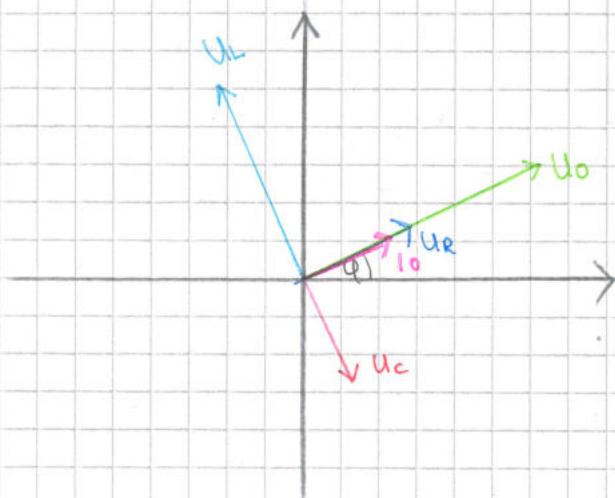
$$I_0 = \frac{U_0}{|R_{ges}|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Die Ergebnisse werden dann in Gl. (8) eingesetzt:

$$T(t) = \frac{U_0}{R} e^{i\omega t} = I_0 \exp(i(\omega t + \varphi))$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot \exp(i(\omega t - \arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})))$$

c) Zeigerdiagramm



d) Resonanzfrequenz:

Bestimmung der Resonanzfrequenz:

$$I_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Ableitung:

$$\frac{dI_0}{d\omega} = -\frac{1}{2} U_0 \cdot \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right)$$

$$\text{mit } \frac{dI_0}{d\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \underbrace{\left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad \checkmark$$

Also entspricht die Resonanzfrequenz (ω_r) der Eigenfrequenz (ω_0).

Bei der Resonanzfrequenz wird der Strom (I_0) minimal, da $(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0$ ist. $\Rightarrow \frac{U_0}{R} \rightarrow \max$

Phasenverschiebung und Gesamtwiderstand:

$$\tan \varphi = - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (\text{s. b!})$$

und wenn man die Resonanzfrequenz betrachtet gilt:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Hieraus ist sofort ersichtlich, dass die Phasenverschiebung gleich Null ist ($\varphi = 0$). ✓

⇒ Der Gesamtwiderstand wird im Resonanzfall minimal. ✓

Verhalten des Serienschwingkreis:

Da der Gesamtwiderstand minimal ist, im Resonanzfall, würde, wie in Abb. KW 3(a) ersichtlich, der Serienschwingkreis nur aus dem ohmschen Widerstand R bestehen.

Also bedeutet dies, dass U_C und U_L sich gegenseitig aufheben müssen, d.h es muss gelten: $U_C = -U_L$. ✓

Wert von U_c und U_L :

$$\tilde{U}_c = \tilde{R}_c \cdot \tilde{I} = \frac{1}{i\omega C} \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (i\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot \exp(i(\omega t - \arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}))$$

Unter Verwendung von $\omega = \omega_r$:

$$\tilde{U}_c = \frac{\sqrt{|LC|}}{iC R} U_0 \exp(i\omega_r t) = -i\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U_0}{R} \exp\left(\frac{i\omega_r t}{\sqrt{|LC|}}\right)$$

Analog gilt für \tilde{U}_L :

$$U_L = \tilde{R}_L \cdot \tilde{I} = i\omega_r L \cdot \tilde{I}$$

$$\Rightarrow \tilde{U}_L = i\omega_r L \frac{U_0}{R} \exp(i\omega_r t) = i\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U_0}{R} \exp\left(i\frac{\omega_r t}{\sqrt{|LC|}}\right)$$

Durch Einführung des Gütefaktors $Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$
folgt für \tilde{U}_c und \tilde{U}_L :

$$\tilde{U}_c = -iQ \cdot U_0 \cdot \exp\left(i\frac{\omega_r t}{\sqrt{|LC|}}\right)$$

$$\tilde{U}_L = iQ \cdot U_0 \cdot \exp\left(i\frac{\omega_r t}{\sqrt{|LC|}}\right)$$

Man erkennt sofort, dass $\tilde{U}_L = -\tilde{U}_c$.

e) Beträge von U_R, U_C, U_L :

Spannung am Widerstand.

$$\tilde{U}_R = R \cdot \tilde{I}$$

$$\Rightarrow U_R = |\tilde{U}_R| = \frac{R \cdot U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Spannung am Kondensator.

$$\tilde{U}_C = \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Spannung an der Spule

$$\tilde{U}_L = i\omega L \cdot \tilde{I}$$

$$U_L = \omega L \cdot \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Skizze



Anwendung:

Ein Anwendungsbeispiel ist der Bandpass.

Wird ein Signal nahe der Resonanzfrequenz, des Schwingkreises, angelegt, so geht die Impedanz gegen unendlich, zudem ist diese parallel zur Last.

Also fließt der gesamte Eingangsstrom durch die Last. Für Frequenzen, die von der Resonanzfrequenz abweichen, wird der Schwingkreis immer mehr leitend. In der Folge fließt auch ein Teil durch das L-C Glied.

Der Bandpass lässt Signalfrequenzen nahe der Resonanzfrequenz durch die Last und hindert Signale mit Frequenzen die stark von ihr abweichen an die Last vorzudringen.

Somit kann man bspw. hohe oder niedrige Töne herausfiltern.

3.4 Frage 4.

a) Im Parallelenschwingkreis (Abb. KW 3(b).) wird die obere Abspannung R_S und die untere R_K genannt.

$$\tilde{R}_S = R_1 + i\omega L$$

$$\tilde{R}_K = R_1 + \frac{1}{i\omega C}$$

$$\Rightarrow \tilde{R}_{\text{ges}} = R + \left(\frac{1}{\tilde{R}_S} + \frac{1}{\tilde{R}_K} \right)^{-1}$$

$$= R + \frac{R_1^2 - i \frac{R_1}{\omega C} + i R_1 \omega L + \frac{L}{C}}{2 R_1 + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Nach mehreren Umformungen folgt:

$$\tilde{R}_{\text{ges}} = \left(R + \frac{2R_1^3 + 2R_1 \frac{L}{C} + R_1 \omega L - \frac{1}{\omega C}}{4R_1^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \right) + i \left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{4R_1^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \right)$$

b) R_{ges} für $R_1 = R_2 = 0$.

$$\tilde{R}_{\text{ges}} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \left(\frac{-\frac{L}{C}}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \right)$$

$$= R - i \frac{L}{C \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

Extremstellen:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Bei ω_1 liegt ein Minimum vor und beim Resonanzfall ($\omega_3 = \omega_0$) ein Maximum.

Im Resonanzfall ist \tilde{R}_{ges} maximal, d.h. der durch den Widerstand fließende Strom ist minimal.

Anwendung:

Ein Anwendungsbeispiel ist die Bandsperrre.

In diesem Fall schließt sich der elektr. Schwingkreis bei der Resonanzfrequenz, kurz. Also wird die Last nicht bestromt.

Für Frequenzen, die von der Resonanzfrequenz abweichen nimmt die Impedanz des L-C-Glied zu, damit nimmt auch der Strom durch die Last zu.

Die Bandsperrre hindert die Signalfrequenz nahe der Resonanzfrequenz an die Last vorzudringen. Das ist hilfreich, um mittlere Töne herausfiltern.

c) \hat{R}_{ges} für $R_1 = R_2 \neq 0$

$$\hat{R}_{\text{ges}} = R + \frac{R_1^2 + \frac{L}{C}}{2R_1} = R + \frac{1}{2}R_1 + \frac{L}{2R_1C}$$

Zusammenfassend fällt auf, dass für $R_1 = R_2 = 0$ der Gesamtwiderstand unendlich groß wird, und der Gesamtwiderstand für $R_1 = R_2 \neq 0$ ein Maximum (beim Resonanzfall) besitzt.

Die Phasenverschiebung beträgt, zw. Strom und Spannung, im Resonanzfall, gleich null. ✓

3.5 Frage 5

Abgleichsbedingung:

$$\text{Spannungsabfall über } \tilde{R}_x = \frac{1}{i\omega C} \text{ Spannungsabfall über } R_3$$

$$\tilde{U}_x = U_3 \quad \checkmark$$

Bestimmung von \tilde{R}_x :

Wie der Abb. VWU zu entnehmen gibt es im Schaltkreis zwei Abzweigungen, der Strom der durch die obere Abzweigung fließt wird im folgenden mit \tilde{I}_o bezeichnet und der durch die untere Abzweigung fließende Strom mit \tilde{I}_u .

Zur Kirchhoffsschen Regeln liefern:

$$\tilde{U} - \tilde{R}_x \tilde{I}_o - R_1 \tilde{I}_o - \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}_o = 0$$

$$\tilde{U} - R_3 \tilde{I}_u - R_2 \tilde{I}_u - \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}_u = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$\tilde{I}_o \left(\tilde{R}_x + R_1 - \frac{i}{\omega C} \right) = \tilde{I}_u \left(R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C} \right)$$

Für die Spannungsabfälle gilt:

$$\tilde{U}_x = \tilde{R}_x \tilde{I}_o \quad \text{und} \quad \tilde{U}_3 = R_3 \tilde{I}_u$$

$$\Rightarrow \tilde{R}_x \tilde{I}_o = R_3 \tilde{I}_u$$

Dies kann man umschreiben zu:

$$\frac{r_0}{r_u} = \frac{R_3 + R_2 - \frac{i}{\omega C}}{R_x + R_1 - \frac{i}{\omega C}} = \frac{R_3}{R_x}$$

Nach \hat{R}_x aufgelöst und auf die Form $\hat{R}_x = a + ib$ gebracht ergibt:

$$\hat{R}_x = R_3 \underbrace{\frac{1 + R_1 R_2 \omega^2 C^2}{1 + R_2 \omega^2 C^2}}_{=:a} + i R_3 \omega C \underbrace{\frac{R_1 - R_2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}}_{=:b}$$

$$R_3 = a \frac{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}{1 + R_1 R_2 \omega^2 C^2}$$

$$R_1 = \frac{b + R_2 \omega C a}{a \omega C - b R_2 \omega^2 C^2}$$

mit den Werten aus Abb. KW 6 (a) gilt:

$$\omega = 10^4 \frac{1}{s}$$

$$C = 0,1 \text{ F}$$

$$R_2 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$\hat{R}_a = i \omega L - \frac{i}{\omega C} + R = \underbrace{R}_{=:a} + i \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}_{=:b}$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ k}\Omega \quad b = 0$$

$$R_1 = \frac{R_2 \omega C a}{a \omega C} = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$\Rightarrow \underline{R_3 = R_1 = 1 \text{ k}\Omega}$$

Für Abb. Vw 6 (b) folgt:

$$\omega = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$C = 0,1 \mu F$$

$$R_2 = 1 k\Omega$$

$$C_L = 47 nF$$

$$R = 1 k\Omega$$

$$\tilde{R}_{fb} = \left(\frac{1}{R} + i\omega C_L \right)^{-1} =$$

$$= \frac{R}{\underbrace{1 + \omega^2 C_L^2 R^2}_a} - i \frac{\omega C_L R^2}{\underbrace{1 + \omega^2 C_L^2 R^2}_b}$$

$$a = 819,068 \Omega$$

$$b = 384,961 \Omega$$

$$\Rightarrow \underline{R_1 \approx 360 \Omega} \quad \underline{R_3 \approx 1200 \Omega}$$

4 Auswertung

4.1 Qualitative Beobachtung

4.1.1 R-L-Kombination

a) Phasenverschiebung.

Es wurde eine R-L-Kombination aufgebaut und die Phasenverschiebung, für verschiedene Widerstände, welche am Oszilloskop angezeigt wurden, ins Protokoll übernommen.

Gemessen wurde die Spannungsabfall^v R (U_R), dieser ist proportional zum Strom $I(t)$.

In den Graphen im Protokoll ist der Kanal 1 die abfallende Spannung über R (U_R) und Kanal 2 die Eingangsspannung ($U(t)$).

Wenn man das erste Bild betrachtet, erkennt man deutlich eine Phasenverschiebung zwischen den Kanälen. Im letzten Bild hingegen, ist wenig, bis überhaupt nicht eine Phasenverschiebung zu erkennen. Das erste Bild zeigt das Verhalten bei einem kleinen Widerstand ($R = 10 \Omega$) und das letzte Bild bei einem großen Widerstand ($R = 10000 \Omega$).

zu erwarten war noch Gl. (4):

$$\tilde{T}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{R + iWL}$$

mit dem Zusammenhang $\tilde{U}_R(t) = R \cdot \tilde{T}(t)$

$$\Rightarrow \tilde{U}_R = R \frac{\tilde{U}(t)}{R + iWL}$$

- für kleine R , kann man die Gleichung wie folgend approximieren:

$$T(t) \approx \frac{1}{WL} \tilde{U}(t)$$

wie zu erkennen stellt sich eine Phasenverschiebung zwischen $\tilde{U}(t)$ und $T(t)$ ein.

- für große R , kann man folgende Approximation machen:

$$\tilde{U}_R(t) \approx R \cdot \frac{\tilde{U}(t)}{R} \approx \tilde{U}(t)$$

d.h. für große Widerstände sind Eingangsspannung und $\tilde{U}_R(t)$ in Phase.

Zusammenfassung:

Die beobachteten Bilder am Oszilloskop, während dem Versuch, stimmen mit den theoretisch erwarteten überein. ✓

b) Einschaltvorgänge

Wenn man sich hier das erste Bild nähert betrachtet, fällt auf, dass die Spannung (U_R) sehr spitz (für ein kleines R) verläuft.

Wobei hingegen die Bilder für die Widerstände $R = 500 \Omega, 1.000 \Omega, 5.000 \Omega$ typische Einschaltkurven darstellen.

Hier wird nur der Einschaltvorgang betrachtet, d.h. die abfallende Abschnitte des Bildes werden nicht mit berücksichtigt, da diese die Ausschaltvorgänge zeigen.

Erwartungen:

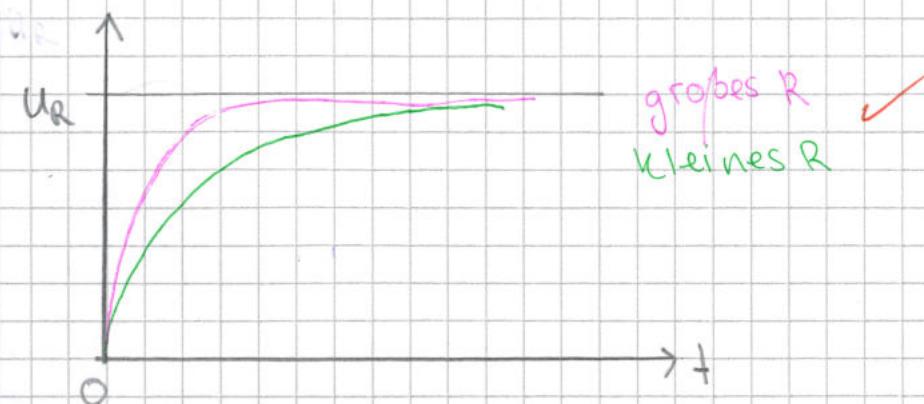
Beim Einschaltvorgang einer R-L-Schaltung kann die Formel (3) verwendet werden, wobei $w=0$ gilt:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) = U_0$$

mit dem "Ansatz" und der Anfangsbedingung $I(0) \stackrel{!}{=} 0$ folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - \exp\left(-t + \frac{R}{L}\right) \right)$$

$$\Rightarrow U_R = U_0 \left(1 - \exp\left(-t + \frac{R}{L}\right) \right)$$



Wie man sieht entspricht der Einschaltvorgang für
Kleine ℓ in etwa das Zeichnung für $R=500\Omega$
im Protokollbuch.

Bei $R=5.000\Omega$ sieht man deutlich,
dass Bild für den Einschaltvorgang bei
großen Widerständen.

Also kann man sagen, dass die
Bilder für $R=500\Omega$ bis $R=5.000\Omega$ ✓
sich mit den erwarteten Bildern decken.

Bei den Bildern für sehr kleine R
($R=10\Omega$) erkennt man deutlich, dass
die Spule noch nicht vollständig
aufgeladen ist, bevor sich die Eingangs-
spannung ändert, also kann sie nicht
mit dem erwarteten Bildern übereinstimmen. ok

4.1.2 R-C-Kombination

a) Phasenverschiebung:

Beobachtung:

Für die entsprechenden Widerstände wurde, jeweils ein Bild, welches am Oszilloskop angezeigt wurde, ins Protokoll übertragen.

Kanal 1 zeigt die abfallende Spannung über R ($U_R(t)$) und Kanal 2 die Eingangsspannung $U(t)$.

Wie zu erkennen ist, existiert eine Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der Eingangsspannung für einen kleinen Widerstand ($R = 10\Omega$). Wobei bei einem großen Widerstand ($R = 10.000\Omega$) kaum eine Phasenverschiebung zu beobachten ist.

Erwartungen

Nach Seite KW-2 gilt:

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad \text{mit } \tilde{U}_R(t) = R \cdot \tilde{I}(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{U}_R = R \cdot \frac{\tilde{U}(t)}{R + \frac{1}{i\omega C}}$$

- für kleine R :

$$\tilde{I}(t) = i\omega C \cdot \tilde{U}(t)$$

also stellt sich eine Phasenverschiebung zwischen $\tilde{I}(t)$ und $\tilde{U}(t)$ ein.

- bei großer R :

$$\tilde{U}_R(t) \approx R \cdot \frac{\tilde{U}(t)}{R} \approx \tilde{U}(t)$$

$\tilde{U}_R(t)$ und $\tilde{U}(t)$ sind also in Phase

Dies erkennt man auch auf den beobachteten Bildern.

b) Einschaltvorgang

Erwartungen:

Für diesen Versuchsaufbau gilt nach Seite KW-2 folgende Bedingung:

$$U(t) = \tilde{U}_R(t) + \tilde{U}_C(t) = R \tilde{I}(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

mit der Bedingung, dass $\tilde{U}_R(t) = \text{Konst.}$
 $(\Rightarrow \tilde{U}_R = 0)$ folgt:

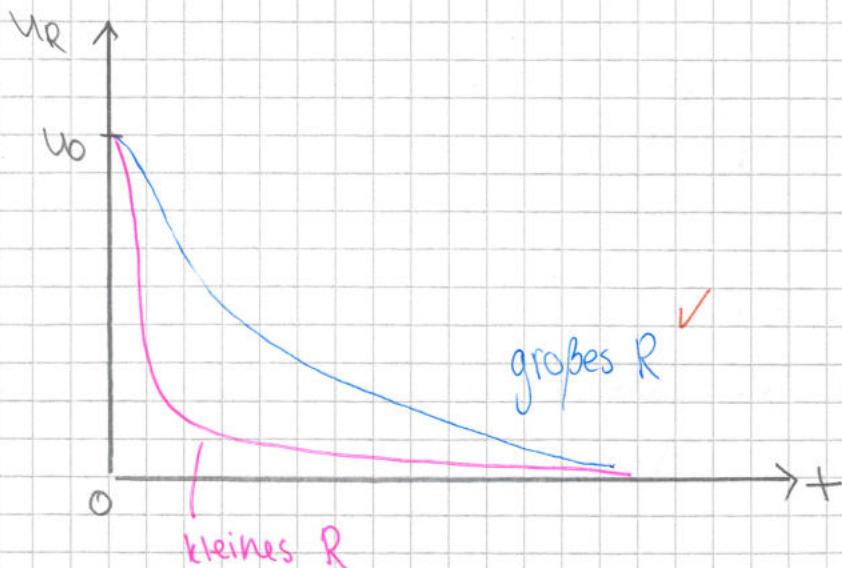
$$\tilde{I}(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Da am Anfang noch keine Spannung über C abfällt gilt: $I_0 = \frac{U_0}{R}$.

Hieraus lässt sich der erwartete Verlauf des Einschaltvorgangs einer R-C-Kombination wie folgt darstellen:

$$\tilde{I}(t) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$\Rightarrow U_R = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$



Beobachtungen:

Wie man dem Protokoll entnehmen kann, erfüllen die Zeichnungen für kleine Widerstände $R=10\Omega, 50\Omega, 100\Omega$ die theoretisch erwarteten Bilder, da der Kondensator bei kleinen Widerständen schneller aufgeladen ist.

Bei großen Widerständen lädt der Kondensator hingegen langsam auf, das heißt der Kondensator ^{ist} nicht vollständig aufgeladen bevor sich die Eingangsspannung wieder ändert. Daraus stimmen die Graphen nicht komplett überein.

4.1.3 Serienschwingkreis

a) Einschaltvorgang

Erwartungen:

Der Einschaltvorgang entspricht der einmaligen Auslenkung aus der Ruhelage.

Wie aus den Fragen zur Vorbereitung (F 3) zu entnehmen, lässt sich die Eigenfrequenz und die Dämpfung darstellen als:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{R}{2L}$$

Nun muss man 3 Fälle unterscheiden:

• kl. Dämpfung: $\lambda^2 < \omega_0^2$

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$$

mit Angaben aus dem Protokoll

$C = 0,1 \mu F$ und $L = 10,05 mH$

ergibt sich:

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}} \approx 632 \Omega$$

Es liegt also eine gedämpfte Schwingung für $R < 632 \Omega$ vor.

• große Dämpfung: $\lambda^2 > \omega_0^2$

$$R > \sqrt{\frac{4L}{C}} = 632 \Omega$$

Für $R > 632 \Omega$ liegt kein Nulldurchgang mehr vor.

- Aperiodischer Grenzfall: $\lambda' = \omega_0$

$$\underline{R = 632 \Omega}$$

Bei $R = 632 \Omega$ findet max. ein Nulldurchgang statt.

Beobachtung Vergleich:

- Für kleine Widerstände, wie beispielsweise $R = 50 \Omega$, erkennt man gut, dass die Erwartungen und die experimentell bestimmten Ergebnisse übereinstimmen. Hier schwingt der Serien-Schwingkreis leicht gedämpft. ✓
- Für große Widerstände ($R = 5000 \Omega$), ist ersichtlich, dass wieder die Theorie und der Versuch übereinstimmen.

Für gr. Widerstände liegt kein Nulldurchgang von Ue mehr vor.

b) Aperiodisches Grenzfall

Wie bereits berechnet sollte der aperiodische Grenzfall bei $R = 632 \Omega$ liegen.

Fehlerrechnung:

$$S_R = \frac{SL}{\sqrt{LC}} \quad (\text{da } C \text{ konstant})$$

Fehler von L:

$$S_L = 10,05 \text{ mH} \cdot 5\% = 5,025 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

$$\Rightarrow S_R = 15,8509 \Omega$$

$$\Rightarrow R_{AP} = (632 \pm 16) \Omega$$

Wie dem Protokoll zu entnehmen ist, ist der experimentell bestimmte Widerstand für den der aperiodische Grenzfall eintritt $R = (520 \pm 20) \Omega$.

Selbst unter Berücksichtigung des Fehlers, liegt eine Abweichung zwischen dem berechneten Wert und unserem gemessen.

Eine Fehlermöglichkeit wäre, dass der genaue aperiodische Grenzfall schwer am Oszilloskop festzustellen war.

Aber auch das Oszilloskop ist mit einem Fehler behaftet. Zudem könnten auch die Innenwiderstände der Bauteile im Schaltkreis dafür gesorgt haben, dass ein Teil des Widerstandes bereits bei ihnen abfällt und somit der Widerstand für den aperiodischen Grenzfall geringer im Experiment ausfällt als der theo. ermittelte. ✓

4.2 Resonanzfrequenz im Schwingkreis

4.2.1 Theoretische Resonanzfrequenz:

$$\omega_{\text{theo}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1005 \cdot 10^{-3} \text{H} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \text{F}}} = \\ = 31.544,01489 \frac{1}{\text{s}}$$

$$S_{\omega_{\text{theo}}} = \frac{1}{2} (LC)^{-\frac{3}{2}} \cdot C \cdot S_l = 788,600 \frac{1}{\text{s}}$$

Wobei der Fehler von L wie bei 4.1.3 berechnet wurde

$$\Rightarrow \underline{\omega_{\text{theo}} = (31,5 \pm 0,8) \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}}$$

4.2.2 Experimentell bestimmte Resonanzfrequenz

Die gemessene Frequenz beträgt (vgl. Protokoll)
 $f = 31,4 \text{ kHz}$.

$$\omega_{\text{exp}} = 2\pi f = 31,4159 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$$

Fehler:

$$S_{\omega_{\text{exp}}} = \sqrt{(S_a)^2 + (S_r)^2}$$

$$S_a = 25 \text{ Hz}$$

$$S_r = 5 \cdot 1 \cdot f$$

$$\Rightarrow S_{\omega_{\text{exp}}} = 251,2468 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_{\text{exp}} = (31,4 \pm 0,3) \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}}$$

Wie man sieht, stimmen die beide Wert sehr gut überein.

Laut Protokoll wurde eine Ellipse erwartet, allerdings sind im theo. Resonanzfall die Amplituden gleich groß, also sollte am Oszilloskop ein Kreis erscheinen.

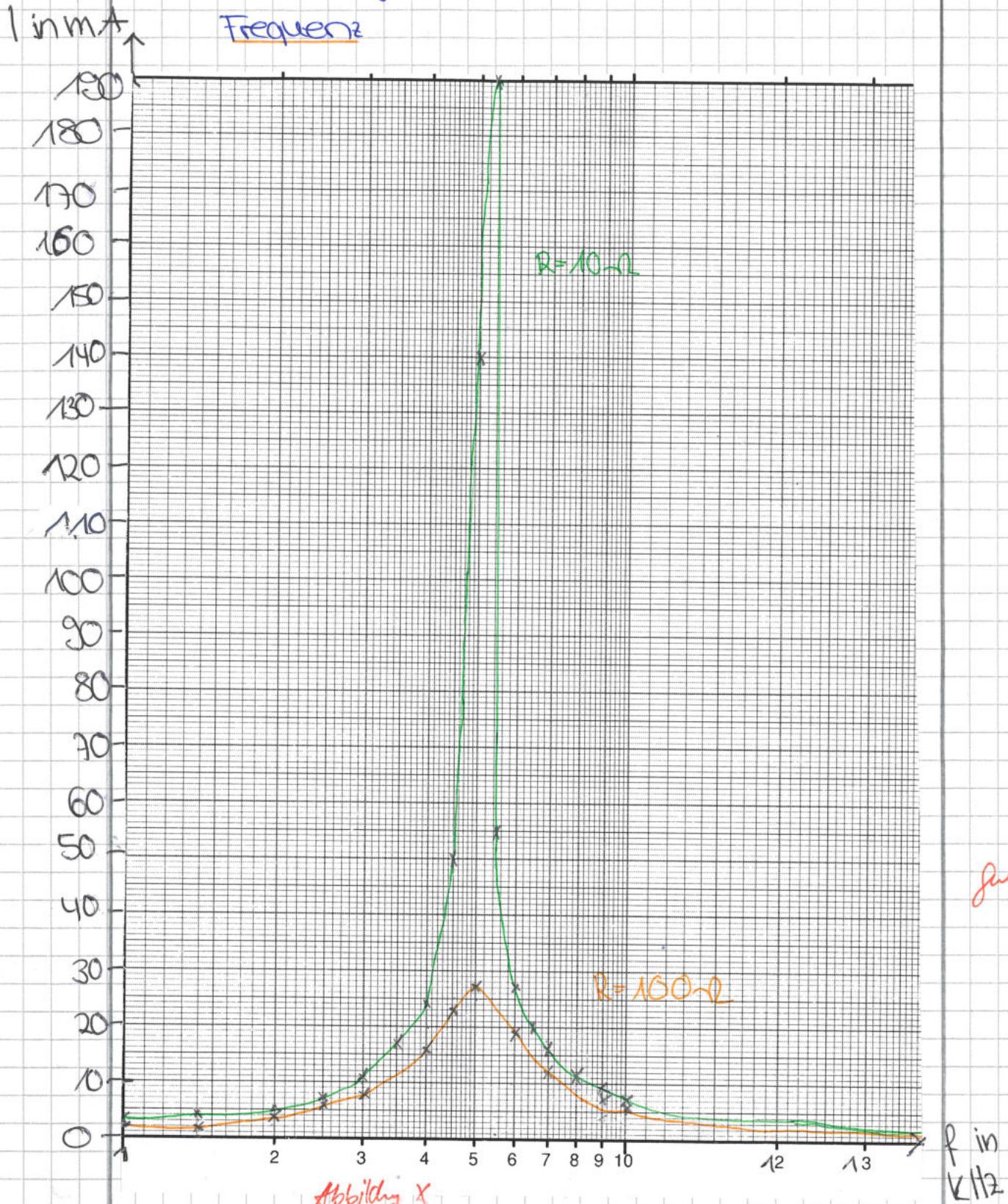
jedoch erschien während dem Experiment eine Ellipse, d.h. die Amplituden waren nicht gleich groß.

Eine mögliche Erklärung ist, dass (das Oszilloskop das Bild verzerrt hat); aber auch das die Resonanzfrequenz ungenau bestimmt wurde.

Diese wurde durch ausprobieren

herausgefunden und der exakte Moment war schwierig zu bestimmen.

4.2.3 Zeichnung der Ströme als Fkt. der Frequenz



Man erkennt deutlich eine Resonanzfrequenz.

Zudem ist auch gut der Unterschied zw. $R = 10\Omega$

und $R = 100\Omega$ ersichtlich.

Es wurde nur der relevante Abschnitt der Resonanzfrequenz gezeichnet. Bei hohen Frequenzen nähert sich der Graph der x-Achse an.

jetzt

f in
kHz

Die dazugehörigen Tabellen: und
 Die Werte für die Frequenz ν der Wert für die doppelte
 Spannung (bei $R=10\Omega, 100\Omega$) sind dem
 Protokoll zu entnehmen.

$$R = 10 \Omega$$

Nr.	f in kHz	U_1 in V	s_f in kHz	s_a von 2U in V	s_r 2U in V	s_{2U}	U_R in V	s_u	I_1 in A	s_{I_1} in A
1	1,0	0,048	0,050	0,002	0,001	0,002	0,024	0,001	0,002	0,000123
2	1,5	0,076	0,075	0,004	0,002	0,005	0,038	0,002	0,004	0,000230
3	2,0	0,110	0,100	0,010	0,003	0,011	0,055	0,005	0,006	0,000527
4	2,5	0,150	0,125	0,010	0,005	0,011	0,075	0,005	0,008	0,000548
5	3,0	0,225	0,150	0,010	0,007	0,012	0,113	0,006	0,011	0,000603
6	3,5	0,345	0,175	0,010	0,010	0,014	0,173	0,007	0,017	0,000720
7	4,0	0,480	0,200	0,020	0,014	0,025	0,240	0,012	0,024	0,001232
8	4,5	1,000	0,225	0,040	0,030	0,050	0,500	0,025	0,050	0,002500
9	4,6	1,300	0,230	0,100	0,039	0,107	0,650	0,054	0,065	0,005367
10	4,7	1,600	0,235	0,100	0,048	0,111	0,800	0,055	0,080	0,005546
11	4,8	2,100	0,240	0,100	0,063	0,118	1,050	0,059	0,105	0,005910
12	4,9	2,500	0,245	0,100	0,075	0,125	1,250	0,063	0,125	0,006250
13	5,0	2,800	0,250	0,100	0,084	0,131	1,400	0,065	0,140	0,006530
14	5,1	3,100	0,255	0,100	0,093	0,137	1,550	0,068	0,155	0,006828
15	5,2	3,400	0,260	0,100	0,102	0,143	1,700	0,071	0,170	0,007142
16	5,3	3,700	0,265	0,100	0,111	0,149	1,850	0,075	0,185	0,007470
17	5,4	4,000	0,270	0,100	0,120	0,156	2,000	0,078	0,200	0,007810
18	5,5	1,100	0,275	0,100	0,033	0,105	0,550	0,053	0,055	0,005265
19	6,0	0,560	0,300	0,040	0,017	0,043	0,280	0,022	0,028	0,002169
20	6,5	0,400	0,325	0,040	0,012	0,042	0,200	0,021	0,020	0,002088
21	7,0	0,320	0,350	0,020	0,010	0,022	0,160	0,011	0,016	0,001109
22	7,5	0,280	0,375	0,020	0,008	0,022	0,140	0,011	0,014	0,001085
23	8,0	0,230	0,400	0,010	0,007	0,012	0,115	0,006	0,012	0,000607
24	8,5	0,200	0,425	0,010	0,006	0,012	0,100	0,006	0,010	0,000583
25	9,0	0,180	0,450	0,010	0,005	0,011	0,090	0,006	0,009	0,000568
26	9,5	0,160	0,475	0,010	0,005	0,011	0,080	0,006	0,008	0,000555
27	10,0	0,150	0,500	0,010	0,005	0,011	0,075	0,005	0,008	0,000548
28	15,0	0,084	0,750	0,004	0,003	0,005	0,042	0,002	0,004	0,000236
29	20,0	0,060	1,000	0,004	0,002	0,004	0,030	0,002	0,003	0,000219
30	25,0	0,050	1,250	0,004	0,002	0,004	0,025	0,002	0,003	0,000214
31	50,0	0,022	2,500	0,002	0,001	0,002	0,011	0,001	0,001	0,000105

ja

Vlinukt

$R = 100 \Omega$

Nr.	f in kHz	U_2 in V	s _f in kHz	s _{a von 2U} in V	s _{r 2U} in V	s _{2U}	U_{R_2} in V	s _U	I in A	s _I in A
1	1,0	0,40	0,050	0,020	0,012	0,023	0,200	0,012	0,002	0,00012
2	1,5	0,62	0,075	0,020	0,019	0,027	0,310	0,014	0,003	0,00014
3	2,0	0,88	0,100	0,040	0,026	0,048	0,440	0,024	0,004	0,00024
4	2,5	1,24	0,125	0,040	0,037	0,055	0,620	0,027	0,006	0,00027
5	3,0	1,70	0,150	0,100	0,051	0,112	0,850	0,056	0,009	0,00056
6	3,5	2,60	0,175	0,100	0,078	0,127	1,300	0,063	0,013	0,00063
7	4,0	3,30	0,200	0,100	0,099	0,141	1,650	0,070	0,017	0,00070
8	4,5	4,60	0,225	0,200	0,138	0,243	2,300	0,121	0,023	0,00121
9	4,6	4,80	0,230	0,200	0,144	0,246	2,400	0,123	0,024	0,00123
10	4,7	5,20	0,235	0,200	0,156	0,254	2,600	0,127	0,026	0,00127
11	4,8	5,20	0,240	0,200	0,156	0,254	2,600	0,127	0,026	0,00127
12	4,9	5,40	0,245	0,200	0,162	0,257	2,700	0,129	0,027	0,00129
13	5,0	5,40	0,250	0,200	0,162	0,257	2,700	0,129	0,027	0,00129
14	5,1	5,40	0,255	0,200	0,162	0,257	2,700	0,129	0,027	0,00129
15	5,2	5,30	0,260	0,200	0,159	0,256	2,650	0,128	0,027	0,00128
16	5,3	5,20	0,265	0,200	0,156	0,254	2,600	0,127	0,026	0,00127
17	5,4	5,00	0,270	0,200	0,150	0,250	2,500	0,125	0,025	0,00125
18	5,5	4,80	0,275	0,200	0,144	0,246	2,400	0,123	0,024	0,00123
19	6,0	3,80	0,300	0,200	0,114	0,230	1,900	0,115	0,019	0,00115
20	6,5	3,00	0,325	0,200	0,090	0,219	1,500	0,110	0,015	0,00110
21	7,0	2,50	0,350	0,100	0,075	0,125	1,250	0,063	0,013	0,00063
22	7,5	2,10	0,375	0,100	0,063	0,118	1,050	0,059	0,011	0,00059
23	8,0	1,80	0,400	0,100	0,054	0,114	0,900	0,057	0,009	0,00057
24	8,5	1,60	0,425	0,100	0,048	0,111	0,800	0,055	0,008	0,00055
25	9,0	1,50	0,450	0,100	0,045	0,110	0,750	0,055	0,008	0,00055
26	9,5	1,40	0,475	0,100	0,042	0,108	0,700	0,054	0,007	0,00054
27	10,0	1,20	0,500	0,100	0,036	0,106	0,600	0,053	0,006	0,00053
28	15,0	0,72	0,750	0,040	0,022	0,045	0,360	0,023	0,004	0,00023
29	20,0	0,52	1,000	0,040	0,016	0,043	0,260	0,021	0,003	0,00021
30	25,0	0,40	1,250	0,020	0,012	0,023	0,200	0,012	0,002	0,00012
31	50,0	0,20	2,500	0,020	0,006	0,021	0,100	0,010	0,001	0,00010

Die Werte wurden wie folgt berechnet

a) Fehler der Frequenz

$$S_f = 5\% \cdot f_i$$

f_i ist die gem eingestellte Frequenz

b) Fehler von $U_{1,2}$:

Ablesefehler: $S_a = \pm 0,2 \text{ div}$

$$\Rightarrow S_a = E \cdot 0,2 \text{ div}$$

E steht für Empfindlichkeit

Restfehler: $S_r = 3\% U_{1,2}$

$$\Rightarrow S_{U_{1,2}} = \sqrt{S_a^2 + S_r^2}$$

c) Berechnung der Werte $U_{R_{1,2}}$

Diese Werte sind „Peak-to-Peak-Werte“

$$U_{R_{1,2}} = \frac{U_{1,2}}{2}$$

Fehler:

$$S_{U_{R_{1,2}}} = \frac{1}{2} S_{U_{1,2}}$$

d) Berechnung des Stroms:

$$I_{1,2} = \frac{U_{R_{1,2}}}{R}$$

Fehler:

$$S_{I_{1,2}} = \frac{S_{U_{R_{1,2}}}}{R}$$

4.1.4 Verhältnisse der Resonanzströme

a) Theoretischer Wert:

$$\frac{I_{R_1}}{I_{R_2}} = \frac{\frac{U_0}{R_1}}{\frac{U_0}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{100\Omega}{10\Omega} = \underline{\underline{10}}$$

b) experimentelles Wert:

$$V_{exp} = \frac{I_{R_1}}{I_{R_2}} = \frac{0,140\text{ A}}{0,027\text{ A}} = \underline{\underline{5,185}}$$

Fehler:

$$\begin{aligned} S_{Vexp} &= \sqrt{\left(\frac{\partial V_{exp}}{\partial I_{R_1}} \cdot S_{I_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_{exp}}{\partial I_{R_2}} \cdot S_{I_2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{S_{I_1}}{I_{R_2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{R_1}}{I_{R_2}^2} S_{I_2}\right)^2} = 0,34621 \end{aligned}$$

$$\text{Wobei } S_{I_1} = 0,006530 \text{ A}$$

$$S_{I_2} = 0,00129 \text{ A}$$

$$\Rightarrow V_{exp} = (5,2 \pm 0,3)$$

Wie du erkennen kannst, weichen die beiden Werte stark von einander ab.

Das kann auf mögliche Messfehler zurückgeführt werden. Aber auch die Widerstände könnten mit Fehlern behaftet sein. oder mehr Widerstände in Reihe

$$\frac{10\Omega \rightarrow 10+10}{\text{essentiel} \rightarrow 10+100} = \frac{20}{110} \approx (5,5)^{-1}$$

~~✓ fait~~

Form	7 2,5/2	✓ fait
MP	3/4	
FzV	-0,5	
Qualitäts	6/6	
Seriendurchbr.	<u>8/18</u>	solo gute Auswerte
	18/20	