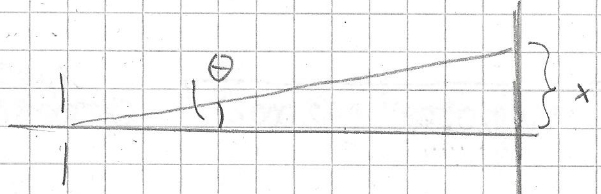
Beu – PPA2

Aufgabe 6.1: Beugung am Einfachspalt

- Formel für Minima (S. 7)

$$D \sin\Theta = m\lambda \quad (x)$$

m ist Ordnung des Minimums, D Spaltbreite, Θ Ablenkung



$$\tan\Theta \overset{\text{kWN}}{\approx} \Theta = \frac{x}{\ell} \qquad \text{mit } \ell =$$

(x)

$$I(\Theta) \overset{!}{=} 0 = \sin\Big(\underbrace{\frac{\pi D}{\lambda}\sin\Theta}_{\overset{!}{=} n\pi}\Big) \Rightarrow D\sin\Theta = n\lambda$$

$$s\Theta = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial \ell} s_L\right)^2}$$

$\ell =$ 400mm, aber schwer zu messen, desswegen

$s_\ell = 20$mm, weil auch nicht genau klar ist wie weit

hinten in der Diode es auftrifft

Wir gehen davon aus, dass $s_x = s_{abl}$, weil die Ungenauigkeit der Längenskala marginal im Vergleich zur Ablesegenauigkeit des Minimums ist.

$s_\ell = 20$m

$s_x = 0{,}05$ mm

$$s\Theta = \sqrt{\left(\frac{1}{\ell} s_x\right)^2 + \left(-\frac{x}{\ell^2} s_\ell\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\ell'} s_{x'}\right)^2 + \left(\frac{x'}{\ell'^2} s_\ell\right)^2} =$$

Verwende für $\ell' = 2\ell$ und $x' = 2x_i$, mittle also über beide x, Werte $s_n = \frac{s}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{400\,\text{mm}} \cdot 0{,}05\,\text{mm}\right)^2 + \left(\frac{(71{,}806 - 365{,}216)\,\text{mm}}{2\cdot(400\,\text{mm})^2} \cdot 20\,\text{mm}\right)^2} = \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1{,}1451} \cdot 10^{-3}$$

$1{,}61947 \cdot 10^{-3}$ mm

$$\cancel{= 8{,}09739 \cdot 10^{-4} \approx 0{,}0008}$$

Ist die KWN gerechtfertigt?

$\tan\Theta = \arctan\left(\frac{\bar{x}}{L}\right) = \arctan(0{,}09146) = 0{,}09120$

mit KWN: $\Theta = \frac{\bar{x}}{L} = 0{,}09146$

$s_{KWN} \approx 0{,}0002$

$\cancel{s_\Theta = 0{,}0008}$ $s_\Theta \gg s_{KWN} \Rightarrow \checkmark$

Die Abweichung s_Θ ist viel größer als s_{KWN} ~~→ vernachlässige s_{KWN}~~

Trotzdem

$$s_{\Theta'} = \sqrt{s_\Theta^2 + s_{KWN}^2} = \sqrt{(\cancel{0{,}0008})^2 + (0{,}0002)^2} = \cancel{0{,}0008246} \approx 0{,}0008$$

$1{,}6194$ $\quad 1{,}6194 \cdot 10^{-3}$

Näherung mit KWN möglich

- Verwende alle 3 Minima:

$$\bar{D} = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{3} D_m = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{3} \frac{m\lambda}{\Theta_m} = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{m\lambda}{\bar{x}_m} l$$

mit $\bar{x} = \frac{(x_{m_L} - x_{m_R})}{2}$

! Verwende $x_{L_2} = 65{,}7719$ → Siehe Daten

Für Spalt B:

$$\bar{D} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{2}{\Theta_2} + \frac{3}{\Theta_3}\right)\lambda = 0{,}05937345\,mm$$

$$s_{D_m} = \left|\frac{\partial \bar{D}_m}{\partial \Theta} s_\Theta\right| = \left|\frac{-m\lambda}{\Theta_m^2} s_\Theta\right|$$

$$s_{D_1} = \frac{m\lambda}{\left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^2} s_\Theta = \frac{632{,}8\cdot 10^{-6}\,mm \cdot 4\,(400\,mm)^2}{(59{,}6030 - 47{,}2601)^2\,mm^2} \cdot 1{,}6194\cdot 10^{-3} = 4{,}3014\cdot 10^{-3}\,mm$$

$$s_{D_2} = \frac{m\lambda l^2}{\bar{x}^2} = \frac{2\cdot 632{,}8\cdot 10^{-6}\,mm \cdot 4 \cdot (400\,mm)^2}{(65{,}7719\,mm - 41{,}2045\,mm)^2} \cdot 1{,}6194\cdot 10^{-3} =$$

$$= 3{,}6627\cdot 10^{-3}\,mm$$

$$s_{D_3} = \frac{m\lambda l^2}{\bar{x}^2} = \frac{3 \cdot \ldots}{(71{,}8062\,mm - 35{,}2163\,mm)^2} \cdot 1{,}6194\cdot 10^{-3} = 1{,}4694\cdot 10^{-3}\,mm$$

$$s_D^2 = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{3} s_{D_k}^2 =$$

$$\Rightarrow s_{\bar{D}} = \frac{1}{3}\sqrt{\sum_{k=1}^{3} s_{D_k}^2} = 3{,}242\cdot 10^{-3}\,mm$$

$$\boxed{D = (59 \pm 3)\,\mu m}$$

Spalt C

Äquivalent zu Spalt B

$\Rightarrow$ Siehe Exel 6.1.xlxs

$$\boxed{D = (79{,}5 \pm 0{,}6)\,\mu m}$$

KWN ist gültig, da sie höchstens um $1 \cdot 10^{-4}$ rad abw.

Doppelspalt:

Um den Spaltbreite D zu ermitteln, verwende identisches Vorgehen wie beim Einfachspalt. Dabei kann die KWN verwendet werden, da im gleichen Bereich gearbeitet wird

Zur Wiederholung:

$$D = \frac{m\lambda}{\tan\theta} \quad \text{mit} \quad \tan\theta \approx \theta \approx \frac{x}{l}$$

$$s_D = \left|\frac{m\lambda}{\theta_m^2}\right| s_{\theta_m}$$

D wird dann aus Mittelwertbildung erhalten.

Die Gitterfunktion ergibt sich nach FZV nach 2.3 mit

$$b_n \sin\theta = \left(n - \frac{1}{2}\right)\lambda \ , \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{(Ordnung des Minimums)}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{(n-\frac{1}{2})\lambda}{\sin\theta} \approx \frac{(n-\frac{1}{2})\lambda}{\theta}$$

$$s_b = \frac{(n-\frac{1}{2})\lambda}{\theta_n^2} s_{\theta_n}$$

$\tilde{A}$ ist die Anzahl der gemittelten Messwerte

$$\overline{b} = \frac{1}{\tilde{A}} \sum_{k=1}^{\tilde{A}} b_k$$

Fehler von b: $s_b = \frac{1}{\tilde{A}} \sqrt{\sum_{k=1}^{\tilde{A}} (s_{b_k})^2}$

$$\boxed{D = (38{,}9 \pm 0{,}4)\,\mu m}$$

Sondere bei der Ermittlung von b die Messwerte mit n=1 aus, weil die Fehler zu groß sind

$$\boxed{\Rightarrow b = (240{,}81 \pm 0{,}18)\,\mu m}$$

Es stimmt also, dass $b \gg D$

Überprüfung auf Richtigkeit der Rechnung:

Gitterfunktion $b \sin\Theta_n = (n - \frac{1}{2})\lambda$

Spaltfunktion $D \sin\Theta_m = m\lambda$

Es wird geschaut, welche n innerhalb des 1 Minimums (m=1) liegen. Dabei ist $\sin\Theta_n \approx \sin\Theta_m$ mit $m=1$

$$\rightarrow \underbrace{b \sin\Theta_n}_{\sin\Theta_n \approx \sin\Theta_m = \frac{m\lambda}{D}} \approx b\,\frac{m\lambda}{D} \approx (n - 1/2)\lambda \quad | \, m=1$$

$$\Rightarrow b/D = (n - 1/2) \Rightarrow n = b/D + 1/2$$

$$n = b/D + 1/2 = \frac{240{,}81\,\mu m}{38{,}9\,\mu m} + 1/2 \approx 6{,}6$$

Jeweils links & recht der Mitte liegen circa 6,6 Minima innerhalb des einschließenden „Einfachspaltmaximums"
Dass heißt man erwartet circa 13 Minima.

Bild

In dem Bild kann 12, möglicherweise sogar 13 Minima sehen. ⇒ Rechnung scheint korrekt

Spalt B:

Rechnung Identisch zu a

Lasse jedoch bei der Berechnung von b wieder das Minimum 1. Ordnung weg, da der Fehler zu groß ist

$$\boxed{\begin{aligned} D &= (36{,}9 \pm 0{,}4)\,\mu m \\ b &= (500{,}0 \pm 0{,}3)\,\mu m \end{aligned}}$$

Überprüfung (wie bei Spalt A):

$$n' = \frac{b}{D} + \frac{1}{2} = \frac{500{,}0}{36{,}9} + \frac{1}{2} \approx 14$$

$\Rightarrow$ Es solten circa 28 Minima gezählt werden

Bild

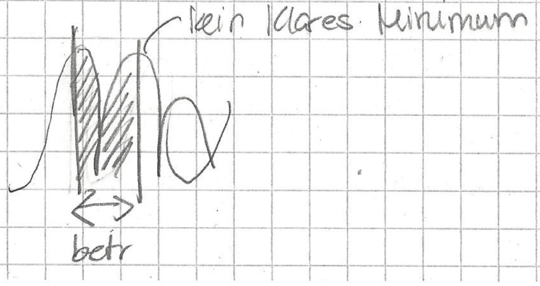
Man sieht etwas weniger Minima als erwartet. Klar zu sehen sind 25 Minima, welche jedoch um weitere nicht mehr sichtbare im Minimum des Einfachspaltes verschwindende Minima ergänzt werden könnten

Spalt B mit Breitem Diodenspalt

~~Bild~~

Bild

Es ist zu erwarten, dass man die eingeschlossenen Minima nicht mehr zu sehen sind, da der betrachtete Bereich sie wegmittelt. Die Minima sind circa 0,5 mm auseinader, aber die Spaltbreite ist auch 0,5 mm. $\Rightarrow$ kein gut sichtbares Minimum



Diskussion der Ergebnisse:

Wie man schell sieht ist D ungefähr identisch. Der Spaltabstand verdoppelt sich jedoch von circa 240 µm aus 500 µm. Man sieht einen schönen Zusammenhang der eingeschlossenen Minimaabstände mit den Spaltabstand

Der Abstand bei Minima bei A ist circa 1 mm, bei Spalt B sind es circa 0,5 mm

Dies liegt an folgendem Zusammenhang

$$b_A \sin\theta = n_A \lambda \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{n_A \lambda}{b_A} \quad (1)$$

$$b_B \sin\theta = n_B \lambda \Leftrightarrow 2 b_A \sin\theta = n_B \lambda$$

$$\hookrightarrow b_B \approx 2 b_A$$

$$\Rightarrow n_B = \frac{2 b_A}{\lambda b_a} \cdot \frac{n_A \lambda}{1} = 2 n_A$$

Dieses Verhältnis ~~von~~ der Anzahl der Minima wird mit $n_A \approx 12$ und $n_2 \approx 25$ auch ungefähr beobachtet