

## Секвенційні числення 1-го порядку

Розглянемо числення секвенційного типу логік 1-го порядку. Такі числення будуємо на основі властивостей відношення  $\models$  логічного наслідку для множин формул.

Враховуючи семантичні властивості відношення  $\models$ , для секвенцій відмічених формул вводимо базові секвенційні форми  $\vdash \neg$ ,  $\vdash \neg$ ,  $\vdash \vee$ ,  $\vdash \vee$  та  $\vdash \exists$ ,  $\vdash \exists$ .

Секвенційні форми, успадковані від пропозиційного числення:

$$\begin{array}{ll} \vdash \neg \frac{\neg \vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma}, & \vdash \neg \frac{\vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma}; \\ \vdash \vee \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma}, & \vdash \vee \frac{\neg \vdash A, \neg \vdash B, \Sigma}{\neg \vdash A \vee B, \Sigma}; \\ \vdash \& \frac{\vdash A, \vdash B, \Sigma}{\vdash A \& B, \Sigma}, & \vdash \& \frac{\neg \vdash A, \Sigma \quad \neg \vdash B, \Sigma}{\neg \vdash A \& B, \Sigma}; \\ \vdash \rightarrow \frac{\neg \vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \rightarrow B, \Sigma}, & \vdash \rightarrow \frac{\vdash A, \neg \vdash B, \Sigma}{\neg \vdash A \rightarrow B, \Sigma}. \end{array}$$

Нові секвенційні форми для кванторів:

$$\vdash \exists \frac{\vdash A_x[y], \Sigma}{\vdash \exists x A, \Sigma}, \quad \text{де } y - \text{нова змінна, що не зустрічається в } A \text{ та } \Sigma,$$

$A_a[b]$  – формула, отримана з  $A$  заміною всіх входжень  $a$  на  $b$ ;

$$\vdash \exists \frac{\neg \vdash A_x[z_1], \dots, \neg \vdash A_x[z_m], \Sigma, \neg \vdash \exists x A}{\neg \vdash \exists x A, \Sigma}, \quad \text{де } z_1, \dots, z_m - \text{всі вільні змінні в } A \text{ та } \Sigma \text{ та згодом їх наступниками;}$$

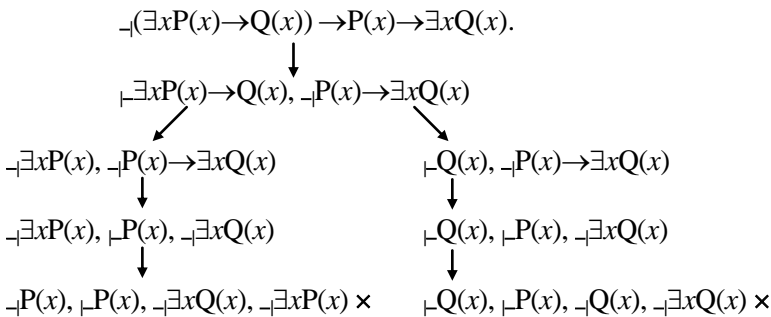
$$\vdash \forall \frac{\vdash A_x[z_1], \dots, \vdash A_x[z_m], \Sigma, \vdash \forall x A}{\vdash \forall x A, \Sigma};$$

$$\vdash \forall \frac{\neg \vdash A_x[y], \Sigma}{\neg \vdash \forall x A, \Sigma}.$$

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

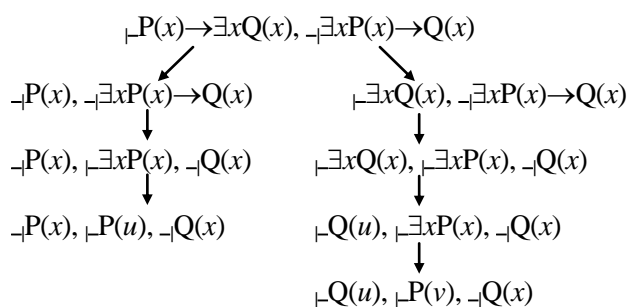
- 1) процедура завершена позитивно, отримане скінченне замкнене секвенційне дерево;
- 2) процедура завершена негативно (отримали скінченне незамкнене дерево), або вона не завершується (тоді маємо нескінченне секвенційне дерево). В такому дереві існує незамкнений шлях  $\wp$ , який дає змогу визначити контрмодель.

**Приклад 1.** Виведення формули  $(\exists x P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ .



Отримали замкнене секвенційне дерево.

**Приклад 2.** Для встановлення вірності  $P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \models \exists x P(x) \rightarrow Q(x)$  будемо виведення секвенції  $\vdash P(x) \rightarrow \exists x Q(x), \neg \exists x P(x) \rightarrow Q(x)$ .



Отримали незамкнене секвенційне дерево, тому невірно, що  $P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \models \exists x P(x) \rightarrow Q(x)$ .

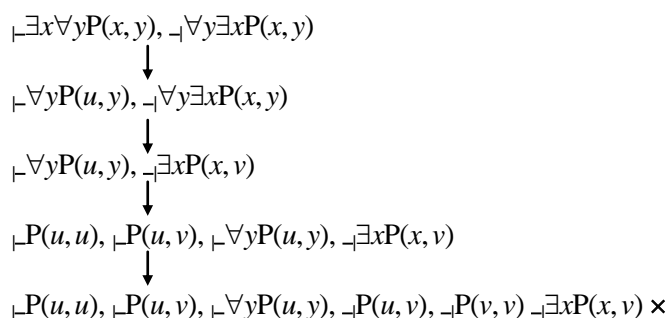
Для лівого незамкненого шляху отримуємо контрмодель **A**:

	P	Q
$x$	$F$	$F$
$u$	$T$	будь-яке

Для правого незамкненого шляху маємо контрмодель **B**:

	P	Q
$x$	будь-яке	$F$
$u$	будь-яке	$T$
$v$	$T$	будь-яке

**Приклад 3.** Для встановлення вірності  $\exists x \forall y P(x, y) \models \forall y \exists x P(x, y)$  будемо виведення секвенції  $\vdash \exists x \forall y P(x, y), \neg \forall y \exists x P(x, y)$ .



Отримали замкнене секвенційне дерево.

**Приклад 4 - самостійно.** Невірно, що  $\forall y \exists x P(x, y) \models \exists x \forall y P(x, y)$ . Процес виведення відповідної секвенції виявиться нескінченним.

## ЗАВДАННЯ

Побудуйте виведення чи доведіть його відсутність для таких формул:

- 1)  $\exists x A(x) \vee B(x) \rightarrow \exists x (A(x) \vee B(x))$ ;
- 2)  $\exists x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \vee B(x)$ ;
- 3)  $(\forall x A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (A(x) \rightarrow \forall x B(x))$ ;
- 4)  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$ .