Лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

Однорідні лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

Зв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними та систем звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

Рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0. \tag{1}$$

Визначення 1. Розв'язком рівняння (1) називається функція

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2}$$

яка визначена і неперервна разом з частинними похідними в деякій області змінних $x_1, .., x_n$ і перетворює в цій області рівняння (1) в тотожність. При цьому $x_1, .., x_n$ і значення $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ лежать в області визначення функції $\Phi(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Якщо в рівнянні (1) функція $\Phi(x_1,\dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то воно називається ***лінійним***

$$X_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u). \tag{3}$$

Розглянемо ***однорідне*** рівняння, тобто випадок коли $R(x_1,\dots, x_n, u) \equiv 0$, а функції $X_i(x_1,\dots, x_n, u)$, $i = 1, 2, \dots, n$ не залежать від u

$$X_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{4}$$

Рівняння (4) має тривіальний розв'язок $u = c \quad (c = const)$. (5)

Доведемо, що рівняння (4) має безліч розв'язків, відмінних від тривіальних.

Для цього, разом з (4), будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі (***систему рівнянь характеристик***)

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\dots,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\dots,x_n)}. \tag{6}$$

Наведемо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (4) і системою (6). Припустимо, що коефіцієнти $X_i(x_1,..,x_n), i=\overline{1,n}$ рівняння (4) неперервні разом з частинними похідними по $x_1,..,x_n$ в деякому околі точки $x_1^0,..,x_n^0$ і в цій точці вони *одночасно не перетворюються в нуль* (тобто точка $(x_1^0,..,x_n^0)$ не є особливою точкою системи (8)). Наприклад, припустимо, що

$$X_n(x_1^0,..,x_n^0) \neq 0 \tag{8}$$

Теорема 1.

Довільний інтеграл системи рівнянь характеристик (6) є нетривіальним розв'язком рівняння (4).

Теорема 2.

Довільний нетривіальний розв'язок рівняння (4) є інтегралом системи (6).

Приклад 1. Знайти розв'язки лінійного однорідного рівняння з частинними похідними

$$x\frac{\partial U}{\partial x}-2y\frac{\partial U}{\partial y}-z\frac{\partial U}{\partial z}=0. \qquad (13)$$

Розв'язок. Запишемо для рівняння (13) систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{-z}. \qquad (14)$$

Для системи звичайних диференціальних рівнянь маємо інтеграли

$$\psi_1 = xz, \quad \text{(прирівнявши перше й третє)}$$
$$\psi_2 = x\sqrt{y} \quad \text{(прирівнявши перше й друге)} \qquad (15)$$

Тому

$$U_1 = xz, \quad U_2 = x\sqrt{y} \qquad (16)$$

є розв'язками рівняння (13).

Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння з частинними похідними. Розв'язок задачі Коші

Нехай

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \text{ -} \qquad (17)$$

незалежні інтеграли системи рівнянь характеристик (6).

Тоді функція

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \qquad (18)$$

де $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ – будь-яка диференційована функція, буде розв'язком рівняння (4).

Дійсно, підставимо (18) в (4)

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} =$$

$$= X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left(X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0. \qquad (19)$$

(*в дужках тотожний нуль, бо цефактично підставлено розв'язки в початкове рівняння*(4))

Формулу (18) $\boldsymbol{u=\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_{n-1})}$ називають **загальним розв'язком рівняння з частинними похідними** (4).

На відміну від загального розв'язку звичайного диференціального рівняння в (18) входять не довільні сталі, а довільна функція.

Задача знаходження загального розв'язку рівняння (4) **рівносильна задачі знаходження** $\boldsymbol{(n-1)}$ **незалежних інтегралів відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь характеристик** (6).

Розглянемо випадок двох незалежних змінних

$$X(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{20}$$

Запишемо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{X(x,y)}=\frac{dy}{Y(x,y)}. \tag{21}$$

Якщо $\psi(x,y)$ – інтеграл системи (21), тоді

$$z=\Phi(\psi(x,y)) \tag{22}$$

загальний розв'язок рівняння (20).

Тут $\Phi(\psi(x,y))$ довільна неперервно-диференційована функція від ψ.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $$x_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial U}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial U}{\partial x_n}=0. \qquad (23)$$

Розв'язок. Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь (рівнянь характеристик)

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}. \qquad (24)$$

Для системи (24) знаходимо інтеграл

$$\frac{x_2}{x_1}=c_1,\quad \frac{x_3}{x_1}=c_2,\quad \ldots\quad ,\quad \frac{x_n}{x_1}=c_{n-1}. \qquad (25)$$

Тобто

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1},\quad \psi_2=\frac{x_3}{x_1},\quad \ldots\quad ,\quad \psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}. \qquad (26)$$

Тоді функція

$$U=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right), \qquad (27)$$

буде **загальним розв’язком системи** (23), де $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right)$ – неперервно-диференційована функція.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$(z-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial U}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial U}{\partial z}=0. \tag{29}$$

Розв'язок. Складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}. \tag{30}$$

Легко визначити (*створивши інтегровані комбінації*):

$\psi_1 = x+y+z$, *(склали чисельники й знаменники покомпонентно)*

(31)

$\psi_2 = x^2+y^2+z^2$.*(склали чисельники й знаменники покомпонентно множені на x, y , z відповідно)*

Тому загальний розв'язок має вигляд

$$U=\Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2). \tag{32}$$

Перейдемо до постановки і розв’язання **задачі Коші** для рівняння (4).

Серед всіх розв’язків рівняння знайти такий

$$u = f\,(x_1,\dots,x_n), \tag{33}$$

який задовольняє початковій умові

$$u = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1}) \quad \text{при} \qquad x_n = x_n^{(0)}, \tag{34}$$

або

$$u\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1}), \tag{35}$$

де $\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ - задана неперервно-диференційована функція від $x_1,\dots,x_{n-1}$.

Для випадку двох змінних:

знайти функцію

$$z = f(x, y), \tag{36}$$

яка задовольняє умові

$$z = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = x^{(0)}. \tag{37}$$

Геометрично (36), (37) означає, що серед всіх інтегральних поверхонь необхідно знайти ту, яка проходить через задану криву (37) при $x = x^{(0)}$.

Ця крива лежить в площині $x = x_0$, яка паралельна площині YOZ.

В загальному випадку розв'язування задачі Коші зводиться до визначення вигляду функції $\Phi(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})$ так , щоб

$$\Phi(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})\Big|_{x_n=x_n^{(0)}}=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}). \qquad (38)$$

Введемо позначення

$$\begin{cases}\psi_1(x_1,\ldots,x_n)\Big|_{x_n=x_n^{(0)}}=\overline{\psi_1}\\ \vdots\\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)\Big|_{x_n=x_n^{(0)}}=\overline{\psi}_{n-1}\end{cases}. \qquad (39)$$

Тоді (38) перепишемо так

$$\Phi(\overline{\psi_1},\ldots,\overline{\psi}_{n-1})=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}). \qquad (40)$$

Розв'яжемо систему (39) в околі точок $x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$, відносно $x_1,\ldots,x_{n-1}$ (це можливо так як $\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}$ – незалежні інтеграли)

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}) \end{cases}. \tag{41}$$

Тоді функцію $\Phi(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})$ вибираємо таким чином

$$\Phi(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})). \tag{42}$$

В цьому випадку умова (40) буде виконуватися

$$\Phi(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1})) = \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

Тому функція

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})) \tag{43}$$

– шуканий розв’язок задачі Коші.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

при умові $z = \varphi(y)$ при $x = 0$.

Розв'язок. Складаємо систему рівнянь характеристик $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$,

звідси $\psi = x^2 + y^2$ – інтеграл.

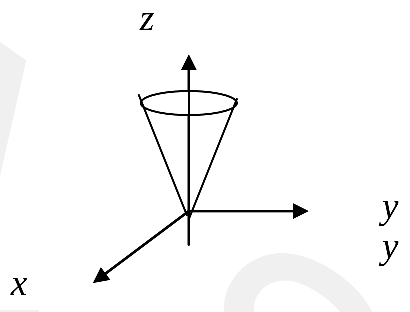
Отже

$$y^2 = \overline{\psi}, \quad y = \sqrt{\overline{\psi}}.$$

Шуканий розв'язок $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Розглянемо можливі випадки в залежності від вигляду функції $\varphi(y)$:

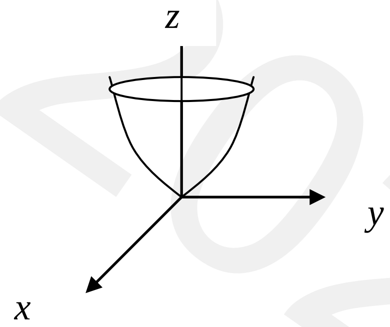
а) $\varphi(y) = y$. Тоді $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 + y^2$



Мал.1

Розв'язок – конус, який отриманий обертанням прямої $z = y$ навколо осі OZ (мал. 1);

б) $\varphi(y) = y^2$, $z = x^2 + y^2$



Мал. 2

Розв'язок – параболоїд, який отриманий обертанням параболи $z = y^2$ навколо осі OZ (мал. 2).

Розв’язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,...,x_n,u). \qquad (44)$$

Розв’язок диференціального рівняння (44) шукаємо у вигляді

$$V(x_1,...,x_n,u)=0, \qquad (45)$$

де

$V(x_1,...,x_n,u)$ - неперервно-диференційована функція по всім змінним і

$\frac{\partial V(x_1,...,x_n,u)}{\partial u}\neq 0$ в околі точки $(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)},u^{(0)})$.

Припустимо, що в (45) $u(\cdot)$ залежить від $x_1,...,x_n$.

Продиференціюємо (45) за x_k

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0, \quad k=1,2,...,n$$

Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, \quad k = 1,2,\ldots,n. \qquad (46)$$

Підставивши (46) в (44), отримаємо

$$X_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + R(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \qquad (47)$$

Рівняння (47) – це вже однорідне рівняння типу (4).
Його розв’язуємо по відомій схемі:
а) складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь характеристик

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\ldots,x_n,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\ldots,x_n,u)} = \frac{du}{R(x_1,\ldots,x_n,u)}; \qquad (48)$$

б) знаходимо n незалежних інтегралів

$$\psi_1(x_1,\ldots,x_n,u), \ldots, \psi_n(x_1,\ldots,x_n,u); \qquad (49)$$

в) записуємо загальний розв’язок

$$V = \Phi(\psi_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,u)) = 0. \qquad (50)$$

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = mu \quad (m \neq 0).$$

Розв'язок. Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx_1}{x_1} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}.$$

Знаходимо інтеграли

$$\psi_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \psi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \ldots \quad , \quad \psi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}, \quad \psi_n = \frac{u}{x_1{}^m}.$$

Тоді

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1^m}\right) = 0 \qquad (51)$$

– загальний розв’язок.

Якщо вдасться розв’язати (51) відносно $\dfrac{u}{x_1{}^m}$, то отримаємо

$$u = x_1^m f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

–загальний розв’язок в явній формі.

Задача Коші ставиться та розв’язується для рівняння (44) аналогічно:

знайти таку функцію

$$u = f(x_1,\ldots,x_n), \tag{52}$$

яка задовольняє початковій умові

$$u = \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_n^{(0)}, \tag{53}$$

де $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ – задана неперервно-диференційована функція від $x_1,\ldots,x_{n-1}$.