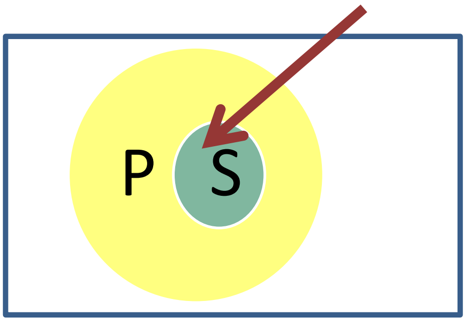
Логіки 1-го порядку

Чотири типи суджень за Арістотелем

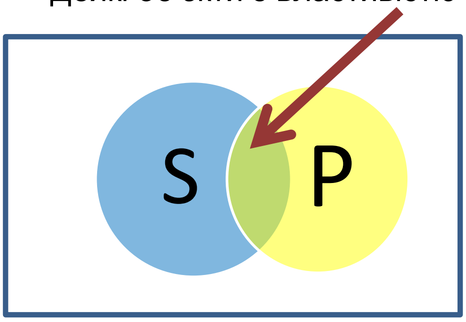
1. Загальностверджне $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$

«Всі об'єкти з властивістю S мають властивість P»



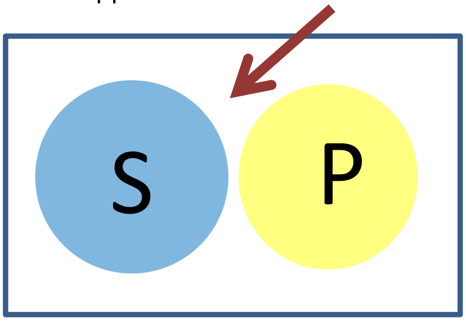
2. Частковостверджне $\exists x(S(x) \wedge P(x))$

«Деякі об'єкти з властивістю S мають властивість P»



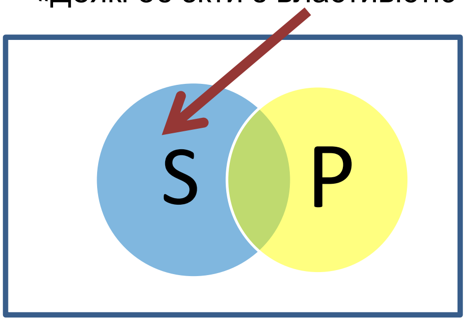
3. Загальнозаперечне $\neg\exists x(S(x) \wedge P(x))$ або $\forall x \neg(S(x) \wedge P(x))$

«Жоден об'єкт з властивістю S не має властивості P»



4. Частковозаперечне $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

«Деякі об'єкти з властивістю S не мають властивості P»



На основі цих типів суджень пропонувалося проводити міркування.

- Не всі двієчники ліниві.

Універсум (всі змінні) – люди.

$D(x)$ – x є двієчником

$L(x)$ – x лінивий

$\exists x(D(x)\land\neg L(x))$

- Прапорщики люблять порядок, і не тільки вони.

Універсум – люди.

$P(x)$ – x є прапорщиком

$O(x)$ – x любить порядок

$\forall x(P(x)\to O(x))\land\exists x(O(x)\land\neg P(x))$

- Деякі ледарі не оптимісти, але життєлюби.
- Деякі замки не відкриваються, але закриваються.

Універсум – речі.

$Z(x)$ – x замок

$O(x)$ – x відкривається

$C(x)$ – x закривається

$\exists x(Z(x)\land\neg O(x)\land C(x))$

- Всі вовки і зайці сірі.

Універсум – всі тварини.

$V(x)$ – x є вовком

$Z(x)$ – x є зайцем

$S(x)$ – x сірий

$\forall x(V(x)\lor Z(x)\to S(x))$ //”або”, бо одночасно неможливо бути вовком та зайцем

- Всі спадні та зростаючі функції монотонні. //аналогічно через ”або”
- В нашій групі всі поважають один одного.

Універсум – люди.

$G(x)$ – x вчиться в нашій групі

$R(x,y)$ – x поважає y //інший варіант – взяти “взаємно поважає”

$\forall x\forall y(G(x)\land G(y)\to R(x,y)\land R(y,x))$

- Всі доісторичні ящери при зустрічі пожирали один одного.

Або x з'їдав y, або навпаки.

- Всі племена кочівників воювали одне з одним.

Аналогічно взаємній повазі студентів в групі.

- Студенти люблять поїсти. Деякі студенти худі. Не всі любителі поїсти – студенти. Отже, деякі любителі поїсти – не худі студенти.

Універсум – люди.

S(x) – x студент

G(x) – x любить поїсти

H(x) – x худий

$\forall x(S(x)\rightarrow G(x)) \wedge \exists x(S(x)\wedge H(x)) \wedge \exists x(G(x)\wedge\neg S(x)) \rightarrow \exists x(G(x)\wedge\neg(H(x)\wedge S(x)))$

- Жодна жабка не виглядає поетично. Деякі качки мають прозаїчний вигляд. Отже, деякі качки не є жабками.

Поетичний $\Leftrightarrow$ не прозаїчний

Мови логік 1-го порядку

Предикати з квантифікацією на множині A:

$\exists x P(x) = T \Leftrightarrow P(a) = T$ для деякого $a \in A$

$\exists x P(x) = F \Leftrightarrow P(b) = F$ для всіх $b \in A$

$\forall x P(x) = T \Leftrightarrow P(a) = T$ для всіх $a \in A$

$\forall x P(x) = F \Leftrightarrow P(b) = F$ для деякого $b \in A$

Алфавіт мови логіки 1-го порядку складається із таких символів:
– множина V предметних імен (змінних);
– множина Fs функціональних символів заданої арності;
– множина Ps предикатних символів заданої арності;
– символи логічних операцій $\neg$, $\vee$ та $\exists x$.

У множині Fs може виділятися підмножина константних символів $Cn \subseteq Fs$. Символ рівності = завжди інтерпретуємо як предикат рівності, причому таку рівність трактуємо як тотожність.

Символи $\neg$, $\vee$, $\exists x$, = та предметні імена назвемо *логічними* символами. Функціональні та предикатні символи, окрім =, назвемо *нелогічними* символами.

Множину $\sigma = Fs \cup Ps$ назвемо *сигнатурою* мови 1-го порядку.
Основними конструкціями мови 1-го порядку є *терми* та *формули*. Терми використовують для позначення функцій, формули – для позначення предикатів.

Індуктивне визначення *терма*:
1) кожна змінна та кожний константний символ є *атомарним термом*;

2) якщо $t_1,..., t_n$ – терми, f – n-арний функціональний символ, то $f(t_1,...,t_n)$ – терм.
Множину термів позначимо Tr.

Індуктивне визначення *формули*:
1) вираз виду $p(t_1,...,t_n)$, де p – n-арний предикатний символ, t_1, ..., t_n – терми, є *атомарною формулою*;

2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$ та $\Phi\vee\Psi$ – формули;

3) якщо Φ – формула, то $\exists x\Phi$ – формула.
Множину формул позначимо Fm.

Можна вказати два рівні відмінності мов 1-го порядку:

1) варіанти мови однієї сигнатури, що відрізняються наборами символів логічних операцій та способами запису термів і формул;
2) істотно різні мови, що відрізняються сигнатурами.

У формулі вигляду $\exists x\Phi$ або $\forall x\Phi$ формулу Φ називають *областю дії* квантора $\exists x$ чи $\forall x$. Вираз вигляду $\exists x$ або $\forall x$ називають *кванторним префіксом*.

Входження змінної x в формулу Φ *зв'язане*, якщо воно знаходиться в області дії деякого квантора по x, інакше таке входження x в Φ *вільне*. Якщо існує вільне входження змінної x в формулу Φ, то x – *вільна змінна* формули Φ.

Формула *замкнена*, якщо вона не має вільних змінних. Терм, який не містить входжень змінних, називається *замкненим термом*. Зокрема, таким є кожний константний символ.
Зв'язані імена в формулах можна замінювати іншими предметними іменами, але при цьому може виникнути *колізія* – ситуація, коли вільні імена стали зв'язаними. Наприклад, з формули $\exists z(x+z=y)$

можна отримати формулу $\exists t(x+t=y)$, коли колізії немає, та формулу $\exists x(x+x=y)$, коли колізія змінила смисл формули.

Вільні входження предметних імен в формулу або терм можна замінювати термами. Терм t допустимий для заміни вільного імені x в формулі Ф, якщо x не лежить в області дії ніякого квантора за деяким іменем, яке входить до складу терма t.

Приклади мов 1-го порядку

Мова теорії множин L_{set} визначається сигнатурою $\sigma_{set}=\{\in, =\}$, де $\in$ та $=$ – бінарні предикатні символи.

$z\in x$ – атомарна формула

"$x=\varnothing$": $\neg\exists y(y\in x)$

"$x\neq\varnothing$"

"існує $\varnothing$": $\exists x\neg\exists y(y\in x)$ (замкнена формула)

"$x=y\cap z$": $\forall u(u\in x\leftrightarrow u\in y\wedge u\in z)$

"$x=\{\varnothing\}$": $\forall u(u\in x\leftrightarrow u=\varnothing)$

"$x\subseteq y$": $\forall z(z\in x\rightarrow z\in y)$

"$x\subset y$": "$x\subseteq y$ та $\neg(x=y)$"

"$x\backslash y=z\cap s$"

"$x=2^z$": $\forall u(u\in x\leftrightarrow u\subseteq z)$ //2^z – булеан (множина всіх підмножин) z

Мова арифметики L_{ar} визначається сигнатурою $\sigma_{ar}=\{0, 1, +, \times, =\}$, де 0 та 1 – константні символи, + та $\times$ – бінарні функціональні символи, = – бінарний предикатний символ. За замовчуванням працюємо на $\boldsymbol{N}$.

Терм мови арифметики назвемо *арифметичним термом*. Формулу мови арифметики назвемо *арифметичною формулою.*

1+1 – замкнений арифметичний терм

$x\times(y+z)$ – арифметичний терм

$\exists z(x+z=y)$ – арифметична формула

"x=2": x=1+1

"x парне": $\exists y(x=y+y)$

"x ділиться на y": $\exists z(x=y\times z)$

"$x\leq y$": $\exists z(x+z=y)$ на $\boldsymbol{N}$ та $\exists z(x+z\times z=y)$ на $\boldsymbol{R}$

"$x<y$": $\exists z(x+z=y\wedge\neg(x=y))$

"z – спільний дільник x та y"

"z – найбільший спільний дільник x та y"

"z – остача від ділення x на y"

"x просте число": $\forall y\forall z(x=y\times z\rightarrow y=1\vee z=1)\wedge\neg(x=1)$ // $P(x)$

"існує не менше 4 простих чисел": $\exists x_1\ldots\exists x_4(P(x_1)\wedge\ldots\wedge P(x_4)\wedge x_1\neq x_2\wedge x_1\neq x_3\wedge\ldots\wedge x_3\neq x_4)$ // тобто ≥ 4

"існує менше 5 простих чисел": $\exists x_1\ldots\exists x_4\forall y(P(y)\rightarrow y=x_1\vee\ldots\vee y=x_4)$ // тобто ≤ 4

"існує рівно 4 простих числа": обидві попередні умови одночасно

"існує єдиний елемент з властивістю P": $\exists xP(x)\wedge\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\rightarrow x=y)$

"множина парних (чи простих) чисел нескінченна"

"кожне парне число > 2 є сумою двох простих" (проблема Гольдбаха)