ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Вступ

Передумови для виникнення теорії диференціальних рівнянь склалися в 2-й половині XVIIст..

Актуальні на той час так звані «обернені задачі на дотичні», тобто пошук кривих за відомими властивостями їх дотичних, були одними з перших, що зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклад 1 (Р.Декарт 1639р.)

Нехай на площині з прямокутною системою координат потрібно знайти криву, в кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної пропорційний ординаті точки дотику, з заданим коефіцієнтом пропорційності k.

Якщо таку криву шукати у вигляді графіка деякої диференційованої функції $y = y(x), \quad x \in \Re$, то враховуючи геометричний зміст похідної, умову задачі можна подати у вигляді співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

яке являє собою найпростіше але важливе диференціальне рівняння. Легко переконатися (підстановкою), що його задовольняє будь-яка функція вигляду

$$y = Ce^{kx},$$

де C - довільна дійсна константа.

З метою показати необхідність вивчення теорії диференціальних рівнянь, проілюструємо декілька прикладів з різних галузей, що призв зводять природнім шляхом до математичного запису постановки задачі у вигляді диференціальних рівнянь.

Приклад2. Модель економічної динаміки.

Введемо наступні позначення

$x(t)$ - обсяг основних фондів (капіталу), з розрахунку на одного працівника в момент часу t,

$\mu = const > 0$ та $\nu = const > 0$ - норми амортизації капіталу та темпи росту чисельності робочої сили, відповідно,

$c(t)$ - обсяг споживання з розрахунку одного працівника в момент часу t,

$f(x)$ - виробнича функція, яка є характеристикою продуктивності праці й має певні властивості (опуклість, монотонність…)

Тоді в наведених позначеннях математична модель економічної динаміки (в найпростішому вигляді) буде записана через наступне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) - (\mu + \nu)x(t) - c(t)$$

Приклад 3. Модель розвитку одновидової популяції.

Введемо до розгляду величину
$x(t)$ - величина (кількість, маса популяції) в момент часу t.
Ідеалізуючи процес будемо вважати, що $x(t)$ неперервно змінюється в часі.

Гіпотеза Т.Мальтуса (1798р.):

За малий проміжок часу $[t, t+\Delta t]$
кількість новонароджених особин становить $ax(t)\Delta t$,
а кількість померлих - $bx(t)\Delta t$.
Тут a та b – коефіцієнти народжуваності , та смертності відповідно.

Тоді загальна зміна величини популяції за вказаний проміжок часу виражається формулою

$$x(t+\Delta t) - x(t) = (a-b)x(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0$$

Покладемо $k = a - b$, поділимо обидві частини цієї рівності на Δt й перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$.

Отримаємо вже знайоме диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Розв'язком якого є функція $x = Ce^{kt}$, де C - довільна дійсна константа.

Якщо відомо, що величина популяції в момент часу t_0 становить x_0, значення довільної сталої обчислимо з початкової умови $Ce^{kt_0} = x_0$ та отримаємо залежність

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)},$$

яка є розв'язком **задачі Коші** з початковими даними (t_0, x_0).

Зауваження.
Коефіцієнт k можна знайти й у випадку якщо a та b невідомі, але визначивши значення $x_1 = x(t_1)$ в деякий момент t_1.

Тоді з умови $$x_1 = x_0 e^{k(t_1-t_0)}$$

матимемо

$$k = (t_1 - t_0)^{-1} \ln(x_1 / x_0).$$

Цікавий факт, що коли за такою методикою обчислили коефіцієнт k, користуючись даними про населення Землі в 1961р. та 1971р., то отримали залежність

$$x = 3.06 \cdot 10^9 \cdot e^{0.02(t-1961)},$$

яка непогано узгоджується з оцінками приросту населення земної кулі в період між 1700 та 1960рр. У цей час воно реально подвоювалося кожні **35** років.
Отримана нами формула дає подвоєння за **34.6** року**!**

Наведемо декілька основних визначень теорії диференціальних рівнянь, що будуть використовуватися надалі.

Визначення. Рівняння, що містять похідні від шуканої функції та можуть містити шукану функцію та незалежну змінну, називаються **диференціальними рівняннями**.

Визначення. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної

$$F(x, y, y', y'', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається **звичайним**.

Визначення. **Порядком** диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння.

Наприклад,

$$y = xy' + y'^3 \qquad \text{- д.р. 1-го порядку,}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) - \cos x(t) = 0 \qquad \text{- д.р. 2-го порядку,}$$

$$y^{IV} - 4y''' + 2y - y = xe^x \qquad \text{- д.р. 4-го порядку,}$$

Визначення. Якщо невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних

$$F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\ \dots\ ,\frac{\partial^k z}{\partial x^l,\partial y^{k-l}},\ \dots\ ,\frac{\partial^n z}{\partial y^n})=0,$$

то диференціальне рівняння називається **рівнянням в частинних похідних**.

Наприклад,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$

Визначення. **Розв'язком** диференціального рівняння називається функція, що має необхідну ступінь гладкості, і яка при підстановці в диференціальне рівняння обертає його в тотожність.

Наприклад,

функція $y=\cos 2x$ є розв'язком д.р. другого порядку $y''+4y=0$.

Розв'язками цього рівняння також будуть $y=\sin 2x$, $y=3\cos 2x-\sin 2x$,
І взагалі всі функції вигляду

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x, \quad \text{де} \quad C_1,\ C_2 \text{ - довільні сталі.}$$

З геометричної точки зору розв’язку диференціального рівняння в декартовій системі координат відповідає деяка крива, яку називають **інтегральною кривою**.

Сукупність інтегральних кривих, що залежить від довільних сталих, називають **сім’єю інтегральних кривих**.

Наприклад,
Розв’язки рівняння $y''(x) = 2$ утворюють двопараметричну сім’ю парабол $y(x) = x^2 + C_1 x + C_2$, кожна з яких э інтегральною кривою.

Визначення. Процес знаходження розв’язку диференціального рівняння називається **інтегруванням** диференціального рівняння.

Якщо при цьому всі розв’язки вдається виразити через елементарні функції, то кажуть, що рівняння зінтегроване в **скінченному вигляді**, якщо ж розв’язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій, то кажуть про розв’язок у **квадратурах**.

1. Диференціальні рівняння першого порядку.

Рівняння першого порядку, що ***розв'язане відносно похідної***, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Диференціальне рівняння становить зв'язок між координатами точки (x, y) та кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{dy}{dx}$ до графіку розв'язку в цій же точці.

Якщо знати x та y, то можна обчислити $f(x, y)$ тобто $\frac{dy}{dx}$.

Таким чином, диференціальне рівняння визначає **поле напрямків**, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, що звуться **інтегральними кривими**, напрям дотичних до яких в кожній точці співпадає з напрямом поля.

1.1. Існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Неперервна залежність та диференційованість

Теорема (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші).

Нехай у диференціальному рівнянні $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ функція $f(x,y)$ визначена в прямокутнику

$$D = \{(x,y) : |x_0 - a \le x \le x_0 + a, \ \ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}.$$

і задовольняє умовам:

1) $f(x,y)$ неперервна по x та y в D ;
2) $f(x,y)$ задовольняє умові Ліпшиця по змінній y, тобто

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2|, \quad N = const.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння, який визначений при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, і задовольняє умові

$$y(x_0) = y_0,$$

де $h < \min\{a, b/M, 1/N\}, \ \ M = \max\limits_{x,y \in D} |f(x,y)|.$

Зауваження. Умову Ліпшиця $\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le N\left|y_1-y_2\right|$ можна замінити іншою, більш грубою, але легше перевіряємою умовою існування обмеженої по модулю частинної похідної $f'_y(x,y)$ в області D.

Дійсно,

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=\left|f'_y(x,\xi)\right|\left|y_1-y_2\right|\le N\left|y_1-y_2\right|,$$

де $\xi\in[y_1,y_2]$, $N=\max\limits_{(x,y)\in D}\left|f'_y(x,y)\right|$.

Використовуючи доведену теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші розглянемо ряд теорем, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема (*про неперервну залежність розв'язків від параметру*).

Якщо права частина диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y,\mu)$ неперервна по μ при $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$ і при кожному фіксованому μ задовольняє умовам теореми існування й єдиності, причому стала Ліпшиця N не залежить від μ,
то розв'язок $y=y(x,\mu)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0)=y_0$, неперервно залежить від μ.

Теорема (*про неперервну залежність від початкових умов*).

Нехай виконані умови теореми про існування та єдиність розв'язків рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$.

Тоді, розв'язки $y = y(x_0, y_0; x)$, що записані у формі Коші, неперервно залежать від початкових умов.

Теорема (*про диференційованість розв'язків*).

Якщо в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні змішані похідні до k-го порядку, то розв'язок $y(x)$ рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$ в деякому околі точки (x_0, y_0) буде $(k+1)$-раз неперервно-диференційований.

1.2. Рівняння зі змінними, що розділяються

1.2.1. Загальна теорія

Рівняння вигляду
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

або більш загального вигляду
$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$$

називаються ***рівняннями зі змінними, що розділяються***.

Розділимо його на $f_2(y)g_1(x)$ і одержимо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Взявши інтеграли, отримаємо
$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C,$$

або
$$\Phi(x, y) = C.$$

Визначення. Кінцеве рівняння $\Phi(x, y) = 0$, що визначає розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння як неявну функцію від x, називається ***першим інтегралом*** розглянутого рівняння.

Визначення. Рівняння $\Phi(x, y) = C$, що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається ***загальним інтегралом***.

Бувають випадки (в основному), що невизначені інтеграли $\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx$ або $\int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy$ не можна записати в елементарних функціях. Незважаючи на це, задача інтегрування вважається виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння ***розв'язане в квадратурах***.

Можливо, що загальний інтеграл $\Phi(x, y) = C$ розв'язується відносно y: $y = y(x, C)$. Тоді, завдяки вибору C, можна одержати всі розв'язки.

Визначення. Залежність $y = y(x, C)$, що тотожно задовольняє вихідному диференціальному рівнянню, де C довільна стала, називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок являє собою сім'ю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

Визначення. Знаходження розв'язку $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$, називається ***розв'язком задачі Коші***.

Визначення. Розв'язок, який записаний у вигляді $y = y(x, x_0, y_0)$ і задовольняє умові $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, називається розв'язком у формі Коші.

Вправи

Рівняння зі змінними, що розділяються можуть бути записані у вигляді

$$y' = f(x)g(y) \qquad \text{або} \qquad f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0.$$

Для розв'язків такого рівняння необхідно обидві частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину входило тільки x, а в другу - тільки y. Тоді обидві частини рівняння можна проінтегрувати.

Якщо ділити на вираз, що містить x та y, може бути загублений розв'язок, що обертає цей вираз в нуль.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2y^2y' + y = 1.$

Розв'язок. Підставивши $y' = \dfrac{dy}{dx}$ в задане рівняння, отримаємо $x^2y^2\dfrac{dy}{dx} = -y + 1.$

Помножимо обидві частини рівняння на dx і розділимо на $x^2(y-1)$. Перевіримо, що $y = 1$ при цьому є розв'язком, а $x = 0$ цим розв'язком не є:

$$\frac{y^2}{y-1}dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Проінтегрируємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = -\int \frac{dx}{x^2}; \qquad \text{тобто} \qquad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{1}{x} + C.$$