Арифметична ієрархія. Алгоритм Тарського-Куратовського

Теорема. *Функція* $f = \mathbf{R}(g, h)$ *може бути отримана із функцій* g, h, *базових функцій і функцій* $+$, $\times$ *та* $\dot{-}$ *за допомогою скінченної кількості застосувань операцій* $\mathbf{S}^{n+1}$ *та* $\mathbf{M}$.

Таким чином, клас ЧРФ збігається з класом функцій, отриманих із функцій $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{I}^n_m$, $+$, $\times$, $\dot{-}$ за допомогою операцій $\mathbf{S}^{n+1}$ та $\mathbf{M}$.

n-арну ЧРФ з номером m позначаємо φ^n_m, а її область визначення та область значень – відповідно D^n_m та E^n_m. У випадку $n = 1$ спрощені позначення: φ_m, D_m та E_m.

Функції $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{I}^n_m$, $+$, $\times$, $\dot{-}$ арифметичні, операції $\mathbf{S}^{n+1}$ та $\mathbf{M}$ зберігають арифметичність функцій. Тому *кожна ЧРФ арифметична*.

Класи арифметичних множин і предикатів позначаємо *АМ* і *АП*.

Кожна РПМ арифметична. Клас арифметичних множин замкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ та доповнення: якщо множини A та B виражаються арифметичними формулами Φ та Ψ, то $A\cup B$, $A\cap B$ та $\overline{A}$ виражаються відповідно арифметичними формулами $\Phi\vee\Psi$, $\Phi\&\Psi$ та $\neg\Phi$.

Таким чином, для класів РПМ і АМ маємо строге включення РПМ$\subset$АМ.

Діагональна множина $D = \{x|\varphi_x(x)\downarrow\}$ є РПМ, тому D арифметична, звідки $\overline{D}$ арифметична, при цьому $\overline{D}$ не є РПМ. Отже, множина $\overline{D}$ – арифметична, але не РПМ.

Нехай задана деяка ефективна нумерація арифметичних формул. Нехай $\mathbf{T}$ – множина номерів всіх істинних арифметичних формул (ІАФ).

Теорема (Тарський). *Множина* $\mathbf{T}$ *неарифметична.*

Теорема Тарського засвідчує, що не існує "універсальної" ІАФ, яка дозволяла б отримувати довільну ІАФ за її номером. Теорема Тарського доводить неможливість повної формалізації поняття істини в достатньо багатих мовах, які включають або можуть моделювати мову арифметики.

Розглянемо арифметичну ієрархію – класифікацію арифметичних множин і предикатів. Вона пов'язує теорію рекурсивних функцій з математичною логікою

Σ_n-*префіксом* назвемо послідовність кванторних префіксів із n–1 зміною однотипних кванторів, який починається квантором $\exists$.

Π_n-*префіксом* назвемо послідовність кванторних префіксів із n–1 зміною однотипних кванторів, який починається квантором $\forall$.

Наприклад, $\exists x\exists y\forall u\forall v\forall w\exists t\exists z$ – Σ_3-префікс; $\forall x\exists y\exists z$ – Π_2-префікс; $\exists x\exists y\forall u\forall v$ – Σ_2-префікс; $\exists x\exists y\exists u$ – Σ_1-префікс; $\forall u\forall z$ – Π_1-префікс.

Нехай $\Re$ – множина арифметичних формул, значеннями яких є рекурсивні предикати.

Для всіх $n\geq 0$ введемо класи предикатів $\boldsymbol{\Sigma_n}$, $\boldsymbol{\Pi_n}$ та $\boldsymbol{\Delta_n}$.

Покладемо $\boldsymbol{\Sigma_0} = \boldsymbol{\Pi_0} = \boldsymbol{\Delta_0} =$ множина всіх РП.

Для $n\geq 1$ маємо:

– $\boldsymbol{\Sigma_n}$ складається з усіх предикатів, виразимих формулами вигляду $\sigma\Phi$, де $\sigma\in\Sigma_n$ та $\Phi\in\Re$;

– $\boldsymbol{\Pi_n}$ складається з усіх предикатів, виразимих формулами вигляду $\sigma\Phi$, де $\sigma\in\Pi_n$ та $\Phi\in\Re$;

– $\boldsymbol{\Delta_n} = \boldsymbol{\Sigma_n}\cap\boldsymbol{\Pi_n}$.

Введені класи предикатів $\boldsymbol{\Sigma_n}$, $\boldsymbol{\Pi_n}$ та $\boldsymbol{\Delta_n}$ індукують відповідні класи множин

$$\mathit{\Sigma}_n = \{I_P \mid P\in\boldsymbol{\Sigma_n}\},\ \ \mathit{\Pi}_n = \{I_P \mid P\in\boldsymbol{\Pi_n}\},\ \ \mathit{\Delta}_n = \mathit{\Sigma}_n\cap\mathit{\Pi}_n .$$

Маємо: $\mathit{\Sigma}_0 = \mathit{\Pi}_0 = \mathit{\Delta}_0 =$ множина всіх РМ, $\mathit{\Sigma}_1$ це множина всіх РПМ, $\mathit{\Pi}_1$ – це множина всіх доповнень до РПМ. В силу теореми Поста $\mathit{\Delta}_1 = \mathit{\Sigma}_1\cap\mathit{\Pi}_1$ – це множина всіх РМ. Отже, $\mathit{\Delta}_1 = \mathit{\Delta}_0$.

Наведемо елементарні властивості введених класів предикатів.

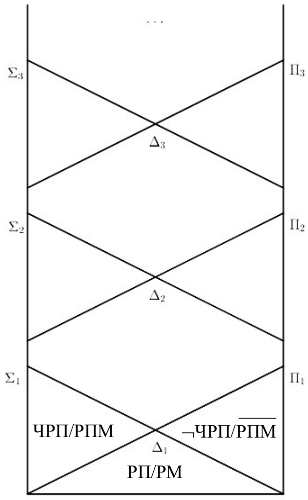
1. $P\in\boldsymbol{\Sigma_n} \Leftrightarrow \neg P\in\boldsymbol{\Pi_n}$ та $P\in\boldsymbol{\Pi_n} \Leftrightarrow \neg P\in\boldsymbol{\Sigma_n}$.

2. $\boldsymbol{\Sigma_n}\cup\boldsymbol{\Pi_n}\subseteq\boldsymbol{\Delta_{n+1}}$.

3. $\bigcup\limits_{n\geq 0}\Sigma_n = \bigcup\limits_{n\geq 0}\Pi_n = \boldsymbol{\mathit{АП}}$.

Теорема (теорема Кліні про ієрархію). *Для кожного* $n>0$ *існує арифметичний предикат* ϑ *такий, що* $\vartheta\in\boldsymbol{\Sigma_n}\setminus\boldsymbol{\Pi_n}$ *та* $\neg\vartheta\in\boldsymbol{\Pi}\setminus\boldsymbol{\Sigma_n}$.

Аналогічні твердження справджуються для відповідних класів арифметичних множин.



Ієрархія арифметичних предикатів/множин

Встановлення належності множини до класів $\boldsymbol{\Sigma_n}$ чи $\boldsymbol{\Pi_n}$, тобто визначення її місця в арифметичній ієрархії, можна здійснити *алгоритмом Тарського-Куратовського*.

Суть алгоритму: використовуючи пренексні операції, подаємо предикат "$x{\in}M$" у вигляді $(\sigma\Phi)_N$, після чого встановлюємо $\sigma\in\Sigma_n$ чи $\sigma\in\Pi_n$ для деякого $n>0$. Найточнішою вважається класифікація при найменшому можливому n, всі інші класи будуть його містити.

Приклад **1.** $M = \{x \mid D_x = \varnothing\} \in \boldsymbol{\Pi_1}$.

Маємо $D_x = \varnothing \Leftrightarrow \forall y(\varphi_x(y)\uparrow) \Leftrightarrow \forall y\neg\exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$) \Leftrightarrow \forall y\forall k\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$. Предикат $\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Приклад **2.** $M = \{x \mid E_x$ нескінченна$\} \in \boldsymbol{\Pi_2}$.

E_x нескінченна $\Leftrightarrow \forall z\exists y(y>z \,\&\, y{\in}E_x) \Leftrightarrow \forall z\exists y(y>z \,\&\, \exists v\exists k(P_x(v)\downarrow y$ за k кроків$) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall z\exists y\exists v\exists k(y>z \,\&\, P_x(v)\downarrow y$ за k кроків$)$.

Предикати $y>z$ та $(P_x(v)\downarrow y$ за k кроків$)$ є РП.

Приклад **3.** $M = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\} \in \boldsymbol{\Sigma_2}$.

$x{\in}M \Leftrightarrow \varphi_x$ не є РФ $\Leftrightarrow \exists y(\varphi_x(y)\uparrow) \Leftrightarrow \exists y\neg\exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$) \Leftrightarrow \exists y\forall k\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$.

Предикат $\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Приклад **4.** $M = \{x \mid D_x$ є РМ$\} \in \boldsymbol{\Sigma_3}$.

Предикат $(P_u(v)\downarrow$ за w кроків$)$ позначимо $P(u, v, w)$.

Використаємо співвідношення $A\leftrightarrow\neg B \sim (\neg A\vee\neg B) \,\&\, (A\vee B)$ та теорему Поста.

Тепер маємо D_x є РМ $\Leftrightarrow \exists z(\, D_x = \overline{D_z}\,) \Leftrightarrow$

$\exists z\forall y(y{\in}D_x \leftrightarrow \neg(y{\in}D_z)) \Leftrightarrow \exists z\forall y(\exists kP(x, y, k) \leftrightarrow \neg\exists nP(z, y, n)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall y(\, (\neg\exists kP(x, y, k)\vee\neg\exists nP(z, y, n)) \,\&\, (\exists kP(x, y, k)\vee\exists nP(z, y, n)\,) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall y(\forall k\forall n(\neg P(x, y, k)\vee\neg P(z, y, n)) \,\&\, \exists k\exists n(P(x, y, k)\vee P(z, y, n))\,) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall y\forall k\forall n\exists l\exists m(\, (\neg P(x, y, k)\vee\neg P(z, y, n)) \,\&\, (P(x, y, l)\vee P(z, y, m))\,)$.

Предикат в дужках після кванторних префіксів є РП.

Приклад **5.** Предикат "$D_x = D_y$"$\in \boldsymbol{\Pi_2}$.

Предикат $(P_u(v)\downarrow$ за w кроків$)$ позначимо $P(u, v, w)$.

$D_x = D_y \Leftrightarrow \forall z(z{\in}D_x \leftrightarrow z{\in}D_y) \Leftrightarrow \forall z((z{\in}D_x\vee\neg(z{\in}D_y)) \,\&\, (\neg(z{\in}D_x) \vee z{\in}D_y)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall z(\, (\exists aP(x, z, a) \vee\neg\exists bP(y, z, b)) \,\&\, (\neg\exists cP(x, z, c) \vee \exists dP(y, z, d))\,) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall z(\, (\exists aP(x, z, a) \vee \forall b\neg P(y, z, b)) \,\&\, (\forall c\neg P(x, z, c) \vee \exists dP(y, z, d))\,) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall z\forall b\forall c\exists a\exists d(\, (P(x, z, a)\vee\neg P(y, z, b)) \& (\neg P(x, z, c)\vee P(y, z, d))\,)$.

Квантори одного рівня можна перегрупувати.

Предикат в дужках після кванторних префіксів є РП.

Вправи

Визначте місце в арифметичній ієрархії наступних множин та предикатів:
1) $\{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$,
2) $\{x \mid E_x$ скінченна$\}$.
3) "$E_x = E_y$";
4) "E_x не є РМ".