Принцип максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування.

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x,u,t), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0. \qquad (2)$$

Критерій оптимальності

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1)) \to \min_u. \qquad (3)$$

Для системи керування (1), (2) потрібно знайти функцію керування $u(t)$, яка б мінімізувала критерій (3).

Така задача з фіксованими лівим і правим кінцями траєкторії.

Необхідна умова оптимальності сформульованої задачі керування:
Функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x,u,\psi,t)$ досягає своєї верхньої границі.

Для сформульованої задачі запишемо функцію Гамільтона–Понтрягіна

$$H(x,u,\psi,t) = -f_0(x,u,t) + \psi^T(t) f(x,u,t). \ (4)$$

Запишемо систему для визначення спряжених змінних:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi(t)}{dt} = -grad_x H(x,u,t) \\ \psi(t_1) = -\left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{t=t_1} \end{cases} \qquad (5)$$

Необхідна умова:

$$grad_u H(x,u,\psi,t) = 0. \qquad (6)$$

Приклад 1.

Для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t)$$

З закріпленими кінцями траєкторій

$$x(0) = x(1) = 0$$

знайти оптимальне керування та траєкторії, на яких функціонал

$$I = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t))dt$$

досягає мінімального значення.

Запишемо функцію Гамільтона:

$$H(x,u,\psi,t) = -(u^2(t) + x^2(t)) + \psi(t)u(t).$$

Знайдемо керування, яке максимізує функцію Гамільтона:
(необхідна умова)

$$grad_u H(x,u,\psi,t) = -2u(t) + \psi(t) = 0.$$

Маємо

$$u(t) = \frac{1}{2}\psi(t).$$

Для спряжених змінних запишемо систему:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -grad_x H(x,u,t) = 2x(t).$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = u(t) = \dfrac{1}{2}\psi(t) \\ \dfrac{d\psi(t)}{dt} = 2x(t) \end{cases},$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}(t) = x(t),$$

Розв'язок

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Підставимо граничні умови:

$$x(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1,$$

$$x(1) = c_1(e - e^{-1}) = 0 \Rightarrow c_2 = c_1 = 0.$$

Отже, $x(t) = 0$, $u(t) = 0$ - розв'язок задачі оптимального керування.

Приклад 2.

Знайти «підозрілі» розв'язки за принципом максимуму Понтрягіна.

$$I = \int_0^1 ({u_1}^2(t) + {u_2}^2(t) + x_2^2(t))dt + x_1^2(1) + x_2^2(1) \to \min$$

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,$$

$$x_1(1),\ x_2(1) \text{ - вільні.}$$

Запишемо функцію Гамільтона:

$$H(x,u,\psi,t) = -(u_1{}^2(t) + u_2{}^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1(t)u_1(t) + \psi_2(t)u_2(t).$$

Система для спряжених змінних має вигляд:

$$\dot{\psi}_1 = -H'_{x_1} = 0,\ \ \dot{\psi}_2 = -H'_{x_2} = 2x_2.$$

Оскільки H опукла вгору як по x_1, так і по x_2, то максимум цієї функції можна знайти з умови

$$H'_{u_1} = -2u_1 + \psi_1 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{\psi_1}{2},$$

$$H'_{u_2} = -2u_2 + \psi_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{\psi_2}{2}.$$

$$\dot{x}_1 = u_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = \dot{u}_1 = \frac{1}{2}\dot{\psi}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1(t) = c_1 t + c_2 \ .$$

$$\dot{x}_2 = u_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 = \dot{u}_2 = \frac{1}{2}\dot{\psi}_2 = x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = x_2(t) \Rightarrow \ddot{x}_2(t) - x_2(t) = 0,$$

$$\lambda^2 - 1 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,$$

$$x_2(t) = d_1 e^t + d_2 e^{-t}.$$

Запишемо умови трансверсальності на правому кінці:

$$\psi_1(1) = -2x_1(1),\ \psi_2(1) = -2x_2(1).$$

$$\psi_1 = 2u_1 = 2\dot{x}_1 = 2c_1,$$

$$\psi_2 = 2u_2 = 2\dot{x}_2 = 2(d_1 e^t - d_2 e^{-t}).$$

Підставимо початкову умову на лівому кінці:

$$x_1(0) = c_2 = 1,\ \psi_1(1) = -2x_1(1) = -2(c_1 + c_2) \Rightarrow 2c_1 = -2(c_1 + c_2).$$

$$c_2 = 1,\ c_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$x_2(0) = d_1 + d_2 = 0,$$

$$\psi_2(1) = -2x_2(1), \quad 2(d_1 e^1 - d_2 e^{-1}) = -2(d_1 e^1 + d_2 e^{-1}) \Rightarrow d_1 e^1 = 0 \Rightarrow d_1 = 0,$$

$$d_2 = 0.$$

Отже, підозріле керування має вигляд:

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 - \frac{1}{2}t \\ x_2(t) = 0 \\ u_1(t) = -\frac{1}{2} \\ u_2(t) = 0 \end{cases}$$