Керованість та спостережніть.

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t). \quad (1)$$

Система (1) називається цілком керованою, якщо для двох довільних точок x_0 і x_1 і двох довільних значень t_0 і t_1 існує така функція керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, при якій розв'язок рівняння (1) задовольняє умовам $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Розв'язок системи (1)

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Теорема. Для того, щоб система (1) була цілком керованою, необхідно і достатньо, щоб вектори функції $w_1(t,\xi), w_2(t,\xi), \ldots, w_n(t,\xi)$ були лінійно незалежні на любому довільному проміжку $[t_0, t_1]$,

де

$$W(t,\xi) = X(t,\xi)B(\xi) = \begin{pmatrix} w_1^T(t,\xi) \\ w_2^T(t,\xi) \\ \vdots \\ w_n^T(t,\xi) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Теорема. Для цілком керованості стаціонарної системи n- го порядку

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (4)$$

Необхідно і достатньо, щоб

$$rank(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n. \quad (5)$$

Для системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t), \quad (6)$$

умова керованості

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0, \quad (7)$$

або для всіх t_1, t_2 $\quad t_2 > t_1$ матриця

$$W(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} e^{At} bb^T e^{A^T t} dt \quad (8)$$

додатно визначена.

Спостережність систем

Розглянемо систему

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \\ &y(t) = G^T(t)x(t) \end{aligned}. \quad (9)$$

Задачу знаходження вектору стану системи $x(t)$ або окремих його компонент за відомою на деякому інтервалі $[t_0, t_1]$ функцією

$$y(t) = G^T(t)x(t), \quad (10)$$

будемо називати задачею спостережуваності системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t). \quad (11)$$

Якщо задача (9) має розв'язок, то система називається цілком спостережуваною.

Умова цілком спостережуваності стаціонарної системи

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ &y(t) = G^T x(t) \end{aligned}, \quad (12)$$

$$rank(G, A^T G, \ldots, A^{T^{n-1}} G) = n \quad (13)$$

Для системи

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ &y(t) = g^T x(t) \end{aligned}, \ (14)$$

$$\det(g, A^T g, \ldots, A^{T^{n-1}} g) \neq 0. \quad (15)$$

Зв'язок між спостережуваністю і керованістю систем.

Система

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \\ &y(t) = G^T(t)x(t) \end{aligned} \quad (16)$$

спостережувана, якщо система

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A^T x(t) + Gu(t) \ (17)$$

цілком керована.

Приклад 1. Перевести систему

$$\frac{dx}{dt}=u$$

з точки x_0 в точку x_1 за допомогою постійних функцій.

$$dx=udt,$$
$$x(t)=ut.$$
$$x_0=ut_0,\ x_1=ut_1,$$
$$x_0-x_1=u(t_0-t_1),$$
$$u=\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1}.$$

Приклад 2. Дослідити систему на керованість

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=u.$$

Введемо змінні $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$, тоді $\ddot{x}=\dot{x}_2=-ax_2-bx_1+u$.

Або

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-b&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u.$$

Тоді

$$\det\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-b&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\neq 0,$$
$$\det\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&-a\end{pmatrix}\right)\neq 0.$$

Система цілком керована для любих a,b.

Приклад 3. Дослідити на спостережність систему, використовуючи критерій двоїстості

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2-2x_3\\ \dot{x}_2=x_1-x_3\\ \dot{x}_3=-2x_3\\ y=-x_1+x_2-x_3\end{cases}.\quad(18)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad(19)$$

$$y = (-1,1,-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Тоді наступну системи систему дослідимо на цілком керованість

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} u\,.$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = -8.$$

Система спостережувана.