2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Загальні визначення. Існування та єдиність розв’язків рівнянь

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0.$$

Якщо диференціальне рівняння розв’язане відносно старшої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}).$$

Іноді його називають **диференціальним рівнянням у нормальній формі**.

Для диференціального рівняння, *розв’язного відносно похідної*, **задача Коші** ставиться таким чином.

Потрібно знайти функцію $y = y(x)$, n- раз неперервно диференційовану, таку, що при підстановці в рівняння обертає його в тотожність і задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y_0^1, \ \dots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Для диференціального рівняння, *нерозв'язного відносно похідної*, задача Коші полягає в знаходженні розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початковим даним

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0^1, \;\; \ldots \;, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \;\; y^{(n)}(x_0) = y_0^n \;,$$

де значення $x_0, y_0, y_0^1, \; \ldots \;, y_0^{n-1}$ довільні,

а y_0^n один з коренів алгебраїчного рівняння $F(x_0, y_0, y_0^1, \; \ldots \;, y^n) = 0$.

Теорема (**існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння,** ***розв'язного відносно похідної***).

Нехай у деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^1, \; \ldots \;, y_0^{n-1})$ функція $f(x, y, y', \; \ldots \;, y^{(n-1)})$ задовольняє умовам:

1) вона визначена і неперервна по всім змінним;

2) задовольняє умові Ліпшиця по всім змінним, починаючи з другої.

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h - досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y', \; \ldots \;, y^{(n-1)})$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0^1, \;\; \ldots \;, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \;.$$

Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння, *нерозв'язного відносно похідної*).

Нехай у деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^1, \ \dots \ , y_0^{n-1}, y_0^n)$ функція $F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)})$ задовольняє умовам:

1) вона визначена і неперервна по всім змінним;

2) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| < M_0, \left|\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right| < M_1, \ \dots \ , \left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\right| < M_n$;

3) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right| \neq 0$.

Тоді при $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, де h- досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ \dots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \ y^{(n)}(x_0) = y_0^n \ .$$

Визначення. **Загальним розв'язком** диференціального рівняння n-го порядку називається n-раз неперервно диференційована функція $y = y(x, C_1, C_2, \ \dots \ , C_n)$, що обертає при підстановці рівняння на тотожність, у якій вибором сталих $C_1, \ \dots \ , C_n$ можна одержати розв'язок довільної задачі Коші в області існування та єдиності розв'язків.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Рівняння вигляду $y^{(n)}(x) = f(x)$.

Проінтегрувавши його n-раз одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$y(x) = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \ \ldots \ dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ \ldots \ + C_{n-1} x + C_n \ .$$

Якщо задані умови Коші $y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0^1, \ \ldots \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$,

то розв'язок має вигляд

$$y = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x) dx \ \ldots \ dx +$$

$$+ \frac{y_0}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{y_0^1}{(n-2)!}(x - x_0)^{(n-2)} + \ \ldots \ + y^{(n-2)}(x - x_0) + y_0^{(n-1)}.$$

2) Рівняння вигляду $\boldsymbol{F(x, y^{(n)}) = 0}$.

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи основне співвідношення $y^{(n)} = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$ **тобто** $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx,$

одержимо

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Проінтегрувавши його, маємо

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержимо параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1). \end{cases}$

Проробивши зазначений процес ще $(n-1)$-раз, одержимо загальний розв'язок рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, \ \dots \ , C_n) \end{cases}$$

3) Рівняння вигляду $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді
$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи основне співвідношення
$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx\ ,$$

одержуємо
$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$$

Проінтегрувавши, маємо
$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержали параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку
$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-1)} = \varphi(t). \end{cases}$$

Використовуючи попередній пункт, понизивши порядок на одиницю, запишемо

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-2)} = \varphi_2(t, C_2). \end{cases}$$

Пробивши останню процедуру $(n-2)$-раз, запишемо загальний розв'язок у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y = \varphi_n(t, C_2, \ \dots \ , C_n). \end{cases}$$

4) Нехай рівняння вигляду $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ можна розв'язати відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}).$$

Домножимо його на $2y^{(n-1)}dx$ й одержимо

$$2y^{(n-1)}y^{(n)}dx = 2f(y^{(n-2)})y^{(n-1)}dx .$$

Перепишемо його у вигляді

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) .$$

Проінтегрувавши, маємо

$$(y^{(n-1)})^2 = 2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1 ,$$

тобто

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1} ,$$

або $$y^{(n-1)} = \pm\psi_1\left(y^{(n-2)}, C_1\right).$$

Таким чином одержали параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку

$$\begin{cases} y^{(n-2)} = t \\ y^{(n-1)} = \pm\psi_1(t, C_1) \end{cases}$$

І фактично повернулися до третього випадку.

2.3. Найпростіші випадки зниження порядку в диференціальних рівняннях вищих порядків

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

1) Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до $(\boldsymbol{k-1})$-порядку включно

$$\boldsymbol{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \;\; \ldots \;, y^{(n)}) = 0}.$$

Зробивши заміну: $\boldsymbol{y^{(k)} = z, \quad y^{(k+1)} = z', \; \ldots \;, \; y^{(n)} = z^{(n-k)}}$,

одержимо рівняння $(\boldsymbol{n-k})$-порядку $\boldsymbol{F(x, z, z', \; \ldots \;, z^{(n-k)}) = 0}$.

2) Рівняння не містить явно незалежної змінної $\quad F(y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$.

Будемо вважати, що y - нова незалежна змінна, а $y', \ \dots \ , y^{(n)}$ - функції від y.

Тоді

$$y'_x = p(y),$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dy}(p(y))\frac{dy}{dx} = p'_y p,$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx} y''_{x^2} = \frac{d}{dy}(p'_y p)\frac{dy}{dx} = (p''_{y^2} p + p'^2_{y^2})p,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Після підстановки одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$-порядку.

$$F(y, p, p'_y p, (p''_{y^2} p + p'^2)p, \ \dots \ , p^{(n-1)}) = 0,$$

3) Нехай функція F диференціального рівняння $F(x, y, y', \ \dots \ y^{(n)}) = 0$ є однорідною щодо аргументів $y, y', \ \dots \ , y^{(n)}$.

Робимо заміну $y = e^{\int udx}$, де $u = u(x)$ - нова невідома функція.

Одержимо

$$y' = e^{\int udx} u,$$

$$y'' = e^{\int udx} u^2 + e^{\int udx} u' = e^{\int udx} (u^2 + u'),$$

$$y''' = e^{\int udx} u(u^2 + u') + e^{\int udx} (2uu' + u'') = e^{\int udx} (u^3 + 3uu' + u''),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Після підстановки одержимо

$$F(x, e^{\int udx}, e^{\int udx} u, e^{\int udx} (u^2 + u'), e^{\int udx} (u^3 + 3uu' + u''), \ \dots) = 0.$$

Оскільки рівняння однорідне відносно $e^{\int udx}$, то цей член можна винести і на нього скоротити.

Одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$-порядку

$$F(x, 1, u, u^2 + u', u^3 + 3uu' + u'', \ \dots \ , u^{(n-1)}) = 0$$

4) Нехай диференціальне рівняння $F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$, розписано у вигляді диференціалів

$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \ \dots \ , d^n y) = 0$ і Φ- функція однорідна по всім змінним.

Зробимо заміну $x = e^t, \ y = ue^t,$ де $u, \ t$ - нові змінні.

Тоді одержуємо

$$dx = e^t dt, \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{u'_t e^t + ue^t}{e^t} = u'_t + u, \qquad y''_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dt}(u'_t + u)\frac{dt}{dx} = \frac{u''_{t^2} + u'_t}{e^t},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx} y''_{x^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u''_{t^2} + u'_t}{e^t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{(u'''_{t^3} + u''_{t^2})e^t - (u''_{t^2} + u'_t)e^t}{e^{3t}} = \frac{u'''_{t^3} - u'_t}{e^{2t}} \ \dots \ .$$

Підставивши у початкове рівняння, одержимо

$$\Phi(x, y, dx, dy, \ d^2y, \ \dots \ , \ d^n y) = \Phi(e^t, ue^t, e^t dt, \ (u'_t + u)e^t dt, (u''_{t^2} + u'_t)e^t dt, \ \dots) = 0.$$

Скоротивши на e^t одержимо $\Phi(1, u, dt, u'_t + u, \ u''_{t^2} + u'_t, \ \dots, \ u_t^{(n)}) = 0$.

Тобто одержимо диференціальне рівняння, що не містить явно незалежної змінної, або повертаємося до другого випадку.

5) Нехай ліва частина рівняння $F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$ є похідною деякого диференціального виразу ступеня $(n-1)$, тобто $\dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)})$.

У цьому випадку легко обчислюється, так званий, перший інтеграл

$$\Phi(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}) = C.$$