Алгебра висловлювань

Мета МЛ – забезпечити формалізм для проведення міркувань.

Найпростіша логічна теорія – *логіки висловлювань* (ЛВ) або *алгебра висловлювань* (АВ).

В АВ нас будуть цікавити стверджувальні речення, які можуть бути тільки *істинними* або *фальшивими*. Кожне таке стверджувальне речення називається *висловлюванням*.

Приклади. “Сніг білий”, “4 ділиться на 2”.

“Істина” чи “фальш”, які приписуються кожному висловлюванню, називаються істинносними значеннями висловлювання і позначаються, як правило, буквами І і Ф, або символами 1 і 0.

Висловлювання будемо позначати великими латинськими буквами з індексами або без них.

Наприклад, ми можемо позначити вис-ловлювання наступним чином:

P - “Сніг білий”,

Q - “4 ділиться на 2”.

Символи P, Q, R і т. д., які використовуються для позначення висловлювань, називаються *атомарними формулами* або *атомами*.

Із висловлювань можна будувати складні висловлювання, використовуючи логічні (зв'язки) операції. В АВ ми будемо використовувати пять логічних операцій:

$\neg$ (ні), $\wedge$ (і), $\vee$ (або), $\rightarrow$ (якщо ..., то) і $\leftrightarrow$ (тоді і тільки тоді).

Операції можна використовувати для побудови все більш складних висловлювань шляхом повторного застосування операцій.

Наприклад, нехай X, Y, Z – довільні висловлювання. За допомогою логічних операцій ми можемо утворити складні висловлювання:

$$Y \vee Z,\ X \leftrightarrow Y.$$

Із одержаних висловлювань можемо утворити нові

$$X \rightarrow (Y \vee Z),$$

$$\neg(X \leftrightarrow Y)$$

і т. д.

В логіці довільні вирази, які є висловлюваннями, називаються правильно побудованими формулами.

Df. Правильно побудовані формули (або просто формули) в АВ визначаються рекурсивно наступним чином:

1. Атом є формулою.
2. Якщо G – формула, то $\neg$(G) – формупа.
3. Якщо G і H – формули, то (G$\wedge$H), (G$\vee$H), (G$\rightarrow$H) і (G$\leftrightarrow$H) – формули.
4. Ніяких інших формул нема.

Висловлювання можуть бути постійними, тобто мати визначене значення 0 чи 1, або змінними. Тоді вони позначаються великими латинськими буквами, як уже було сказано вище.

Неважко бачити, що такі вирази, як $(P\rightarrow)$ і $(P\wedge)$ не є формулами.

Нехай G і H – дві формули. Тоді істиносне значення формул $\neg(G)$, $(G\wedge H)$, $(G\vee H)$, $(G\rightarrow H)$ і $(G\leftrightarrow H)$ пов’язане з істиносними значеннями формул G і H наступним чином:

1. $\neg$(G) істинна, коли G фальшива, і фальшива, коли G істинна. Формула $\neg$(G) називається *запереченням* G.

2. (G$\wedge$H) істинна, якщо G і H обидві істинні. В іншому випадку (G$\wedge$H) фальшива.
(G$\wedge$H) називається *кон'юнкцією* G і H.

3. (G$\vee$H) істинна, якщо по крайній мірі одна із формул G і H істинна. В іншому випадку (G $\vee$ H) фальшива.
(G$\wedge$H) називається *диз'юнкцією* G і H.

4. $(G \rightarrow H)$ фальшива, якщо G істинна і H фальшива. В іншому випадку $(G \rightarrow H)$ істинна. $(G \rightarrow H)$ читається як G *імплікує* H.

5. $(G \leftrightarrow H)$ істинна тоді і тільки тоді, коли G і H мають однакові істинносні значення. В іншому випадку $(G \leftrightarrow H)$ фальшива. $(G \leftrightarrow H)$ читається, як G еквівалентна H.

Перелічені співвідношення зручно подавати в наступній таблиці:

G	H	$\neg G$	$(G \wedge H)$	$(G \vee H)$	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Використовуючи цю таблицю, можна обчислювати істинносне значення формули за істинносними значеннями атомів, що в неї входять.

Інтерпретація формул АВ

Істиносне значення довільної формули можна обчислити, виходячи з істиносних значень атомів.

Приклад. Розглянемо формулу

$$G = (P \wedge Q) \rightarrow (R \leftrightarrow (\neg S)).$$

Атоми цієї формули – P, Q, R і S.
Нехай істиносні значення цих атомів дорівнюють 1, 0, 1 і 1 відповідно.
Тоді $(P \wedge Q)$ є 0, $(\neg S)$ є 0, $(R \leftrightarrow (\neg S))$ є 0,

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \leftrightarrow (\neg S)) \text{ є } 1.$$

Таким чином, G є 1, якщо атомам P, Q, R і S приписані значення 1, 0, 1 і 1.

Приписування істиносних значень атомам називається *інтерпретацією* формули G. Так як кожному із атомів P, Q, R і S можна приписати 0 або 1, то існує рівно $2^4 = 16$ інтерпретацій формули G.

Df. Нехай G – формула і $A_1, ..., A_n$ – її атоми. Тоді інтерпретацією формули G називається приписування істиносних значень всім атомам $A_1, ..., A_n$.

Df. Говорять, що формула G істинна при деякій інтерпретації, якщо її значення є істиною при цій інтерпретації.

Іноді ітерпретацію формули будемо задавати множинами всіх атомів, які в ній зустрічаються.

Наприклад, множина $\{P, \neg Q, \neg R, S\}$ представляє інтерпретацію, в якій атомам приписані 1, 0, 0, 1.

Загальнозначимість і суперечливість

Розглянемо формулу

$$G = ((P \to Q) \wedge P) \to Q$$

Ця формула має 4 інтерпретації, причому вона істинна при всіх інтерпретаціях. Таку формулу називають *загальнозначимою* або *тавтологією*.

Формула

$$G = ((P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$$

фальшива при всіх інтерпретаціях. Такі формули будемо називати *суперечливими*.

Df. Говорять, що формула *загальнозначима* (*тавтологія*), якщо вона істинна при всіх можливих інтерпретаціях.

Df. Формула *незагальнозначима*, якщо вона не є загальнозначимою.

Df. Говорять, що формула *суперечлива*, якщо вона фальшива при всіх можливих інтерпретаціях.

Df. Формула *несуперечлива (виконувана)*, якщо вона не є суперечливою.

Із приведених визначень випливає:

1. Формула загальнозначима, якщо її заперечення суперечливе.

2. Формула суперечлива, якщо її заперечення загальнозначиме.

3. Формула незагальнозначима, якщо існує по крайній мірі одна інтерпретація, при якій формула фальшива.

4. Формула несуперечлива, якщо існує по крайній мірі одна інтерпретація, при якій формула істинна.

Якщо формула F істинна в інтерпретації I, то говорять, що I *задовольняє* F, або F *виконується* в інтерпретації I.

Якщо формула F фальшива в інтерпретації I, то говорять, що I *спростовує* F.

Якщо інтерпретація I задовольняє формулу F, то I називається, також, *моделлю* F.

Рівносильність формул

Df. Дві формули F і G називаються *рівносильними* (*тотожними*), якщо при будь-яких інтерпретаціях ці формули приймають однакові значення.

Приклади (рівносильних формул).

$\neg\neg X = X$,

$X \wedge Y = Y \wedge X$

$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$

$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

$$X \vee (X \wedge Y) = X$$
$$X \wedge (X \vee Y) = X$$
$$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$$
$$X \vee X = X$$
$$X \vee \neg X = 1$$
$$X \wedge \neg X = 0$$

Ці співвідношення перевіряються за допомогою визначених раніше логічних операцій.

Нормальні форми

Часто виникає потреба перетворення формул із однієї форми в іншу, особливо в так звану “нормальну форму”.

Df. *Літера* є атом або заперечення атома.

Df. Говорять, що формула F знаходиться в кон’юнктивній нормальній формі, якщо

$$F = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n,\ n \geq 1,$$

де кожна з F_i є диз’юнкцією літер.

Df. Говорять, що формула F знаходиться в диз'юнктивній нормальній формі, якщо

$$F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n,\ n \geq 1,$$

де кожна з F_i є кон'юнкцією літер.

Приклади. Формула

$$F = (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q)$$

є формулою в кон'юнктивній нормальній формі. Формула

$$F = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

є формулою в диз'юнктивній нормальній формі.

Всяка формула може бути перетворена в нормальну форму. Це легко досягається за допомогою тотожностей, приведених вище.

Приклад. Побудувати ДНФ для формули

$$(P \vee \neg Q) \rightarrow R.$$

$$(P \vee \neg Q) \rightarrow R = \neg(P \vee \neg Q) \vee R = (\neg P \wedge Q) \vee R.$$

Логічні наслідки

Df. Нехай задані формули $F_1, F_2, \ldots, F_n$ і формула G. Говорять, що G є логічним наслідком формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, якщо для всякої інтерпретації I в якій $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$ істинна, G також істинна.

Теорема 1. Нехай задані формули $F_1, F_2, \ldots, F_n$ і формула G. Тоді G є логічним наслідком $F_1, F_2, \ldots, F_n$ тоді і тільки тоді, коли формула

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to G$$

загальнозначима.

Доведення ($\Rightarrow$). Нехай G є логічним наслідком формул F_1, F_2, ..., F_n і I довільна інтерпретація. Якщо F_1, F_2, ..., F_n істинні в I, то за визначенням логічного наслідку G є істинною в I. Отже, $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to G$ є істинною в I. З іншого боку, якщо не всі формули F_1, F_2, ..., F_n істинні в I, тобто хоча б одна з них фальшива, то $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to G$ істинна в I. Таким чином, $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to G$ – загальнозначима.

($\Leftarrow$). Нехай $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to G$ – тавтологія. Тоді для всякої інтерпретації I, якщо $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$ істинна в I, то G повинна бути істинною в I, тобто G є логічним наслідком $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$.

Теорема 2. Нехай задані формули $F_1, F_2, ..., F_n$ і формула G. Тоді G є логічним наслідком $F_1, F_2, ..., F_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G)$ суперечлива.

Доведення. За попередньою теоремою G є логічним наслідком $F_1, F_2,..., F_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ є тавтологією. Отже, G є логічним наслідком $F_1, F_2,..., F_n$ тоді і тільки тоді, коли $\neg((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)$ суперечлива.

Так, як $\neg((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G) =$
$\neg(\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \vee G) =$
$(\neg\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \wedge \neg G) =$
$(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \wedge \neg G =$
$(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G)$.

Теореми 1 і 2 дають можливість доводити, що деяка формула є логічним наслідком скінченної множини формул шляхом доведення того, що деяка зв'язана з ними формула загальнозначима або суперечлива.

Df. Якщо G є логічним наслідком формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, то формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ називається *теоремою*, а G *висновком теореми*.

Багато проблем можуть бути сформульовані, як проблеми доведення теорем.

Приклад. Розглянемо формули

$$F_1 = (P \to Q),\ F_2 = \neg Q,\ G = \neg P.$$

Покажемо, що G є логічним наслідком F_1 і F_2.

Метод 1. Можна використати визначення логічних операцій (таблиці), щоб показати, що G істинна в кожній моделі формули $(P \to Q) \wedge \neg Q$.

Метод 2. Можемо використати теорему 1. Для цього треба показати, що формула

$$((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P \text{ –}$$

тавтологія.

Це можна зробити за допомогою таблиць або зведенням до КНФ:

$((P\to Q) \land \neg Q) \to \neg P = \neg((P\to Q)\land \neg Q) \lor \neg P =$
$\neg((\neg P\lor Q)\land\neg Q)\lor \neg P = \neg((\neg P\land Q)\lor(Q \land\neg Q)) \lor \neg P =$
$\neg((\neg P\land Q)\lor 0) \lor \neg P = \neg((\neg P\land Q))\lor\neg P = (P\lor Q)\lor\neg P =$
$(Q\lor P)\lor\neg P = Q\lor(P\lor\neg P) = Q\lor 1 = 1.$

Метод 3. Можемо використати теорему 2. Для цього треба показати, що формула

$$(P\to Q) \land \neg Q \land P \text{ –}$$

тотожно фальшива.

Це можна зробити за допомогою таблиць або зведенням до ДНФ:

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \wedge P = (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P =$
$(\neg P \wedge \neg Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P) = 0 \vee 0 = 0.$

Нормальні форми дозволяють більш ефективно розв'язувати проблему, що полягає в побудові алгоритму, який для кожної формули АВ дає відповідь на питання: є вона тотожньо істинною (тавтологією) чи ні.

Критерії істинності формул АВ

1. Для того, щоб формула була тавтологією, необхідно і достатньо, щоб кожний множник її КНФ мав як мінімум два доданки, із яких один є запереченням іншого.

2. Для того, щоб формула була тотожно фальшивою, необхідно і достатньо, щоб кожний доданок її ДНФ мав як мінімум два множники, із яких один є запереченням іншого.

Подання довільної двохзначної функції формулою АВ

Нехай $F(x_1, \ldots, x_n)$ – довільна функція, причому змінні і сама функція приймають тільки два значення 1 і 0.

Кожну таку функцію можна подати у вигляді формули АВ, а саме

$F(x_1, \ldots, x_n) = F(1, \ldots, 1)\, x_1 \ldots x_n \vee F(1, \ldots 1, 0)\, x_1 \ldots x_{n-1} x'_n \vee \ldots \vee F(0, \ldots, 0)\, x'_1 \ldots x'_n.$

Приклад. Розглянемо функцію $F(x_1, x_2, x_3)$, яка приймає значення 1, якщо всі змінні приймають однакові значення і 0 в інших випадках.

Так як $F(1, 1, 1) = 1$, $F(0, 0, 0) = 1$, то цю функцію можна подати у вигляді

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x'_1x'_2x'_3.$$

Добутки всіх змінних або їх заперечень називаються *елементарними*, а сума елементарних добутків, що задають функцію, називається *досконалою* ДНФ.

Існує багато ДНФ для функції $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Існує єдина досконала ДНФ для функції $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Аналогічно визначається досконала КНФ.

Справедливі наступні співвідношення (для спрощення формул):

$X \vee XY = X$, $\quad X' \vee XY = X' \vee Y$

$X(X \vee Y) = X$, $\quad X(X' \vee Y) = XY$

$X \vee X'Y = X \vee Y$, $\quad X'(X \vee Y) = X'Y$