Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 5.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2020

Зміст I

Зміст

У Т.йм. використовують специфічне поняття незалежності. Події вважаються незалежними, якщо наявна інформація про одну з них не змінює шансів для іншої.

Означення

Події A та B у деякому імовірнісному просторі (Ω, F, P) називають *незалежними*, якщо

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Приклад

Монету підкидують 2 рази. $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$

$$A = \{\text{на 1-му підкиданні Г}\}, \quad B = \{\text{на 2-му підкиданні Г}\}.$$

$$A = \{ГГ, ГР\}, \quad B = \{ГГ, РГ\}, \quad A \cap B = \{ГГ\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Отже, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, тому A і B є незалежними.

Теорема (Еквівалентне означення незалежності)

а) Нехай $P(B) > 0$. *Події* A *та* B *незалежні* $\Leftrightarrow$

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A).$$

б) Нехай $P(A) > 0$. *Події* A *та* B *незалежні* $\Leftrightarrow$

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B).$$

Доведення.

За означенням умовної йм.

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = P(A).$$

$\square$

Теорема (про перетворення незалежних подій)

1. $\forall A \in F$ *не залежить від* Ω *і* $\emptyset$.
2. *Якщо* A *і* B *незалежні, то* A *і* $\overline{B}$ *також незалежні.*
3. *Якщо* A *і* B *незалежні, то* $\overline{A}$ *і* $\overline{B}$ *також незалежні (вправа).*
4. *Якщо* A *не залежить від* B_1 *та* B_2, *причому* $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, *то* A *і* $B_1 \cup B_2$ *також незалежні.*
5. *Якщо* A *не залежить від* B_1 *та* B_2, *причому* $B_1 \subset B_2$, *то* A *і* $B_2 \setminus B_1$ *також незалежні.(вправа)*

Теорема (про перетворення незалежних подій)

1. *$\forall A \in F$ не залежить від Ω і $\emptyset$.*
2. *Якщо A і B незалежні, то A і $\overline{B}$ також незалежні.*
3. *Якщо A і B незалежні, то $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні (вправа).*
4. *Якщо A не залежить від B_1 та B_2, причому $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то A і $B_1 \cup B_2$ також незалежні.*
5. *Якщо A не залежить від B_1 та B_2, причому $B_1 \subset B_2$, то A і $B_2 \setminus B_1$ також незалежні.(вправа)*

Теорема (про перетворення незалежних подій)

1. $\forall A \in F$ *не залежить від* Ω *і* $\emptyset$.
2. *Якщо* A *і* B *незалежні, то* A *і* $\overline{B}$ *також незалежні.*
3. *Якщо* A *і* B *незалежні, то* $\overline{A}$ *і* $\overline{B}$ *також незалежні (вправа).*
4. *Якщо* A *не залежить від* B_1 *та* B_2*, причому* $B_1 \cap B_2 = \emptyset$*, то* A *і* $B_1 \cup B_2$ *також незалежні.*
5. *Якщо* A *не залежить від* B_1 *та* B_2*, причому* $B_1 \subset B_2$*, то* A *і* $B_2 \setminus B_1$ *також незалежні.(вправа)*

Теорема (про перетворення незалежних подій)

1. $\forall A \in F$ *не залежить від* Ω *і* $\emptyset$.
2. *Якщо* A *і* B *незалежні, то* A *і* $\overline{B}$ *також незалежні.*
3. *Якщо* A *і* B *незалежні, то* $\overline{A}$ *і* $\overline{B}$ *також незалежні (вправа).*
4. *Якщо* A *не залежить від* B_1 *та* B_2*, причому* $B_1 \cap B_2 = \emptyset$*, то* A *і* $B_1 \cup B_2$ *також незалежні.*
5. *Якщо* A *не залежить від* B_1 *та* B_2*, причому* $B_1 \subset B_2$*, то* A *і* $B_2 \setminus B_1$ *також незалежні.(вправа)*

Теорема (про перетворення незалежних подій)

1. *$\forall A \in F$ не залежить від Ω і $\emptyset$.*
2. *Якщо A і B незалежні, то A і $\overline{B}$ також незалежні.*
3. *Якщо A і B незалежні, то $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні (вправа).*
4. *Якщо A не залежить від B_1 та B_2, причому $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то A і $B_1 \cup B_2$ також незалежні.*
5. *Якщо A не залежить від B_1 та B_2, причому $B_1 \subset B_2$, то A і $B_2 \setminus B_1$ також незалежні.(вправа)*

Доведення.

1.

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega).$$

З $\emptyset$ аналогічно доводиться.

2.

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Тому A і $\overline{B}$ також незалежні.

4. Якщо A не залежить від B_1 та B_2, причому $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то A і $B_1 \cup B_2$ також незалежні. $\square$

Доведення.

1.

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega).$$

З $\emptyset$ аналогічно доводиться.

2.

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Тому A і $\overline{B}$ також незалежні.

4. Якщо A не залежить від B_1 та B_2, причому $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то A і $B_1 \cup B_2$ також незалежні. $\square$

Доведення.

1.
$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega).$$

З $\emptyset$ аналогічно доводиться.

2.
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) =$$
$$P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Тому A і $\overline{B}$ також незалежні.

4. Якщо A не залежить від B_1 та B_2, причому $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то A і $B_1 \cup B_2$ також незалежні. $\square$

Вправа.

Довести, що подія A не залежить від себе самої

$$\Leftrightarrow \quad P(A) \in \{0, 1\}.$$

Більш загальне поняття незалежності стосується ймовірності одочасної появи декількох подій.

Означення

Випадкові події з послідовності A_k, $k = \overline{1, n}$, називаються попарно незалежними, якщо

$$\forall 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Означення

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають *взаємно незалежними* або *незалежними у сукупності*, якщо для довільного $m \leq n$ та будь-яких індексів $i_1, \ldots, i_m$ ($i_p \neq i_q$ при $p \neq q$ та $1 \leq i_p \leq n$, $p = 1, \ldots, m$)

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{p=1}^{m} A_{i_p}\right) = \prod_{p=1}^{m} \mathbf{P}(A_{i_p}).$$

Вправа. Обчисліть ймовірність об'єднання незалежних у сукупності подій через ймовірності окремих подій.

Зауваження

Із незалежності у сукупності випливає ($\Rightarrow$) попарна незалежність, але не навпаки. Із попарної незалежності НЕ випливає ($\not\Rightarrow$) незалежність у сукупності.

Приклад (Бернштейна.)

Розглянемо правильний тераедр із 4 гранями. Перші 3 пофарбоавно в синій (С), жовтий (Ж) та червоний (Ч) кольори відповідно. Остання грань розподілена на три рівні частини, які теж пофарбовані в С, Ж, Ч.

Тетраедр навмання підкинули і він впав на одну з граней.

Нехай С, Ж, Ч — випадкові події, які полягають у тому, що на нижній грані тетраедра присутній синій, жовтий, червоний кольори відповідно. Показати, що ці події попарно незалежні, але залежні у сукупності.

$$P(C) = P(Ж) = P(Ч) = \frac{1}{2}.$$

$$P(C \cap Ж) = P(C \cap Ч) = P(Ж \cap Ч) = \frac{1}{4}.$$

Отже,

$$P(C \cap Ж) = P(C)P(Ж), \quad P(C \cap Ч) = P(C)P(Ч),$$

$$P(Ж \cap Ч) = P(Ж)P(Ч).$$

Тому події С, Ж, Ч попарно незалежні.

$$P(C) = P(Ж) = P(Ч) = \frac{1}{2}.$$

$$P(C \cap Ж) = P(C \cap Ч) = P(Ж \cap Ч) = \frac{1}{4}.$$

Отже,

$$P(C \cap Ж) = P(C)P(Ж), \quad P(C \cap Ч) = P(C)P(Ч),$$

$$P(Ж \cap Ч) = P(Ж)P(Ч).$$

Тому події С, Ж, Ч попарно незалежні.

$$P(C) = P(Ж) = P(Ч) = \frac{1}{2}.$$

$$P(C \cap Ж) = P(C \cap Ч) = P(Ж \cap Ч) = \frac{1}{4}.$$

Отже,

$$P(C \cap Ж) = P(C)P(Ж), \quad P(C \cap Ч) = P(C)P(Ч),$$

$$P(Ж \cap Ч) = P(Ж)P(Ч).$$

Тому події С, Ж, Ч попарно незалежні.

Розглянемо здійснення трьох подій одночасно:

$$P(C \cap Ж \cap Ч) = \frac{1}{4}.$$

Але

$$P(C)P(Ж)P(Ч) = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Оскільки

$$P(C \cap Ж \cap Ч) \neq P(C)P(Ж)P(Ч),$$

то випадкові події С, Ж, Ч залежні у сукупності.

Зауваження

Надалі, якщо говориться, що послідовність випадкових подій є незалежною, то мається на увазі незалежність у сукупності.

Зміст

Нехай (Ω, F, P)— деякий ймовірнісний простір. Випадкова величина (в.в.) – це функція $\xi = \xi(\omega)$, визначена на Ω, яка відображає множину елементарних подій у множину дійсних чисел **R**. Іноді замість **R** розглядають множину комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Означення

Нехай A – довільна множина дійсних чисел: $A \subseteq R$. Визначимо множину

$$\xi^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\},$$

яка є підмножиною множини Ω. Множину $\xi^{-1}(A)$ називають *прообразом множини A* (при відображенні ξ).

Нехай $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ — борелівська σ-алгебра, задана на $\mathbf{R}$.

Означення

Якщо $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ для довільної борелівської множини A, то функцію $\xi(\omega)$ називають вимірною.

Означення

Скінченну дійснозначну вимірну функцію називають *випадковою величиною* (в.в.).

Означення (Еквівалентне визначення в.в.)

Дійсна скін. функція $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ називається випадковою величиною, якщо

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in F.$$

Приклад

Простим прикладом в.в. є індикаторна функція події $B \in \mathcal{F}$:

$$\mathbf{I}_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{коли } \omega \in B; \\ 0, & \text{коли } \omega \notin B. \end{cases}$$

Приклад

2 рази підкидається симетрична монета. В.в. ξ — число появ герба.

$$\xi(\omega) = \xi = \begin{cases} 0, & \text{коли } \omega = \omega_1 = PP; \\ 1, & \text{коли } \omega \in \{\omega_2, \omega_3\} = \{\text{ГР, РГ}\} \\ 2, & \text{коли } \omega = \omega_4 = \text{ГГ}. \end{cases}$$

$$\xi : \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \to \{0, 1, 2\} \subset \mathbf{R}.$$

Приклад

Задача про зустріч.

$$\Omega = \{\omega = (x, y) | 0 \leq x, y \leq T\}.$$

В.в. ξ описує час очікування у цій задачі. Тоді в.в.

$$\xi : \Omega \to [0, T] \subset \mathbf{R}, \quad \xi(\omega) = \xi = |x - y|.$$

Приклад

Задача про зустріч.

$$\Omega = \{\omega = (x, y) | 0 \le x, y \le T\}.$$

В.в. ξ описує час очікування у цій задачі. Тоді в.в.

$$\xi : \Omega \to [0, T] \subset \mathbf{R}, \quad \xi(\omega) = \xi = |x - y|.$$

Означення

Функцією розподілу (ф.р.) в.в. ξ називається

$$F_\xi(x) = F(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}) = P\{\xi \le x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Приклад

Для в.в. ξ з прикладу про підкидання монети 2р. знайдемо ф.р. $F(x)$:

$$\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{коли } x < 0; \\ \{\omega_1\}, & \text{коли } x \in [0,1) \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, & \text{коли } x \in [1,2) \\ \Omega, & \text{коли } x \ge 2. \end{cases}$$

Приклад

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0; \\ \frac{1}{4}, & \text{коли } x \in [0, 1) \\ \frac{3}{4}, & \text{коли } x \in [1, 2) \\ 1, & \text{коли } x \geq 2. \end{cases}$$

Вправа. Запишіть функцію розподілу для часу очікування в задачі про зустріч.

Зміст

Означення

В.в. ξ називається дискретною, якщо

$$\xi : \Omega \to \{x_1, x_2, \cdots\} := X, \quad x_n \in \mathbf{R} - \text{різні.}$$

Теорема

ξ *є д.в.в.* $\Leftrightarrow \forall n \geq 1$, $\{\omega : \xi(\omega) = x_n\} \in F$.

Доведення.

$\Rightarrow$ Нехай ξ—в.в. $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R} \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in F$. Тоді

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) \leq x - \frac{1}{n}\} \in F.$$

$\Leftarrow \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} = \bigcup_{n: x_n \leq x} \{\xi = x_n\} \in F.$ $\square$

Позначимо $B_j = \{\omega \colon X(\omega) = x_j\}$, $j \geq 1$. Події $B_1, B_2, \ldots$, такі, що $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ та $\bigcup\limits_j B_j = \Omega$. Тоді саму д.в.в. ξ можна подати у вигляді

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_j x_j \mathbf{I}_{B_j}(\omega).$$

Зауважимо, що властивості подій B_j гарантують, що для кожного ω в останній сумі лише один індикатор відмінний від нуля.

Позначимо $p_i = \mathbf{P}(B_i)$.

Означення

Набір $\{(x_i, p_i)\}_{i\geq 1}$ називають *законом розподілу ймовірностей* чи просто *розподілом* дискретної в.в. ξ.

ξ	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$

Зауваження

Для значень p_i, $i \geq 1$,мають міце такі властивості:

- $p_i \geq 0$,
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Зміст

Розподіл Бернуллі

Означення

В.В. ξ має розподіл Бернуллі з параметром p, $p \in (0, 1)$, якщо вона приймає тільки два значення: 1 та 0 з ймовірностями p, $1 - p = q$ відповідно.

ξ	0	1
P	q	p

$$p + q = 1, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

Позначення. $\xi \sim Be(p)$.

Біноміальний розподіл

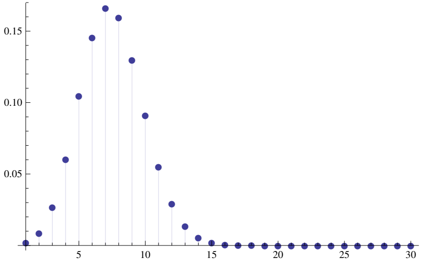
Означення

Кажуть, що в.в. ξ має біноміальний розподіл з параметрами n та p, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$,якщо

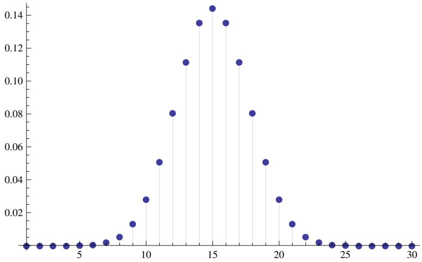
$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad 0 < p < 1.$$

Позначення. $\xi \sim Bi(n, p)$.

Біноміальний розподіл



$n = 30,\ p = \frac{1}{4}$



$n = 30,\ p = \frac{1}{2}$

Рис. Біноміальні розподіли

Геометричний розподіл

Означення

В.в. ξ має геометричний розподіл з параметром p, $p \in (0,1)$, якщо

$$P\{\xi = k\} = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Приклад

У послідовності Бернуллі ξ — число випробувань до першого успіху.

Означення

(альтернативне означення) В.в. ξ має геометричний розподіл з параметром p, $p \in (0,1)$, якщо

$$P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \cdots$$

Геометричний розподіл

Позначення. $\xi \sim Ge(p)$

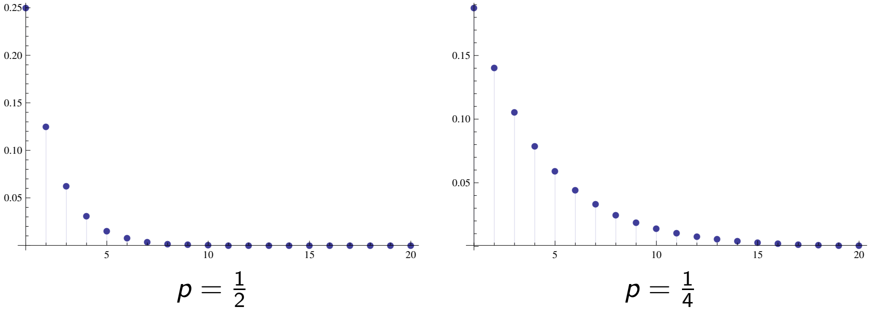


Рис. Геометричні розподіли

Геометричний розподіл

Означення

Нехай ξ —д.в.в. Кажуть, що для ξ виконується власт. відсутності післядії, якщо

$$P\{\xi = n + m | \xi \geq n\} = P\{\xi = m\}, \quad n \geq 0,\ m \geq 1$$

Теорема

Серед усіх дискретних розподілів властивість відсутності пісдяії має геометричний розподіл.

Доведення.

Вправа. $\square$

Гіпергеометричний розподіл

Означення

В.в. має гіпергеометричний розподіл, якщо

$$P\{\xi = m\}\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \cdots, \min\{m, M\}, \quad n \leq N$$

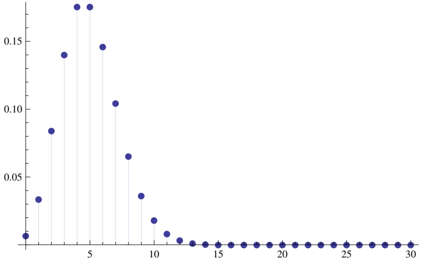
Розподіл Пуассона

Цей розподіл моделює кількість подій, які сталися протягом зазначеного проміжку часу, коли події відбуваються одна за одною за певним правилом. Це правило передбачає, що події здійснюються окремо, зі сталою інтенсивністю, а кількості подій, які відбулися на неперетинних проміжках часу, є незалежними між собою.

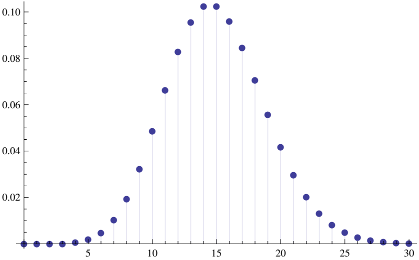
В.в. ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо

$$\mathsf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Позначення. $\xi \sim \Pi(\lambda)$.



$\lambda = 5$



$\lambda = 15$

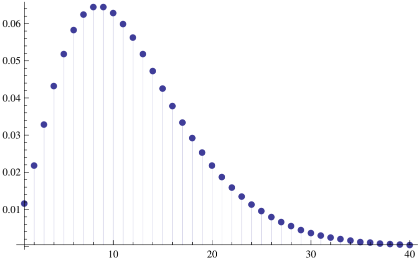
Рис. Розподіли Пуассона

Від'ємний біноміальний розподіл

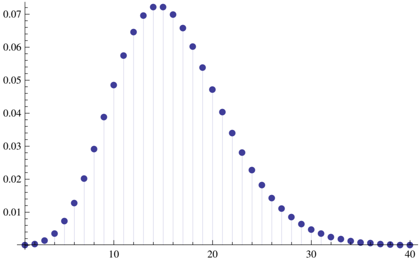
Цей розподіл є узагальненням геометричного. Нехай в.в. ξ – номер того випробування, на якому відбувся k-й успіх, де k – натуральне число. Тоді розподіл ξ такий:

$$\mathbf{P}(\xi = j) = C_{j-1}^{k-1} p^k (1-p)^{j-k}, \quad j = k, k+1, \ldots, \quad 0 < \theta < 1.$$

Зокрема, при $k = 1$ в.в. ξ має геометричний розподіл.



$k = 4,\ p = \frac{1}{4}$



$k = 10,\ \theta = \frac{1}{2}$

Рис. Від'ємні біноміальні розподіли

Зміст

Означення

Послідовністю з n випробувань Бернуллі називається послідовність з n випробувань (експерименів) з властивостями

1. кожне випробування дихотомічне — закінчується одним з двох результатів: УСПІХ(У, 1) - НЕУСПІХ (Н, 0);
2. ймовірність У не залежить від номера випробування;
3. незалежність у сукупності.

Нехай p, $p \in (0, 1)$ —ймовірність успіху в одному випробуванні. Тоді $q = 1 - p$ — ймовірність невдачі.
Побудуємо схему незалежних випробувань Бернуллі. Для цього потрібно задати (Ω, F, P).
Часто настання успіху позначають одиничкою, а невдачу нулем, тоді простір елементарних подій Ω такого експерименту є n -мірний вектор з нулів та одиниць. Очевидно, що $|\Omega| = 2^n$, а оскільки множина Ω є скінченною, то за σ-алгебру беруть множину всіх її підмножин (булеан).

А ймовірність визначають так: $\forall A \in \mathbf{R}$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} p^{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n} \omega_i},$$

бо кожен елементарний наслідок $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ складається саме з $\sum_{i=1}^{n} \omega_i$ успіхів (одиничок) і саме $n - \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ невдач (нулів). Побудовану таким чином скінченну ймовірносну схему (Ω, F, P) називають схемою незалежних випробувань Бернуллі з параметрами n та p.

Позначимо через ξ— в.в., яка дорівнює к-сті успіхів в n випробуваннях Бернуллі. Тоді $\xi \in \{0, 1, 2 \cdots, n\}$

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

Тоді ймовірність того, що в цій схемі відбулося рівно k успіхів (це так звана біноміальна ймовірність), дорівнює

$$P\{\xi = k\} = p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Позначимо через ξ— в.в., яка дорівнює к-сті успіхів в n випробуваннях Бернуллі. Тоді $\xi \in \{0, 1, 2 \cdots, n\}$

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

Тоді ймовірність того, що в цій схемі відбулося рівно k успіхів (це так звана біноміальна ймовірність), дорівнює

$$P\{\xi = k\} = p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Приклад

Нехай деяка комаха з йм. $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ кладе к яєць, а йм. розвитку комахи з яйця дорівнює p. Припускаючи взаємну незалежність розвитку яєць, знайти йм. того, що лу комахи буде рівно n нащадків.

Теорема (Про найбільш ймовірну кількість успіхів у схемі Бернуллі)

Розглядається схема незалежних випробувань Бернуллі з параметрами n, p.

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

- *Нехай* $(n+1)p$ *не є цілим. Тоді із зміною* k *від 0 до* n *ймовірність* $p_n(k)$ *спочатку зростає, а потім спадає, досягаючи свого макс. значення при* $k = m = [(n+1)p]$.
- *Якщо* $(n+1)p \in Z$, *то* $p_n(m) = p_n(m-1)$ *та при* $k < m-1$ $p_n(k) \uparrow$, *а* $k > m$ $p_n(k) \downarrow$.

Доведення

$$\frac{p_n(k)}{p_n(k-1)} = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} =$$

$$\frac{(n = k+1)p}{kq} = 1 + \frac{np - kp + p - kq}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}.$$

Тоді при $k \leq [(n+1)p]$

$$\frac{p_n(k)}{p_n(k-1)} > 1 \quad \Rightarrow p_n(k) \uparrow .$$

При $k > [(n+1)p]$

$$\frac{p_n(k)}{p_n(k-1)} < 1 \quad \Rightarrow p_n(k) \downarrow .$$

Тому максимальна йм. досягається при $m = [(n+1)p]$.

Доведення

Якщо $m = (n+1)p$ —ціле, то

$$k < m \quad \Rightarrow p_n(k) \uparrow .$$

При $k > m$

$$\frac{p_n(k)}{p_n(k-1)} < 1 \quad \Rightarrow p_n(k) \downarrow .$$

Якщо $k = m$, то

$$\frac{p_n(m)}{p_n(m-1)} = 1 \Rightarrow p_n(m) = p_n(m-1),$$

тому макс. йм. досягається в двох точках, а саме $m = (n+1)p$ і $m-1$.

Приклад

Вважається, що йм. взяття пенальті воротарем дорівнює p. Яка йм. того, що воротар візьме в пенальті хоча б один м'яч з п'яти? При $p = \frac{1}{5}$ і $p = \frac{1}{6}$ знайти найбільш ймовірне число взятих пенальті та обчслити їх ймовірність.

Нехай в.в.ξ — число взятих пенальті, тоді

$$P\{\xi \geq 1\} = 1 - P\{\overline{\xi \geq 1}\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - (1-p)^5$$

або

$$P\{\xi = 0\} = p_5(0) = C_5^0 p^0 (1-p)^5.$$

Приклад

Вважається, що йм. взяття пенальті воротарем дорівнює p. Яка йм. того, що воротар візьме в пенальті хоча б один м'яч з п'яти? При $p = \frac{1}{5}$ і $p = \frac{1}{6}$ знайти найбільш ймовірне число взятих пенальті та обчслити їх ймовірність.

Нехай в.в.ξ — число взятих пенальті, тоді

$$P\{\xi \geq 1\} = 1 - P\{\overline{\xi \geq 1}\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - (1-p)^5$$

або

$$P\{\xi = 0\} = p_5(0) = C_5^0 p^0 (1-p)^5.$$

- Якщо $p = \frac{1}{5}$, то $m = (n+1)p = \frac{6}{5} = 1,2$. Тому для воротаря найбільш ймовірно взяти один м'яч з ймовірністю

$$P\{\xi = 1\} = p_5(1) = C_5^1 \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0,4096.$$

- Якщо $p = \frac{1}{6}$, то $m = (n+1)p = \frac{6}{6} = 1$. Тому для воротаря найбільш ймовірно взяти або один м'яч, або жодного з ймовірністю

$$P\{\xi = 1\} = P\{\xi = 0\} = C_5^1 \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,4019.$$

ПИТАННЯ?