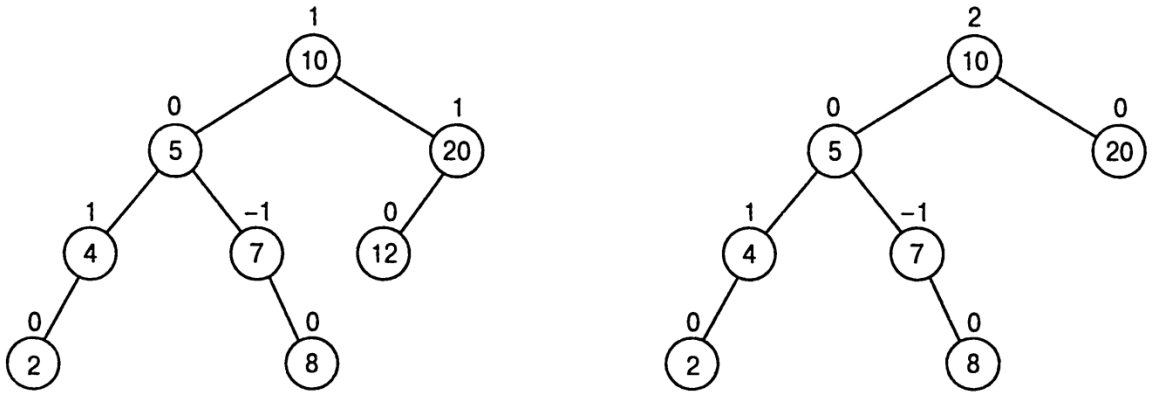
Алгоритми та складність

II семестр

Лекція 3

АВЛ-дерева

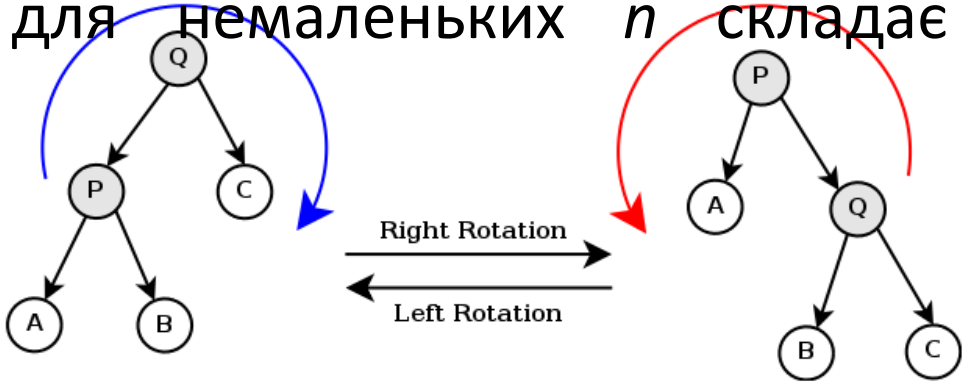
- Адельсон-Вельський Георгій Максимович, Ландіс Євген Михайлович (1962 р.)
- Бінарне дерево пошуку, збалансоване по висоті: для кожної вершини висота її двох піддерев відрізняється не більше ніж на 1.
- Висота порожнього дерева рівна -1.
- Вводиться додаткове поле для значення балансу вершини (або висоти піддерева).



а) б)

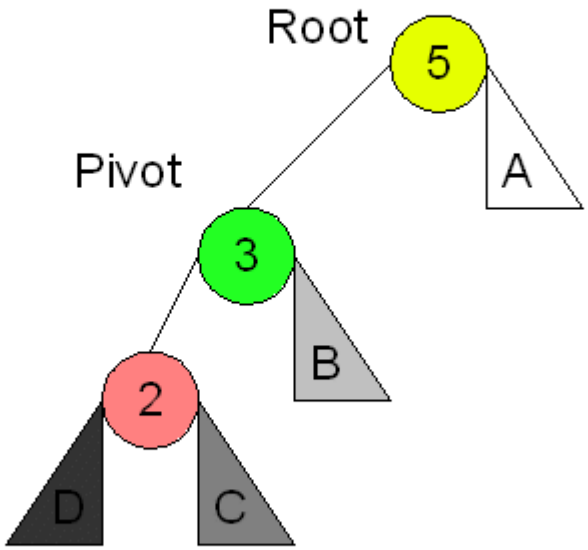
АВЛ-дерева

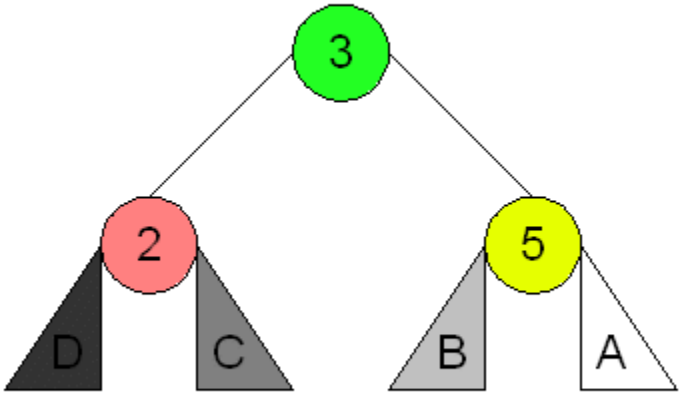
- Висота АВЛ-дерева з n вузлів обмежена знизу $\lfloor \log_2 n \rfloor$ і не перевищує $\log_\varphi(\sqrt{5}(n+2)) - 2 \approx 1.44 \log_2(n+2) - 0.328$, де φ – золотий перетин.
- Експериментально показано, що середня висота АВЛ-дерева з n вузлів для немаленьких n складає $1.011 \log_2 n + 0.1$.
- Операції вставки та видалення вузла займають час O(lg n), причому при відновленні балансу може відбутися до O(lg n) обертань.



АВЛ-дерева

Left Left Case

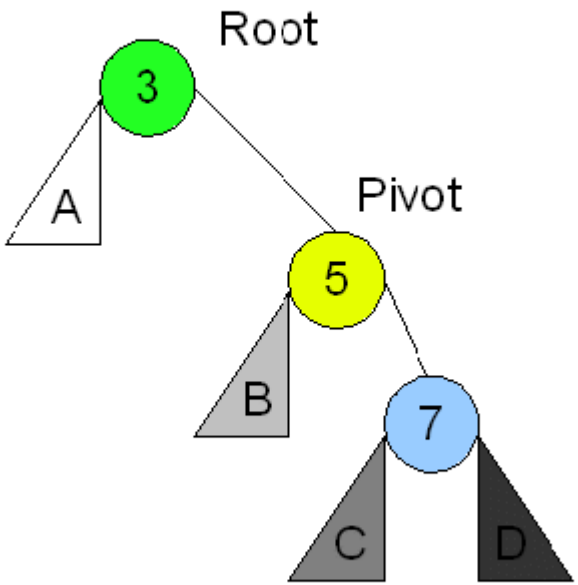


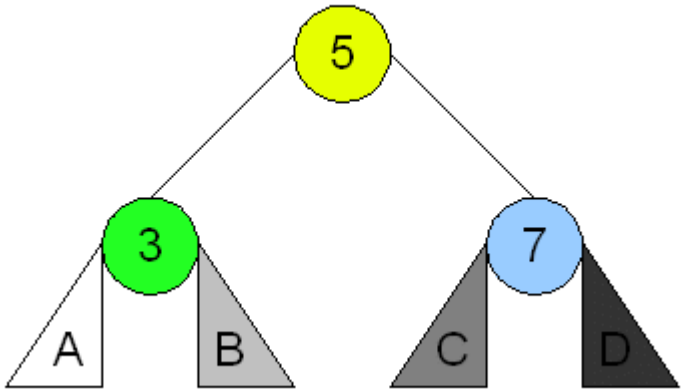


Right Rotation

АВЛ-дерева

Right Right Case

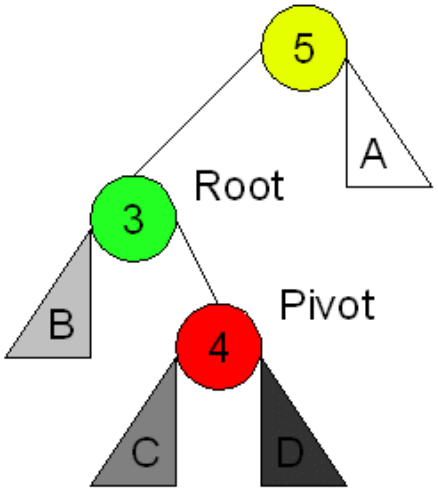




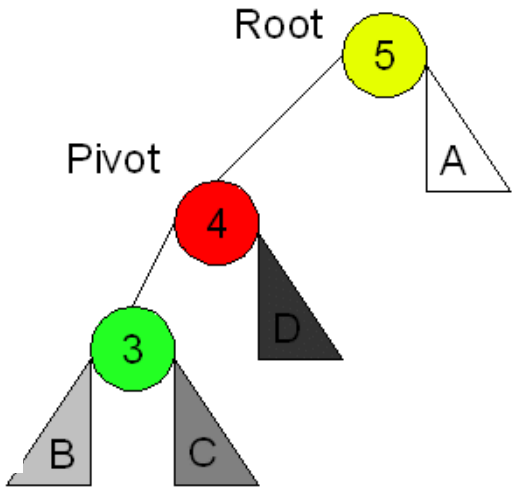
Left Rotation

АВЛ-дерева

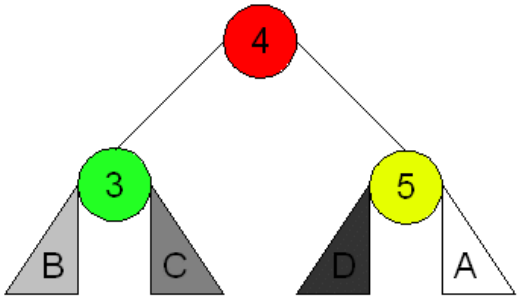
Left Right Case



Left Rotation

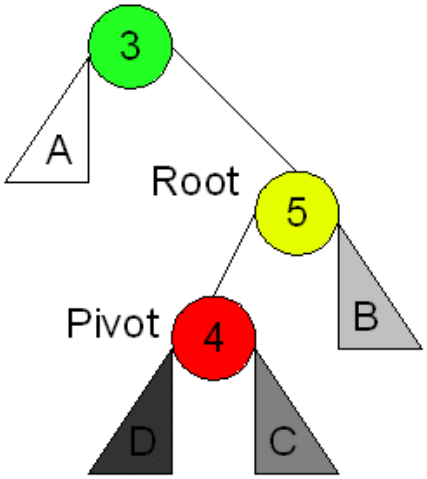


Right Rotation

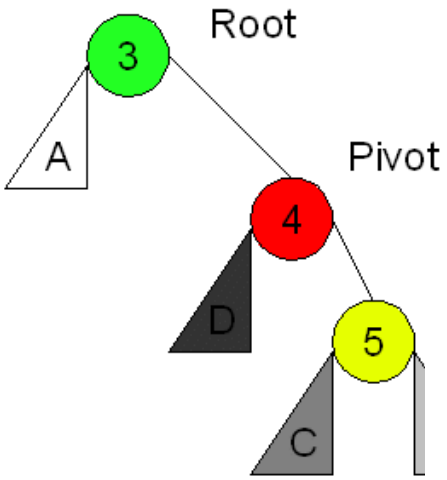


АВЛ-дерева

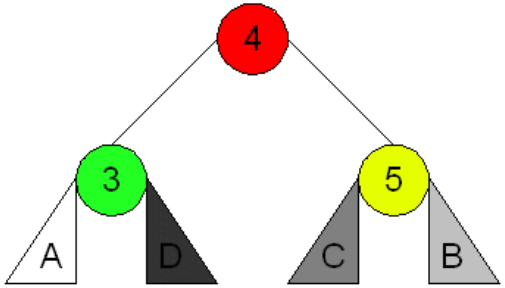
Right Left Case



Right Rotation



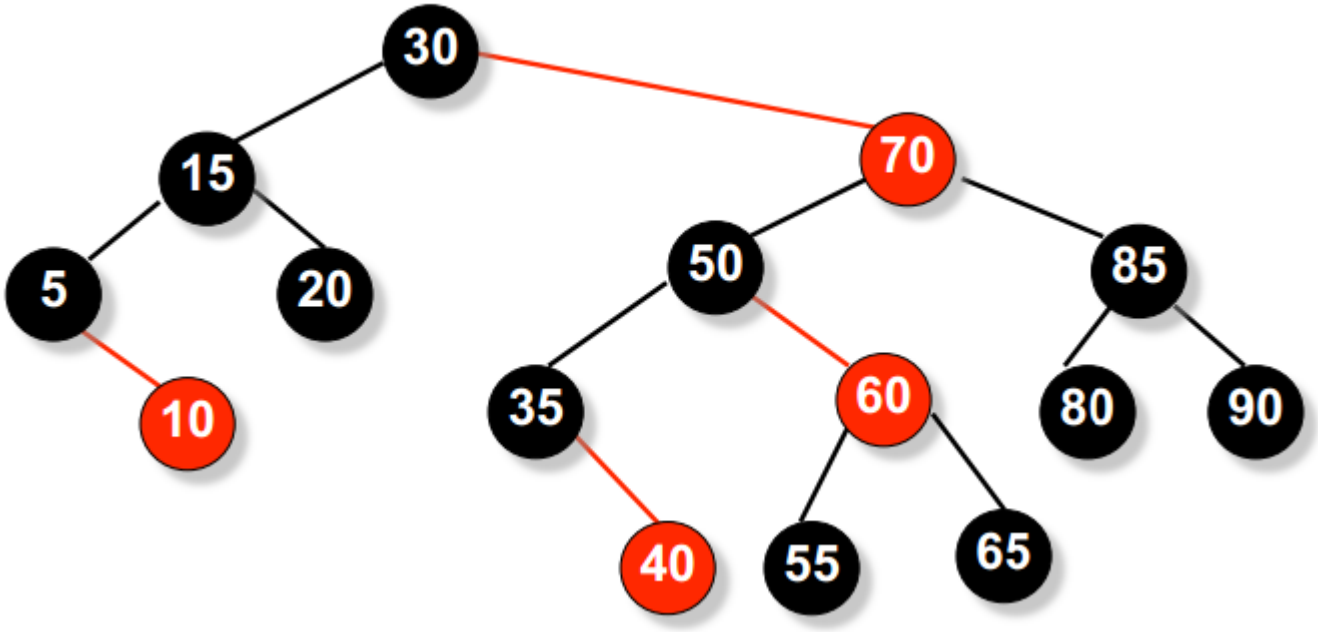
Left Rotation



AA-дерева

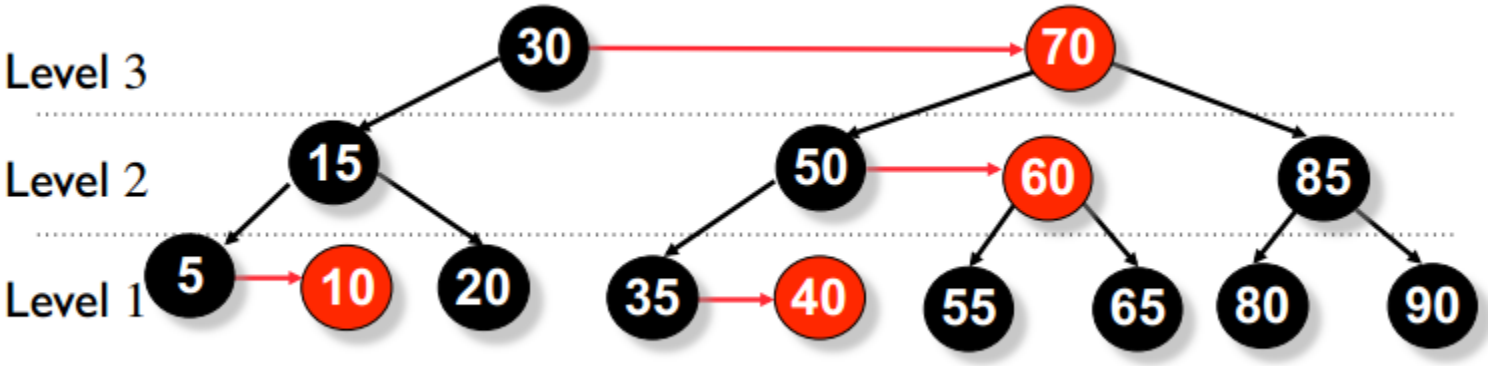
- AA = Arne Andersson (1993).
- Варіація червоно-чорного дерева: червоні вершини можуть бути лише правими потомками.
- *Рівень* вершини: збільшується від листів до кореня; рівень листа 1.
- *Коротке правило AA-дерева*: до однієї вершини можна приєднати іншу вершину того ж рівня лише одну і тільки справа.
- Для балансування використовуються дві операції: SKEW (перекрут) та SPLIT (розбиття).
- Всі операції потребують часу O(lg *n*).

AA-дерева



Приклад AA-дерева

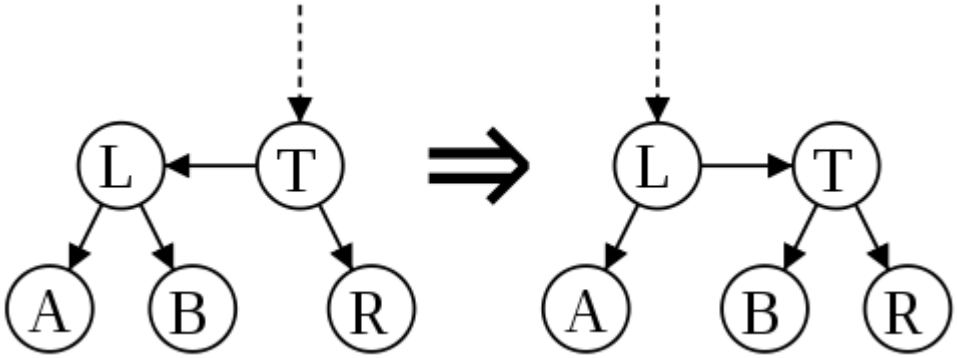
AA-дерева



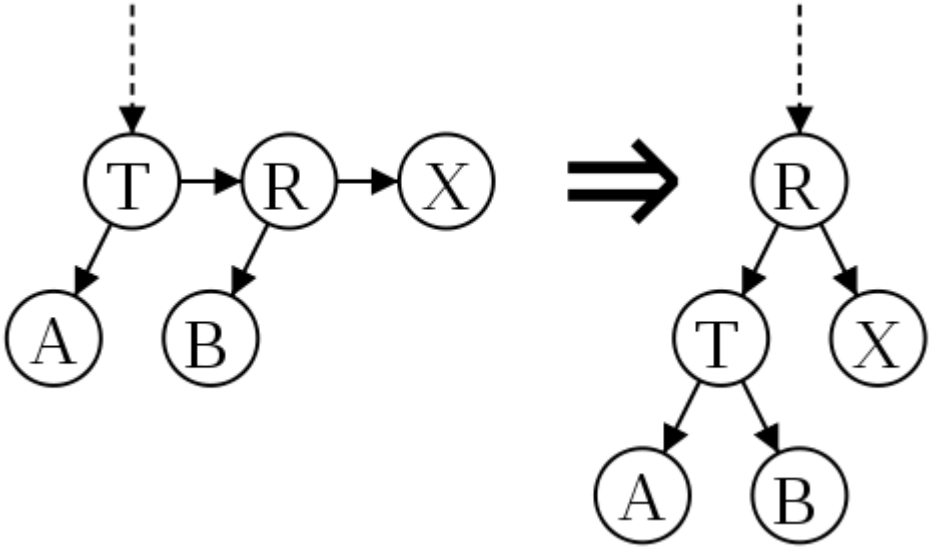
- З’являється поняття рівня і напрямку зв’язку (правий-лівий).
- Зв’язки можуть бути вертикальні і горизонтальні.

AA-дерева

- SKEW (усунення лівого зв’язку на одному рівні)



- SPLIT (усунення двох правих зв’язків на одному рівні).



AA-дерева

Додавання вузла

- Після звичайного додавання вершини піднімаємося вгору, виконуючи для кожного вузла SKEW, а потім SPLIT.

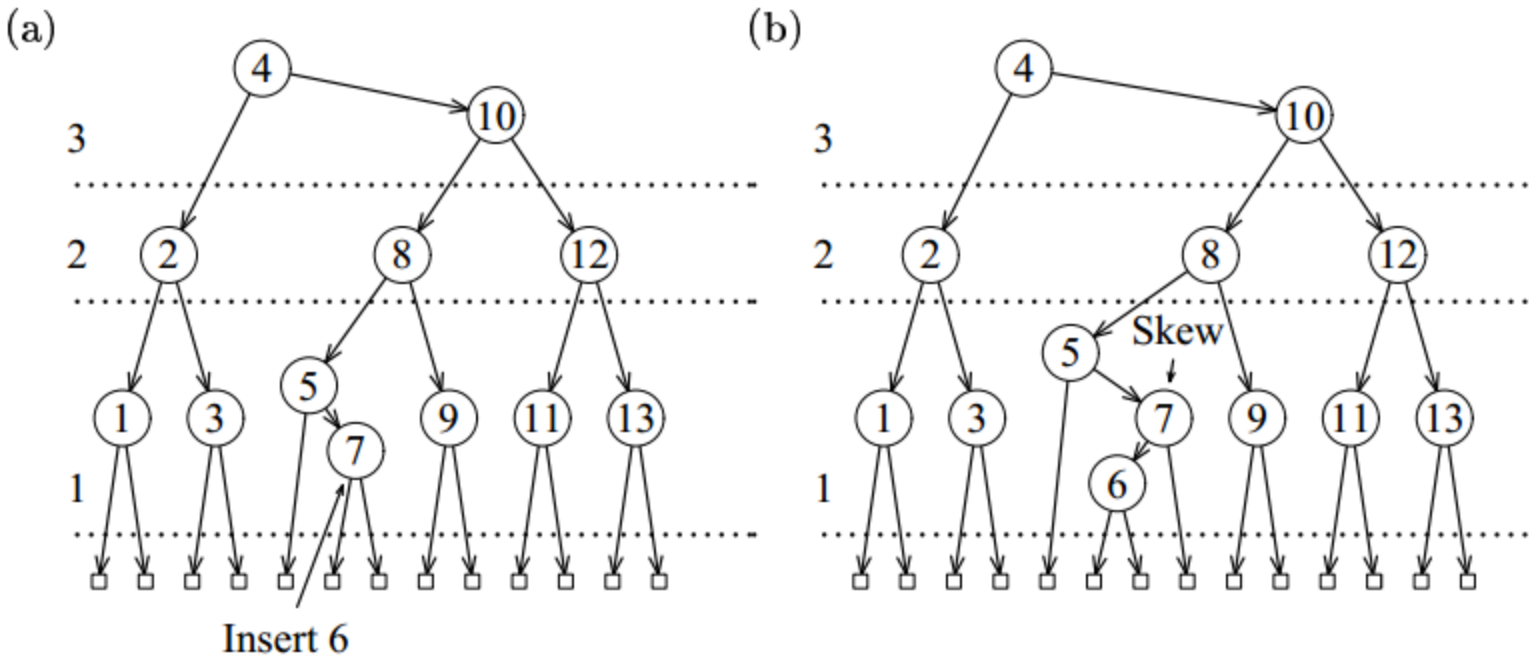
Видалення вузла

- Після видалення листа при русі вгору спочатку за необхідності відбувається пониження рівня, потім тричі викликається SKEW і двічі SPLIT:

```
T := decrease_level(T)
T := skew(T)
right(T) := skew(right(T))
right(right(T)) := skew(right(right(T)))
T := split(T)
right(T) := split(right(T))
```

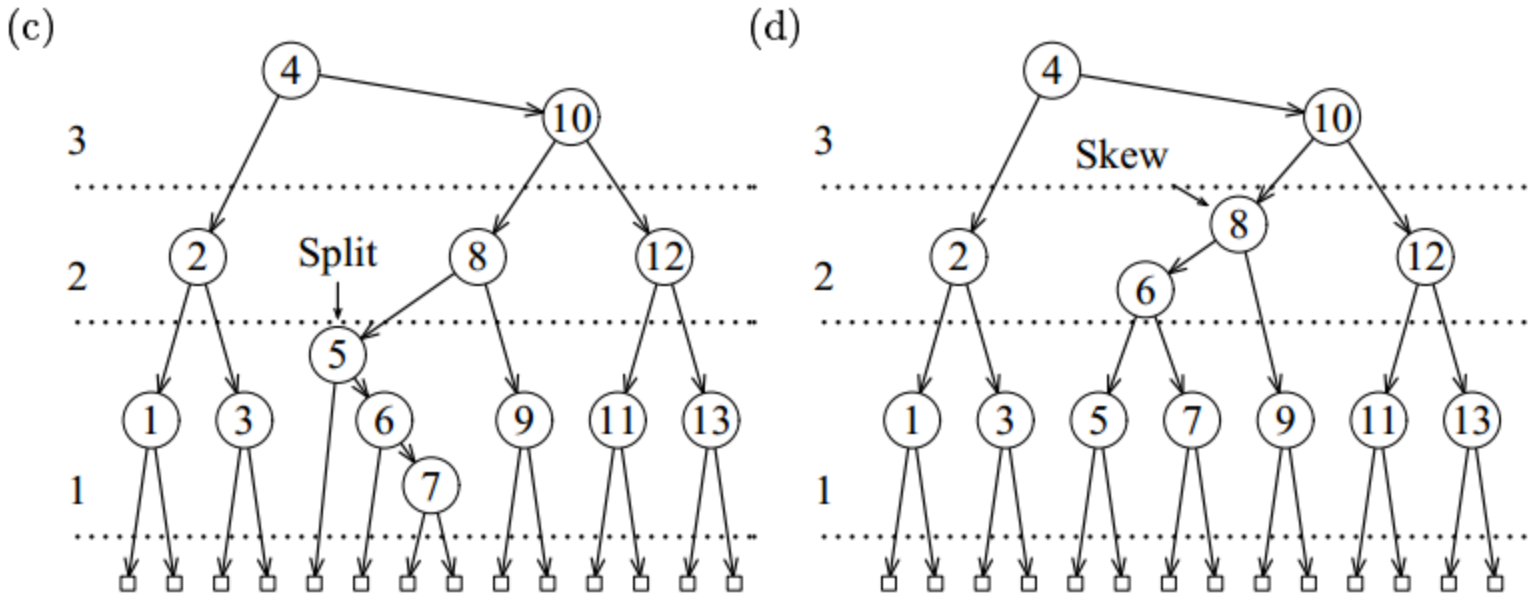
AA-дерева

Додавання вузла



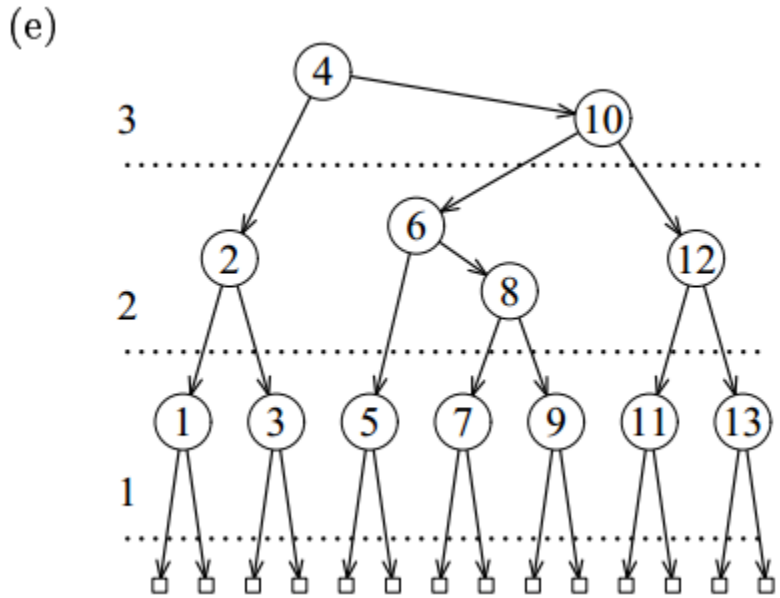
AA-дерева

Додавання вузла



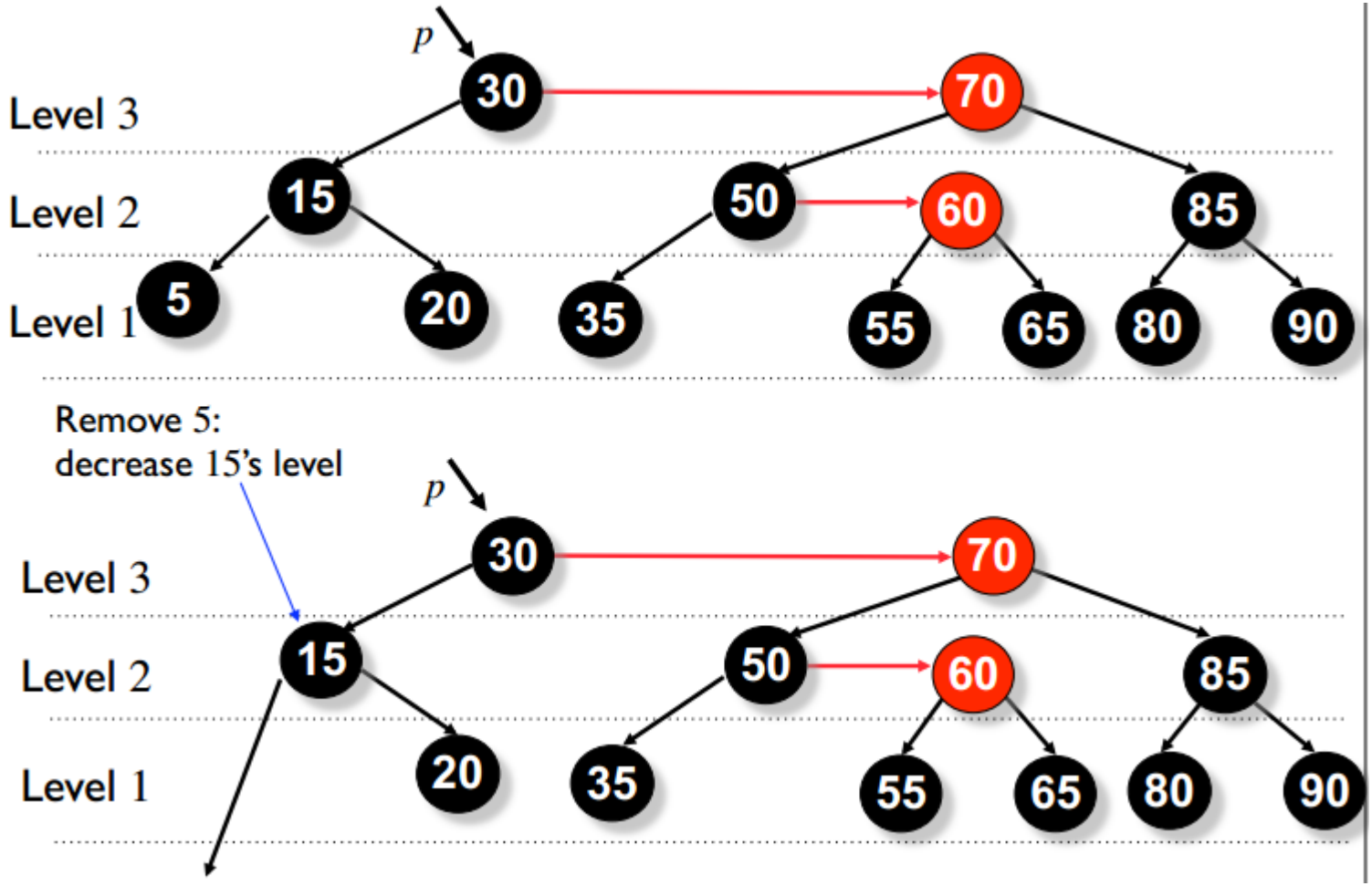
AA-дерева

Додавання вузла



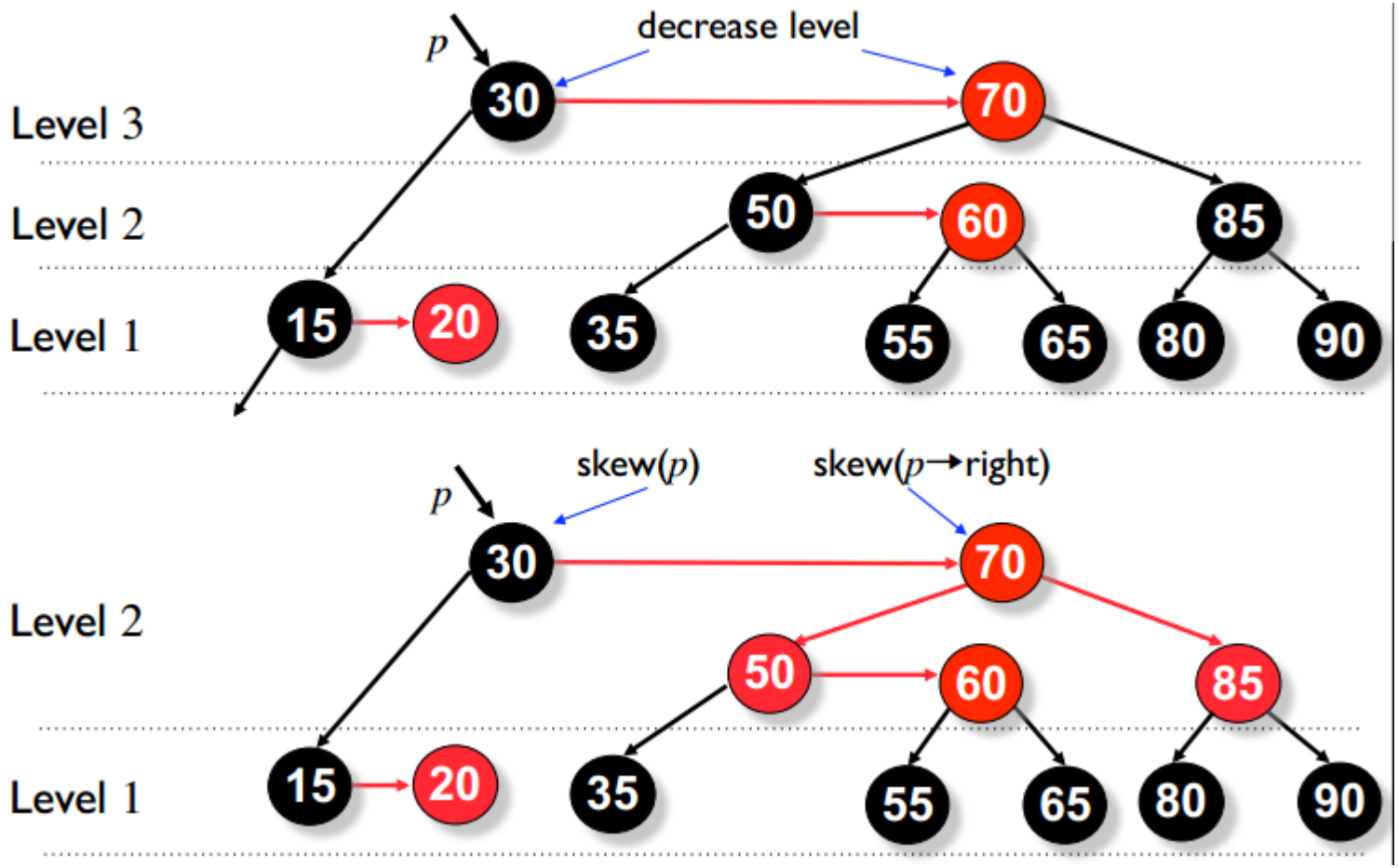
AA-дерева

Видалення вузла



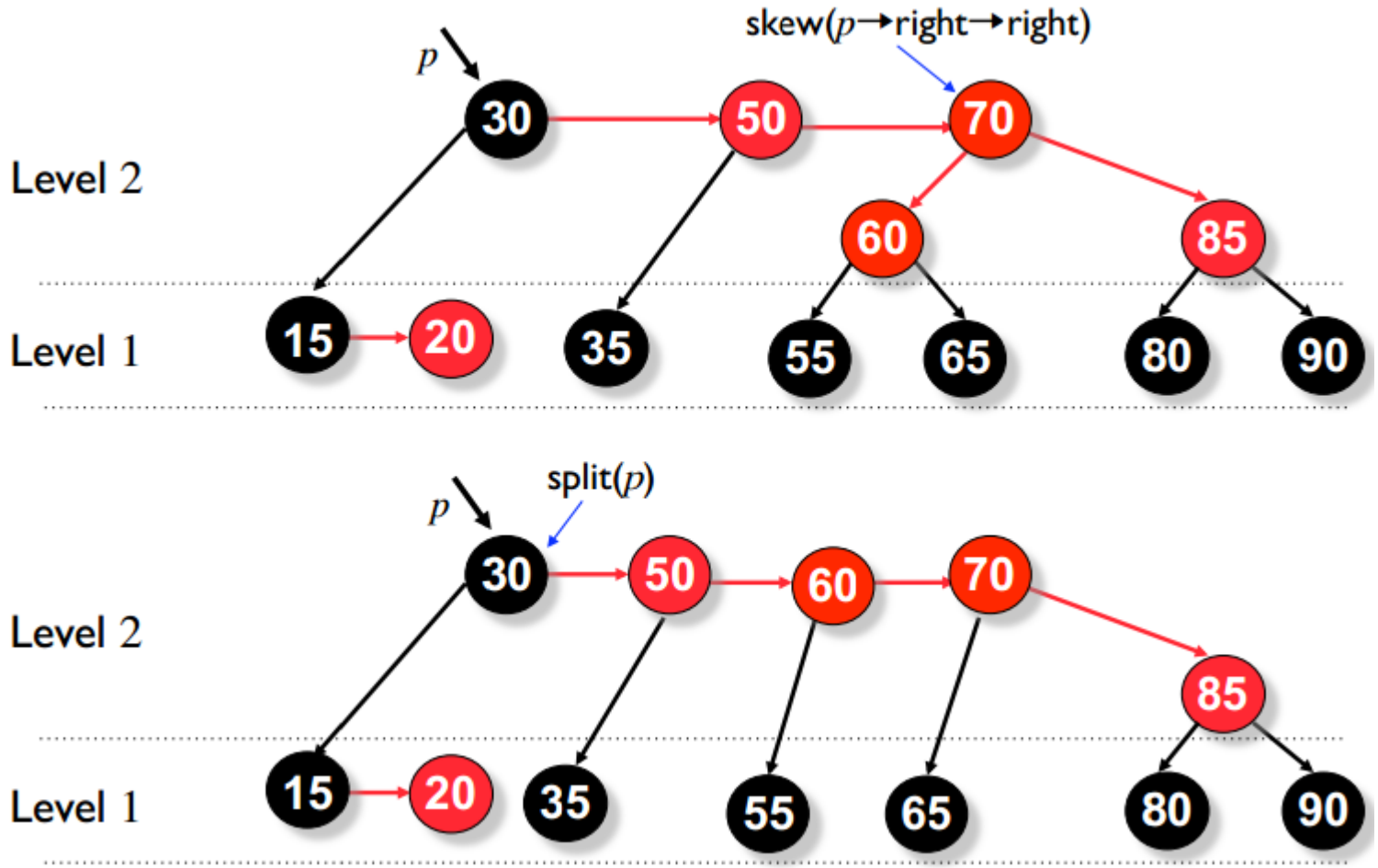
AA-дерева

Видалення вузла



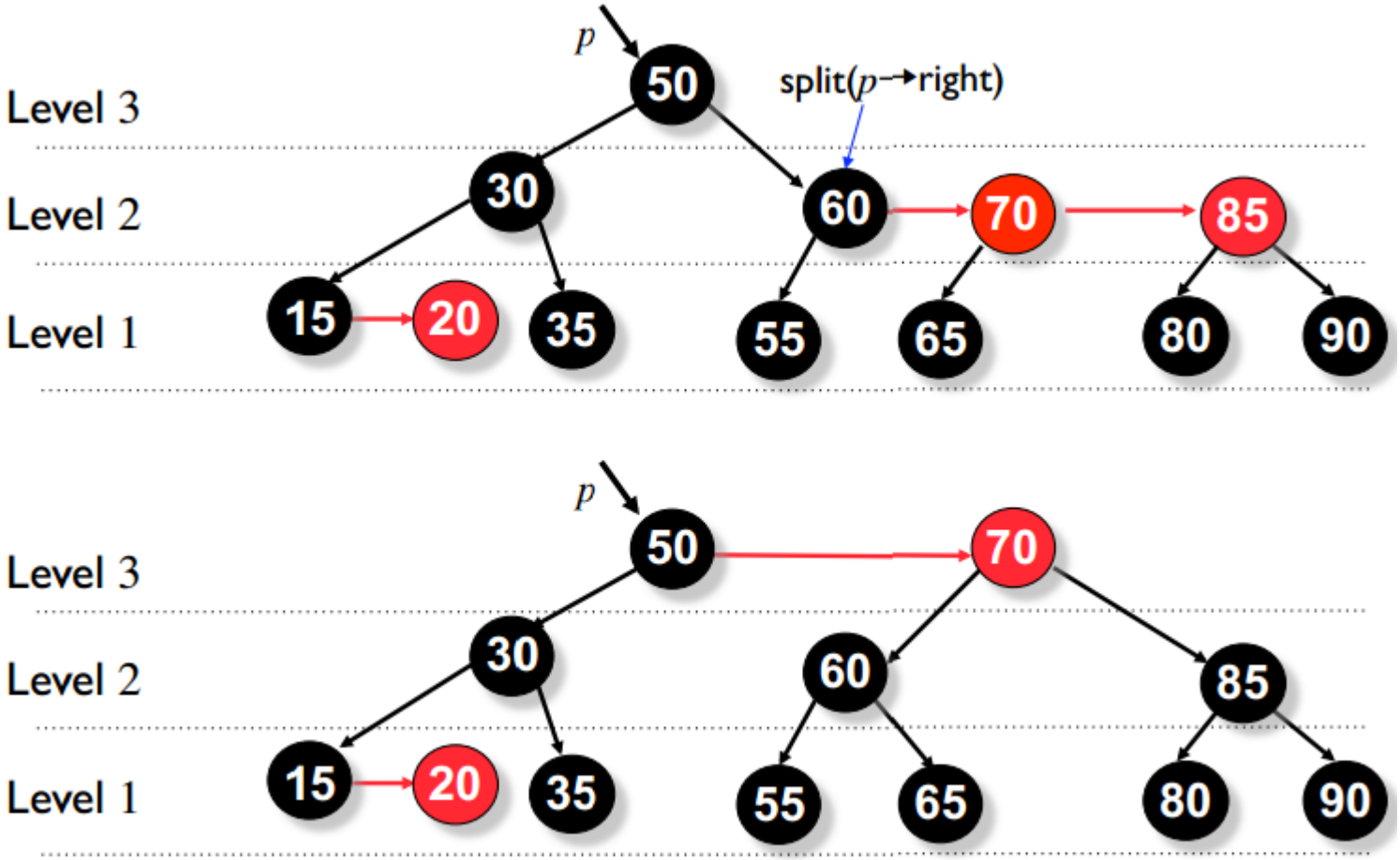
AA-дерева

Видалення вузла



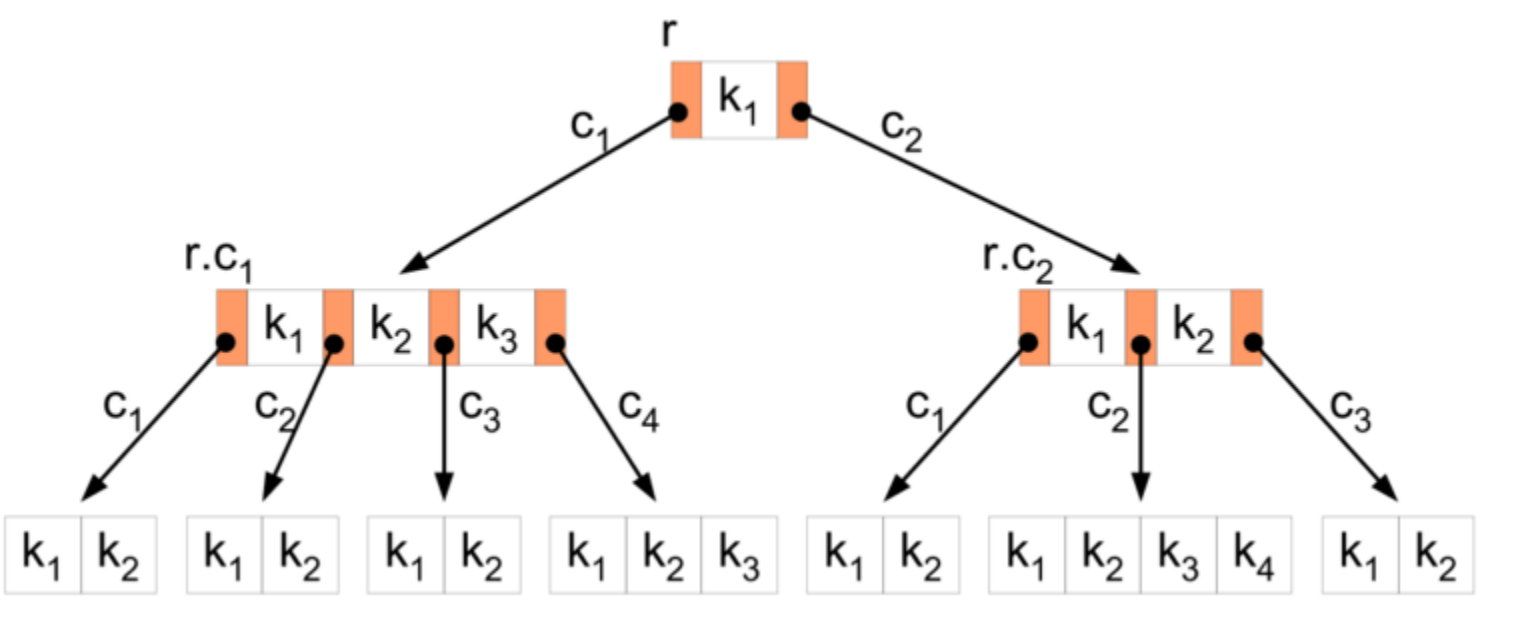
AA-дерева

Видалення вузла



B-дерева

- Дерево пошуку, збалансоване по висоті.
- Кожен вузол може мати від 2 до *m* потомків для дерева порядку *m*.
- Основні операції виконуються за час O(lg *n*).
- 2-3 дерева – частковий випадок B-дерев.



Приклад B-дерева

Розширювані дерева (splay trees)

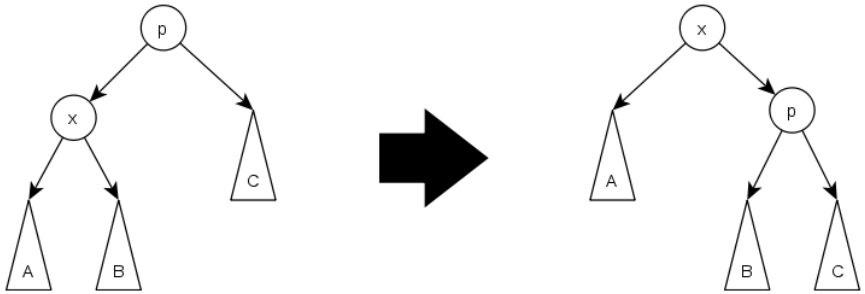
- Двійкове дерево пошуку з підтримкою збалансованості.
- Не потребує додаткових полів у вузлі.
- Явні функції балансування відсутні.
- При кожному звертанні до дерева виконується «операція розширення» (splay operation).
- В результаті вузли, до яких звертаються частіше, зберігаються ближче до кореня, а до яких рідше – ближче до листків.
- Всі операції потребують часу в середньому $O(\lg n)$.

Розширювані дерева (splay trees)

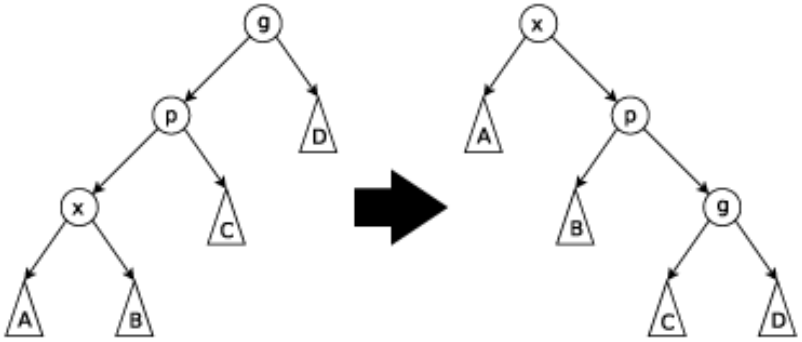
Операція SPLAY

Переміщує вершину x в корінь за допомогою операцій *Zig*, *Zig-Zig* та *Zig-Zag*.

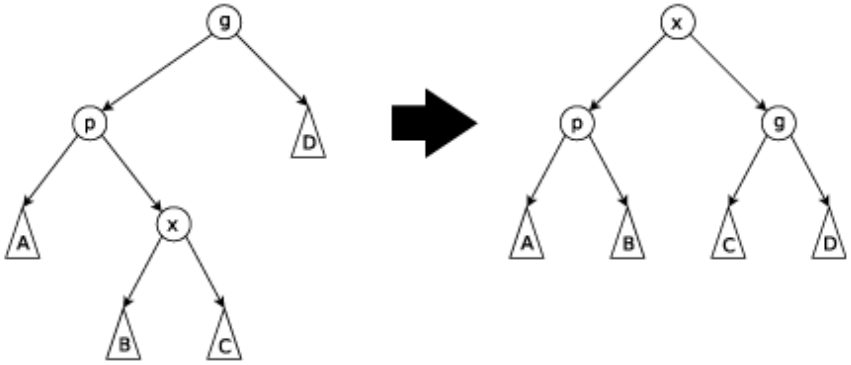
- *Zig*



- *Zig-Zig*



- *Zig-Zag*



Розширювані дерева (splay trees)

- *Merge* (об'єднання двох дерев). Для злиття дерев T1 і T2, в яких всі ключі T1 менше ключів в T2, робимо Splay для максимального елементу T1, тоді біля кореня T1 не буде правого дочірнього елемента. Після цього робимо T2 правим дочірнім елементом T1.
- *Split* (розділення дерева на дві частини). Для розділення дерева знаходиться найменший елемент, більший або рівний x і для нього робиться Splay. Після цього відрізаємо ліве піддерево у якості другого дерева.

Розширювані дерева (splay trees)

- *Search* (пошук елемента). Спочатку звичайний пошук. При знаходженні елементу запускаємо Splay для нього.
- *Insert* (додавання елемента). Запускаємо Split від елементу, що додається, і підвішуємо дерева, що вийшли, за нього.
- *Delete* (видалення елемента). Знаходимо елемент в дереві, робимо Splay для нього, робимо поточним деревом Merge його дітей.

Декартові дерева (treaps)

- Tree + Heap = Treap

Декартові дерева (treaps)

- Tree + Heap = Treap
- Дерево + Піраміда = Дераміда

Декартові дерева (treaps)

- Tree + Heap = Treap
- Дерево + Піраміда = Дераміда
- Купа + Дерево = Курево

Декартові дерева (treaps)

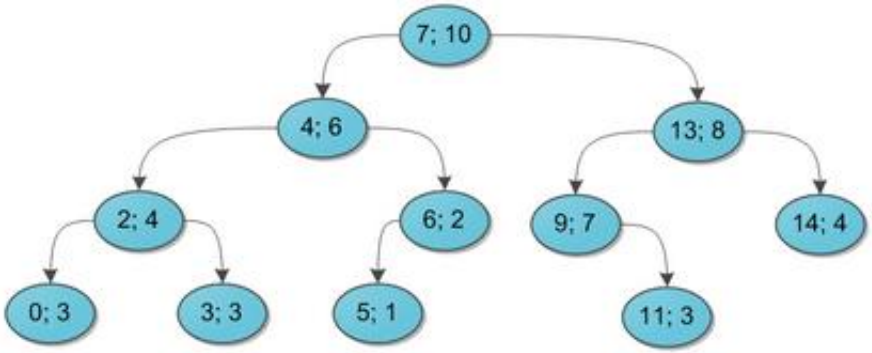
- Tree + Heap = Treap
- Дерево + Піраміда = Дераміда
- Купа + Дерево = Курево
- Дерево + Купа = ?

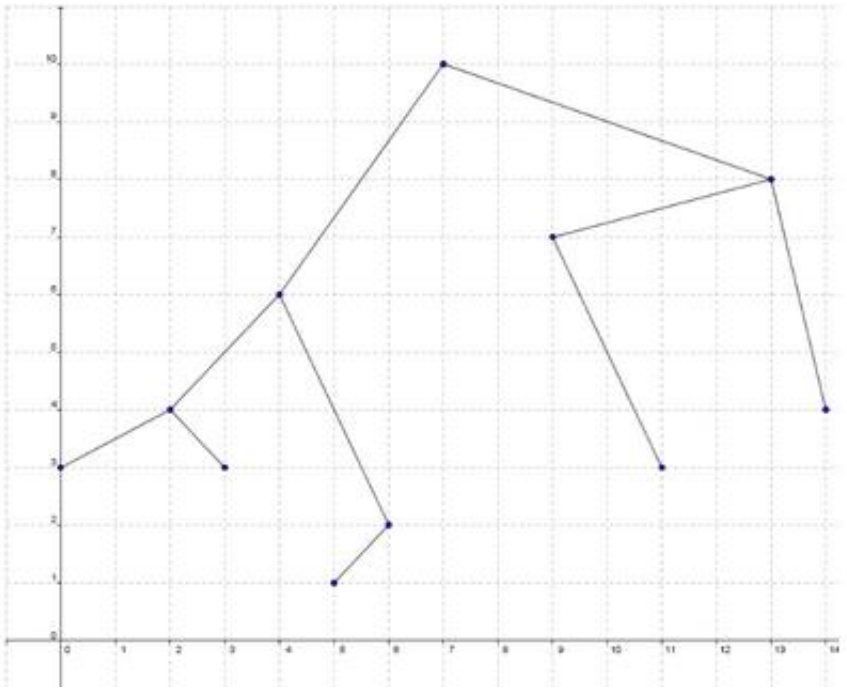
Декартові дерева (treaps)

- Поєднує в собі бінарне дерево пошуку і купу.
- Вузол містить значення *ключа* та *пріоритету*.
- Структура є деревом пошуку за ключами та купою (пірамідою) за пріоритетами.
- Ключі можуть повторюватися, але дублі мають знаходитися однозначно тільки справа чи зліва.
- Пріоритетом є випадкове число з заданого проміжку (наприклад, (0, 1)). Повторів пріоритетів слід уникати.
- Висота дерева з дуже високою ймовірністю $\leq 4 \log_2 n$.

Декартові дерева (treaps)

Чому дерево «декартове»

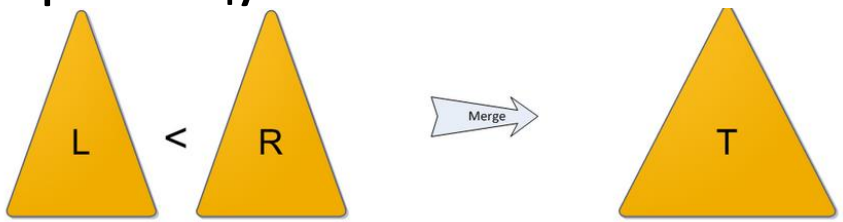




Декартові дерева (treaps)

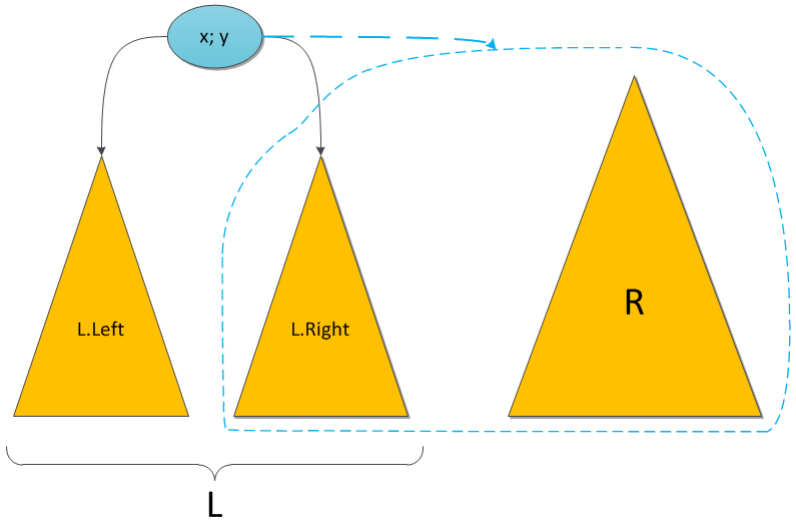
Можна визначити дві базові операції: *Merge* та *Split*.

- Злиття двох дерев *Merge*. Умова: всі ключі одного дерева не перевищують ключів іншого.



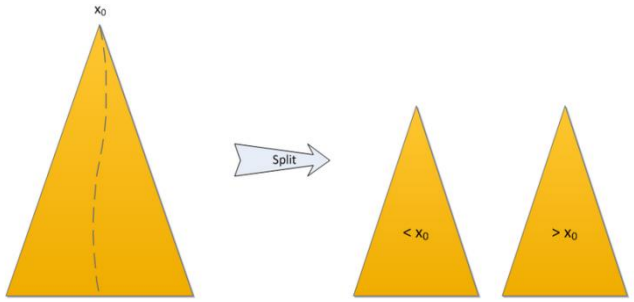
В якості нового кореня береться корінь дерева з більшим пріоритетом. Одне з піддерев зрозуміле, друге отримується рекурсивно.

Пріоритет лівого кореня більший

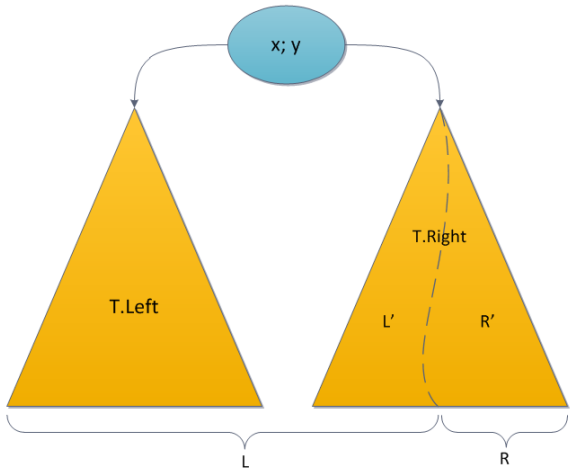


Декартові дерева (treaps)

- Розбиття дерева за ключем *Split*. Умова: всі ключі одного дерева не перевищують ключів іншого.



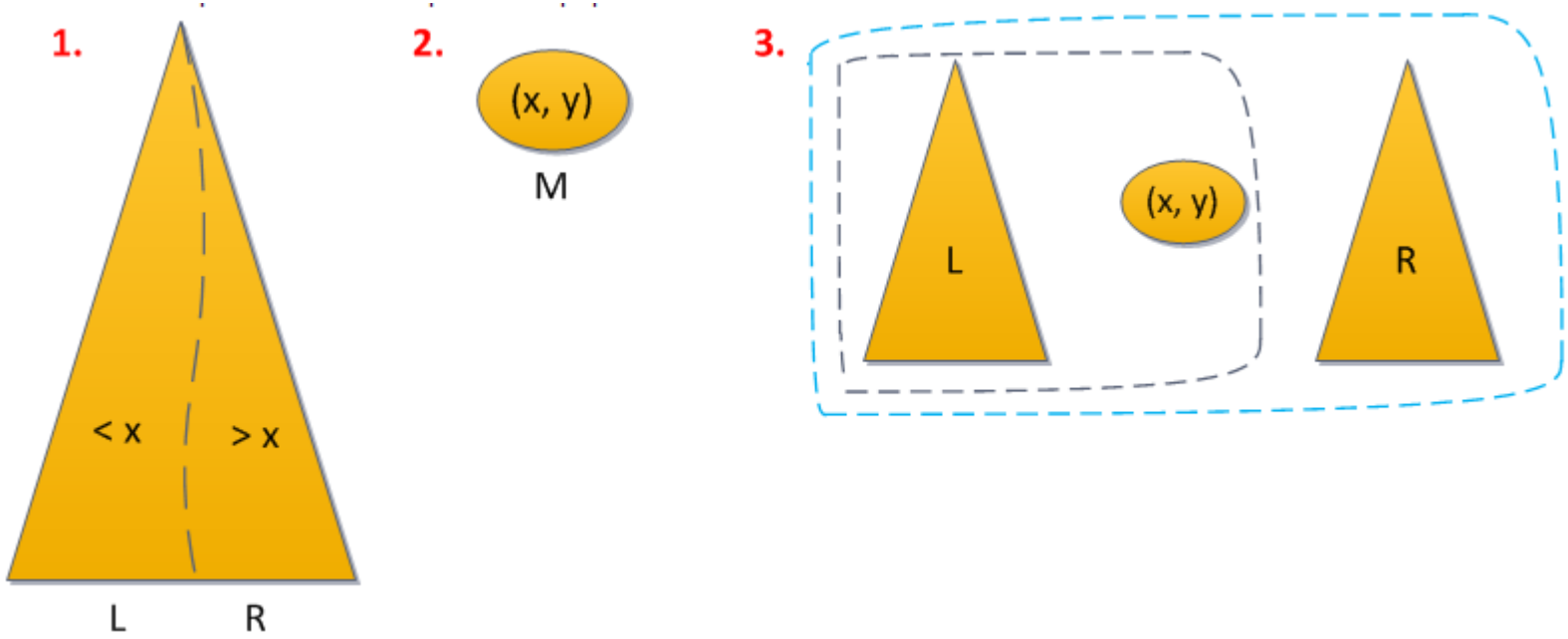
Звіряємо корінь з ключем. В залежності від результату бачимо, до якого з нових дерев належатиме корінь з одним із піддерев. Друге дерево рекурсивно виділяється з іншого піддерева.



Ключ кореня менший за x_0

Декартові дерева (treaps)

- Вставка елемента

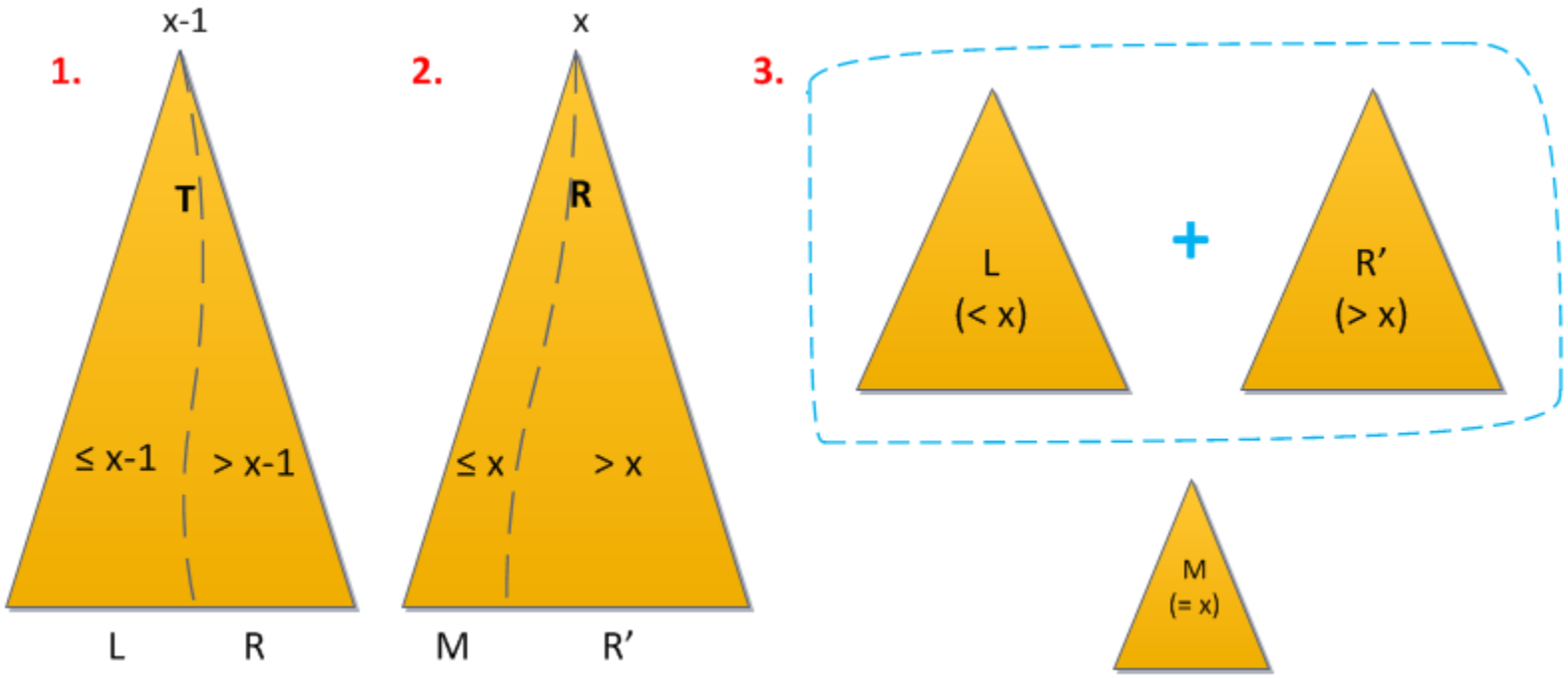


Час виконання операцій *Merge* та *Split* складає O(lg *n*).

Такий же буде час при виконанні операцій, що складаються зі скінченної кількості їх викликів.

Декартові дерева (treaps)

- Видалення елемента



Декартові дерева (treaps)

Інший спосіб вставки та видалення елемента (*x, y)*

- Вставка

1. Спуск як по дереву пошуку, поки не знайдемо перший елемент (*x1, y1)* з пріоритетом y1 < y.

2. Розбиття піддерева з коренем (*x1, y1)* по ключу *x*.

3. На це місце вставляємо дерево з коренем (*x, y)* і отриманими після розбиття деревами в якості синів.

- Видалення

1. Спуск як по дереву пошуку, поки не знайдемо елемент (*x, y)*.

2. Злиття синів піддерева з коренем (*x, y)*.

3. Результат цього злиття ставиться на місце (*x, y)*.

Розширення структур даних

Розширення структур даних можна розбити на чотири кроки.

1. Вибір базової структури даних.

2. Визначення необхідної додаткової інформації, яку слід зберігати в базовій структурі даних і підтримувати її актуальність.

3. Перевірка того, що додаткова інформація може підтримуватися основними модифікуючими операціями над базовою структурою даних.

4. Розробка нових операцій.

Розширення структур даних

Теорема (розширення червоно-чорних дерев).

Нехай f – поле, яке розширює червоно-чорне дерево T з n вузлів, і нехай вміст поля f вузла x може бути обчислений з використанням лише інформації, що зберігається у вузлах x, $left[x]$ і $right[x]$, включаючи $f[left[x]]$ та $f[right[x]]$.

Тоді можливо підтримувати актуальність інформації f у всіх вузлах дерева T в процесі вставки і видалення без впливу на асимптотичний час роботи цих процедур $O(\lg n)$.

Розширення структур даних

Доведення.

Ідея доведення.

Зміна поля f вузла x може вплинути тільки на значення поля f предків вузла x. Тобто, зміна $f[x]$ може зумовити зміну лише $f[p[x]]$, зміна $f[p[x]]$ – зміну тільки $f[p[p[x]]]$, і так до кореня. При модифікації $f[root[T]]$ від цього значення ніякі інші вже не залежать, процес оновлення завершується. Висота червоно-чорного дерева $O(\lg n)$, тому зміна поля f у вузлі вимагатиме часу $O(\lg n)$ для оновлення всіх залежних від нього вузлів.

Розширення структур даних

Доведення (далі).

Вставка вузла.

Перша фаза. Вузол x вставляється як дочірній деякого існуючого вузла $p[x]$. Значення $f[x]$ обчислюється за час O(1), бо за умовою залежить тільки від інформації в інших полях x та його синах (в даному випадку це обмежувачі $nil[T]$). Після цього зміни «піднімаються» по дереву, що дає час першої фази $O(\lg n)$.

Друга фаза. Структурні зміни можуть зумовити лише повороти, яких буде не більше двох. За один поворот зміни відбуваються у двох вузлах, тому на оновлення піде час $O(\lg n)$.

Отже, вставка відбувається за час $O(\lg n)$.

Розширення структур даних

Доведення (завершення).

Видалення вузла.

Перша фаза. Після власне видалення вузла відбувається оновлення значень поля f по ланцюжку вгору, що забере час $O(\lg n)$.

Друга фаза. Поворотів відбудеться не більше трьох, кожен з яких вимагає часу на оновлення всіх полів f на шляху до кореня не більше $O(\lg n)$.

Таким чином, для видалення потрібен час також $O(\lg n)$.

Зауваження. У багатьох випадках для оновлення полів при повороті досить часу $O(1)$.

Динамічні порядкові статистики

i-та порядкова статистика множини з *n* елементів – елемент з *i*-м в порядку зростання ключем.

Ранг елемента – його порядковий номер в лінійно впорядкованій множині.

Модифіковане червоно-чорне дерево дозволяє знайти ранг і порядкову статистику за час O(lg *n*).

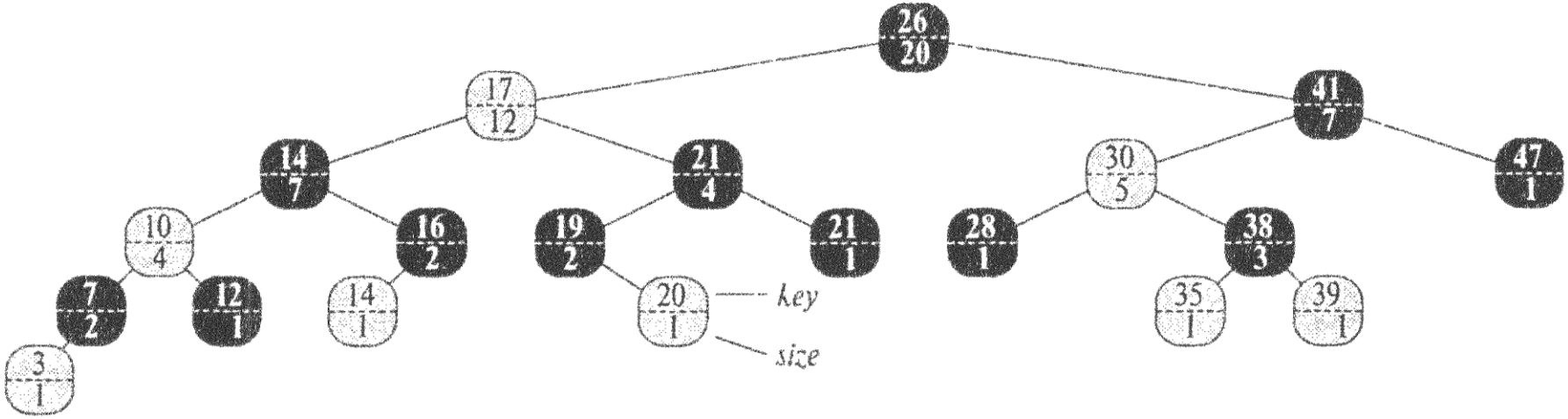
Дерево порядкової статистики T (order-statistic tree) – червоно-чорне дерево з додатковим інформаційним полем *size*[*x*] (розмір піддерева з коренем *x*).

Поклавши *size*[*nil*[T]]=0, отримуємо тотожність

$$size[x] = size[left[x]] + size[right[x]] + 1.$$

Оскільки ключі потенційно не унікальні, під рангом розумітимемо позицію елемента в дереві при симетричному обході.

Дерево порядкової статистики



Ключі зі значеннями 14 і 21 повторюються.

Які їх ранги?

Дерево порядкової статистики

Пошук елемента з заданим рангом *i* в піддереві з коренем *x*:

```
OS_SELECT(x, i)
1  r ← size[left[x]]+1
2  if i = r
3      then return x
4  elseif i < r
5      then return OS_SELECT(left[x], i)
6  else return OS_SELECT(right[x], i − r)
```

(*size*[*left*[*x*]]+1) – ранг вузла *x* в піддереві з коренем *x*.

Кожен рекуривний виклик опускає нас на один рівень дерева нижче, тому час роботи в найгіршому випадку пропорційний висоті дерева, тобто O(lg *n*) для червоно-чорного дерева з *n* елементів.

(Знайдемо в дереві-прикладі елемент з рангом 17.)

Дерево порядкової статистики

Пошук рангу елемента *x*:

```
OS_RANK(T, x)
1  r ← size[left[x]] + 1
2  y ← x
3  while y ≠ root[T]
4        do if y = right[p[y]]
5              then r ← r + size[left[p[y]]] + 1
6           y ← p[y]
7  return r
```

Ранг вузла *x* – кількість вершин, обійдених при симетричному обході до *x*, плюс 1 для самого вузла *x*.

В циклі рухаємось від *x* до кореня;

якщо по дорозі проходимо елемент, що є чиїмось правим сином, додаємо кількість елементів, які треба обійти перед ним, плюс 1 для нього.

Покажемо коректність процедури OS_RANK за допомогою наступного інваріанту циклу:

- На початку кожної ітерації циклу **while** значення r є рангом $key[x]$ в піддереві з коренем у вузлі y.

Ініціалізація. Перед першою ітерацією r присвоюється ранг $key[x]$ в піддереві з коренем x. Присвоєння в рядку 2 робить інваріант циклу істинним перед першою ітерацією.

Збереження. Треба показати, що якщо r – ранг $key[x]$ в піддереві з коренем y на початку виконання тіла циклу, то в кінці виконання r є рангом $key[x]$ в піддереві з коренем $p[y]$. Якщо y є лівим потомком, то ні $p[y]$, ні жоден вузол з піддерева правого потомка $p[y]$ не може передувати x при симетричному обході, тому значення r не зміниться. Інакше y є правим потомком, і всі вузли в піддереві лівого потомка $p[y]$, а також $p[y]$, передують x, тому значення r має збільшитися на $(size[left[p[y]]+1)$.

Завершення. Цикл завершується, коли *y*=*root*[T], тому піддерево з коренем *y* і є цілим деревом. Таким чином *r* є рангом *key*[*x*] в усьому дереві.

Кожна ітерація циклу має час O(1), а *y* при кожній ітерації піднімається на один рівень вгору, тому час роботи процедури OS_RANK в найгіршому випадку буде O(lg *n*).

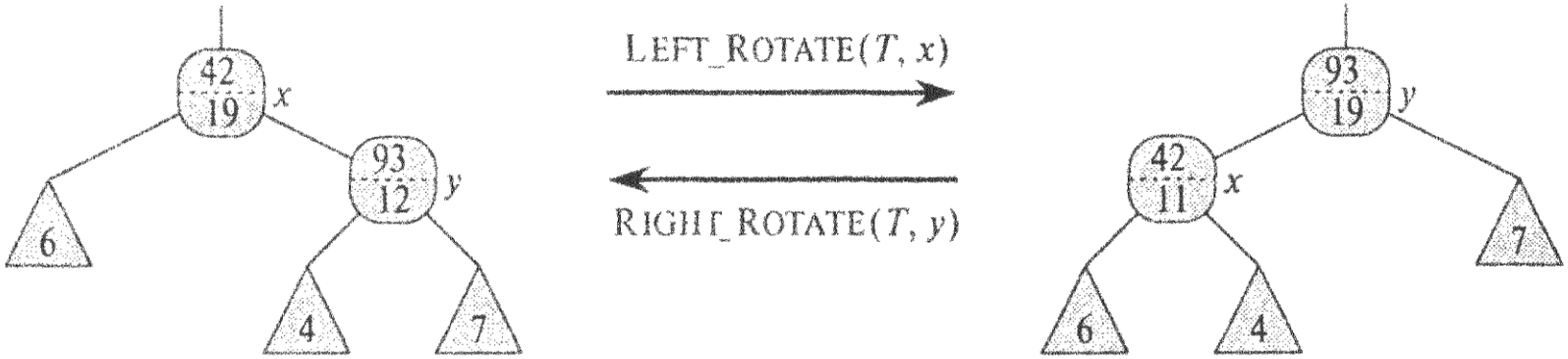
Приклад: послідовність значень *key*[*y*] та *r* на початку кожної ітерації циклу while при пошуку рангу вузла з ключем 38:

Итерация	$key[y]$	r
1	38	2
2	30	4
3	41	4
4	26	17

Дерево порядкової статистики

Підтримка розміру піддерев

Оновлення розмірів піддерев при поворотах:



Некоректними стають тільки лише два значення поля *size* вузлів, навколо зв'язку яких відбувається поворот.

Досить до псевдокоду LEFT_ROTATE додати

13 $size[y] \leftarrow size[x]$
14 $size[x] \leftarrow size[left[x]] + size[right[x]] + 1$

На кожен поворот витрачається час O(1).

Дерево порядкової статистики

Підтримка розміру піддерев

Додавання вузла

В першій фазі потрібно збільшити значення *size*[*x*] для кожного вузла *x* на шляху від нового вузла до кореня. Новий вузол отримує значення *size* 1. Друга фаза складатиметься максимум з двох поворотів. Тому загальний час операції O(lg *n*).

Видалення вузла

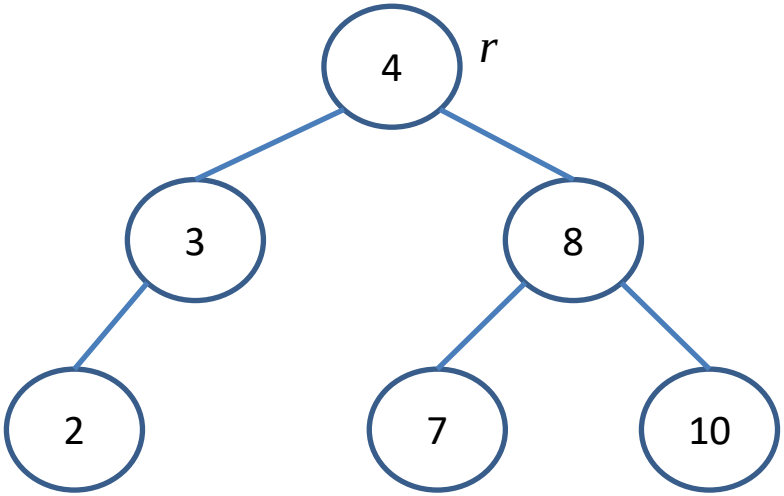
На першому етапі проходимо шлях від позиції видаленого вузла вгору до кореня, зменшуючи значення поля *size* для кожного вузла. В другій фазі може відбутися до трьох поворотів. Отже, загальний час операції O(lg *n*).

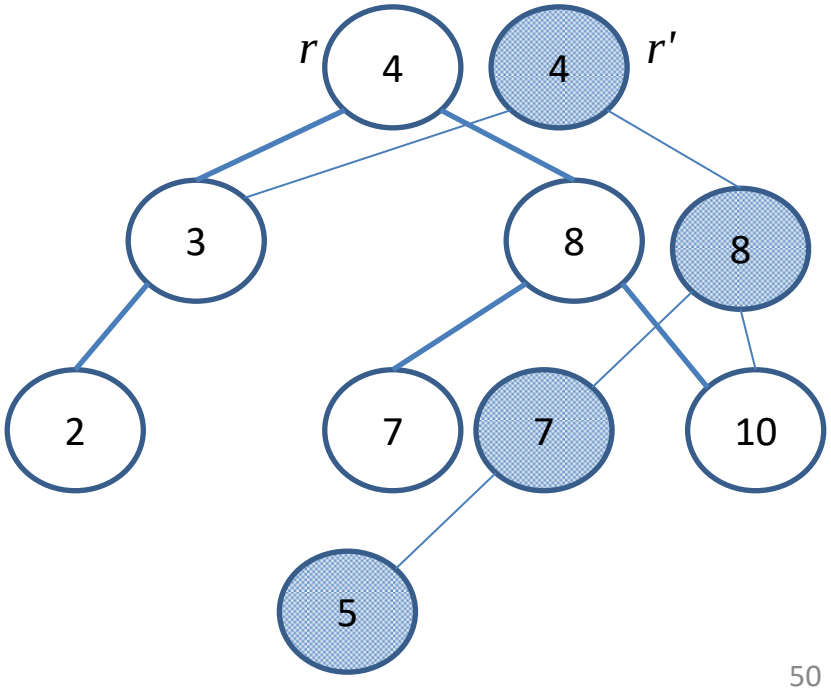
Персистентні динамічні множини

- Зберігають свої попередні версії (і доступ до них) в процесі внесення змін.
- Може зберігатися тільки остання версія або всі існуючі попередні.
- Персистентними можна зробити різні структури даних.
- Для ефективної реалізації просте копіювання не підходить.

Персистентні динамічні множини

- Розглянемо реалізацію персистентної множини з операціями пошуку, видалення та вставки на основі бінарного дерева пошуку.
- Для кожної версії множини зберігається свій корінь.
- Фактично будується копія лише тієї вітки (шляху), де відбулися зміни.





Запитання і завдання

Нехай в реалізації персистентної множини на основі бінарного дерева пошуку вузол не містить посилання на батька.

- Визначте, які вузли мають змінитися при вставці ключа *k* та видаленні вузла *y* в загальному випадку.
- Напишіть процедуру PERSISTENT_TREE_INSERT, що повертає нове персистентне дерево T’ – результат вставки ключа *k* у дерево T. Яким буде її час роботи, якщо висота дерева *h*?
- Використайте для реалізації червоно-чорне дерево. Час роботи вставки і видалення в найгіршому випадку і об‘єм необхідної пам’яті мають бути O(lg *n*).