Задача 1.4. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, x_2(0) = -1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
2. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційовною?
3. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням

   $$u(t) = 0, t \in [0, 2]$$

   за умови, що критерій якості має вигляд

   $$\mathcal{J}(u) = x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min.$$

Розв'язок. 1. При $t \in [0, 1]$ маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

З курсу диференційних рівнянь відомо, що тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t},$$

де v_1, v_2 – власні вектори, що відповідають λ_1 та λ_2 відповідно.

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Підставляючи $t = 0$ отримуємо $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

При $t \in (1, 2]$ маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

де c_3, c_4 задовольняють систему

$$\begin{cases} 2c_3 + c_4 + 1 & = 0 \\ 3c_3 + 4c_4 & = 0 \end{cases},$$

звідки $c_3 = -4/5$, $c_4 = 3/5$ і

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix},$$

Підставляючи $t = 1$ отримуємо $c_1 = \left(1 + \dfrac{3}{4e}\right)$, $c_2 = \dfrac{1}{20e^5}$.

Остаточно маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, & t \in [0, 1] \\ \left(1 + \dfrac{3}{4e}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \dfrac{1}{20e^5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, & t \in (1, 2] \end{cases}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} (1-) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1-) \\ x_2(1-) \end{pmatrix}$$

З неперервності x_1, x_2 маємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1-) \\ x_2(1-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix}$$

З іншого боку,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} (1+) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1+) \\ x_2(1+) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(1-) \neq \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(1+),$$

тобто траєкторія не є неперервно диференційовною в точці 1.

3. Просто підставимо $t = 2$ в розв'язки для обох керувань (попутно зауваживши, що для нового керування розв'язок ми вже знаємо, це просто продовження вже знайденого розв'язку для $t \in [0, 1]$):

$$\left(e^2 + \frac{3}{4}e + \frac{e^5}{20} - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(-e^2 - \frac{3}{4}e + \frac{3e^5}{20} + \frac{3}{5}\right)^2 \vee (e^2)^2 + (-e^2)^2$$

Після обчислень знаходимо, що права частина менше, тобто нове керування є кращим за початкове.