Гуща Дмитро

К-28

Модульна контрольна робота №2

Варіант 5

1. Дослідити систему на спостережуваність в залежності від значення параметра a

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -ax_1(t) \end{cases}$$

$$y_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$$

$$y_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

(1)

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) \\ x_2(t) = -a x_1(x) \end{cases} \qquad y_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \quad y_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot B; \quad y_1 = (2, 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot B$$

$$y_2 = (1, -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_2 \cdot B$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^T \cdot B + C_1 \cdot a \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^T \cdot B + C_2 \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} a \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a \end{cases}$$

Дослідимо систему на цілком керованість

$$\det_1\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \det_1\left(\begin{pmatrix} 2 & -a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4 + a$$

$$\det_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \det_2\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + 2a$$

$$\begin{cases} 4 + a \neq 0 \\ 1 + 2a \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \neq -4 \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

При $a = -4; -\frac{1}{2}$ система не є спостережною, при інших значеннях — спостережна

2. Шукаючи керування у вигляді $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, розв'язати задачу аналітичного

конструювання регуляторів для системи $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

2 Задача аналітичного керування

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$A + BC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1+5 & -2 \\ 2 & c_2+2 \end{pmatrix}$

Характеристичне рівняння: $\det(A + BC - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3c_1+5-\lambda & -2 \\ 2 & c_2+2-\lambda \end{vmatrix} = (3c_1+5-\lambda) \cdot$

$\cdot (c_2+2-\lambda) + 4 = 3c_1c_2 + 6c_1 - 3\lambda c_1 + 5c_2 + 10 - 5\lambda - \lambda c_2 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 =$

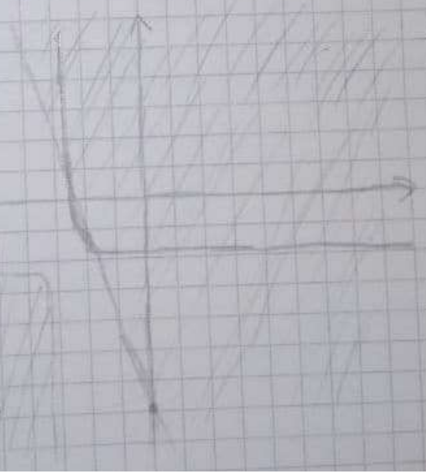
$= \lambda^2 - (3c_1 + 5 + c_2 + 2)\lambda + 3c_1c_2 + 6c_1 + 5c_2 + 14$

Матриця Гурвіца

$G = \begin{pmatrix} -3c_1 - 7 + c_2 & 1 \\ 0 & 3c_1c_2 + 6c_1 + 5c_2 + 14 \end{pmatrix}$, тоді $\begin{cases} -(3c_1 + 7 + c_2) > 0 \\ -(3c_1 + 7 + c_2)(3c_1c_2 + 6c_1 + 5c_2 + 14) > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} c_2 < -3c_1 - 7 \\ (3c_1+5)(c_2+2) > -4 \end{cases}$ $\quad c_2 > \dfrac{-4}{3c_1+5} - 2$

Область розв'язків



3. Знайти криві, на яких може досягатися екстремум функціонала, та дослідити характер екстремуму (умова Лежандра)

$$I[x(t)] = \int_0^1 (x^2(t) + \ddot{x}^2(t))dt;$$

$$x(0) = y_0,\ x(1) = y_1,\ \dot{x}(0) = y'_0,\ \dot{x}(1) = y'_1.$$