$\neg \vdash \wedge \rightarrow \vdash \; \rightarrow$

1) $P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$ Довести

1.1) $\vdash((P \wedge Q) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg(P \wedge Q))$ (IV. 1)

1.2) $\vdash P \wedge Q \rightarrow Q$ (II. 2) $a \wedge b \rightarrow a$

1.3) $\vdash \neg Q \rightarrow \neg(P \wedge Q)$ (MP 1.2)

1.4) $\neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$ (ТД) – теорема дедукції $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$

1.5) $P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

2) Якщо A і $\neg A$ вивідні, то $A \wedge \neg A \rightarrow T$-вивідна. Довести.

Таке числення називається суперечливим, а в такому численні всі формули вивідні. Дійсно, якщо A і $\neg A$ вивідні, то $A \wedge \neg A \rightarrow T$-вивідна.

$\vdash T \rightarrow P$ і $\vdash A \wedge \neg A \rightarrow P$, де T така, що $\vdash \neg T$. Проте тоді $\vdash A \wedge \neg A \rightarrow P$. І якщо A і ¬A вивідні то спрацьовують правила A,B $\overline{A \wedge B}$. $A \wedge \neg A$ вивідна, отже P - вивідна

3) Довести незалежність аксіоми III.1.

$$a \rightarrow avb \; \{0,1\}$$

$$(avb = b)$$

a	b	avb
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	$a \rightarrow avb$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

a	b	$b \rightarrow avb$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$A, A \rightarrow B \;\; => \;\; 1 - B \;\; => \;\; B$$

4) $\neg p, \neg q, \neg r, \neg s \vdash \neg(p \wedge q) \;\to\; (r \to s)$

I Спосіб:

За лемою:

1) $\neg p, \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$ (1)
2) $\neg r, \neg s \vdash (r \to s)$ (2)

Тепер використовую лему загальну лему для цих формул:

$$\neg(p \wedge q), (r \to s) \vdash (p \wedge q) \;\to\; (r \to s)$$

II Спосіб:

Знайдемо контрприклад, щоб формула стала хибною

$$\begin{cases} \neg \mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{q} \wedge \neg \mathrm{r} \wedge \neg \mathrm{s} = 1; \\ (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \to (\mathrm{r} \to \mathrm{s}) = 0; \end{cases} \begin{cases} p = 0; \\ q = 0; \\ r = 0; \\ s = 0; \end{cases} \begin{cases} p \wedge \mathrm{q} = 1; \\ r \to \mathrm{s} = 0; \end{cases} \begin{cases} p = 1; \\ q = 1; \\ r = 1; \\ s = 0. \end{cases}$$

Отже, не існує такого тау, а отже початкове твердження вірне.