Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп`ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Алгоритми та складність

Завдання № 9
“ Алгоритм Джонсона ”
Виконав студент 2-го курсу
Групи К-28
Гуща Дмитро Сергійович

2021

Предметна область

Варіант 4
Предметна область: Учбовий відділ
Об’єкти: Групи, Студенти
Примітка: Маємо множину учбових груп. Кожна група містить в собі множину студентів

Завдання

Алгоритм Джонсона для розріджених графів (включає алгоритми Белмана-Форда і Дейкстри). В алгоритмі Дейкстри використайте піраміду Фібоначчі.

Теорія

Алгоритм Джонсона дозволяє знайти найкоротші шляхи між усіма парами вершин зваженого орієнтованого графа. Цей алгоритм працює, якщо у графі містяться ребра з додатною чи від'ємною вагою, але відсутні цикли з від'ємною вагою. В алгоритмі Джонсона використовують алгоритм Беллмана-Форда та алгоритм Дейкстри втілені у вигляді підпрограм. Ребра зберігають у вигляді переліків суміжних вершин. Алгоритм повертає звичайну матрицю $D = d_{ij}$ розміром $n \times n$ або видає повідомлення про те, що вхідний граф містить цикл із від'ємною вагою.

Алгоритм Дейкстри – алгоритм на графах, відкритий Дейкстрою. Знаходить найкоротший шлях від однієї вершини графа до всіх інших вершин. Класичний алгоритм Дейкстри працює тільки для графів без циклів від’ємної довжин.

1. Кожній вершині з V зіставимо мітку - мінімальне відоме відстань від цієї вершини до a. Алгоритм працює покроково - на кожному кроці він «відвідує» одну вершину і намагається зменшувати мітки. Робота алгоритму завершується, коли всі вершини відвідані.
2. Ініціалізація.
   Мітка самої вершини a покладається рівною 0, мітки інших вершин - нескінченності. Це відображає те, що відстані від a до інших вершин поки невідомі. Всі вершини графа позначаються як невідвіданих.
3. Крок алгоритму Дейкстри :
   Якщо все вершини відвідані, алгоритм завершується. В іншому випадку, з ще не відвіданих вершин вибирається вершина u, що має мінімальну позначку.

Ми розглядаємо різні маршрути, в яких u є передостаннім пунктом. Вершини, в які ведуть ребра з u, назвемо сусідами цієї вершини. Для кожного сусіда вершини u, крім позначених відвідані, розглянемо нову довжину шляху, що дорівнює сумі значень поточної мітки u і довжини ребра, що з'єднує u з цим сусідом.

Якщо отримане значення довжини менше значення мітки сусіда, замінимо значення мітки отриманим значенням довжини. Розглянувши всіх сусідів, позначимо вершину u як відвіданих і повторимо крок алгоритму.

Усі невідвідані вершини графу зберігаються у Піраміді Фібоначчі, яка з кожним кроком алгоритму зменшуються тобто в кожному кроці алгоритму Дейкстри з неї видаляються відвідані вершини, і так як видалення з піраміди Фібоначчі має середню складність $O(\log n)$ то час роботи алгоритму Дейкстри зменшується з $O(n^2)$ до $O(n \log n + m)$ що і зменшує складність самого алгоритму Джонсона

Алгоритм Беллмана-Форда – алгоритм пошуку найкоротшого шляху в зваженому графі. Знаходить найкоротші шляхи від однієї вершини графа до всіх інших. На відміну від алгоритму Дейкстри, алгоритм Беллмана-Форда допускає ребра з негативною вагою. Запропоновано незалежно Річардом Беллманом і Лестером Фордом.

Для знаходження найкоротших шляхів від однієї вершини до всіх інших, скористаємося методом динамічного програмування.

Крок 1

На цьому кроці не започатковано відстані від вихідної вершини до всіх інших вершин, як нескінченні, а відстань до самого src приймається рівним 0. Створюється масив dist [] розміру | V | з усіма значеннями рівними нескінченності, за винятком елемента dist [src], де src - вихідна вершина.

Крок 2

Другим кроком обчислюються найкоротші відстані. Наступні кроки потрібно виконувати | V | -1 раз, де | V | - число вершин в даному графі. Проведіть наступна дія для кожного ребра u-v: Якщо dist [v]> dist [u] + вага ребра uv, то поновіть dist [v] dist [v] = dist [u] + вага ребра uv

Крок 3

На цьому кроці повідомляється, чи присутній в графі цикл негативного ваги. Для кожного ребра u-v необхідно виконати наступне: Якщо dist [v]> dist [u] + вага ребра uv, то в графі присутній цикл негативного ваги.

Алгоритм

- Перевірка графа на від’ємні цикли ,у разі виявлення алгоритм Повертає інформацію про те що алгоритм неможливий завершує свою роботу
- Спочатку до графу додається новий вузол q, пов'язаний ребрами з нульовим вагою з кожним з інших вузлів

- По-друге, алгоритм Беллмана - Форда використовується, починаючи з нової вершини q, для знаходження для кожної вершини v мінімальної ваги h (v) шляху з q в v.
- Потім ребра вихідного графа повторно зважуються з використанням значень, обчислених алгоритмом Беллмана - Форда: ребру від u до v, має довжину, дається нова довжина
  w (u, v) + h (u) - h (v).
- Нарешті, q видаляється, і алгоритм Дейкстри використовується для пошуку найкоротших шляхів від кожного вузла s до кожної іншої вершини в переглянутому графі. Відстань у вихідному графі потім обчислюється для кожної відстані D (u, v) шляхом додавання h (v) - h (u) до відстані, що повертається алгоритмом Дейкстри

Складність

Якщо в алгоритмі Дейкстри неспадну чергу з пріоритетами втілено у вигляді піраміди Фібоначчі, то тривалість роботи алгоритму Джонсона дорівнює $O(VE + \log V^2)$

Мова програмування

C++

Модулі програми

student.h

```
class Student{}; //Класс опису студента
std::string getName(); // метод повертає ім’я студента
void getStudent();//метод виводить ID та ім'я студента в консоль
void setName(std::string name); //метод змінює ім'я студента
```

group.h

```
class Group {};
Group() : title("NULL"); //конструктор пустої групи
Group(std::string title); //конструктор з початковою назвою групи
Group(std::string title, Student* first_student); //конструктор з початковою назвою групи та першим студентом
std::string getGroupTitle(); //модуль повертає назву групи
std::vector<Student*> getGroupStudents(); //модуль повертає множину студентів
void setGroupTitle(std::string title); //модуль змінює назву групи
void setGroupStudents(std::vector<Student*> students); //модуль змінює множину студентів
void addStudent(Student* student); //додати нового студента
void printStudents(); //вивід у консоль усіх студентів групи
```

graph.h/.cpp

```
class Vertex; //класс для опису ребра
class Edge; //класс для опису ребра
class GraphFunctionality; //Класс для опису функціоналу графу
class AdjecentListBasedGraph; //класс для опису списку мінімальних маршрутів
class Graph : public GraphFunctionality; //класс для опису графа
```

JohnsonAlgorythm.h/.cpp

```
distanceVector belmanFord(GraphFunctionality& graph, size_t fromVertex)
throw(std::runtime_error);//функція виконує алгоритм Белмана-Форда
void relax(distanceVector& dist, GraphFunctionality& graph, size_t u, size_t
v); //робить релаксацію ребра тобто виключення з циклу
void relax(distanceVector& dist, edgesContainer& edgesWeight, size_t u,
```

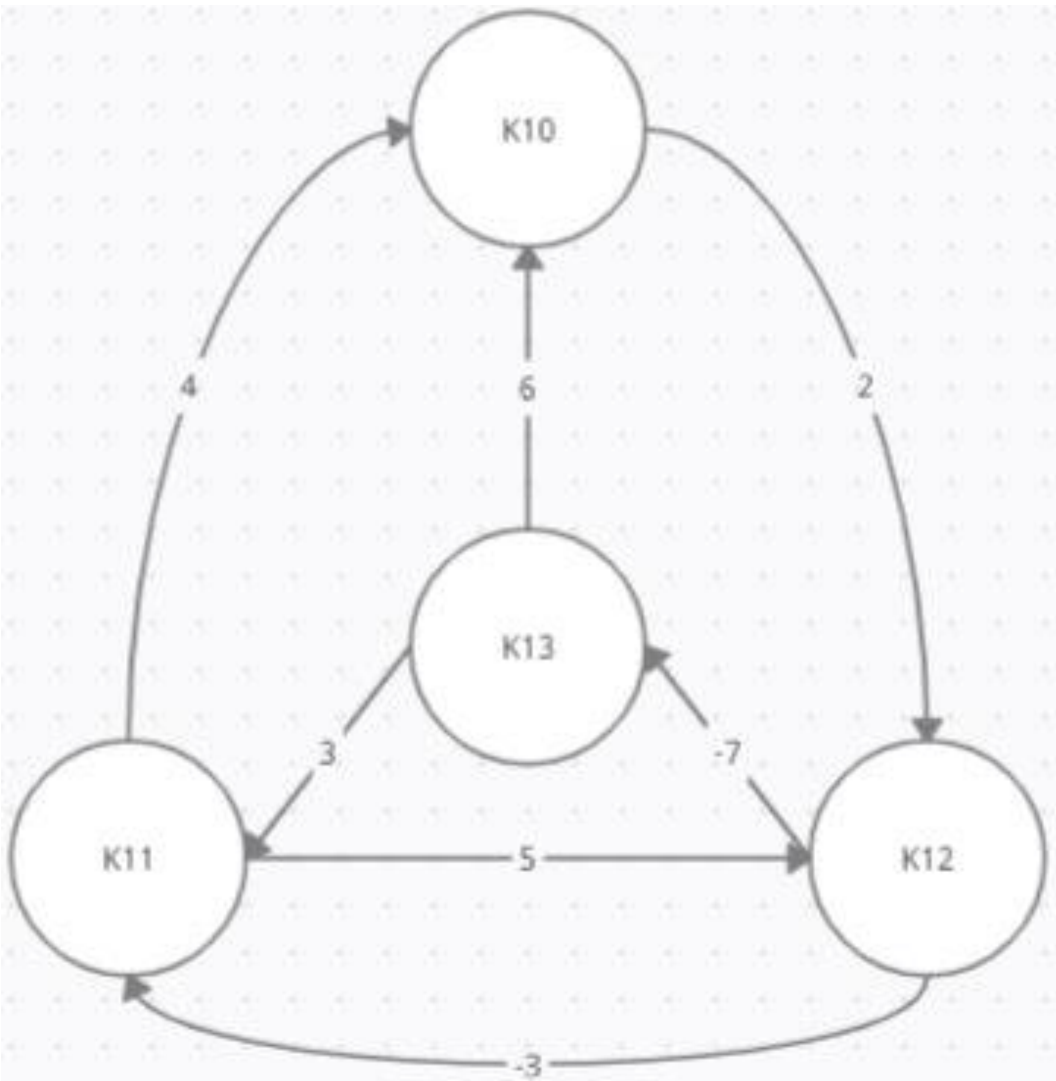
```
size_t v); //робить релаксацію ребра тобто виключення з циклу
std::vector<distanceVector> johnsonAlgorithm(GraphFunctionality& g);//функція
виконує алгоритм Джонсона
void initDistanceVector(distanceVector& distance, size_t fromVertex);//
вилучає ребро з циклу
std::pair<size_t, int> findMin(std::vector<bool>& in, edgesContainer&
edgesWeight);//шукає мінімальне ребро
distanceVector dijkstra(GraphFunctionality& graph, edgesContainer
newEdgesWeight, size_t fromVertex);//функція викнує алгоритм Дейкстри
void initDistanceVector(distanceVector& distance, size_t fromVertex);
//допоміжна функція  знаходить довжину маршруту
```

Інтерфейс користувача

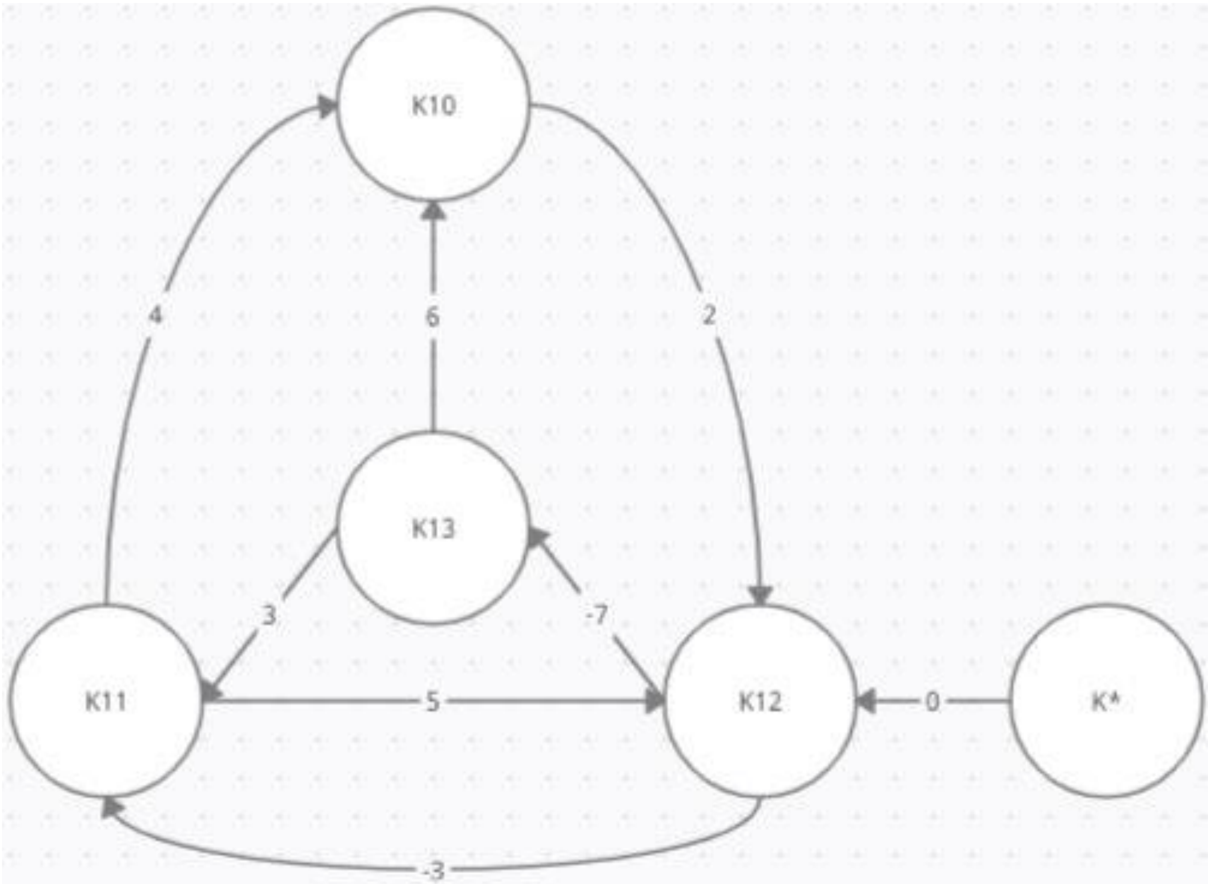
Вхідні дані назви груп прописані у програмі а довжини ребер графу беруться з файлу, вихідні виводяться у консоль.

Тестовий приклад

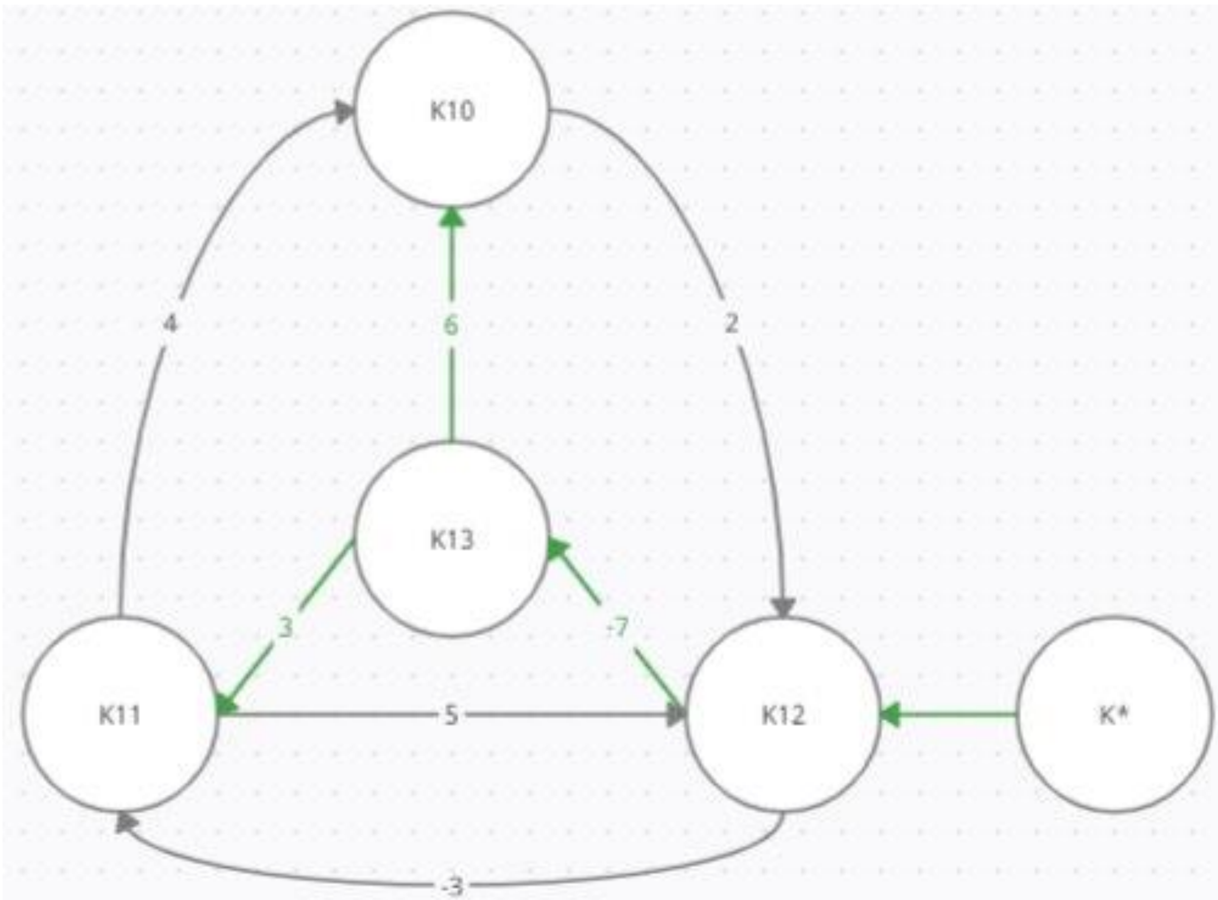
Нехай маємо множину Груп взаємне положення яких множина подати у вигляді орієнтованого графу



Додаємо уявну вершину К*



Шукаємо для всіх вершин найкоротші шляхи до K* за Алгоритмом Беллмана-Форда



$$h(К11) = 3+(-7) = -4$$
$$h(К12)=0$$
$$h(К13)=-7$$
$$h(К10)=6+(-7)= -1$$

далі для кожного ребра w (u,v) даємо йому нове значення w (u,v) + h (u) - h (v)

$$w'(К11, К10) = w(К11, К10) + h(К11) - h(К10) = 4 + (-4) - (-1) = 1$$

$$w'(К10, К12) = w(К10, К12) + h(К10) - h(К12) = 2 + (-1) - 0 = 1$$

$$w'(К12, К11) = w(К12, К11) + h(К12) - h(К11) = -3 + 0 - (-4) = 1$$

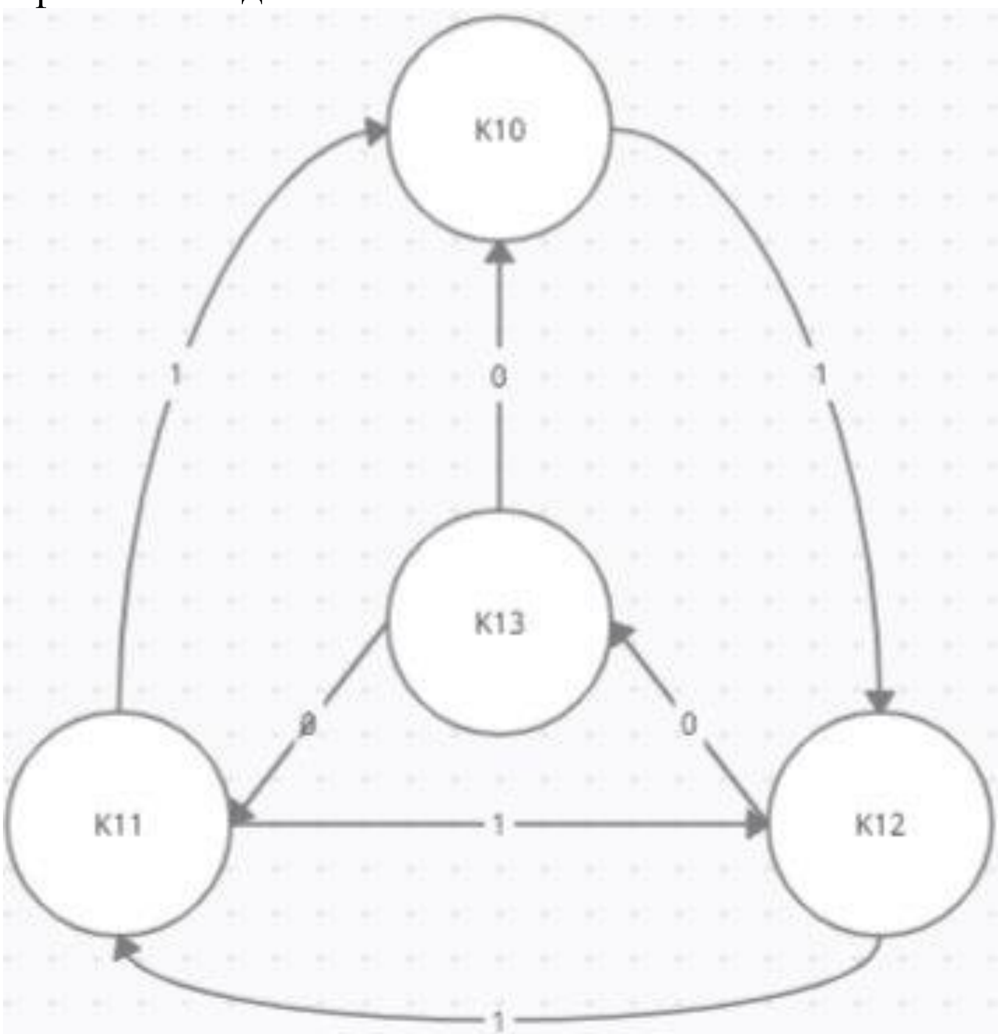
$$w'(К11, К12) = w(К11, К12) + h(К11) - h(К12) = 5 + (-4) - 0 = 1$$

$$w'(К13, К12) = w(К13, К12) + h(К13) - h(К12) = -7 + 0 - (-7) = 0$$

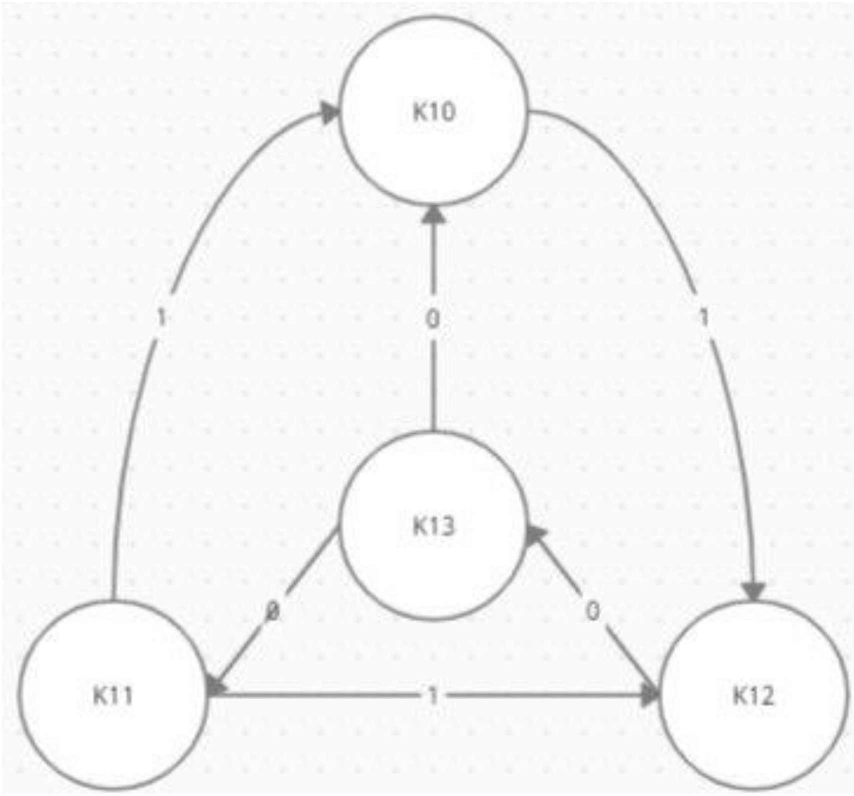
$$w'(К11, К13) = w(К11, К13) + h(К11) - h(К13) = 3 + (-7) - (-4) = 0$$

$$w'(К11, К10) = w(К11, К10) + h(К11) - h(К10) = 6 + (-7) - (-1) = 0$$

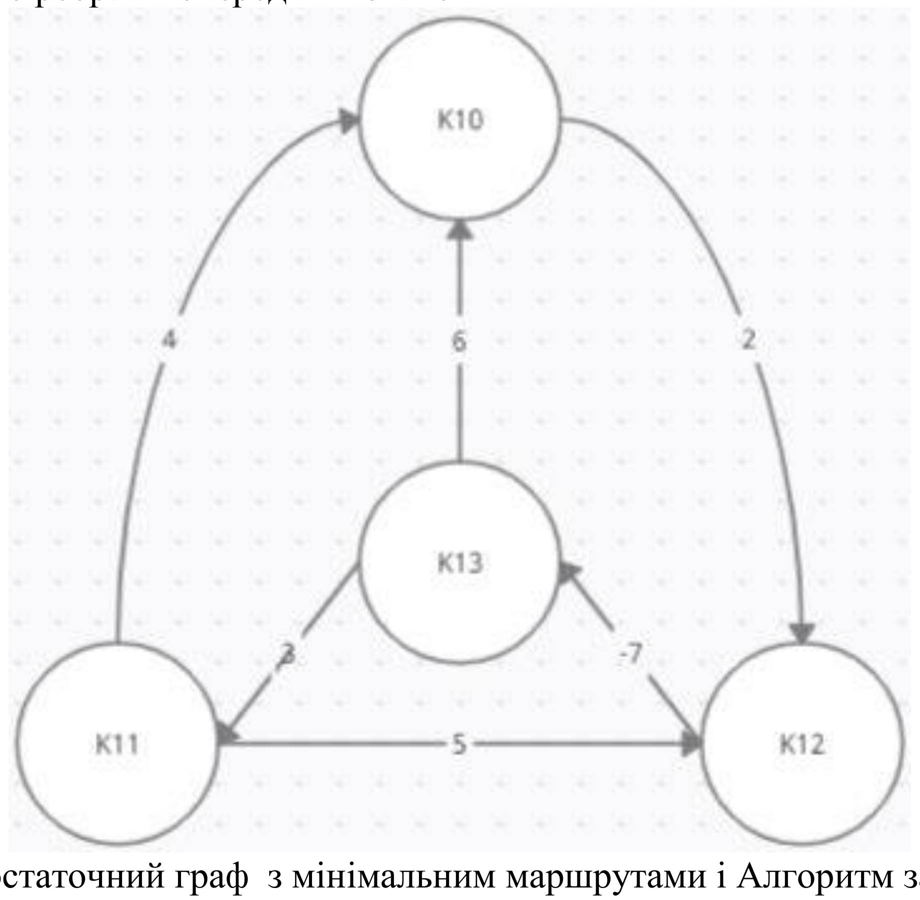
Далі граф має вигляд з новими вагами



Застосовуємо алгоритм Дейкстри для цього графу
Вихідний граф



Повертаємо ребрам попередні визначення



Це остаточний граф з мінімальним маршрутами і Алгоритм завершив свою роботу.

Висновок:

Так як ми для зберігання невідвіданих вершин використовували купу Фібоначчі то ми значно зменшили складність алгоритму з тої яка б була при наївній реалізації. При розріджених графах складність алгоритму стає меншою чи складність алгоритму Флойда-Уоршала який виконує цю задачу за $O(V^2)$

Література:

- https://habr.com/ru/company/otus/blog/484382/
- https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D0%94%D0%B5%D0%B9%D0%BA%D1%81%D1%82%D1%80%D1%8B