Застосування математичних пакетів програм до аналітичного розв’язування диференціальнихх рівнянь

MathCad
MATLAB (Scilab)
Octava
FreeMat

Це пакети програм, що в першу чергу створені передовсім для роботи з числовими матрицями і векторами і мають бути зручними для інженерно-технічних працівників.

Maple
Mathematica
Maxima
MuPAD

Пакети розраховані на здійснення символьних (тобто аналітичних) обчислень.

Практично всі ці пакети дозволяють розв’язувати диференціальні рівняння **числовими (наближеними) методами**.

Але остання група математичних пакетів дозволяє також знайти **точний (аналітичний) розв’язок у тих випадках, коли рівняння інтегруються у скінченному вигляді.**

Пакет аналітичних обчислень і числових розрахунків **Maple** створений компанією **Waterloo Maple Inc.** (Канада) і є одним з найбільш популярних у світі програмних продуктів, який дозволяє ефективно виконувати як числові, так і символьні обчислення, має розвинуті графічні засоби та вбудовану мову програмування високого рівня.

Білоусова Л. І. Курс вищої математики у середовищі Maple / *Л. І. Білоусова, М. М. Горонескуль*. – Х. : УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412 с.

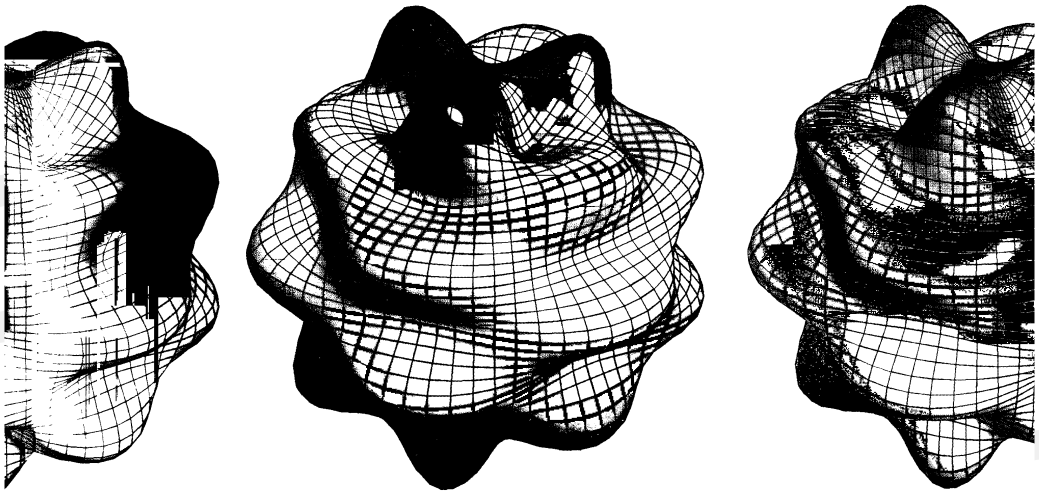
Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В.П. Дьяконов – М. : СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.

Эдвардс Ч. Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB / *Ч. Г. Эдвардс, Д.Э. Пенни*. – М. : ООО «И. Д. Вильямс», 2008. – 1104 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB

3-е издание



ЭДВАРДС
и ПЕННИ

Maple

Для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь у пакеті Maple використовують команду

dsolve(рівняння, невідома, опції)

Параметр «**невідома**» визначає невідому функцію (розв'язок) диференціального рівняння,
а необов'язковий параметр «**опції**» – форму подання розв'язку і метод його відшукання.

Для задання похідної у диференціальному рівнянні можна використовувати команду **diff** або оператор **D**,
причому саму функцію треба записувати з явним вказуванням незалежної змінної, наприклад, $\boldsymbol{y(x)}$.

Оператор **D** має наступний синтаксис:

(D@@*n*)(функція)(змінна)

У цьому записі ***n*** – порядок похідної.

Якщо ***n*** **= 1**, то замість першого виразу у дужках можна писати просто **D**.

Команда **dsolve**, як правило, знаходить лише **загальний розв'язок** і не завжди наводить особливі.

Згенеровані величини ***_C1, _C2*** і т. д. позначають довільні сталі.

Якщо потрібно розв'язати задачу Коші, то першим параметром команди **dsolve** повинна бути множина, яка складається з рівняння і початкових умов (через кому у фігурних дужках).

Приклад 1

Знайти розв'язок д.р. з відокремлюваними змінними

$$(y - x^2 y)dy = (x - xy^2)dx$$

Аналітично (як на практиці)

$$y(1 - x^2)dy = x(1 - y^2)dx$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{y}{(1 - y^2)}dy = \frac{x}{(1 - x^2)}dx$$

Інтегруємо ліву й праву частини:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1 - y^2)}{(1 - y^2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{(1 - x^2)}$$

Отримуємо:

$$\ln|1 - y^2| = \ln|1 - x^2| + \ln C$$

Або ж

$$1 - y^2 = (1 - x^2)C$$

Остаточно

$$y^2 = 1 - C + Cx^2$$

Використовуючи оператор пакету **Maple** :

```
> dsolve((y(x)-x^2*y(x))*D(y)(x)=x-x*y(x)^2,y(x));
```

$$y(x) = \sqrt{1 - \_C1 + \_C1\, x^2}, \quad y(x) = -\sqrt{1 - \_C1 + \_C1\, x^2}.$$

Приклад 2

Наближено побудувати інтегральні криві рівняння

$$y' = x(y-1)$$

Побудуємо поле напрямів, визначене цим рівнянням, та сім інтегральних кривих, які задовольняють початкові умови

$y(0) = -1,\ y(0) = 0,\ y(0) = 0{,}5,\ y(0) = 1,\ y(0) = 1{,}5,\ y(0) = 2,\ y(0) = 3.$

Аналітично (як на практиці) знайдемо загальний розв'язок та розв'язки 7-и задач Коші:

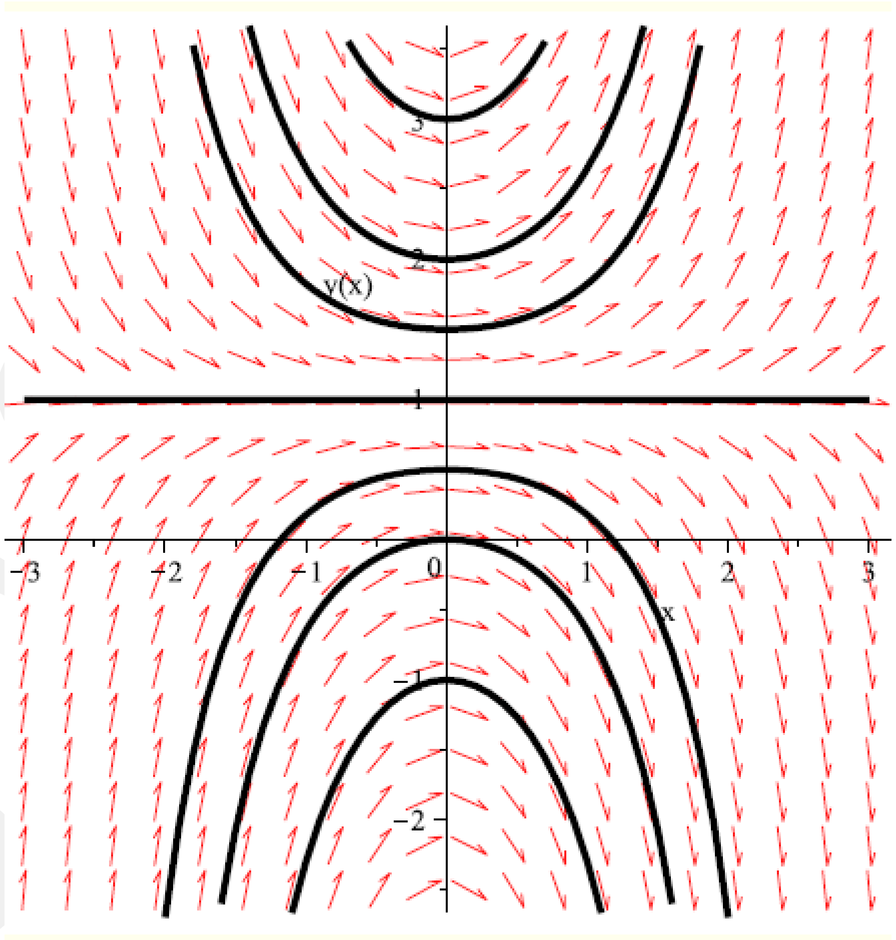
$$\frac{dy}{dx} = x(y-1) \longrightarrow \frac{dy}{(y-1)} = xdx \longrightarrow \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + \ln C \longrightarrow y = C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + 1$$ - заг. розв.

Розв'язки задач Коші: $y = -2\exp(\frac{x^2}{2}) + 1$, $y = -\exp(\frac{x^2}{2}) + 1$, $y = (-1/2)\exp(\frac{x^2}{2}) + 1$,

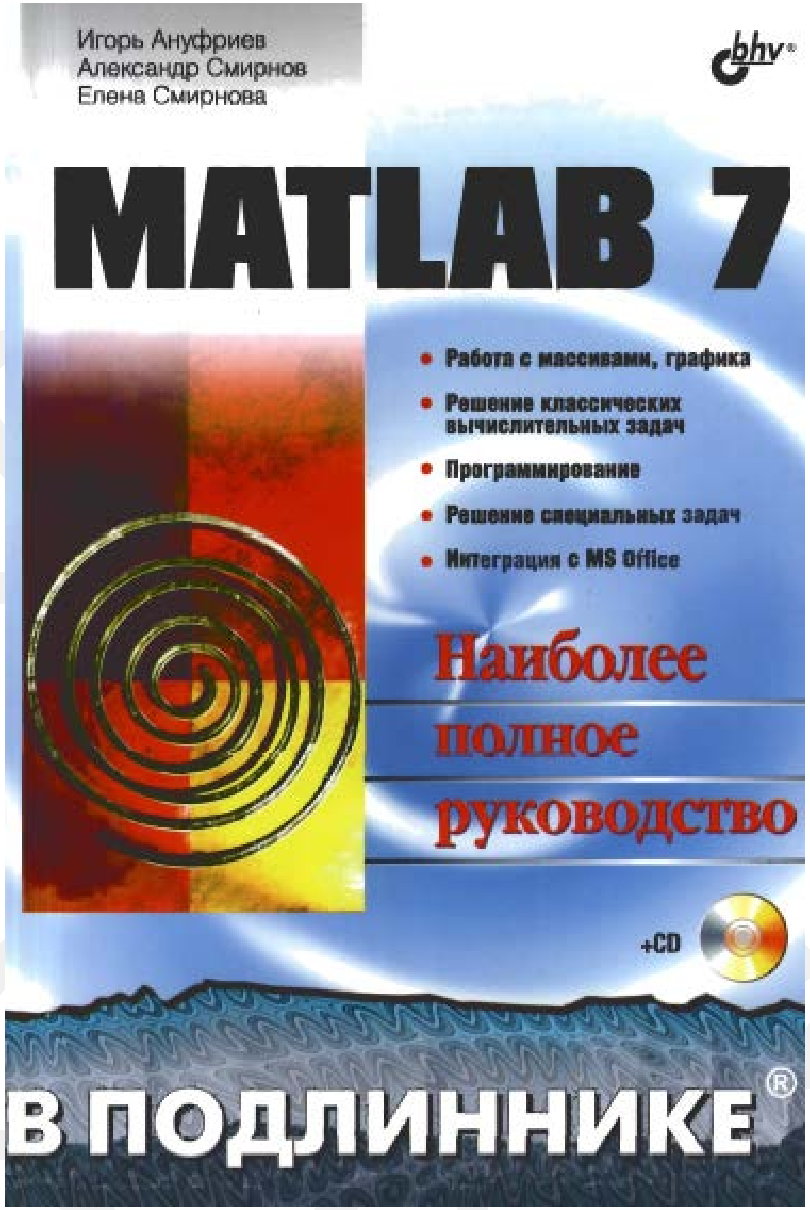
$y \equiv +1$, $y = (1/2)\exp(\frac{x^2}{2}) + 1$, $y = \exp(\frac{x^2}{2}) + 1$, $y = 2\exp(\frac{x^2}{2}) + 1$

Використовуючи оператор пакету **Maple** :

```
> DEtools[DEplot](D(y)(x)=x*(y(x)-1),y(x),x=-3..3,
  [[y(0)=-1],[y(0)=0],[y(0)=0.5],[y(0)=1],[y(0)=1.5],
  [y(0)=2],[y(0)=3]],y=-2.5..3.5,scaling=constrained,
  stepsize=0.1,linecolor=black);
```



y(x)
x
−3
−2
−1
0
1
2
3
1
2
3
−1
−2


Игорь Ануфриев
Александр Смирнов
Елена Смирнова
bhv
MATLAB 7
• Работа с массивами, графика
• Решение классических вычислительных задач
• Программирование
• Решение специальных задач
• Интеграция с MS Office
Наиболее полное руководство
+CD
В ПОДЛИННИКЕ®

MatLab

Розглянемо розв'язок наступного д.р

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -2xy}$$

з початковою умовою

$$\boxed{y(0) = 1}$$

Аналітично (як на практиці):

$$\frac{dy}{y} = -2xdx \longrightarrow \ln|y| = -2\frac{x^2}{2} + \ln C \longrightarrow \ln|y| = \ln e^{-x^2} + \ln C \longrightarrow$$

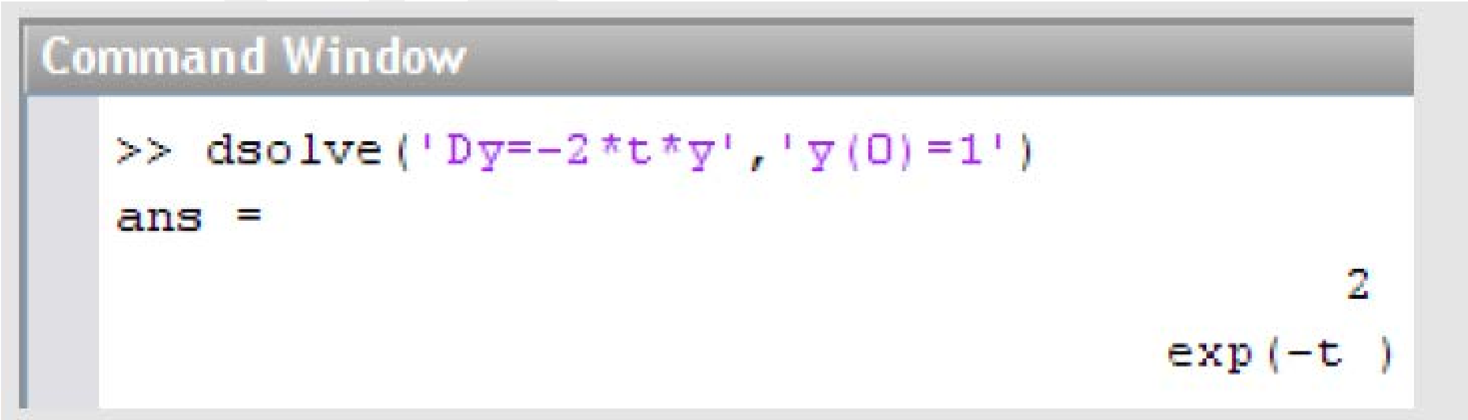
$y = Ce^{-x^2}$ - заг. розв. Розв'язок задачі Коші: $C = 1 \longrightarrow y = e^{-x^2}$

Дане рівняння в MatLab можна розв'язати як ***символьно*** так і ***чисельно***.

Символьно:

за допомогою процедури dsolve (розглянуто вище, «запозичено» з Maple) з використанням початкової умови

Скрін екрану:

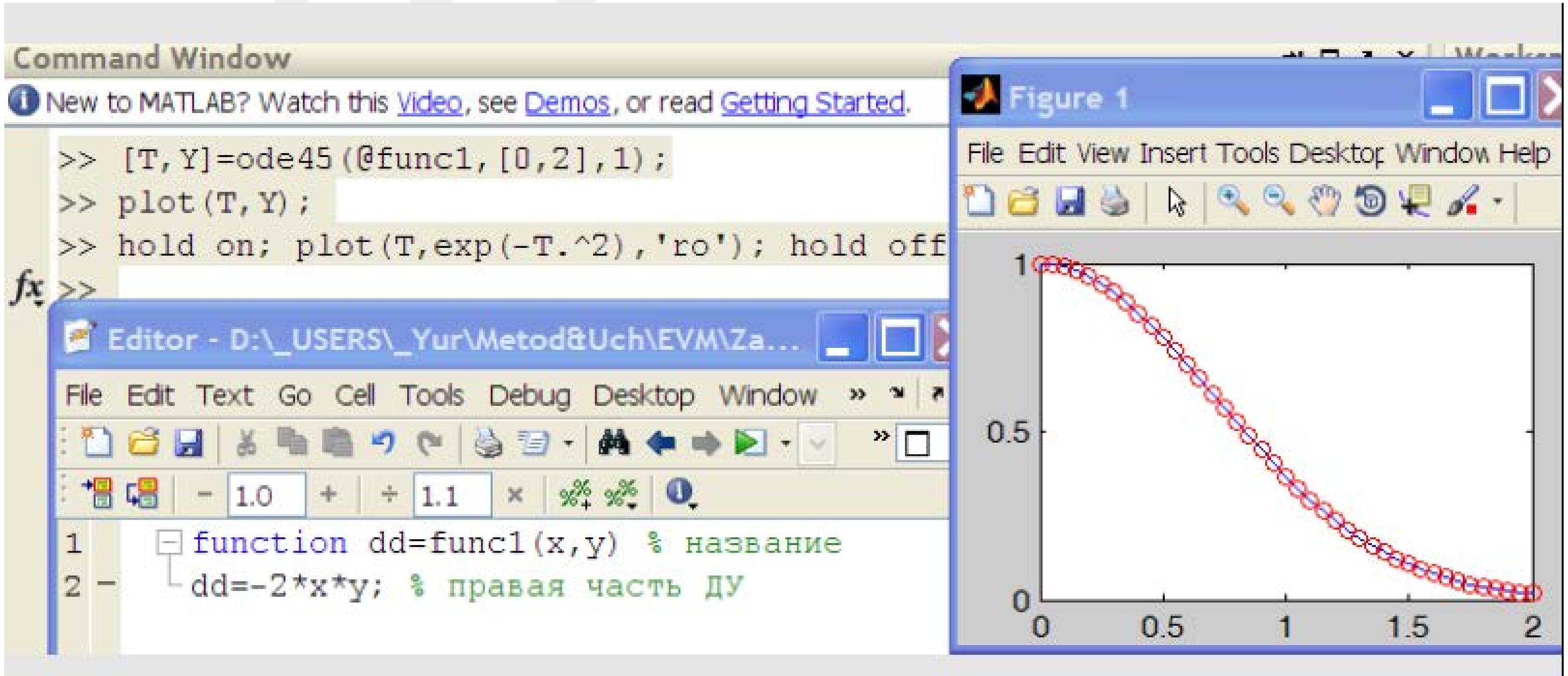


```
Command Window
>> dsolve('Dy=-2*t*y','y(0)=1')
ans =
                                  2
                            exp(-t )
```

Чисельно
(використовуючи один з стандартних «вирішувачів»-***solvers***)

[T,Y]=ode45(@DiffEquatFunc,[Tstart,Tfinal],StartVector).

Скрін екрану:



Як бачимо, у всіх трьох випадках результат отримано однаковий.

Sage

http://www.sagemath.org/help.html

Gregory V. Bard. *Sage for Undergraduates*. American Mathematical Society, Providence, 2015.

Онлайн ресурс:

https://sagecell.sagemath.org/

Повернемося до **Прикладу 2.**

$$y' = x(y-1)$$

Знайдемо загальний розв'язок, розв'язок однієї з задач Коші $y(0)=0$, та побудуємо поле напрямків.

Код:

```
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==x*(y-1)
solution=desolve(de,y)
solution.show()

#Couchi problem
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==x*(y-1)
solution=desolve(de,y,ics=[0,0])
solution.show()

#direction fields
x,y=var('x,y')
f(x,y)=x*(y-1)
plot_slope_field(f,(x,-2,2),(y,-2,2), headaxislength=3,
headlength=3, axes_labels=['$x$','$y(x)$'])
```

Результати роботи цього прикладу, а також деякі інші, подивимось «*вживу*».