Рівняння з відокремлюваними змінними

Практичне заняття з курсу „Диференціальні рівняння”

Пічкур В. В., Матвієнко В. Т., Харченко І. І., Васін П. О., Волощук С. Д.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
кафедра моделювання складних систем

2020

Диференціальне рівняння

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

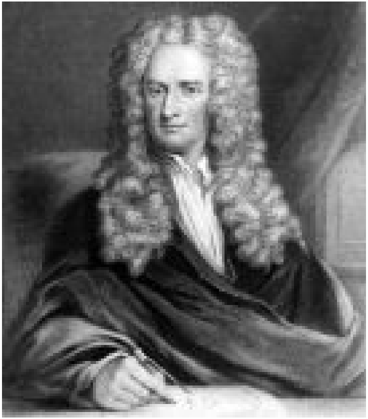
Означення

називається диференціальним рівнянням.

Означення

n називається порядком диференціального рівняння.

Ісаак Ньютон



Диференціальне рівняння

Означення

Функція $y(x)$ *називається розв'язком диференціального рівняння* (1)*, якщо вона* n*-разів неперервно диференційована на деякому інтервалі* $(a, b) = I$ *і задовольняє диференціальному рівнянню* (1) $\forall\, x \in I$.

Приклад

$$y'' + 3xy' + 2y = x^2$$

диференціальне рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння

Означення

При $n = 1$ *диференціальне рівняння* (1) *називається диференціальним рівнянням першого порядку*

$$F(x, y, y^{0}) = 0. \quad (2)$$

Означення

Диференціальне рівняння (2) *називається розвязаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (3)$$

Диференціальне рівняння. Розв’язок

Означення

Розвязком диференціального рівняння (3) *на інтервалі I назвемо фун кцію*

$$y = \phi(x),$$

визначену і неперервно диференційовану на I, яка не виходить з області визначення функції $f(x, y)$ *і яка перетворює диференціальне рівняння* (3) *в тотожність* $\forall x \in I$, *тобто*

$$d\phi(x)$$

$dx \equiv f(x, y(x)),\ x \in I.$

Приклад

$$y^0 = y$$

$$y = e^x$$

$$y = 2e^x$$

Диференціальне рівняння. Розв'язок

частинний розв'язок

загальний розв'язок

особливий розв’язок

загальний інтеграл

інтеграл

Диференціальне рівняння в диференціальній формі

Означення

Поряд з dy

$$dx = f(x, y)$$

будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціальній формі

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

або в більш загальному вигляді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (4)$$

$M(x, y)$, $N(x, y)$ – *неперервні в деякій області.*

Задача Коші

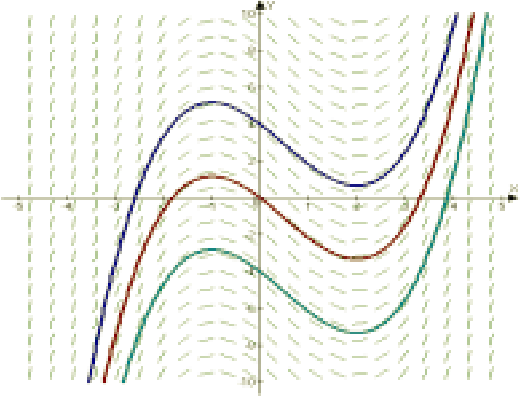
Означення

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Знайти такий розв'язок $y = y(x)$, *який проходить через задану точку* (x_0, y_0)

$$y(x_0) = y_0. \quad (5)$$

Задача Коші



Огюстен Луї Коші

Рівняння з відокремленими змінними

Означення

Розглянемо рівняння

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \quad (6)$$

де $X(x)$, $Y(y)$ – неперервні функції своїх аргументів. Диференціальне рівняння (6) називається рівнянням з відокремлени ми змінними.

Рівняння з відокремленими змінними

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

$$d\left(\int X(x)dx + \int Y(y)dy\right) = 0$$

Загальний розв’язок в квадратурах

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C, \quad (7)$$

C – довільна константа.

Рівняння з відокремленими змінними

$$\int_{x_0}^{x} X(s)ds + \int_{y_0}^{y} Y(s)ds = C. \quad (8)$$

Якщо потрібно знайти розв’язок задачі Коші $y(x_0) = y_0$, то $C = 0$

$$\int_{x_0}^{x} X(s)ds + \int_{y_0}^{y} Y(s)ds = 0 \quad (9)$$

Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення

Рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \quad (10)$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними. Тут $m(x)$, $n(y)$, $f(x)$, $g(y)$ – неперервні функції.

Відокремлюємо змінні

Припустимо

$$f(x)n(y) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{m(x)}dx + \frac{g(y)}{n(y)}dy = 0. \quad (11)$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (10)

$$\int \frac{f(x)}{m(x)}dx + \int \frac{g(y)}{n(y)}dy = C, \quad (12)$$

C – довільна константа.

При діленні на $f(x)n(y)$ ми можемо втратити розв’язки, які визначаю ться рівняннями $n(y) = 0$, $f(x) = 0$.

Задача 1

Розв’язати рівняння

$$y^0 \sin x = y \ln y$$

Розв’язок

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\ln y$$

Розділивши змінні, отримаємо рівняння

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

Проінтегрувавши, знайдемо

Розв’язок

$y \ln y =$

Z_{dx}

$\sin x + \ln C,$

Z_{dy}

C – довільна константа. Перший інтеграл дає

Z_{dy}

$\ln y = \ln |\ln y|$

$y \ln y =$

$Z_{d \ln y}$

Розв’язок

Другий інтеграл

$$\int \frac{1}{\sin x}dx =$$

Оскільки

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}.$$

$(1 - \cos x)(1 + \cos x) = {}^{1}2\ 1$

1

$(1 - \cos x) + {}^{1}(1 + \cos x)$

,

тоZ_1

$\sin x dx = -{}^{1}2 Z\ 1$ $d \cos x =$

$1 - \cos x + {}^{1}$

$1 + \cos x$

$= {}^{1}2 \ln |1 - \cos x| - {}^{1}2 \ln |1 + \cos x| = \ln\ tg\ {}^{x}2$

Розв’язок

$$\ln|\ln y| = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ln C$$

C – довільна константа.

$$\Downarrow$$

$$\ln y = C \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\Downarrow$$

$y = e^{C\,tg\,\frac{x}{2}}$

загальний розв’язок рівняння. Тут C –

довільна константа.

Розв’язок

При $y = 1$ функція $y \ln y = 0$. Підставляємо $y = 1$ в

$y^0 \sin x = y \ln y$

Одержуємо тотожність.

$y(x) = 1$ – розв’язок, який ми втратили при

розділенні змінних Аналогічно

перевіряємо $x = 0$ – не є розв’язком.

Відповідь

$y = e^{C\, tg\, \frac{x}{2}}$

загальний розв’язок рівняння, C –

довільна константа, $y = 1$

Задача 2

Розв'язати рівняння

$$x^2y^2y^0 + y = 1.$$

Розв’язок

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} + y = 1.$$

$$\Downarrow$$

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$x^2y^2dy + (y-1)dx = 0.$$

Розв'язок

$$x^2y^2dy + (y-1)dx = 0.$$

Розділимо на $x^2(y-1)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y^2}{y-1}dy + \frac{dx}{x^2} = 0.$$

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy + \int \frac{dx}{x^2} = C.$$

Тут C – довільна константа.

Розв’язок

Z y^2

Z 1

$y - 1$ $dy =$

$y - 1$ $dy =$

Z $y^2 - 1$

$y - 1$ $dy +$

Z

$(y + 1)dy + y^2$

$y - 1$ $dy = \frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1|$ Z dx

$x^2 = -\frac{1}{x}$.

Z 1

$2 + y + \ln|y-1| - \frac{1}{x} = C$
загальний інтеграл рівняння. Тут C –

довільна константа.

Розв’язок

При $y = 1$ функція $y - 1 = 0$. Підставляємо $y = 1$ в

$$x^2y^2dy + (y - 1)dx = 0.$$

Одержуємо тотожність.

$y(x) = 1$ – розв’язок, який ми втратили при розділенні змінних

Відповідь

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| - \frac{1}{x} = C$$

загальний інтеграл рівняння, C – довільна

константа, $y = 1$

Спеціальний випадок

dy

$$dx = f(ax + by + c),$$

де a, $b \neq 0$, c — сталі, $f(x)$ – неперервна функція.

Зробимо заміну

$$z = ax + by + c$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}$$

Спеціальний випадок

Підставляємо в

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dz}{a + bf(z)} - dx = 0$$

Задача 3

Розв’язати рівняння

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Розв'язок

Введемо заміну змінних

$$z = 4x + 2y - 1.$$

$$z^0 = 4 + 2y^0$$

$$z^0 - 4 = 2\sqrt{z}$$

$$z^0 = 4 + 2\sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{2 + \sqrt{z}} = 2dx.$$

Z

$2dx + C,$

C – довільна константа

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}} =$$

Розв’язок

Знайдемо

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}}$$

Заміна

$$\sqrt{z} = t,\ dz = 2tdt,\ 2+\sqrt{z} = 2+t,$$

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}} = \int \frac{2tdt}{2+t} = 2\int \frac{t+2-2}{2+t}$$

$t + 2^{dt} =$ $= 2t - 4 \ln |2 + t| =$ $2 \sqrt{z} - 4 \ln 2 + \sqrt{z}$ ·

Розв’язок

C – довільна константа

$\int \frac{dz}{2 + \sqrt{z}} =$

$\int 2dx + C,$

$$z = 4x + 2y - 1$$

$$\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\ 2 + \sqrt{4x + 2y - 1} - x = C,$$

Відповідь

$$2\sqrt{z} - 4\ln 2 + \sqrt{z} = 2x + 2C.$$

C – довільна константа

Задача 4

Розв’язати рівняння

$$x(1+y^2) + y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Розв'язок

Представимо дане рівняння у вигляді

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0.$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на $(1+x^2)(1+y^2)$, отримаємо рівняння з розділеними змінними

$$\frac{x}{1 + x^2}dx + \frac{y}{1 + y^2}dy = 0.$$

Розв’язок

Інтегруючи це рівняння, послідовно знаходимо

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln C \quad \frac{1}{2}\ln C = C_1 .$$

Звідси $(1+x^2)(1+y^2) = C$.

Відповідь

Загальний інтеграл рівняння

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = C,$$

C – довільна константа

Задача 5

Знайти частинний розв’зок рівняння

$$(1 + e^x)yy^0 = e^x,$$

який задовольнить початкову умову

$$y(0) = 1.$$

Розв’язок

$$(1 + e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Розділюючи змінні, отримуємо

$$ydy = \frac{e^x dx}{1 + e^x}.$$

Розв’язок

Інтегруючи, знайдемо загальний інтеграл

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C. \quad (13)$$

Підставлюючи в (13) $x = 0$ та $y = 1$, матимемо

$$\frac{1}{2} = \ln 2 + C, \text{ звідки } C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Розв’язок

Підставляючи в (13) знайдене значення C, отримуємо

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Відповідь

$$\frac{y^2}{2} = \ln\frac{1 + e^x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Однорідні рівняння та ті, що до них зводяться Практичне заняття з курсу „Диференціальні рівняння”

Пічкур В. В., Матвієнко В. Т., Харченко І. І., Васін П. О.,
Волощук С. Д.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
кафедра моделювання складних систем

2020

Однорідні функції

Означення

Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією виміру m, якщо для довільного $t > 0$ знайдеться m таке, що для будь-яких x, y

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Приклад

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

Однорідне диференціальне рівняння

Означення

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (14)$$

в якому функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ є однорідними функціями однієї і тієї ж степені однорідності m, називається однорідним диференціальним рівнянням.

Однорідне рівняння можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (15)$$

в якому функція $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Заміна змінних

Заміна змінних

$$y = zx,$$

де z– нова шукана функція від x, приводить до рівняння з відокрем люваними змінними.

$$dy = d(zx) = zdx + xdz$$

Розв’язування

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$y = zx, \ dy = d(zx) = zdx + xdz$$

$$\Downarrow$$

$$M(x, zx)dx + N(x, zx)(zdx + xdz) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^m M(1, z)dx + x^m N(1, z)(zdx + xdz) = 0,$$

$$\Downarrow$$

Розв’язування

$$(M(1, z) + zN(1, z))\, dx + xN(1, z)dz = 0$$

одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними ⇓

$x +$ $N(1, z)$

dx

ln $|x|$ +

C – довільна константа

$M(1, z) + zN(1, z)$ $dz = 0$

⇓

Z $N(1, z)$

$$M(1, z) + zN(1, z)\, dz = \ln C \Downarrow$$

Розв’язування

$$y = zx, \quad z = \frac{y}{x}$$

Загальний інтеграл

$$x = e^{\phi\left(\frac{y}{x}\right)},$$

де $\phi(z) = \int \frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}\,dz.$

При відокремленні змінних ми могли загубити розв’язки з рівності $M(1, z) + N(1, z)z = 0.$

Задача 1

Розв’язати рівняння

$$(x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0$$

Розв'язок

$$(x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0$$

Це однорідне рівняння $m = 2$.

$$M(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$M(tx,ty) = t^2 M(x, y)$$

$$N(x, y) = x^2$$

$$N(tx,ty) = t^2 N(x, y)$$

Розв’язок

$$(x^2 + xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$$

Зробимо заміну

$y = zx,\ dy = zdx + xdz$

$$(1 + z + z^2)dx - (xdz + zdx) = 0$$

$$(1 + z^2)dx - xdz = 0$$

одержуємо рівняння з відокремлюваними

змінними

Розв’язок

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{1 + z^2} = 0$$

$$\ln |x| - arctg\, z = \ln C$$

C – довільна константа

$$x = Ce^{arctg\, z}$$

$$y = zx,\ z = {}^{y}\!/_{x}$$

Відповідь

$$x = Ce^{\operatorname{arctg} {}^{y}\!/_{x}}$$

загальний інтеграл, C – довільна константа

$x = 0$ – також розв'язок, який загубили при діленні

Задача 2

Розв'язати рівняння

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Розв'язок

рівняння y =

Запишемо вигляді y^0 r

1 −

$$\frac{y}{x}$$

$$2 \frac{y}{x} + x,$$

так що дане рівняння виявляється однорідним щодо x та y.

Покладемо $u = \frac{y}{x}$,

або $y = ux$. Тоді

$$y^0 = xu^0 + u.$$

Підставляючи в рівняння вирази для y та y^0, отримуємо

$$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}.$$

Розв’язок

Підставляючи в рівняння вирази для y та y^0, отримуємо

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}.$$

Розділюючи змінні, отримуємо

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x},$$

Розв’язок

Звідси інтегруванням знаходимо

$$\arcsin u = \ln|x| + \ln C_1 \ (C_1 > 0), \text{ або } \arcsin u = \ln C_1|x|.$$

Так як $C_1|x| = \pm C_1 x$, то, позначаючи $\pm C_1 = C$, отримуємо $\arcsin u = \ln Cx$, де $|\ln Cx| \le \frac{\pi}{2}$ або $e^{-\pi/2} \le Cx \le e^{\pi/2}$. Замінюючи u на $\frac{y}{x}$, матимемо загальний інтеграл

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln Cx.$$

Розв’язок

Звідси загальний розв’язок

$$y = x \sin \ln Cx.$$

При розділенні змінних ми ділили обидві частини рівняння на добуток $x\sqrt{1 - u^2}$,

тому могли втратити розв’язок, які звертають в нуль цей добуток. Покладемо тепер $x = 0$ та $\sqrt{1 - u^2} = 0$.

Розв’язок

При $x \neq 0$, $u = \frac{y}{x}$ з співвідношення

$$\sqrt{1 - u^2} = 0$$

отримуємо, що

$$\frac{y^2}{x^2} = 1,$$

звідки $y = \pm x$.

Безпосередньо перевіркою переконуємося, що функція $y = -x$ і $y = x$ також є розв’язок даного рівняння.

Відповідь

$$y = x \sin \ln Cx$$

загальний розв'язок, C – довільна константа
$y = -x$, $y = x$

Рівняння, яке зводиться до однорідного

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

x_0, y_0

Заміна

(

$u = x - x_0,$

$v = y - y_0.$

$du = dx, dv = dy$

приходимо до однорідного рівняння

Рівняння, яке зводиться до однорідного

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

= 0

$b_1 6= 0.$

Заміна

$\Delta =$

Припустимо

$a_1\ b_1\ a_2\ b_2$

$$z = a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y + c_2 = kz,$$

k – коефіцієнт пропорційності,

$$dz = a_1dx + b_1dy \Rightarrow dy = \frac{dz - a_1dx}{b_1}$$

приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними

$$(z + c_1)dx + (kz + c_2)\frac{dz - a_1dx}{b_1} = 0$$

Задача 3

Розв’язати рівняння

$$(x - 1)dy = (x + y + 2)dx$$

Розв’язок

$$(x + y + 2)dx - (x - 1)dy = 0$$

$$1 \ 1 \qquad = 1$$

$$\Delta = (\quad -1 \ 0$$

$$x + y + 2 = 0,$$

$$x - 1 = 0.$$

$$x_0 = 1, \ y_0 = -3$$

Заміна

(

$$u = x - 1,$$

$$v = y + 3.$$

$$du = dx, \ dv = dy$$

Розв’язок

$$(u + v)du - udv = 0$$

Це однорідне рівняння $m = 1$.

$$M(u, v) = u + v$$

$$M(tu,tu) = tM(u, u)$$

$$N(x, y) = -u$$

$$N(tu,tu) = tN(u, v)$$

Розв’язок

$$(u + v)du - udv = 0$$

Зробимо заміну

$v = zu,\ dv = zdu + udz$

$$(u + uz)du - u(udz + zdu) = 0$$

$$(1 + z)du - udz - zdu = 0$$

$du - udz = 0$

одержуємо рівняння з відокремлюваними

змінними

Розв’язок

du

$$u - dz = 0$$

$$\ln |u| - z = \ln C$$

C – довільна константа

$$u = Ce^{z}$$

$$v = zu,\ z = {}^{v}u$$

$$u = Ce^{v}{}_{u}$$

загальний інтеграл, C – довільна константа
$u = 0$ – також розв’язок, який загубили при діленні

Розв’язок

Відповідь

$$x - 1 = Ce^{\frac{y+3}{x-1}}$$

загальний інтеграл, C – довільна константа, $x = 1$

Задача 4

Розв'язати рівняння

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

Розв’язок

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

$= 0$ Заміна

$\Delta =$

1 1 2 2

$$z = x + y,\ dz = dx + dy,\ 2z = 2x + 2y$$

$$dy = dz - dx$$

Розв’язок

$$(z + 1)dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0$$

$$(2 - z)dx + (2z - 1)dz = 0$$

приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними

$$dx - \frac{2z - 1}{z - 2}dz = 0$$

Розв’язок

$$x - 2z - 3\ln|z - 2| = -C$$

C – довільна константа

$$-x - 2y - 3\ln|x + y - 2| = -C$$

$$x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$$

C – довільна константа

$z = 2$ також розв'язок, $x + y = 2$

Відповідь

$$x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$$

загальний інтеграл, C – довільна константа, $x + y = 2$

Узагальнено-однорідні диференціальні рівняння Рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (16)$$

називається узагальнено однорідним, якщо існує таке число k, що ліва частина рівняння стає однорідною функцією від величин

$$x, y, dx, dy$$

при умові, що вони вважаються величинами відповідно першого, k-го, нульового і $k - 1$-го порядків.

x 1
y k
dx 0
dy $k - 1$

Узагальнено-однорідні диференціальні

рівняння Це означає, що рівність

$$M(tx, t^k y)dx + N(tx, t^k y)t^{k-1}dy = t^m[M(x, y)dx + N(x, y)dy] \quad (17)$$

виконується при всіх t для довільних x, y, dx та dy або, іншими словами, при всіх t виконуються

однорідне рівняння.

$$M(tx, t^k y) = t^m M(x, y),$$)

$$N(tx, t^k y) = t^{m-k+1} N(x, y). \quad (18)$$

При $k = 1$ маємо звичайне

Алгоритм

Розбиваємо ліву частину рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ на додан ки, які не містять додавання і віднімання

Оцінюємо вагу кожного доданку за правилом, яке наведене у та блиці. Вага добутку рівна сумі їхніх ваг

Знаходимо k так, щоб ваги кожного доданку співпали

Робимо підстановку (19)

Приходимо до рівняння з розділеними змінними

x 1

x^m m

$y\ k$

$y^{s} sk$

$dx\ 0$

$dy\ k-1$

$$y = zx^k,\ dy = d(zx^k) = x^k dz + kx^{k-1} z dx \quad (19)$$

Задача 5

Розв’язати рівняння

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0. \quad (20)$$

Розв’язок

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0$$

Розбиваємо на доданки

$$6dx - x^2y^2dx + x^2dy = 0$$

x 1

x^m m

y k

y^s sk

dx 0

dy $k-1$

$$0 = 2 + 2k = 2 + k - 1. \quad (21)$$

Ця система сумісна,

$$k = -1.$$

Підстановка

$$y = \frac{z}{x} \quad (22)$$

$$df(x) = f'(x)dx$$

$$d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

$$dy = d\frac{z}{x} = \frac{dz}{x} - \frac{z}{x^2}dx$$

Розв’язок

$$xdz - (z^2 + z - 6)dx = 0. \quad (23)$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруючи,

знаходимо $z^2 + z - 6 - \frac{dx}{x} = 0$

$$\int \frac{dz}{z^2 + z - 6} - \int \frac{dx}{x} = \ln C_1$$

$$\int dz$$

$$(z-2)(z+3)^{-}\ \ln|x| = \ln C_1$$

$$(z-2)(z+3)=^{1}$$

$$5(z-2)-^{1}$$

$$1$$

$$5(z+3)$$

Розв'язок

$$Z_{dz}$$

$$(z-2)(z+3)^{-}\ \ln|x| = \ln C_1$$

$$Z_{dz}$$

$$5(z-2)^{-}\ 1$$

$$Z_{dz} \qquad C_1$$

$$5(z+3) - \ln|x| = \ln$$

$$5\ln|z-2| - \frac{1}{5}\ln|z+3| - \ln|x| = \ln C_1$$

$$\ln|z-2| - \ln|z+3| - 5\ln|x| = 5\ln C_1$$

$$\ln|z-2| - \ln|z+3| - \ln|x|^5 = \ln C^5{}_1,\ C^5{}_1 = C$$

$$\ln\frac{|z-2|}{|z+3||x|^5} = \ln C$$

Розв’язок

$$z - 2$$

$$(z + 3)x^5 = C \quad (24)$$

$$z = xy$$

Відповідь

$$xy - 2$$

$$(xy + 3)x^5 = C$$

загальний інтеграл, C – довільна константа

Маріус Софус Лі

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку Практичне заняття з курсу „Диференціальні рівняння”

Пічкур В. В., Матвієнко В. Т., Харченко І. І., Васін П. О., Волощук С. Д.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
кафедра моделювання складних систем

2020