

Варіант 1

1. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина дійсних чисел вигляду $x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9}$, де $x, y, z \in \mathbb{Q}$
2. Знайти порядок елемента групи $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{Z})$, де $GL_n(\mathbb{Z})$ – група за множенням усіх невідроджених цілочисельних матриць порядку n , обернені до яких також є цілочисельними
3. У циклічній групі $\langle a \rangle$ порядку n знайти всі елементи порядку k , якщо $n = 200, k = 8$
4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 7x + 5y = 4 \\ 3x + 10y = 7 \end{cases}$ в полі \mathbb{Z}_{13}
5. Розкласти даний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел за методом невизначених коефіцієнтів $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$
6. Довести, що для довільних натуральних чисел m, n і p многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ ділиться на $x^2 + x + 1$.

Варіант 2

1. З'ясувати, чи буде групою множина всіх відображень множини $M = \{1, 2, \dots, n\}$ у себе відносно суперпозиції відображень.
2. Знайти порядок групи поворотів правильного тетраедра
3. Знайти елемент обернений до $G[x] = x^2 + 2x + 1$ у розширенні поля \mathbb{Z}_3 за допомогою незвідного многочлена $F[x] = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
4. З'ясувати, чи буде множина M відносно звичайних операцій додавання та множення полем. Знайти обернений елемент для елемента a . $M = \mathbb{Z}_{143}, a = 97$.
5. Розкласти даний многочлен на незвідні множники над полем R : $f(x) = x^6 - 1$
6. Яку умову повинні задовольняти числа a, b, c , щоб один із коренів многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$ дорівнював сумі двох інших коренів?

Варіант 3

1. З'ясувати, чи буде групою множина ненульових дійсних матриць вигляду $\begin{pmatrix} x & y \\ ay & x \end{pmatrix}$, де число a – фіксоване, відносно множення.
2. Скласти таблицю Келі групи $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
3. Знайти елемент обернений до $G[x] = x^4 + x + 1$ у розширенні поля Z_2 за допомогою незвідного многочлена $F[x] = x^5 + x^2 + 1$
4. Знайти обернену матрицю до матриці $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ в полі Z_5
5. Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 4x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 24x + 9$
6. Для яких цілих значень a один корінь многочлена $36x^3 - 12x^2 - 5x + a$ дорівнює сумі двох інших? Знайти ці корені.

Варіант 4

1. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина раціональних чисел, у нескоротному записі яких знаменники є дільниками фіксованого натурального числа n .
2. Знайти порядок елемента групи $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$
3. Знайти елемент обернений до $G[x] = x^2 + 2x + 1$ у розширенні поля Z_7 за допомогою незвідного многочлена $F[x] = x^3 + x^2 + x + 2$
4. Знайти обернену матрицю до матриці $g = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 58 & \end{pmatrix}$ в полі Z_{13}
5. Визначити кратність кореня c для многочлена $f(x)$. Знайти значення многочлена $f(x)$ і його похідних у точці $x = x_0$. $f(x) = 2x^5 + 12x^4 + 27x^3 + 34x^2 + 36x + 24$, $c = -2$, $x_0 = -1$.
6. Довести, що многочлен $f(x)$ із цілими коефіцієнтами не має цілих коренів, якщо $f(0)$ та $f(1)$ – непарні числа.

Варіант 5

1. З'ясувати, чи буде групою множина ненульових дійсних матриць вигляду $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, де $x \in \mathbb{R}$, відносно множення.
2. Скласти таблицю Келі групи D_3 , де D_n – група симетрій правильного n -кутника
3. Чи буде відображення f гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом? $f: R^+ \rightarrow R$, $f(x) = \log_2 x$
4. З'ясувати, чи буде множина M відносно звичайних операцій додавання та множення полем. Знайти обернений елемент для елемента a . $M = Z_{150}$, $a = 101$.
5. Знайти найменше спільне кратне двох многочленів $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$
6. Сума двох коренів многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + a$ дорівнює 1. Визначити параметр a .

Варіант 7

1. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина дійсних чисел вигляду $x + y\sqrt[3]{3}$, де $x, y \in \mathbb{Q}$
2. Скласти таблицю Келі групи Z_9^* , де Z_n^* – мультиплікативна група оборотних класів лишків за модулем числа n
3. Чи буде відображення f гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом? $f: R \rightarrow R^+, f(x) = 2^x$
4. Розв'язати рівняння $x^2 - (3 + 3\sqrt{2})x + 4 + 6\sqrt{2} = 0$ у полі $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
5. Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 - 5x^3 + 16x^2 + 4x - 3$
6. Яку умову повинно задовольняти число b , щоб многочлен $x^5 - 15x^3 + b$ мав подвійний корінь, відмінний від нуля?

Варіант 8

1. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина комплексних матриць вигляду $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$
2. Знайти порядок елемента групи $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in T_2(Z_5^*)$ де $T_2(Z_5)$ – множина невідроджених верхніх трикутних матриць порядку 2 з коефіцієнтами з поля Z_5
3. Чи буде відображення f гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом? $f: C^* \rightarrow R^*, f(z) = \frac{1}{|z|}$
4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 9x + 2y = 8 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ в полі Z_{13}
5. Визначити кратність кореня c для многочлена $f(x)$. Знайти значення многочлена $f(x)$ і його похідних у точці $x = x_0$. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, c = 2, x_0 = -1$.
6. Для яких натуральних чисел m многочлен $(x+1)^m - x^m - 1$ ділиться на $x^2 + x + 1$?

Варіант 9

1. З'ясувати, чи буде групою множина підстановок $\{(1)(2)(3)(4); (12)(34); (13)(24); (14)(23)\}$ відносно операції суперпозиції.
2. Знайти порядок елемента групи $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$
3. Чи буде відображення f гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом? $f: R^* \rightarrow R^*, f(x) = \frac{1}{x}$
4. З'ясувати, чи буде множина M відносно звичайних операцій додавання та множення полем. Знайти обернений елемент для елемента a . $M = Z_{179}, a = 96$.
5. Знайти найменше спільне кратне двох многочленів $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + x + 2, g(x) = x^2 - x + 1$
6. Визначити многочлен найменшого степеня, який дає в остачі $2x$ при діленні на $(x-1)^2$ і $3x$ при діленні на $(x-2)^3$

Варіант 10

1. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина дійсних чисел вигляду $x + y\sqrt{3}$, де $x, y \in \mathbb{Q}$
2. Знайти порядок елемента групи $g = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(C)$, де $GL_n(P)$ – повна лінійна група степеня n – група за множенням усіх невідроджених матриць порядку n з коефіцієнтами з поля P
3. У циклічній групі $\langle a \rangle$ порядку n знайти всі елементи порядку k , якщо $n = 140, k = 35$
4. Розв'язати рівняння $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ у полі $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
5. Відокремити дійсні корені многочлена $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 4$
6. Визначити, для яких A і B тричлен $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ ділиться на $(x-1)^2$?