Однорідні рівняння та ті, що до них зводяться Практичне заняття з курсу "Диференціальні рівняння"

Пічкур В. В., Матвієнко В. Т., Харченко І. І., Васін П. О., Волощук С. Д.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
кафедра моделювання складних систем

2020

Однорідні функції

Означення

Функція $f(x, y)$ *називається однорідною функцією виміру* m*, якщо для довільного* $t > 0$ *знайдеться* m *таке, що для будь-яких* x, y

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Приклад

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

Однорідне диференціальне рівняння

Означення

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

в якому функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ є однорідними функціями однієї і тієї ж степені однорідності m, називається однорідним диференціальним рівнянням.

Однорідне рівняння можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2)$$

в якому функція $f(x, y)$ – однорідна функція нульового

виміру $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Заміна змінних

Заміна змінних

$$y = zx,$$

де z– нова шукана функція від x, приводить до рівняння з відокрем люваними змінними.

$$dy = d(zx) = zdx + xdz$$

Розв’язування

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$y = zx, \ dy = d(zx) = zdx + xdz$$

$$\Downarrow$$

$$M(x, zx)dx + N(x, zx)(zdx + xdz) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^m M(1, z)dx + x^m N(1, z)(zdx + xdz) = 0,$$

$$\Downarrow$$

Розв'язування

$$(M(1, z) + zN(1, z))\,dx + xN(1, z)dz = 0$$

одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $\Downarrow$

$$x + N(1, z)$$

$$dx$$

$\ln|x| +$

C – довільна константа

$M(1, z) + zN(1, z)^{dz} = 0$

$\Downarrow$

$Z_{N(1, z)}$

$M(1, z) + zN(1, z)^{dz} = \ln C \Downarrow$

Розв'язування

$$y = zx,\ z = {}^{y}\!/_{x}$$

Загальний інтеграл

$$x = e^{\phi\left(\frac{y}{x}\right)},$$

де $\phi(z) = \int \frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz.$

При відокремленні змінних ми могли загубити розв'язки з рівності $M(1, z) + N(1, z)z = 0.$

Задача 1

Розв’язати рівняння

$$(x^2 + xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$$

Розв'язок

$$(x^2 + xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$$

Це однорідне рівняння $m = 2$.

$$M(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$M(tx,ty) = t^2 M(x, y)$$

$$N(x, y) = x^2$$

$$N(tx,ty) = t^2 N(x, y)$$

Розв’язок

$$(x^2 + xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$$

Зробимо заміну

$y = zx,\ dy = zdx + xdz$

$$(1 + z + z^2)dx - (xdz + zdx) = 0$$

$$(1 + z^2)dx - xdz = 0$$

одержуємо рівняння з відокремлюваними

змінними

Розв’язок

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{1 + z^2} = 0$$

$$\ln|x| - arctg\, z = \ln C$$

C – довільна константа

$$x = Ce^{arctg\, z}$$

$$y = zx,\ z = {}^{y}\!/_{x}$$

Відповідь

$$x = Ce^{\operatorname{arctg} y/x}$$

загальний інтеграл, C – довільна константа
$x = 0$ – також розв'язок, який загубили при діленні

Задача 2

Розв'язати рівняння

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Розв'язок

рівняння y =

Запишемо вигляді y^0 r

1 −

$y\ x$

$2\ y$

$+\ x,$

так що дане рівняння виявляється однорідним щодо x та y.

Покладемо $u = \frac{y}{x}$,

або $y = ux$. Тоді

$$y' = xu' + u.$$

Підставляючи в рівняння вирази для y та y', отримуємо

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}.$$

Розв’язок

Підставляючи в рівняння вирази для y та y', отримуємо

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}.$$

Розділюючи змінні, отримуємо

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x},$$

Розв’язок

Звідси інтегруванням знаходимо

$$\arcsin u = \ln|x| + \ln C_1 \ (C_1 > 0), \text{ або } \arcsin u = \ln C_1|x|.$$

Так як $C_1|x| = \pm C_1 x$, то, позначаючи $\pm C_1 = C$, отримуємо $\arcsin u = \ln Cx$, де $|\ln Cx| \le \frac{\pi}{2}$ або $e^{-\pi/2} \le Cx \le e^{\pi/2}$. Замінюючи u на $\frac{y}{x}$, матимемо загальний інтеграл

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln Cx.$$

Розв'язок

Звідси загальний розв'язок

$$y = x \sin \ln Cx.$$

При розділенні змінних ми ділили обидві частини рівняння на добуток $x\sqrt{1 - u^2}$,

тому могли втратити розв'язок, які звертають в нуль цей добуток. Покладемо тепер $x = 0$ та $\sqrt{1 - u^2} = 0$.

Розв'язок

При $x \neq 0$, $u = \frac{y}{x}$ з співвідношення

$$\sqrt{1 - u^2} = 0$$

отримуємо, що

$$1 - \frac{y^2}{x^2},$$

звідки $y = \pm x$.

Безпосередньо перевіркою переконуємося, що функція $y = -x$ і $y = x$ також є розв'язок даного рівняння.

Відповідь

$$y = x \sin \ln Cx$$

загальний розв'язок, C – довільна константа

$y = -x$, $y = x$

Рівняння, яке зводиться до однорідного

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_0 = 1,\ y_0 = -3$$

Заміна

$$\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0. \end{cases}$$

$$du = dx,\ dv = dy$$

приходимо до однорідного рівняння

Рівняння, яке зводиться до однорідного

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

$= 0$

$b_1 \neq 0.$

Заміна

$\Delta =$

Припустимо

$a_1\ b_1\ a_2\ b_2$

$$z = a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y + c_2 = kz,$$

k – коефіцієнт пропорційності,

$$dz = a_1dx + b_1dy \Rightarrow dy = \frac{dz - a_1dx}{b_1}$$

приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними

$$(z + c_1)dx + (kz + c_2)\frac{dz - a_1dx}{b_1} = 0$$

Задача 3

Розв’язати рівняння

$$(x - 1)dy = (x + y + 2)dx$$

Розв’язок

$$(x + y + 2)dx - (x - 1)dy = 0$$

$$\Delta = \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right. = 1$$

$$\begin{array}{l} x + y + 2 = 0, \\ x - 1 = 0. \end{array}$$

$$x_0 = 1,\ y_0 = -3$$

Заміна

$$\left(\begin{array}{l} u = x - 1, \\ v = y + 3. \end{array} \right.$$

$$du = dx,\ dv = dy$$

Розв’язок

$$(u + v)du - udv = 0$$

Це однорідне рівняння $m = 1$.

$$M(u, v) = u + v$$

$$M(tu, tu) = tM(u, u)$$

$$N(x, y) = -u$$

$$N(tu, tu) = tN(u, v)$$

Розв’язок

$$(u + v)du - udv = 0$$

Зробимо заміну

$v = zu,\ dv = zdu + udz$

$$(u + uz)du - u(udz + zdu) = 0$$

$$(1 + z)du - udz - zdu = 0$$

$$du - udz = 0$$

одержуємо рівняння з відокремлюваними

змінними

Розв’язок

$$du$$

$$\frac{du}{u} - dz = 0$$

$$\ln |u| - z = \ln C$$

C – довільна константа

$$u = Ce^z$$

$$v = zu, \; z = \frac{v}{u}$$

$$u = Ce^{v/u}$$

загальний інтеграл, C – довільна константа
$u = 0$ – також розв'язок, який загубили при діленні

Розв'язок

Відповідь

$$x - 1 = Ce^{\frac{y+3}{x-1}}$$

загальний інтеграл, C – довільна константа, $x = 1$

Задача 4

Розв'язати рівняння

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

Розв’язок

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

= 0 Заміна

$\Delta =$

1 1 2 2

$$z = x + y,\ dz = dx + dy,\ 2z = 2x + 2y$$

$$dy = dz - dx$$

Розв’язок

$$(z + 1)dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0$$

$$(2 - z)dx + (2z - 1)dz = 0$$

приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними

$$dx - \frac{2z - 1}{z - 2}dz = 0$$

Розв’язок

$$x - 2z - 3 \ln |z - 2| = -C$$

C – довільна константа

$$-x - 2y - 3\ln|x + y - 2| = -C$$

$$x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$$

C – довільна константа
$z = 2$ також розв’язок, $x + y = 2$

Відповідь

$$x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$$

загальний інтеграл, C – довільна константа, $x + y = 2$

Узагальнено-однорідні диференціальні рівняння Рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

називається узагальнено однорідним, якщо існує таке число k, що ліва частина рівняння стає однорідною функцією від величин

$$x, y, dx, dy$$

при умові, що вони вважаються величинами відповідно першого, k-го, нульового і $k-1$-го порядків.

x 1
y k
dx 0
dy $k-1$

Узагальнено-однорідні диференціальні

рівняння Це означає, що рівність

$$M(tx,t^k y)dx + N(tx,t^k y)t^{k-1}dy = t^m[M(x, y)dx + N(x, y)dy] \quad (4)$$

виконується при всіх t для довільних x, y, dx та dy або, іншими словами, при всіх t виконуються

однорідне рівняння.

$$M(tx,t^k y) = t^m M(x, y),$$

)

$$N(tx,t^k y) = t^{m-k+1} N(x, y). \quad (5)$$

При $k = 1$ маємо звичайне

Алгоритм

Розбиваємо ліву частину рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ на додан ки, які не містять додавання і віднімання

Оцінюємо вагу кожного доданку за правилом, яке наведене у та блиці. Вага добутку рівна сумі їхніх ваг

Знаходимо k так, щоб ваги кожного доданку співпали

Робимо підстановку (6)

Приходимо до рівняння з розділеними змінними

x 1

x^m m

$y\ k$
$y^s sk$
$dx\ 0$
$dy\ k-1$

$$y = zx^k,\ dy = d(zx^k) = x^k dz + kx^{k-1} zdx \quad (6)$$

Задача 5

Розв’язати рівняння

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0. \quad (7)$$

Розв’язок

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0$$

Розбиваємо на доданки

$$6dx - x^2y^2dx + x^2dy = 0$$

x 1

x^m m

y k

y^s sk

dx 0

dy $k - 1$

$$0 = 2 + 2k = 2 + k - 1. \quad (8)$$

Ця система сумісна,

$$k = -1.$$

Підстановка

$$y = \frac{z}{x} \qquad (9)$$

$$df(x) = f'(x)dx$$

$$d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

$$dy = d\frac{z}{x} = \frac{dz}{x} - \frac{z}{x^2}dx$$

Розв'язок

$$xdz - (z^2 + z - 6)dx = 0. \quad (10)$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруючи,

знаходимо $z^2 + z - 6 - \frac{dx}{x} = 0$

dz

$$z = \frac{2 - 3Cx^5}{1 - Cx^5} \quad (11)$$

$$z = xy$$

Відповідь

$$y = \frac{2 - 3Cx^5}{x(1 - Cx^5)}$$

загальний інтеграл, C – довільна константа

Маріус Софус Лі

Контрольна робота

Практичне заняття з курсу "Диференціальні рівняння"

Пічкур В. В., Матвієнко В. Т., Харченко І. І., Васін П. О.,
Волощук С. Д.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
кафедра моделювання складних систем

2020

1

Розв’язати рівняння

$$(x-1)y^0 = y + 2$$

виконати завлання від руки на листку паперу

підписати роботу (ПІБ)

сфотографувати

надіслати файл (jpg) на адресу

mss.pichkur@gmail.com