Екзаменаційна робота

з дисципліни

„Управління динамічними системами"

студента К-26

Гуцу Данила Сергійовича

Білет № 24

1) Системи **лінійних** диференціальних рівнянь. Загальна теорія. Основні поняття визначення, теореми.

① Система диф. р-нь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

наз. лінійною неоднор. системою диф. р-нь,

відповідна лін. однор. система диф. р-нь має вигляд:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) \end{cases}.$$

Якщо ф-ії $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $i,j = \overline{1,n}$ неперервні в околі точки $(x_0, t_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0)$, то виконані умови цієї існуючої теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, і існує єдиний розв'язок $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, …, $x_n = x_n(t)$ системи р-нь, що задовольняє $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, …, $x_n(t_0) = x_n^0$.

Теорема) Загальний розв'язок лінійної однорідної системи представляється у вигляді лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків

2) Модальне керування

$x_n = x_n(t)$, системи р-нь, що задовольняє $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$.

Теорема) Загальний розв'язок лінійної однорідної системи представляється у вигляді лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків.

(2) Нехай є система зі скалярним керуванням $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t)$, $A, b - const$ (1)

A — $n \times n$ матриця, u – скаляр, b – n-вектор-стовпчик.

Теорема) Якщо система (1) цілком керована ($\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0$), що існує ф-ія керування $u(t) = c^T x(t)$, де $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, при якій система $\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x(t)$ має наперед довільно задані корені характер. р-ня $\det(A + bc^T - \lambda E) = 0$

При доведенні цієї теореми одночасно вказано алгоритм знаходження величин $c_1, \ldots, c_n$ за відомими значеннями коренів $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння

1

3) . Розв'язати рівняння

$$3y'^3 - xy' + 1 = 0$$

(3) $3y'^3 - xy' + 1 = 0$, $p = y'$

$3p^3 - xp + 1 = 0$, $x = \frac{3p^3+1}{p} = 3p^2 + p^{-1}$

$dx = d\left(\frac{3p^3+1}{p}\right) = \frac{9p^3 - 3p^3 - 1}{p^2} dp$

$dy = p\,dx$; $dy = \frac{9p^3 - 3p^3 - 1}{p} dp = \frac{6p^3 - 1}{p} dp$

$y = \int \frac{6p^3-1}{p} dp = \int 6p^2 dp - \int \frac{1}{p} dp = 2p^3 - \ln|p| + C$

$$\begin{cases} y = 2p^3 - \ln|p| + C \\ x = 3p^2 + p^{-1} \end{cases}$$

4) Розв’язати рівняння

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$$

(4) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$;

$(\lambda+1)^2 = 0$; $\lambda_{1,2} = -1$

$y^0 = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$; $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$;

$$\begin{cases} C_1'(x)\cancel{e^{-x}} + C_2'(x)x\cancel{e^{-x}} = 0 \\ -C_1'(x)\cancel{e^{-x}} + C_2'(x)\cancel{e^{-x}} - C_2'(x)x\cancel{e^{-x}} = 3\cancel{e^{-x}}\sqrt{x+1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0; \\ -C_1'(x) + C_2'(x)(1-x) = 3\sqrt{x+1} \end{cases}$$

$C_2'(x)x + C_2'(x) - C_2'(x)x = 3\sqrt{x+1}$.

$dC_2(x) = 3\sqrt{x+1}\,dx$, $C_2(x) = 2(x+1)^{3/2} + C_2$

$C_1'(x) = -xC_2'(x) = -3x\sqrt{x+1}$, $dC_1(x) = -3x\sqrt{x+1}\,dx$, $C_1(x) = -3\int x\sqrt{x+1}\,dx =$

$= -3\int (x+1)\sqrt{x+1}\,dx + 3\int \sqrt{x+1}\,dx = -3\int (x+1)^{3/2}dx + 3\int (x+1)^{1/2}dx = -3\,\dfrac{2(x+1)^{5/2}}{5} +$

$+ 3\,\dfrac{2(x+1)^{3/2}}{3} + C_1 = -\dfrac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2} + C_1$, то

$y = \left(-\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2} + C_1 + 2x(x+1)^{3/2} + xC_2\right)e^{-x} = \left(-\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2} +\right.$

$\left.+ C_1 + xC_2\right)e^{-x} = \left(\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + C_1 + C_2 x\right)e^{-x}$ — відповідь

2

5)Приклад 3 (Модуль 2 ТК)

Визначити, при яких b_1, b_2, b_3 система керування $x'(t) = Ax(t) + bu(t)$ є цілком керованою. Тут

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

$$n = \begin{cases} 1, & \textit{прізвище студента починається з А – Д} \\ 2, & \textit{прізвище студента починається з Е – К} \\ 3, & \textit{прізвище студента починається з Л – П} \\ 4, & \textit{прізвище студента починається з Р – Ф} \\ 5, & \textit{прізвище студента починається з Х – Я} \end{cases}$$

,,

5 Гуца, $n = 1$

$x'(t) = Ax(t) + bu(t)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad S_1 = \{b, Ab, A^2b\}$

$S_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 1b_1+b_2 & 1b+2b_2+b_3 \\ b_2 & 1b_2+b_3 & 1b_2+2b_3 \\ b_3 & 1b_3 & 1b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b_1 & 1b_1+b_2 & 1b_1+2b_2+1b_3 \\ b_2 & 1b_1+b_3 & 1b_1+2b_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b_2 & 2b_2+b_3 \\ 0 & b_3 & 2b_3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} b_2 & 2b_2+b_3 \\ b_3 & 2b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad 2b_2b_3 - 2b_2b_3 - b_3^2 \neq 0; \quad b_3^2 \neq 0$

Відповідь: $\forall b_1, b_2, b_3 \neq 0$ – система цілком керована.

6. Приклад 4 (Модуль 2 ТК)

Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування з вільним правим кінцем траєкторії 1

$$J = \int_0^1 (4u_1^2(t) + u_2^2(t) + \cos^2(x_1(t)))dt + \sin^2(x_2(1)) \quad \to \quad \min$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + u_1, \\ x_2' = 6x_2 - x_1 - 3x_1x_2 + u_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 4,\ x_2(0) = -2$$

Не вирішив.

Вибачте за погану якість фотографій. По-іншому зробити не міг.