Математична логіка

Логіка – наука про ???

Математична логіка

Логіка – наука про закони мислення.

Математична логіка

Логіка – наука про закони мислення.

Математична логіка – наука про ???

Математична логіка

Логіка – наука про закони мислення.

Математична логіка – наука про закони *математичного* мислення.

МЛ має на меті формалізацію та дослідження законів мислення математичними методами.

МЛ вивчає математичні теорії в цілому, які досліджуються за допомогою логіко-математичних мов.

Логіка як теоретична наука зародилась в Давній Греції в 6 ст. до н.е.

Арістотель (384–322 р. до н.е.) – основоположник логіки як цілісної науки:

- явно сформулював три основні закони традиційної логіки,
- розробив закони логічного виведення,
- обґрунтував аксіоматичний метод,
- створив першу формально-аксіоматичну систему логіки – силогістику,
- заклав основи модальної логіки.

Основні закони традиційної логіки

Класична МЛ опирається на 4 основні закони традиційної логіки.

- Закон тотожності
- Закон несуперечливості
- Закон виключеного третього

(Арістотель)

- Закон достатньої підстави

(Г.Лейбніц, 17-те ст.)

Закон тотожності в загальному вигляді:

В процесі одного і того ж міркування використовувані поняття не повинні змінюватись

Це засвідчує фундаментальну роль закону тотожності для організації мислення людини

В спрощеному вигляді: *A суть A*

Математичне формулювання: $A \leftrightarrow A$.

Закон несуперечливості :

Обидва твердження A *та* $\neg A$ *не можуть виконуватися одночасно*

Інколи називають законом суперечливості (*lex contradictionis*).

Математичне формулювання: $\neg(A \,\&\, \neg A)$.

Закон виключеного третього:

Обидва твердження A та $\neg A$ не можуть заперечуватися одночасно

Сильна форма *(tertium non datur)*

Одне з тверджень A чи $\neg A$ істинне

Математичне формулювання: $A \vee \neg A$.

Закон достатньої підстави:

Жодне твердження не може прийматися без достатніх підстав

Прийняття ЗДП відокремлює логіку точних наук від змістовної логіки.

ЗДП не має математичного формулювання.

Софізм – нібито правильне міркування, яке містить навмисну, але замасковану помилку.

- Софізм "рогатий":

- Софізм "накритий":

Софізм – нібито правильне міркування, яке містить навмисну, але замасковану помилку.

- Софізм "рогатий":

Те що ти не втратив, ти маєш.

Ти не втратив роги.

Отже, ти рогатий.

- Софізм "накритий":

Софізм – нібито правильне міркування, яке містить навмисну, але замасковану помилку.

- Софізм "рогатий":

Те що ти не втратив, ти маєш.

Ти не втратив роги.

Отже, ти рогатий.

- Софізм "накритий":

– Чи знаєш ти цього накритого чоловіка, що спить під стіною?

– Не знаю.

– Але це ж твій батько! Отже, ти не знаєш свого батька.

- Протагор і Еватл:

Еватл брав уроки софістики у Протагора за домовленістю, що гонорар він сплатить лише тоді, коли після закінчення навчання виграє свій перший судовий процес.

Але, отримавши потрібні знання, Еватл не став проводити жодного судового процесу і відповідно не заплатив Протагору.

Тоді викладач попередив, що подасть скаргу до суду, говорячи учню при цьому таке: "Чи змусять тебе судді сплатити гонорар, чи ні, в обох випадках ти будеш зобов'язаний сплатити належні мені гроші. У першому разі через вирок суду, в іншому - згідно з нашою з тобою угодою, бо ти виграв перший судовий процес".

Еватл відповів: "У жодному разі я не розрахуюсь з вами. Коли мене присудять до сплати, то я, програвши свій перший судовий процес як юрист, не сплачу через наш з вами договір, а коли мене не присудять до сплати гонорару, то я не заплачу вам відповідно до вироку суду, вигравши свій перший судовий процес як відповідач".

- *Паралогізми* – некоректні міркування із ненавмисним порушенням логічних законів.

- Найчастіше в паралогізмах порушується закон контрапозиції (“якщо з А випливає В, тоді з $\neg$В випливає $\neg$А”).
- В софізмах відбувається підміна понять і порушується головним чином закон тотожності.

- *Паралогізми* – некоректні міркування із ненавмисним порушенням логічних законів.

Якщо через дріт пропускають електричний струм, то дріт нагрівається. Дріт нагрівається. Отже, через дріт пропускають електричний струм.

- Найчастіше в паралогізмах порушується закон контрапозиції (“якщо з A випливає B, тоді з $\neg$B випливає $\neg$A”).
- В софізмах відбувається підміна понять і порушується головним чином закон тотожності.

- Точну грань між софізмами і паралогізмами провести важко.

– *Усі студенти здають іспити. Микола здає іспити. Отже, Микола – студент.*

– *Ссавці населяють сушу й океани. Миші – ссавці. Отже, миші населяють сушу й океани.*

Поширення софізмів вимагало точного формулювання принципів і правил логічних міркувань. Це зумовило зародження логіки як науки про закони мислення.

Середні віки – поглиблення, деталізація, коментарі силогістики.

Принциповий крок в розвитку логіки – *Г. Лейбніц* (1646–1716): ідея створення універсального логічного числення

Дж.Буль (1815–1864) – перша система *математичної логіки* (алгебра логіки), вона базується на строгій логіко-математичній мові.

***Математична логіка* – це формальна логіка, що використовує математичні методи.**

Формальна логіка вивчає акти мислення (поняття, судження, умовиводи, доведення) тільки з огляду їх форми, логічної структури, абстрагуючись від конкретного змісту.

Розвиток МЛ в 19 ст.: *А. де Морган* (1806–1873), *Е.Шредер* (1845–1902), *П.Порецький* (1846–1907), *Ч.Пірс* (1839–1914).

Ґ.Фреґе (1848–1925): ввів поняття предикату і кванторів, розвинув логіко-математичні мови і теорію їх смислу

Дж.Пеано (1858–1932): виклад цілих розділів математики на мові МЛ та аксіоматизація арифметики

Ґ.Фреґе, *Б.Рассел* (1872–1970): спроба зведення всієї математики до логіки. Привела до створення багатого логічного апарату, оформлення МЛ як повноцінного розділу математики.

- На межі 19–20 ст. відкриті ***парадокси*** в теорії множин.
- *Парадокс* – це логічно правильне міркування, яке веде до взаємовиключних висновків.
- Парадокси *не порушують* законів формальної логіки!

Парадокс крітянина (парадокс Епіменіда). Згаданий в "*Посланні до Тита св. Апостола Павла*".

Крітянин Епіменід сказав: усі крітяни – брехуни.

Парадокс брехуна: *Я брешу*.

Парадокс Рассела (1906).

Всі множини можна поділити на

- *природні*, що не містять себе як елементи,
- *неприродні*, які є елементом самої себе (напр. множина усіх абстрактних понять – є абстрактним поняттям).

Куди віднести множину всіх природних множин?

Парадокс Рассела (1906).

Всі множини можна поділити на

- *природні*, що не містять себе як елементи,
- *неприродні*, які є елементом самої себе (напр. множина усіх абстрактних понять – є абстрактним поняттям).

Куди віднести множину всіх природних множин?

$\boldsymbol{S}$ – множина всіх природних множин:

$\boldsymbol{S} = \{A \mid A \notin A\}$

Парадокс Рассела (1906).

Всі множини можна поділити на

- *природні*, що не містять себе як елементи,
- *неприродні*, які є елементом самої себе (напр. множина усіх абстрактних понять – є абстрактним поняттям).

Куди віднести множину всіх природних множин?

$\boldsymbol{S}$ – множина всіх природних множин:

$\boldsymbol{S} = \{A \mid A \notin A\}$

$A \in \boldsymbol{S} \Leftrightarrow A \notin A$. Візьмемо $A := \boldsymbol{S}$.

Парадокс Рассела (1906).

Всі множини можна поділити на

- *природні*, що не містять себе як елементи,
- *неприродні*, які є елементом самої себе (напр. множина усіх абстрактних понять – є абстрактним поняттям).

Куди віднести множину всіх природних множин?

$\boldsymbol{S}$ – множина всіх природних множин:

$\boldsymbol{S} = \{A \mid A \notin A\}$

$A \in \boldsymbol{S} \Leftrightarrow A \notin A$. Візьмемо $A := \boldsymbol{S}$. Звідси $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{S} \Leftrightarrow \boldsymbol{S} \notin \boldsymbol{S}$!

Парадокс Рассела (1906).

Всі множини можна поділити на

- *природні*, що не містять себе як елементи,
- *неприродні*, які є елементом самої себе (напр. множина усіх абстрактних понять – є абстрактним поняттям).

Куди віднести множину всіх природних множин?

$\boldsymbol{S}$ – множина всіх природних множин:

$\boldsymbol{S} = \{A \mid A \notin A\}$

$A \in \boldsymbol{S} \Leftrightarrow A \notin A$. Візьмемо $A := \boldsymbol{S}$. Звідси $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{S} \Leftrightarrow \boldsymbol{S} \notin \boldsymbol{S}$!

Парадокс цирульника. В одному містечку цирульник мусить голити всіх тих і тільки тих чоловіків містечка, хто не голиться сам.

Чи може цирульник голити себе?

Парадокс Греллінга.

Автологічні прикметники: мають ту ж властивість, яку називають ("багатоскладовий", "український").

Гетерологічні прикметники: не мають тієї властивості, яку називають ("колючий", "солоний", "зелений").

Прикметник "*гетерологічний*":

автологічний чи гетерологічний?

Парадокс Беррі.

Деякі речення є визначеннями натуральних чисел:

"парне просте число",

"сто в двадцятій степені".

Існують натуральні числа (їх множина нескінченна), які не можуть бути визначені реченнями української мови, що мають менше ста букв.

Серед них є найменше, його можна визначити реченням "*Найменше натуральне число, яке не можна визначити реченням української мови, що має менше ста букв*".

Але ж тут 98 букв!

Звідки можуть взятися парадокси.

- Самопосилання з протиріччям:

  Це речення неправдиве.

- Замкнуте коло чи нескінченна регресія:

  Наступне твердження вірне.

  Попереднє твердження неправдиве.

- Змішування рівнів абстракції.

Ахілл і черепаха (одна з апорій Зенона Елейського).

Швидконогий Ахіллес ніколи не зможе наздогнати повільну черепаху, якщо на початку руху вона знаходиться попереду.

Нехай Ахілл біжить вдесятеро швидше за черепаху і знаходиться на тисячу кроків позаду неї. За час, що Ахіллес пробіжить цю відстань, черепаха проповзе на сто кроків. Коли Ахілл подолає ці сто кроків, черепаха відповзе ще на десять. І так далі до нескінченності – Ахіллес черепаху так і не наздожене.

Парадокс купи (Евбулід).

Зернятко – не купа. Якщо до нього додавати по одній зернині, то в який момент утвориться купа?

Властивість «бути купою» не має чіткого формулювання.

Можливий і зворотний підхід: коли купа перестане бути купою, якщо прибирати з неї по зернятку? Окрема варіація на тему від Евбуліда – парадокс лисого: якщо волосся з голови випадає по одній волосині, з якого моменту чоловік стає лисим?

Парадокс корабля Тесея (Плутарх).

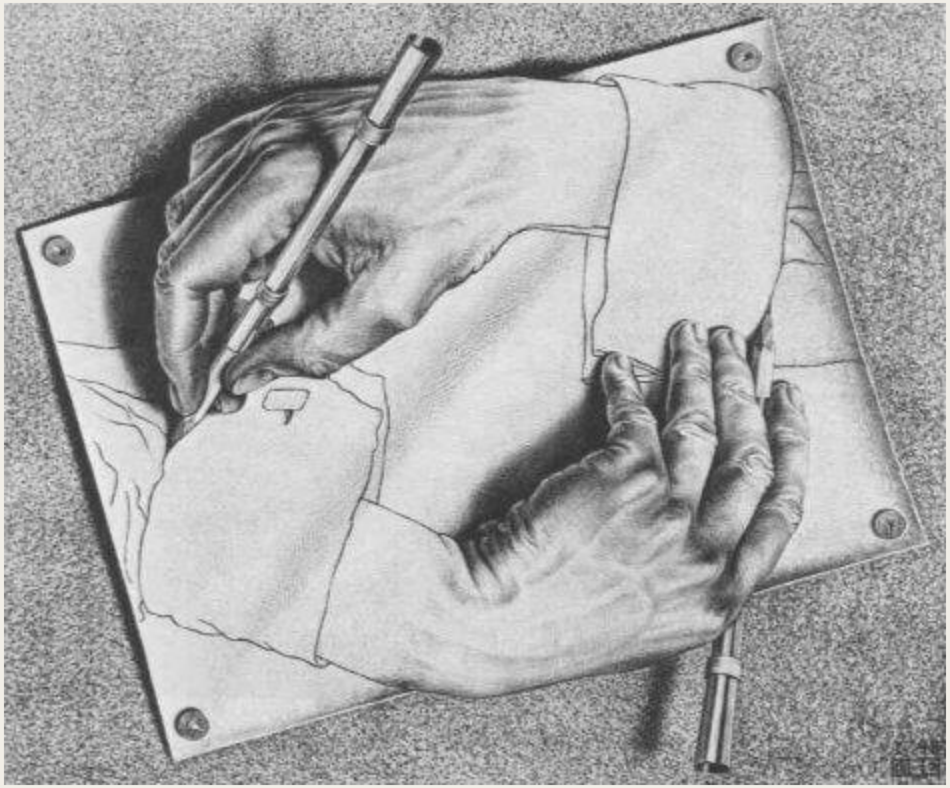
Чи залишиться корабель Тесея тим самим кораблем, якщо в ньому поступово позамінювали всі складові частини?

Сучасніші варіації.

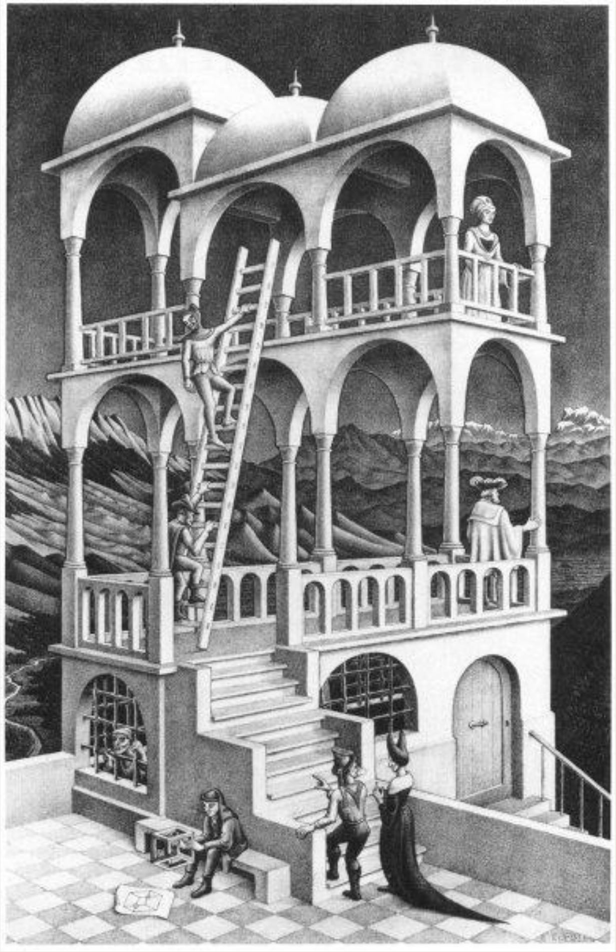
Улюблена шкарпетка, яку весь час залатують (Джон Локк).

Сокира (чи ніж), в якої час від часу замінюють лезо чи руків’я.

Картини Мауріца Ешера.

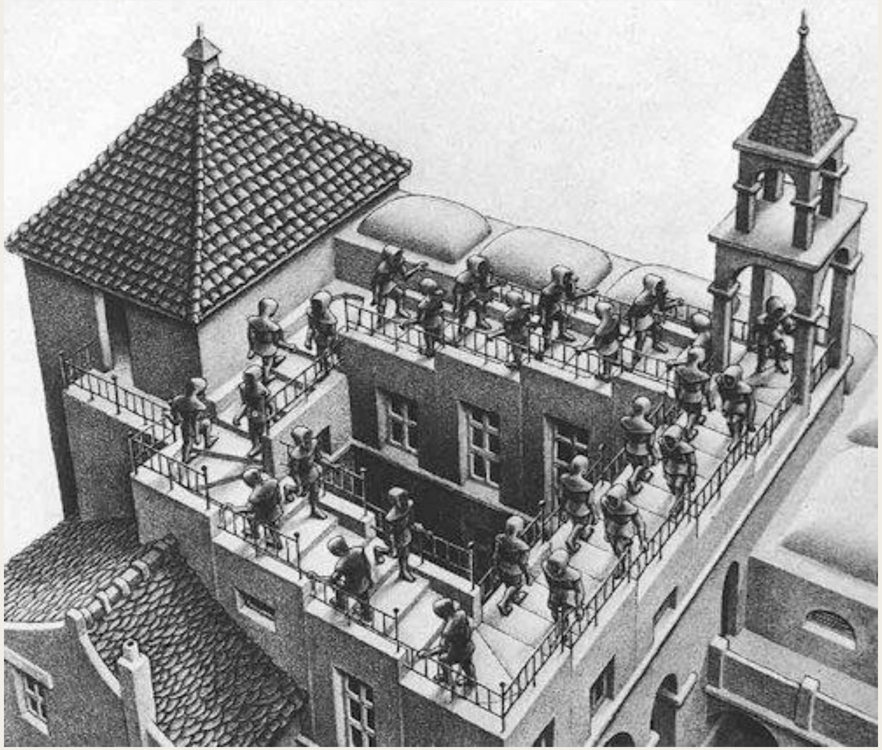


Руки, що малюють

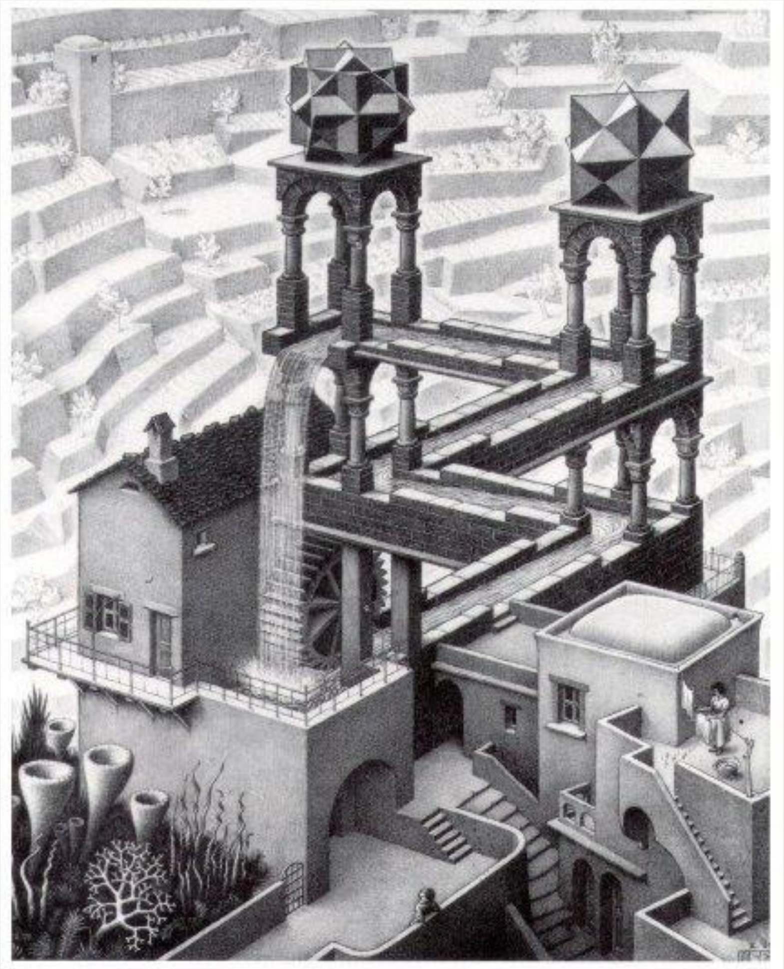


Бельведер

Картини Мауріца Ешера.



Підйом і спуск



Водопад

Картини Рене Магрітта.

Зрадливість образів

("Це не люлька")

Умови людського існування

Шляхи виходу із кризи математики

Л.Брауер (1881–1966) висунув *інтуїціоністську програму:*

відмова від актуальної нескінченності та закону виключеного третього;

в математиці допустимі тільки конструктивні доведення.

Д.Гільберт (1862–1943) висунув програму обґрунтування математики на базі МЛ: побудова формально-аксіоматичних моделей основних розділів математики та подальше доведення їх несуперечливості надійними, інтуїтивно переконливими (фінітними) засобами

Несуперечливість: неможливість одночасного виведення деякого твердження та його заперечення.

Математичні теорії стають предметом вивчення нової математичної науки – теорії доведень, або (Д.Гільберт) метаматематики.

Розробка Д.Гільбертом та його учнями теорії доведень на базі розвинутої Ґ.Фреґе та Б.Расселом логічної мови означала становлення МЛ як самостійної математичної дисципліни.

Теореми *К.Ґьоделя* (1906–1978) про неповноту засвідчують принципову обмеженість формально-аксіоматичного методу.

К.Ґьодель показав:

Кожна достатньо багата несуперечлива формальна теорія неповна, тобто існують записані мовою теорії твердження, які не можна ні довести, ні спростувати.

При цьому несуперечливість такої теорії не може бути доведена засобами самої теорії.

Приклад такої теорії: *формальна арифметика*

Предикати, висловлення

Основним поняттям логіки з семантичної точки зору є поняття ***предиката***. З цим поняттям тісно пов'язане поняття ***висловлення***.

Висловлення – речення, яке можна розглядати з точки зору його істинності чи хибності.

Суб'єкт (суб'єкти) – те, про кого або про що говориться у висловленні.

Предикат виражає *властивості* суб'єкту (суб'єктів) та *відношення* між суб'єктами.

Приклад. Предикат "x – є простим числом"

стає висловленням:

– "5 є простим числом", якщо значенням імені x є число 5.

– "4 є простим числом", якщо значенням x є число 4.

Висловлення є значенням предикату на конкретному даному.

Приклад. Застосуємо предикат

“якщо $x>y$ та $y>z$, то $x>z$” до даного $[x\mapsto 17, y\mapsto 11, z\mapsto 3]$

дістанемо висловлення “якщо 17>11 та 11>3, то 17>3”.

Висловлення може приймати одне з двох істиннісних значень – *T* або *F*, тому

предикат уточнимо як *функцію*, що конкретним суб’єктам ставить у відповідність значення *T* або *F*.

Предикат на множині A – це довільна функція вигляду $P: A \to Bool$, де $Bool=\{T, F\}$.

Область істинності та *область хибності* предиката P на A:

$$T(P) = \{d \in A \mid P(d)=T\}$$

$$F(P) = \{d \in A \mid P(d)=F\}$$

Предикат P на A *істинний*,
якщо для довільних $a \in A$: $P(a)=T$.

Предикат P на A *виконуваний*,
якщо існує $a \in A$: $P(a)=T$.

Вправи

Проаналізуйте наступні міркування. Якщо вони некоректні, то які закони логіки порушують?

1) Якщо ти їси менше, то голоднішаєш. Якщо ти голоднішаєш, то їси більше. Отже, якщо ти їси менше, то їси більше
2) Той, хто хоче щось вивчити, цього не знає. Незнаючий – невіглас. Отже, тільки невігласи хочуть вчитись
3) Студенти, який хочуть вчитися, вчаться і без заохочення. Студентів, які не хочуть вчитися, заохочувати марно. Отже, студентів заохочувати не потрібно
4) Сіль та цукор білі. Ніщо не може бути одночасно цукром і сіллю. Отже, ніщо не може бути білим

Вправи (далі)

5) Злодій не хоче брати щось погане. Надбання доброго – добра справа. Отже, злодій робить добру справу (*античний софізм*).

6) Вчитель завжди хоче, щоб його учень став мудрим і перестав бути невігласом. Таким чином, він хоче, щоб його учень став тим, чим він не є, та перестав бути тим, чим він є. Отже, він хоче перевести його із буття в небуття, тобто знищити (*античний софізм*).

7) Якщо тобі холодно, ти тепло вдягаєшся. Якщо тепло вдягнутися, то стане гаряче. Якщо тобі гаряче, ти роздягаєшся. Отже, якщо тобі холодно, ти роздягаєшся.

ПРОПОЗИЦІЙНА ЛОГІКА

Предикати – функції вигляду P: $A \to \{T, F\}$, де A – абстрактна множина, ми не проникаємо у її внутрішню структуру.

Засобами утворення складніших висловлень чи предикатів із простіших є *логічні зв'язки*.

Основні логічні зв'язки:

– заперечення $\neg$
– диз'юнкція $\vee$
– кон'юнкція **&**
– імплікація $\to$
– еквіваленція $\leftrightarrow$
– роздільна диз'юнкція $\oplus$

Логічні зв’язки відповідають певним зворотам природної мови.

Заперечення: "не …", "невірно, що …".

Диз’юнкція: "… або …".

Кон’юнкція: "… та …", "… і …".

Імплікація: "якщо … то …", "із ... випливає ...".

Еквіваленція: "... тоді і тільки тоді, коли ...", "… рівносильне …", "… еквівалентне …".

Роздільна диз’юнкція: "або …, або …".

Природна мова неоднозначна:

– слова “коса“, “ключ” (омонімія),

– речення "Микола зустрів Галю на галявині з квітами."

Багатозначність "або":

Чергові збори відбудуться завтра або післязавтра	роздільна диз’юнкція
Трикутник ABC прямокутний або рівнобедренний	нероздільна диз’юнкція
AB=BC, або трикутник ABC рівнобедрений	еквіваленція

Таким чином, для точного дослідження предикатів та висловлень треба ввести ***строгу логіко-математичну мову***.

Основні властивості логічних зв’язок

1) Комутативність $\vee$ та **&**:

$P \vee Q = Q \vee P$;

$P \& Q = Q \& P$.

2) Асоціативність $\vee$ та **&**:

$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$;

$(P \& Q) \& R = P \& (Q \& R)$.

3) Дистрибутивність $\vee$ відносно **&** та **&** відносно $\vee$:

$(P \vee Q) \& R = (P \& R) \vee (Q \& R)$;

$(P \& Q) \vee R = (P \vee R) \& (Q \vee R)$.

4) Ідемпотентність $\vee$ та **&**:

$P \vee P = P$;

$P \& P = P$.

5) Закони поглинання:

$P \& (P \vee Q) = P$;

$P \vee (P \& Q) = P$.

6) Зняття подвійного заперечення

$\neg\neg P = P$.

7) Закони де Моргана:

$\neg(P \vee Q) = (\neg P)\&(\neg Q)$;

$\neg(P\&Q) = (\neg P)\vee(\neg Q)$.

8) Закон контрапозиції:

$(P \to Q) = ((\neg Q) \to (\neg P))$.

9) Закон (правило) modus ponens

$P\&(P \to Q) \Rightarrow Q$.

10) Зведення $\to$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$ до $\neg$, $\vee$ та $\&$:

$P \to Q = (\neg P)\vee Q$;

$P \leftrightarrow Q = (P \to Q)\&(Q \to P) = (P\&Q)\vee((\neg P)\&(\neg Q))$;

$P \oplus Q = \neg(P \leftrightarrow Q) = (\neg(P \to Q))\vee(\neg(Q \to P)) = (P\&(\neg Q))\vee((\neg P)\&Q)$.

11) Комутативність $\leftrightarrow$ та $\oplus$:

$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$;

$P \oplus Q = Q \oplus P$.

12) Асоціативність $\leftrightarrow$ та $\oplus$:

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$;

$(P \oplus Q) \oplus R = P \oplus (Q \oplus R)$.

Мова пропозиційної логіки

Мови ПЛ відрізняються
– наборами символів базових логічних зв’язок;
– способами запису пропозиційних формул (напр. інфіксна, префіксна).

Вимога до множини *B* базових логічних зв’язок – *повнота*:
B визначає клас усіх пропозиційних композицій (теорема Поста).

Нехай вибрали $B=\{\neg, \vee\}$. Інші варіанти: $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\neg, \&\}$, $\{\neg, \vee, \&\}$, $\{\neg, \vee, \&, \rightarrow\}$.

Алфавіт мови ПЛ:
– символи логічних зв’язок $\neg$ і $\vee$,
– множина *Ps* пропозиційних символів.

Визначення *пропозиційної формули* (ПФ):
1) кожнен $A \in Ps$ є (*атомарною*) ПФ;
2) якщо Φ та Ψ є ПФ, то $\neg\Phi$ та $\Phi\vee\Psi$ є ПФ.
Множину всіх ПФ позначимо *Fp*.

<u>Для зручності.</u> Пріоритет символів логічних зв’язок: $\neg$, &, $\oplus$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Вводимо правило розставлення дужок справа наліво:

$$A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow\neg A\vee D \text{ означає } A\rightarrow(B\rightarrow(C\rightarrow((\neg A)\vee D))).$$

Інтерпретація ПФ за допомогою істиннісних оцінок.

Істиннісна оцінка мови ПЛ – довільне $\tau : Ps \to \{T, F\}$.

Продовжимо до $\tau : Fp \to \{T, F\}$:

$\tau(\neg\Phi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=F$;

$\tau(\Phi\vee\Psi)=T \Leftrightarrow \tau(\Phi)=T$ або $\tau(\Psi)=T$.

Кожна ПФ з множиною із n пропозиційних змінних задає n-арну функцію на 2-елементній множині $\{T, F\}$, тобто *булеву функцію*.

Кожна n-арна булева функція задається деякою ПФ, причому для фіксованої булевої функції множина таких ПФ нескінченна.

Ф *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi) = T$ при кожній істиннісній оцінці τ.

Ф тавтологія, якщо вона істинна на кожному наборі значень її пропозиційних змінних.

Тавтології називають *законами пропозиційної логіки*

Φ *суперечність*, якщо $\tau(\Phi) = F$ при кожній істиннісній оцінці τ.

Φ суперечність, якщо вона хибна на кожному наборі значень її пропозиційних змінних.

$$\Phi \text{ тавтологія } \Leftrightarrow \neg\Phi \text{ суперечність.}$$

Основні закони традиційної логіки виражають тавтології:

- закон тотожності $P \leftrightarrow P$;
- закон виключеного третього $(\neg P) \vee P$;
- закон несуперечливості $\neg(P \& (\neg P))$.

Властивості логічних зв'язок, записані на відповідній мові, також належать до важливих законів пропозиційної логіки.

Відношення логічного наслідку та логічної еквівалентності

Мн-на ПФ $\{\Phi_1,\ldots,\Phi_n\}$ *суперечлива*: $\Phi_1\&\ldots\&\Phi_n$ – суперечність.

На множині ПФ введемо відношення:

– *логічного* (*тавтологічного*) *наслідку* $\models$;

– *логічної* (*тавтологічної*) *еквівалентності* $\sim_т$.

Ψ є *логічним наслідком* Φ, якщо $\Phi\to\Psi$ – тавтологія.

Φ та Ψ *логічно еквівалентні*, якщо $\Phi\models\Psi$ та $\Psi\models\Phi$.

Позначення: $\Phi\models\Psi$ $\Phi\sim_т\Psi$

Замість $\varnothing\models\Phi$ пишемо $\models\Phi$.

Основні властивості відношень $\models$ та $\sim_т$.

1) $\models$ рефлексивне і транзитивне

2) $\sim_т$ рефлексивне, транзитивне і симетричне

3) Φ тавтологія $\Leftrightarrow$ $\models\Phi$

4) $\Phi\sim_т\Psi \Leftrightarrow\ \models\Phi\leftrightarrow\Psi \Leftrightarrow \Phi\leftrightarrow\Psi$ тавтологія.

Теорема (*семантичної еквівалентності*). *Нехай* Φ' *отримана із* Φ *заміною деяких входжень формул* $\Phi_1, ..., \Phi_n$ *на* $\Psi_1, ..., \Psi_n$ *відповідно. Якщо* $\Phi_1 \sim_т \Psi_1, ..., \Phi_n \sim_т \Psi_n$, *то* $\Phi \sim_т \Phi'$.

Відношення логічного наслідку для множин формул

Ψ є *логічним наслідком множини ПФ* $\{\Phi_1,..., \Phi_n\}$, якщо $\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_n \models \Psi$.

Позначення: $\{\Phi_1,..., \Phi_n\} \models \Psi$

Нехай $\mathbf{\Gamma} \subseteq Fp$ та $\mathbf{\Delta} \subseteq Fp$

Замість $\{\Phi\} \cup \mathbf{\Gamma}$ пишемо $\Phi, \mathbf{\Gamma}$ або $\mathbf{\Gamma}, \Phi$.

$\mathbf{\Delta}$ є *логічним наслідком* $\mathbf{\Gamma}$ (позначаємо $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$): для кожної $\tau : Fp \to \{T, F\}$

$\tau(\Phi)=T$ для всіх $\Phi \in \mathbf{\Gamma} \Rightarrow \tau(\Psi)=T$ для деякої $\Psi \in \mathbf{\Delta}$.

$\mathbf{\Gamma} \not\models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow$ існує $\tau : Fp \to \{T, F\}$ така:

$\tau(\Phi)=T$ для всіх $\Phi \in \mathbf{\Gamma}$ та $\tau(\Psi)=F$ для всіх $\Psi \in \mathbf{\Delta}$

Відношення $\models$ рефлексивне, але не транзитивне:

$$\{\Phi \vee \Psi \vee \neg\Phi\} \models \{\Phi \vee \Psi, \Psi \vee \neg\Phi\}$$

$$\{\Phi \vee \Psi, \Psi \vee \neg\Phi\} \models \Psi, \quad \text{але} \quad \{\Phi \vee \Psi \vee \neg\Phi\} \not\models \Psi.$$

Не всяке відношення транзитивне

Властивості відношення |= на пропозиційному рівні

C) Якщо $\mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{\Delta} \neq \varnothing$, то $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

U) Нехай $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$ та $\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{\Theta}$, $\Delta \subseteq \mathbf{\Sigma}$, Тоді $\mathbf{\Theta} \models \mathbf{\Sigma}$.

П1) $\neg\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \Phi$.

П2) $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

П3) $\Phi\vee\Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$ та $\Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

П4) $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi, \Psi$.

П5) $\Phi \& \Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

П6) $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi \& \Psi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi$ та $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Psi$.

П7) $\Phi\to\Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi$ та $\Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

П8) $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi\to\Psi \Leftrightarrow \Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Psi$.

П9) $\Phi\leftrightarrow\Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$ та $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi, \Psi$.

П10) $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi\leftrightarrow\Psi \Leftrightarrow \Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Psi$ та $\Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi$.

П1–П4 – базові властивості відношення |= на проп. рівні

Теорема (*заміни еквівалентних*). *Нехай* $\Phi \sim \Psi$. *Тоді*
$\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$ *та* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Psi$.