4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ЯК ЗАДАЧ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Варіаційне числення, як відомо, вивчає методи, що дозволяють знаходити мінімальні та максимальні значення функціоналів.

Даний розділ спрямовано на дослідження можливостей застосування відомих методів варіаційного числення до задач оптимізації систем керування.

Для того, щоб показати, як і в яких випадках задачі теорії керування можна звести до задач варіаційного числення, запишемо окремо постановки задач теорії керування та варіаційного числення.

Задача теорії керування	Задача Лагранжа варіаційного числення
Для системи $\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x,u,t),\ i=\overline{1,n},$ (4.1) де $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$ - вектор стану, $u(t)=(u_1(t),\ldots,u_r(t))^T$ – вектор керувань, з початковим станом $x_i(t_0)=x_{0i},\quad i=\overline{1,n},$ (4.2) на фіксованому проміжку часу $[t_0,t_1]$ треба знайти такий вектор керувань $u(t)$ і відповідну (4.1), (4.2) траєкторію $x(t)$, які б забезпечували мінімум функціонала $Q=\int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt.$ (4.3)	Потрібно знайти таку вектор-функцію $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$ з початковою умовою (4.2), щоб функціонал $Q=\int_{t_0}^{t_1} G^1(x,\dfrac{dx}{dt},t)dt$ (4.4) приймав своє мінімальне значення.

Для того, щоб показати, як задачу теорії керування можна звести до задачі варіаційного числення, будемо вимагати, щоб керування в системі (4.1) знаходились у вигляді

$$u_i = \varphi_i\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right), \qquad i = \overline{1, n}. \tag{4.5}$$

Підставивши (4.5) в (4.3), отримаємо функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G^1\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) dt,$$

який є функціоналом (4.4) **задачі Лагранжа**.

Таким чином, за умов (4.5) задача оптимізації (4.1) – (4.3) системи керування полягає у знаходженні оптимальної траєкторії, на якій досягається мінімум функціонала (4.4), що повністю збігається із задачею Лагранжа.

Отже, коли в системах керування вектор керувань можна зобразити у вигляді (4.5), то задачу оптимального керування можна звести до задачі варіаційного числення.

Наведемо постановки основних задач варіаційного числення в термінах теорії керування.

Задача Майера.

Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u, t), \; i = \overline{1, n},$$

початковий і кінцевий стани

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{4.6}$$

Функціонал

$$Q = g(x, u, t)\big|_{t=t_1}, \tag{4.7}$$

де $g(x, u, t)$ – функція, визначена на множині кінцевих станів системи.

Необхідно знайти таку вектор-функцію керувань $u(t)$ і відповідну до (4.1), (4.6) траєкторію $x(t)$, щоб функціонал (4.7) набував свого мінімального значення.

Задача Больця.

Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u,t),\ i = \overline{1,n},$$

початковий і кінцевий стани (4.6),

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + g(x,u,t)\big|_{t=t_1}. \tag{4.8}$$

Задача Больця полягає у знаходженні такої вектор-функції керувань $u(t)$, і відповідну траєкторію $x(t)$, щоб задовольнялись умови (4.1), (4.6) і функціонал (4.8) набував свого мінімального значення.

Відмітимо, що остання задача є найбільш загальною, але шляхом введення додаткових змінних завжди можна одну з наведених задач звести до іншої й навпаки.

4.2. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛІВ

Для дослідження необхідних і достатніх умов екстремуму функціоналів наведемо деякі визначення.

Визначення 4.1. Змінна величина Q називається функціоналом, що залежить від функції $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ і позначається $Q[x(t)]$, якщо кожній функції $x(t)$ з деякого класу відповідає число $Q[x(t)]$.

Визначення 4.2. Функція

$$\delta x(t) = x(t) - x^O(t) \tag{4.9}$$

називається варіацією аргументу $x(t)$.

Визначення 4.3. Якщо приріст $\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^O(t)]$ функціонала $Q[x(t)]$ можна записати у вигляді

$$\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^O(t)] = Q[x^O(t) + \delta x(t)] - Q[x^O(t)] =$$

$$= L[x(t), \delta x(t)] + \beta[x(t), \delta x(t)] \times \max_{t \in [t_0, t_1]} \|\delta x(t)\|, \tag{4.10}$$

то $L[x(t), \delta x(t)]$ – лінійна відносно варіації аргументу $\delta x(t)$ частина приросту функціонала $Q[x(t)]$ – називається варіацією (першою варіацією) функціонала й позначається

$$\delta Q[x(t)] = L[x(t), \delta x(t)]. \tag{4.11}$$

Тут $\beta[x(t), \delta x(t)] \to 0$ при $\max_{t \in [t_0, t_1]} \|\delta x(t)\| \to 0$.

Теорема 4.1. Якщо функціонал $Q[x(t)]$ має варіацію (4.11) і досягає екстремуму (мінімуму чи максимуму) на $x^0(t)$, де $x^0(t)$ – внутрішня точка області визначення функціонала,

то
$$\delta Q[x^0(t)] = 0.$$

Наведемо необхідні й достатні умови екстремуму функціонала залежно від постановок задач варіаційного числення.

Задача із закріпленими (нерухомими) кінцями траєкторії.

Теорема 4.2. Необхідними умовами екстремуму функціонала

$$Q[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \frac{dx}{dt}, t)dt \tag{4.12}$$

для траєкторії $x(t) \in C^1_{[t_0, t_1]}$ із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ за умови, що функція $G = G(x, \frac{dx}{dt}, t)$ – двічі диференційована за всіма своїми аргументами, є рівняння **Ейлера-Лагранжа**:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial x_i'} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (G'_x - \frac{d}{dt}G'_{x'} = 0) \tag{4.13}$$

тобто, якщо функціонал (4.12) досягає екстремуму на кривій $x^0(t)$, то ця крива є розв'язком рівняння (4.13).

Зауваження 4.1. Рівняння (4.13) завжди є диференціальними рівняннями другого порядку.

Для одномірного $x(t)$ рівняння (4.13) можна аналітично проінтегрувати в таких випадках:

– G не залежить явно від x': $G = G(x,t)$;

– G не залежить явно від t: $G = G(x,x')$;

– G не залежить явно від x: $G = G(x',t)$;

– G лінійна відносно x': $G = g_1(x,t) + x' \cdot g_2(x,t)$.

Розв'язок рівнянь (4.13) визначає цілу множину кривих, на яких функціонал (4.12) може досягати свого екстремуму, а може й не досягати.

Щоб визначити, чи досягається екстремум на окремих кривих і дослідити характер екстремуму, треба перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

Умова Якобі в аналітичній формі.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $w = w(t)$:

$$\left(G_{xx} - \frac{d}{dt} G_{xx'}\right) w - \frac{d}{dt}\left(G_{x'x'} w'\right) = 0.$$

Це рівняння називається **рівнянням Якобі**.

Якщо існує розв'язок рівняння $w(t)$ такий, що при $t = t_0$: $w(t_0) = 0$ і не дорівнює нулю в жодній іншій точці проміжку, тобто $w(t) \neq 0$, $t_0 < t \leq t_1$,
тодів існує **поле (екстремалей)**, що складається з кривих – розв'язків (4.13), яке включає досліджувану криву (екстремаль) $x(t)$.

Теорема 4.3. Нехай крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13), що задовольняє умову Якобі.

Тоді достатньою умовою досягнення функціоналом $Q[x(t)]$ вигляду (4.12) мінімуму на кривій $x(t)$ є **умова Вейєрштраса**:

$$E(x, x', t, v) \geq 0 \qquad (4.14)$$

для довільних значень v, $t_0 \leq t \leq t_1$,

де $E(x, x', t, v) = G(x, v, t) - G(x, x', t) - (v - x')^T G_{x'}(x, x', t)$ – **функція Вейєрштраса**.

Зауваження 4.2. Умова Вейєрштраса має й необхідний характер у тому смислі, що, якщо в точках досліджуваної кривої $x(t)$ – розв'язку рівняння (4.13), яка задовольняє умову Якобі, для деяких значень v функція $E(x, x', t, v)$ має протилежні знаки, то екстремум не досягається.

Теорема 4.4. Якщо на кривій $x(t)$ досягається мінімум функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії, то виконується **умова Лежандра**:

$$G_{x'x'}(x, x', t) \geq 0 \tag{4.15}$$

для довільних значень $x', t_0 < t \leq t_1$.

Теорема 4.5. Нехай досліджувана крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії. Тоді умова Лежандра (4.15) у поєднанні з умовою Якобі є достатніми умовами досягнення мінімуму функціоналом (4.12) на кривій $x(t)$.

Зауваження 4.3. Наведені вище достатні умови є достатніми умовами так званого **сильного мінімуму** функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії.

Щоб отримати умови максимуму функціонала, треба в наведених вище умовах мінімуму (4.14), (4.15) взяти знаки нерівностей протилежними.

Розглянемо варіаційну задачу з рухомим кінцем траєкторії.

Нехай один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0)=x_0$, а інший – на кривій $x(t)=\varphi(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, тобто $x(t_1)=\varphi(t_1)$.

Теорема 4.6. Необхідними умовами екстремуму функціонала (4.12) на множині неперервно-диференційованих функцій $x(t)$ таких, що один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0)=x_0$, а інший – на кривій $x(t)=\varphi(t)$, тобто $x(t_1)=\varphi(t_1)$, є рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial x_i'}=0,\ i=\overline{1,n}$$

і умова трансверсальності:

$$G\Big|_{t=t_1}-\sum_{i=1}^{n}[x_i'(t_1)-\varphi_i'(t_1)]\frac{\partial G}{\partial x_i'}\Big|_{t=t_1}=0. \tag{4.16}$$

Тут, як і раніше, $G(x,x',t)$ – двічі диференційована за всіма аргументами функція.

Умову (4.16) можна записати в компактнішій формі:

$$[G+(\phi'-x')^T G_{x'}]\Big|_{t=t_1}=0.$$

Дослідимо варіаційні задачі для функціоналів із вищими похідними:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t), t)dt . \tag{4.17}$$

Теорема 4.7. Необхідною умовою екстремуму функціонала (4.17) на множині $2n$ разів неперервно-диференційованих функцій $x(t)$, заданих разом із своїми похідними до $(n-1)$-го порядку включно в початковий і кінцевий моменти часу за умови, що функція G за всіма аргументами $n+2$ рази диференційована, є рівняння **Ейлера-Лагранжа–Пуасона**:

$$G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} G_{x''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} G_{x^{(n)}} = 0. \tag{4.18}$$

Відзначимо, що диференціальне рівняння (4.18) є рівнянням порядку $2n$.

Теорема 4.8. Якщо на кривій $x(t)$, на якій може досягатися екстремум функціонала (4.17), виконана умова

$$G_{x^{(n)} x^{(n)}} \geq 0 \, (\leq 0) \tag{4.19}$$

і відрізок $[t_0, t_1]$ не містить точок, спряжених із точкою t_0 , то на цій кривій досягається мінімум (максимум) функціонала (4.17).

4.3. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ

Розглянемо задачу мінімізації функціонала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t)dt, \tag{4.20}$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, у випадку, коли змінні $x_1, \dots, x_n$ – залежні.

Вигляд залежності будемо визначати трьома типами співвідношень:

кінцеві: $$\varphi_j(x, t) = 0, \tag{4.21}$$

диференціальні: $$\phi_j(x, x', t) = 0, \tag{4.22}$$

інтегральні: $$\psi_j = \int_{t_0}^{t_1} \phi_j(x, x', t)dt, \; j = 1, 2, \dots, m < n. \tag{4.23}$$

Задача мінімізації функціонала (4.20) з урахуванням однієї з умов (4.21) – (4.23) називається варіаційною задачею на умовний екстремум.

Задача мінімізації функціонала (4.20) із залежностями диференціального типу (4.22) називається загальною задачею Лагранжа. До неї зводяться всі інші задачі на умовний екстремум.

Розв’язок задачі (4.20), (4.22) збігається з розв’язком задачі на безумовний екстремум функціонала:

$$Q' = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G}(x, x', t)dt, \quad \text{де} \quad \tilde{G} = G + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\varphi_j. \tag{4.24}$$

Тут $\lambda_j(t), j = \overline{1,m}$ – деякі невизначені функції, які разом із функціями $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ є незалежними аргументами функціонала (4.24).

Рівняння Ейлера-Лагранжа для функціонала (4.24):

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x'} = 0$$

разом з обмеженнями (4.22) утворюють замкнену систему $n+m$ рівнянь із невідомими $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ і $\lambda_j(t), j = \overline{1,m}$.

Сталі інтегрування вказаної системи знаходяться із заданих умов $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.