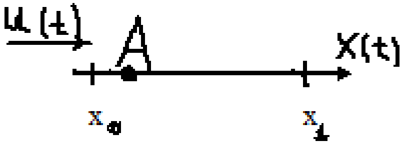
1.1. ПРО ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для ілюстрації постановок задач теорії керування наведемо найбільш прості та наочні приклади.

Приклад 1.

Нехай матеріальна точка A масою m рухається уздовж прямої.
На неї діє сила u.
Положення точки A характеризується координатою: $x = x(t)$.



Нехай також виконуються умови:

$$x(t_0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 0, \tag{1.7}$$

$$|u| \le \bar{u}, \ (\bar{u} > 0). \tag{1.8}$$

Ставиться задача: визначити силу $u = u_0(t)$, під дією якої точка A рухається так, що із заданого початкового стану (1.7) переміщується в інший заданий стан на момент $t = t_1$:

$$x(t_1) = x_1 \ , \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = 0 \tag{1.9}$$

за мінімально можливий час

$$T_{\min} = \min_u (t_1 - t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_1} dt,.$$

Для розв'язання задачі треба записати рівняння руху точки $\boldsymbol{A}$.

Згідно з другим законом Ньютона це рівняння можна подати у вигляді:

$$\boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{dt}^2}=\boldsymbol{u} \qquad (1.10)$$

Точку $\boldsymbol{A}$, рух якої змінюється за рахунок зовнішньої сили $\boldsymbol{u}$, розглядаємо як приклад керованої системи.

Величину $\boldsymbol{u}$ називають керуючим впливом, функцією керування або просто керуванням.

Поставлена задача у теорії кеування *називається* ***задачею швидкодії***.

При розв'язуванні таких задач використовують поняття ***фазових координат*** та ***фазового простору***.

У даному прикладі фазовими координатами є дві змінні - $\boldsymbol{x_1(t)}$, $\boldsymbol{x_2(t)}$, пов'язані зі змінною $\boldsymbol{x(t)}$ рівностями:

$$\boldsymbol{x_1 = x(t), x_2 = \frac{dx}{dt}};$$

фазовим простором є координатна площина.

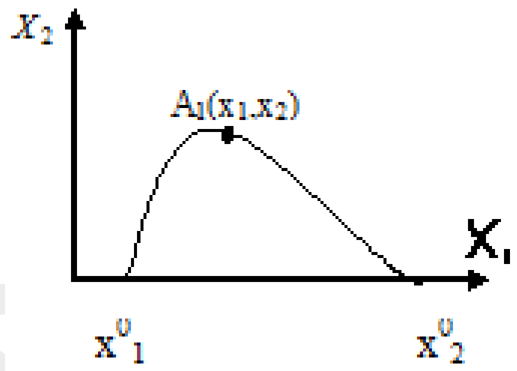
Тоді рівняння (1.10) можна записати у вигляді двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad (1.11)$$
$$m\frac{dx_2}{dt} = u$$

а граничні умови (1.7), (1.9) у вигляді:

$$\begin{matrix} x_1(t_0) = x_1^0 = x^0 & x_1(t_1) = x_1^1 = x^1 \\ x_2(t_0) = 0 & x_2(t_1) = 0 \end{matrix} \qquad (1.12)$$

Точку A_1 з координатами $(x_1(t), x_2(t))$ на площині $X_1 0 X_2$ називають фазовою точкою системи. Площину (див. рис.) називають ***фазовою площиною***, або, взагалі кажучи, - ***фазовим простором***, елементами якого є вектори фазових координат.



Приклад 2. Наведемо одну із задач оптимального розподілу ресурсів у динамічних системах на прикладі моделі бою двох сторін.

Динаміку бою можна описати такою системою рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = -bx_2 + u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_1 + v(t)$$
,

де $x_1(t)$ – кількість бойових одиниць із боку A, що залишились боєздатними на момент часу $t \in [t_0, t_1]$,

$x_2(t)$ – кількість бойових одиниць, що залишились боєздатними на момент часу t для сторони B;

$u(t)$, $v(t)$ – темпи надходження бойових одиниць із резерву для сторін A та B відповідно на момент часу t;

a, b – середні ефективності швидкості стрільби бойових одиниць сторін A та B відповідно;

$T = t_1 - t_0$ – заданий час бою.

Нехай відомі:

$$x_1(t_0) = x_1^0$$
$$x_2(t_0) = x_2^0$$

а також величина $v(t)$.

Задача оптимального керування боєм:

знайти керування $u^0(t)$ за обмежень: $0 \le u(t) \le \bar{u}, \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \le \bar{\bar{u}}$, щоб досягався екстремум вибраного функціонала якості $Q(u(t))$.

Тут $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ – задані величини.

Критерієм найкращого керування може бути вибрана певна мета бою, наприклад:

$Q = x_2(t_1) \to \min\limits_u$ – на кінець бою сторона B має менше бойових одиниць;

$Q = x_1(t_1) \to \max\limits_u$ – мета сторони A: максимальне збереження своїх бойових одиниць на кінець бою.

Можна ввести й інші критерії оптимальності.

Приклад 3.

Система з випадковими збуреннями:

$$\frac{dx_1}{dt} = u \tag{1.16}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \xi(t) \tag{1.17}$$

Тут $\xi(t)$ – випадковий процес,

$$|u(t)| \le k = const, t \in [t_0, t_1].$$

Мета керованої системи (1.16) – відтворити рух некерованої системи (1.17).

Оскільки $x_2(t)$ – випадковий процес, то критерій оптимальності записується через математичне сподівання:

$$Q = M\{Q_1\} = M\{\int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)]^2 + u^2\} \to \min_u \tag{1.18}$$