Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 8.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2020

Зміст I

Зміст

Теорема

Нехай ξ *і* η*— незалежні д.в.в. з* $M|\xi| < \infty$, $M|\eta| < \infty$*. Тоді*

$$M|\xi \cdot \eta| < \infty$$

та

$$M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta. \tag{1}$$

Доведення

Нехай розподіли ξ, η відповідно дорівнюють

ξ	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$

η	y_1	y_2	y_3	$\cdots$
P	q_1	q_2	q_3	$\cdots$

Нехай

$$A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}, \quad B_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}, \quad i, j = 1, 2 \cdots .$$

Доведення

Оскільки за умовою теореми в.в. ξ, η є незалежними, то

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j) \quad \forall i, j \geq 1,$$

або ж

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) = p_i q_j.$$

Через z_k позначимо усі різні значення $(x_i \cdot y_j)$ і

$$I_k = \{(i,j) | x_i \cdot y_j = z_k\}.$$

Тоді

$$P\{\xi \cdot \eta = z_k\} = P(\bigcup_{(i,j) \in I_k} A_i \cap B_j) = \sum_{(i,j) \in I_k} P(A_i \cap B_j) =$$

$$\sum_{(i,j) \in I_k} P(A_i)P(B_j) = \sum_{(i,j) \in I_k} p_i p_j.$$

Доведення

$$M\xi \cdot M\eta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \cdot p_i q_j =$$

Згрупуємо цю суму за різними значеннями $z_k = x_i y_j$:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sum_{(i,j)\in I_k} p_i q_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} z_k P\{\xi \cdot \eta = z_k\} = M(\xi \cdot \eta).$$

Зауваження

Співвідношення (1) називається мультиплікативною властивістю математичного сподівання.

Зауваження

Методом матем. індукції цю властивість можна поширити на n в.в.:
Якщо $\xi_1, \dots, \xi_n$ —сумовні незалежні в.в., то $\exists M(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n)$ і

$$M(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = M\xi_1 \cdot \ldots \cdot M\xi_n.$$

Теорема (Про суму дисперсії незалежних в.в.)

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *—незалежні в.в. та* $M\xi_i^2 < \infty, 1 = \overline{1, n}$. *Тоді*

$$\mathbf{D}(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}(\xi_i).$$

Доведення I

За означенням дисперсії

$$\mathbf{D}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i) = M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i - M(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)\right)^2 =$$

використаємо адитивну та однорідну власт. для матем. сподів.

$$= M\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - M\xi_i)\right)^2 =$$

$$= M\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - M\xi_i)^2 + \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n}(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)\right) =$$

Доведення II

за адитивністю матем.сподівання

$$= \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i - M\xi_i)^2 + \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} M\left((\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)\right) =$$

оскільки ξ_i, ξ_j, $i \neq j$, —незалежні, то за теоремою про спадковість незалежності $\xi_i - M\xi_i, \xi_j - M\xi_j$, $i \neq j$, також незалежні. Тому за мультиплікативною власт. матем.сподівання

$$= \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i - M\xi_i)^2 + \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} M(\xi_i - M\xi_i)M(\xi_j - M\xi_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i - M\xi_i)^2 + 0 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\xi_i.$$

Зміст

Під час дослідження цілочисельних невід'ємних в.в. корисними є генератриси (твірні функції), які визначають наступним чином.
Нехай ξ – цілочисельна невід'ємна в.в. з розподілом імовірностей

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Означення

Генератрисою $G_\xi(t)$ *розподілу* в.в. ξ (чи послідовності $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$) називають ряд

$$G_\xi(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad |t| \le 1.$$

Зауваження

Оскільки будь-який степеневий ряд однозначно визначений своїми коефіцієнтами, то зв'язок між розподілами і відповідними генератрисами взаємно однозначний.

$$G_\xi(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad |t| \le 1.$$

Виконуються такі власт.:

- $G_\xi(1) = p_0 + p_1 + \cdots = 1$
- Розподіл імовірностей p_k відновлюють за генератрисою, беручи похідну відповідного порядку у точці нуль:

$$p_k = \frac{1}{k!} G_\xi^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \ldots$$

  Зокрема, $G_\xi(0) = \mathbf{P}(X = 0)$.
- Генератрису $G_\xi(t)$ можна використовувати для простого знаходження моментів різних порядків.

Властивості генератриси

- Розвинемо функцію t^ξ у ряд Тейлора в околі точки 1:

$$t^\xi = 1+\xi(t-1)+\xi(\xi-1)\frac{(t-1)^2}{2!}+\xi(\xi-1)(\xi-2)\frac{(t-1)^3}{3!}+\dots$$

Тоді

$$G_\xi(t) = Mt^\xi = 1 + (t-1)M\xi + \frac{(t-1)^2}{2!}M\xi(\xi-1)+$$

$$+\frac{(t-1)^3}{3!}M\xi(\xi-1)(\xi-2)+\dots$$

- Диференціюючи цей вираз по t і покладаючи $t=1$, отримуємо математичне сподівання.

$$M\xi = G'_\xi(1).$$

- Подальше диференціювання дає формули, які можна використати для визначення моментів інших порядків.

$$M\left(\xi(\xi-1)\cdots(\xi-k+1)\right)=G_\xi^{(k)}(1).$$

У частковому випадку при $k=2$

$$M\left(\xi(\xi-1)\right)=G''_\xi(1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\xi^2=G''_\xi(1)+M\xi=G''_\xi(1)+G'_\xi(1).$$

Тому дисперсію за допомогою генератриси можна знайти як

$$\mathbf{D}\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=G''_\xi(1)+G'_\xi(1)-(G'_\xi(1))^2.$$

Біноміальний розподіл

Знайдемо генератрису для біноміального розподілу та за допомогою неї знайдемо матем. сподівання та дисперсію. $\xi \sim Bi(n,p)$.

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad 0 < p < 1.$$

$$M\xi = np, \quad \mathbf{D}\xi = npq$$

Генератриса для ξ

$$G_\xi(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^{n} t^k p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} t^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (tp)^k (1-p)^{n-k} = (pt + 1 - p)^n \, .$$

Використали формулу Біном-Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l a^l b^{n-l}$$

Отже,

$$G_\xi(t) = (pt + 1 - p)^n \,.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_\xi(1) = np\,(pt + 1 - p)^{n-1}\,\big|_{t=1} = np$$

$$G''_\xi(1) = n(n-1)p^2\,(pt + 1 - p)^{n-2}\,\big|_{t=1} = n(n-1)p^2 \,.$$

Дисперсія:

$$\mathbf{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p).$$

Отже,

$$G_\xi(t) = (pt + 1 - p)^n \,.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_\xi(1) = np\,(pt + 1 - p)^{n-1}\,|_{t=1} = np$$

$$G''_\xi(1) = n(n-1)p^2\,(pt + 1 - p)^{n-2}\,|_{t=1} = n(n-1)p^2.$$

Дисперсія:

$$\mathbf{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p).$$

Отже,

$$G_\xi(t) = (pt + 1 - p)^n .$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_\xi(1) = np\,(pt + 1 - p)^{n-1}\,|_{t=1} = np$$

$$G''_\xi(1) = n(n-1)p^2\,(pt + 1 - p)^{n-2}\,|_{t=1} = n(n-1)p^2 .$$

Дисперсія:

$$\mathbf{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p).$$

Розподіл Пуассона

Розглянемо $\xi \sim \Pi(\lambda)$,

$$\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$M\xi = \mathbf{D}\xi = \lambda.$$

Знайдемо генератрису

$$G_\xi(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda+t\lambda}.$$

Розподіл Пуассона

Отже, генератриса для пуассонівської в.в. дорівнює

$$G_\xi(t) = e^{-\lambda + t\lambda}.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_\xi(1) = \lambda e^{-\lambda+t\lambda}\big|_{t=1} = \lambda.$$

$$G''_\xi(1) = \lambda^2 e^{-\lambda+t\lambda}\big|_{t=1} = \lambda^2.$$

Дисперсія:

$$\mathbf{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Вправа. Знайти генератрису для геометричного, від'ємного біноміального розподілів та обчислити матем. сподівання та дисперсію.

Розподіл Пуассона

Отже, генератриса для пуассонівської в.в. дорівнює

$$G_\xi(t) = e^{-\lambda + t\lambda}.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_\xi(1) = \lambda e^{-\lambda + t\lambda}\big|_{t=1} = \lambda.$$

$$G''_\xi(1) = \lambda^2 e^{-\lambda + t\lambda}\big|_{t=1} = \lambda^2.$$

Дисперсія:

$$\mathbf{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Вправа. Знайти генератрису для геометричного, від'ємного біноміального розподілів та обчислити матем. сподівання та дисперсію.

Розподіл Пуассона

Отже, генератриса для пуассонівської в.в. дорівнює

$$G_\xi(t) = e^{-\lambda+t\lambda}.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_\xi(1) = \lambda e^{-\lambda+t\lambda}\big|_{t=1} = \lambda.$$

$$G''_\xi(1) = \lambda^2 e^{-\lambda+t\lambda}\big|_{t=1} = \lambda^2.$$

Дисперсія:

$$\mathbf{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Вправа. Знайти генератрису для геометричного, від'ємного біноміального розподілів та обчислити матем. сподівання та дисперсію.

Теорема (Про генератрису суми н.в.в.)

Якщо ξ та η – незалежні невід'ємні цілочисельні в.в. з генератрисами $G_\xi(t)$ і $G_\eta(t)$ відповідно, то сума $\xi+\eta$ має генератрису

$$G_{\xi+\eta}(t) = G_\xi(t)\; G_\eta(t).$$

Зауваження

Можна показати цю властивість і для n незалежних в.в.

Доведення.

За означенням

$$G_\xi(t) = Mt^\xi, \quad G_\eta(t) = Mt^\eta.$$

$$G_{\xi+\eta}(t) = Mt^{\xi+\eta} = M\left(t^\xi t^\eta\right) =$$

Оскільки ξ та η — незалежні, то за т. про спадковість незалежності t^ξ та t^η також є незалежними. Використовуючи мультиплікативну власт. матем. сподів., маємо

$$= M\left(t^\xi\right) M\left(t^\eta\right) = G_\xi(t)G_\eta(t).$$

□

Теорема (Інваріантність пуассонівського розподілу відносно суми)

Нехай ξ_i—незалежні в.в. з $\xi_i \sim \Pi(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Тоді

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \Pi(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Доведення.

Показали, що генератриса для пуассонівскої в.в. дорівнює

$$G_{\xi_i}(t) = e^{-\lambda_i + t\lambda_i}, \quad i = 1, 2.$$

За т. про генератрису суми незал.в.в.

$$G_{\xi_1+\xi_2}(t) = G_{\xi_1}(t) G_{\xi_2}(t) =$$

$$= e^{-\lambda_1 + t\lambda_1} e^{-\lambda_2 + t\lambda_2} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2) + t(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$\square$

Вправа.

Нехай ξ_i—незалежні в.в. з $\xi_i \sim Bi(n_i, p)$, $i = 1, 2$. Тоді

$$\xi_1 + \xi_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p).$$

Нехай $\xi_1, \xi_2, \cdots$ — послідовність цілочисельних незалежних однаково розподілених (н.о.р.) із генераторисою $G_\xi(t)$. В.в. ν не залежить від ξ_i та має генератрису $G_\nu(t)$. Розглянемо випадкову суму, задану таким чином:

$$S_0 = 0, \quad S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i, \ \nu \geq 1.$$

Теорема

Генератриса $G_{S_\nu}(t)$ дорівнює суперпозиції

$$G_{S_\nu}(t) = G_\nu(G_\xi(t)).$$

Доведення

$$G_{S_\nu}(t) = Mt^{S_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P\{S_\nu = n\} =$$

Вик. формулу повної ймовірності

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{m=0}^{\infty} P\{S_\nu = n | \nu = m\} P\{\nu = m\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P\{S_m = n\} P\{\nu = m\} =$$

Доведення

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n P\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m = n\} \right) P\{\nu = m\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(G_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_m}(t) \right) P\{\nu = m\} =$$

Оскільки ξ_i, $i = \overline{1, m}$ — незалежні, то

$$G_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_m}(t) = G_{\xi_1}(t) G_{\xi_2}(t) \cdots G_{\xi_m}(t)$$

Доведення

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(G_{\xi_1}(t) G_{\xi_2}(t) \cdots G_{\xi_m}(t)\right) P\{\nu = m\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(G_{\xi}(t)\right)^m P\{\nu = m\} =$$

$$= G_{\nu}(G_{\xi}(t)).$$

Приклад

Припустимо, що число пошкоджень транспортного засобу описується випадковою величиною ν, яка має розподіл Паскаля з параметром $a > 0$.

$$p_n = P\{\nu = n\} = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}, \quad n \geq 0$$

Звернення до страхової компанії за відшкодуванням при цьому є незалежними і мають ймовірність p. Показати, що число звернень буде мати розподіл Паскаля з параметром pa.

Розв'язання

Число звернень до страхової компанії будемо описуватися випадковою величиною S, яка може бути представлена наступним чином:

$$S = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_\nu,$$

де ξ_i є незалежними випадковими величинами, що мають розподіл Бернуллі:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{з ймовірністю p;} \\ 0, & \text{з ймовірністю 1-p.} \end{cases}$$

Знайдемо генератрису випадкових величин ν і ξ_i

Розв'язання

$$G_\xi(t) = t^1 \cdot p + t^0 \cdot (1-p) = 1 - p + pt.$$

$$G_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}} = \frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{ta}{1+a}} = \frac{1}{1+a-ta}.$$

Оскільки генератриса випадкової величини S дорівнює суперпозиції генератрис випадкових величин ν та ξ_i , то

$$G_S(t) = G_\nu(G_\xi(t)) = G_\nu(1-p+pt) = \frac{1}{1+ap-pat}.$$

Останній вираз є генератрисою розподілу Паскаля з параметром pa.

Зміст

Нехай ξ та η – дві в.в. зі скінченними другими моментами.

Означення

Величину
$$\mathbf{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$$
називають *коваріацією* в.в. ξ та η.

Зауваження

Коваріація характеризує зв'язок (лінійний зв'язок) між двома випадковими величинани.

Властивості коваріації

- Формула обчислення

$$\mathbf{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta.$$

Доведення.

За означенням

$$\mathbf{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M\left(\xi\eta - \xi M\eta - \eta M\xi + M\xi M\eta\right) =$$

використовуємо нормованість, однорідність та адитивність матем. сподіваання

$$= M(\xi\eta) - M\xi M\eta - M\eta M\xi + M\xi M\eta = M(\xi\eta) - M\xi M\eta$$

□

Властивості коваріації

- $$\mathbf{cov}(\xi, \xi) = \mathbf{D}\xi;$$

Доведення.

Дійсно, за означенням $\mathbf{cov}(\xi, \xi) = M(\xi - M\xi)^2 = \mathbf{D}\xi$. □

- $$\mathbf{cov}(\xi, c) = \mathbf{cov}(c, \xi) = 0, \quad c \in \mathbf{R};$$

Доведення.

Оскільки $Mc = c$, то $\mathbf{cov}(\xi, c) = M(\xi - M\xi)(c - Mc) = 0$. □

Властивості коваріації

- $$\mathbf{cov}(\xi,\xi) = \mathbf{D}\xi;$$

Доведення.

Дійсно, за означенням $\mathbf{cov}(\xi,\xi) = M(\xi - M\xi)^2 = \mathbf{D}\xi$. □

- $$\mathbf{cov}(\xi, c) = \mathbf{cov}(c, \xi) = 0, \quad c \in \mathbf{R};$$

Доведення.

Оскільки $Mc = c$, то $\mathbf{cov}(\xi, c) = M(\xi - M\xi)(c - Mc) = 0$. □

Властивості коваріації

- $$\mathbf{cov}(a\xi + b, \eta) = \mathbf{cov}(\xi, a\eta + b) = a\mathbf{cov}(\xi, \eta), \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Доведення.

За власт. матем. сп. $M(a\xi + b) = aM\xi + b$, тому

$$\mathbf{cov}(a\xi + b, \eta) = M(a\xi + b - M(a\xi + b))(\eta - M\eta) =$$

$$= M(a\xi - aM\xi)(\eta - M\eta) = a\mathbf{cov}(\xi, \eta).$$

□

Властивості коваріації

- $$\mathbf{cov}(\xi,\eta) \le \sqrt{M(\xi - M\xi)^2(\eta - M\eta)^2} = \sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta} = \sigma_\xi\sigma_\eta.$$

Доведення.

За нерівністю Коші $(MXY)^2 \le MX^2MY^2 \Rightarrow$

$$\mathbf{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) \le$$

$$\le \sqrt{M(\xi - M\xi)^2M(\eta - M\eta)^2} = \sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta} = \sigma_\xi\sigma_\eta.$$

□

Означення

Випадкові величини ξ і η називаються некорельованими, якщо

$$\textbf{cov}(\xi, \eta) = 0.$$

- Якщо в.в. ξ і η незалежні, то $\textbf{cov}(\xi, \eta) = 0$.

Доведення.

За мультиплікативною власт. для незалежних в.в. $M\xi\eta = M\xi M\eta = 0$. Тому

$$\textbf{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta = M\xi M\eta - M\xi M\eta = 0.$$

$\square$

Зауваження

Із незалежності випливає некорельованість, але обернене твердження невірне. Із некорельованості не випливає незалежність.

Приклад.

Нехай ξ, η —незалежні в.в. $M\xi = M\eta = 0$. Покладемо $\gamma = \xi \cdot \eta$. Зрозуміло, що ξ і γ залежні. Покажемо, що вони некорельовані:

$$\mathbf{cov}(\xi, \gamma) = M(\xi\gamma) - M\xi M\gamma = M(\xi^2\eta) = M\xi^2 M\eta - 0 \cdot M\gamma = 0.$$

Властивості коваріації

Має місце рівність

$$\mathbf{D}(\xi \pm \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta \pm 2\mathbf{cov}(\xi, \eta).$$

Зокрема, коли в.в. ξ та η незалежні, то

$$\mathbf{D}(\xi \pm \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta.$$

Доведення.

Вправа. $\square$

Означення

Коефіцієнтом кореляції в.в. ξ та η називають число

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}} = \frac{\mathbf{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

Власт. коеф. кореляції

- $\rho(\xi, \xi) = 1$.
- Внаслідок нерівності Коші коефіцієнт кореляції набуває значень з інтервалу $[-1, 1]$.
- $\rho(a\xi + b, \eta) = \textbf{sign}\,(a)\rho(\xi, \eta)$.

Доведення.

$$\rho(a\xi + b, \eta) = \frac{\textbf{cov}(a\xi + b, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}(a\xi + b) \cdot \mathbf{D}\eta}} =$$

$$= \frac{a\textbf{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2\mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta}} = \textbf{sign}\,(a)\rho(\xi, \eta).$$

□

- Якщо в.в. ξ та η незалежні, то $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Власт. коеф. кореляції

- $$|\rho(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow \ \exists a, b \in \mathbf{R} : \xi = a\eta + b.$$

Доведення. Розглянемо

$$A = \mathbf{D}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}} \pm \frac{\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}\right) \geq 0.$$

За формулою для дисперсії суми в.в. маємо:

$$A = \mathbf{D}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}\right) + \mathbf{D}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}\right) \pm 2\mathbf{cov}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}, \frac{\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}\right) =$$

$$\frac{\mathbf{D}\xi}{\mathbf{D}\xi} + \frac{\mathbf{D}\eta}{\mathbf{D}\eta} \pm \frac{2\mathbf{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}} = 2(1 \pm \rho) \geq 0.$$

Якщо $\rho = 1, \text{A=D}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}\right) = 0.$
За власт. дисперсії це можливо лише тоді, коли сама в.в. є сталою.

$$\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}} = M\left(\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}\right) \Rightarrow$$

$$\xi = a\eta + b, \quad \text{де}$$

$$a = \frac{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}, \quad b = M\xi - \frac{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}} M\eta$$

Аналогічно досліджується випадок $\rho = -1$.

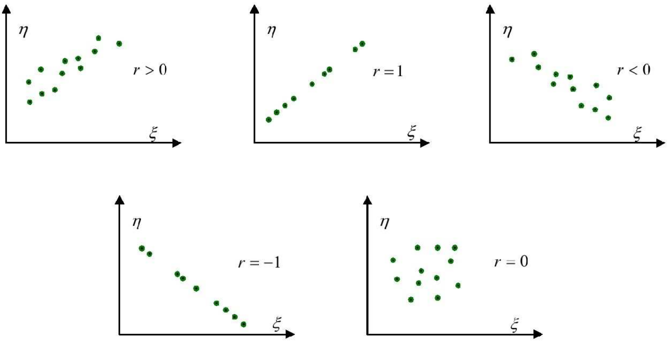

Рис. Графічна інтерпретація коеф. кореляції

ПИТАННЯ?