Перевірка лінійних гіпотез для лінійної регресійної моделі

Розглянемо задачу регресійного аналізу у класичний постановці. Вважаємо, що для регресійної моделі

$$y = X\alpha + e \tag{0.24}$$

справедливі усі припущення класичного регресійного аналізу:

I. $e \sim \mathcal{N}\left(\theta_N, \sigma^2 E_N\right), \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$,

II. $rank\left(X\right) = p$,

III. немає ніяких обмежень на α, тобто $\alpha \in \mathbb{R}^p$.

Позначимо $Q\left(\alpha\right) = \left\|y - X\alpha\right\|^2$. Тоді відомо, що при справедливості припущень I, II, III оцінка МНК є розв'язком такої оптимізаційної задачі

$$\hat{\alpha} = \arg\min_{\alpha} Q\left(\alpha\right) = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y.$$

Послабимо тепер припущення III, а саме будемо вважати, що α задовольняє деякій системі алгебраїчних рівнянь, а саме:

III'. $\alpha \in \mathcal{L}$, де $\mathcal{L} = \left\{\alpha : A\alpha = b, rank\left(A\right) = q\right\}, A \in M_{q,p}\left(\mathbb{R}\right), b \in \mathbb{R}^q$.

Тоді оцінка МНК для об'єкту (0.24) при справедливості припущень I, II, III', тобто при наявності лінійних обмежень, визначається таким чином

$$\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} = \arg\min_{\alpha \in \mathcal{L}} Q\left(\alpha\right) = \hat{\alpha} - \left(X^T X\right)^{-1} A^T \left[A\left(X^T X\right)^{-1} A^T\right]^{-1} \left[A\hat{\alpha} - b\right].$$

А її вигляд задає таке твердження.

Т е о р е м а. Нехай розглядається перевірка лінійної гіпотези

$$H_0 : A\alpha = b, \quad rank\left(A\right) = q, A \in M_{q,p}\left(\mathbb{R}\right), b \in \mathbb{R}^q$$

з деяким малим рівнем значущості γ, $\gamma > 0$ для регресійної моделі (0.24). Тоді для статистики

$$F = \frac{\dfrac{\left[Q(\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}) - Q(\hat{\alpha})\right]}{q}}{\dfrac{Q(\hat{\alpha})}{N-p}} = \frac{\dfrac{\left\{(A\hat{\alpha}-b)^T\left[A\left(X^TX\right)^{-1}A^T\right]^{-1}(A\hat{\alpha}-b)\right\}}{q}}{\dfrac{\left\|y - X\hat{\alpha}\right\|^2}{N-p}}$$

при справедливості лінійної гіпотези H_0 виконується

$$F \sim F(q, N-p),$$

а область прийняття гіпотези H_0 має вигляд

$$F < F_\gamma(q, N-p),$$

де $F_\alpha(m,n)$ – 100α відсоткова точка F-розподілу з m та n ступенями свободи.

Лема. Якщо справедлива лінійна гіпотеза H_0, то

$$Q(\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}) - Q(\hat{\alpha}) = \left\|X\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} - X\hat{\alpha}\right\|^2. \tag{0.25}$$

Означення. ***i-тою частинною F-статистикою*** називається F-статистика F_i для перевірки гіпотези

$$H_0 : \alpha_i = 0$$

а відповідний критерій для перевірки гіпотези H_0 називається ***i-тим частинним F-критерієм.***

Зауваження. З останньої теореми отримуємо вираз i-тої частинної F-статистики та вигляд її розподілу

$$F_i \sim F(1, N-p)$$

Перевірка на значимість параметрів лінійної регресійної моделі

Тобто перевіряємо гіпотезу чи значимо (суттєво) відхиляється від початку координат $\alpha(\alpha_i)$.

I. Перевіримо гіпотезу

$$H_0 : \alpha = \vec{\theta}_p,$$

з деяким малим рівнем значущості $\gamma > 0$.

Ця гіпотеза є частинним випадком лінійної гіпотези

$$H_0 : A\alpha = b, \quad rank(A) = q, A \in M_{q.p}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^q,$$

у якій $A = E_p, b = \vec{\theta}_p$, а $rank(A) = rank(E_p) = p \Rightarrow q = p$.

Тому згідно теореми про перевірку лінійної гіпотези, якщо справедлива лінійна гіпотеза H_0, то статистика

$$F = \frac{\dfrac{\left\{\left(E_p\hat{\alpha} - \vec{\theta}_p\right)^T \left[E_p\left(X^T X\right)^{-1} E_p{}^T\right]^{-1} \left(E_p\hat{\alpha} - \vec{\theta}_p\right)\right\}}{p}}{\underbrace{\dfrac{\|y - X\hat{\alpha}\|^2}{N - p}}_{\hat{\sigma}^2}} =$$

$$= \frac{\left(X\hat{\alpha}\right)^T X\hat{\alpha}}{p\hat{\sigma}^2} = \frac{\|X\hat{\alpha}\|^2}{p\hat{\sigma}^2} \sim F(p, N - p),$$

а область прийняття гіпотези H_0 набуває вигляду

$$F = \frac{\|X\hat{\alpha}\|^2}{p\hat{\sigma}^2} < F_\gamma(p, N - p),$$

де $F_\gamma(m,n)$ – 100γ відсоткова точка F-розподілу з m та n ступенями свободи.

II. Перевіримо гіпотезу

$$H_0 : \alpha_i = 0,$$

з деяким малим рівнем значущості $\gamma > 0$.

Ця гіпотеза також є частинним випадком лінійної гіпотези

$$H_0 : A\alpha = b, \quad rank(A) = q, A \in M_{q,p}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^q,$$

у якій $A = l_i^T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, b = 0,$

а $rank(A) = q = rank\left(l_i^T\right) = 1.$

Тому згідно теореми про перевірку лінійної гіпотези, якщо справедлива лінійна гіпотеза H_0, то статистика

$$F_i = \frac{\underbrace{\left\{\left(l_i^T\hat{\alpha} - 0\right)^T \left[\overbrace{l_i^T\left(X^TX\right)^{-1}l_i}^{d_i}\right]^{-1} \overbrace{\left(l_i^T\hat{\alpha} - 0\right)}^{\hat{\alpha}_i}\right\}}{}}{\dfrac{1}{\underbrace{\dfrac{\left\|y - X\hat{\alpha}\right\|^2}{N-p}}_{\hat{\sigma}^2}}} = \frac{\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\sigma}^2 d_i} \sim F(1, N-p),$$

де $d_i = \left\{\left(X^TX\right)^{-1}\right\}_{ii}$, а область прийняття гіпотези H_0 набуває вигляду

$$\boxed{F_i = \frac{\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\sigma}^2 d_i} < F_\gamma(1, N-p),}$$

де $F_\gamma(m,n)$ – 100γ відсоткова точка F-розподілу з m та n ступенями свободи.

Для останньої гіпотези H_0, область прийняття можна записати і іншим чином. Дійсно

$$F_i = \left(\underbrace{\frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{d_i}}}_{\substack{\| \\ t_i}} \right)^2 = t_i^2. \tag{0.26}$$

А так як при побудові довірчого інтервалу для α_i згідно (0.19) отримано, що

$$\frac{\alpha_i - \hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{d_i}} \sim t(N-p) \Rightarrow -\frac{\alpha_i - \hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{d_i}} \sim t(N-p).$$

Далі, при справедливості H_0, одержуємо

$$t_i = \frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{d_i}} \sim t(N-p).$$

Тоді логічно до області прийняття гіпотези H_0 віднести усі значення останньої статистики крім областей її екстремальних значень, у які ця статистика повинна попадати з ймовірністю γ:

$$|t_i| = \frac{|\hat{\alpha}_i|}{\hat{\sigma}\sqrt{d_i}} < t_{\frac{\gamma}{2}}(N-p), \tag{0.27}$$

де $t_\gamma(n)$ – 100γ відсоткова точка t-розподілу Стьюдента з n ступенями свободи.

Зауваження. З (0.26) випливає, що $F_i = t_i^2$.

Перш ніж переходити до перевірки ще одного класу гіпотез, розглянемо таку лінійну регресійну модель з явним вільним членом α_1, а саме:

$$y(k)=\alpha_1+\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_i(k)+e(k),\ k=\overline{1,N}. \qquad (0.28)$$

Оцінка МНК його вектора невідомих параметрів $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\end{pmatrix}^T$ буде мати вигляд

$$\hat{\alpha}=\left(X^T X\right)^{-1}X^T y,$$

де $x^T(k)=\begin{pmatrix}1 & x_2(k) & x_3(k) & \cdots & x_p(k)\end{pmatrix},k=\overline{1,N}$,

$$X=\begin{pmatrix}x^T(1)\\ x^T(2)\\ \vdots\\ x^T(N)\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}y(1)\\ y(2)\\ \vdots\\ y(N)\end{pmatrix}.$$

III. Перевіримо гіпотезу

$$H_0:\alpha_i=0,i=\overline{2,p}$$

з деяким малим рівнем значущості $\gamma>0$.

Ця гіпотеза цікава своєю інтерпретацією, а саме її справедливість еквівалентна одному з тверджень:

- відсутній вплив усієї множини регресорів $\left\{\varphi_i\left(\vec{\xi}\right)\right\}_{i=2}^{p}$ на η, які введені у праву частину моделі (0.28),
- множинний коефіцієнт кореляції η та вектора $\left(\varphi_1\left(\vec{\xi}\right) \quad \varphi_2\left(\vec{\xi}\right) \quad \cdots \quad \varphi_p\left(\vec{\xi}\right)\right)^T$ не значимо (не суттєво) відхиляється від нуля,
- відсутня регресія η щодо $\left\{\varphi_i\left(\vec{\xi}\right)\right\}_{i=2}^{p}$.

Гіпотеза H_0 є частинним випадком лінійної гіпотези

$$H_0 : A\alpha = b, \quad rank(A) = q, A \in M_{q,p}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^q,$$

у якій $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{p-1,p}(\mathbb{R}), b = \vec{\theta}_{p-1} \in \mathbb{R}^{p-1},$

а $rank(A) = p-1$.

Введемо позначення

$$\mathcal{L} = \left\{\alpha : \alpha_i = 0, i = \overline{2, p}\right\}.$$

Тоді модель (0.28) спроститься до вигляду

$$y(k) = \alpha_1 + \tilde{e}(k), k = \overline{1, N}, \tag{0.29}$$

або її можна переписати у такому матричному представленні

$$y = \tilde{X}\alpha_1 + \tilde{e}, \tag{0.30}$$

де

$$y = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e} = \begin{pmatrix} \tilde{e}(1) \\ \tilde{e}(2) \\ \vdots \\ \tilde{e}(N) \end{pmatrix}.$$

Тоді оцінка МНК $\hat{\alpha}_{1\mathcal{L}}$ для α_1 у моделі (0.29) при наявності лінійних обмежень $\mathcal{L} = \left\{\alpha : \alpha_i = 0, i = \overline{2, p}\right\}$ підраховується згідно

$$\hat{\alpha}_{1\mathcal{L}} = \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T y = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T y = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(k) = \overline{y}.$$

Далі згідно теореми про перевірку лінійної гіпотези, якщо справедлива лінійна гіпотеза H_0, то статистика

$$F=\frac{\dfrac{\left[Q(\hat{\alpha}_{\mathcal{L}})-Q(\hat{\alpha})\right]}{p-1}}{\dfrac{Q(\hat{\alpha})}{N-p}}=\frac{\dfrac{\left\|X\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}-X\hat{\alpha}\right\|^2}{p-1}}{\dfrac{\left\|y-X\hat{\alpha}\right\|^2}{N-p}}=\frac{\dfrac{\left\|X\hat{\alpha}-\overbrace{X\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}}^{\tilde{X}\hat{\alpha}_{1\mathcal{L}}}\right\|^2}{p-1}}{\dfrac{\left\|y-X\hat{\alpha}\right\|^2}{N-p}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{(p-1)}\sum_{k=1}^{N}\left(x^T(k)\hat{\alpha}-\overline{y}\right)^2}{\dfrac{1}{N-p}\sum_{k=1}^{N}\left(y(k)-x^T(k)\hat{\alpha}\right)^2}\sim F(p-1,N-p),$$

а область прийняття гіпотези H_0 набуває вигляду

$$\boxed{F==\frac{\dfrac{1}{(p-1)}\sum_{k=1}^{N}\left(x^T(k)\hat{\alpha}-\overline{y}\right)^2}{\dfrac{1}{N-p}\sum_{k=1}^{N}\left(y(k)-x^T(k)\hat{\alpha}\right)^2}<F_{\gamma}(p-1,N-p), \qquad (0.31)}$$

де $F_\gamma(m,n)$ – 100γ відсоткова точка F-розподілу з m та n ступенями свободи.

Перевірка на адекватність лінійної регресійної моделі

Перевірка на адекватність отриманої лінійної регресійної моделі – це один з відповідальних етапів розв'язання задачі регресійного аналізу, та як потрібно впевнитися, що побудована математична модель достатньо добре описує об'єкт дослідження.

При конструюванні математичної моделі системи потрібно використовувати спостереження в усіх можливих режимах функціонування об'єкту. При виборі лінійної регресійної моделі намагаються, щоб вона використовувала якомога менше параметрів, тобто керуються *принципом економічності моделі*.

Які можливі випадки неадекватності лінійної регресійної моделі? У порівнянні уявною ідеальною лінійною регресійною моделлю вибрана лінійна регресійна модель може містити регресорів або менше, або більше. Проаналізуємо ці випадки.

I. Випадок недобору регресорів у вибраній моделі.

Нехай вибрана модель містить менше регресорів

$$y = X\alpha + e,\ \alpha \in \mathbb{R}^p \tag{0.32}$$

у порівнянні з уявною ідеальною лінійною регресійною моделлю

$$y = \left(X \mid X_1\right)\begin{pmatrix}\alpha \\ \alpha_1\end{pmatrix} + \tilde{e},\ \alpha \in \mathbb{R}^p, \alpha_1 \in \mathbb{R}^{p_1},$$

де $y, e, \tilde{e} \in \mathbb{R}^N, X \in M_{N,p}(\mathbb{R}), X_1 \in M_{N,p_1}(\mathbb{R})$.

Користуючись моделлю (0.32) отримуємо оцінки

$$\hat{\alpha} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p}\left\|y - X\hat{\alpha}\right\|^2.$$

З'ясувалося, що

1) оцінка $\hat{\alpha}$ є

- зміщеною,
- неслушною,

2) оцінка $\hat{\sigma}^2$ є

- зміщеною.

II. Випадок перебору регресорів у вибраній моделі.

Нехай вибрана модель містить більше регресорів

$$y = \left(X \mid X_1\right)\begin{pmatrix}\alpha \\ \alpha_1\end{pmatrix} + \tilde{e} = \tilde{X}\tilde{\alpha} + \tilde{e},\ \alpha \in \mathbb{R}^p, \alpha_1 \in \mathbb{R}^{p_1} \qquad (0.33)$$

у порівнянні з уявною ідеальною лінійною регресійною моделлю

$$y = X\alpha + e,\ \alpha \in \mathbb{R}^p,$$

де $y, e, \tilde{e} \in \mathbb{R}^N, \tilde{X} = \left(X \mid X_1\right), X \in M_{N,p}\left(\mathbb{R}\right), X_1 \in M_{N,p_1}\left(\mathbb{R}\right), \tilde{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha \\ \alpha_1\end{pmatrix}$.

Користуючись моделлю (0.33) отримуємо оцінки

$$\hat{\tilde{\alpha}} = \left(\tilde{X}^T \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}^T y,$$

$$\hat{\tilde{\sigma}}^2 = \frac{1}{N - p - p_1}\left\|y - \tilde{X}\hat{\tilde{\alpha}}\right\|^2.$$

З'ясувалося, що

1) оцінка $\hat{\tilde{\alpha}}$ є

- незміщеною, тобто $M\hat{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix}\alpha \\ \vec{\theta}_{p_1}\end{pmatrix}$,
- слушною,

2) оцінка $\hat{\tilde{\sigma}}^2$ є

- незміщеною.

Але виявляється характеристика розсіювання для $_{\mathrm{I}}\,\hat{\tilde{\alpha}}$ набуває вигляду

$$M\left(\hat{\hat{\alpha}} - M\hat{\hat{\alpha}}\right)\left(\hat{\hat{\alpha}} - M\hat{\hat{\alpha}}\right)^T = \sigma^2\left(X^T X\right)^{-1} + \Delta V,\ \Delta V \geq 0,$$

Зауваження.

I. Випадок недобору регресорів у вибраній моделі.

У цьому випадку оцінки $\hat{\alpha}$ та $\hat{\sigma}^2$ є зміщеними, а також втрачені деякі регресори у вибраній моделі.

II. Випадок перебору регресорів у вибраній моделі.

Хоч у цьому випадку оцінки $\hat{\hat{\alpha}}$ та $\hat{\hat{\sigma}}^2$ є незміщеними, але характеристика розсіювання для $\hat{\hat{\alpha}}$ може зрости і в результаті втрачається точність оцінювання параметрів регресійної моделі. Крім цього не працює принцип економічності для обраної моделі.

Перевірку на адекватність отриманої лінійної регресійної моделі будемо здійснювати шляхом перевірки гіпотези

$$H_0 : M\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$$

з деяким малим рівнем значущості $\gamma > 0$.

Нехай по основній вибірці об'єму N на основі моделі

$$y = X\alpha + e,\ \alpha \in \mathbb{R}^p,\ \ y, e \in \mathbb{R}^N, X \in M_{N,p}(\mathbb{R}), \tag{0.34}$$

отримали оцінку

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p}\left\|y - X\hat{\alpha}\right\|^2,$$

де $\hat{\alpha} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$.

Припустимо, що маємо також додаткову вибірку об'єму n незалежних спостережень у фіксованій точці фазового простору x_0:

$$y_0(k) = x_0^T\alpha + e_0(k), k = \overline{1,n},$$

тоді на базі цієї вибірки отримуємо незалежну оцінку для σ^2:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(y_0(k) - \overline{y}_0\right)^2,$$

55:38

де $\overline{y}_0 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} y_0(k)$.

Відомо, що статистики $\dfrac{(n-1)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma^2}$ та $\dfrac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ є незалежними по побудові та мають такі розподіли відповідно

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

$$\frac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-p),$$

причому в останньому прийнята до уваги властивість IV.а для оцінки $\hat{\sigma}^2$.

Тоді згідно побудови справедливо

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\cancel{(N-p)}\hat{\sigma}^2}{\cancel{\sigma^2}}}{\cancel{(N-p)}}}{\dfrac{\dfrac{\cancel{(n-1)}\hat{\sigma}_0^2}{\cancel{\sigma^2}}}{\cancel{(n-1)}}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F(N-p, n-1).$$

Введемо позначення

$$F = \begin{cases} \dfrac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}, \text{якщо } \hat{\sigma}^2 \ge \hat{\sigma}_0^2, \\ \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}, \text{якщо } \hat{\sigma}^2 < \hat{\sigma}_0^2. \end{cases}$$

Тоді логічно в якості критичної області для гіпотези H_0 взяти область великих значень, а відповідна область прийняття для нашої гіпотези набуде вигляду:

$$\boxed{\begin{cases} F < F_\gamma(N-p, n-1), \text{якщо } \hat{\sigma}^2 \ge \hat{\sigma}_0^2, \\ F < F_\gamma(n-1, N-p), \text{якщо } \hat{\sigma}^2 < \hat{\sigma}_0^2. \end{cases}} \qquad (0.35)$$

Зауваження. Рекомендується, щоб принаймні

$$\min(N-p, n-1) \ge 5,$$

але чим він більший тим краще.

Випадок неоднорідних та корельованих похибок лінійної регресійної моделі

Згадаємо постановку задачі у класичному регресійному аналізі. Вважаємо, що для регресійної моделі

$$y = X\alpha + e \tag{0.36}$$

справедливі усі припущення класичного регресійного аналізу:

I. $e \sim \mathcal{N}\left(\theta_N, \sigma^2 E_N\right), \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$,

II. $rank(X) = p$,

III. немає ніяких обмежень на α, тобто $\alpha \in \mathbb{R}^p$.

Введемо позначення $Q(\alpha) = \|y - X\alpha\|^2$. Тоді відомо, що при справедливості припущень I, II, III оцінка МНК є розв'язком такої оптимізаційної задачі

$$\hat{\alpha} = \arg\min_{\alpha} Q(\alpha) = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y.$$

Послабимо тепер припущення I, а саме будемо вважати, що вектор похибок моделі e задовольняє умові:

I'. $e \sim \mathcal{N}\left(\theta_N, V\right), V > 0$.

Тоді оцінка МНК для об'єкту (0.36) при справедливості припущень I', II, III, тобто при наявності неоднорідних та корельованих похибок моделі, будемо шукати як розв'язок такої оптимізаційної задачі

$$\hat{\alpha}_{V^{-1}} = \arg\min_{\alpha} \|e\|^2_{V^{-1}}.$$

Тобто ця оцінка є частинним випадком оцінки ЗМНК з ваговою матрицею V^{-1} і буде мати такий вигляд

$$\hat{\alpha}_{V^{-1}} = \left(X^T V^{-1} X\right)^{-1} X^T V^{-1} y \tag{0.37}$$

і називається *марковською оцінкою*.

Властивості марковської оцінки:

I. $\hat{\alpha}_{V^{-1}} \sim \mathcal{N}\left(\alpha, \left(X^T V^{-1} X\right)^{-1}\right)$,

II. оцінка $\hat{\alpha}_{V^{-1}}$ є ефективною,

III. Вкажемо явно у регресійній моделі поточну кількість спостережень N:

$$y_N = X_N \alpha + e_N,$$

де $y_N, e_N \in \mathbb{R}^N, X_N \in M_{N,p}(\mathbb{R}), e_N \sim \mathcal{N}(\theta_N, V_N), V_N > 0, N \in \mathbb{N}$.

Позначимо через $\hat{\alpha}_{V_N^{-1}}(N) = \left(X_N^T V_N^{-1} X_N\right)^{-1} X_N^T V_N^{-1} y_N$ марковську оцінку для α у цій моделі.

Тоді марковська оцінка $\hat{\alpha}_{V_N^{-1}}(N)$ є сильно слушною тоді і тільки тоді, коли

$$\left(X_N^T V_N^{-1} X_N\right)^{-1} \xrightarrow[N \to \infty]{} \Theta_p,$$

де Θ_p - нульова матриця порядку p.