5. Системи лінійних диференціальних рівнянь.

5.1. Загальні положення.

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

називається **лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь**.

Система

$$
\begin{cases}
x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n(t) \\
x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n(t) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n(t)
\end{cases}
$$

називається **лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь**.

Якщо ввести векторні позначення

$$
x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},
$$

то лінійну неоднорідну систему можна переписати у вигляді

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

а лінійну однорідну систему у вигляді

$$x'(t) = A(t)x(t) .$$

Якщо функції $a_{ij}(t),\ \ f_i(t),\ \ \ i, j = \overline{1, n}$ неперервні в околі точки $(x_0, t_0) = (x_1^0, x_2^0,\ \dots\ , x_n^0, t_0),$ то виконані умови **теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші**, і існує єдиний розв'язок

$$x_1 = x_1(t),\ \ x_2 = x_2(t),\ \dots\ ,\ \ \ x_n = x_n(t),$$

системи рівнянь, що задовольняє початковим даним

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \dots\ ,\ \ \ x_n(t_0) = x_n^0.$$

5.1.1. Властивості розв'язків лінійних однорідних систем

Властивість 5.1.1. Якщо вектор $x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком лінійної однорідної системи, то і

$$Cx(t)=\begin{pmatrix} Cx_1(t) \\ Cx_2(t) \\ \dots \\ Cx_n(t) \end{pmatrix},$$

де C - довільна стала скалярна величина, також є розв'язком цієї системи.

Властивість 5.1.2. Якщо дві векторні функції $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$ є розв'язками однорідної системи, то і їхня сума також буде розв'язком однорідної системи.

Властивість 5.1.3. Якщо вектори $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, … , $x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ є розв'язками однорідної системи, то і їхня лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами також буде розв'язком однорідної системи.

Властивість 5.1.4. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $u(t)+iv(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна $u(t)$ та уявна $v(t)$ частини є розв'язками системи.

Визначення 5.1.1. Вектори $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$, … , $x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ називаються **лінійно залежними** на відрізку $t\in[a,b]$, якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$, такі, що $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\dots+C_nx_n(t)\equiv 0$ при $t\in[a,b]$.

Якщо тотожність справедлива лише при $C_i=0,\ i=\overline{1,n},$ то вектори **лінійно незалежні**.

Визначення 5.1.2. Визначник, що складається з векторів $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, тобто

$$W[x_1(t), \ldots, x_n(t)] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

називається **визначником Вронського**.

Теорема 5.1.1. Для того щоб розв'язки $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ були лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб $W[x_1(t), \ldots, x_n(t)] \neq 0$ у жодній точці $t \in [a, b]$.

Теорема 5.1.2. **Загальний розв'язок** лінійної однорідної системи представляється у вигляді **лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків**.

Властивість 5.1.5. Максимальне число незалежних розв'язків дорівнює кількості рівнянь.

Визначення 5.1.3. Матриця, складена з будь-яких n лінійно незалежних розв'язків, називається **фундаментальною матрицею** розв'язків системи.

Якщо лінійно незалежними розв'язками будуть

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix},\ x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \dots,\ x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

тоді матриця

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

буде **фундаментальною матрицею** розв'язків.

Як випливає з попередньої теореми загальний розв'язок може бути представлений у вигляді

$$x_{одн}(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\ ,$$

де C_i - довільні сталі.

Якщо ввести вектор $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$, то загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$x_{одн}(t) = X(t)C,$$

де $X(t)$ - фундаментальна матриця розв'язків.

5.1.2. Формула Якобі

Залежність визначника Вронського в довільний момент часу через значення в початковий момент має вигляд

$$W[x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)] = W[x_1(t_0), \ \dots \ , x_n(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^{t} SpA(t)dt\right)$$

і називається **формулою Якобі**.

5.2. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$

де a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ - сталі величини, називається **лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами**.

У матричному вигляді вона записується

$$x'(t) = Ax(t).$$

5.2.1. Розв'язування систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера.

Розв'язок системи шукаємо у вигляді вектора

$$x(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1 e^{\lambda t}\\ \alpha_2 e^{\lambda t}\\ \dots\\ \alpha_n e^{\lambda t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}e^{\lambda t}.$$

Підставивши в систему диференціальних рівнянь, одержимо

$$\begin{cases}\alpha_1\lambda e^{\lambda t}=a_{11}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{12}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{1n}\alpha_n e^{\lambda t}\\ \alpha_2\lambda e^{\lambda t}=a_{21}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{22}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{2n}\alpha_n e^{\lambda t}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_n\lambda e^{\lambda t}=a_{n1}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{n2}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{nn}\alpha_n e^{\lambda t}\end{cases}$$

Скоротивши на $e^{\lambda t}\neq 0$, і перенісши всі члени вправо, запишемо

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ \dots \ + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \ \dots \ + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ \dots \ + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Отримана однорідна система лінійних алгебраїчних (відносно невідомих $\alpha_i,\ i=\overline{1,n}$) рівнянь має розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Це рівняння, може бути записаним у векторно-матричній формі

$$\det(A-\lambda E)=0$$

і воно називається **характеристичним** (віковим) **рівнянням**.

Розкриємо його

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ \dots \ + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го ступеня має n-коренів.

Розглянемо різні випадки.

1. Всі **корені характеристичного рівняння** $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$ **(власні числа матриці** A**)** дійсні і різні.

Підставляючи їх по черзі в систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ \dots \ + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_i)\alpha_2 + \ \dots \ + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ \dots \ + (a_{nn} - \lambda_i)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

одержуємо відповідні ненульові розв'язки системи

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \dots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \dots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad, \alpha^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \dots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

що являють собою **власні вектори**, які відповідають власним числам λ_i, $i = \overline{1,n}$.

У такий спосіб одержимо n- розв'язків

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} \\ \dots \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \dots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} \\ \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \dots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \quad \dots \quad, x_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots \\ \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \dots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix} e^{\lambda_n t} \dots$$

Причому оскільки $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$ - різні, а $\alpha^1, \alpha^2, \ \dots \ , \alpha^n$ - відповідні їм власні вектори, то розв'язки $x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)$ - лінійно незалежні, і загальний розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t).$$

Або у векторно-матричної формі запису

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots & & & \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, \ \dots \ , C_n$ - довільні сталі.

2. Нехай $\lambda = p \pm iq$ пара комплексно спряжених коренів.

Візьмемо один з них, наприклад $\lambda = p + iq$. Комплексному власному числу відповідає комплексний власний вектор

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + is_1 \\ r_2 + is_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_n + is_n \end{pmatrix}$$

і, відповідно, розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{(p+iq)t} \\ (r_2 + is_2)e^{(p+iq)t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{(p+iq)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1) \\ (r_2 + is_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n) \end{pmatrix} e^{(p+iq)t}$$

Використовуючи залежність $e^{(p+iq)t} = e^{pt}(\cos qt + i \sin qt)$, перетворимо розв'язок до вигляду:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ (r_2 + is_2)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\sin qt + s_1\cos qt) \\ e^{pt}(r_2\sin qt + s_2\cos qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\sin qt + s_n\cos qt) \end{pmatrix} = u(t) + iv(t).$$

І, як випливає з властивості 5.1.4 розв'язків однорідних систем, якщо комплексна функція $u(t)+iv(t)$ дійсного аргументу є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна і уявна частини також будуть розв'язками, тобто комплексним власним числам $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$u(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt + s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt + s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt + s_n\sin qt) \end{pmatrix}.$$

3. Якщо характеристичне рівняння має кратний корінь λ кратності γ, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\gamma = \lambda$, то розв'язок системи рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta_1^1 + \beta_1^2 t + \ldots + \beta_1^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ (\beta_2^1 + \beta_2^2 t + \ldots + \beta_2^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\beta_n^1 + \beta_n^2 t + \ldots + \beta_n^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Підставивши його у вихідне диференціальне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо $\gamma \times n$ - рівнянь, що містять $\gamma \times n$-невідомих. Тому що корінь характеристичного рівняння λ має кратність γ, то ранг отриманої системи $\gamma n - \gamma = \gamma(n-1)$. Вводячи γ довільних сталих $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_\gamma$ і розв'язуючи систему, одержимо

$$\beta_i^j = \beta_i^j(C_1, C_2, \ldots, C_\gamma), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,\gamma}.$$