3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Загальний вигляд лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь наступний

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=b(x).$$

3.2.1. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

Властивість 1. Якщо $y_0(x)$ - розв'язок лінійного однорідного рівняння,

$y_1(x)$- розв'язок неоднорідного рівняння,

то $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$ буде розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Властивість 2 (принцип суперпозиції). Якщо $y_i(x),\ i=\overline{1,n}$ - розв’язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=b_i(x)\ ,\ i=\overline{1,m},$$

то $y(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i y_i(x)$ з довільними сталими C_i буде розв’язком лінійного неоднорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i b_i(x).$$

Властивість 3. Якщо комплексна функція $y(x)=u(x)+iv(x)$ з дійсними елементами є розв’язком лінійного неоднорідного рівняння з комплексною правою частиною $b(x)=f(x)+ip(x),$

то дійсна частина $u(x)$ є розв’язком рівняння з правою частиною $f(x),$

а уявна $v(x)$ є розв’язком рівняння з правою частиною $p(x)$.

Теорема. Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається з загального розв’язку лінійного однорідного рівняння і частинного розв’язку неоднорідного рівняння.

Як випливає з теореми для знаходження загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння треба шукати загальний розв’язок однорідного рівняння, тобто будь-які n - лінійно незалежні розв’язки і якийсь частинний розв’язок неоднорідного рівняння. Розглянемо методи побудови частинного розв’язку лінійного неоднорідного рівняння.

3.2.2 Метод варіації довільної сталої побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але сталі C_i, $i = \overline{1,n}$ вважаються невідомими функціями.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = b(x)$$

Де загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $y_{одн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

то частинний розв'язок неоднорідного шукаємо у вигляді $y_{неодн}(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$.

Візьмемо похідну

$$y'_{неодн}(x) = C'_1(x) y_1(x) + C'_2(x) y_2(x) + C_1(x) y'_1(x) + C_2(x) y'_2(x)$$

і ***прирівняємо її першу частину до нуля***.

Отримаємо рівняння $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$.

Візьмемо другу похідну і отримаємо

$$y''_{неодн}(x)=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

Підставивши значення функції, та її похідних у вихідне рівняння і скоротивши потрібні члени, отримаємо

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Таким чином для знаходження функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$ маємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=\dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Звідси $$C_1(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ \dfrac{b(x)}{a_0(x)} & y_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}dx,\quad C_2(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}y_1(x) & 0\\ y_1'(x) & \dfrac{b(x)}{a_0(x)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}dx.$$

І одержуємо $$y_{неодн}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

з обчисленими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

3.2.3. Метод Коші

Нехай $y = K(x,s)$ – розв'язок однорідного диференціального рівняння, що задовольняє умови

$$K(s,s) = K'_x(s,s) = \ldots = K_x^{(n-2)}(s,s) = 0, \qquad K_x^{(n-1)}(s,s) = 1.$$

Тоді функція
$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$$

буде розв'язком неоднорідного рівняння, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Дійсно, розглянемо похідні від функції $y(x)$:

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} K'_x(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds + K(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

І оскільки $K(x,x) = 0$, то $y' = \int_{x_0}^{x} K'_x(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$.

Аналогічно

$$y''(x)=\int_{x_0}^{x} K_x''(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x'(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=\int_{x_0}^{x} K_x''(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

....

$$y^{(n-1)}(x)=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-2)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

$$y^{(n)}(x)=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-1)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}$$

І оскільки $K_x^{(n-1)}(s,s)=1$, то

$$y^{(n)}=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Підставивши функцію $y(x)$ та її похідні у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0(x)\left[\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}\right]+a_1(x)\left[\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]+\ldots$$

$$\ldots+a_n(x)\left[\int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left[a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \ldots\ +a_n(x)K(x,s)\right]\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+b(x)=b(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то

$$a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \ldots\ +a_n(x)K(x,s)\equiv 0.$$

У такий спосіб показано, що $y(x)=\int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Підставляючи $x = x_0$ у вирази для $y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)$

одержимо, що $$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Для знаходження функції $K(x,s)$ (інтегрального ядра) можна використати такий спосіб.

Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{одн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком однорідного рівняння, то його слід шукати у такому ж вигляді, тобто

$$K(x,s) = C_1(s) y_1(x) + C_2(s) y_2(x) + \ldots + C_n(s) y_n(x).$$

Відповідні початкові умови мають вигляд

$$K(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1(s)+C_2(s)y_2(s)+\ldots+C_n(s)y_n(s)=0$$

$$K'_x(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y'_1(s)+C_2(s)y'_2(s)+\ldots+C_n(s)y'_n(s)=0$$

....

$$K_x^{(n-2)}(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1^{(n-2)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-2)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-2)}(s)=0.$$

$$K_x^{(n-1)}(s,s)=1 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1^{(n-1)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-1)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-1)}(s)=1.$$

Звідси

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(s) & \ldots\ldots\ldots\ldots & y_n(s) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots\ldots\ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ 1 & y_2^{(n-1)}(s) & \ldots\ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \;\ldots\;, y_n(s)\right]}, \qquad C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & 0 & \ldots & y_n(s) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)}(s) & 0 & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1^{(n-1)}(s) & 1 & \ldots\ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \;\ldots\;, y_n(s)\right]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n(s) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \ldots & y_{n-1}(s) & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & & \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots\ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(s) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \ldots\ldots\ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(s) & 1 \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \ \ldots \ , y_n(s)\right]}.$$

І ядро $K(x,s)$
має вигляд

$$K(x,s) = C_1(s)y_1(x) + C_2(s)y_2(x) + \ldots + C_n(s)y_n(x)$$

з одержаними функціями $C_1(s), C_2(s), \ldots, C_n(s)$.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=b(x),$$

то функція $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x),$$

де

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}},\qquad C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}}.$$

Звідси

$$K(x,s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}y_1(x)+\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}y_2(x)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}=\frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}.$$

3.2.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо лінійне диференціальне рівняння є рівнянням з сталими коефіцієнтами, а функція $b(x)$ **спеціального виду**, то частинний розв’язок можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

1) Нехай $b(x)$ **має вид многочлена**, тобто $b(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_{s-1} x + A_s$.

а) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda \neq 0$.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо вигляді:

$$y_{неодн} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_{s-1} x + B_s,$$

де $B_0, \ \ldots, B_s$ - невідомі сталі.

Тоді

$$y'_{неодн} = sB_0 x^{s-1} + (s-1)B_1 x^{s-2} + \ldots + B_{s-1},$$

$$y''_{неодн} = s(s-1)B_0 x^{s-2} + (s-1)(s-2)B_1 x^{s-3} + \ldots + 2 \cdot 1 \cdot B_{s-2},$$

……………………………………………………………..

Підставляючи у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0[\ldots]+\ \ldots\ +a_{n-2}[s(s-1)B_0x^{s-2}+(s-1)(s-2)B_1x^{s-3}+\ \ldots+2\cdot 1\cdot B_{s-1}]+$$

$$+a_{n-1}[sB_0x^{s-1}+(s-1)B_1x^{s-2}+\ \ldots+B_{s-1}]+a_n[B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ \ldots+B_s]=$$

$$=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ \ldots+A_{s-1}x+A_s.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x запишемо:

$$\begin{aligned}
x^s &: \quad a_nB_0=A_0\\
x^{s-1} &: \quad a_nB_1+sa_{n-1}B_0=A_1\\
x^{s-2} &: \quad a_nB_2+(s-1)a_{n-1}B_1+s(s-1)a_{n-2}B_0=A_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Оскільки характеристичне рівняння не має нульового кореня, то

$$a_n\neq 0.$$

Звідси одержимо

$$B_0 = \frac{1}{a_n} A_0, \qquad B_1 = \frac{1}{a_n}\left[A_1 - s a_{n-1} B_0\right], \ \dots .$$

б) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності r.

Тоді частинний розв'язок вихідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{неодн} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + B_s) x^r .$$

2) Нехай $b(x)$ має вигляд $b(x) = e^{px}(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ \dots \ + A_s)$.

а) Розглянемо випадок, коли p - не є коренем характеристичного рівняння.

Частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння шукається у вигляді:

$$y_{неодн} = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + B_s).$$

б) Розглянемо випадок, коли p - корінь характеристичного рівняння кратності r.

Тут частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y_{неодн} = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + B_s)x^r.$$

3) Нехай $b(x)$ має вигляд: $$b(x) = e^{px}[P_s(x)\cos qx + Q_l(x)\sin qx],$$

де $P_s(x),\ Q_l(x)$ - многочлени степеня s і l, відповідно, і, наприклад, $l \le s$.

Використовуючи **властивості 2, 3** розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь, а також **випадки 2 а), б)** знаходження частинного розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь, одержимо, що частинний розв'язок шукається у наступних виглядах:

а)
$$y_{неодн} = e^{px}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ \dots\ + A_s)\cos qx + \\ + (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ \dots\ + B_s)\sin qx],$$

якщо $p \pm iq$ - не є коренем характеристичного рівняння;

б)
$$y_{неодн} = e^{px}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ \dots\ + A_s)\cos qx + \\ + (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ \dots\ + B_s)\sin qx]x^r,$$

якщо $p \pm iq$ - є коренем характеристичного рівняння кратності r.