Ю.Д. Попов
В.І. Тюптя
В.І. Шевченко

Методи оптимізації

Навчальний електронний посібник для студентів спеціальностей
“Прикладна математика”,
“Інформатика”,
“Соціальна інформатика”

Київ
Електронна бібліотека факультету кібернетики
2003

УДК 519.6.

Попов Ю.Д., Тюптя В.І., Шевченко В.І. Методи оптимізації. Навчальний електронний посібник для студентів спеціальностей “Прикладна математика”, “Інформатика”, “Соціальна інформатика”. – Київ: Електронне видання. Ел. бібліотека факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2003.–215 с.

У посібнику викладені основи сучасних методів оптимізації у відповідності з програмою курсу дослідження операцій, який читається на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Посібник охоплює як у теоретичному, так і у практичному аспекті основні розділи лінійного, дискретного, нелінійного та опуклого програмування, транспортні задачі і основні оптимізаційні задачі на мережах, основи теорії матричних ігор.

Призначений для студентів університетів та спеціальностей “Прикладна математика”, “Інформатика”, “Соціальна інформатика”, а також для осіб, що спеціалізуються в області математичних методів дослідження операцій чи їх застосувань або вивчають їх самостійно.

Іл. – 52, табл. – 41, бібліогр. – 22.

Рецензенти: І.М.Ляшенко, д-р фіз-мат. наук,
А.А.Чикрій, д-р фіз-мат. наук

Затверджено вченою радою
факультету кібернетики
21 жовтня 2002 року

Електронна бібліотека факультету кібернетики КНУ, 2003

Розділ 1. Лінійне програмування

Однією з найважливіших задач оптимізації є *задача математичного програмування*, що полягає в пошуку екстремуму (мінімуму або максимуму) функції $f(\boldsymbol{x})$ при умовах $g_i(\boldsymbol{x}) \le 0$, $i = 1,\ldots,m$, $\boldsymbol{x} \in X \subset E^n$.

Якщо функції $f(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1,\ldots,m$, — лінійні, а область X задається обмеженнями вигляду $l_j \le x_j \le r_j$, $j = 1,\ldots,n$, то вказана задача називається *задачею лінійного програмування* (*ЗЛП*). Уперше постановка *ЗЛП* та один із методів її розв'язання були запропоновані **Л.В. Канторовичем** у роботі "Математические методы организации и планирования производства" у 1939 році. У 1947 році **Дж. Данціг** розробив симплексний метод (симплекс-метод) — один із основних методів розв'язування *ЗЛП*. З тих пір теорія лінійного програмування бурхливо розвивалася і нині носить цілісний, в основному, закінчений характер.

Зауважимо, що на розвиток теорії лінійного програмування суттєво впливало її застосування до розв'язування (з широким використанням *ЕОМ*) прикладних задач, пов'язаних з оптимальним плануванням, організацією та управлінням у різноманітних сферах людської діяльності.

Систематичне вивчення теорії лінійного програмування розпочнемо з розгляду типових, що стали класичними, прикладів *ЗЛП*.

§ 1. Приклади задач лінійного програмування

1. Задача про перевезення (транспортна задача)

У пунктах P_i ($i = 1,\ldots,m$) виробляється деякий однорідний продукт, причому в пункті P_i виробляється a_i одиниць цього продукту. У пункті Q_j ($j = 1,\ldots,n$) споживається b_j одиниць цього ж продукту. Припускаємо, що

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Нехай c_{ij} — собівартість перевезення одиниці продукту з пункту виробництва P_i у пункт споживання Q_j (транспортні витрати). Необхідно знайти план перевезень продукту таким чином, щоб задовольнити потреби всіх споживачів, мінімізуючи при цьому загальні транспортні витрати.

Нехай x_{ij} — невідома кількість продукту, що планується для перевезення з P_i в Q_j. Тоді транспортна задача, яку прийнято називати *транспортною задачею лінійного програмування* (*ТЗЛП*), полягає у знаходженні матриці перевезень $\boldsymbol{X} = \| x_{ij} \|$, $i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,$ що мінімізує загальні транспортні витрати

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n.$$

2. Задача про харчовий раціон (задача про дієту)

Харчовий раціон може складатися з продуктів $P_1,\ldots,P_n$ (хліб, масло, молоко і т. ін.). Відомо, що в одиниці продукту P_j міститься a_{ij}, $i = 1,\ldots m,$ одиниць поживної речовини V_i (білки, жири, вуглеводи і т. ін.) Нехай c_j — вартість одиниці продукту P_j. Припускається, що харчовий раціон повинен містити не менше b_i одиниць речовини V_i. При вказаних обмеженнях потрібно знайти раціон найменшої вартості.

Формалізуємо цю задачу. Нехай x_j — кількість продукту P_j у шуканому раціоні. Тоді вектор $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ визначає деякий раціон вартістю

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\ .$$

Кількість поживної речовини V_i у раціоні $\boldsymbol{x}$ дорівнює

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\ .$$

Таким чином, задача про харчовий раціон зводиться до мінімізації функції

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i\,,\ i = 1,\ldots,m,$$

$$x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n.$$

3. Задача розподілу ресурсів

Деяке підприємство може реалізувати n виробничо-технологічних процесів $P_1,\ldots,P_n$, використовуючи для цього ресурси $R_1,\ldots,R_m$.

Відомо, що

а) підприємство має b_i одиниць ресурсу R_i, $i = 1,\ldots,m$;

б) витрати ресурсу R_i на одиницю продукції, що виготовляється за технологією P_j, дорівнюють a_{ij};

в) реалізація одиниці продукції, виготовленої за технологією P_j, приносить підприємству прибуток c_j.

Задача полягає у визначенні об'єму виробництва x_j продукції за технологією P_j, $j = 1,\ldots,n$, що максимізує за цих умов прибуток підприємства.

Легко бачити, що сформульована задача формально зводиться до знаходження вектора $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, що максимізує функцію

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n.$$

Незважаючи на змістовні відмінності, усі приведені приклади мають багато спільного. Це спільне полягає в лінійності функцій, що підлягають мінімізації (максимізації) та функцій, що входять в обмеження (рівності або нерівності).

§ 2. Загальна задача лінійного програмування

Загальна ЗЛП (*ЗЗЛП*) формулюється таким чином.

Знайти вектор $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n) \in E^n$, *що мінімізує (максимізує) лінійну функцію*

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.1}$$

і задовольняє систему лінійних обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \;\; R_i \;\; b_i, \quad j = 1,\dots,m, \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,k,\ k \le n, \tag{1.3}$$

де символ R_i *замінює один із знаків* $\le$, $=$, $\ge$.

Обмеження (1.3) називаються *прямими* і, як правило, не включаються до *непрямих* обмежень (1.2).

Вектор $\boldsymbol{x}$, що задовольняє обмеження (1.2), (1.3), називається *допустимим розв'язком* (*вектором, точкою, планом*) *ЗЛП*.

Множина допустимих розв'язків *ЗЛП* називається *допустимою областю* (*множиною*) *ЗЛП*, позначається буквою D і записується також у вигляді

$$D = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n) \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; R_i \; b_i,\ i = 1,\dots,m,\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,k,\ k \le n \right\}.$$

Функція $L(\boldsymbol{x})$ називається *цільовою*, $\boldsymbol{x}^* \in D$, що доставляє цільовій функції мінімум (максимум), називається *оптимальним розв'язком ЗЛП* і часто записується у вигляді

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x} \in D} (\max) L(\boldsymbol{x}).$$

Величина $L(\boldsymbol{x}^*)$ називається *оптимальним значенням цільової функції.*

Зауважимо також, що той факт, що цільова функція $L(\boldsymbol{x})$ має бути мінімізована (максимізована), часто записується у вигляді

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max).$$

§ 3. Властивості допустимої області

Нехай $\boldsymbol{x}^i = (x_1^i,\ldots,x_n^i) \in E^n$, $i = 1,\ldots,r$, $r \geq 2$. *Опуклою лінійною оболонкою точок* $\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^r$ називається сукупність точок виду

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{x}^i,$$

де α_i, $i = 1,\ldots,r,$ — будь-які числа, що задовольняють умовам

$$\alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1 .$$

Будь-яка точка опуклої лінійної оболонки називається *опуклою лінійною комбінацією точок* $\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^r$.

При $r = 2$ опукла лінійна оболонка називається *відрізком*, що з'єднує точки $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$, і позначається $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2]$, тобто

$$[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2] = \{\boldsymbol{x}:\ \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^2,\ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Множина W називається *опуклою*, якщо для довільних $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in W$ виконується $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2] \subseteq W$.

Нагадаємо також, що множина

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq (\geq)\ b \right\}$$

називається *півпростором* у E^n, а множина

$$G = \left\{ \boldsymbol{x} \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \right\} - \tag{1.4}$$

гіперплощиною в E^n.

Перетином двох множин називається множина тих і тільки тих точок, що належать обом множинам.

Лема 1.1. *Перетин опуклих множин є опуклою множиною.*

Доведення. Нехай A та B опуклі множини, $A \cap B$ — їх перетин. Розглянемо довільні точки $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in A \cap B$. За означенням перетину множин $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in A$, $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in B$. Оскільки A та B — опуклі множини, то $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2] \subseteq A$, $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2] \subseteq B$. Звідси за означенням перетину $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2] \subseteq A \cap B$.

Лема 1.2. *Півпростір є опуклою множиною.*

Доведення. Розглянемо, наприклад, півпростір

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \right\}$$

і нехай $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in P$. Це означає, що

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^k \leq b,\quad k = 1,2, \tag{1.5}$$

де $x_1^k,...,x_n^k$ — координати точки $\boldsymbol{x}^k$. Розглянемо деяку довільну точку $\boldsymbol{x}$ відрізка $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2]$ і покажемо, що вона також належить P. Нехай

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^2,\quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Маємо з врахуванням (1.5)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\left(\alpha\, x_j^1 + (1-\alpha)\, x_j^2\right) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j^1 + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j^2 \le$$

$$\le \alpha b + (1-\alpha)\, b = b.$$

Це означає, що довільна точка $\boldsymbol{x}$ відрізка $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2]$ належить P. Отже півпростір є опуклою множиною.

Лема 1.3. *Гіперплощина є опуклою множиною.*

Доведення. Гіперплощина (1.4) є перетин півпросторів

$$P_1 = \left\{ \boldsymbol{x} \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \right\}$$

та

$$P_2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b \right\},$$

що є опуклими множинами згідно леми 1.2, отже, гіперплощина є опуклою множиною згідно леми 1.1.

Означення 1.1. *Многогранною множиною називається перетин скінченного числа півпросторів. Обмежена многогранна множина називається многогранником.*

Зрозуміло, що допустима множина D *ЗЛП* є многогранною множиною (якщо вона не порожня). Інколи область D називають многогранником, додаючи слова "обмежений" або "необмежений".

Безпосереднім наслідком цих означень та доведених тверджень є така теорема.

Теорема 1.1. *Допустима множина D ЗЛП є опуклою многогранною множиною.*

Отже, *ЗЛП* полягає у знаходженні мінімуму (максимуму) лінійної функції $L(\boldsymbol{x})$ на опуклій многогранній множині D.

Означення 1.2. *Точка* $\boldsymbol{x}$ *опуклої множини* X *називається кутовою* (*крайньою*), *якщо її не можна представити у вигляді*

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^2, \text{ де } \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X,\ \boldsymbol{x}^1 \ne \boldsymbol{x}^2,\ 0 < \alpha < 1.$$

З геометричної точки зору точка $\boldsymbol{x}$ є крайньою точкою множини X, якщо її не можна розташувати усередині відрізка, кінці якого належать X.

Кутові точки опуклої многогранної множини називаються її *вершинами*.

§ 4. Геометричне тлумачення задачі лінійного програмування

Розглянемо конкретні приклади у двовимірному просторі.

Приклад 1.1. *Розглянемо ЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$9x_1 + 4x_2 \le 56,$$
$$3x_1 + 5x_2 \ge 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Допустима область D цієї *ЗЛП* зображена на рис.1.1 і являє собою п'ятикутник з вершинами $V_1(0, 4/5)$, $V_2(0, 3)$, $V_3(4, 5)$, $V_4(56/9, 0)$, $V_5(4/3, 0)$.

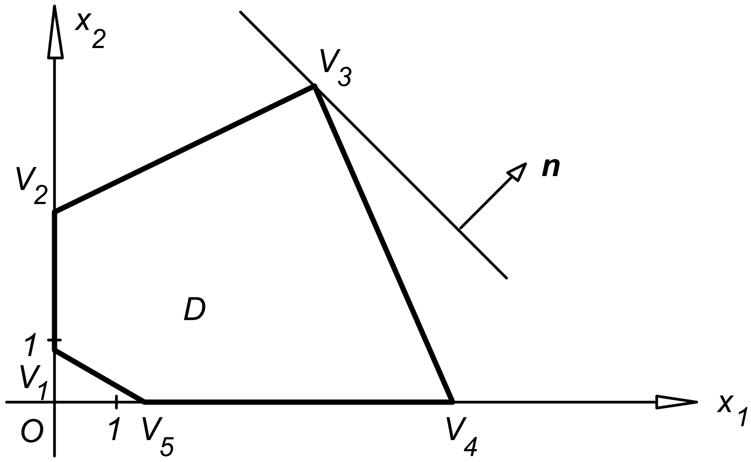


Рис. 1.1

Означення 1.3. *Множина значень* $\boldsymbol{x} \in E^n$ *таких, що* $L(\boldsymbol{x}) = \text{const}$, *називається лінією рівня цільової функції.*

У розглянутому прикладі лінії рівня цільової функції $x_1 + x_2 = \text{const}$ при різних значеннях const є сімейством паралельних прямих зі спільним вектором нормалі $\boldsymbol{n}(1,1)$.

Відомо, що значення const зростає, якщо ці прямі переміщувати у напрямку нормалі $\boldsymbol{n}$.

Звідси з очевидністю випливає, що максимального значення цільова функція досягає у вершині $V_3(4, 5)$ області D, тобто $\boldsymbol{x}^* = (4, 5)$, $L(\boldsymbol{x}^*) = 9$.

Приклад 1.2. *Розглянемо ЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$3x_1 + 5x_2 \ge 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

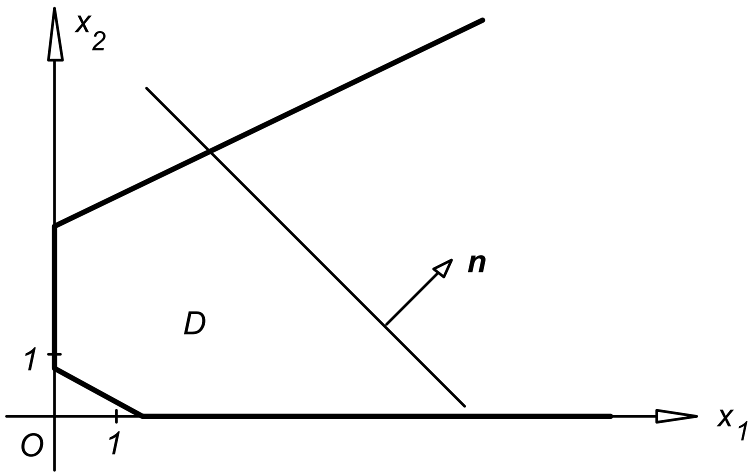


Рис. 1.2

Цей приклад одержано з попереднього, де відкинуто друге непряме обмеження. З рис. 1.2 випливає, що

$$\max_{\boldsymbol{x} \in D} L(\boldsymbol{x}) = \infty .$$

Зауважимо, що, взагалі кажучи, з необмеженості області D не випливає необмеженість зверху (знизу) цільової функції у допустимій області.

Приклад 1.3. *Розглянемо ЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = 9\,x_1 + 4\,x_2 \to \max,$$

$$-\,x_1 + 2\,x_2 \le \;\; 6,$$

$$9\,x_1 + 4\,x_2 \le 56,$$

$$3\,x_1 + 5\,x_2 \ge \;\; 4,$$

$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0.$$

Цей приклад відрізняється від першого лише цільовою функцією.

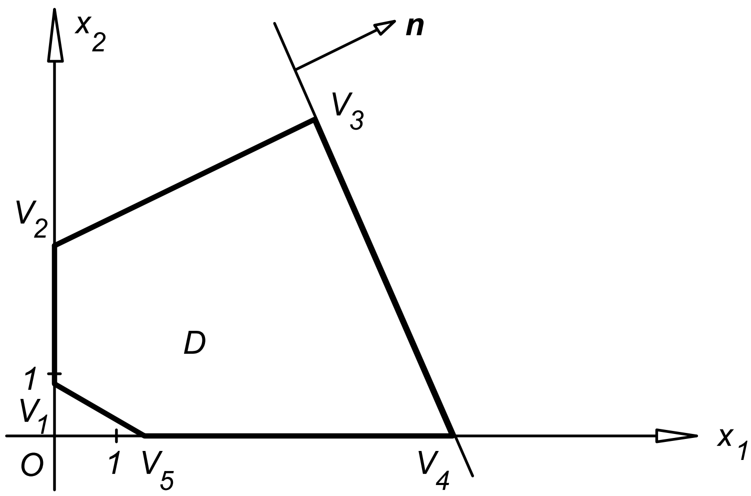


Рис. 1.3

Аналізуючи рис. 1.3, приходимо до висновку, що максимального значення, рівного *56*, цільова функція досягає у будь-якій точці сторони V_3V_4 п'ятикутника *D*.

§ 5. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Приклади, розглянуті у попередньому параграфі, наводять на думку, що оптимальний розв'язок *ЗЛП* (якщо він існує) співпадає з вершиною допустимої області (у деяких випадках — з її гранню або ребром).

Заради простоти розглянемо випадок, коли D — многогранник.

Наведемо без доведення допоміжне твердження, яке необхідне для подальшого викладу.

Лема 1.4. *Будь-яка точка многогранника є опуклою лінійною комбінацією його вершин.*

Теорема 1.2. *Цільова функція ЗЛП досягає оптимального значення у вершині многогранника розв'язків. Якщо цільова функція досягає цього значення у двох та більше точках, то вона досягає того ж значення у будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{x}^i$, $i=1,\ldots,r,$ — вершини многогранника D і, розглядаючи задачу мінімізації, покладемо

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in D} L(\boldsymbol{x}) .$$

Останнє співвідношення означає, що

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \quad \boldsymbol{x} \in D,$$

або з використанням позначення скалярного добутку

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^*) \le (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in D, \tag{1.6}$$

де $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Якщо $\boldsymbol{x}^*$ — вершина D, то першу частину теореми доведено. Нехай $\boldsymbol{x}^*$ не є вершиною D. За лемою 1.4 існують $\alpha_i \ge 0$, $i=1,\ldots,r,$ $\alpha_1+\ldots+\alpha_r=1,$ такі, що

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{x}^i.$$

Використовуючи відомі властивості скалярного добутку, маємо

$$\left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^*\right) = \left(\boldsymbol{c}, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{x}^i\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^i\right) \ge \left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^k\right) \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^k\right), \tag{1.7}$$

де $\boldsymbol{x}^k$ — така вершина, що

$$(c, \boldsymbol{x}^k) = \min_{1\le i\le r} (c, \boldsymbol{x}^i) .$$

Із співвідношень (1.6) та (1.7) випливає, що $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^*) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^k)$, а це означає, що існує вершина $\boldsymbol{x}^k$ допустимої області D, де цільова функція приймає найменше значення.

Доведемо другу частину теореми. Нехай цільова функція досягає мінімального значення у точках $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^s$ тобто

$$(c, \boldsymbol{x}^i) = l = \min_{\boldsymbol{x}\in D} L(\boldsymbol{x}) , \quad i = 1,\ldots,s.$$

Розглянемо опуклу лінійну комбінацію

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \boldsymbol{x}^i, \quad \alpha_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots,s, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_s = 1.$$

Покажемо, що $L(\boldsymbol{x}^*) = l$. Дійсно,

$$L(\boldsymbol{x}^*) = \left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^*\right) = \left(\boldsymbol{c}, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \boldsymbol{x}^i\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^i\right) = l \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = l.$$

Згідно доведеної теореми розв'язки *ЗЛП* слід шукати серед вершин її допустимої множини. Однак пряма реалізація цієї ідеї практично неможлива через велику кількість вершин у загальному випадку та складність їх знаходження. Далі будуть викладені досить прості методи, що дозволяють уникнути цих труднощів.

§ 6. Стандартна задача лінійного програмування. Базисні розв'язки

Стандартна ЗЛП (СЗЛП) має вигляд

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{1.9}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{1.10}$$

Це *СЗЛП* у *координатній формі*. Ми будемо також використовувати *векторну* та *матричну форми СЗЛП*.

Векторна форма СЗЛП:

$$L(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \to \min, \tag{1.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \tag{1.13}$$

де $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $\boldsymbol{A}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})'$, $j = 1,\ldots,n,$ — *вектор умов*, що відповідає змінній x_j, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)'$ — *вектор обмежень*, а штрих (**'**) означає транспонування.

Матрична форма СЗЛП:

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min, \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \tag{1.16}$$

де $\boldsymbol{A} = \|a_{ij}\|$, $i = 1,\ldots m$, $j = 1,\ldots,n$, — *матриця умов* (її стовпцями є вектори умов $\boldsymbol{A}_j$), $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)'$.

Зауважимо, що *СЗЛП* є частинним випадком *ЗЗЛП*. У свою чергу будь-яка *ЗЗЛП* зводиться до стандартної форми:

а) задача максимізації $L(\boldsymbol{x})$ еквівалентна задачі мінімізації $-L(\boldsymbol{x})$;

б) обмеження нерівності

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge)\ b_i$$

перетворюються в обмеження-рівності введенням *додаткових* (*балансних*) невід'ємних змінних x_{n+i} таким чином:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + (-)\, x_{n+i} = b_i;$$

в) для змінних x_j, що можуть приймати і від'ємні значення, вводиться заміна $x_j = x_j^{+} - x_j^{-}$, $x_j^{+} \ge 0$, $x_j^{-} \ge 0$.

Позначимо через $\overline{\boldsymbol{A}}$ розширену матрицю системи $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Надалі, не обмежуючи загальності, припускається, що для *СЗЛП*

$$\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang} \overline{\boldsymbol{A}} = m < n. \qquad (1.17)$$

Як відомо, у цьому випадку система рівнянь $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ сумісна і має нескінченну множину розв'язків. Крім того, максимальне число лінійно незалежних векторів умов $\boldsymbol{A}_j$, $j = 1,\ldots,n$, дорівнює m.

Якщо серед розв'язків цієї системи немає невід'ємних, то допустима область D є порожньою.

Означення 1.4. *Ненульовий допустимий розв'язок* $\boldsymbol{x}$ *ЗЛП називається базисним, якщо система векторів умов* $\boldsymbol{A}_j$, *що відповідають додатним компонентам* x_j *цього розв'язку, є лінійно незалежною. Нульовий допустимий розв'язок завжди будемо вважати базисним.*

Згідно (1.17) маємо, що максимальне число додатних компонент базисного розв'язку *ЗЛП* дорівнює m.

Означення 1.5. *Базисний розв'язок називається невиродженим, якщо він містить рівно* m *додатних компонент, та виродженим, якщо число додатних компонент менше* m.

Не обмежуючи загальності, припустимо, що у випадку невиродженого базисного розв'язку додатними є перші m компонент, тобто

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m, \ldots, 0, \ldots, 0),\ \ x_j > 0,\ \ j = 1,\ldots,m, \qquad (1.18)$$

причому вектори умов $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$ — лінійно незалежні. Будемо називати ці вектори *базисом*, що породжує базисний розв'язок $\boldsymbol{x}$, а утворену ними матрицю $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m)$ — *базисною матрицею*. Очевидно, що з точністю до порядку векторів базис у цьому випадку єдиний.

Аналогічно (1.18) у виродженому випадку маємо

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r, \ldots, 0, \ldots, 0),\ \ x_j > 0,\ \ j = 1,\ldots,r,\ \ r < m, \qquad (1.19)$$

причому вектори умов $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_r$ — лінійно незалежні. У цьому випадку *базисом*, що породжує розв'язок (1.19), є будь-яка система m лінійно незалежних векторів умов, що включає вектори $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_r$. Ця система векторів формує *базисну матрицю*. Очевидно, що у цьому випадку базис і, відповідно, базисна матриця не є єдиними.

Для обох розглянутих випадків змінні x_j, що відповідають базисним векторам, будемо називати *базисними*, решту — *небазисними*. Зрозуміло, що у невиродженому випадку всі базисні змінні додатні, небазисні — нульові, а у виродженому випадку і серед базисних змінних є рівні нулю.

Приклад 1.4. Нехай обмеження *ЗЛП* мають вигляд

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 + \quad x_4 &= 7, \\ x_2 + \quad x_3 - 3x_4 &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,4. \end{aligned}$$

Розв'язок $(7, 2, 0, 0)$ є невиродженим базисним розв'язком, відповідний базис утворюють вектори умов $\boldsymbol{A}_1 = (1, 0)'$, $\boldsymbol{A}_2 = (0, 1)'$, $\boldsymbol{B}$ — одинична матриця розмірності 2×2, змінні x_1, x_2 — базисні, x_3, x_4 — небазисні.

Теорема 1.3. *Допустимий розв'язок* $\boldsymbol{x}$ *ЗЛП є вершиною її допустимої множини D тоді і лише тоді, коли* $\boldsymbol{x}$ *— базисний розв'язок.*

<u>Доведення</u>. Необхідність. Нехай $\boldsymbol{x}$ — вершина D. Покажемо, що $\boldsymbol{x}$ — базисний розв'язок. Без обмеження загальності можна вважати, що

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, 0, \ldots, 0),\ x_j > 0,\ j=1,\ldots,k,\ k < n.$$

Потрібно довести, що вектори $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_k$ лінійно незалежні. Доведемо це від супротивного. Нехай вектори $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_k$ лінійно залежні, тобто існують числа α_j, не всі рівні нулю одночасно і такі, що

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}. \qquad (1.20)$$

Через те, що $\boldsymbol{x}$ — допустимий розв'язок, то

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b}. \qquad (1.21)$$

Помножимо обидві частини (1.20) на $\varepsilon > 0$ і результат додамо та віднімемо від (1.21). Одержимо

$$\sum_{j=1}^{k} (x_j \pm \varepsilon\alpha_j) \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b}. \qquad (1.22)$$

Розглянемо вектори

$$\boldsymbol{x}^1 = (x_1 + \varepsilon\alpha_1, \ldots, x_k + \varepsilon\alpha_k, \ldots, 0, \ldots, 0), \qquad (1.23)$$

$$\boldsymbol{x}^2 = (x_1 - \varepsilon\alpha_1, \ldots, x_k - \varepsilon\alpha_k, \ldots, 0, \ldots, 0). \qquad (1.24)$$

Тому що $x_j > 0,\ j=1,\ldots,k,$ то ε можна вибрати таким чином, щоб $\boldsymbol{x}^1 \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^2 \geq \boldsymbol{0}$. Для цього досить покласти

$$\varepsilon = \min\left\{ \min_{j:\,\alpha_j > 0} \left(\frac{x_j}{\alpha_j}\right), \min_{j:\,\alpha_j < 0} \left(-\frac{x_j}{\alpha_j}\right) \right\}.$$

Отже, враховуючи (1.22) приходимо до висновку, що $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2 \in D$. Крім того, $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$, бо не всі α_j рівні нулю. З (1.23)–(1.24) випливає, що $\boldsymbol{x} = (1/2)\boldsymbol{x}^1 + (1/2)\boldsymbol{x}^2$, а, значить, $\boldsymbol{x}$ не є вершиною, що суперечить умові.

Достатність. Нехай $\boldsymbol{x}$ — базисний розв'язок. Покажемо, що $\boldsymbol{x}$ — вершина D. Нехай

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, 0, \ldots, 0), \ \ x_j > 0, \ j = 1,\ldots,k, \ \ k < m.$$

Отже

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b}$$

і вектори $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_k$ — лінійно незалежні.

Решту доведення проведемо від супротивного. Нехай $\boldsymbol{x}$ не є вершиною D. У цьому випадку існують точки $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in D$, такі що $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x} = \alpha\, \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\, \boldsymbol{x}^2$, $0 < \alpha < 1$. З цього випливає, що

$$\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1, \ldots, x_k^1, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{x}^2 = (x_1^2, \ldots, x_k^2, 0, \ldots, 0)$$

і, крім цього,

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^1 \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b}, \tag{1.25}$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b}. \tag{1.26}$$

Віднімаючи почленно (1.26) з (1.25), одержимо

$$\sum_{j=1}^{k} \left(x_j^1 - x_j^2\right) \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0},$$

причому не всі $x_j^1 - x_j^2$ дорівнюють нулю. Останнє співвідношення означає лінійну залежність векторів умов $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_k$, що суперечить умові.

§ 7. Канонічна задача лінійного програмування. Перебір вершин допустимої області методом виключення Жордана-Гаусса

Стандартна ЗЛП

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,$$
$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

*називається канонічною (КЗЛП), якщо в матриці **A** існує одинична підматриця і вектор умов **b** — невід'ємний. Без обмеження загальності будемо вважати, що перші m стовпців матриці **A** утворюють одиничну підматрицю. Тоді КЗЛП можна записати у вигляді*:

$$L(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{1.27}$$

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j=\beta_i, i=1,...,m, \tag{1.28}$$

$$x_j \geq 0, j=1,\ldots,n, \ \beta_i \geq 0, i=1,\ldots,m. \tag{1.29}$$

Для *КЗЛП* легко знаходиться початковий базисний розв'язок, базис та базисна матриця:

$\boldsymbol{x}=(\beta_1,\ldots,\beta_m,0,\ldots,0)$ — *базисний розв'язок,*

$(1,0,\ldots,1)'$, $(0,1,\ldots,0)'$,...,$(0,0,\ldots,1)'$ — *базис,*

$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$ — *базисна матриця (розмірності* $m\times m$*),*

$x_1,\ldots,x_m$ — *базисні змінні,* $x_{m+1},\ldots,x_n$ — *небазисні змінні.*

Співвідношення (1.27)–(1.29) — це *КЗЛП* у *координатній формі*. Аналогічно *СЗЛП КЗЛП* може бути записана у *векторній та матричній формах*. Зокрема, якщо

$$\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)', \ \boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)', \ \alpha=(\boldsymbol{I},\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n),$$

де $\boldsymbol{I}$ — одинична матриця розмірності $m\times m$, $\alpha_j=(\alpha_{1j},...,\alpha_{mj})'$, то умови (1.28) та (1.29) у матричній формі набирають вигляду:

$$\alpha\boldsymbol{x}=\beta, \ \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}, \ \beta\geq\boldsymbol{0}. \tag{1.30}$$

За означенням *КЗЛП* є *СЗЛП*. У свою чергу *СЗЛП* може бути зведена до *КЗЛП*. Теоретично для цього досить, припускаючи без обмеження загальності, що вектори умов $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$ утворюють базис і $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m)$ — відповідна базисна матриця, домножити обидві частини співвідношення $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ зліва на $\boldsymbol{B}^{-1}$. Очевидно, що

$$\alpha=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}, \ \beta=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{1.31}$$

Практичні шляхи перетворення *СЗЛП* до *КЗЛП* ми обговоримо пізніше.

Перейдемо від базисного розв'язку

$$\boldsymbol{x}=(\beta_1,\ldots,\beta_{l-1},\beta_l,\beta_{l+1},\ldots,\beta_m,0,\ldots,0),$$

що визначається обмеженнями (1.28), (1.29) *КЗЛП*, до нового базисного розв'язку

$$\boldsymbol{x}'=\left(\beta_1',\ldots,\beta_{l-1}',0,\beta_{l+1}',\ldots,\beta_m',0,\ldots,0,\beta_l',0,\ldots,0\right),$$

якому відповідає нова *КЗЛП*, де з числа базисних виключена змінна x_l ($l=1,\ldots,m$), а змінна x_k ($k=m+1,\ldots,n$) уведена до числа базисних.

Виявляється, що це можна зробити за допомогою відомого *методу виключення Жордана-Гаусса*, потурбувавшись при цьому лише про те, щоб перетворена *ЗЛП* знову мала канонічну форму. Робиться це так. Виключимо з усіх рівнянь системи (1.28), крім l-го, змінну x_k. Для цього від i-го рівняння ($i\neq l$)

віднімемо l-е рівняння, домножене на α_{ik}/α_{lk} $(\alpha_{lk} \neq 0)$. Рівняння за номером l домножимо на $1/\alpha_{lk}$. Одержимо систему, еквівалентну (1.28), виду:

$$\left.\begin{aligned} x_i + \alpha'_{il} x_l + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha'_{ij} x_j = \beta'_i, \quad i \neq l, \\ \alpha'_{il} x_l + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha'_{ij} x_j = \beta'_i, \quad i = l, \end{aligned}\right\} \; i = 1,\dots,m. \qquad (1.32)$$

У системі рівнянь (1.32)

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}}{\alpha_{lk}}, & i = l, \\ \alpha_{ij} - \dfrac{\alpha_{lj}\alpha_{ik}}{\alpha_{lk}}, & i \neq l, \end{cases} \qquad \beta'_i = \begin{cases} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{lk}}, & i = l, \\ \beta_i - \dfrac{\beta_l \alpha_{ik}}{\alpha_{lk}}, & i \neq l, \end{cases} \qquad (1.33)$$

і, зокрема,

$$\alpha'_{lk} = \begin{cases} 1, & i = l, \\ 0, & i \neq l. \end{cases}$$

Зауважимо, що перетворення (1.33) легко реалізується за допомогою відомого *правила прямокутника*.

Система рівнянь (1.32) матиме канонічну форму, якщо $\beta_j' \geq 0$, $i = 1,\dots,m$. Виходячи з цього, індекси l та k слід вибирати так, щоб виконувалися співвідношення

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \geq 0, \quad \beta_i - \frac{\beta_l \alpha_{ik}}{\alpha_{lk}} \geq 0, \quad i \neq l\,. \qquad (1.34)$$

Легко бачити, що для цього хоча б одна компонента вектора умов $\alpha_k = (\alpha_{1k},\dots,\alpha_{mk})'$ має бути строго додатною ($\alpha_{lk} > 0$), а індекс l має вибиратися з умови

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} = \min_{i:\alpha_{ik}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}} = \theta_k\,. \qquad (1.35)$$

Дійсно, якщо $\alpha_{ik} \leq 0$ ($i \neq l$), то друга з нерівностей (1.34) виконується. Якщо ж $\alpha_{ik} > 0$, то l слід вибирати так, щоб

$$\beta_i - \frac{\beta_l \alpha_{ik}}{\alpha_{lk}} \geq 0 \text{ або } \frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \leq \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}\,.$$

Отже,

$$\boldsymbol{x}' = (\beta_1 - \theta_k \alpha_{1k},\dots,\beta_{l-1} - \theta_k \alpha_{l-1k}, 0, \beta_{l+1} - \theta_k \alpha_{l+1k},\dots,\beta_m - \theta_k \alpha_{mk},$$
$$0,\dots,0,\theta_k,0,\dots,0).$$

Зауважимо, що l-а координата вектора $\boldsymbol{x}'$, що дорівнює нулю, може бути записана у вигляді $\beta_l - \theta_k \alpha_{lk}$.

Вияснимо тепер, як пов'язані між собою значення цільової функції в точках $\boldsymbol{x}'$ та $\boldsymbol{x}$. Маємо

$$L(\boldsymbol{x}') = \sum_{i=1}^{m} c_i(\beta_i - \theta_k \alpha_{ik}) + c_k\theta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i + \theta_k(c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ik}) =$$
$$= L(\boldsymbol{x}) + \theta_k \Delta_k ,$$

де

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ik} = c_k - z_k \qquad (1.36)$$

і називається *відносною оцінкою змінної* x_k, або *симплекс-різницею*.

Зрозуміло, що формула

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ik}$$

відповідає випадку, коли базисними змінними є $x_1,\dots,x_m$. У загальному випадку, коли базисними є змінні $x_{j_1},\dots,x_{j_m}$, то

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} c_{j_i}\alpha_{ik} = (\boldsymbol{c}_{баз}, \alpha_k), \qquad (1.37)$$

де $\boldsymbol{c}_{баз} = (c_{j_1},\dots,c_{j_m})$, $\alpha_k = (\alpha_{1k},\dots,\alpha_{mk})$.

Безпосередньо можна перевірити, що симплекс-різниці базисних змінних дорівнюють нулю.

Зауважимо, що $\theta_k \ge 0$. Якщо $\theta_k > 0$, то, очевидно, індекс k змінної, що вводиться до числа базисних, слід вибрати таким, що $\Delta_k < 0$. При цьому значення цільової функції при переході від $\boldsymbol{x}$ до $\boldsymbol{x}'$ зменшиться, тобто $L(\boldsymbol{x}') < L(\boldsymbol{x})$.

Якщо ж $\theta_k = 0$, то $L(\boldsymbol{x}') = L(\boldsymbol{x})$. З формули (1.35) випливає, що останній випадок має місце для виродженого базисного розв'язку.

§ 8. Критерій оптимальності. Ознака необмеженості цільової функції

Наведені у попередньому параграфі міркування складають основу симплекс-методу розв'язування *ЗЛП*.

Перш, ніж сформулювати алгоритм цього методу, доведемо декілька необхідних для його обгрунтування тверджень.

Теорема 1.4 (критерій оптимальності базисного розв'язку ЗЛП). *Якщо для деякого базисного розв'язку* $\boldsymbol{x}^*$ *справджуються нерівності* $\Delta_j \ge 0$, $j = 1,\dots,n$, *то* $\boldsymbol{x}^*$ *— оптимальний розв'язок ЗЛП.*

Доведення. Нехай для базисного розв'язку $\boldsymbol{x}^* = (\beta_1,\dots,\beta_m,0,\dots,0)$, що визначається канонічною формою обмежень *ЗЛП*

$$\alpha\boldsymbol{x} = \beta,\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \ \beta \ge \boldsymbol{0},$$

виконується умова теореми, тобто

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} \geq 0, \; j = 1,\dots,n .$$

Ми повинні довести, що для будь-якого допустимого розв'язку $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ($\alpha \boldsymbol{y} = \beta$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$) виконується нерівність $L(\boldsymbol{y}) \geq L(\boldsymbol{x}^*)$, а це і буде означати, що $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальний розв'язок *ЗЛП*.

Дійсно, з умови теореми та з допустимості розв'язку $\boldsymbol{y}$ маємо

$$L(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i = L(\boldsymbol{x}^*),$$

що і доводить теорему.

Теорема 1.5 (критерій необмеженості цільової функції ЗЛП на допустимій множині). *Якщо для деякого базисного розв'язку* $\boldsymbol{x}$ *ЗЛП існує хоча б одне j, таке, що* $\Delta_j < 0$ *і вектор умов* α_j *такий, що* $\alpha_j \leq \boldsymbol{0}$, *то цільова функція ЗЛП необмежена на допустимій множині, тобто*

$$\min L(\boldsymbol{x}) = -\infty, \; \boldsymbol{x} \in D.$$

<u>Доведення</u>. Нехай для базисного розв'язку $\boldsymbol{x} = (\beta_1,\dots,\beta_m, 0,\dots,0)$, що визначається канонічною формою обмежень *ЗЛП*

$$\alpha \boldsymbol{x} = \beta, \; \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \; \beta \geq \boldsymbol{0},$$

виконується умова теореми ($\exists\, j: \Delta_j < 0, \; \alpha_{ij} \leq 0, \; i = 1,\dots,m$).

Розглянемо вектор

$$\boldsymbol{y} = (\beta_1 - \theta \alpha_{1j}, \dots, \beta_m - \theta \alpha_{mj}, 0, \dots, 0, \theta, 0, \dots, 0),$$

де θ є *j*-ю координатою цього вектора і $\theta > 0$. Покажемо, що $\boldsymbol{y} \in D$.

Дійсно, $\boldsymbol{y}$ має невід'ємні координати ($\beta_i \geq 0$, $\alpha_{ij} \leq 0$, $i = 1,\dots,m$, $\theta > 0$) і задовольняє обмеження $\alpha \boldsymbol{x} = \beta$, що перевіряється безпосередньою підстановкою.

Обчислимо тепер значення цільової функції у точці $\boldsymbol{y}$

$$L(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} c_i (\beta_i - \theta \alpha_{ij}) + c_j \theta = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i + \theta \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} \right) = L(\boldsymbol{x}) + \theta \Delta_j .$$

Через те, що $\theta > 0$ і $\Delta_j < 0$ значення цільової функції можна необмежено зменшувати, залишаючись у допустимій області, що й завершує доведення теореми.

§ 9. Алгоритм симплекс-методу

1. *ЗЛП* записується у канонічній формі, що визначає початковий базисний розв'язок x^0 *ЗЛП*.

2. Нехай на *s*-у кроці є *КЗЛП*

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min, \; \alpha^s \boldsymbol{x} = \beta^s, \; \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \; \beta^s \geq \boldsymbol{0},$$

де $\alpha^s = (\alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s)$, що визначає базисний розв'язок

$$\boldsymbol{x}^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_m^s, 0, \dots, 0)'.$$

3. Обчислюємо симплекс-різниці

$$\Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^s, \ \ j = 1,\dots,n.$$

Якщо $\Delta_j^s \ \geq \ 0$, $j=1,\dots,n$, то кінець обчислень: $\boldsymbol{x}^s$ є оптимальним розв'язком *ЗЛП*. Інакше

4. Якщо існує принаймні один індекс j такий, що $\Delta_j^s < 0$ і $\alpha_{ij}^s \leq 0$, $i=1,\dots,m$, то кінець обчислень: *ЗЛП* розв'язку не має (цільова функція необмежена знизу на допустимій множині, $\min L(\boldsymbol{x}) = -\infty$, $\boldsymbol{x} \in D$). Інакше

5. Знаходимо індекси k та l, відповідно, з умов

$$\Delta_k^s = \min_{j:\Delta_j^s < 0} \Delta_j^s,$$

$$\frac{\beta_l^s}{\alpha_{lk}^s} = \min_{i:\alpha_{ik}^s > 0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s} = \theta_k^s,$$

методом виключення Жордана-Гаусса перераховуємо матрицю α^s у α^{s+1}, вектор β^s у β^{s+1} (змінну x_l виключаємо з числа базисних, змінну x_k уводимо до числа базисних) за формулами

$$\alpha_{ij}^{s+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i = l, \\[2ex] \alpha_{ij}^s - \dfrac{\alpha_{lj}^s \alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i \neq l, \end{cases} \qquad \beta_i^{s+1} = \begin{cases} \dfrac{\beta_i^s}{\alpha_{lk}^s}, & i = l, \\[2ex] \beta_i^s - \dfrac{\beta_l^s \alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i \neq l, \end{cases}$$

і переходимо до пункту 2 алгоритму, заміняючи s на $s+1$.

<u>*Зауваження*</u>**.**

1. l-й рядок, k-й стовпець та елемент α_{lk}^s матриці умов α^s називаються *ведучими* (*розв'язувальними*).

2. Перетворення матриці α^s у α^{s+1}, вектора β^s у β^{s+1} за відомим ведучим елементом називаються *симплексним перетворенням* (*симплекс-перетворенням*).

3. Послідовність дій 2–5 симплекс-методу називається *ітерацією*.

4. Для двох послідовних ітерацій симплекс-методу маємо

$$L(\boldsymbol{x}^{s+1}) = L(\boldsymbol{x}^s) + \theta_k^s \Delta_k^s.$$

Якщо прагнути до максимального зменшення значення цільової функції за одну ітерацію, то k слід вибирати так, щоб

$$\theta_k^s \Delta_k^s = \min_{j:\,\Delta_j^s < 0} \theta_j^s \Delta_j^s .$$

Оскільки остання задача досить складна, то віддають перевагу вибору k так, як указано в пункті 5 алгоритму.

5. У вітчизняній літературі симплекс-метод інколи ще називають *методом послідовного поліпшення плану*.

6. Якщо індекс k у пункті 5 алгоритму визначається неоднозначно, то до числа базисних уводиться будь-яка з відповідних змінних. Проблеми, пов'язані з неоднозначністю вибору індексу l, обговорюються далі.

§ 10. Симплекс-таблиці

Спочатку розглянемо допоміжне твердження, що дозволяє стандартним чином (за допомогою симплекс-перетворення) обчислювати симплекс-різниці для змінних у *КЗЛП*.

Нехай на s-у кроці симплекс-методу є *КЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,\ x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}^s x_j = \beta_i^s,\ i = 1,\dots,m,\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \beta^s \ge \boldsymbol{0}.$$

Лема 1.5. *Якщо з цільової функції $L(\boldsymbol{x})$ КЗЛП виключити базисні змінні, то коефіцієнтами при небазисних змінних будуть відповідні їм симплекс-різниці і з'являється вільний член, що дорівнює значенню цільової функції в базисній точці, що розглядається.*

<u>Доведення</u>. Дійсно, приймаючи до уваги, що *КЗЛП* визначає базисний розв'язок

$$\boldsymbol{x}^s = (\beta_1^s,\dots,\beta_m^s, 0,\dots,0)',$$

причому

$$L(\boldsymbol{x}^s) = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i^s,$$

маємо

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\beta_i^s - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}^s x_j \right) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i^s + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^s \right) x_j = L(\boldsymbol{x}^s) + \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j^s x_j .$$

Наведені співвідношення доводять лему.

Тепер симплекс-різниці змінних у *КЗЛП* легко одержати, якщо на початковій ітерації додати до вихідних непрямих обмежень *ЗЛП* рівняння $L(\boldsymbol{x}) = 0$, з якого виключені базисні змінні. На наступних ітераціях симплексне перетворення застосовується також і до цього нового рівняння.

При проведенні ручних розрахунків, пов'язаних з розв'язуванням *ЗЛП* симплексним методом, зручно всі обчислення на кожній ітерації заносити до симплекс-таблиці, що має такий вигляд:

Таблиця 1.1

$x_{баз}$	x_1	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_k	…	x_n	β	θ
x_1	1	…	0	…	0	α_{1m+1}	…	α_{1k}	…	α_{1n}	β_1	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_l	0	…	1	…	0	α_{lm+1}	…	$\boldsymbol{\alpha_{lk}}$	…	α_{ln}	β_l	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_m	0	…	0	…	1	α_{mm+1}	…	α_{mk}	…	α_{mn}	β_m	
Δ	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n	$-L(x^s)$	

Особливості використання симплекс-таблиць прослідкуємо при розв'язанні прикладів. Домовимось виділяти ведучий елемент α_{lk} матриці умов жирним шрифтом.

Приклад 1.5. *Розв'язати ЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = -2x_1 - x_2 - 7x_3 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 4,$$
$$-x_1 - 4x_2 + 10x_3 \le 7,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,3.$$

Перетворюючи *ЗЗЛП* до *СЗЛП*, одержимо відразу *КЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = -2x_1 - x_2 - 7x_3 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4,$$
$$-x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_5 = 7,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5.$$

Розв'язок наводиться у послідовності симплекс-таблиць (див. таблицю 1.2).

$\bar{\boldsymbol{x}}^* = (19/13, 0, 11/13, 0, 0)$ — оптимальний розв'язок *КЗЛП.*
$\boldsymbol{x}^* = (19/13, 0, 11/13)$ — оптимальний розв'язок вихідної *ЗЛП*.
$L(\boldsymbol{x}^*) = -115/13$.

Таблиця 1.2

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β	θ
x_4	1	2	3	1	0	4	4/3
x_5	–1	–4	**10**	0	1	7	7/10
Δ	–2	–1	–7	0	0	0	
x_4	13/10	**32/10**	0	1	–3/10	19/10	19/32
x_3	–1/10	–4/10	1	0	1/10	7/10	
Δ	–27/10	–38/10	0	0	7/10	49/10	
x_2	**13/32**	1	0	10/32	–3/32	19/32	19/13
x_3	1/16	0	1	1/8	1/16	15/16	15

Δ	–37/32	0	0	19/16	11/32	229/32	
x_1	1	32/13	0	10/13	–3/13	19/13	
x_3	0	–2/13	1	1/13	1/13	11/13	
Δ	0	37/13	0	27/13	1/13	115/13	

Приклад 1.6. *Розв'язати ЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 \to \min,$$
$$-x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

Перетворюючи *ЗЗЛП* до *СЗЛП*, одержимо відразу *КЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 \to \min,$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$$

Обчислення ведуться у послідовності симплекс-таблиць (див. таблицю 1.3).

Таблиця 1.3

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	β	θ
x_3	–1	1	1	0	1	
x_4	**1**	–2	0	1	2	2
Δ	–1	–1	0	0	0	
x_3	0	–1	1	1	3	
x_1	1	–2	0	1	2	
Δ	0	–3	0	1	2	

Бачимо, що для небазисної змінної x_2 на останній ітерації $\alpha_{12} = -1 < 0$, $\alpha_{22} = -2 < 0$ при $\Delta_2 = -3$. Отже вихідна *ЗЛП* розв'язків не має ($\min L(\boldsymbol{x}) = -\infty$, $\boldsymbol{x} \in D$).

§ 11. Скінченність симплекс-методу. Попередження зациклювання

ЗЛП будемо називати *невиродженою*, якщо невиродженими є всі її базисні розв'язки.

Розглянемо спочатку невироджену *ЗЛП*. Якщо вона записана у канонічній формі

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\quad \alpha^s \boldsymbol{x} = \beta^s,\quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\quad \beta^s \ge \boldsymbol{0},$$

то це означає, що величини β_i^s, $i = 1,\dots,m,$ строго додатні. При цьому додатною є також величина

$$\theta_k^s = \min_{i:\alpha_{ik}^s>0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s}.$$

Оскільки значення цільової функції у двох послідовних ітераційних точках $\boldsymbol{x}^s$ та $\boldsymbol{x}^{s+1}$ пов'язані співвідношенням

$$L(\boldsymbol{x}^{s+1}) = L(\boldsymbol{x}^s) + \theta_k^s \Delta_k^s,$$

причому $\Delta_k^s < 0$, то $L(\boldsymbol{x}^{s+1}) < L(\boldsymbol{x}^s)$. Звідси, приймаючи до уваги, що число вершин допустимої множини скінченне, приходимо до висновку про скінченність симплексного методу.

У випадку виродженої *ЗЛП* одна або декілька базисних змінних базисного розв'язку можуть бути рівними нулю. При цьому $\theta_k^s = 0$ і, отже, $L(\boldsymbol{x}^{s+1}) = L(\boldsymbol{x}^s)$. Це може привести до того, що на протязі ряду ітерацій симплекс-методу буде розглядатися одна і та ж вершина, а змінюватимуться лише базисні вектори, що відповідають нульовим базисним змінним і можливе повернення до початкового базису, що відповідає цій вершині. Таке явище називається *зациклюванням* симплексного методу. Можливість зациклювання є реальною лише тоді, коли для розглядуваного базисного розв'язку принаймні дві базисні змінні дорівнюють нулю. У цьому випадку існує неоднозначність при виборі вектора, що підлягає виведенню з базисних при $\theta_k^s = 0$. Така ж неоднозначність може мати місце і для невиродженого базисного розв'язку. Однак у цьому випадку $\theta_k^s > 0$ і новий базисний розв'язок приводить до зменшення значення цільової функції. При цьому, внаслідок згаданої неоднозначності, новий базисний розв'язок буде виродженим.

Незважаючи на те, що при розв'язуванні практичних задач зациклювання симплекс-методу не зустрічалося і що побудовано лише декілька штучних прикладів, де це явище має місце, розроблені різні методи його попередження (виходу з циклу). Зроблені вище зауваження свідчать про те, що будь-який з цих методів має гарантувати однозначність вибору вектора, що підлягає виведенню з базисних.

Розглянемо коротко зміст *методу збурення*, запропонованого **Чарнесом**.

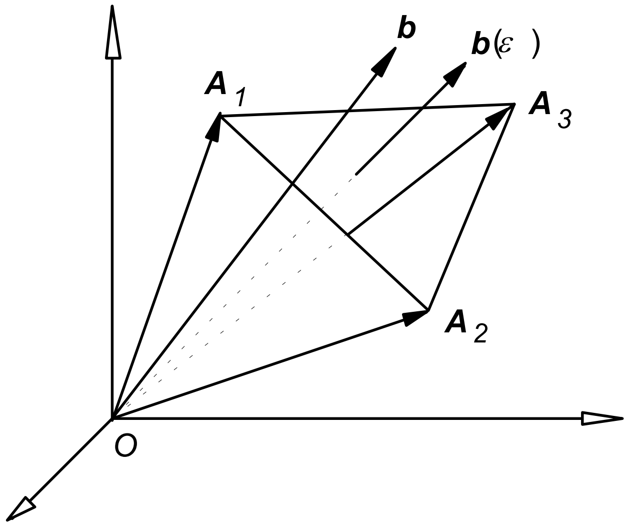


Рис. 1.4

З геометричної точки зору вироджений випадок має місце, коли вектор обмежень $\boldsymbol{b}$ лежить на граничній гіперплощині або на твірній опуклого конуса, що визначається базисними векторами. Наприклад, вектор $\boldsymbol{b}$ на рис. 1.4 виражається лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{A}_1$ та $\boldsymbol{A}_2$ з додатними коефіцієнтами, але виразити цей вектор у вигляді невід'ємної комбінації базисних векторів $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ можна лише при умові, що $x_3 = 0$, тобто

$$\boldsymbol{b} = x_1 \boldsymbol{A}_1 + x_2 \boldsymbol{A}_2 + 0 \boldsymbol{A}_3 .$$

Це є приклад виродженого базисного розв'язку. Однак, якщо змістити вектор $\boldsymbol{b}$ таким чином, щоб він лежав всередині опуклого конуса, породженого векторами $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, то відповідний план буде уже невиродженим. Цього можна досягнути, якщо до вектора $\boldsymbol{b}$ додати лінійну комбінацію цих векторів з додатними коефіцієнтами. Щоб помітно не спотворити вихідну задачу, цю комбінацію слід вибирати досить малою, рівною, наприклад,

$$\varepsilon \boldsymbol{A}_1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{A}_2 + \varepsilon^3 \boldsymbol{A}_3 ,$$

де $\varepsilon > 0$ — деяке мале число, тобто, обмеження нової задачі набувають вигляду

$$x_1 \boldsymbol{A}_1 + x_2 \boldsymbol{A}_2 + x_3 \boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{b} + \varepsilon \boldsymbol{A}_1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{A}_2 + \varepsilon^3 \boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{b}(\varepsilon).$$

Геометрично вектор $\boldsymbol{b}(\varepsilon)$ зображено на рис. 1.4.

У загальному випадку непрямі обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b}$$

ЗЛП перетворюються до вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{b}(\varepsilon). \tag{1.38}$$

Нехай вектори $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$ утворюють базис і $\boldsymbol{B}$ — відповідна базисна матриця. Тоді

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \beta \geq \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{x}(\varepsilon) = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}(\varepsilon) \tag{1.39}$$

визначають базисні компоненти вихідної та зміненої задач відповідно.

Нехай $\alpha_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j$, $j=1,\ldots,n$. Тоді співвідношення (1.39) набуває вигляду

$$\mathbf{x}(\varepsilon) = \beta + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \alpha_j .$$

Оскільки вектор α_j, $j=1,\ldots,m$, є одиничним, індекс одиничної компоненти якого дорівнює j, то

$$x_i(\varepsilon) = \beta_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j \alpha_{ij} . \qquad (1.40)$$

Вибираючи $\varepsilon > 0$ достатньо малим, можна добитися, щоб нерівність $x_i(\varepsilon)>0$ виконувалась для всіх $i=1,\ldots,m$. Для знаходження вектора $\boldsymbol{A}_l$, що має бути виключеним з числа базисних задачі (1.38), обчислюємо

$$\theta_k = \frac{x_l(\varepsilon)}{\alpha_{lk}} = \min_{i:\alpha_{ik}>0} \frac{x_i(\varepsilon)}{\alpha_{ik}} = \min_{i:\alpha_{ik}>0} \frac{\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \alpha_{ij}}{\alpha_{ik}} . \qquad (1.41)$$

З рівності (1. 41) випливає, що інформація, необхідна для знаходження θ_k, міститься у симплекс-таблиці (β_i та α_{ij}). Зрозуміло, що для достатньо малого ε суттєвими при степенях ε є перші коефіцієнти, що розпочинаються з $j=1,\ldots,n$. Все це приводить до того, що зовсім не обов'язково перетворювати непрямі обмеження ЗЛП до виду (1.38). А процес визначення вектора, що підлягає виведенню з числа базисних, можна упорядкувати так. Якщо мінімум у співвідношенні

$$\theta_k = \min_{i:\alpha_{ik}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$$

досягається для одного індексу $i=l$, то вектор $\boldsymbol{A}_l$ виводиться з числа базисних. Якщо ж цей мінімум досягається для декількох індексів i, то для всіх таких індексів при $j=1$ обчислюються і порівнюються відношення α_{ij}/α_{ik}. Індекс, що відповідає алгебраїчно найменшому відношенню, визначає вектор, що підлягає виведенню з базису. Якщо ж неоднозначність зберігається, то порівнюємо аналогічні відношення для стовпця $j=2$ і т. д. Із співвідношення (1.40) випливає, що зрештою згаданий мінімум буде досягнуто для одного індексу. Наприклад, якщо для базису $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$, виконується

$$\theta_k = \beta_1/\alpha_{1k} = \beta_2/\alpha_{2k},$$

то підраховуємо і порівнюємо відношення α_{11}/α_{1k} та α_{21}/α_{2k}. Якщо

$$\min(\alpha_{11}/\alpha_{1k}, \alpha_{21}/\alpha_{2k}) = \alpha_{11}/\alpha_{1k},$$

то з базису виводиться вектор умов $\boldsymbol{A}_1$, якщо ж

$$\min(\alpha_{11}/\alpha_{1k}, \alpha_{21}/\alpha_{2k}) = \alpha_{21}/\alpha_{2k},$$

то — $\mathbf{A}_2$. Якщо ж $\alpha_{11}/\alpha_{1k} = \alpha_{21}/\alpha_{2k}$, то порівнюємо відношення α_{12}/α_{1k} та α_{22}/α_{2k} і т. д.

Приклад 1.7. *Розв'язати ЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = -(3/4)\, x_1 + 150\, x_2 - (1/50)\, x_3 + 6\, x_4 \to \min,$$

$$\begin{aligned} (1/4)\, x_1 - 60\, x_2 - (1/25)\, x_3 + 9\, x_4 + x_5 \qquad &= 0, \\ (1/2)\, x_1 - 90\, x_2 - (1/50)\, x_3 + 3\, x_4 \qquad + x_6 \quad &= 0, \\ x_3 \qquad\qquad + x_7 &= 0, \end{aligned}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,7.$$

При розв'язуванні цієї *КЗЛП* симплекс-методом на першій, третій та п'ятій ітераціях вектор, що виводиться з числа базисних, визначається неоднозначно. У кожній із цих ситуацій із базису виводиться вектор з меншим індексом. Остання симплекс-таблиця співпадає з початковою. Це є один з небагатьох прикладів, де має місце зациклювання симплекс-методу. Пропонується самостійно розв'язати цю ж *ЗЛП*, застосовуючи сформульоване вище правило попередження зациклювання. Зауважимо лише, що оптимальний розв'язок має вигляд: $\boldsymbol{x}^* = (1/25, 0, 1, 0, 3/100, 0, 0)$, $L(\boldsymbol{x}^*) = -1/20$.

Питання про число ітерацій *СМ*, необхідних для знаходження оптимального розв'язку *ЗЛП*, досить складне. Практика показує, що у середньому це число приблизно дорівнює числу m непрямих обмежень *КЗЛП*. Слід відмітити, що побудовані штучні приклади *ЗЛП*, при розв'язуванні яких симплекс-алгоритм "перебирає" всі вершини допустимої області. Отже, симплекс-алгоритм є *алгоритмом експоненціальної складності*.

§ 12. Методи пошуку початкового базисного розв'язку

Згідно симплекс-методу обчислення розпочинаються з *КЗЛП*, що автоматично визначає початковий базисний розв'язок. Однак далеко не завжди вихідна задача має канонічну форму. Щоб розв'язати *ЗЛП* симплекс-методом у цьому випадку, частіше за все використовують так звані *методи штучного базису*, зміст яких зводиться до того, що будується певна допоміжна *КЗЛП* з відомим початковим базисним розв'язком, за оптимальним розв'язком якої легко знаходиться, або просто базисний, або оптимальний розв'язок вихідної *ЗЛП*. Розглянемо два варіанти методу штучного базису.

1. Метод штучного базису

Нехай розглядається *СЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) \to \min,\ \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \tag{1.42}$$

де без обмеження загальності $\boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}$. Нагадаємо, що будь-яка *ЗЗЛП* зводиться до *СЗЛП* (див. § 6 цього розділу).

Розглянемо допоміжну *КЗЛП*

$$\overline{L} = y_1 + \ldots + y_m \to \min,\ \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}, \tag{1.43}$$

де $\boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_m)'$, $\boldsymbol{I}$ — одинична матриця розмірності $m \times m$. Нехай D та $\overline{D}$ — допустимі області задач (1.42) та (1.43) відповідно, $\overline{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Зауважимо, що змінні y_i, $i = 1,\ldots,m$, звуться *штучними*, а відповідні їм вектори умов утворюють *штучний базис*.

Розв'яжемо допоміжну *КЗЛП* (1.43) симплекс-методом. Оскільки $\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$, то можливі два випадки: **1)** $\min \overline{L} = 0,\ \overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{D}$, **2)** $\min \overline{L} > 0,\ \overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{D}$.

Розглянемо перший випадок. Оскільки $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, то рівність min $\overline{L}=0$, $\overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{D}$, можлива лише тоді, коли $y_i = 0$, $i=1,\dots,m$. Тому оптимальний розв'язок $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ задачі (1.43) має вигляд: $\overline{\boldsymbol{x}}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*, 0,\dots,0)$ і, оскільки $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ — базисний розв'язок, серед x_j^*, $j=1,\dots,n$, не більше m відмінних від нуля. Якщо тепер перейти від вектора $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ до вектора $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$, то, очевидно, $\boldsymbol{x}^* \in D$ і зберігає при цьому властивість базисності. Отже, $\boldsymbol{x}^*$ — базисний розв'язок *СЗЛП* (1.42).

Другий випадок можливий лише тоді, коли принаймні одна з компонент y_i^* оптимального базисного розв'язку $\overline{\boldsymbol{x}}^* = (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ *КЗЛП* (1.43) є строго додатною. Покажемо, що у цьому випадку $D = \varnothing$. Від супротивного. Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)$ — допустимий розв'язок *СЗЛП* (1.42). Тоді $\overline{\boldsymbol{x}}^* = (x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$ є допустимим розв'язком *КЗЛП* (1.43) ($\overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{D}$). Але при цьому $\overline{L} = 0$, що суперечить умові min $\overline{L} > 0$, $\overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{D}$.

<u>*Зауваження*</u>**.** Не слід зловживати введенням "надмірної" кількості штучних змінних. Якщо деяке з непрямих обмежень має канонічну форму (містить з коефіцієнтом *1* якусь змінну, що відсутня в інших обмеженнях), то в це обмеження не має сенсу вводити штучну змінну. До речі, *ЗЗЛП* вигляду

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min, \quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0},$$

як неважко переконатись, при зведенні її до *СЗЛП* (введенням додаткових невід'ємних змінних у ліві частини непрямих обмежень) одразу ж стає канонічною.

Застосування методу штучного базису приводить до того, що задачу (1.42) потрібно розв'язувати за два етапи: спочатку розв'язується задача (1.43), а потім, власне, задача (1.42). Наступний метод дозволяє об'єднати ці два етапи.

2. М-метод

Нехай розглядається *СЗЛП* (1.42). Розглянемо допоміжну *КЗЛП*

$$L_M = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} + M\,(y_1 + \dots + y_m) \to \min, \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}, \qquad (1.44)$$

що зветься *М-задачею*, де M — досить велике число, інші позначення — такі ж самі, як в (1.43). Розв'язуючи цю задачу симплекс-методом, одержимо один із трьох випадків:

1) в оптимальному розв'язку $\boldsymbol{x}_M^* = (x_1^*,\dots,x_n^*, y_1^*,\dots,y_m^*)$ М-задачі всі $y_j^* = 0$, $i=1,\dots,m$;

2) в $\boldsymbol{x}_M^*$ принаймні одна з компонент $y_j^* > 0$;

3) М-задача розв'язку не має (min $L_M = -\infty$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D_M$).

Можна довести, що у цих випадках відповідно маємо:

1) оптимальний розв'язок вихідної задачі (1.42) має вид $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$, тобто, одержується з $\boldsymbol{x}_M^*$ відкиданням нульових компонент, що відповідають y_i, $i=1,\dots,m$;

2) *СЗЛП* (1.42) не має жодного допустимого розв'язку ($D = \varnothing$);

3) *СЗЛП* (1.42) розв'язку не має (min $L = -\infty$, $\boldsymbol{x} \in D$).

Зауважимо, що у М-методі константі M не обов'язково надавати певного значення. Досить лише вимагати, щоб M було більшим будь-якого числа, з яким необхідно порівнювати його в процесі розв'язування задачі. На практиці часто вибирають M таким, що

$$M > \max \{|a_{ij}|,\ |b_i|,\ |c_j|,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n\}.$$

Приклад 1.8. *Розв'язати ЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 \to \min,$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3,$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,4.$$

Застосуємо спочатку метод штучного базису. Отже, розглядаємо допоміжну *КЗЛП* виду

$$\overline{L} = y_1 + y_2 \to \min,$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + y_1 = 3,$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_2 = 3,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,4,\ y_i \geq 0,\ i = 1,2\ .$$

Виключаючи з цільової функції базисні змінні y_1 та y_2, зводимо її до виду

$$\overline{L} = -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 6.$$

Розв'язуємо цю задачу симплекс-методом (див. таблицю 1.4). На першій ітерації змінна x_2 вводиться до числа базисних замість штучної змінної y_1, на другому кроці базисною стає x_1 замість y_2. Оскільки для базисного розв'язку $(3/4, 3/4, 0, 0, 0, 0)$ допоміжної *КЗЛП* виконується критерій оптимальності, то $(3/4, 3/4, 0, 0)$ є базисним розв'язком вихідної *ЗЛП*.

Таблиця 1.4

$X_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	β	θ
y_1	1	**3**	2	2	1	0	3	1
y_2	2	2	1	1	0	1	3	3/2
Δ	–3	–5	–3	–3	0	0	–6	
x_2	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	1	3
y_2	**4/3**	0	–1/3	–1/3	–2/3	1	1	3/4
Δ	–4/3	0	1/3	1/3	5/3	0	–1	
x_2	0	1	3/4	3/4	1/6	–1/4	3/4	
x_1	1	0	–1/4	–1/4	1/2	3/4	3/4	
Δ	0	0	0	0	1	1	0	

Тепер непрямі обмеження вихідної *ЗЛП* мають вигляд

$$x_2 + (3/4)\,x_3 + (3/4)\,x_4 = 3/4,$$

$$x_1 \qquad - (1/4)\, x_3 - (1/4)\, x_4 = 3/4,$$

а цільова функція після виключення з неї базисних змінних x_1 та x_2 —

$$L(\boldsymbol{x}) = -3\, x_3 + 2\, x_4 - 6.$$

Все це дозволяє нам заповнити початкову симплекс-таблицю і розв'язувати цю *КЗЛП* симплекс-методом (див. таблицю 1.5). Як бачимо, її оптимальний розв'язок $\boldsymbol{x}^* = (1,0,1,0)$, $L(\boldsymbol{x}^*) = -9$.

Таблиця 1.5

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	β	θ
x_2	0	1	**3/4**	3/4	3/4	1
x_1	1	0	–1/4	–1/4	3/4	
Δ	0	0	–3	2	6	
x_3	0	4/3	1	1	1	
x_1	1	1/3	0	0	1	
Δ	0	4	0	5	9	

Розв'яжемо цю ж *ЗЛП*, використовуючи М-метод. М-задача має вигляд:

$$L_M = -5\, x_1 - 3\, x_2 - 4\, x_3 + x_4 + M\, y_1 + M\, y_2 \to \min,$$
$$x_1 + 3\, x_2 + 2\, x_3 + 2\, x_4 + y_1 = 3,$$
$$2\, x_1 + 2\, x_2 + x_3 + x_4 + y_2 = 3,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,4,\ y_i \geq 0,\ i = 1,2.$$

Послідовні дії її розв'язування згідно симплекс-методу при $M = 10$ наводяться у таблиці 1.6.

Таблиця 1.6

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	β	θ
y_1	1	**3**	2	2	1	0	3	1
y_2	2	2	1	1	0	1	3	3/2
Δ	–35	–53	–34	–29	0	0	–60	
x_2	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	1	3
y_2	**4/3**	0	–1/3	–1/3	–2/3	1	1	3/4
Δ	–52/3	0	4/3	19/3	53/3	0	–7	
x_2	0	1	**3/4**	3/4	1/6	–1/4	3/4	1
x_1	1	0	–1/4	–1/4	1/2	3/4	3/4	
Δ	0	0	–3	2	9	13	6	
x_3	0	4/3	1	1	2/9	–1/3	1	
x_1	1	1/3	0	0	5/9	2/3	1	
Δ	0	4	0	5	29/3	12	9	

Як і раніше, оптимальний розв'язок вихідної *ЗЛП* має вигляд: $\boldsymbol{x}^* = (1,0,1,0)$, $L(\boldsymbol{x}^*) = -9$.

§ 13. Модифікований симплекс-метод

Нехай *СЗЛП*

$$\boldsymbol{c\,x} \to \min,\ \ \boldsymbol{A\,x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \qquad (1.45)$$

розв'язується симплекс-методом і на s-й ітерації її непрямі обмеження мають канонічну форму

$$\alpha^s \boldsymbol{x} = \beta^s,\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \ \beta^s \ge \boldsymbol{0}. \qquad (1.46)$$

Нехай в обмеженнях (1.46) базисними змінними є $x_1,\ldots,x_m$, тобто базисна матриця $\boldsymbol{B}(s) = (\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m)$. При цьому, як відомо,

$$\alpha^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\,\boldsymbol{A},\ \ \beta^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\,\boldsymbol{b}. \qquad (1.47)$$

Зауважимо, що першу з рівностей (1.47) можна записати у вигляді:

$$\alpha_j^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\,\boldsymbol{A}_j,\ \ j = 1,\ldots,n. \qquad (1.48)$$

Нагадаємо, що симплекс-метод в основному зводиться до знаходження ведучого елемента α_{lk}^s симплексного перетворення, перераховування матриці α^s в α^{s+1}, вектора β^s у β^{s+1} та вектора Δ^s у Δ^{s+1}, тобто реалізується такими діями:

1) знаходження k:

$$\Delta_k^s = \min_{j:\,\Delta_j^s < 0} \Delta_j^s,\ \ \Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^s,\ \ j = 1,\ldots,n;$$

2) знаходження l:

$$\frac{\beta_l^s}{\alpha_{lk}^s} = \min_{i:\,\alpha_{ik}^s > 0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s} = \theta_k^s;$$

3) переобчислення за ведучим елементом α_{lk}^s всіх елементів матриці α^s, векторів β^s та Δ^s.

Зауважимо, що згідно останньої процедури, яка для *СМ* є суттєвою, на кожній ітерації необхідно перераховувати $(m+1)\times(n+1)$ елементів вказаної матриці та векторів. Виявляється, що для виконання вказаних дій знати всю матрицю α^s не обов'язково, їх можна виконати, знаючи матрицю $\boldsymbol{B}^{-1}(s)$ та вихідну інформацію: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Дійсно, для знаходження k досить підрахувати

$$\Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^s = c_j - \boldsymbol{c}_{баз}\,\alpha_j^s,$$

де $\boldsymbol{c}_{баз} = (c_1,\ldots,c_m)$, тобто, це є вектор, координатами якого є коефіцієнти цільової функції, що відповідають базисним змінним. Враховуючи (1.48) та вводячи до розгляду вектор $\boldsymbol{u}^s = (u_1^s,\dots,u_m^s) = \boldsymbol{c}_{баз}\,\boldsymbol{B}^{-1}(s)$, що називається *вектором симплекс-множників*, з останнього співвідношення маємо

$$\Delta_j^s = c_j - \boldsymbol{c}_{баз}\,\boldsymbol{B}^{-1}(s)\,\boldsymbol{A}_j = c_j - \boldsymbol{u}^s \boldsymbol{A}_j\,,\quad j = 1,\dots,n.$$

Для знаходження l обчислюються вектори

$$\beta^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\,\boldsymbol{b},\quad \alpha_k^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\,\boldsymbol{A}_k\,.$$

Отже, зникає необхідність виконання пункту 3 згаданих дій симплекс-методу. Замість цього при переході до наступної ітерації потрібно лише перерахувати $\boldsymbol{B}^{-1}(s)$ у $\boldsymbol{B}^{-1}(s+1)$.

Робиться це згідно наступної теореми, яку ми приводимо без доведення.

Теорема 1.6. *Нехай*

$$\boldsymbol{B}(s) = (\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_{l-1},\boldsymbol{A}_l,\boldsymbol{A}_{l+1},\dots,\boldsymbol{A}_m),$$
$$\boldsymbol{B}(s+1) = (\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_{l-1},\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A}_{l+1},\dots,\boldsymbol{A}_m),$$
$$\boldsymbol{B}^{-1}(s) = \left\| b_{ij}^s \right\|,\quad \boldsymbol{B}^{-1}(s+1) = \left\| b_{ij}^{s+1} \right\|,\quad i,j = 1,\dots,m,$$

перехід від $\boldsymbol{B}(s)$ до $\boldsymbol{B}(s+1)$ реалізується стандартним для симплексного методу введенням вектора $\boldsymbol{A}_k$ до числа базисних і виведенням вектора $\boldsymbol{A}_l$ з числа базисних. Тоді

$$b_{ij}^{s+1} = \begin{cases} \dfrac{b_{ij}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i = l, \\[2ex] b_{ij}^s - \dfrac{b_{lj}^s\,\alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s}, & i \ne l. \end{cases} \tag{1.49}$$

Викладені міркування складають основу *модифікованого симплекс-методу* (*МСМ*), що формулюється нижче.

Алгоритм модифікованого симплекс-методу

1. Зводимо вихідну *ЗЛП* до *КЗЛП*, що визначає її початковий базисний розв'язок $\boldsymbol{x}^0$, якому відповідає базисна матриця $\boldsymbol{B}(0)$. Нехай $\boldsymbol{B}^{-1}(0)$ — матриця обернена до $\boldsymbol{B}(0)$.

2. Нехай на s-й ітерації одержано базисний розв'язок $\boldsymbol{x}^s$, $\boldsymbol{B}(s)$, $\boldsymbol{B}^{-1}(s)$ — відповідно, базисна та обернена їй матриці.

3. Обчислюємо вектор симплекс-множників

$$\boldsymbol{u}^s = (u_1^s,\dots,u_m^s) = \boldsymbol{c}_{баз}\,\boldsymbol{B}^{-1}(s), \tag{1.50}$$

де $\boldsymbol{c}_{баз}$ — вектор, координатами якого є коефіцієнти цільової функції, що відповідають базисним змінним $\boldsymbol{x}^s$.

4. Обчислюємо симплекс-різниці

$$\Delta_j^s = c_j - \boldsymbol{u}^s \boldsymbol{A}_j, \quad j = 1,\dots,n. \qquad (1.51)$$

5. Якщо $\Delta_j^s \geq 0$, $j=1,\dots,n$, то кінець обчислень: $\boldsymbol{x}^s$ є оптимальним розв'язком. Інакше

6. Знаходимо k з умови

$$\Delta_k^s = \min_{j:\Delta_j^s < 0} \Delta_j^s,$$

обчислюємо вектори

$$\beta^s = B^{-1}(s)\, b, \quad \alpha_k^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\, \boldsymbol{A}_k\,. \qquad (1.52)$$

Якщо $\alpha_{ik}^s \leq 0$, $i=1,\dots,m$, то кінець обчислень: цільова функція *КЗЛП* необмежена знизу на допустимій множині. Інакше

7. Знаходимо l з умови

$$\frac{\beta_l^s}{\alpha_{lk}^s} = \min_{i:\alpha_{ik}^s>0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s} = \theta_k^s.$$

Вектор $\boldsymbol{A}_k$ уводиться до числа базисних, вектор, що є базисним у l-у непрямому обмеженні, виводиться з числа базисних. Формуємо матрицю $\boldsymbol{B}(s+1)$, обчислюємо матрицю $\boldsymbol{B}^{-1}(s+1)$ (наприклад, за формулами (1.49) цього ж параграфу) і переходимо до пункту 2 алгоритму, заміняючи s на $s+1$.

Приклад 1.9. *Розв'язати ЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = 2x_3 - 2x_4 - x_5 \to \min,$$
$$x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4,$$
$$x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,5.$$

Як бачимо, вихідна *ЗЛП* є канонічною. При проведенні ручних розрахунків, пов'язаних з розв'язуванням *ЗЛП* за допомогою *МСМ*, всі обчислення на кожній ітерації зручно оформляти у вигляді таблиць. Оформимо вихідні дані у вигляді таблиці, що називається *допоміжною*, до якої в подальшому на кожній ітерації будемо вносити координати вектора $\boldsymbol{u}$ та обчислені симплекс-різниці Δ (див. таблицю 1.7).

Таблиця 1.7

$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{A}_3$	$\boldsymbol{A}_4$	$\boldsymbol{A}_5$	$\boldsymbol{u}^0$	$\boldsymbol{u}^1$	$\boldsymbol{u}^2$
4	1	0	–2	1	1	0	–2	–4
2	0	1	3	–1	2	0	0	–2
$\boldsymbol{c}$	0	0	2	–2	–1			
Δ^0	0	0	2	–2	–1			
Δ^1	2	0	–2	0	1			
Δ^2	4	2	0	0	7			

Оскільки базисна матриця $\boldsymbol{B}(0)$ є одиничною, то одиничною є і обернена їй. Заповнюємо основну таблицю, що відповідає базису $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, (див. таблицю 1.8).

Таблиця 1.8

Базис	$\boldsymbol{c}^0_{баз}$	β^0	$\boldsymbol{B}^{-1}(0)$		$\boldsymbol{A}_4$	α^0_4
$\boldsymbol{A}_1$	*0*	*4*	*1*	*0*	*1*	***1***
$\boldsymbol{A}_2$	*0*	*2*	*0*	*1*	*–1*	*–1*
		$\boldsymbol{u}^0$	*0*	*0*		

Координати вектора $\boldsymbol{u}^0$ обчислені згідно формули (1.50). Після цього вектор $\boldsymbol{u}^0$ заноситься в допоміжну таблицю (стовпець $\boldsymbol{u}^0$), де з його допомогою за формулами (1.51) обчислені симплекс-різниці, що відповідають $\boldsymbol{x}^0=(4,2,0,0,0)$ (рядок Δ^0). Критерій оптимальності не виконується, до базису вводиться вектор $\boldsymbol{A}_4$. Заносимо вектор $\boldsymbol{A}_4$ до основної таблиці та обчислюємо його координати (вектор α_4^0) у базисі $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, використовуючи формули (1.52). Тепер звичайним чином визначається вектор, що підлягає виведенню з числа базисних ($\boldsymbol{A}_1$).

Таблиця 1.9

Базис	$\boldsymbol{c}^1_{баз}$	β^1	$\boldsymbol{B}^{-1}(1)$		$\boldsymbol{A}_3$	α^1_3
$\boldsymbol{A}_4$	*–2*	*4*	*1*	*0*	*–2*	*–2*
$\boldsymbol{A}_2$	*0*	*6*	*1*	*1*	*3*	***1***
		$\boldsymbol{u}^1$	*–2*	*0*		

Перераховуємо за відповідними формулами основну частину таблиці 1.8 (див. таблицю 1.9). Новий базисний розв'язок $\boldsymbol{x}^1=(0,6,0,4,0)$ також не є оптимальним, до базису вводиться вектор $\boldsymbol{A}_3$, з базису виводиться вектор $\boldsymbol{A}_2$.

Таблиця 1.10

Базис	$\boldsymbol{c}^2_{баз}$	β^2	$\boldsymbol{B}^{-1}(2)$	
$\boldsymbol{A}_4$	*–2*	*16*	*3*	*2*
$\boldsymbol{A}_3$	*2*	*6*	*1*	*1*
		$\boldsymbol{u}^2$	*–4*	*–2*

Заповнюємо основну таблицю для наступної ітерації (див. таблицю 1.10). Оскільки для базисного розв'язку $\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}^*=(0,0,6,16,0)$ виконується критерій оптимальності, то обчислення припиняються.

Зауваження.

1. Модифікований симплекс-метод інколи ще називають *методом оберненої матриці*.
2. Застосування модифікованого симплекс-методу особливо вигідно при розв'язуванні *ЗЛП*, у яких до матриці умов $\boldsymbol{A}$ додаються нові вектори-стовпці. При цьому для знаходження розв'язку нових задач використовується інформація, що одержана раніше.
3. Легко перевірити, що якщо розглянути так звану *елементарну матрицю*

$$\mathbf{E}(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\dfrac{\alpha_{1k}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\dfrac{\alpha_{2k}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\dfrac{\alpha_{l-1k}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dfrac{1}{\alpha_{lk}^{s}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\dfrac{\alpha_{l+1k}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\dfrac{\alpha_{mk}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\boldsymbol{B}^{-1}(s+1) = \boldsymbol{E}(s)\ \boldsymbol{B}^{-1}(s).$$

Використовуючи цю формулу для матриці $\boldsymbol{B}^{-1}(s)$, потім $\boldsymbol{B}^{-1}(s-1)$ і т. д., маємо

$$\boldsymbol{B}^{-1}(s+1) = \boldsymbol{E}(s)\ \boldsymbol{E}(s-1)\ \dots\ \boldsymbol{E}(0)\ \boldsymbol{B}^{-1}(0).$$

Отримана формула носить назву *мультиплікативного подання оберненої матриці*. Реальні *ЗЛП*, як правило, розв'язуються за допомогою *МСМ* з використанням мультиплікативного представлення оберненої матриці.

§ 14. Двоїсті задачі лінійного програмування

Нехай *ЗЛП* має стандартну форму

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\ \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \qquad (1.53)$$

Позначимо, як завжди, через D її допустиму область і розглянемо допоміжну задачу: знайти нижню оцінку для значень цільової функції $\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}$ на множині D.

Через те, що $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, то для будь-якого вектора $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_m)$ виконується рівність $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=0$ і тому

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}. \qquad (1.54)$$

Поставимо вимогу, щоб $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$, або, що теж саме, $\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}$. Тоді з (1.54) випливає, що $\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b}$.

Природно також сподіватися, що

$$\min_{\boldsymbol{x}\in D} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \max_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{A}\leq \boldsymbol{c}} \boldsymbol{u}\boldsymbol{b}.$$

Означення 1.6. *Двоїстою до СЗЛП* (1.53) *називається ЗЛП*

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b} \to \max,\ \ \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}. \tag{1.55}$$

У зв'язку з цим СЗЛП (1.53) *назвемо прямою* (*вихідною*) *ЗЛП*.

Вище нами доведена

Теорема 1.7. *Значення цільових функцій прямої* (1.53) *та двоїстої* (1.55) *ЗЛП пов'язані співвідношенням*

$$\underset{\boldsymbol{x}\in D}{\boldsymbol{cx}} \geq \underset{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{uA}\leq\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{ub}}. \tag{1.56}$$

Ми записали пряму та двоїсту їй задачі у *матричній формі*. *Координатна форма* цих задач така:

СЗЛП:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = 1,\ldots,m,\ \ x_j \geq 0,\ \ j = 1,\ldots,n\,;$$

двоїста ЗЛП:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \max,\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leq c_j,\ \ j = 1,\ldots,n\,.$$

Означення 1.7. *Змінні u_i, $i = 1,\ldots,m$, двоїстої ЗЛП називаються двоїстими змінними* (*множниками Лагранжа, симплекс-множниками*).

Зауважимо, що якщо пряма *ЗЛП* має стандартну форму, то двоїста їй *ЗЛП* не містить прямих обмежень на двоїсті змінні ($-\infty < u_i < \infty$, $i = 1,\ldots,m$).

Щоб побудувати двоїсту до *ЗЗЛП*, необхідно перетворити її до стандартної форми, а потім діяти згідно означення.

Приклад 1.10. Нехай *ЗЗЛП* має вигляд

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\ \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \tag{1.57}$$

Запишемо цю задачу у стандартній формі

$$\overline{\boldsymbol{c}}\ \overline{\boldsymbol{x}} \to \min,\ \ (\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{I}\,)\ \overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b},\ \ \overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0},$$

де $\overline{\boldsymbol{c}} = (c_1,\ldots,c_n,0,\ldots,0)$, $\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m})'$ — $(n+m)$-вимірні вектори, $\boldsymbol{I}$ — одинична матриця розмірності $m\times m$, $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ — додаткові змінні.

Двоїстою до цієї *СЗЛП* (а, отже, і до *ЗЗЛП* (1.57)) за означенням є

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b} \to \max,\ \ \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{I}\,) \leq \overline{\boldsymbol{c}},\ \text{або}$$

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b} \to \max,\ \ \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c},\ \ \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}. \tag{1.58}$$

Легко переконатися, що двоїстою до *ЗЛП* (1.58) буде (1.57). Ці задачі називаються *симетричними двоїстими ЗЛП*.

Зауважимо, що і в загальному випадку поняття двоїстості є взаємним, тобто, *задача, двоїста до двоїстої, співпадає з прямою*. У зв'язку з цим більш логічно говорити не про пряму та двоїсту *ЗЛП*, а про *пару двоїстих ЗЛП*.

Приклад 1.11. Легко впевнитися (залишаємо це, як вправу), що наступні дві *ЗЛП* являють собою пару двоїстих *ЗЛП*:

$$
\begin{array}{l}
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min, \\
x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\
2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4, \\
x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8, \\
x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_5 \ge 0;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
6u_1 - 4u_2 + 8u_3 \to \max, \\
u_1 - 2u_2 + u_3 \le 1, \\
-2u_1 - 3u_2 = -2, \\
u_1 + 2u_2 + 3u_3 \le 1, \\
3u_1 + u_2 = -1, \\
-2u_1 - u_2 - 4u_3 \le 1, \\
u_2 \ge 0,\ u_3 \ge 0.
\end{array}
$$

§ 15. Теорема двоїстості

У попередньому параграфі мовилося про природність співвідношення

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \max_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}} \boldsymbol{u}\boldsymbol{b}.$$

Дійсно, має місце таке твердження.

Теорема 1.8 (теорема двоїстості).

1. *Якщо одна з двоїстих ЗЛП має оптимальний розв'язок, то інша також має оптимальний розв'язок, причому оптимальні значення цільових функцій співпадають.*

2. *Якщо цільова функція однієї з двоїстих ЗЛП необмежена на допустимій множині (для задачі мінімізації — знизу, для задачі максимізації — зверху), то інша задача не має допустимих розв'язків.*

Доведення.

1. Нехай розглядається пара двоїстих *ЗЛП*

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b} \to \max,\ \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c},$$

і перша з них має оптимальний розв'язок $\boldsymbol{x}^*$, якому відповідає базис $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$, $\boldsymbol{B}$ — базисна матриця. Використовуючи прийняті позначення, перейдемо від *СЗЛП* до *КЗЛП*:

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\ \alpha \boldsymbol{x} = \beta,\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \beta \ge \boldsymbol{0},$$

де

$$\alpha = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},\ \beta = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}. \qquad (1.60)$$

Зауважимо, що при цьому $\boldsymbol{x}^* = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)'$ і

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^* = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i \ . \qquad (1.61)$$

Згідно критерію оптимальності для $\boldsymbol{x}^*$

$$\Delta_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} = c_j - \mathbf{c}^*_{баз} \alpha_j \ge 0, \ j = 1, \dots, n,$$

де $\boldsymbol{c}^*_{баз} = (c_1, \dots, c_m)$.

Останню нерівність запишемо у матричній формі $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}^*_{баз}\alpha \ge \boldsymbol{0}$, або, приймаючи до уваги (1.60),

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}^*_{баз} \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{0}\ .$$

Нехай

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{c}^*_{баз} \boldsymbol{B}^{-1}. \qquad (1.62)$$

Тоді останнє співвідношення набирає вигляду $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{0}$, або $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}$, отже, вектор $\boldsymbol{u}^*$ є допустимим розв'язком двоїстої *ЗЛП*.

Обчислимо значення цільової функції двоїстої *ЗЛП* у точці $\boldsymbol{u}^*$. Приймаючи до уваги (1.62), (1.60) та (1.61), маємо

$$\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^*_{баз} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^*_{баз}\, \beta = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^* = \min_{\boldsymbol{x} \in D} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}.$$

Звідси випливає, що

$$\max_{\boldsymbol{u}:\, \boldsymbol{u}\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}} \boldsymbol{u}\boldsymbol{b} \ \ge\ \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b} \ =\ \min_{\boldsymbol{x} \in D} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}\ . \qquad (1.63)$$

З доведеної вище нерівності

$$\underset{\boldsymbol{x} \in D}{\boldsymbol{cx}} \ \ge\ \underset{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{uA} \le \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{ub}} \qquad (1.64)$$

маємо, що

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \ \ge\ \max_{\boldsymbol{u}:\, \boldsymbol{u}\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}} \boldsymbol{u}\boldsymbol{b}\ . \qquad (1.65)$$

Порівнюючи (1.63) та (1.65), приходимо до висновку, що за умови існування оптимального розв'язку $\boldsymbol{x}^*$ однієї з пари двоїстих *ЗЛП* існує оптимальний розв'язок $\boldsymbol{u}^*$ двоїстої їй задачі і при цьому $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b}$.

2. Нехай

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} \boldsymbol{cx} = -\infty\ .$$

З (1.64) маємо

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} \boldsymbol{cx} \ge \underset{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{uA} \le \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{ub}}\ .$$

Отже,

$$-\infty \ge \underset{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{uA} \le \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{ub}}\ ,$$

що не має сенсу. Це означає, що двоїста задача не має допустимих розв'язків. Теорема доведена.

Отже, кожній *ЗЛП* відповідає двоїста їй *ЗЛП*, причому це поняття є взаємним і розв'язки пари двоїстих задач тісно пов'язані між собою. Цей факт буде, зокрема, використовуватись при розгляді двоїстого симплекс-методу.

§ 16. Двоїстий критерій оптимальності

Розглянемо *СЗЛП*

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\ \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \qquad (1.66)$$

Як відомо, *ЗЛП*

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b} \to \max,\ \ \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}, \qquad (1.67)$$

є двоїстою до (1.66).

Теорема 1.9 (двоїстий критерій оптимальності). *Базисний розв'язок* $\boldsymbol{x}^*$ *ЗЛП* (1.66) *є оптимальним тоді і лише тоді, коли існує вектор* $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$ *такий, що виконуються співвідношення*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}_j = c_j \quad \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} = c_j\right), \quad \text{якщо} \quad x_j^* > 0, \\ \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}_j \le c_j \quad \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} \le c_j\right), \quad \text{якщо} \quad x_j^* = 0. \end{aligned} \qquad (1.68)$$

<u>Доведення</u>. Необхідність. Нехай $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальний розв'язок *ЗЛП* (1.66). Доведемо, що при цьому виконуються співвідношення (1.68). Дійсно, згідно теореми двоїстості існує оптимальний розв'язок $\boldsymbol{u}^*$ двоїстої задачі (1.67) і при цьому $\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b}$. Звідси, враховуючи, що $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$, маємо

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b} - \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}^*$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j - \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}_j)\, x_j^* = 0.$$

З останньої рівності випливає співвідношення (1.68).

Достатність. Покажемо, що при виконанні умов (1.68) $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальний розв'язок *ЗЛП* (1.66). Дійсно, з (1.68) маємо

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j - \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}_j)\, x_j^* = 0$$

або $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$. Отже, $\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b}$. Крім того, з (1.68) випливає, що $\boldsymbol{u}^*$ — допустимий розв'язок двоїстої задачі (1.67). Тому

$$\boldsymbol{cx}^* \underset{\boldsymbol{x} \in D}{\ge} \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{cx}^*.$$

Отже, $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальний розв'язок *ЗЛП* (1.66).

Доведення завершене.

Зауважимо, що симплекс-множники $u_1,\dots,u_m$, що фігурують у *МСМ* і відповідають оптимальному розв'язкові прямої *ЗЛП*, є оптимальним розв'язком двоїстої *ЗЛП*.

§ 17. Двоїстий симплекс-метод

Розглянемо метод розв'язування *ЗЛП*, що базується на теорії двоїстості, і називається *двоїстим симплекс-методом*. Наведемо його обгрунтування.

Нехай розглядається *СЗЛП*

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\ \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \qquad (1.69)$$

Як відомо, двоїстою до неї є *ЗЛП*

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b} \to \max,\ \ \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}. \qquad (1.70)$$

Нехай вектори умов $\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m$ у задачі (1.69) є лінійно незалежними, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m)$ — базисна матриця. Спробуємо перейти від *СЗЛП* (1.69) до *КЗЛП*, для чого помножимо непрямі обмеження $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ зліва на $\boldsymbol{B}^{-1}$. Одержимо $\alpha\boldsymbol{x} = \beta$, де $\alpha = (\boldsymbol{I}, \alpha_{m+1},\dots,\alpha_n)$, $\boldsymbol{I}$ — одинична матриця розмірності $m \times m$. Якщо при цьому $\beta \ge \boldsymbol{0}$, то одержана *ЗЛП* є канонічною, якщо ж деякі компоненти вектора β від'ємні, то, звичайно, ні.

Означення 1.8. *Майже канонічною ЗЛП* (*МКЗЛП*) називається *СЗЛП* (1.69), *якщо матриця умов* $\boldsymbol{A}$ *містить одиничну підматрицю*.

Означення 1.9. *Вектор* $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)$ *називається майже допустимим базисним розв'язком* (*МДБР*), *якщо він задовольняє обмеженням* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *(але не обов'язково обмеженням* $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$*) і його ненульовим компонентам відповідають лінійно незалежні вектори умов*.

Нехай для визначеності $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_m, 0,\dots,0)$, вектори умов $\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m$ — лінійно незалежні, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m)$. Змінні $x_1,\dots,x_m$ будемо називати *базисними*, $x_{m+1},\dots,x_n$ — *небазисними*. Надалі будемо розглядати лише ті *МДБР* (або ж ті *МКЗЛП*, що їх визначають), для яких симплекс-різниці невід'ємні, тобто

$$\Delta_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} = c_j - \boldsymbol{c}_{баз}\,\alpha_j = c_j - \boldsymbol{c}_{баз}\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j \ge 0 \quad (1.71)$$

для всіх $j = 1,\dots,n$.

Для таких *МДБР* є очевидним **критерій оптимальності**: *МДБР є оптимальним, якщо він є допустимим*.

Зауважимо, що для *МДБР*, для якого виконується (1.71), вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}_{баз}\boldsymbol{B}^{-1}$ є допустимим розв'язком двоїстої *ЗЛП* ($\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}$).

Отже, розглянемо *МКЗЛП*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i,\ \ i = 1,\dots,m,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n,$$

для якої $\Delta_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$. Виключивши з цільової функції базисні змінні $x_1,\ldots,x_m$, маємо

$$\sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j \to \min,$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i,\quad i = 1,\ldots,m, \tag{1.72}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n.$$

Двоїста до *ЗЛП* (1.72) має вигляд

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \leq \Delta_j,\quad j = m+1,\ldots,n,$$

$$v_i \leq 0,\ i = 1,\ldots,m,$$

або, виконуючи заміну $u_i = -v_i$, $i = 1,\ldots,m,$

$$-\sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i \to \max,$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i \leq \Delta_j,\quad j = m+1,\ldots,n,$$

$$u_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m.$$

Останню задачу легко перетворюємо до канонічного вигляду, вводячи додаткові невід'ємні змінні u_j, $j = m+1,\ldots,n$, та враховуючи, що максимізація цільової функції еквівалентна мінімізації цієї ж функції з оберненим знаком:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i \to \min,$$

$$u_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i = \Delta_j,\quad j = m+1,\ldots,n, \tag{1.73}$$

$$u_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n.$$

Отже, двоїстою до *МКЗЛП* (1.72) є *КЗЛП* (1.73). Зміст двоїстого симплекс-методу полягає у застосуванні звичайного симплекс-методу для розв'язування двоїстої *ЗЛП* (1.73). Оскільки розглядуваний метод цікавить нас як метод розв'язування задачі (1.72), вияснимо, що означають для *ЗЛП* (1.72) перетворення кожної ітерації симплексного методу, застосованого до задачі (1.73).

Непрямі обмеження *КЗЛП* (1.73) визначають базисний розв'язок цієї задачі — n-вимірний вектор $\boldsymbol{u} = (0,\ldots,0,\Delta_{m+1},\ldots,\Delta_n)$, для якого вектор $(\beta_1,\ldots,\beta_m,0,\ldots,0)$

тієї ж вимірності є вектором симплекс-різниць. Якщо $\beta_i \geq 0$, $i = 1,\dots,m,$ то $\boldsymbol{u}$ є оптимальним розв'язком задачі (1.73), а, отже, $\boldsymbol{x} = (\beta_1,\dots,\beta_m, 0,\dots,0)$ є оптимальним розв'язком *ЗЛП* (1.72) (критерій оптимальності *МДБР*). Інакше згідно симплекс-методу визначаються числа l та k з умов:

$$\beta_l = \min_{i:\beta_i<0} \beta_i, \tag{1.74}$$

$$\frac{\Delta_k}{-\alpha_{lk}} = \min_{j:\alpha_{lj}<0} \frac{\Delta_j}{-\alpha_{lj}} = \gamma_l, \tag{1.75}$$

тобто, визначається ведучий елемент α_{lk} симплексного перетворення.

Стосовно задачі (1.72) вказані дії також визначають ведучий елемент α_{lk} симплексного перетворення, при цьому з числа базисних виводиться вектор $\boldsymbol{A}_l$, а вектор $\boldsymbol{A}_k$ уводиться до числа базисних. Виконавши вказане перетворення, одержимо *МКЗЛП*, що визначає *МДБР* (аналогічно §7 цього розділу)

$$\boldsymbol{x}' = (\beta_1 - \theta_k\alpha_{1k},\dots,\beta_{l-1} - \theta_k\alpha_{l-1k}, 0, \beta_{l+1} - \theta_k\alpha_{l+1k},\dots,\beta_m - \theta_k\alpha_{mk},$$
$$0,\dots,0,\theta_k,0,\dots,0).$$

де $\theta_k = \beta_l/\alpha_{lk} > 0$. З цього ж перетворення випливає також, що симплекс-різниці Δ'_j, $j = 1,\dots,n,$ для $\boldsymbol{x}'$ пов'язані з Δ_j співвідношенням

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}}\Delta_k. \tag{1.76}$$

Враховуючи, що $\Delta_k \geq 0$, $\alpha_{lk} < 0$, робимо висновок, що при $\alpha_{lj} \geq 0$ виконується $\Delta'_j \geq 0$. Якщо ж $\alpha_{lj} < 0$, то, записавши (1.75) у вигляді

$$\frac{\Delta_k}{-\alpha_{lk}} \leq \frac{\Delta_j}{-\alpha_{lj}},$$

маємо, що

$$\Delta_j - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}}\Delta_k \geq 0.$$

Отже, для нового *МДБР* $\boldsymbol{x}'$ симплекс-різниці також невід'ємні.

Легко підрахувати також, що

$$L(\boldsymbol{x}') = L(\boldsymbol{x}) + \theta_k\Delta_k,$$

тобто, при переході від точки $\boldsymbol{x}$ до $\boldsymbol{x}'$ значення цільової функції збільшується, якщо $\boldsymbol{u}$ є невиродженим базисним розв'язком двоїстої *ЗЛП* і залишається незмінним у виродженому випадку.

Зауважимо нарешті, що коли для деякого $\beta_i < 0$ у задачі (1.73) $\alpha_{ij} \geq 0$, то ця задача розв'язку не має через необмеженість цільової функції на допустимій множині, а задача (1.72) згідно теореми двоїстості не має розв'язку через те, що є порожньою її допустима множина.

Все це дає можливість сформулювати

Алгоритм двоїстого симплекс-методу (*ДСМ*)

1. Зводимо вихідну *ЗЛП* до *МКЗЛП* і знаходимо її *МДБР* $\boldsymbol{x}(0)$, для якого симплекс-різниці невід'ємні.

2. Нехай на *s*-й ітерації маємо *МКЗЛП*, що визначає *МДБР* $\boldsymbol{x}(s)$, якому відповідають невід'ємні симплекс-різниці. Без обмеження загальності будемо вважати, що $\boldsymbol{x}(s)$ визначається системою непрямих обмежень

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}^{s} x_j = \beta_i^{s},\ i=1,\dots,m, \tag{1.77}$$

тобто, $\boldsymbol{x}(s) = (\beta_1^s,\dots,\beta_m^s,0,\dots,0)$ і

$$\Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^s \ge 0,\ j=1,\dots,n.$$

3. Якщо $\beta_i^s \ge 0$, то кінець: $\boldsymbol{x}(s)$ є оптимальним розв'язком вихідної *ЗЛП*. Інакше

4. Якщо існує принаймні одне $\beta_i^s < 0$, таке, що $\alpha_{ij}^s \ge 0$, $j=1,\dots,n$, то кінець: вихідна *ЗЛП* розв'язку не має (її допустима множина є порожньою). Інакше

5. Знаходимо *l* з умови

$$\beta_l^s = \min_{i:\beta_i<0} \beta_i^s.$$

Вектор $\boldsymbol{A}_l$ виводиться з числа базисних.

6. Знаходимо *k* з умови

$$\frac{\Delta_k^s}{-\alpha_{lk}^s} = \min_{j:\alpha_{lj}^s<0} \frac{\Delta_j^s}{-\alpha_{lj}^s}.$$

Вектор $\boldsymbol{A}_k$ уводиться до числа базисних. Виконуємо симплексне перетворення над елементами розширеної матриці системи (1.77) з ведучим елементом α_{ij}^s і повертаємось до пункту 2 алгоритму, заміняючи *s* на $s+1$.

Приклад 1.12. *Розв'язати ЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min,$$
$$x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2,$$
$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5.$$

Наведена *ЗЛП* є *МКЗЛП*. Її розв'язування ведеться в симплекс-таблицях (див. таблицю 1.11), які незначним чином відрізняються від звичайних симплекс-таблиць.

Таблиця 1.11

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
x_1	1	0	**–1**	1	–1	–2
x_2	0	1	–1	–1	1	1
Δ	0	0	1	1	2	0

γ			1		2	
x_3	–1	0	1	–1	1	2
x_2	–1	1	0	–2	2	3
Δ	1	0	0	2	1	–2

Оптимальний розв'язок задачі: $\boldsymbol{x}^* = (0,3,2,0,0)$. При цьому $L(\boldsymbol{x}^*) = 2$.

Питання про те, як будь-яку *СЗЛП* звести до *МКЗЛП,* залишимо відкритим. Зауважимо лише, що на практиці часто мають місце випадки, коли вихідна *ЗЛП* є *МКЗЛП*, або елементарно зводиться до неї (дивись, наприклад, розділ 4).

Підкреслимо, що застосування *ДСМ* особливо вигідне при розв'язуванні *ЗЛП* із зростаючою кількістю додаткових обмежень. При цьому для знаходження розв'язку нових задач використовується інформація, що одержана раніше.

Розділ 2. Транспортна задача лінійного програмування

Викладені вище методи розв'язування *ЗЛП* є універсальними. Однак існує цілий ряд *ЗЛП*, для яких внаслідок їх специфіки застосування загальних методів спрощується. Одною з таких задач є транспортна задача лінійного програмування (*ТЗЛП*).

Нагадаємо, що математична модель ТЗЛП має вигляд:

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min , \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \quad i = 1,\dots,m , \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \quad j = 1,\dots,n , \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \ i = 1,\dots,m, \ \ j = 1,\dots,n, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{2.5}$$

Зауважимо, що умова (2.5) визначає *збалансовану* (*закриту*) *модель ТЗЛП*, якій буде приділена головна увага.

Очевидно, що (2.1)–(2.4) — це *СЗЛП* у координатній формі. Її можна записати також у матричній формі. Для цього введемо такі позначення:

$\boldsymbol{x} = (x_{11},\dots,x_{1n},x_{21},\dots,x_{2n},\dots,x_{m1},\dots,x_{mn})'$ — *вектор перевезень,*

$\boldsymbol{b} = (a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n)'$ — *вектор виробництва-споживання,*

$\boldsymbol{A}_{ij} = (0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)'$ — *вектор комунікації* $P_i\,Q_j$ (його розмірність дорівнює $m+n$, перша *1* стоїть на i-у місці, друга — на $m+j$-у),

$\boldsymbol{c} = (c_{11},\dots,c_{1n},c_{21},\dots,c_{2n},\dots,c_{m1},\dots,c_{mn})$ — *вектор транспортних витрат,*

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{11},\dots,\boldsymbol{A}_{1n},\boldsymbol{A}_{21},\dots,\boldsymbol{A}_{2n},\dots,\boldsymbol{A}_{m1},\dots,\boldsymbol{A}_{mn})$ — *матриця умов.*

Тоді *ТЗЛП* (2.1)–(2.4) набирає вигляду:

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\ \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.$$

Специфіка цієї задачі полягає в тому, що елементами матриці умов $\boldsymbol{A}$ є лише нулі та одиниці, причому нулів — більшість.

Зауважимо, що при необхідності вектор транспортних витрат $\boldsymbol{c}$ можна розглядати як матрицю $\boldsymbol{c} = \| c_{ij} \|$, $i = 1,...,m,\ j = 1,...,n,$ а вектор перевезень $\boldsymbol{x}$ — як матрицю $\boldsymbol{x} = \| x_{ij} \|$, $i = 1,...,m,\ j = 1,...,n.$

При ручних обчисленнях дані для *ТЗЛП* та результати обчислень, пов'язаних з її розв'язанням, заносяться до транспортної таблиці.

Транспортна таблиця

	Q_1	...	Q_j	...	Q_n	$\boldsymbol{a}$
P_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
P_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
$\boldsymbol{b}$	b_1	...	b_j	...	b_n	

При цьому транспортні витрати c_{ij} записуються у верхньому правому куті відповідної клітинки транспортної таблиці. Як правило, компоненти x_{ij} вектора перевезень заносяться до транспортної таблиці лише тоді, коли $x_{ij} > 0$. У цьому випадку відповідна клітинка транспортної таблиці називається *заповненою*, інакше — *вільною*.

§ 1. Властивості транспортної задачі

1. *ТЗЛП* (2.1)–(2.4) *завжди має розв'язок.*

Дійсно, допустима множина *D* *ТЗЛП* не є порожньою, бо

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d},\ \text{де}\ d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,\ \ i = 1,...,m,\ \ j = 1,...,n,$$

є допустимим розв'язком *ТЗЛП*:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{d} = a_i,\ \ i = 1,...,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{d} = b_j,\ \ j = 1,...,n,$$

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d} \geq 0, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Крім того, D є обмеженою множиною, бо $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$. Тому цільова функція $L(\boldsymbol{x})$ досягає свого мінімуму на обмеженій множині D.

2. *Ранг матриці умов* $\boldsymbol{A}$ *дорівнює* $m+n-1$.

Легко бачити, що сума перших m рядків матриці $\boldsymbol{A}$ дорівнює сумі n решти її рядків. Тому $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} \leq m+n-1$. Розглянемо тепер її мінор, який утворений з перших $m+n-1$ компонент векторів умов $\boldsymbol{A}_{1n}, \boldsymbol{A}_{2n}, \dots, \boldsymbol{A}_{mn}, \boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \dots, \boldsymbol{A}_{1,n-1}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Як бачимо, цей мінор має трикутний вигляд, його величина дорівнює 1. Отже, $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = m+n-1$.

Ця властивість *ТЗЛП* означає, що серед її обмежень (2.2), (2.3) $m+n-1$ лінійно незалежних, отже, одне з них (будь-яке) можна відкинути. Звичайно цього не роблять для збереження симетрії запису задачі.

3. *Якщо всі* a_i, $i=1,...,m$, b_j, $j=1,...,n$, *— цілі, то хоча б один оптимальний розв'язок ТЗЛП є цілочисельним.*

У справедливості цієї властивості ми переконаємось, розглянувши метод потенціалів розв'язування *ТЗЛП*.

Як і для будь-якої *ЗЛП*, для *ТЗЛП* важливу роль відіграє поняття базисного розв'язку. Невироджений базисний розв'язок *ТЗЛП* згідно властивості 2 містить $m+n-1$ додатну компоненту, а вироджений — меншу кількість додатних компонент.

У *ТЗЛП* поняттю базисного розв'язку можна надати наочного геометричного тлумачення. Для цього введемо ряд означень та сформулюємо деякі твердження.

Означення 2.1. *Маршрутом, що з'єднує пункти* P_{i_1} *та* Q_{j_s} *називається послідовність комунікацій*

$$P_{i_1}Q_{j_1}, P_{i_2}Q_{j_1}, P_{i_2}Q_{j_2}, \dots, P_{i_s}Q_{j_{s-1}}, P_{i_s}Q_{j_s}$$

(*див. рис. 2.1*). *Позначимо цей маршрут через* **М**.

Означення 2.2. *Маршрут* **М**, *до якого додається комунікація* $P_{i_1}Q_{j_s}$, *називається замкненим або циклом.*

Позначивши цикл через **С**, маємо: **С** = **М** $\cup$ $P_{i_1}Q_{j_s}$.

P_{i_1} P_{i_2} P_{i_s}

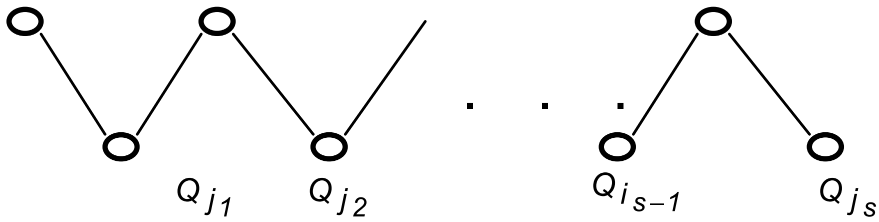


Рис. 2.1

Теорема 2.1. *Система векторів умов $\boldsymbol{A}_{ij}$, $(i,j)\in U$, ТЗЛП є лінійно незалежною тоді і лише тоді, коли з комунікацій, що відповідають цим векторам, неможливо утворити цикл.*

Доведення, Необхідність. Покажемо, що з незалежності векторів умов $\boldsymbol{A}_{ij}$, $(i,j)\in U$, випливає неможливість утворення циклу з комунікацій $P_i Q_j$, $(i,j)\in U$. Від супротивного. Нехай з комунікацій $P_i Q_j$, $(i,j)\in U$, можна утворити цикл **C**. Випишемо вектори $\boldsymbol{A}_{ij}$, які відповідають комунікаціям, що утворюють цикл **C**, відмічаючи лише одиниці:

$$\boldsymbol{A}_{i_1 j_1} = (\dots \underset{i_1}{1} \dots\dots\dots\dots \underset{j_1}{1} \dots\dots\dots\dots)',$$

$$\boldsymbol{A}_{i_2 j_1} = (\dots\dots \underset{i_2}{1} \dots\dots\dots \underset{j_1}{1} \dots\dots\dots\dots)',$$

$$\boldsymbol{A}_{i_2 j_2} = (\dots\dots \underset{i_2}{1} \dots\dots\dots\dots \underset{j_2}{1} \dots\dots\dots)',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\boldsymbol{A}_{i_s j_{s-1}} = (\dots\dots\dots \underset{i_s}{1} \dots\dots\dots \underset{j_{s-1}}{1} \dots)',$$

$$\boldsymbol{A}_{i_s j_s} = (\dots\dots\dots \underset{i_s}{1} \dots\dots\dots\dots \underset{j_s}{1} \dots)',$$

$$\boldsymbol{A}_{i_1 j_s} = (\dots \underset{i_1}{1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \underset{j_s}{1} \dots)'.$$

Легко перевірити, що

$$\boldsymbol{A}_{i_1 j_1} - \boldsymbol{A}_{i_2 j_1} + \boldsymbol{A}_{i_2 j_2} - \ldots - \boldsymbol{A}_{i_s j_{s-1}} + \boldsymbol{A}_{i_s j_s} - \boldsymbol{A}_{i_1 j_s} = 0,$$

а це суперечить лінійній незалежності векторів $\boldsymbol{A}_{ij}$, $(i,j)\in U$.

Достатність. Комунікації $P_i Q_j$, $(i,j)\in U$, не утворюють циклу. Покажемо, що цього достатньо для лінійної незалежності векторів умов $\boldsymbol{A}_{ij}$, $(i,j)\in U$. Від супротивного: нехай існують α_{ij}, не всі рівні нулю одночасно, такі, що

$$\sum_{(i,j)\in U} \alpha_{ij} \boldsymbol{A}_{ij} = 0. \qquad (2.6)$$

Нехай $\alpha_{i_1 j_1} \neq 0$. Приведемо (2.6) до вигляду:

$$\sum_{(i,j)\in U_1} \alpha_{ij} \boldsymbol{A}_{ij} = -\alpha_{i_1 j_1} \boldsymbol{A}_{i_1 j_1}, \quad U_1 = U \setminus (i_1, j_1). \qquad (2.7)$$

Вектор, що стоїть праворуч, має відмінну від нуля ($m+j_1$)-у компоненту. Тому зліва серед векторів $\alpha_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}$, $(i,j)\in U_1$ має обов'язково знайтись вектор, в якого є відмінною від нуля компонента з таким же номером. Нехай це вектор $\alpha_{i_2 j_1}\boldsymbol{A}_{i_2 j_1}$ $(\alpha_{i_2 j_1}\neq 0)$.

Записуємо тепер (2.7) у вигляді:

$$\sum_{(i,j)\in U_2}\alpha_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} = -\alpha_{i_1 j_1}\boldsymbol{A}_{i_1 j_1} - \alpha_{i_2 j_1}\boldsymbol{A}_{i_2 j_1}, \quad U_2 = U_1 \setminus (i_2, j_1). \qquad (2.8)$$

Аналогічно, оскільки вектор, що стоїть справа, має відмінну від нуля i_2-у компоненту, то серед векторів $\alpha_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}$, $(i,j)\in U_2$ обов'язково знайдеться вектор, i_2-а компонента якого відмінна від нуля. Нехай це $\alpha_{i_2 j_2}\boldsymbol{A}_{i_2 j_2}$ $(\alpha_{i_2 j_2}\neq 0)$. Цей вектор переноситься у праву частину і т. д. Виникає питання: до яких пір буде продовжуватися ця процедура? До тих пір, поки на черговому кроці номер i_k (або j_k) не співпаде з одним із попередніх номерів i_l (j_l). А це означає, що з комунікацій

$$P_{i_1}Q_{j_1},\ P_{i_2}Q_{j_1},\ P_{i_2}Q_{j_2},\ldots,$$

що відповідають векторам умов

$$\boldsymbol{A}_{i_1 j_1},\ \boldsymbol{A}_{i_2 j_1},\ \boldsymbol{A}_{i_2 j_2},\ldots,$$

можна утворити цикл. А це суперечить припущенню.

Означення 2.3. *Комунікації $P_i Q_j$ називаються основними для розв'язку $\boldsymbol{x}$, якщо $x_{ij} > 0$.*

Укажемо простий наслідок доведеної теореми.

Теорема 2.2. *Допустимий розв'язок ТЗЛП є базисним тоді і лише тоді, коли з його основних комунікацій неможливо утворити цикл.*

Зрозуміло, що все вищевикладене можна трансформувати стосовно транспортної таблиці. Зокрема, якщо неможливо утворити цикл із заповнених клітинок ($x_{ij} > 0$) деякого допустимого розв'язку *ТЗЛП*, то цей розв'язок є базисним, інакше — ні. Наприклад, у таблиці 2.1 вказано допустимий розв'язок *ТЗЛП*, що не є базисним, бо існують цикли, утворені заповненими клітинками (один із них зображено на таблиці за допомогою зірочок). При тих же вихідних даних у таблиці 2.2 наводиться допустимий базисний розв'язок *ТЗЛП*, що є невиродженим.

Таблиця 2.1

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	***a***
P_1	**3**	**3 ***	**2 ***	**2**	*10*
P_2		**2 ***	**8 ***	**5**	*15*
P_3				**7**	*7*
b	*3*	*5*	*10*	*14*	*32*

Таблиця 2.2

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	***a***
P_1	**3**	**5**	**2**		*10*
P_2			**8**	**7**	*15*
P_3				**7**	*7*
b	*3*	*5*	*10*	*14*	*32*

Має місце наступна теорема (без доведення).

Теорема 2.3. *ТЗЛП є невиродженою (всі її базисні розв'язки є невиродженими) тоді і лише тоді, коли для довільних наборів індексів* $i_1,\dots,i_t$ $(t<m)$ *та* $j_1,\dots,j_s$ $(s<n)$ *має місце нерівність*

$$\sum_{r=1}^{t} a_{i_r} \neq \sum_{r=1}^{s} b_{j_r}.$$

У таблиці 2.3 наведено приклад виродженого базисного розв'язку *ТЗЛП*.

Для невиродженого базисного розв'язку (див. таблицю 2.2) базисні змінні визначаються однозначно: x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}; однозначно визначаються і відповідні базисні вектори:

$$\boldsymbol{A}_{11} = (1,0,0,1,0,0,0)', \qquad \boldsymbol{A}_{12} = (1,0,0,0,1,0,0)',$$
$$\boldsymbol{A}_{13} = (1,0,0,0,0,1,0)', \qquad \boldsymbol{A}_{23} = (0,1,0,0,0,1,0)',$$
$$\boldsymbol{A}_{24} = (0,1,0,0,0,0,1)', \qquad \boldsymbol{A}_{34} = (0,0,1,0,0,0,1)'.$$

Таблиця 2.3

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	***a***
P_1	**10**	**10**				20
P_2		**5**	**15**	•		20
P_3				**8**	**9**	17
b	10	15	15	8	9	57

Для виродженого базисного розв'язку *ТЗЛП* (див. таблицю 2.3) базисні змінні (вектори) визначаються неоднозначно: наприклад: x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35} ($\boldsymbol{A}_{11}$, $\boldsymbol{A}_{12}$, $\boldsymbol{A}_{22}$, $\boldsymbol{A}_{23}$, $\boldsymbol{A}_{24}$, $\boldsymbol{A}_{34}$, $\boldsymbol{A}_{35}$). Тут до базисних віднесена змінна $x_{24} = 0$.

У методі потенціалів розв'язування *ТЗЛП*, що викладається нижче, у випадку виродженого базисного розв'язку до ненульових базисних перевезень слід додати необхідну кількість нульових перевезень (як базисних) таким чином, щоб у сукупності одержані перевезення не утворювали циклу.

Означення 2.4. *Клітинки транспортної таблиці, що відповідають базисним змінним, називаються базисними, решта — небазисними.*

§ 2. Двоїстість у транспортній задачі

Як зазначалося вище, *ТЗЛП* є *СЗЛП*:

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min,\ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

отже, двоїстою їй задачею є

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b} \to \max,\ \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}, \qquad (2.9)$$

де $\boldsymbol{u}$ — $(m+n)$-вимірний вектор-рядок двоїстих змінних. Оскільки компоненти вектора $\boldsymbol{u}$ за знаком не обмежені, то визначимо їх таким чином:

$$\boldsymbol{u} = (-u_1,\dots,-u_m, v_1,\dots,v_n).$$

Очевидно, що двоїста змінна $-u_i$ відповідає обмеженню

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\dots,m,$$

а двоїста змінна v_j — обмеженню

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\dots,n,$$

ТЗЛП.

У координатній формі задача (2.9) приймає вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \max,$$

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \; i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n.$$

Означення 2.5. *Змінна u_i називається потенціалом пункту виробництва P_i, $i = 1,\dots,m$, а змінна v_j — потенціалом пункту споживання Q_j, $j = 1,\dots,n$.*

Двоїстий критерій оптимальності *стосовно ТЗЛП формулюється так: базисний розв'язок $\mathbf{x} = \|x_{ij}\|$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, ТЗЛП є оптимальним тоді і лише тоді, коли існують потенціали u_i, $i=1,\dots,m$, v_j, $j=1,\dots,n$, такі, що*

$$\begin{aligned} &v_j - u_i = c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} \text{ – базисне,} \\ &v_j - u_i \le c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} \text{ – небазисне.} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Цей критерій лежить в основі методу потенціалів розв'язування *ТЗЛП*, що викладається нижче.

А зараз розглянемо *задачу знаходження початкового базисного розв'язку ТЗЛП.*

§ 3. Деякі методи знаходження початкового базисного розв'язку

Відомо, що для звичайної *СЗЛП* пошук початкового базисного розв'язку пов'язаний з необхідністю застосування *М*-методу. Для *ТЗЛП* внаслідок її специфіки пошук початкового базисного розв'язку значно спрощується. Розглянемо два найбільш популярних методи.

1. Метод північно-західного кута

Вибирається клітинка (1,1) транспортної таблиці (її північно-західний кут) і завантажується максимально можливим перевезенням. При цьому можливі три випадки:

1) $x_{11} = \min(a_1, b_1) = a_1$,
2) $x_{11} = \min(a_1, b_1) = b_1$,
3) $x_{11} = \min(a_1, b_1) = a_1 = b_1$.

У першому випадку з подальшого розгляду виключається перший рядок транспортної таблиці, покладаємо $b_1 = b_1 - x_{11}$, у другому випадку виключається перший стовпець, покладаємо $a_1 = a_1 - x_{11}$, у третьому випадку з подальшого розгляду виключаються як перший стовпець, так і перший рядок. У зменшеній таким чином транспортній таблиці знаходиться її верхня ліва клітинка (північно-західний кут), завантажується максимально можливим чином і т. д.

Зрозуміло, що побудований таким чином план перевезень є допустимим розв'язком *ТЗЛП*. Крім того, цей план є базисним.

Зауважимо, що при побудові початкового базисного розв'язку методом північно-західного кута зовсім не враховуються собівартості перевезень c_{ij}. Тому, як правило, такий план є далеким від оптимального.

Розглянемо один із методів, де при знаходженні початкового базисного розв'язку приймаються до уваги собівартості перевезень c_{ij}.

2. Метод мінімального елемента

Ідея методу полягає у тому, щоб максимальним чином завантажити перевезеннями комунікації з мінімальною собівартістю перевезень. Фактично ж цей метод відрізняється від методу північно-західного кута лише тим, що на кожному кроці побудови початкового базисного розв'язку для завантаження вибирається клітинка з мінімальним значенням c_{ij}.

Метод мінімального елемента в результаті також дає допустимий базисний розв'язок *ТЗЛП*.

У таблицях 2.2 та 2.3 наведені початкові базисні розв'язки *ТЗЛП*, побудовані за методом північно-західного кута (невироджений та вироджений).

Наведемо приклад побудови початкового базисного розв'язку методом мінімального елемента (таблиця 2.4).

Таблиця 2.4

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	***a***
P_1	8 **30**	12	4 **15**	9	10 **15**	60
P_2	7	5	15	3 **35**	6 **5**	40
P_3	9	4 **80**	6	12	7 **20**	100
P_4	5	3	2 **50**	6	4	50
b	30	80	65	35	40	250

§ 4. Метод потенціалів

Нагадаємо, що у методі потенціалів істотно використовується двоїстий критерій оптимальності для *ТЗЛП*. Його можна сформулювати дещо в іншому вигляді.

Нехай u_i, $i=1,...,m$, v_j, $j=1,...,n$, — потенціали пунктів P_i та Q_j відповідно. Величину $c_{ij} - (v_j - u_i) = \Delta_{ij}$ назвемо *симплекс-різницею* (*відносною оцінкою*) *змінної* x_{ij}.

Двоїстий критерій оптимальності для ТЗЛП. *Базисний розв'язок* $\mathbf{x} = \|x_{ij}\|$, $i=1,...,m$, $j=1,...n$, *ТЗЛП є оптимальним тоді і лише тоді, коли існують потенціали* u_i, $i=1,...,m$, v_j, $j=1,...,n$, *такі, що*

$\Delta_{ij} = 0$ *для базисних клітинок,* (2.11)

$\Delta_{ij} \geq 0$ *для небазисних клітинок.* (2.12)

Метод потенціалів полягає ось у чому.

1. Знаходиться початковий невироджений базисний розв'язок $\boldsymbol{x}$ *ТЗЛП* одним з відомих методів.

2. Знаходяться потенціали u_i, $i=1,...,m$, v_j, $j=1,...,n$, так, щоб у кожній базисній клітинці виконувалося співвідношення $\Delta_{ij} = 0$, або, що те ж саме,

$$v_j - u_i = c_{ij},\ (i,j) \text{ — базисні клітинки.} \quad (2.13)$$

Зауважимо, що система (2.13) містить $m+n-1$ рівнянь з $m+n$ невідомими. Тому одна з невідомих величин (u_1, наприклад) покладається рівною довільній константі, що, як правило, дорівнює нулю. Решта невідомих знаходиться з системи (2.13).

3. Обчислюються Δ_{ij} для небазисних клітинок. Якщо всі вони невід'ємні, то базисний розв'язок $\boldsymbol{x}$ є оптимальним. Інакше його можна поліпшити, якщо ввести до числа базисних одну з клітинок, де $\Delta_{ij} < 0$ (як правило, ту клітинку (i_0,j_0), для якої

$$\Delta_{i_0 j_0} = \min_{i,j} \Delta_{ij}.$$

Розглянемо питання про те, яка клітинка виводиться з числа базисних. З клітинок транспортної таблиці утворюємо цикл таким чином, щоб однією з його клітинок (вершин) була клітинка (i_0,j_0), а решта клітинок були базисними. Можна довести, що у невиродженому випадку для заданої небазисної клітинки цикл, що їй відповідає, будується однозначно.

Зауважимо, що цикл для вибраної небазисної клітинки в загальному випадку будується за допомогою *методу викреслювання*.

Суть його в тому, що будується "маска" існуючого розв'язку, де враховується, що вибрана клітинка є базисною. Для прикладу в таблиці 2.5 приводиться "маска" базисного розв'язку з таблиці 2.4 для небазисної клітинки (*4,4*). Потім викреслюються рядки та стовпці (у будь-якому порядку), що містять єдине додатне перевезення. У розглядуваному випадку можна викреслити перший, другий стовпець та третій рядок. Частина маски, що залишається, утворює цикл, що відповідає вибраній небазисній клітинці. Позначимо його через **C**.

Таблиця 2.5

б		**б**		**б**
			б	**б**
	б			б
		б	**Б**	

Позначимо вершини циклу так: вибрану небазисну — знаком "**+**", а решту — знаками "**+**" та "**–**", але так, щоб дві сусідні (по рядку або стовпчику) вершини циклу мали різні знаки. Нехай $\mathbf{C}^+$ та $\mathbf{C}^-$ — множини вершин циклу $\mathbf{C}$, що позначені знаком "**+**" та "**–**" відповідно. Зрозуміло, що $\mathbf{C} = \mathbf{C}^+ \cup \mathbf{C}^-$.

Збільшимо перевезення у клітинках $(i,j) \in \mathbf{C}^+$ на θ, а у клітинках $(i,j) \in \mathbf{C}^-$ зменшимо їх на θ. Щоб новий вектор перевезень був допустимим, необхідно, щоб

$$0 \le \theta \le \min_{i,j:(i,j)\in \mathbf{C}^-} x_{ij}.$$

Якщо ж вибрати

$$\theta = \min_{i,j:(i,j)\in \mathbf{C}^-} x_{ij},$$

то принаймні одна з базисних клітинок стане вільною. Замість неї базисною стає клітинка (i_0, j_0). Зауважимо, що якщо $\min x_{ij}$ реалізується на двох і більше клітинках, то лише одну з них (будь-яку) варто вивести з числа базисних, залишивши в решті нульові базисні перевезення для збереження базисності нового розв'язку.

Отже, будуємо новий базисний розв'язок $\boldsymbol{x}'$ згідно співвідношень

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{якщо } (i,j) \notin \mathbf{C}, \\ x_{ij}+\theta, & \text{якщо } (i,j) \in \mathbf{C}^{+}, \\ x_{ij}-\theta, & \text{якщо } (i,j) \in \mathbf{C}^{-}. \end{cases}$$

При цьому $L(\boldsymbol{x}') = L(\boldsymbol{x}) + \theta\Delta_{i_0 j_0}$.

Дійсно, нехай цикл **C** містить, крім (i_0, j_0), клітинки (i_0, j_1), (i_1, j_1),..., (i_s, j_s), (i_s, j_0) (див. рис. 2.2).

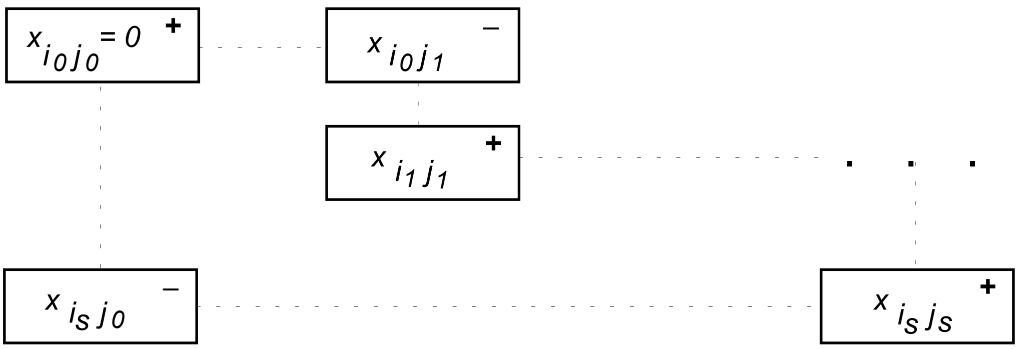


Рис. 2.2

Позначимо через L_0 ту частину цільової функції *ТЗЛП*, що не змінюється при переході від $\boldsymbol{x}$ до $\boldsymbol{x}'$. Тоді

$$L(\boldsymbol{x}) = L_0 + c_{i_0 j_1} x_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} x_{i_1 j_1} + \ldots + c_{i_s j_s} x_{i_s j_s} + c_{i_s j_0} x_{i_s j_0},$$

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}') &= L_0 + c_{i_0 j_0}\theta + c_{i_0 j_1}(x_{i_0 j_1} - \theta) + c_{i_1 j_1}(x_{i_1 j_1} + \theta) + \ldots + \\ &+ c_{i_s j_s}(x_{i_s j_s} + \theta) + c_{i_s j_0}(x_{i_s j_0} - \theta) = \\ &= L(\boldsymbol{x}) + \theta\,(c_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} - \ldots + c_{i_s j_s} - c_{i_s j_0}). \end{aligned}$$

В останньому виразі доданки в дужках, крім першого, відповідають базисним клітинкам, де $c_{ij} = v_j - u_i$. Тому

$$L(\boldsymbol{x}')=L(\boldsymbol{x})+\theta\ (c_{i_0 j_0}-(v_{j_1}-u_{i_0})+(v_{j_1}-u_{i_1})-\ldots+$$
$$+(v_{j_s}-u_{i_s})-(v_{j_0}-u_{i_s}))=L(\boldsymbol{x})+\theta\ (c_{i_0 j_0}-(v_{j_0}-u_{i_0}))=$$
$$=L(\boldsymbol{x})+\theta\ \Delta_{i_0 j_0},$$

що й потрібно було довести.

Зауважимо, що у невиродженому випадку $\theta>0$ і $L(\boldsymbol{x}')<L(\boldsymbol{x})$. У виродженому випадку $\theta=0$ і $L(\boldsymbol{x}')=L(\boldsymbol{x})$, тобто перехід від $\boldsymbol{x}$ до $\boldsymbol{x}'$ пов'язаний лише із зміною нульового базисного перевезення.

4. З допомогою описаної вище процедури перерозподілу перевезень вздовж циклу **C** клітинка (i_0,j_0) (змінна $x_{i_0 j_0}$) вводиться до числа базисних, клітинка (k,l), для якої

$$x_{kl}=\theta=\min_{i,j:\,(i,j)\in \mathbf{C}^-} x_{ij},$$

(змінна x_{kl}) виводиться з числа базисних. Переходимо до п.2 алгоритму.

Приклад 2.1. Методом потенціалів розв'яжемо *ТЗЛП*, дані для якої наведені в таблиці 2.4. Звідси ж візьмемо і початковий базисний розв'язок, побудований методом мінімального елемента. Усі ці дані перенесені в таблицю 2.6.

Таблиця 2.6

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	***a***	***u***
P_1	0 8 **30**	5 12	0 4 **15 +**	2 9	0 10 **15 –**	60	0
P_2	3 7	2 5	15 15	0 3 **35**	0 6 **5**	40	4
P_3	4 9	0 4 **80**	5 6	8 12	0 7 **20**	100	3
P_4	–1 5	–2 3	0 2 **50 –**	1 6	–4 4 **+**	50	2
b	30	80	65	35	40	250	
v	8	7	4	7	10		

Крім цього до таблиці 2.6 занесені потенціали u_i, $i=1,\ldots,4,$ (останній стовпець), v_j, $j=1,\ldots,5,$ (останній рядок), що є розв'язком системи $v_j-u_i=c_{ij}$, (i,j): x_{ij} — базисне, де покладено $u_1=0$. У верхніх лівих кутах кожної з клітинок записані величини Δ_{ij}. Бачимо, що розглядуваний базисний розв'язок не є оптимальним.

Для введення до числа базисних вибирається клітинка $(4,5)$ з мінімальною симплекс-різницею, $\theta=15$. Новий базисний розв'язок і відповідні обчислення наведені у таблиці 2.7.

Зауважимо, що при розв'язуванні системи для знаходження потенціалів u_i, $i=1,...,4$, та v_j, $j=1,...,5$, покладено $v_5 = 0$.

Таблиця 2.7

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	**a**	**u**
P_1	*0 8* **30** –	*9 12*	*0 4* + **30**	*6 9*	*4 10*	*60*	*–6*
P_2	*–1 7*	*2 5*	*11 15*	*0 3* **35**	*0 6* **5**	*40*	*–6*
P_3	*0 9*	*0 4* **80**	*1 6*	*8 12*	*0 7* **20**	*100*	*–7*
P_4	*–1 5* +	*2 3*	*0 2* – **35**	*5 6*	*0 4* **15**	*50*	*–4*
b	*30*	*80*	*65*	*35*	*40*	*250*	
v	*2*	*–3*	*–2*	*–3*	*0*		

Таблиця 2.8

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	**a**	**u**
P_1	*1 8*	*9 12*	*0 4* **60**	*6 9*	*4 10*	*60*	*–2*
P_2	*0 7*	*2 5*	*11 15*	*0 3* **35**	*0 6* **5**	*40*	*–2*
P_3	*1 9*	*0 4* **80**	*1 6*	*8 12*	*0 7* **20**	*100*	*-3*
P_4	*0 5* **30**	*2 3*	*0 2* **5**	*5 6*	*0 4* **15**	*50*	*0*
b	*30*	*80*	*65*	*35*	*40*	*250*	
v	*5*	*1*	*2*	*1*	*4*		

У таблиці 2.8 наведені результати обчислень для наступної ітерації. У цьому випадку при розв'язуванні системи для знаходження потенціалів покладено $u_4 = 0$. Легко зрозуміти, що при ручних обчисленнях зручно покласти рівним нулю потенціал того пункту виробництва (споживання), для якого у відповідному рядку (стовпці) транспортної таблиці міститься найбільша кількість базисних перевезень.

Як бачимо, критерій оптимальності виконується, отже,

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 5 \\ 0 & 80 & 0 & 0 & 20 \\ 30 & 0 & 5 & 0 & 15 \end{Vmatrix}$$

є оптимальним розв'язком *ТЗЛП*, $L(\boldsymbol{x}^*) = 1055$.

Зауваження.

1. Метод потенціалів розв'язування *ТЗЛП* — це, по суті, модифікований симплекс-метод, застосований до *ТЗЛП*. Існують інші методи її розв'язування.

2. Згадана вище третя властивість *ТЗЛП* випливає з того, що при знаходженні початкового базисного розв'язку та при переході до нових базисних розв'язків за методом потенціалів над величинами a_i, b_j, x_{ij}, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$, виконуються операції, що не виводять за рамки цілих чисел.

§ 5. Незбалансовані транспортні задачі

У попередніх параграфах розглядалася збалансована модель *ТЗЛП*, яка характеризувалася виконанням умови

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{2.14}$$

Якщо умова (2.14) порушується, то говорять про *незбалансовану* (*відкриту*) *модель ТЗЛП*. Зрозуміло, що при цьому змінюється і математичне формулювання задачі. Наприклад, якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то *ТЗЛП* набирає вигляду:

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \quad i = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j , \quad j = 1,\dots,n,$$

$$x_{ij} \ge 0, \ i = 1,\dots,m, \ j = 1,\dots,n.$$

Аналогічно записується математична модель *ТЗЛП* для другого випадку.

Зрозуміло, що у першому випадку не у всіх пунктах споживання Q_j, $j = 1,\dots,n$, буде задоволена потреба у продукції. Загальний об'єм незадоволеного попиту дорівнює

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

У другому випадку у деяких пунктах виробництва P_i, $i = 1,\dots,m$, залишається не реалізована продукція загального об'єму

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Проте у кожному з цих випадків план перевезень, що відповідає мінімуму транспортних витрат, побудувати можна. Для цього у першому випадку вводиться *фіктивний пункт виробництва* P_{m+1} з об'ємом виробництва

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

одиниць продукції, собівартості перевезень з котрого рівні нулю, тобто $c_{m+1,j} = 0$, $j = 1,\dots,n$. У другому випадку додається *фіктивний споживач* Q_{n+1} з величиною попиту

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

одиниць продукції, собівартості перевезень до якого рівні нулю, тобто $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1,\dots,m$.

Легко бачити, що запропоновані розширення вихідних незбалансованих задач являють собою збалансовані *ТЗЛП*, які можуть бути розв'язані, наприклад, методом потенціалів. Нехай $\bar{\boldsymbol{x}}^*$ їх оптимальний розв'язок. Тоді оптимальний розв'язок $\boldsymbol{x}^*$ вихідної задачі у першому випадку одержується відкиданням останнього рядка розв'язку $\bar{\boldsymbol{x}}^*$, що відповідає фіктивному пунктові виробництва. Додатні елементи цього рядка визначають об'єми недопостачання відповідним споживачам. Аналогічно, для другого випадку: оптимальний розв'язок $\boldsymbol{x}^*$ одержується відкиданням останнього стовпця розв'язку $\bar{\boldsymbol{x}}^*$, додатні елементи якого визначають об'єми нереалізованої продукції у відповідних виробників.

<u>*Зауваження*</u>. При знаходженні початкового базисного розв'язку розширених *ТЗЛП* методом мінімального елемента (або іншим методом, що враховує собівартості перевезень) у першу чергу потрібно вибирати клітинки для завантаження серед реальних виробників та споживачів, а клітинки фіктивного стовпчика (рядка) — в останню чергу. Це дозволить одержати план ближчий до оптимального. Цієї ж мети можна досягнути, поклавши

$$c_{m+1,j} > \max_{i,j} c_{ij} , \qquad c_{i,n+1} > \max_{i,j} c_{ij} ,$$

відповідно.

Приклад 2.2. *Розв'язати ТЗЛП:* $\boldsymbol{a} = (30, 40, 70, 60)$, $\boldsymbol{b} = (35, 80, 25, 70)$,

$$\boldsymbol{c} = \begin{Vmatrix} 1 & 9 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{Vmatrix} .$$

Як бачимо, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 200$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 210$. Отже, вводимо фіктивного виробничника P_5, $a_5 = 10$, $c_{5j} = 0$, $j = 1,2,3,4$ (таблиця 2.9). Одержану збалансовану *ТЗЛП* розв'язуємо методом потенціалів. На останній ітерації транспортна таблиця набуває вигляду

Таблиця 2.9

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	**a**
P_1	**30** 1	9	7	2	30
P_2	3	**40** 1	5	5	40
P_3	6	8	3	**70** 4	70
P_4	**5** 2	**30** 3	**25** 1	**0** 3	60
P_5	0	**10** 0	0	0	10
b	35	80	25	70	

Звідси маємо оптимальний розв'язок вихідної *ТЗЛП*:

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{Vmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 5 & 30 & 25 & 0 \end{Vmatrix}, \quad L(\boldsymbol{x}^*) = 475 .$$

При цьому споживачеві Q_2 недопоставляється *10* одиниць продукції.

Приклад 2.3. *Розв'язати ТЗЛП:* $\boldsymbol{a} = (30, 70, 50)$, $\boldsymbol{b} = (10, 40, 20, 60)$,

$$\boldsymbol{c} = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 \end{Vmatrix} .$$

Оскільки $a_1 + a_2 + a_3 = 150$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 130$, то вводиться фіктивний споживач Q_5, $b_5 = 20$, $c_{i5} = 0$, $i = 1, 2, 3$ (таблиця 2.10). Збалансована *ТЗЛП* розв'язується методом потенціалів. На останній ітерації транспортна таблиця набуває вигляду

Таблиця 2.10

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	**a**
P_1	**10** 2	7	**20** 3	6	0	30
P_2	9	**40** 4	**0** 5	**10** 7	**20** 0	70
P_3	5	7	6	**50** 2	0	50
b	10	40	20	60	20	

Оптимальний розв'язок вихідної *ТЗЛП* має вигляд

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{Vmatrix} 10 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \end{Vmatrix}, \quad L(\boldsymbol{x}^*) = 410 .$$

При цьому у виробника P_2 залишається *20* одиниць нереалізованої продукції.

§ 6. Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями. Метод потенціалів

ТЗЛП з обмеженими пропускними спроможностями (*ТЗЛПО*) *будемо називати ЗЛП вигляду:*

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{2.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{2.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.17}$$

$$0 \le x_{ij} \le r_{ij}, \; i = 1,\ldots,m, \; j = 1,\ldots,n, \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{2.19}$$

Як бачимо, ця задача відрізняється від звичайної *ТЗЛП* наявністю обмеження $x_{ij} \le r_{ij}$ на пропускну спроможність комунікації $P_i Q_j$, $i = 1,...m$, $j = 1,...n$. Це призводить до необхідності внести належні зміни у відповідні означення та твердження.

Означення 2.6. *Допустимий розв'язок* $\boldsymbol{x} = \| x_{ij} \|$, $i = 1,...m$, $j = 1,...n$, *ТЗЛПО називається базисним, якщо його перевезенням* x_{ij}, *таким, що* $0 < x_{ij} < r_{ij}$, *відповідає система лінійно незалежних векторів умов* $\boldsymbol{A}_{ij}$. *Якщо число перевезень* x_{ij}: $0 < x_{ij} < r_{ij}$, *дорівнює* $m + n - 1$, *то базисний розв'язок* $\boldsymbol{x}$ *називається невиродженим, якщо ж число таких компонент менше ніж* $m + n - 1$, *то — виродженим.*

Теорема 2.4 (двоїстий критерій оптимальності для *ТЗЛПО*). *Базисний розв'язок* $\boldsymbol{x} = \| x_{ij} \|$, $i = 1,...m$, $j = 1,...n$, *оптимальний тоді і лише тоді, коли існують потенціали* u_i, $i = 1,...,m$, v_j, $j = 1,...n$, *такі, що для симплекс-різниць*

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$$

виконуються співвідношення

$$\Delta_{ij} = 0, \text{ якщо } x_{ij} \text{ — базисне}, \tag{2.20}$$

$$\Delta_{ij} \ge 0, \text{ якщо } x_{ij} \text{ — небазисне та } x_{ij} = 0, \tag{2.21}$$

$$\Delta_{ij} \le 0, \text{ якщо } x_{ij} \text{ — небазисне та } x_{ij} = r_{ij}. \tag{2.22}$$

В останньому поняття та твердження для *ТЗЛПО* такі ж, як і для звичайної *ТЗЛП*.

На основі сформульованого критерію будується метод потенціалів розв'язування *ТЗЛПО*. Він полягає ось у чому.

1. Нехай є відомим початковий базисний розв'язок *ТЗЛПО*. Зауважимо, що на відміну від звичайної *ТЗЛП* цей розв'язок може і не існувати, наприклад, якщо для деякого *i* виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} < a_i .$$

Крім того, у випадку його існування процедура його знаходження є досить складною. Про це йтиме мова трохи нижче.

2. Знаходимо потенціали u_i та v_j як розв'язок системи

$$v_j - u_i = c_{ij}, \qquad (i,j): x_{ij} \text{ — базисне перевезення},$$

що містить $m+n-1$ рівнянь та $m+n$ невідомих. Покладаючи один із потенціалів рівним, наприклад, *0*, знаходимо решту невідомих.

Зрозуміло, що при цьому симплекс-різниці Δ_{ij} для базисних змінних рівні *0*, тобто виконується умова (2.20). Якщо при цьому виконуються умови (2.21) та (2.22), то базисний розв'язок $\boldsymbol{x} = \|x_{ij}\|$, $i=1,...m$, $j=1,...n$, є оптимальним розв'язком *ТЗЛПО*. Інакше базисний розв'язок $\boldsymbol{x}$ можна поліпшити на наступному кроці.

3.1. Нехай існує клітинка (i_0,j_0) така, що $x_{i_0j_0} = 0$, $\Delta_{i_0j_0} < 0$.

Як і у звичайній *ТЗЛП*, будуємо цикл **C**, що відповідає клітинці (i_0,j_0), розбиваємо його на додатний $\mathbf{C}^+$ та від'ємний $\mathbf{C}^-$ півцикли.

Знаходимо

$$\theta' = \min_{i,j:(i,j)\in \mathbf{C}^-} x_{ij},$$

$$\theta'' = \min_{i,j:(i,j)\in \mathbf{C}^+} (r_{ij} - x_{ij}),$$

$$\theta = \min\{\theta', \theta''\}.$$

Зрозуміло, що у невиродженому випадку $\theta > 0$. Будуємо новий розв'язок $\boldsymbol{x}' = \|x'_{ij}\|$, $i=1,...m$, $j=1,...n$, згідно співвідношень

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{якщо } (i,j) \notin \mathbf{C}, \\ x_{ij} + \theta, & \text{якщо } (i,j) \in \mathbf{C}^+, \\ x_{ij} - \theta, & \text{якщо } (i,j) \in \mathbf{C}^-. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Легко бачити, що $\boldsymbol{x}'$ — допустимий розв'язок. Можна довести також, що $\boldsymbol{x}'$ — базисний розв'язок. При цьому $L(\boldsymbol{x}') = L(\boldsymbol{x}) + \theta\Delta_{i_0j_0}$, тобто $L(\boldsymbol{x}') < L(\boldsymbol{x})$ у невиродженому випадку.

3.2. Нехай існує клітинка (i_0,j_0) така, що $x_{i_0j_0} = r_{i_0j_0}$, $\Delta_{i_0j_0} > 0$. Як і раніше будуємо цикл **C**, що відповідає клітинці (i_0,j_0), розбиваємо його на додатний $\mathbf{C}^+$ та від'ємний $\mathbf{C}^-$ півцикли, включаючи на цей раз клітинку (i_0,j_0) до $\mathbf{C}^-$. Знаходимо

$$\theta' = \min_{i,j:(i,j)\in \mathbf{C}^-} x_{ij},$$

$$\theta'' = \min_{i,j:(i,j)\in \mathbf{C}^{+}} (r_{ij} - x_{ij}),$$

$$\theta = \min\{\theta', \theta''\}.$$

Зрозуміло, що у невиродженому випадку $\theta > 0$. Згідно співвідношень (2.23) будується новий допустимий розв'язок $\boldsymbol{x}'$ *ТЗЛПО*, при цьому

$$L(\boldsymbol{x}') = L(\boldsymbol{x}) - \theta\Delta_{i_0 j_0},$$

тобто у невиродженому випадку знову забезпечується зменшення цільової функції.

Після цього повертаємося до виконання пункту 2.

Зауважимо, що у випадку виродженого базисного розв'язку до числа базисних включаються клітинки, де $x_{ij} = 0$ або $x_{ij} = r_{ij}$, але так, щоб у сукупності всі базисні клітинки не утворювали циклу.

Тепер зупинимося на побудові початкового базисного розв'язку *ТЗЛПО*.

Пошук початкового базисного розв'язку *ТЗЛПО* (якщо він існує) розбивається на два етапи.

І етап.

1) Знаходимо мінімальний елемент $c_{i_1 j_1}$ матриці $\boldsymbol{c} = \|c_{ij}\|$, $i = 1,...m$, $j = 1,...n$.

2) Обчислюємо $x_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}, r_{i_1 j_1}\}$. При цьому можливі три випадки:

а) $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$. Покладемо $x_{i_1 j} = 0$, $j \neq j_1$, рядок i_1 матриці $\boldsymbol{c}$ з подальшого розгляду вилучається;

б) $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$. Покладемо $x_{i j_1} = 0$, $i \neq i_1$, стовпець j_1 матриці $\boldsymbol{c}$ надалі не розглядається;

в) $x_{i_1 j_1} = r_{i_1 j_1}$ $(r_{i_1 j_1} < a_{i_1}, r_{i_1 j_1} < b_{j_1})$. У цьому випадку з подальшого розгляду вилучається лише елемент $c_{i_1 j_1}$ матриці $\boldsymbol{c}$.

3) Покладемо $a_{i_1} = a_{i_1} - x_{i_1 j_1}$, $b_{j_1} = b_{j_1} - x_{i_1 j_1}$.

Подальші кроки цього етапу полягають у виконанні дій 1, 2, 3 стосовно невикреслених елементів матриці $\boldsymbol{c}$ і продовжуються до остаточного заповнення транспортної таблиці.

Таблиця 2.11

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}^1$	$\boldsymbol{a}^2$	$\boldsymbol{a}^3$	$\boldsymbol{a}^4$	$\boldsymbol{a}^5$	$\boldsymbol{a}^6$	$\boldsymbol{a}^7$
P_1	$_{3}3^{1}$	$_{1}0^{4}$	$_{2}2^{2}$	$_{1}0^{5}$	6	3	3	3	3	3	1	1
P_2	$_{1}0^{2}$	$_{1}1^{1}$	$_{1}0^{4}$	$_{2}2^{1}$	3	3	2	2	0	0	0	0
P_3	$_{2}1^{3}$	$_{1}1^{2}$	$_{1}1^{1}$	$_{1}0^{3}$	3	3	3	2	2	1	1	0
$\boldsymbol{b}$	4	2	4	2	12							
$\boldsymbol{b}^1$	1	2	4	2								
$\boldsymbol{b}^2$	1	1	4	2								
$\boldsymbol{b}^3$	1	1	3	2								
$\boldsymbol{b}^4$	1	1	3	0								

b^5	1	0	3	0
b^6	1	0	1	0
b^7	0	0	1	0

Приклад 2.4. Перший етап знаходження початкового базисного розв'язку *ТЗЛПО* ілюструється таблицею 2.11 (у нижньому лівому кутові клітинок транспортної таблиці записуються величини r_{ij}). На перших трьох кроках викреслюються відповідно елементи c_{11}, c_{22} та c_{33} матриці $\boldsymbol{c}$, на четвертому — другий рядок та четвертий стовпець, на п'ятому — другий стовпець, на шостому — елемент c_{13}, на сьомому — перший стовпець та третій рядок. Отже, ми одержали матрицю $\boldsymbol{x} = \|x_{ij}\|$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$. За побудовою маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \quad 0 \le x_{ij} \le r_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Нехай

$$x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \ i = 1,\ldots,m, \quad x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \ j = 1,\ldots,n.$$

Якщо $x_{i,n+1} = x_{m+1,j} = 0$, $i = 1,...m$, $j = 1,...n$, то, очевидно, $\boldsymbol{x}$ є допустимим розв'язком *ТЗЛПО*. Інакше

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = \omega > 0$$

і для одержання початкового допустимого розв'язку слід провести на другому етапі декілька ітерацій методу потенціалів для допоміжної розширеної *ТЗЛПО*.

II етап.

Розширена *ТЗЛПО* наведена в таблиці 2.12.

Таблиця 2.12

	Q_1	...	Q_j	...	Q_n	Q_{n+1}	**a**
P_1	c_{11} x_{11} r_{11}	...	c_{1j} x_{1j} r_{1j}	...	c_{1n} x_{1n} r_{1n}	M $x_{1,n+1}$ ∞	a_1
. . .	. . .	...	. . .	...	. . .	. . .	. . .
P_i	c_{i1} x_{i1} r_{i1}	...	c_{ij} x_{ij} r_{ij}	...	c_{in} x_{in} r_{in}	M $x_{i,n+1}$ ∞	a_i
. . .	. . .	...	. . .	...	. . .	. . .	. . .
P_m	c_{m1} x_{m1} r_{m1}	...	c_{mj} x_{mj} r_{mj}	...	c_{mn} x_{mn} r_{mn}	M $x_{m,n+1}$ ∞	a_m
P_{m+1}	M $x_{m+1,1}$ ∞	...	M $x_{m+1,j}$ ∞	...	M $x_{m+1,n}$ ∞	0 $x_{m+1,n+1}=0$ ∞	$a_{m+1}=\omega$
b	b_1	...	b_j	...	b_n	$b_{n+1}=\omega$	

Тут M — число, більше будь-якої фіксованої величини, з якою його прийдеться порівнювати при розв'язуванні задачі. Матриця $\bar{\boldsymbol{x}} = \|x_{ij}\|$, $i = 1,...,m+1$, $j = 1,...,n+1$, де x_{ij} — перевезення, знайдені на першому етапі, $x_{m+1,n+1} = 0$, очевидно, є допустимим розв'язком розширеної *ТЗЛПО*. Дійсно,

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \; i = 1,\dots,m, \quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \; j = 1,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1,j} = \omega, \quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1} = \omega,$$

$$0 \le x_{ij} \le r_{ij}, \; i = 1,\dots,m+1, \; j = 1,\dots,n+1.$$

Застосовуючи до цієї задачі викладений вище метод потенціалів, знаходимо її розв'язок $\bar{\boldsymbol{x}}^*$. При цьому $x^*_{m+1,n+1} = \omega$ або $x^*_{m+1,n+1} < \omega$. Можна показати, що у першому випадку перевезення між пунктами P_i та Q_j, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, одержаного розв'язку $\bar{\boldsymbol{x}}^*$ утворюють початковий базисний розв`язок вихідної *ТЗЛПО*, а у другому випадку вихідна *ТЗЛПО* не має жодного допустимого розв'язку. Зауважимо, що другий етап можна закінчити при $x_{m+1,n+1} = \omega$.

Приклад 2.5. Продовжимо знаходження початкового базисного розв'язку *ТЗЛПО*, дані для якої наведені в таблиці 2.11. Розглядаємо розширену *ТЗЛПО* (див. таблицю 2.13).

Таблиця 2.13

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	***a***	***u***
P_1	$_{3}$ 3 ^{1}	$_{1}$ 0 ^{4}	$_{2}$ 2 ^{2}	$_{1}$ **0** ^{5}	$_{\infty}$ **1** ^{M}	6	0
P_2	$_{1}$ 0 ^{2}	$_{1}$ 1 ^{1}	$_{1}$ 0 ^{4}	$_{2}$ **2** ^{1}	$_{\infty}$ 0 ^{M}	3	4
P_3	$_{2}$ **1** ^{3}	$_{1}$ **1** ^{2}	$_{1}$ 1 ^{1}	$_{1}$ 0 ^{3}	$_{\infty}$ 0 ^{M}	3	2M–3
P_4	$_{\infty}$ **0** ^{M}	$_{\infty}$ 0 ^{M}	$_{\infty}$ **1** ^{M}	$_{\infty}$ 0 ^{M}	$_{\infty}$ **0** ^{0}	1	M
b	4	2	4	2	1	13	
v	2M	2M–1	2M	5	M		

Як бачимо, лише три перевезення $\bar{x}_{15}, \bar{x}_{31}, \bar{x}_{43}$ задовольняють умову $0 < \bar{x}_{ij} < r_{ij}$, тобто є базисними. Доповнюємо їх необхідною кількістю перевезень $\bar{x}_{ij} = 0$ та $\bar{x}_{ij} = r_{ij}$, які розглядаємо як базисні (загальна кількість базисних змінних — 8). Зауважимо, що до числа базисних слід вводити в першу чергу клітинки, які пов'язані з фіктивними пунктами. У таблиці 2.13 базисні змінні виділено.

Знаходимо потенціали u_i та v_j так, щоб для базисних клітинок виконувалась умова $v_j - u_i = c_{ij}$, і заносимо їх у таблицю 2.13.

Обчислюємо симплекс-різниці $\Delta_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$ для небазисних змінних $\overline{x}_{ij}$ і записуємо їх заради зручності в окрему матрицю (звичайно вони заносяться у верхні ліві кути клітинок транспортної таблиці):

$$\begin{Vmatrix} 1-2M & 5-2M & 2-2M & 0 & 0 \\ 6-2M & 6-2M & 8-2M & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2M-5 & 2M-3 \\ 0 & 1 & 0 & 2M-5 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Аналізуючи одержані Δ_{ij}, приходимо до висновку, що для небазисних r-клітинок ($\overline{x}_{ij} = r_{ij}$) $(1,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,3)$ критерій оптимальності ($\Delta_{ij} \le 0$) виконується, якщо M — досить велике число. Для небазисних 0-клітинок ($\overline{x}_{ij} = 0$) $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$ критерій оптимальності ($\Delta_{ij} \ge 0$) не виконується. Одну з них слід увести до числа базисних. Як і в звичайній *ТЗЛП* до числа базисних уводиться небазисна змінна з мінімальною симплекс-різницею. Уведемо до числа базисних змінну $\overline{x}_{23}$. Для цього методом викреслювання будуємо цикл, що відповідає клітинці $(2,3)$ (див. рис. 2.3).

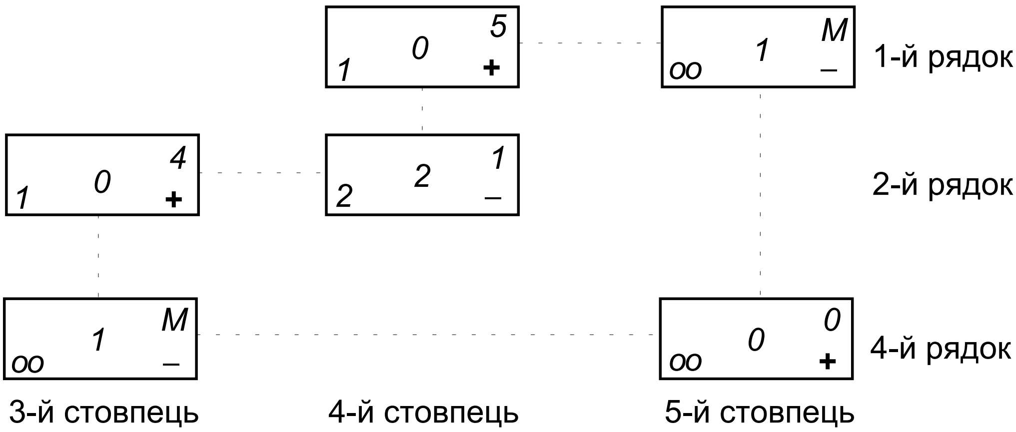


Рис. 2.3

Очевидно, що має місце випадок 3.1 описаного вище алгоритму.

Позначаючи клітинки циклу знаками "**+**" та "**–**", як показано на рисунку, знаходимо $\theta' = \min(1,1,2) = 1$, $\theta'' = \min(1-0,\ 1-0,\ \infty-0) = 1$, $\theta = \min(1,1) = 1$.

Тепер перераховуємо $\overline{\boldsymbol{x}}$ в $\overline{\boldsymbol{x}}'$ згідно формул (2.23). Допустимий розв'язок $\overline{\boldsymbol{x}}'$ буде мати вигляд

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\overline{x}_{45} = 1 = \omega$, то початковий базисний розв'язок вихідної *ТЗЛПО* має вигляд

$$\boldsymbol{x} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Далі вихідна *ТЗЛПО* розв'язується методом потенціалів. Пропускаючи відповідні обчислення, вкажемо, що її оптимальний розв'язок задається матрицею

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При цьому транспортні витрати складають $L(\boldsymbol{x}^*) = 23$.

Розділ 3. Потоки на мережі

§ 1. Постановка задачі

Задачі про потік на мережі є більш загальними, ніж розглянуті вище *ТЗЛП*. Перш ніж сформулювати такі задачі, наведемо деякі означення.

Графом називається впорядкована пара $\boldsymbol{g} = \{I, U\}$, де $I = \{i, j, ...\}$ — непорожня множина *вершин*, $U = \{(i, j): i, j \in I\}$ — множина впорядкованих пар, що називаються *дугами*. При цьому вершина i дуги (i, j) називається її *початком*, а j — її *кінцем*.

Геометрично граф зображується точками (множина вершин I) та лініями зі стрілками (множина дуг U), що з'єднують деякі пари цих точок. На рис. 3.1 зображено граф, для якого

$$I = \{1,2,3,4,5\},\ U = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,4),(4,3),(4,5),(5,2)\}.$$

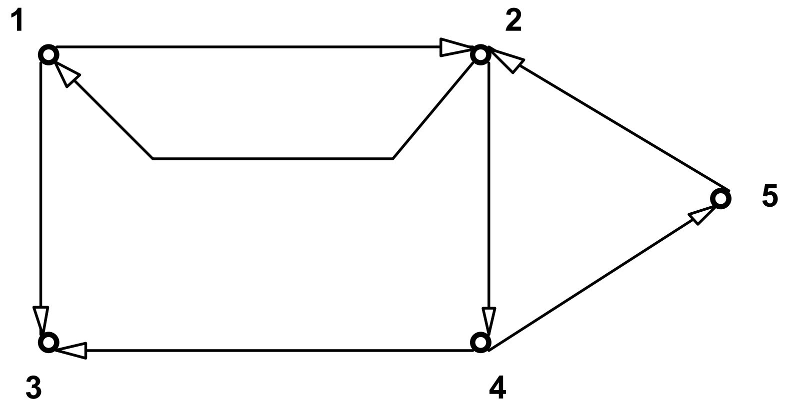


Рис. 3.1

Вище наведене означення *орієнтованого графа*, коли суттєвою є орієнтація зв'язку між вершинами. Якщо ж орієнтація зв'язку є несуттєвою, то від понять "дуга" та "орієнтований граф" переходять до понять "ребро" та "неорієнтований граф". Точніше, *неорієнтованим графом* називається впорядкована пара $\boldsymbol{g} = \{I, U\}$, де I — множина вершин, а U — множина невпорядкованих пар $[i, j]$, де $i, j \in I$, що називаються *ребрами*. Геометрично ребра зображуються лініями, що з'єднують відповідні вершини.

Граф $\boldsymbol{g}$ називається *скінченним*, якщо скінченними є множини I та U.

Шляхом на графі $\boldsymbol{g}$ називається послідовність дуг $u_1,...,u_m$ $(u_s = (i_s, j_s),$ $s = 1,...,m)$, початок кожної з яких, починаючи з другої, співпадає з кінцем попередньої, тобто $i_{s+1} = j_s$, $s = 1,...,m-1$. Зрозуміло, що шлях, який з'єднує вершини i_1 та i_t можна задати послідовністю вершин, через які він проходить. На рис. 3.1 послідовність дуг $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,5)$ формує шлях, що з'єднує вершини *1* та *5*. Цей же шлях можна задати послідовністю вершин $(1, 2, 4, 5)$.

Ланцюгом на графі $\boldsymbol{g}$ називається послідовність ребер $u_1,\ldots,u_m$ ($u_s = [i_s, j_s]$, $s = 1,\ldots,m$), в якій у кожного ребра, починаючи з другого, одна з вершин співпадає з однією з вершин попереднього, а друга — з якою-небудь вершиною наступного ребра. На рис. 3.1 ребра $[1,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$ утворюють ланцюг, який можна задати і послідовністю вершин $[1, 3, 4, 5]$.

Якщо початкова вершина шляху (ланцюга) співпадає з кінцевою, то маємо *контур* (*цикл*).

Зауважимо, що в *ТЗЛП* уже зустрічалися деякі з розглянутих понять. Там дуга звалася комунікацією, ланцюг — маршрутом, а цикл — замкненим маршрутом.

Мережею називається граф, елементам якого поставлені у відповідність деякі параметри. *Елементами графа* вважаються його вершини, дуги, або більш складні конструкції, утворені з вказаних елементарних.

Побудуємо мережу таким чином:

1) кожній вершині $i \in I$ поставимо у відповідність число d_i, що називається її *інтенсивністю*. Вершина *i* називається *джерелом*, якщо $d_i > 0$, *стоком*, якщо $d_i < 0$, і *нейтральною*, якщо $d_i = 0$;

2) кожній дузі $(i,j) \in U$ поставимо у відповідність числа r_{ij} та c_{ij}, що називаються, відповідно, *функцією пропускної спроможності* та *функцією вартості*.

На практиці величини d_i часто інтерпретуються як об'єми виробництва ($d_i > 0$) або споживання ($d_i < 0$) деякого однорідного продукту в пункті (вершині) *i*. Величина r_{ij} визначає пропускну спроможність дуги (комунікації) (i,j), а величина c_{ij}, наприклад, собівартість транспортних перевезень по дузі (i,j).

Потоком (однорідним) в одержаній мережі називається сукупність величин x_{ij}, $(i,j) \in U$, що задовольняють умовам:

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in U} x_{ki} = d_i,\ i \in I, \tag{3.1}$$

$$0 \le x_{ij} \le r_{ij},\ (i,j) \in U. \tag{3.2}$$

Співвідношення (3.1) називаються *рівняннями збереження*, або *рівняннями неперервності*. Фізично вони означають, що різниця між величиною потоку, що виходить з вершини *i* та величиною потоку, що входить до неї, дорівнює її інтенсивності (рис. 3.2).

$$\sum_{k:(k,i)\in U} x_{ki} \quad \left.\begin{matrix}\to\\ \to\\ \to\end{matrix}\right\} \quad d_i \quad \left.\begin{matrix}\to\\ \to\\ \to\end{matrix}\right\} \quad \sum_{j:(i,j)\in U} x_{ij}$$

Рис. 3.2

Нехай $V \subset I$. Множина $U(V)$ дуг (i,j) таких, що $i \in V$, $j \notin V$, називається *розрізом мережі*, тобто $U(V) = \{(i,j) \in U : i \in V, j \notin V\}$.

Величина

$$r(V) = \sum_{(i,j) \in U : i \in V, j \notin V} r_{ij}$$

називається *пропускною спроможністю розрізу* $U(V)$.

Загальні умови існування потоку на мережі встановлюються такою теоремою, яку ми приводимо без доведення.

Теорема 3.1. *Для того, щоб на мережі існував потік, необхідно і достатньо, щоб $d(I) = 0$ і для довільної множини $V \subset I$ виконувалась умова $d(V) \le r(V)$, де*

$$d(V) = \sum_{i \in V} d_i \ .$$

Іншими словами, потік на мережі існує тоді і лише тоді, коли сумарна інтенсивність всіх вершин мережі дорівнює нулю, а сумарна інтенсивність будь-якої підмножини вершин не перевищує пропускної спроможності розрізу мережі, що породжується цією підмножиною.

Кожному потоку $\boldsymbol{x} = \{x_{ij}, (i,j) \in U\}$ поставимо у відповідність *цільову функцію*

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \, .$$

Лінійна задача на мережі (або задача про оптимальний потік на мережі) полягає у пошуку допустимого потоку $\boldsymbol{x}$ *на мережі, що мінімізує цільову функцію* $L(\boldsymbol{x})$*, тобто*

$$\left.\begin{array}{l} L(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \to \min \, , \\ \sum\limits_{j : (i,j) \in U} x_{ij} - \sum\limits_{k : (k,i) \in U} x_{ki} = d_i \, , \ i \in I, \\ 0 \le x_{ij} \le r_{ij} \, , \ (i,j) \in U . \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Допустимий потік $\boldsymbol{x}$ називається *оптимальним*, якщо він доставляє мінімальне значення функції $L(\boldsymbol{x})$.

Очевидно, що задача про оптимальний потік на мережі є частинним випадком *ЗЛП* і, отже, може бути розв'язана загальними методами лінійного програмування. Зрозуміло, що специфіка цієї задачі може суттєво використовуватися при розробці частинних, більш ефективних методів її розв'язування.

§ 2. Задача про найкоротший шлях. Метод Мінті

Розглянемо мережу, що визначається графом $\boldsymbol{g}$, з означеною на U функцією вартості c_{ij}. Розглянемо також дві фіксовані вершини i_1, i_s графа $\boldsymbol{g}$ та довільний шлях, що з'єднує i_1 та i_s:

$$l = l(i_1, i_s) = ((i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{s-1}, i_s)) = (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{s-1}, i_s), \tag{3.4}$$

де $i_t \in I$, $t = \{1, .., s\}$.

Розглянемо функцію

$$C(l) = \sum_{t=1}^{s-1} c_{i_t i_{t+1}}, \tag{3.5}$$

яка інтерпретується або як собівартість перевезення вантажу по шляху l, або як довжина шляху l. В останньому випадку c_{ij} — довжина дуги $(i,j) \in U$.

Задача про найкоротший шлях (про вибір найбільш економного шляху) полягає в пошуку шляху (3.4), що мінімізує цільову функцію (3.5). Шуканий шлях $l^* = \arg\min C(l)$ *називається найкоротшим (оптимальним).*

З формальної точки зору сформульована задача є частинним випадком задачі про оптимальний потік. Для цього розглядається мережа, вершина i_1 якої є джерелом одиничної інтенсивності, вершина i_s — стоком одиничної інтенсивності, решта вершин — нейтральні.

Дугам приписуються необмежені пропускні спроможності, а собівартість перевезення по дузі дорівнює її довжині. Для потоку $\boldsymbol{x} = \{x_{ij}, (i,j) \in U\}$ у побудованій мережі

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in U} x_{ki} = \begin{cases} 1, & i = i_1, \\ -1, & i = i_s, \\ 0, & i = i_t, \quad t = 2,\ldots,s-1. \end{cases}$$

Задача зводиться до знаходження потоку, що мінімізує цільову функцію

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij}.$$

Легко зрозуміти, що для оптимального потоку $\boldsymbol{x}^* = \{x^*_{ij}, (i,j) \in U\}$ величини x^*_{ij} будуть рівними 1 або 0 в залежності від того, входить чи ні дуга (i,j) до найкоротшого шляху. Тому $L(\boldsymbol{x}^*)$ дорівнює довжині найкоротшого шляху, що з'єднує вершини i_1 та i_s.

Для розв'язання задачі про найкоротший шлях розроблені методи, що враховують її специфіку. Одним з них є *метод Мінті* (*метод позначок*). Згідно цього методу процес розв'язування задачі складається із скінченного числа елементарних кроків, на кожному з яких позначаються вершини мережі та виділяються деякі її дуги.

Метод Мінті

Крок 1. Позначається вершина i_1 (коренева вершина) позначкою $h_{i_1} = 0$, $I^{(1)} = \{i_1\}$ — множина позначених вершин.

Нехай після виконання r кроків є множина $I^{(r)} = \{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots\}$ позначених вершин i_λ, кожній з яких поставлена у відповідність позначка h_{i_λ}.

Крок (r+1). Розглянемо множину $J^{(r)} = \{\ldots,i_\mu,\ldots\}$ непозначених вершин i_μ: $(i_\lambda,i_\mu) \in U$, $i_\lambda \in I^{(r)}$, $i_\mu \in J^{(r)}$, $I^{(r)} \cap J^{(r)} = \varnothing$. Для кожної з таких дуг (i_λ, i_μ) знаходимо суму

$$h_{i_\lambda} + c_{i_\lambda i_\mu},$$

виділяємо ті дуги, для яких ця сума мінімальна. При цьому з декількох дуг, що підлягають виділенню і закінчуються в одній і тій же вершині, виділяється лише одна (рис. 3.3).

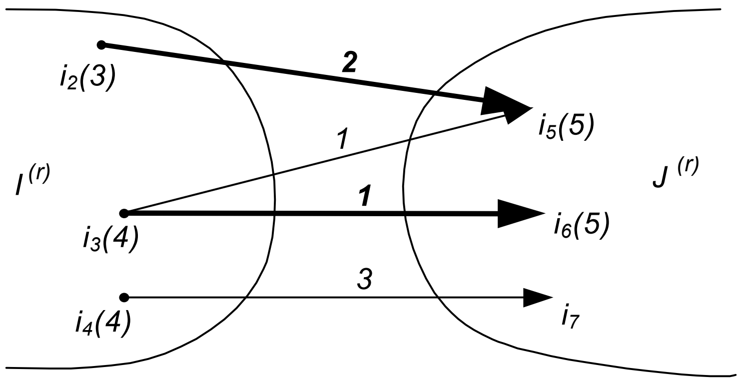


Рис. 3.3

Позначаємо кінці виділених дуг числом, що дорівнює мінімальному значенню $h_{i_\lambda} + c_{i_\lambda i_\mu}$. За рахунок позначених вершин множина $I^{(r)}$ розширюється до множини $I^{(r+1)}$.

Вказаний процес продовжується до тих пір, поки серед позначених не з'явиться вершина i_s, або подальше позначення неможливе.

За побудовою в кожній з позначених вершин (крім кореневої) закінчується одна виділена дуга. Тому рух від вершини i_s вздовж виділених дуг у напрямку, протилежному їх орієнтації, реалізується однозначно. Крім того, початок виділеної дуги позначається раніше її кінця. Отже, послідовність виділених дуг, утворена в процесі руху від вершини i_s, утворює деякий шлях $l^*(i_1, i_s)$ з початком в i_1 та кінцем в i_s.

Теорема 3.2. *Побудований методом Мінті шлях $l^*(i_1, i_s)$ є найкоротшим, що з'єднує вершини i_1 та i_s, причому $C(l^*(i_1, i_s)) = h_{i_s}$.*

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції за номером кроку t, на якому позначена вершина i_s. При $t = 1$ маємо $i_s = i_1$ і теорема справедлива. Нехай твердження теореми виконується при $t = r$. Це значить, що є множина $I^{(r)} = \{i_1,\ldots, i_\lambda,\ldots\}$ вершин, позначених не більше, ніж за r кроків і шлях $l^* = l(i_1, i_\lambda)$, $i_\lambda \in I^{(r)}$, — найкоротший з i_1 в i_λ, $C(l^*) = h_{i_\lambda}$. Доведемо, що твердження теореми виконується при $t = r+1$. Нехай вершина i_s позначена на $(r+1)$-у кроці. Покажемо, що шлях

$$(l^*(i_1, i_{s'}),\ (i_{s'}, i_s)) = l^*(i_1, i_s), \tag{3.6}$$

де $i_{s'} \in I^{(r)}$, $i_s \in I^{(r+1)} \setminus I^{(r)}$, причому

$$h_{i_{s'}} + c_{i_{s'} i_s} \le h_{i_\alpha} + c_{i_\alpha i_\beta}, \tag{3.7}$$

де i_α, i_β: $i_\alpha \in I^{(r)}$, $i_\beta \notin I^{(r)}$, є найкоротшим з i_1 в i_s.

Крім шляху $l^*(i_1, i_s)$, визначеного співвідношенням (3.6), розглянемо шлях $l(i_1, i_s)$, що проходить через вершини i_α та i_β $(\alpha \ne s')$, $i_\alpha \in I^{(r)}$ (див. рис. 3.4).

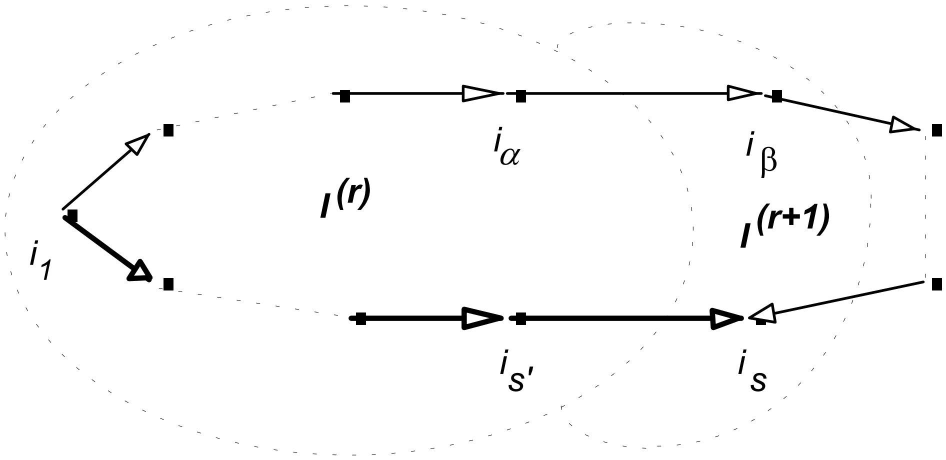


Рис. 3.4

Для довжин розглядуваних шляхів маємо такі оцінки:

$$C(I(i_1 i_s)) = C(I(i_1 i_\alpha)) + c_{i_\alpha\, i_\beta} + C(I(i_\beta\, i_s)) \geq$$

$$\geq h_{i_\alpha} + c_{i_\alpha\, i_\beta} \geq h_{i_{s'}} + c_{i_{s'}\, i_s} = C(I^*(i_1 i_s)),$$

де перша з нерівностей випливає з припущення індукції та $C(I(i_\beta, i_s)) \geq 0$, а друга — з співвідношення (3.7).

Зауваження.

1. Сформульований вище алгоритм методу Мінті розрахований на знаходження єдиного найкоротшого шляху, що з'єднує вершини i_1 та i_s. Щоб знайти всю множину найкоротших шляхів, на кожному кроці слід виділяти всі дуги (i_λ, i_μ) з мінімальним показником $h_{i_\lambda} + c_{i_\lambda\, i_\mu}$, навіть якщо декілька з них закінчуються в одній і тій же вершині. А при зворотному русі з вершини i_s вздовж виділених дуг у кожній з вершин слід розглядати всі можливі продовження.

2. Насправді метод Мінті розв'язує більш загальну задачу: він знаходить найкоротший шлях з кореневої в кожну з позначених вершин.

3. Якщо процес позначення вершин методом Мінті продовжувати до тих пір, поки не припиниться розширення множини позначених вершин, то буде розв'язана задача знаходження найкоротшого шляху з початкової вершини i_1 у кожну позначену. Якщо при цьому деяка вершина i_λ мережі не попала до числа позначених, то немає шляху з i_1 в i_λ.

Приклад 3.1. *Знайти найкоротший шлях з вершини 1 до решти вершин на мережі, зображеній на рис. 3.5.*

Крок 1. $h_1 = 0$, $I^{(1)} = \{1\}$.

Крок 2. Розглядаються дуги $(1,2)$, $(1,3)$, що виходять з множини $I^{(1)}$. Обчислюємо величини $h_1 + c_{12}$ та $h_1 + c_{13}$, тобто

$$h_1 + c_{12} = 0 + 3 = 3,$$

$$h_1 + c_{13} = 0 + 2 = 2.$$

Мінімальна з цих величин відповідає дузі $(1,3)$. Дуга $(1,3)$ виділяється, вершина 3 позначається числом 2 ($h_3 = 2$). $I^{(2)} = \{1,3\}$.

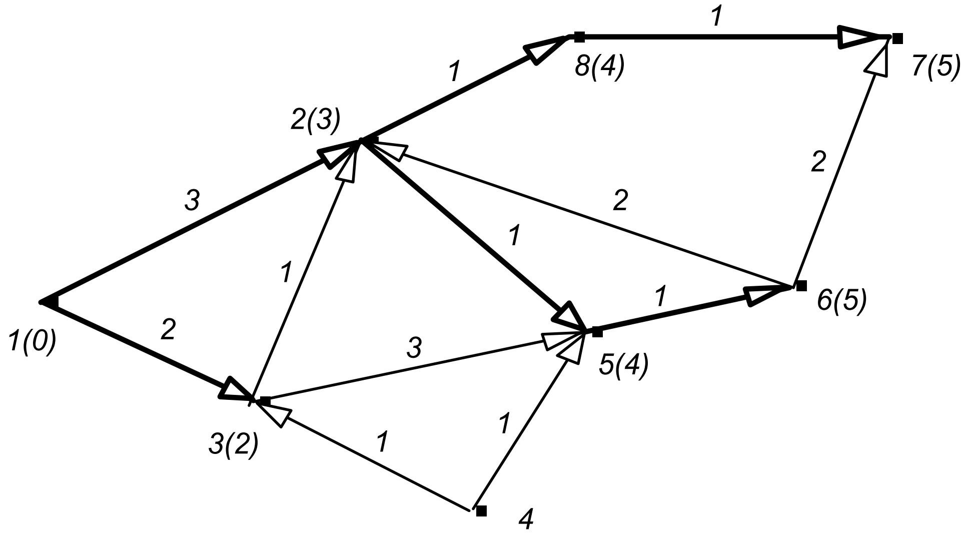


Рис. 3.5

<u>Крок 3</u>. Розглядаються дуги

$$(1,2) \to h_1 + c_{12} = 3,$$
$$(3,2) \to h_3 + c_{32} = 3,$$
$$(3,5) \to h_3 + c_{35} = 5.$$

Мінімальна з підрахованих величин відповідає дугам $(1,2)$, $(3,2)$. Виділимо дугу $(1,2)$, $h_2 = 3$, $I^{(3)} = \{1,2,3\}$.

<u>Крок 4</u>. Розглядаються дуги

$$(2,5) \to h_2 + c_{25} = 4,$$
$$(2,8) \to h_2 + c_{28} = 4,$$
$$(3,5) \to h_3 + c_{35} = 5.$$

Виділяємо дуги $(2,5)$, $(2,8)$, $h_5 = 4$, $h_8 = 4$, $I^{(4)} = \{1,2,3,5,8\}$.

<u>Крок 5</u>. Розглядаються дуги

$$(5,6) \to h_5 + c_{56} = 5,$$
$$(8,7) \to h_8 + c_{87} = 5.$$

Виділяємо дуги $(5,6)$, $(8,7)$, $h_6 = 5$, $h_7 = 5$, $I^{(5)} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

Подальше позначення вершин методом Мінті неможливе. Повна множина позначених вершин $I^* = \{1,2,3,5,6,7,8\}$. Серед позначених відсутня вершина *4*, тобто немає шляху з вершини *1* у вершину *4*.

Як приклад укажемо найкоротший шлях з вершини *1* у вершину *6*. Це шлях $l^*(1,6) = (1,2,5,6)$. Знаходиться він переглядом виділених дуг від вершини *6* до вершини *1*. При цьому $C(l^*(1,6)) = h_6 = 5$.

§ 3. Задача про максимальний потік. Метод Форда-Фалкерсона

Ця задача, як і задача про найкоротший шлях, є частинним випадком задачі про оптимальний потік. Із задачею про максимальний потік тісно пов'язана задача про мінімальний розріз мережі. Наведемо формулювання цих задач.

Розглянемо мережу, що визначається графом $\boldsymbol{g}$, яка має єдине джерело s, єдиний стік t та означену на множині U функцію пропускної спроможності r_{ij}. Нехай інтенсивність джерела $d_s = d$. За теоремою існування потоку на мережі інтенсивність стоку має бути рівною $d_t = -d$. Допустимий потік для розглядуваної мережі визначається співвідношеннями:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j:(s,j)\in U} x_{sj} = d, \\ \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x_{ij} - \sum\limits_{k:(k,i)\in U} x_{ki} = 0,\ i \neq s, i \neq t, \\ -\sum\limits_{k:(k,t)\in U} x_{kt} = -d, \\ 0 \le x_{ij} \le r_{ij},\ (i,j)\in U. \end{array}\right\} \qquad (3.8)$$

Задача про максимальний потік полягає у знаходженні максимального значення інтенсивності d, при якому в розглядуваній мережі існує потік. Потік $\boldsymbol{x}^* = \{x^*_{ij}, (i,j) \in U\}$, *що відповідає максимальному значенню* d^* *інтенсивності, називається максимальним потоком, а* d^* *— величиною цього потоку.*

Розглянемо описану вище мережу. *Розрізом мережі, що відокремлює s від t*, називається множина дуг $U(C) = \{(i,j)\in U:\ i\in C,\ j\notin C\}$, де C — деяка множина вершин ($C\subset I$) мережі, така, що $s\in C$, $t\notin C$.

Нагадаємо, що пропускна спроможність цього розрізу визначається звичайним чином:

$$r(C) = \sum_{(i,j)\in U(C)} r_{ij}.$$

Приклад 3.2. Розглянемо мережу, зображену на рис. 3.6, де вершина *1* є джерелом, а вершина *6* — стоком. Нехай $C = \{1, 2, 3\}$, тоді $U(C) = \{(2,4),(2,5),(3,5)\}$ — розріз, який відокремлює вершину *1* від вершини *6*, що відповідає вибраній множині *C*. Пропускна спроможність цього розрізу

$$r(C) = r_{24} + r_{25} + r_{35} = 5 + 2 + 1 = 8.$$

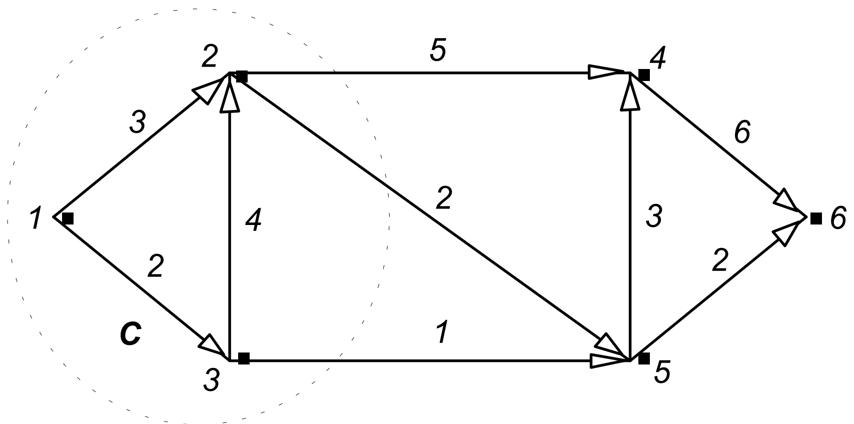


Рис. 3.6

Зрозуміло, що для кожної конкретної мережі вибір множини *C* повністю визначає пропускну спроможність розрізу. *Розріз, що має найменшу пропускну* *спроможність, називається мінімальним. Задача пошуку такого розрізу називається задачею про мінімальний розріз.*

Виявляється, що сформульовані задачі є двоїстими і, як слід чекати, їх розв'язки тісно пов'язані між собою.

Теорема 3.3 (Форда-Фалкерсона). *Величина максимального потоку із s в t дорівнює пропускній спроможності мінімального розрізу, що відокремлює s від t.*

Зауважимо, що теорема тривіальна, якщо мережа складається з вершин та дуг, що утворюють єдиний шлях від s до t (див. рис. 3.7).

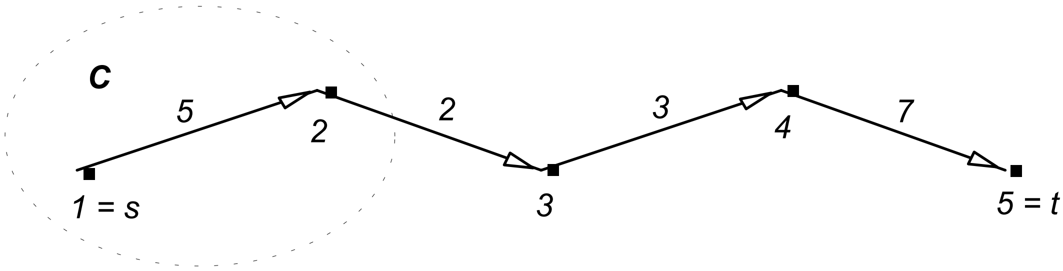


Рис. 3.7

У наведеному прикладі мінімальний розріз здійснює дуга $(2, 3)$. Її пропускна спроможність $r_{23} = 2$ визначає максимальну інтенсивність $d^* = 2$ допустимого для мережі потоку.

<u>Доведення</u>. Нехай $\boldsymbol{x}^* = \{x^*_{ij}, (i, j) \in U\}$ — максимальний потік на мережі, що визначається графом $\boldsymbol{g}$, d^* — величина максимального потоку. Нехай $U(C)$ — довільний розріз мережі, що відокремлює s від t, $r(C)$ — його пропускна спроможність. За теоремою існування потоку $d^* \le r(C)$. Нам необхідно показати, що існує така множина C^*, що

$$d^* = \min_{C:\, C \subset I,\, s \in C,\, t \notin C} r(C) = r(C^*).$$

Множина C^*, що визначає мінімальний розріз, будується на основі потоку $\boldsymbol{x}^*$ таким чином:

$$s \in C^*,$$
$$\text{якщо } i \in C^* \text{ та } x^*_{ij} < r_{ij}, \text{ то } j \in C^*, \tag{3.9}$$
$$\text{якщо } i \in C^* \text{ та } x^*_{ki} > 0, \text{ то } i \in C^*.$$

Спочатку покажемо, що $t \notin C^*$. Від супротивного: нехай $t \in C^*$. Із означення (3.9) множини C^* випливає, що будь-які дві її вершини можна з'єднати ланцюгом. З'єднаємо вершини $s \in C^*$ та $t \in C^*$:

$$\mathbf{C} = [s = i_1, i_2, ..., i_m = t]. \tag{3.10}$$

Для цього ланцюга умови (3.9) можна переписати так:

$$\text{якщо для ребра } [\, i_k, i_{k+1} \,]\ (\, i_k, i_{k+1} \,) \in U, \text{ то } x^*_{i_k i_{k+1}} < r_{i_k i_{k+1}}, \tag{3.11}$$

$$\text{якщо для ребра } [\, i_k, i_{k+1} \,]\ (\, i_{k+1}, i_k \,) \in U, \text{ то } x^*_{i_{k+1} i_k} > 0. \tag{3.12}$$

Нехай

$$\mathbf{C}^+ = \{[\, i_k, i_{k+1} \,] \in \mathbf{C} : (\, i_k, i_{k+1} \,) \in U,\ x^*_{i_k i_{k+1}} < r_{i_k i_{k+1}}\},$$

$\mathbf{C}^- = \{[\, i_k, i_{k+1} \,] \in \mathbf{C} : (\, i_{k+1}, i_k \,),\ x^*_{i_{k+1} i_k} > 0\}.$

Покладемо

$$\theta_{\,i_k i_{k+1}} = \begin{cases} r_{i_k i_{k+1}} - x^*_{i_k i_{k+1}}, & [i_k i_{k+1}] \in \mathbf{C}^+, \\ x^*_{i_k i_{k+1}}, & [i_k i_{k+1}] \in \mathbf{C}^-. \end{cases}$$

Нехай

$$\theta = \min_{k=1,\dots,m-1} \theta_{\,i_k i_{k+1}}.$$

Зрозуміло, що $\theta > 0$. Змінимо потік вздовж ланцюга $\mathbf{C}$, збільшуючи його на θ уздовж ребер множини $\mathbf{C}^+$ і зменшуючи його на θ уздовж ребер множини $\mathbf{C}^-$. У результаті одержимо допустимий потік величини $d^* + \theta$, що суперечить припущенню про максимальність потоку $\boldsymbol{x}^*$. Отже $t \notin C^*$.

Покажемо, що $d^* = r(C^*)$. Із означення (3.9) множини C^* випливає, що

якщо $i \in C^*, j \notin C^*, (i,j) \in U$, то $x^*_{ij} = r_{ij}$,

якщо $i \in C^*, k \notin C^*, (k,i) \in U$, то $x^*_{ki} = 0$. (3.13)

Запишемо співвідношення (3.8) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ для $i \in C^*$

$$\sum_{j:(s,j)\in U} x^*_{sj} = d^*,$$

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x^*_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in U} x^*_{ki} = 0, \ i \neq s.$$

Підсумовуючи останні рівності по $i \in C^*$, маємо

$$\sum_{i,j:\, i\in C^*,\ (i,j)\in U} x^*_{ij} - \sum_{i,k:\, i\in C^*, (k,i)\in U} x^*_{ki} = d^*.$$

Розглядаючи випадки $j, k \in C^*$ та $j, k \notin C^*$, з останньої рівності маємо:

$$\sum_{i,j:\, i\in C^*,\ j\notin C^*,\ (i,j)\in U} x^*_{ij} + \sum_{i,j:\, i\in C^*,\ j\in C^*,\ (i,j)\in U} x^*_{ij} -$$

$$- \sum_{i,k:\, i\in C^*, k\in C^*, (k,i)\in U} x^*_{ki} - \sum_{i,k:\, i\in C^*, k\notin C^*, (k,i)\in U} x^*_{ki} = d^*.$$

Другий та третій доданки у цій рівності взаємно знищуються і, приймаючи до уваги (3.13), одержуємо

$$\sum_{i,j:\, i\in C^*,\ j\notin C^*,\ (i,j)\in U} r_{ij} = d^*,$$

або $r(C^*) = d^*$.

<u>Наслідок</u>. *Якщо дуга (i,j) входить до мінімального розрізу, то величина максимального потоку по цій дузі дорівнює її пропускній спроможності r_{ij}. При цьому кажуть, що потік насичує дугу.*

Для розв'язування задачі про максимальний потік *Фордом* та *Фалкерсоном* був розроблений метод, що носить їх ім'я.

Згідно теореми про максимальний потік та мінімальний розріз за відомим максимальним потоком $\boldsymbol{x}^* = \{x^*_{ij},\ (i,j) \in U\}$ легко побудувати мінімальний розріз $U(C^*)$ (див. співвідношення (3.9)). Крім того, якщо потік не є максимальним, то можливе його збільшення шляхом зміни потоку вздовж певного ланцюга. Ці факти лежать в основі *методу Форда-Фалкерсона*, що являє собою рекурентну процедуру, на кожному кроці якої позначаються вершини або будується потік більшої величини.

Алгоритм Форда-Фалкерсона розпочинає роботу з будь-якого допустимого потоку $\boldsymbol{x}^0$ (зокрема нульового) величини d^0. Згідно (3.9) для цього потоку визначається множина C^0. Якщо $t \notin C^0$, то потік $\boldsymbol{x}^0$ є максимальним, в іншому випадку можна знайти $\theta^0 > 0$ та новий потік $\boldsymbol{x}^1 = \{x^1_{ij},\ (i,j) \in U\}$ величини $d^1 = d^0 + \theta^0$. Для нового потоку цей цикл операцій повторюється і т. д.

Процеси визначення C^k та θ^k об'єднуються в один процес "розставлення позначок" вершин. Позначка $\mu(i)$ довільної вершини i складається з двох чисел N_i та θ_i. Ці числа означають, що вздовж деякого ланцюга, останнім ребром якого є $[|N_i|, i]$, можна додатково доставити θ_i одиниць потоку з вершини s до вершини i.

Дамо детальний виклад алгоритму, вважаючи, що відомий допустимий потік $\boldsymbol{x}$ (зокрема нульовий).

Алгоритм Форда-Фалкерсона

<u>Крок 1</u> (процес розставлення позначок). На цьому кроці кожна з вершин належить до одного з трьох типів:

- непозначена,
- позначена і непроглянута,
- позначена і проглянута.

Спочатку всі вершини непозначені.

Позначимо вершину s позначкою $\mu(s) = (+s, \theta_s = \infty)$, що означає: можна послати потік з вершини s у саму себе необмеженої величини.

Тепер вершина s позначена і непроглянута.

Взагалі, нехай j — позначена і непроглянута вершина, $\mu(j) = (+i, \theta_j)$ або $\mu(j) = (-i, \theta_j)$ — її позначка. Розглядаємо ще непозначені вершини k: $(j,k) \in U$ і $x_{jk} < r_{jk}$. Кожній з таких вершин приписуємо позначку $\mu(k) = (+j, \theta_k)$, де $\theta_k =$ $= \min\{\theta_j,\ r_{jk} - x_{jk}\}$. Розглядаємо ще непозначені вершини k: $(k,j) \in U$, і $x_{kj} > 0$. Кожна з таких вершин одержує позначку $\mu(k) = (-j, \theta_k)$, де $\theta_k = \min\{\theta_j,\ x_{kj}\}$.

Всі вершини k, які одержали позначки, тепер позначені і непроглянуті, а вершина j — позначена і проглянута.

Продовжуємо приписувати позначки непозначеним вершинам до тих пір, поки або вершина t виявиться позначеною, або не можна буде позначити жодної вершини і вершина t виявиться непозначеною.

У другому випадку існуючий потік $\boldsymbol{x}$ — максимальний, а множина позначених вершин C^* визначає мінімальний розріз мережі.

У першому випадку існуючий потік $\boldsymbol{x}$ на кроці 2 можна збільшити.

<u>Крок 2</u> (збільшення потоку). Нехай $\mu(t) = (+k, \theta_t)$, або $\mu(t) = (-k, \theta_t)$ — позначка вершини t. Це означає, що існуючий потік з s в t можна збільшити на

величину θ_t. Для цього в першому випадку замінюємо x_{kt} на $x_{kt}+\theta_t$, у другому — x_{tk} замінюємо на $x_{tk}-\theta_t$.

Переходимо до вершини k і виконуємо аналогічні операції, змінюючи величину потоку на ту ж величину θ_t. Продовжуємо ці дії, поки не досягнемо вершини s. Після цього ліквідовуємо позначки всіх вершин і переходимо до кроку 1.

Приклад 3.3. *Знайти максимальний потік з вершини 1 у вершину 8 на мережі, зображеній на рис. 3.8.*

Процес розв'язування задачі продовжується на рисунках 3.9–3.10. Біля кожної з дуг вказані величини x_{ij} (r_{ij}), тобто потік, що проходить через цю дугу та її пропускна спроможність.

Множина C^*, що визначає мінімальний розріз, має вигляд $C^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Величина максимального потоку $d^* = 2$.

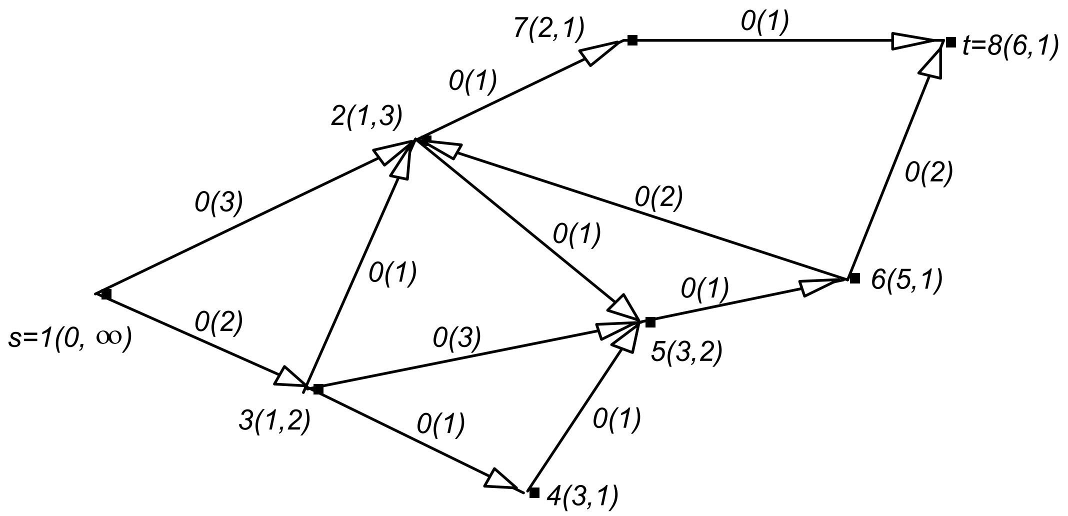


Рис. 3.8

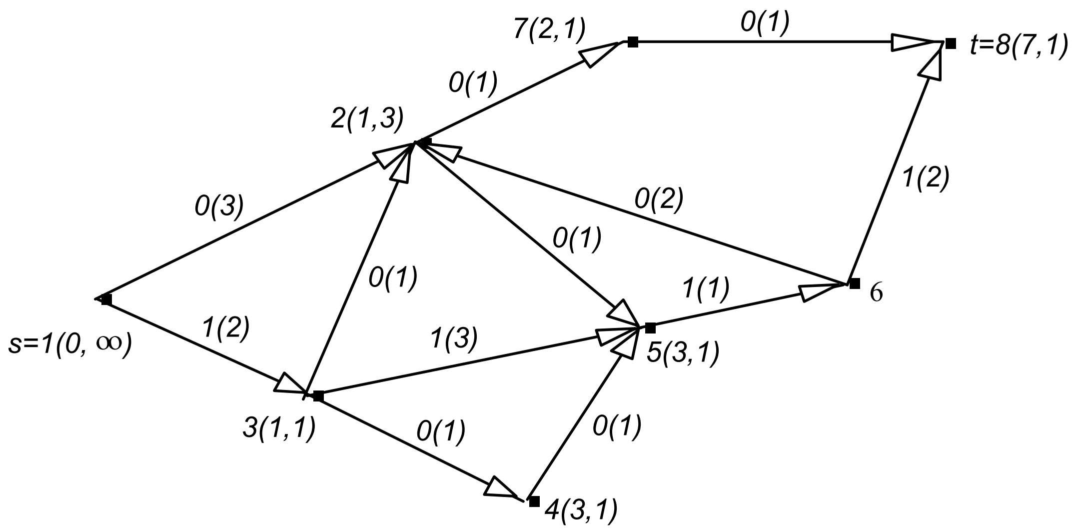


Рис. 3.9

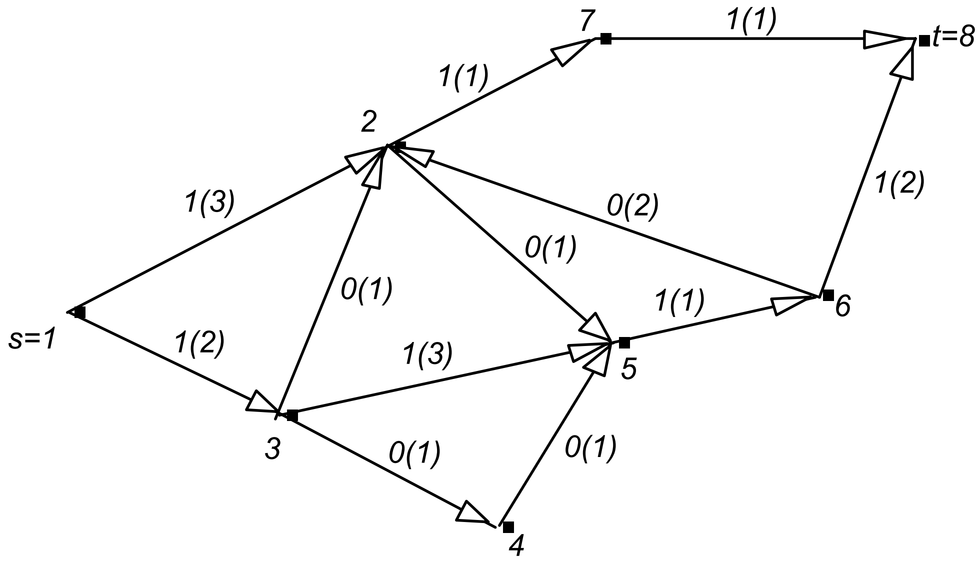


Рис. 3.10

Розділ 4. Дискретне програмування

§ 1. Постановки задач

На практиці часто виникають задачі вибору оптимальних рішень дискретного характеру. При цьому розрізняють задачі комбінаторного типу, допустима множина яких має скінченну кількість точок, задачі цілочисельного програмування, де змінні приймають цілочисельні значення, та задачі частково дискретного програмування, в яких лише частина змінних приймає дискретні значення.

Розглянемо декілька прикладів.

1) Задача про оптимальні призначення

Є n видів робіт та n кандидатів (виконавців) для їх виконання. Вважається, що кожен з кандидатів $i = 1,\dots,n$ може виконувати будь-яку роботу $j = 1,\dots,n,$ при цьому c_{ij} — витрати, пов'язані з призначенням i-го кандидата на j-й вид роботи. Необхідно розподілити кандидатів на виконання робіт таким чином, щоб кожен з кандидатів одержав єдине призначення, кожна з робіт одержала єдиного виконавця і сумарні витрати, пов'язані з призначеннями, були мінімальними.

Це типова комбінаторна задача. Її розв'язком є деяке переставлення чисел $1,\dots,n$. Число переставлень дорівнює $n!$, тому при великих n розв'язати цю задачу шляхом прямого перебирання усіх можливих переставлень неможливо. Однак розглядувану задачу можна записати у вигляді *ЗЛП* з цілочисельними змінними. Дійсно, нехай $x_{ij} = 1$, якщо i-й виконавець призначається на j-у роботу, та $x_{ij} = 0$ у противному разі. Тоді математична модель задачі про оптимальні призначення приймає таку форму:

Знайти матрицю $\boldsymbol{X} = \|x_{ij}\|$, $i, j = 1,\dots,n$, що мінімізує цільову функцію

$$L(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

при виконанні обмежень

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,\dots,n,$$

$$x_{ij} = 0 \text{ або } 1,\ i, j = 1,\dots,n.$$

2) Задача про ранець

Мандрівник, збираючись у похід, має упакувати у ранець деякі з n предметів, що можуть бути йому потрібними. При цьому вважається, що відома корисність c_j одного предмета j-го найменування, а також, що у поході можуть бути потрібними декілька однакових предметів. Ранець має m обмежень за своїми характеристиками (об'єм, лінійні розміри, вага і т. п.). Нехай a_{ij} — i-а характеристика ($i = 1,\dots,m$) предмета j-го найменування ($j = 1,\dots,n$), b_i — максимальне значення i-ї характеристики ранця. Необхідно визначити, які предмети та в якій кількості слід завантажити у ранець, щоб їх сумарна корисність була максимальною.

Якщо через x_j позначити кількість предметів j-го найменування, що планується для завантаження у ранець, то математичне формулювання цієї задачі набирає вигляду:

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\dots,m,$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — ціле},\ j = 1,\dots,n.$$

Розглянута задача являє собою повністю цілочисельну *ЗЛП*.

3) Задача вибору засобів доставки

Нехай для перевезення p видів вантажів можна використовувати судна n типів, причому a_k — кількість вантажу k-го виду, g_j — кількість суден типу j, $j = 1,\dots,n$, c_j — витрати, пов'язані з використанням одного судна j-го типу. Кожне судно має m ємностей (палуби, трюми і т. п.), d_{ij} — вантажопідйомність ємності i ($i = 1,\dots,m$) на судні типу j. Необхідно вибрати найбільш економний комплекс засобів доставки вантажів та план завантаження суден.

Позначимо через x_j, $j = 1,\dots,n$, кількість суден j-го типу, що планується для перевезень, y_{ik} — кількість вантажу k-го виду, що підлягає завантаженню у ємність i. Тоді, очевидно, задача формально зводиться до вибору змінних x_j, $j = 1,\dots,n$, y_{ik}, $i = 1,\dots,m$, $k = 1,\dots,p$, що мінімізують

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

задовольняючи умови

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j - \sum_{k=1}^{p} y_{ik} \geq 0, \; i = 1,\ldots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} = a_k, \; k = 1,\ldots,p,$$
$0 \leq x_j \leq g_j$, x_j — ціле, $j = 1,\ldots,n,$
$y_{ik} \geq 0$, $i = 1,\ldots,m,$ $k = 1,\ldots,p.$

У цій задачі на змінні y_{ik} умова цілочисельності не накладається, тому це частково цілочисельна задача.

Наведемо тепер формальні постановки задач.

Цілочисельною ЗЛП (у стандартній формі) будемо називати задачу знаходження вектора $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$, *що мінімізує цільову функцію*

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{4.1}$$

задовольняючи умови

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1,\ldots,m, \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,\ldots,n, \tag{4.3}$$

$$x_j \text{ — ціле}, \; j = 1,\ldots,k \; (k \leq n). \tag{4.4}$$

Якщо $k = n$, то (4.1)–(4.4) називається *повністю цілочисельною ЗЛП* (*ПЦЗЛП*), інакше — *частково цілочисельною ЗЛП* (*ЧЦЗЛП*).

Дискретною ЗЛП (у стандартній формі) називається така задача:

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1,\ldots,m, \tag{4.6}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,\ldots,n, \tag{4.7}$$

$$x_j \in \{x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^{n_j}\}, \; j = 1,\ldots,k \; (k \leq n). \tag{4.8}$$

Якщо $k = n$, то задачу (4.5)–(4.8) називають *повністю дискретною ЗЛП* (*ПДЗЛП*), інакше — *частково дискретною ЗЛП* (*ЧДЗЛП*).

Як бачимо, сформульовані задачі (4.1)–(4.4) та (4.5)–(4.8) відрізняються від звичайної *ЗЛП* наявністю умов (4.4) та (4.8). Це призводить до необхідності застосування спеціальних методів їх розв'язування.

Звичайно, у деяких випадках з практичної точки зору прийнятними є розв'язки, одержані тим чи іншим наближеним методом. Наприклад, якщо в *ПЦЗЛП* (4.1)–(4.4) x_j, $j = 1,\ldots,n,$ відображає запланований випуск масової продукції, то можна розв'язати відповідну *ЗЛП* (4.1)–(4.3) і заокруглити одержаний розв'язок. Проте слід мати на увазі, що безпосереднє застосування цієї ідеї до розв'язування *ПЦЗЛП* може дати розв'язок далекий від оптимального, що має місце, наприклад, у такій задачі:

$$L(\boldsymbol{x}) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 4,$$
$$4x_1 - 3x_2 \le 2,$$
$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3,$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ – ціле},\ j = 1,2,3.$$

Розв'язком цієї *ПЦЗЛП* є $\boldsymbol{x}^* = (2, 2, 5)$. Якщо ж розв'язати відповідну *ЗЛП* одним з відомих методів, то одержимо $\boldsymbol{x}^* = (0.5, 0, 4.5)$. Зауважимо, що ніякі варіанти заокруглення одержаного розв'язку не дають навіть допустимого розв'язку *ПЦЗЛП*, не кажучи вже про оптимальний.

Далі будуть розглянуті деякі методи розв'язування сформульованих вище задач.

§ 2. Методи відтинання. Перший метод Гоморі

Коротко викладемо основну ідею цих методів на прикладі *ПЦЗЛП*.

Нехай $D = \{\boldsymbol{x} \in E^n\colon \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\}$. У стандартних позначеннях *ПЦЗЛП* зводиться до пошуку

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x} \in D,\ \boldsymbol{x} - \text{цілочисельний}} \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}. \tag{4.9}$$

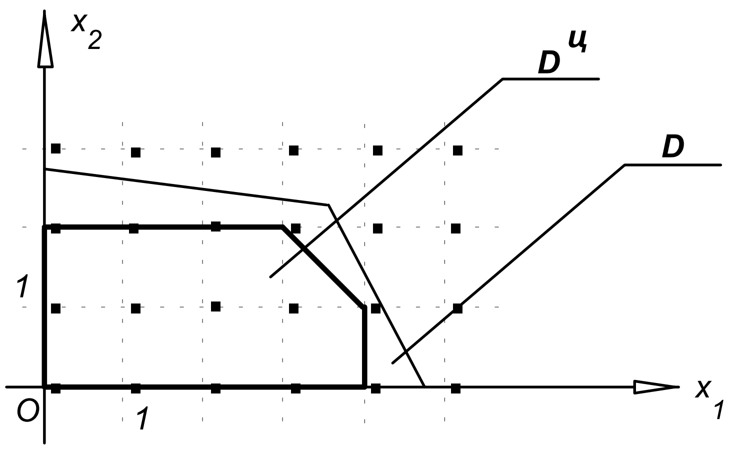


Рис. 4.1

Позначимо через $D^ц$ опуклу лінійну оболонку цілочисельних точок області D (див. рис. 4.1) і розглянемо допоміжну *ЗЛП*, що полягає у пошуку

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x} \in D^ц} \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}. \tag{4.10}$$

Легко показати, що всі вершини області $D^ц$ є цілочисельними (тобто, всі базисні розв'язки *ЗЛП* (4.10) є цілочисельними). Отже, оптимальний розв'язок *ПЦЗЛП* (4.9) співпадає з оптимальним розв'язком *ЗЛП* (4.10). Тобто, існує можливість одержати розв'язок *ПЦЗЛП* шляхом розв'язування деякої спеціальним чином побудованої *ЗЛП*, використовуючи при цьому, зрозуміло, добре розроблені методи лінійного програмування.

На жаль, побудова множини $D^{ц}$, а, отже, і безпосередній перехід до *ЗЛП* (4.10), є досить складною задачею. Проте існує можливість розв'язати цю задачу у певному розумінні частково, послідовно відтинаючи від множини D деякі її частини за допомогою так званих *відтинаючих площин*.

Ідея *методів відтинання* полягає ось у чому. Розв'язується *ЗЛП*, одержана з *ПЦЗЛП* відкиданням умови цілочисельності змінних. Якщо її розв'язок є цілочисельним, то він же є і розв'язком *ПЦЗЛП*. Якщо ж *ЗЛП* розв'язку не має, то і *ПЦЗЛП* розв'язку не має. Якщо розв'язок *ЗЛП* не є цілочисельним, то від розв'язаної *ЗЛП* переходять до нової допоміжної *ЗЛП* шляхом приєднання лінійного обмеження, яке задовольняють усі цілочисельні розв'язки *ПЦЗЛП*, але не задовольняє одержаний нецілочисельний розв'язок початкової *ЗЛП*. Це додаткове лінійне обмеження визначає деяку *відтинаючу площину* і називається *правильним відтином*. Приєднання нових правильних відтинів до початкової допоміжної *ЗЛП* здійснюється доти, поки на деякому кроці не буде одержаний цілочисельний розв'язок допоміжної задачі, який, очевидно, буде оптимальним розв'язком вихідної *ПЦЗЛП*.

Перший метод Гоморі належить до розглянутого класу і полягає у наступному. Розв'язується *ПЦЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min, \quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \text{ — цілочисельний.} \tag{4.11}$$

Розглядаємо допоміжну *ЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \to \min, \quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \tag{4.12}$$

що одержується з (4.11) відкиданням умови цілочисельності змінних.

Нехай допоміжна *ЗЛП* (4.12) розв'язується симплекс-методом і на останній ітерації непрямі обмеження цієї задачі набули вигляду:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = 1,\dots,m, \tag{4.13}$$

і, таким чином, розв'язком допоміжної *ЗЛП* є n-вимірний вектор

$$\boldsymbol{x} = (\beta_1,\dots,\beta_m, 0,\dots,0).$$

Нехай існує номер l такий, що β_l – дробове число (інакше цілочисельний вектор $\boldsymbol{x}$ є розв'язком *ЦЗЛП* (4.11)) і, як завжди, $[z]$ та $\{z\}$ — відповідно ціла та дробова частини числа z.

Згідно загальної ідеї методів відтинання потрібно перейти до розв'язання допоміжної *ЗЛП*, у якій поряд з обмеженнями (4.13) розглядається додаткове обмеження, яке реалізує правильний відтин.

Теорема 4.1. *Лінійне обмеження*

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{lj}\} x_j \le 0 \tag{4.14}$$

є правильним відтином для ПЦЗЛП (4.11).

Доведення. Покажемо спочатку, що обмеження (4.14) є відтином, тобто, що оптимальний нецілочисельний розв'язок $\boldsymbol{x} = (\beta_1,\dots,\beta_m, 0,\dots,0)$ це обмеження не задовольняє. Дійсно, оскільки $\{\beta_l\} > 0$, то, підставивши координати вектора $\boldsymbol{x}$ у ліву частину (4.14), маємо

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{lj}\} x_j = \{\beta_l\} > 0,$$

тобто точка $\boldsymbol{x}$ обмеження (4.14) не задовольняє.

Доведемо тепер, що (4.14) є правильним відтином, іншими словами, що будь-який допустимий розв'язок *ПЦЗЛП* (4.11) задовольняє обмеження (4.14). Дійсно, з (4.13) маємо

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j - [\beta_i] = \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j .$$

Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — цілочисельний допустимий розв'язок *ПЦЗЛП* (4.11). Тоді ліва частина останньої рівності є цілочисельною, тобто, цілочисельною є і величина

$$\{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j .$$

Решту доведення проведемо від супротивного: нехай цілочисельний розв'язок задовольняє нерівність

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{lj}\} x_j > 0, \tag{4.15}$$

яка є протилежною (4.14). Оскільки $0 < \{\beta_l\} < 1$, $0 \le \{\alpha_{lj}\} < 1$, $x_j \ge 0$, то

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{lj}\} x_j < 1,$$

що разом з (4.15) суперечить цілочисельності

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{lj}\} x_j$$

і завершує доведення теореми.

Отже, якщо до обмежень *ЗЛП* (4.13) або, що рівносильно, до непрямих обмежень *ЗЛП* (4.12), додати обмеження (4.14), яке можна записати в еквівалентному вигляді

$$x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{lj}\} x_j = -\{\beta_l\}, \quad x_{n+1} \ge 0, \tag{4.16}$$

де x_{n+1} — додаткова змінна, і розв'язати *ЗЛП* (4,12), (4.16), то одержимо розв'язок, відмінний від $(\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)$. Новий розв'язок також може бути нецілочисельним, що приведе до необхідності додавання нового обмеження виду (4.16) і т. д. Зауважимо, що якщо l в обмеженні (4.16) є індекс першої нецілочисельної змінної, то можна гарантувати скінченність алгоритму першого методу Гоморі, що наводиться нижче.

Алгоритм першого методу Гоморі

1. Розв'язуємо допоміжну *ЗЛП* (4.12). Нехай $\boldsymbol{x}(0)$ — її оптимальний розв'язок. Якщо оптимальний розв'язок не існує, то вихідна *ПЦЗЛП* (4.11) також не має оптимального розв'язку.

2. Нехай на *s*-й ітерації розв'язана допоміжна *ЗЛП*, що має *M* обмежень та *N* змінних, $\boldsymbol{x}(s)$ — її оптимальний розв'язок. Будемо вважати, що канонічні обмеження останньої ітерації, що визначають $\boldsymbol{x}(s)$, мають вигляд:

$$x_i + \sum_{j=M+1}^{N} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = 1,\ldots,M.$$

Звідси *N*-вимірний вектор $\boldsymbol{x}(s) = (\beta_1,\ldots, \beta_M, 0,\ldots,0)$.

3. Якщо β_i, $i=1,\ldots,M,$ — цілі, то кінець: $\boldsymbol{x}(s)$ є оптимальним розв'язком задачі (4.11). Якщо існує хоча б одне *i* таке, що β_i — дріб, то переходимо до пункту 4.

4. Знаходимо $l = \min\{i\}$, де мінімум обчислюється по всіх *i* таких, що β_l — дріб, і будуємо додаткове обмеження

$$x_{N+1} - \sum_{j=M+1}^{N} \{\alpha_{lj}\} x_j = -\{\beta_l\}, \quad x_{N+1} \geq 0,$$

де x_{N+1} — додаткова змінна.

5. Розширюємо симплекс-таблицю за рахунок ($M+1$)-го рядка (додаткове обмеження) та ($N+1$)-го стовпця, що відповідає додатковій змінній x_{N+1}.

6. Розв'язуємо розширену таким чином *ЗЛП* двоїстим симплекс-методом і переходимо до пункту 2, заміняючи *s* на $s+1$. Якщо при цьому на якій-небудь ітерації двоїстого симплекс-методу одна з додаткових змінних задачі (тобто, тих, що з'явилися при побудові правильних відтинів) повторно стає базисною, то виключаються з подальшого розгляду відповідні їй рядок та стовпець.

Приклад 4.1. *Розв'язати ЦЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = -2x_1 + x_2 \to \min,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$6x_1 + 7x_2 \leq 8,$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 6,$$
$$x_j \geq 0,\ x_j \text{ — ціле},\ j = 1,2.$$

Уводячи додаткові змінні $x_3, x_4, x_5 \geq 0$, зводимо відповідну *ЗЛП* до *КЗЛП* і розв'язуємо її звичайним симплекс-методом (див. таблицю 4.1).

Таблиця 4.1

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
x_3	–1	1	1	0	0	3
x_4	**6**	7	0	1	0	8
x_5	2	–3	0	0	1	6
Δ	–2	1	0	0	0	0

x_3	0	13/6	1	1/6	0	26/6
x_1	1	7/6	0	1/6	0	8/6
x_5	0	–32/6	0	–2/6	1	20/6
Δ	0	20/6	0	2/6	0	16/6

Як бачимо, її оптимальний розв'язок $\boldsymbol{x} = (8/6, 0, 26/6, 0, 20/6)$ не є цілочисельним. Тому згідно п.2 алгоритму за другим непрямим обмеженням допоміжної *ЗЛП*

$$x_1 + (7/6)\,x_2 + (1/6)\,x_4 = 8/6,$$

будуємо правильний відтин, що визначається співвідношеннями (4.16):

$$-(1/6)\,x_2 - (1/6)\,x_4 + x_6 = -2/6,\ x_6 \geq 0.$$

де x_6 — додаткова змінна. Розширюємо останню симплекс-таблицю на один рядок, що відповідає додатковому обмеженню та на один стовпець, що відповідає додатковій змінній. Одержану *ЗЛП* розв'язуємо двоїстим симплекс-методом (див. таблицю 4.2).

Таблиця 4.2

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
x_3	0	13/6	1	1/6	0	0	26/6
x_1	1	7/6	0	1/6	0	0	8/6
x_5	0	—32/6	0	–2/6	1	0	20/6
x_6	0	–1/6	0	**–1/6**	0	1	–2/6
Δ	0	20/6	0	2/6	0	0	16/6
x_3	0	2	1	0	0	1	4
x_1	1	1	0	0	0	1	1
x_5	0	–5	0	0	1	–2	4
x_4	0	1	0	1	0	–6	2
Δ	0	3	0	0	0	2	2

На першому ж кроці двоїстого симплекс-методу одержуємо оптимальний цілочисельний розв'язок допоміжної *ЗЛП*. Отже, $\boldsymbol{x}^* = (1, 0)$ є оптимальним розв'язком вихідної *ПЦЗЛП*. При цьому $L(\boldsymbol{x}^*) = -2$.

§ 3. Частково цілочисельні задачі лінійного програмування. Другий метод Гоморі

Другий метод Гоморі призначається для розв'язування частково (зокрема, повністю) цілочисельних *ЗЛП* (*ЧЦЗЛП*):

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (4.17)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\dots,m, \qquad (4.18)$$

$$x_j \geq 0, j = 1,\dots,n, \qquad (4.19)$$

$$x_j \text{ — ціле}, j = 1,\dots,p \ (p \leq n). \qquad (4.20)$$

Метод розв'язування задачі (4.17)–(4.20) грунтується на тій же ідеї, що і метод розв'язування *ПЦЗЛП*. А саме: розв'язується допоміжна *ЗЛП* (4.17)–(4.19), що одержується з вихідної відкиданням умови цілочисельності (4.20). Якщо ця задача розв'язку не має, то, очевидно, і вихідна *ЧЦЗЛП* не має розв'язку. Якщо ж *ЗЛП* (4.17)–(4.19) має розв'язок, то він аналізується на допустимість для задачі (4.17)–(4.20). Якщо знайдений оптимальний розв'язок є цілочисельним (у розумінні умов (4.20)), то він одночасно є оптимальним і для задачі (4.17)–(4.20). Інакше від розв'язаної *ЗЛП* переходять до нової допоміжної ЗЛП додаванням лінійного обмеження, яке задовольняють цілочисельні розв'язки вихідної *ЧЦЗЛП*, але не задовольняє одержаний нецілочисельний розв'язок вихідної *ЗЛП*. Це додаткове обмеження визначає деяку відтинаючу площину і називається правильним відтином. Додавання нових правильних відтинів відбувається доти, поки на деякому кроці не буде одержано цілочисельний розв'язок допоміжної задачі, що є, очевидно, оптимальним розв'язком *ЧЦЗЛП*.

Нехай на останній ітерації симплекс-методу при розв'язуванні допоміжної *ЗЛП* її непрямі обмеження набули вигляду:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = 1,\dots,m, \qquad (4.21)$$

і, отже, її розв'язком є n-вимірний вектор $\boldsymbol{x} = (\beta_1,\dots,\beta_m,0,\dots,0)$.

Нехай існує номер r ($r \leq p$) такий, що β_r — дробове число. Тоді правильний відтин у другому методі Гоморі будується згідно наступної теореми, яку ми наводимо без доведення.

Теорема 4.2. *Лінійне обмеження*

$$\sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{rj} x_j \geq \{\beta_r\},$$

або, що рівносильно,

$$x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{rj} x_j = -\{\beta_r\}, \quad x_{n+1} \geq 0, \qquad (4.22)$$

де

$$\gamma_{rj} = \begin{cases} \{\alpha_{rj}\}, & \textit{якщо} \quad j \leq p,\ \{\alpha_{rj}\} \leq \{\beta_r\}, \\ \{\beta_r\}(1-\{\alpha_{rj}\})/(1-\{\beta_r\}), & \textit{якщо} \quad j \leq p,\ \{\alpha_{rj}\} > \{\beta_r\}, \\ \alpha_{rj}, & \textit{якщо} \quad j > p,\ \ \alpha_{rj} \geq 0, \\ \{\beta_r\}(-\alpha_{rj})/(1-\{\beta_r\}), & \textit{якщо} \quad j > p,\ \ \alpha_{rj} < 0, \end{cases} \qquad (4.23)$$

а x_{n+1} — додаткова змінна, є правильним відтином для ЧЦЗЛП (4.17)–(4.20).

Зауважимо, що якщо r в обмеженні (4.22) є індекс першої нецілочисельної змінної серед перших p змінних, то алгоритм другого методу Гоморі, що формулюється нижче, є скінченним.

Алгоритм другого методу Гоморі

1. Розв'язуємо допоміжну *ЗЛП* (4.17)–(4.19). Нехай $\boldsymbol{x}(0)$ — її оптимальний розв'язок. Якщо оптимального розв'язку не існує, то вихідна *ЧЦЗЛП* (4.17)–(4.20) також не має розв'язку.

2. Нехай на s-й ітерації розв'язана допоміжна *ЗЛП*, що має M обмежень та N змінних, $\boldsymbol{x}(s)$ — її оптимальний розв'язок. Будемо вважати, що канонічні обмеження останньої ітерації, що визначають $\boldsymbol{x}(s)$, мають вигляд:

$$x_i + \sum_{j=M+1}^{N} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = 1,\ldots,M.$$

Звідси N-вимірний вектор $\boldsymbol{x}(s) = (\beta_1,\ldots,\beta_M,0,\ldots,0)$.

3. Якщо β_i, $i=1,\ldots,p$, — цілі, то кінець: $\boldsymbol{x}(s)$ є оптимальним розв'язком вихідної *ЧЦЗЛП*. Якщо існує хоча б одне i таке, що β_i — дріб ($i=1,\ldots,p$), то переходимо до пункту 4.

4. Знаходимо $r=\min\{i\}$, де мінімум береться по всіх i ($i=1,\ldots,p$) таких, що β_i — дріб, і будуємо додаткове обмеження за формулами (4.22), (4.23) при $m = M$, $n = N$.

5. Розширюємо симплекс-таблицю за рахунок ($M+1$)-го рядка (додаткове обмеження) та ($N+1$)-го стовпця, що відповідає додатковій змінній x_{N+1}.

6. Розв'язуємо розширену таким чином *ЗЛП* двоїстим симплекс-методом і переходимо до пункту 2, заміняючи s на $s+1$. Якщо при цьому на деякій ітерації двоїстого симплекс-методу одна з додаткових змінних повторно стає базисною, то з подальшого розгляду виключаються відповідні їй рядок та стовпець.

Приклад 4.2. *Розв'язати ЦЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 8x_2 \to \min,$$
$$3x_1 + x_2 \le 9,$$
$$0.16x_1 + x_2 \le 1.9,$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — ціле},\ j = 1,2.$$

Уводячи додаткові змінні x_3 та x_4, зводимо відповідну *ЗЛП* до канонічної форми і розв'язуємо її симплекс-методом (див. таблицю 4.3).

Таблиця 4.3

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	β
x_3	3.00	1.00	1.00	0.00	9.00
x_4	0.16	**1.00**	0.00	1.00	1.90
Δ	–1.00	–8.00	0.00	0.00	0.00
x_3	2.84	0.00	1.00	–1.00	7.10
x_2	0.16	1.00	0.00	1.00	1.90

Δ	*0.28*	*0.00*	*0.00*	*8.00*	*15.20*

Таблиця 4.3 містить оптимальний розв'язок вихідної *ЗЛП*: $\mathbf{x}(0)=(0,1.9,7.1,0)$.

Оскільки умову цілочисельності цей розв'язок не задовольняє, то будуємо правильний відтин за другим непрямим обмеженням *ЗЛП* згідно співвідношень (4.22), (4.23). Обмеження

$$0.16\,x_1 + x_4 \geq 0.9,$$

або

$$-\,0.16\,x_1 - x_4 + x_5 = -\,0.9,\ x_5 \geq 0$$

є правильним відтином, де x_5 — додаткова змінна. Симплекс-таблиця розширюється за рахунок додаткового обмеження та додаткової змінної (див. таблицю 4.4). Таблиця 4.5 являє собою результати виконання двох ітерацій двоїстого симплекс-методу.

Таблиця 4.4

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
x_3	*2.84*	*0.00*	*1.00*	*–1.00*	*0.00*	*7.10*
x_2	*0.16*	*1.00*	*0.00*	*1.00*	*0.00*	*1.90*
x_5	***–0.16***	*0.00*	*0.00*	*–1.00*	*1.00*	*–0.90*
Δ	*0.28*	*0.00*	*0.00*	*8.00*	*0.00*	*15.20*

Таблиця 4.5

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
x_3	*0.00*	*0.00*	*1.00*	***–18.75***	*17.75*	*–8.88*
x_2	*0.00*	*1.00*	*0.00*	*0.00*	*1.00*	*1.00*
x_1	*1.00*	*0.00*	*0.00*	*6.25*	*–6.25*	*5.63*
Δ	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*6.25*	*1.75*	*13.63*
x_4	*0.00*	*0.00*	*–0.05*	*1.00*	*–0.95*	*0.47*
x_2	*0.00*	*1.00*	*0.00*	*0.00*	*1.00*	*1.00*
x_1	*1.00*	*0.00*	*0.33*	*0.00*	*–0.33*	*2.67*
Δ	*0.00*	*0.00*	*0.33*	*0.00*	*7.67*	*10.67*

Оптимальний розв'язок $\mathbf{x}(1) = (2.67,1.00,0.00,0.47,0.00)$ розширеної *ЗЛП* умову цілочисельності не задовольняє, тому за третім непрямим обмеженням будується правильний відтин:

$$-\,0.33\,x_3 - 0.67\,x_5 + x_6 = -\,0.67,\ x_6 \geq 0,$$

де x_6 — додаткова змінна. Розширена симплекс-таблиця наведена у таблиці 4.6. Виконавши один крок двоїстого симплекс-методу, одержуємо оптимальний розв'язок допоміжної *ЗЛП* $\boldsymbol{x}(2)=(2.00,1.00,2.01,0.58,0.00,0.00)$, який задовольняє умову цілочисельності. Тому $\boldsymbol{x}^*=(2,1)$ є оптимальним розв'язком вихідної задачі. При цьому $L(\boldsymbol{x}^*)=-10$.

Таблиця 4.6

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
x_4	0.00	0.00	–0.05	1.00	–0.95	0.00	0.47
x_2	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00
x_1	1.00	0.00	0.33	0.00	–0.33	0.00	2.67
x_6	0.00	0.00	**–0.33**	0.00	–0.67	1.00	–0.67
Δ	0.00	0.00	0.33	0.00	7.67	0.00	10.67
x_4	0.00	0.00	0.00	1.00	–0.84	–0.16	0.58
x_2	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00
x_1	1.00	0.00	0.00	0.00	–1.00	1.00	2.00
x_3	0.00	0.00	1.00	0.00	2.00	–3.00	2.01
Δ	0.00	0.00	0.00	0.00	7.00	1.00	10.00

§ 4. Третій метод Гоморі

Розглядаємо *ПЦЗЛП*:

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{4.24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=1,\dots,m, \tag{4.25}$$

$$x_j \ge 0, j=1,\dots,n, \tag{4.26}$$

$$x_j \text{ – ціле}, j=1,\dots,n. \tag{4.27}$$

Нехай непрямі обмеження *ЗЛП* (4.24)–(4.26), наприклад, у базисі $\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m$ приведені до майже канонічного вигляду:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i=1,\dots,m, \tag{4.28}$$

де α_{ij}, β_i, $i=1,\dots,m$, $j=m+1,\dots,n$, — цілі і симплекс-різниці $\Delta_j \ge 0$, $j=1,\dots,n$. Якщо $\beta_i \ge 0$, $i=1,\dots,m$, то обмеження визначають оптимальний розв'язок задачі (4.24)–(4.27), інакше визначається деякий цілочисельний *МДБР* вихідної *ЗЛП*. Можна було б, звичайно, вибрати один з індексів i, для якого $\beta_i < 0$, і виконати ітерацію двоїстого симплекс-методу. Проте у цьому випадку цілочисельність параметрів нової симплекс-таблиці була б, взагалі кажучи, порушена через необхідність ділення на ведучий елемент перетворення. Цілочисельність нової таблиці гарантується лише тоді, коли ведучий елемент дорівнює *–1*.

Виявляється, що можна побудувати додаткове обмеження, якому задовольняють всі цілочисельні розв'язки задачі (4.24)–(4.27) і яке разом з тим визначає ведучий рядок перетворення, що має ведучий елемент *–1*. Будується воно за l-м обмеженням системи (4.28), для якого $\beta_l < 0$:

$$x_l + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{lj} x_j = \beta_l \,. \tag{4.29}$$

Якщо серед обмежень (4.28) є декілька з від'ємною правою частиною, то l вибирається, як правило, з умови

$$\beta_l = \min_{i:\beta_i < 0} \beta_i \,.$$

Поділимо обидві частини (4.29) на довільне число $\alpha > 0$ і запишемо одержаний результат у вигляді:

$$\frac{x_l}{\alpha} + \sum_{j=m+1}^{n} \left\{\frac{\alpha_{lj}}{\alpha}\right\} x_j - \left\{\frac{\beta_l}{\alpha}\right\} = \left[\frac{\beta_l}{\alpha}\right] - \sum_{j=m+1}^{n} \left[\frac{\alpha_{lj}}{\alpha}\right] x_j \,. \tag{4.30}$$

Ліва частина (4.30) при $x_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$, являє собою різницю двох величин

$$\frac{x_l}{\alpha} + \sum_{j=m+1}^{n} \left\{\frac{\alpha_{lj}}{\alpha}\right\} x_j \geq 0, \qquad \left\{\frac{\beta_l}{\alpha}\right\} < 1,$$

тобто строго більша *–1*. Отже, права частина, будучи цілим числом при цілочисельних x_j, задовольняє умову

$$\left[\frac{\beta_l}{\alpha}\right] - \sum_{j=m+1}^{n} \left[\frac{\alpha_{lj}}{\alpha}\right] x_j \geq 0, \tag{4.31}$$

яка є вірною для будь-якого допустимого розв'язку задачі (4.24)–(4.27).

Уводячи додаткову змінну x_{n+1}, перепишемо (4.31) у вигляді

$$x_{n+1} + \sum_{j=m+1}^{n} \left[\frac{\alpha_{lj}}{\alpha}\right] x_j = \left[\frac{\beta_l}{\alpha}\right], \quad x_{n+1} \geq 0. \tag{4.32}$$

Очевидно, що з від'ємності α_{lj} випливає від'ємність $[\alpha_{lj}/\alpha]$ і навпаки. Тому $[\beta_l/\alpha] < 0$ і серед чисел $[\alpha_{lj}/\alpha]$ є від'ємні, тобто рядок таблиці, що визначається новим обмеженням (4.32), може бути прийнятий за ведучий для наступного симплексного перетворення. Разом з тим при

$$\alpha = \max_{j=m+1,\ldots,n} (-\alpha_{lj})$$

кожному від'ємному α_{lj}, $j = m+1,\ldots,n$, відповідає $[\alpha_{lj}/\alpha] = -1$, тобто ведучий елемент цього перетворення явно дорівнює *–1*.

Отже, розширюємо наявну симплекс-таблицю за рахунок ($m+1$)-го рядка з елементами $[\alpha_{lj}/\alpha]$ (елементи, що відповідають базисним змінним, рівні нулю) та одиничного стовпця $\boldsymbol{A}_{n+1}$, що відповідає додатковій змінній x_{n+1}. Потім виконується симплекс-перетворення з ($m+1$)-м ведучим рядком і ведучим стовпцем, що вибирається за правилами двоїстого симплекс-методу. Тоді нова симплекс-таблиця буде повністю цілочисельною. Описана послідовність дій складає окрему ітерацію алгоритму третього методу Гоморі. Ітерації виконуються доти, поки не буде отримана симплекс-таблиця, в якій усі праві частини невід'ємні, або є рядок з від'ємною правою частиною і невід'ємними рештою елементів. У першому випадку *ПЦЗЛП* розв'язана, у другому — її обмеження є суперечливими. Якщо на будь-якій ітерації одна з додаткових змінних переходить з небазисних у базисні, то відповідні їй рядок і стовпець симплекс-таблиці викреслюються з подальшого розгляду.

Алгоритм третього методу Гоморі

1. Зводимо *ЗЛП* (4.24)–(4.26) до *МКЗЛП* з цілочисельними коефіцієнтами, що визначає цілочисельний *МДБР* $\boldsymbol{x}(0)$, для якого $\Delta_j \ge 0$, $j=1,\ldots,n$.

2. Нехай на s-й ітерації одержана повністю цілочисельна *МКЗЛП* з непрямими обмеженнями виду

$$x_i + \sum_{j=M+1}^{N} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i=1,\ldots,M.$$

що визначає цілочисельний N-вимірний *МДБР* $\boldsymbol{x}(s) = (\beta_1,\ldots,\beta_M,0,\ldots,0)$, для якого $\Delta_j \ge 0$, $j=1,\ldots,N$.

3. Якщо $\beta_i \ge 0$, $i=1,\ldots,M$, то кінець: $\boldsymbol{x}(s)$ є оптимальним розв'язком *ПЦЗЛП*.

4. Якщо для деякого i, такого, що $\beta_i < 0$, $\alpha_{ij} \ge 0$, $j=1,\ldots,N$, то кінець: *ПЦЗЛП* (4.24)–(4.27) не має допустимих розв'язків. Якщо таких i немає, то

5. Знаходимо індекс l з умови: $\beta_l = \min \beta_i$, де мінімум визначається на множині тільки тих i, для яких $\beta_i < 0$. Знаходимо $\alpha = \max(-\alpha_{lj})$, де максимум визначається на множині $j=M+1,\ldots,N$, і будуємо додаткове обмеження (4.32) при $m=M$ та $n=N$.

6. Розширюємо симплекс-таблицю за рахунок ($M+1$)-го рядка (додаткове обмеження) та ($N+1$)-го стовпця, що відповідає додатковій змінній x_{N+1}.

7. Знаходимо індекс k з умови: $\Delta_k = \min \Delta_j$, де мінімум визначається на множині тільки тих j, для яких $\alpha_{M+1,j} < 0$. Переходимо до нового цілочисельного *МДБР* $\boldsymbol{x}(s+1)$, виконуючи симплекс-перетворення з ведучими рядком ($M+1$) і стовпцем k. Якщо k — індекс однієї з додаткових змінних, то переходимо до пункту 8, інакше — до пункту 3, заміняючи s на $s+1$, M на $M+1$, N на $N+1$.

8. Виключаємо з подальшого розгляду (викреслюємо) k-й стовпець та ($M+1$)-й (останній) рядок симплекс-таблиці, перенумеровуємо решту додаткових змінних для збереження неперервної нумерації всіх змінних задачі і переходимо до пункту 3, заміняючи s на $s+1$.

Звертаючи увагу на пункт 1 алгоритму, зауважимо, що інколи побудова цілочисельної симплекс-таблиці з невід'ємними значеннями симплекс-різниць не вимагає обчислень. У загальному ж випадку цей етап зводиться до застосування цього ж методу до деякої допоміжної задачі, причому на одній з його ітерацій може виявитися неможливість побудови потрібної вихідної таблиці. Враховуючи це, навряд чи варто застосовувати цей метод до розв'язування задач, у яких зміст вихідної таблиці не є очевидним.

Приклад 4.3. *Розв'язати ЦЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = 6x_1 + 4x_2 \to \min,$$

$$2x_1 + x_2 \ge 3,$$

$$x_1 - 2x_2 \le 2,$$

$$3x_1 + 2x_2 \ge 1,$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — ціле},\ j = 1,2.$$

Ця задача введенням додаткових змінних x_3, x_4, x_5 легко зводиться до майже канонічного виду (див. табл. 4.7), що визначає *МДБР* $\mathbf{x}(0)=(0,0,-3,2,-1)$.

Таблиця 4.7

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
x_3	–2	–1	1	0	0	–3
x_4	1	–2	0	1	0	2
x_5	–3	–2	0	0	1	–1
Δ	6	4	0	0	0	0

Оскільки серед компонент вектора $\boldsymbol{x}(0)$ є від'ємні, то за першим обмеженням ($l=1$) будуємо правильний відтин при $\alpha = 2$:

$$[-3/2] - [-2/2]\,x_1 - [-1/2]\,x_2 \ge 0,$$

або

$$-2 + x_1 + x_2 \ge 0.$$

Уводимо додаткову змінну $x_6 \ge 0$ і записуємо останню нерівність у вигляді:

$$-x_1 - x_2 + x_6 = -2,\ x_6 \ge 0.$$

Таблиця 4.8

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
x_3	–2	–1	1	0	0	0	–3
x_4	1	–2	0	1	0	0	2
x_5	–3	–2	0	0	1	0	–1
x_6	–1	**–1**	0	0	0	1	–2
Δ	6	4	0	0	0	0	0

Розширюємо симплекс-таблицю на один рядок (додаткове обмеження) і один стовпець (додаткова змінна x_6) (див. таблицю 4.8) і згідно двоїстого симплекс-методу виконуємо симплекс-перетворення з ведучими четвертим рядком та другим стовпцем (див. таблицю 4.9).

Таблиця 4.9

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
x_3	–1	0	1	0	0	–1	–1
x_4	3	0	0	1	0	–2	6
x_5	–1	0	0	0	1	–2	3
x_2	1	1	0	0	0	–1	2
Δ	2	0	0	0	0	4	–8

Новий *МДБР* $\mathbf{x}(1)=(0,2,-1,6,3,0)$ не є оптимальним. Тому виконується ще одна ітерація методу Гоморі-3 (див. таблицю 4.10, де наведені розширена задача та наступна ітерація).

Таблиця 4.10

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β
x_3	–1	0	1	0	0	–1	0	–1
x_4	3	0	0	1	0	–2	0	6
x_5	–1	0	0	0	1	–2	0	3
x_2	1	1	0	0	0	–1	0	2
x_7	**–1**	0	0	0	0	–1	1	–1
Δ	2	0	0	0	0	4	0	–8
x_3	0	0	1	0	0	0	–1	0
x_4	0	0	0	1	0	–5	3	3
x_5	0	0	0	0	1	–1	–1	4
x_2	0	1	0	0	0	–2	1	1
x_1	1	0	0	0	0	1	–1	1
Δ	0	0	0	0	0	2	2	-10

Як бачимо, остання симплекс-таблиця визначає оптимальний розв'язок задачі $\mathbf{x}^*=(1,1)$. При цьому $L(\mathbf{x}^*)=10$. Зауважимо, що побудова останнього додаткового обмеження була зайвою, якщо прийняти до уваги, що при виконанні симплекс-перетворення у таблиці 4.9 у відповідності з двоїстим симплекс-методом ведучий елемент був би рівним -1.

§ 5. Дискретні ЗЛП. Метод Дальтона-Ллевеліна

Другий алгоритм Гоморі може бути видозмінений для розв'язування частково (зокрема, повністю) дискретних *ЗЛП:*

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min , \tag{4.33}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \; i = 1,\dots,m, \tag{4.34}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,\dots,n, \tag{4.35}$$

$$x_j \in \{x_j^1, x_j^2,\dots, x_j^{n_j}\}, j = 1,\dots,p \; (p \le n). \tag{4.36}$$

Нехай $0 = x_j^1 < x_j^2 < \dots < x_j^{n_j}$.

До умов (4.34), якщо це необхідно, приєднуються нерівності $x_j \le x_j^{n_j}$, $j = 1,\dots,p,$ так що довільний план $\boldsymbol{x}$ ЗЛП (4.33)–(4.35) явно задовольняє умовам $0 \le x_j \le x_j^{n_j}$, $j = 1,\dots,p.$

Слідуючи ідеї методів відтинання, розв'язується допоміжна *ЗЛП* (4.33)–(4.35). Нехай на останній ітерації симплекс-методу її непрямі обмеження набирають вигляду

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i , \quad i = 1,\dots,m, \tag{4.37}$$

тобто її розв'язком є n-вимірний вектор $\boldsymbol{x} = (\beta_1,\dots,\beta_m,0,\dots,0)$, де для деякого номера r $(r \le p)$

$$x_r^{\nu} < \beta_r < x_r^{\nu+1}, \text{ де } 1 \le \nu < n_r \; . \tag{4.38}$$

Тоді правильний відтин у методі Дальтона-Ллевеліна будується згідно наступної теореми.

Теорема 4.3. *Лінійне обмеження*

$$\sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{rj} x_j \ge \gamma_r , \tag{4.39}$$

або, що рівносильно,

$$x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{rj} x_j = -\gamma_r , \quad x_{n+1} \ge 0, \tag{4.40}$$

де

$$\gamma_r = \beta_r - x_r^{\nu}, \tag{4.41}$$

$$\gamma_{rj} = \begin{cases} \alpha_{rj}, & \text{якщо } \alpha_{rj} \ge 0, \\ \dfrac{\beta_r - x_r^{\nu}}{x_r^{\nu+1} - \beta_r}(-\alpha_{rj}), & \text{якщо } \alpha_{rj} < 0, \end{cases} \tag{4.42}$$

а x_{n+1} — *додаткова змінна, є правильним відтином для дискретної ЗЛП* (4.33)–(4.36).

Доведення. Позначимо через *NB* множину індексів небазисних змінних, тобто $NB = \{m+1,\ldots,n\}$. Покажемо, що обмеження (4.39) є відтином.

Дійсно, з врахуванням (4.38) маємо

$$\sum_{j=m+1}^{n}\gamma_{rj}\, x_j = \sum_{j\in NB}\gamma_{rj}\, x_j = 0 < \gamma_r = \beta_r - x_r^{\nu},$$

тобто, точка $\boldsymbol{x}$ обмеження (4.39) не задовольняє.

Доведемо тепер, що (4.39) є правильним відтином. Будь-який допустимий розв'язок задачі (4.33)–(4.36) задовольняє одну з двох нерівностей:

$$1)\quad x_r \ge x_r^{\nu+1}, \tag{4.43}$$

$$2)\quad x_r \le x_r^{\nu}. \tag{4.44}$$

Запишемо *r*-е обмеження системи (4.37) у вигляді

$$x_r = \beta_r + \sum_{j\in NB}(-\alpha_{rj})\, x_j. \tag{4.45}$$

Увівши позначення

$$NB^{+} = \{j: j \in NB,\ \alpha_{rj} < 0\},$$

$$NB^{-} = \{j: j \in NB,\ \alpha_{rj} \ge 0\},$$

$$S^{+} = \sum_{j\in NB^{+}}(-\alpha_{rj})\, x_j,$$

$$S^{-} = \sum_{j\in NB^{-}}(-\alpha_{rj})\, x_j,$$

перепишемо співвідношення (4.45) у вигляді:

$$x_r = \beta_r + S^{+} + S^{-}. \tag{4.46}$$

За означенням NB^{+} і NB^{-} та з невід'ємності x_j, маємо

$$S^{+} \ge 0, \tag{4.47}$$

$$S^{-} \le 0. \tag{4.48}$$

Розглянемо перший випадок. Приймаючи до уваги (4.43) та (4.46), послідовно маємо:

$$\beta_r + S^{+} + S^{-} \ge x_r^{\nu+1},$$

$$S^{+} \ge (x_r^{\nu+1} - \beta_r) - S^{-},$$

звідки в силу (4.48) одержуємо

$$S^{+} \ge x_r^{\nu+1} - \beta_r,$$

або, що рівносильно,

$$\frac{\beta_r - x_r^{\nu}}{x_r^{\nu+1} - \beta_r} S^+ \ge \beta_r - x_r^{\nu}.$$

Об'єднуючи цю нерівність з (4.48), маємо:

$$-S^- + \frac{\beta_r - x_r^{\nu}}{x_r^{\nu+1} - \beta_r} S^+ \ge \beta_r - x_r^{\nu}. \qquad (4.49)$$

Для випадку (4.44) з урахуванням (4.46) маємо:

$$\beta_r + S^+ + S^- \le x_r^{\nu},$$

$$-S^- \ge (\beta_r - x_r^{\nu}) + S^+,$$

або, приймаючи до уваги (4.47),

$$-S^- \ge \beta_r - x_r^{\nu}.$$

Об'єднуючи останню нерівність з очевидною нерівністю

$$\frac{\beta_r - x_r^{\nu}}{x_r^{\nu+1} - \beta_r} S^+ \ge 0,$$

одержуємо співвідношення

$$-S^- + \frac{\beta_r - x_r^{\nu}}{x_r^{\nu+1} - \beta_r} S^+ \ge \beta_r - x_r^{\nu},$$

яке співпадає з (4.49). Отже, будь-який допустимий розв'язок задачі (4.33)–(4.36) задовольняє нерівність (4.49), яку, враховуючи уведені позначення, переписуємо у вигляді

$$\sum_{j \in NB^+} \frac{\beta_r - x_r^{\nu}}{x_r^{\nu+1} - \beta_r} (-\alpha_{rj}) x_j + \sum_{j \in NB^-} \alpha_{rj} x_j \ge \beta_r - x_r^{\nu}.$$

Легко бачити, що одержана нерівність співпадає з нерівністю (4.39), якщо увести позначення (4.41), (4.42). Отже, нерівність (4.39) є правильним відтином. Доведення завершено.

Алгоритм Дальтона–Ллевеліна

1. Розв'язуємо допоміжну *ЗЛП* (4.33)–(4.35). Нехай $\boldsymbol{x}(0)$ — її оптимальний розв'язок. Якщо *ЗЛП* (4.33)–(4.35) розв'язку не має, то *ЧДЗЛП* (4.33)–(4.36) також не має розв'язку.

Нехай на s-й ітерації розв'язана допоміжна *ЗЛП*, що містить M обмежень та N змінних, $\boldsymbol{x}(s)$ — її оптимальний розв'язок. Нехай канонічні обмеження останньої ітерації, що визначають $\boldsymbol{x}(s)$, мають вигляд:

$$x_i + \sum_{j=M+1}^{N} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = 1,\dots,M,$$

тобто $\boldsymbol{x}(s) = (\beta_1,\dots,\beta_M,0,\dots,0)$.

2. Якщо β_i, $i=1,\ldots,p$, задовольняють умовам (4.36), то кінець: $\boldsymbol{x}(s)$ є оптимальним розв'язком вихідної *ЧДЗЛП*. Інакше

3. Знаходимо $r = \min\{i\}$, де мінімум береться по всіх i $(i=1,\ldots,p)$ таких, що для певного ν, $1 \le \nu \le n_i - 1$, $x_i^{\nu} < \beta_i < x_i^{\nu+1}$, і будуємо додаткове обмеження за формулами (4.40), (4.41), (4.42) при $m = M$, $n = N$.

4. Розширюємо симплекс-таблицю за рахунок $(M+1)$-го рядка (додаткове обмеження) та $(N+1)$-го стовпця, що відповідає додатковій змінній x_{N+1}.

5. Розв'язуємо розширену таким чином *ЗЛП* двоїстим симплекс-методом і переходимо до пункту 2, заміняючи s на $s+1$. Якщо при цьому на деякій ітерації двоїстого симплекс-методу одна з додаткових змінних повторно стає базисною, то з подальшого розгляду виключаються відповідні їй рядок та стовпець.

Зауважимо, що, очевидно, розглянутий алгоритм можна застосовувати також і для розв'язування повністю та частково цілочисельних *ЗЛП*, але, мабуть, з меншою ефективністю, ніж відповідні алгоритми Гоморі.

Приклад 4.4. *Розв'язати ЧДЗЛП*

$$
\begin{aligned}
&L(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 \to \max,\\
&-x_1 + 4x_2 \le 12,\\
&4x_1 - x_2 \le 12,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\\
&x_1 \in \{0, 1, 4\},\\
&x_2 \in \{0, 1, 3, 5\}.
\end{aligned}
$$

Відповідна *ЗЛП* введенням невід'ємних додаткових змінних x_3, x_4 зводиться до канонічного вигляду

$$
\begin{aligned}
&L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 \to \min,\\
&-x_1 + 4x_2 + x_3 = 12,\\
&4x_1 - x_2 + x_4 = 12,\\
&x_j \ge 0,\ j=1,\ldots,4,
\end{aligned}
$$

яка розв'язується симплекс-методом (див. таблицю 4.11).

Таблиця 4.11

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	β
x_3	–1	4	1	0	12
x_4	**4**	–1	0	1	12
Δ	–1	–1	0	0	0
x_3	0	**15/4**	1	1/4	15
x_1	1	–1/4	0	1/4	3
Δ	0	–5/4	0	1/4	3
x_2	0	1	4/15	1/15	4

x_1	1	0	1/15	4/15	4
Δ	0	0	1/3	1/3	8

Остання симплекс-таблиця визначає оптимальний розв'язок *ЗЛП* $\boldsymbol{x}=(4,4)$. Оскільки змінна x_2 не задовольняє умову дискретності, то за першим непрямим обмеженням, де змінна x_2 є базисною, будуємо додаткове обмеження згідно формул (4.40)–(4.42):

$$-(4/15)\,x_3-(1/15)\,x_4+x_5=-1,\ x_5\geq 0.$$

Згідно алгоритму розширюємо симплекс-таблицю за рахунок правильного відтину і розв'язуємо одержану *ЗЛП* двоїстим симплекс-методом (див. таблицю 4.12).

Таблиця 4.12

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
x_2	0	1	4/15	1/15	0	4
x_1	1	0	1/15	4/15	0	4
x_5	0	0	**–4/15**	–1/15	1	–1
Δ	0	0	1/3	1/3	0	8
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	1/4	1/4	15/4
x_3	0	0	1	1/4	–15/4	15/4
Δ	0	0	0	1/4	5/4	27/4

В оптимальному розв'язку цієї задачі $\boldsymbol{x}=(15/4,3,15/4,0,0)$ змінна x_1 умову дискретності не задовольняє, тому за другим непрямим обмеженням, де x_1 є базисною, будуємо правильний відтин згідно формул (4.40)–(4.42):

$$-(1/4)\,x_4-(1/4)\,x_5+x_6=-11/4,\ x_6\geq 0.$$

Розширена допоміжна *ЗЛП* розв'язується двоїстим симплекс-методом (див. таблицю 4.13).

Таблиця 4.13

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	1/4	1/4	0	15/4
x_3	0	0	1	1/4	–15/4	0	15/4
x_6	0	0	0	**–1/4**	–1/4	1	–11/4
Δ	0	0	0	1/4	5/4	0	27/4

x_2	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*3*
x_1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
x_3	*0*	*0*	*1*	*0*	*–4*	*1*	*1*
x_4	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*–4*	*11*
Δ	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*4*

Її оптимальний розв'язок $\boldsymbol{x} = (1, 3, 1, 11, 0, 0)$ умову дискретності задовольняє. Отже, $\boldsymbol{x}^* = (1, 3)$ є оптимальним розв'язком вихідної задачі. При цьому $L(\boldsymbol{x}^*) = 4$.

§ 6. Метод віток та границь. Алгоритм Ленд-Дойг

Для розв'язання задач дискретного (зокрема цілочисельного) лінійного програмування широко використовується метод віток та границь. Цей метод належить до класу комбінаторних методів і зводиться до направленого перебору варіантів розв'язків оптимізаційної задачі, коли розглядаються лише ті з них, які виявляються за певними ознаками перспективними, і відкидаються відразу цілі множини варіантів, що є безперспективними.

Розглянемо загальну схему методу на прикладі оптимізаційної задачі

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min, \ \boldsymbol{x} \in D, \tag{4.50}$$

де D — скінченна множина, а $\boldsymbol{x} \in E^n$.

Основу методу складають такі процедури.

1. ***Обчислення нижньої оцінки (границі)*** для значень цільової функції $f(\boldsymbol{x})$ на допустимій множині $D = D^0$ (або на деякій її підмножині), тобто, знаходження числа $\xi(D^0)$, такого, що $f(\boldsymbol{x}) \geq \xi(D^0)$ для всіх $\boldsymbol{x} \in D^0$. Питання про те, як знаходиться $\xi(D^0)$, вирішується окремо для кожної задачі.

2. ***Розбиття на підмножини (розгалуження).*** Реалізація методу пов'язана з розгалуженням множини D (або деякої її підмножини) в дерево підмножин згідно такої схеми.

Нульовий (початковий) крок. Деяким чином (в залежності від задачі) множину D^0 розбиваємо на скінченне число підмножин $D^{1,1},...,D^{1,N_1}$, таких, що не перетинаються між собою, і

$$D^0 = \bigcup_{l=1}^{N_1} D^{1,l}$$

(див. рис. 4.2).

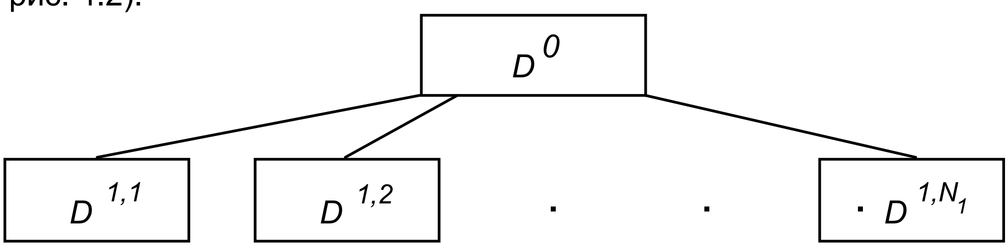


Рис. 4.2

S-й крок ($s \geq 1$). Маємо множини $D^{s,1},...,D^{s,N_s}$, одержані на попередньому кроці. За певним правилом (що формулюється нижче) серед них вибирається множина $D^{s,u}$, яка вважається перспективною. Ця множина розбивається на скінченне число підмножин $D^{s,u,1},...,D^{s,u,l},...,D^{s,u,k_u}$ таких, що не перетинаються між собою, і

$$D^{s,u} = \bigcup_{l=1}^{k_u} D^{s,u,l}$$

(див. рис. 4.3).

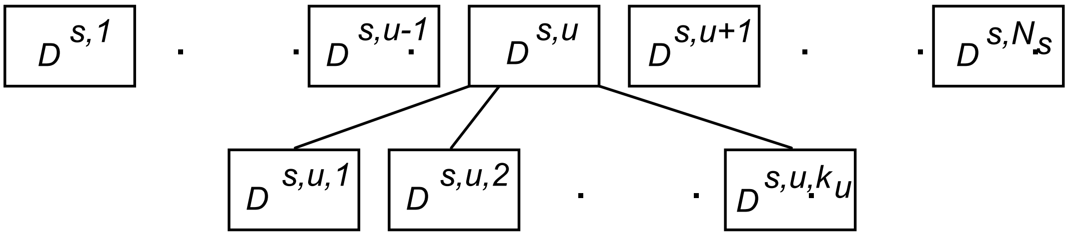


Рис. 4.3

Перепозначаємо множини $D^{s,1},...,D^{s,u-1},D^{s,u+1},...,D^{s,N_s}$, що не розгалужувалися, та множини $D^{s,u,1},...,D^{s,u,l},...,D^{s,u,k_u}$, одержані розгалуженням $D^{s,u}$, через $D^{s+1,1},...,D^{s+1,N_{s+1}}$.

3. ***Обчислення оцінок.*** На кожному кроці розгалуження знаходимо оцінки $\xi(D^{s,l})$, $l = 1,...,N_s$, такі, що $f(\boldsymbol{x}) \geq \xi(D^{s,l})$ для всіх $\boldsymbol{x} \in D^{s,l}$. В будь-якому випадку, якщо

$$D^{s,u} = \bigcup_{l=1}^{k_u} D^{s,u,l},$$

то, як легко бачити, $\xi(D^{s,u,l}) \geq \xi(D^{s,u})$, $l = 1,...,k_u$.

4. ***Знаходження розв'язків.*** Для конкретних задач можна вказати різні способи (що, звичайно, визначаються специфікою задачі) знаходження допустимих розв'язків на послідовно розгалужуваних підмножинах.

5. ***Критерій оптимальності.*** Нехай

$$D^0 = \bigcup_{l=1}^{N_s} D^{s,l}$$

і $\boldsymbol{x}^{s,u} \in D^{s,u}$. Якщо при цьому $f(\boldsymbol{x}^{s,u}) = \xi(D^{s,u}) \leq \xi(D^{s,l})$, $l = 1,...,N_s$, то $\boldsymbol{x}^{s,u}$ є оптимальним розв'язком задачі (4.50).

Всі описані вище дії дозволяють сформулювати

Алгоритм методу віток та границь

1. Обчислюється оцінка $\xi(D) = \xi(D^0)$. Якщо при цьому знаходиться такий план $\boldsymbol{x}^*$, що $f(\boldsymbol{x}^*) = \xi(D^0)$, то кінець: $\boldsymbol{x}^*$ є оптимальний розв'язок задачі (4.50). Інакше множина D^0 розбивається на скінченне число підмножин $D^{1,1},...,D^{1,N_1}$, причому

$$D^{0}=\bigcup_{l=1}^{N_1} D^{1,l}.$$

Обчислюємо оцінки $\xi(D^{1,l})$, $l=1,\dots,N_1$. Якщо для деякого l ($l=1,\dots,N_1$) $D^{1,l}$ є порожньою множиною, то покладаємо $\xi(D^{1,l})=\infty$.

2. Нехай на s-у кроці маємо множини $D^{s,1},\dots,D^{s,N_s}$, для яких $\xi(D^{s,1}),\dots,\xi(D^{s,N_s})$ є, відповідно, нижніми оцінками для значень цільової функції. Якщо вдається знайти такий план $\boldsymbol{x}^*$, що $\boldsymbol{x}^*\in D^{s,i}$ при деякому $i=1,\dots,N_s$, і $f(\boldsymbol{x}^*)=$ $=\xi(D^{s,i})\le\xi(D^{s,l})$ при $i=1,\dots,N_s$, то кінець: $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальний план. Інакше

3. Знаходимо u з умови

$$\xi\left(D^{s,u}\right)=\min_{l=1,\dots,N_s}\xi\left(D^{s,l}\right).$$

Якщо таких індексів декілька, то можна вибрати будь-який з них, або всі відразу. Розбиваємо множину $D^{s,u}$ на скінченне число підмножин $D^{s,u,1},\dots,D^{s,u,k_u}$ таких, що не перетинаються між собою, і

$$D^{s,u}=\bigcup_{l=1}^{k_u} D^{s,u,l}.$$

Обчислюємо оцінки $\xi(D^{s,u,l})$, $l=1,\dots,k_u$, перепозначаємо множини $D^{s,1},\dots,D^{s,u-1},D^{s,u+1},\dots,D^{s,N_s}$, та $D^{s,u,l}$, $l=1,\dots,k_u$, через $D^{s+1,1},\dots,D^{s+1,N_{s+1}}$ і переходимо до пункту 2 алгоритму, заміняючи s на $s+1$.

Зрозуміло, що розглянутий метод через скінченність допустимої множини D є скінченним. Однак у загальному випадку неможливо аналітично оцінити кількість ітерацій, необхідних для розв'язання конкретної оптимізаційної задачі. Практика свідчить, що для задач з великим числом змінних кількість ітерацій може виявитися неприпустимо великою навіть при розв'язанні цієї задачі на *ЕОМ*. Проте відомі приклади, коли і задачі з порівняно невеликою кількістю змінних не могли бути розв'язані методом віток та границь за прийнятний час через те, що направлений перебір незначно відрізнявся від повного.

Ще раз підкреслимо, що при реалізації вищеописаної загальної схеми методу віток та границь для окремих задач дискретного програмування необхідно розроблювати, виходячи із специфіки, правила розгалуження, способи обчислення оцінок та знаходження розв'язків.

Далі наводиться *алгоритм методу Ленд-Дойг*, який являє собою реалізацію *методу віток та границь* для задачі цілочисельного лінійного програмування:

$$L(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{4.51}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad R_i \quad b_i,\ i=1,\dots,m, \tag{4.52}$$

$$0\le x_j\le d_j,\ j=1,\dots,n, \tag{4.53}$$

$$x_j \text{ — ціле},\ j=1,\dots,n, \tag{4.54}$$

де R_i $(i=1,\dots,m)$ — будь-які з відношень $\le$, $\ge$, $=$.

Деякі з чисел d_j в (4.53) можуть дорівнювати $+\infty$. Передбачається, що многогранна множина, яка визначена співвідношеннями (4.52), (4.53), є обмеженою.

Виклад методу Ленд-Дойг

Розв'язується допоміжна *ЗЛП* (4.51)–(4.53), яка отримана з вихідної *ЦЗЛП* (4.51)–(4.54) відкиданням умови цілочисельності змінних (4.54) (вітка $\mathbf{0;1}$). Якщо її розв'язок $\mathbf{x}(\mathbf{0;1})$ — цілочисельний, то він же є і розв'язком вихідної *ЦЗЛП*. У противному разі величина $\xi(\mathbf{0;1})=L(\mathbf{x}(\mathbf{0;1}))$ дає нижню оцінку (*границю*) цільової функції *ЦЗЛП* на множині $D(\mathbf{0;1})=D$, що визначається співвідношеннями (4.52)–(4.53).

Нехай деяка координата $x_j(\mathbf{0;1})$ $(j=1,\dots,n)$ розв'язку $\mathbf{x}(\mathbf{0;1})$ не є цілочисельною. В цьому випадку здійснюється *розгалуження* множини $D(\mathbf{0;1})$ на дві підмножини $D(\mathbf{1;1})$ і $D(\mathbf{1;2})$ додаванням до обмежень, що задають $D(\mathbf{0;1})$, обмежень $x_j\le[x_j(\mathbf{0;1})]$ та $x_j\ge[x_j(\mathbf{0;1})]+1$ відповідно, де $[z]$ — ціла частина числа z. Далі розв'язуються нові допоміжні *ЗЛП* з обмеженнями, які визначаються підмножинами $D(\mathbf{1;1})$ та $D(\mathbf{1;2})$, знаходяться границі $\xi(\mathbf{1;1})$ та $\xi(\mathbf{1;2})$ і т. д.

Для подальшого розгалуження обирається *перспективна множина* $D(\mathbf{k;r})$ з найменшою границею $\xi(\mathbf{k;r})$. Процес продовжується доти, поки не буде отримано розв'язок, який задовольняє умову цілочисельності і для якого виконується ознака оптимальності (див. п. 4 алгоритму). Внаслідок обмеженості допустимої множини *ЗЛП* (скінченності допустимої множини *ЦЗЛП*) метод Ленд-Дойг скінченний.

Алгоритм методу Ленд-Дойг

1. Визначаються множини $D(\mathbf{k;r})$ умовами (4.52), (4.53) і додатковими обмеженнями, які виникають в процесі розгалуження (див. пункт 5). На **0**-у кроці покладаємо $D(\mathbf{0;1})=D$, де D задається умовами (4.52), (4.53).

2. Розв'язуються допоміжні *ЗЛП* на множинах $D(\mathbf{k;r})$. Нехай $\mathbf{x}(\mathbf{k;r})$ — оптимальні розв'язки вказаних *ЗЛП*.

3. Обчислюються границі на множинах $D(\mathbf{k;r})$ за формулою $\xi(\mathbf{k;r})=$ $=\,]L(\mathbf{x}(\mathbf{k;r}))[$, де $]z[$ — найменше ціле число, не менше z.

4. Якщо існують k, l такі, що $\mathbf{x}(\mathbf{k;l})$ — цілочисельний розв'язок та для всіх віток $\mathbf{r}$ на $\mathbf{k}$-у кроці виконуються співвідношення

$$L(\mathbf{x}(\mathbf{k;l}))=\xi(\mathbf{k;l})\le\xi(\mathbf{k;r}),$$

то $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}(\mathbf{k;l})$ — оптимальний розв'язок *ЦЗЛП*.

5. Розгалуження здійснюється по нецілочисельній компоненті $x_j(\mathbf{k;r})$ (з мінімальним j) розв'язку $\mathbf{x}(\mathbf{k;r})$, що відповідає перспективній вітці $\mathbf{k;r}$ (якщо таких віток декілька, то вибирається вітка з мінімальним номером $\mathbf{r}$), додаванням до $D(\mathbf{k;r})$ однієї з підмножин $x_j\le[x_j(\mathbf{k;r})]$ або $x_j\ge[x_j(\mathbf{k;r})]+1$.

Приклад 4.5. *Розв'язати задачу*

$$L(\mathbf{x}) = -x_1 - 3x_2 \to \min,$$
$$x_1 + 4x_2 \le 14,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 12,$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — ціле},\ j = 1,2.$$

Розв'язок, що наводиться нижче, ілюструється схемою, яка представлена на рис. 4.7.

Будемо позначати через *D* з належними індексами допустимі області допоміжних *ЗЛП*, які отримуються з допустимих множин відповідних *ЦЗЛП* відкиданням умови цілочисельності.

0-й крок. Розв'язуємо допоміжну *ЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 3x_2 \to \min,\ \boldsymbol{x} \in D^0.$$

Її розв'язок має вигляд (див. рис. 4.4):

$$\boldsymbol{x}^0 = (6/5, 16/5),\ L(\boldsymbol{x}^0) = -54/5.$$

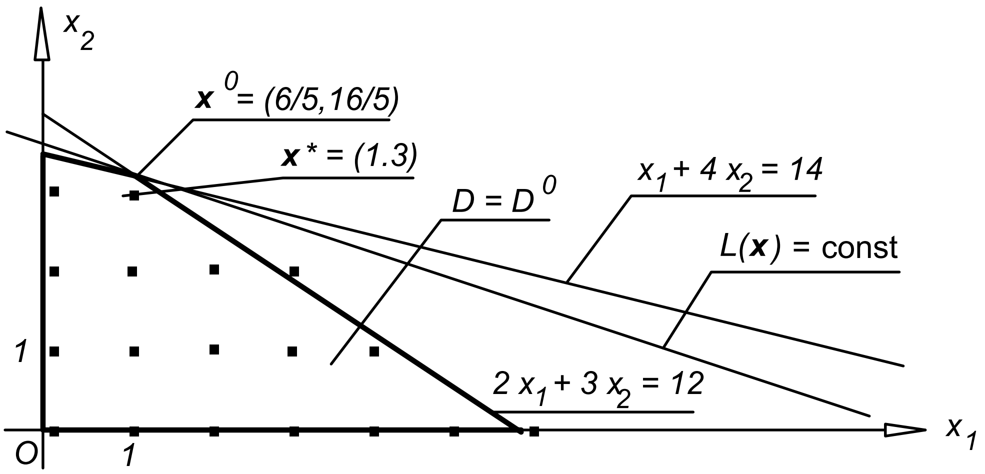


Рис. 4.4

Обчислюємо границю $\xi(D^0) =]-54/5[= -10$.

Проводимо розгалуження множини D^0:

$$D^0 = D^{1,1} \cup D^{1,2},$$

$$D^{1,1} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in D^0,\ x_1 \le [6/5] = 1\},$$

$$D^{1,2} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in D^0,\ x_1 \ge [6/5] + 1 = 2\}.$$

1-й крок. Розв'язуємо допоміжні *ЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 3x_2 \to \min,\ \boldsymbol{x} \in D^{1,1}.$$

$$L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 3x_2 \to \min,\ \boldsymbol{x} \in D^{1,2}.$$

Їх розв'язок має вигляд (див. рис. 4.5):

$$\boldsymbol{x}^{1,1} = (1, 13/4),\ L(\boldsymbol{x}^{1,1}) = -43/4,$$

$$\boldsymbol{x}^{1,2} = (2, 8/3),\quad L(\boldsymbol{x}^{1,2}) = -10.$$

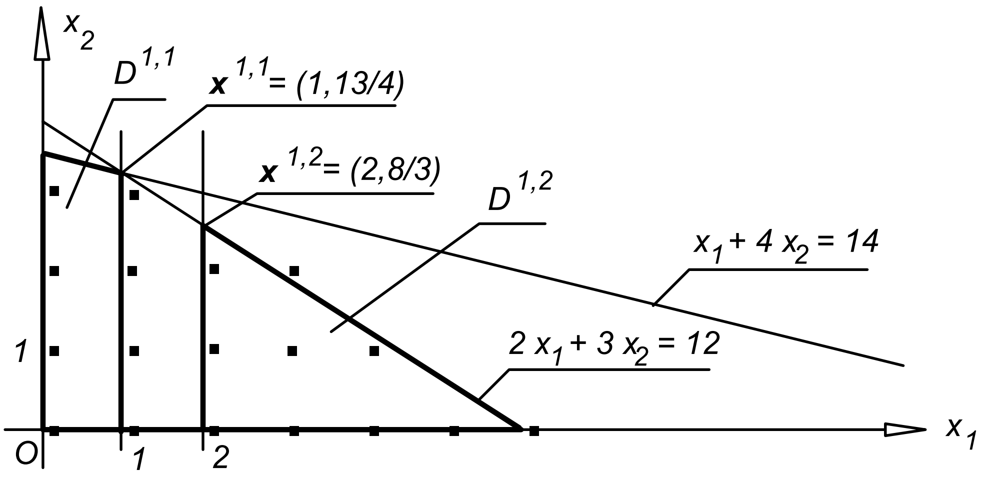


Рис. 4.5

Обчислюємо границі $\xi(D^{1,1})=]-43/4[=-10$, $\xi(D^{1,2})=]-10[=-10$.

Проводимо розгалуження множини $D^{1,1}$:

$$D^{1,1} = D^{2,1} \cup D^{2,2},$$

$$D^{2,1} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in D^{1,1},\ x_2 \le [13/4] = 3\},$$

$$D^{2,2} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in D^{1,1},\ x_2 \ge [13/4] + 1 = 4\}.$$

Покладаємо $D^{2,3} = D^{1,2}$.

2-й крок. Розв'язуємо допоміжні *ЗЛП*

$$L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 3x_2 \to \min,\ \boldsymbol{x} \in D^{2,1}.$$

$$L(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 3x_2 \to \min,\ \boldsymbol{x} \in D^{2,2}.$$

Розв'язок першої задачі має вигляд (див. рис. 4.5):

$$\boldsymbol{x}^{2,1} = (1,3),\ L(\boldsymbol{x}^{2,1}) = -10,$$

друга задача розв'язку не має, так як множина $D^{2,2}$ порожня.

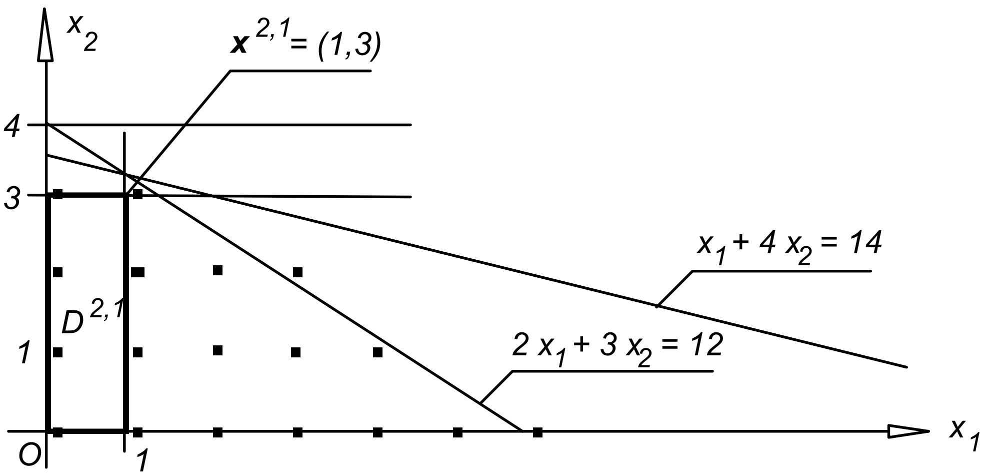


Рис. 4.6

Обчислюємо границю $\xi(D^{2,1})=]-10[=-10$ та покладаємо $\xi(D^{2,2})=\infty$.

Аналізуючи розв'язки *ЗЛП*, пов'язаних з областями $D^{2,1}$, $D^{2,2}$, $D^{2,3}$, та використовуючи критерій оптимальності, приходимо до висновку, що розв'язок вихідної *ЦЗЛП* має вигляд: $\boldsymbol{x}^*=(1,3)$, $L(\boldsymbol{x}^*)=-10$.

Зауважимо ще раз, що процес розв'язування наведеного прикладу ілюструється схемою, яка представлена на рис. 4.7.

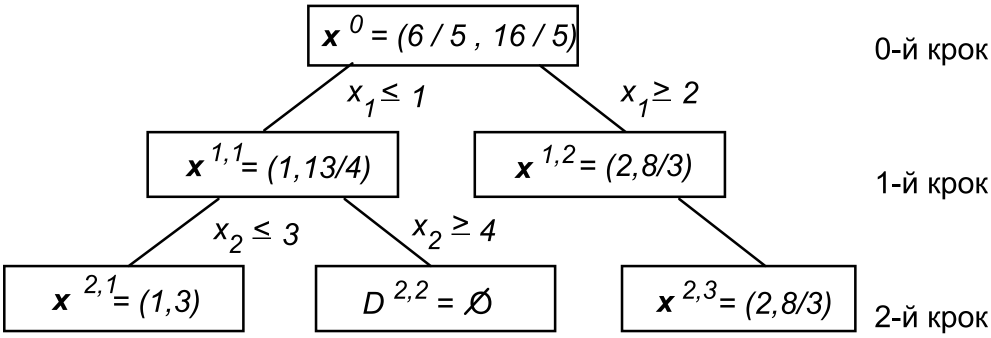


Рис. 4.7

§ 7. Задача про оптимальні призначення. Угорський метод. Метод Мака

Математичну постановку задачі про оптимальні призначення наведено у § 1 цього розділу:

знайти матрицю $\boldsymbol{X} = \| x_{ij} \|$, $i, j = 1, \ldots, n$, *що мінімізує цільову функцію*

$$L(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (4.55)$$

при виконанні обмежень

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, \ldots, n, \qquad (4.56)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, \ldots, n, \qquad (4.57)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ або } 1, \; i, j = 1, \ldots, n. \qquad (4.58)$$

де c_{ij} *— витрати, пов'язані з використанням i-го виконавця для виконання j-ї роботи. Елементи* c_{ij} *утворюють матрицю витрат* $\boldsymbol{C}$.

У відповідності з постановкою цієї задачі, розв'язати її — значить, іншими словами, вибрати у матриці $\boldsymbol{C}$ n елементів, по одному з кожного рядка (рядки відповідають виконавцям) і кожного стовпця (стовпці відповідають роботам) так, щоб сума вибраних елементів, яка дорівнює сумарним витратам, пов'язаним з призначеннями, була найменшою порівняно з її значеннями при всіх інших таких призначеннях.

Зауважимо, що задачі математичного програмування, в яких на змінні накладаються умови (4.58), називаються *задачами з булевими змінними.* Отже, *задача про оптимальні призначення є ЗЛП з булевими змінними*. Крім того, цю задачу можна розглядати як частинний випадок *ТЗЛП*. Дійсно, якщо умову (4.58) замінити умовою невід'ємності змінних, то (4.55)–(4.58) перетворюється у звичайну транспортну задачу, в якої об'єми виробництва $a_i = 1$, $i = 1, \ldots, n,$ і об'єми споживання $b_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Якщо розв'язати цю задачу методом потенціалів, або іншим методом, що забезпечує цілочисельний оптимальний розв'язок при цілочисельних a_i та b_j, то одержаний розв'язок буде автоматично задовольняти не враховане обмеження (4.58). Проте специфіка цієї задачі дозволяє розв'язати її більш простими методами, ніж метод потенціалів. Одними з таких методів є угорський метод та метод Мака.

Квадратні матриці $\boldsymbol{C} = \|c_{ij}\|$ та $\boldsymbol{D} = \|d_{ij}\|$ $(i, j = 1,\ldots,n)$ будемо називати *еквівалентними*, якщо елементи однієї з них одержуються з елементів другої шляхом додавання певних чисел до кожного рядка і кожного стовпця. Ці числа можуть бути різними для різних рядків та стовпців. Отже, матриці $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{D}$ еквівалентні, якщо, наприклад,

$$d_{ij} = c_{ij} + \alpha_i + \beta_j,\ i, j = 1,\ldots,n. \tag{4.59}$$

Зрозуміло, що ця властивість є взаємною.

Приклад 4.6. Матриці

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{та} \quad \boldsymbol{D} = \begin{Vmatrix} 6 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

є еквівалентними, бо матриця $\boldsymbol{D}$ одержується з матриці $\boldsymbol{C}$ додаванням до рядків чисел *0, 0, 1, –1* і додаванням до стовпців чисел *2, 3, 4, 1,* відповідно.

Теорема 4.4. *Оптимальні розв'язки задач про оптимальні призначення з еквівалентними матрицями витрат співпадають.*

<u>Доведення</u>. Нехай матриця $\boldsymbol{C}$ еквівалентна матриці $\boldsymbol{D}$ і $(1, j_1)$, $(2, j_2),\ldots,(n, j_n)$ — оптимальні призначення у задачі з матрицею витрат $\boldsymbol{C}$, тобто i-й виконавець призначається на виконання роботи j_i, $i = 1,\ldots,n$. Припустимо, що це призначення не є оптимальним у задачі з матрицею витрат $\boldsymbol{D}$.

Нехай $(1, j_1')$, $(2, j_2'),\ldots,(n, j_n')$ — оптимальні призначення у задачі з матрицею витрат $\boldsymbol{D}$, причому

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij_i'} < \sum_{i=1}^{n} d_{ij_i}.$$

В силу (4.59) звідси маємо

$$\sum_{i=1}^{n} (c_{ij_i'} + \alpha_i + \beta_{j_i'}) < \sum_{i=1}^{n} (c_{ij_i} + \alpha_i + \beta_{j_i})$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij_i'} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{j_i'} < \sum_{i=1}^{n} c_{ij_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{j_i}. \tag{4.60}$$

Проте $\sum_{i=1}^{n} \beta_{j_i'} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{j_i}$, бо в обох випадках це є сума чисел, які додаються до стовпців матриці $\boldsymbol{C}$. Отже, з (4.60) маємо

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij_i'} < \sum_{i=1}^{n} c_{ij_i} \; ,$$

що протирічить тому, що для задачі з матрицею витрат ***C*** призначення (i, j_i), $i=1,\ldots,n,$ є оптимальним.

Оскільки властивість еквівалентності матриць є взаємною, то оптимальні призначення у задачі з матрицею витрат ***C*** співпадають з оптимальними призначеннями у задачі з матрицею витрат ***D***. Доведення завершене.

Доведена теорема дозволяє, якщо це необхідно, переходити від даної задачі про оптимальні призначення до задачі з еквівалентною матрицею витрат. Тому вихідну задачу завжди можна звести до задачі про оптимальні призначення з матрицею витрат, яка має лише невід'ємні елементи. Оскільки найменше можливе значення суми n елементів такої матриці, очевидно, дорівнює нулю, то наша задача зводиться до вибору у матриці витрат, або еквівалентній їй, n нульових елементів, по одному в кожному рядку і кожному стовпці. В цьому, власне, полягає неформальний зміст алгоритму угорського методу, що викладаються нижче, де матриці, еквівалентні вихідній матриці витрат ***C***, називаються просто матрицями витрат.

Алгоритм угорського методу

1. Віднімаємо у матриці ***C*** від кожного елемента i-го рядка мінімальний елемент цього рядка, $i=1,\ldots,n.$

2. Віднімаємо від кожного елемента j-го стовпця перетвореної матриці витрат його мінімальний елемент, $j=1,\ldots,n.$ В результаті виконання двох пунктів кожний рядок і кожний стовпець матриці витрат мають принаймні один *0*.

3. Проглядаємо послідовно рядки матриці витрат, починаючи з першого. Якщо рядок має лише один непомічений *0*, помічаємо його позначкою ***** і закреслюємо (за допомогою позначки **^**) всі нулі у цьому ж стовпці. *0* вважається поміченим, якщо він має позначку *****. Повторюємо ці дії, поки кожен рядок не буде мати непомічених нулів, або буде мати їх принаймні два.

4. Дії пункту 3 повторюємо для всіх стовпців матриці витрат.

5. Дії пунктів 3 та 4 повторюємо послідовно (якщо необхідно), поки не одержимо один з трьох можливих випадків:

- i) кожний рядок має призначення (має *0* з позначкою *****);
- ii) є принаймні два непомічених нулі в деяких рядках і деяких стовпцях матриці витрат;
- iii) немає непомічених нулів і повне призначення ще не отримане (число нулів з позначкою ***** менше n).

6. У випадку i) задача про оптимальні призначення розв'язана: x_{ij}^*, що відповідають 0^*, дорівнюють *1*, решта — *0*, кінець алгоритму. У випадку ii) довільно вибираємо один з непомічених нулів, помічаємо його позначкою *****, закреслюємо решту нулів у тому ж рядку і у тому ж стовпці і повертаємося до пункту 3. Якщо має місце випадок iii), то переходимо до пункту 7.

7. Помічаємо позначкою (міткою) **#** рядки, для яких не одержано призначення (в яких немає 0^*). Такі рядки вважаємо поміченими, решту — непоміченими. Таку ж термінологію будемо використовувати і для стовпців матриці витрат.

8. Помічаємо позначкою **#** ще непомічені стовпці, які мають закреслений *0* (помічений позначкою **^**) у помічених рядках.

9. Помічаємо позначкою **#** ще непомічені рядки, які мають призначення (тобто *0**) у помічених стовпцях.

10. Повторюємо дії пунктів 8 та 9 доти, поки більше не можна помітити рядків і стовпців матриці витрат.

11. Закреслюємо (за допомогою позначки &) непомічені рядки і помічені стовпці матриці витрат.

12. Знаходимо мінімальний незакреслений елемент матриці витрат, віднімаємо його від кожного з незакреслених рядків , додаємо до елементів усіх закреслених стовпців і переходимо до пункту 3. При цьому позначки елементів матриці витрат (* та ^) втрачають свою силу.

Зауважимо, що якщо в задачі про оптимальні призначення (4.55)-(4.58) цільову функцію (4.55) потрібно максимізувати (у цьому випадку c_{ij} — ефективність, пов′язана з призначенням *i*-го виконавця на *j*-й вид роботи), то для її розв′язання можна застосувати угорський метод, замінивши матрицю $\boldsymbol{C}$ на $-\boldsymbol{C}$.

Приклад 4.7. *Розв'язати задачу про оптимальні призначення з матрицею витрат* $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{C} = \left\| \begin{array}{ccccc} 3 & 10 & 5 & 9 & 16 \\ 6 & 8 & 11 & 8 & 18 \\ 7 & 13 & 10 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 6 & 21 & 12 \\ 5 & 4 & 11 & 6 & 13 \end{array} \right\| \qquad \boldsymbol{C}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \# & & & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0^* & 7 & 1 & 6 & 12 \\ 0^\wedge & 2 & 4 & 2 & 11 \\ 4 & 10 & 6 & 0^* & 0^\wedge \\ 0^\wedge & 4 & 0^* & 16 & 6 \\ 1 & 0^* & 6 & 2 & 8 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ \# \\ \# \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Виконуючи дії пунктів 1, 2 алгоритму, які інколи називають попередніми перетвореннями, одержуємо еквівалентну матрицю $\boldsymbol{C}_1$. Помічаємо нулі матриці $\boldsymbol{C}_1$ у відповідності з пунктами 3, 4, 5 алгоритму. Так як кількість нулів, помічених *****, менша $n = 5$, то переходимо до пункту 7. Виконуючи дії пунктів 7–10, позначаємо міткою **#** спочатку другий рядок, потім перший стовпець та перший рядок матриці $\boldsymbol{C}_1$. Після виконання пункту 11 алгоритму одержуємо матрицю $\boldsymbol{C}_2$.

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \& & & & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0^* & 7 & 1 & 6 & 12 \\ 0^\wedge & 2 & 4 & 2 & 11 \\ 4 & 10 & 6 & 0^* & 0^\wedge \\ 0^\wedge & 4 & 0^* & 16 & 6 \\ 1 & 0^* & 6 & 2 & 8 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \& \\ \& \\ \& \end{array} \qquad \boldsymbol{C}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \# & & \# & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0^\wedge & 6 & 0^\wedge & 5 & 11 \\ 0^* & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 0^* & 0^\wedge \\ 1 & 4 & 0^* & 16 & 6 \\ 2 & 0^* & 6 & 2 & 8 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ \# \\ \# \\ \\ \# \\ \\ \end{array}$$

Мінімальний незакреслений елемент матриці $\boldsymbol{C}_2$ дорівнює *1*. Після виконання пункту 12 алгоритму одержуємо матрицю витрат $\boldsymbol{C}_3$, до якої також внесені позначки у відповідності з діями пунктів 3–10 алгоритму. Виконання пунктів 11, 12 приводить, відповідно, до матриць $\boldsymbol{C}_4$ та $\boldsymbol{C}_5$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \& & & \& & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0^\wedge & 6 & 0^\wedge & 5 & 11 \\ 0^* & 1 & 3 & 1 & 10 \end{array} \right\| \end{array} \qquad \left\| \begin{array}{ccccc} 0^* & 5 & 0^\wedge & 4 & 10 \\ 0^\wedge & 0^\wedge & 3 & 0^* & 9 \end{array} \right\|$$

$$C_4 = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccccc} 5 & 10 & 6 & 0^* & 0^\wedge \\ 1 & 4 & 0^* & 16 & 6 \\ 2 & 0^* & 6 & 2 & 8 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \& \\ \\ \& \end{array} \qquad C_5 = \left\| \begin{array}{ccccc} 6 & 10 & 7 & 0^\wedge & 0^* \\ 1 & 3 & 0^* & 15 & 5 \\ 3 & 0^* & 7 & 2 & 8 \end{array} \right\|$$

Матриця C_5 містить також мітки, що відображають дії пунктів 3–5 алгоритму на наступній ітерації. Оскільки кількість 0^* дорівнює 5, то одержано оптимальний розв'язок $\boldsymbol{x}^*$:

$$\boldsymbol{x}^* = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

тобто перший виконавець призначається на виконання першої роботи, другий — четвертої, третій — п'ятої, четвертий — третьої, п'ятий — другої. При цьому $L(\boldsymbol{x}^*) = 25$.

Алгоритм методу Мака

1. Позначаємо мінімальний елемент кожного рядка матриці витрат позначкою *. Якщо таких елементів декілька, позначаємо будь-який з них.

2. Для кожного рядка, що має інший мінімальний елемент, проглядаємо стовпець, до якого цей елемент належить. Можливі випадки:

i) стовпець не має позначених елементів;

ii) стовпець має принаймні один позначений елемент.

3. У випадку i) позначаємо інший мінімальний елемент рядка позначкою *****. Всі інші позначки в цьому рядку знімаються. У випадку ii) позначаємо інший мінімальний елемент рядка позначкою **^**, якщо елемент цього рядка з позначкою ***** не є єдиним позначеним елементом у своєму стовпці.

4. Дії пунктів 2 та 3 повторюємо послідовно для всіх рядків, що мають більше одного мінімального елемента.

5. Якщо кожний стовпець матриці витрат має елемент з позначкою *****, то кінець алгоритму: ці елементи визначають оптимальні призначення. Інакше переходимо до наступного пункту.

6. Позначаємо (позначкою **&**) стовпці, що мають більше одного позначеного елемента. Вони утворюють множину $\boldsymbol{B}$, інші стовпці матриці витрат утворюють множину $\boldsymbol{A}$.

7. Для кожного рядка матриці витрат, в якому елемент з позначкою ***** належить множині $\boldsymbol{B}$, знаходиться мінімальна різниця між елементами множини $\boldsymbol{A}$ і елементом з позначкою *****.

8. Знаходимо найменшу з вказаних різниць, додаємо її до кожного елемента множини $\boldsymbol{B}$ і повертаємось до пункту 2.

Приклад 4.8. *Розв'язати задачу про оптимальні призначення з матрицею витрат* $\boldsymbol{C}$ (*співпадає з умовою прикладу* 4.7).

$$\begin{array}{l} \quad \begin{array}{ccccc} \& & & & & \end{array} \\ \boldsymbol{C} = \left\| \begin{array}{ccccc} 3^* & 10 & 5 & 9 & 16 \\ 6^* & 8 & 11 & 8 & 18 \\ 7 & 13 & 10 & 3^* & 4 \\ 5^* & 9 & 6 & 21 & 12 \end{array} \right\| \end{array} \qquad \begin{array}{l} \quad \begin{array}{ccccc} \& & & & & \end{array} \\ \boldsymbol{C}_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} 4^* & 10 & 5 & 9 & 16 \\ 7^* & 8 & 11 & 8 & 18 \\ 8 & 13 & 10 & 3^* & 4 \\ 6 & 9 & 6^* & 21 & 12 \end{array} \right\| \end{array}$$

$$\begin{Vmatrix} 5 & 4^* & 11 & 6 & 13 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 6 & 4^* & 11 & 6 & 13 \end{Vmatrix}$$

В матриці $\boldsymbol{C}$ позначкою * позначені елементи згідно пункту 1 алгоритму. Інших мінімальних елементів рядки матриці витрат не мають, тому, виконуючи пункт 6, позначаємо перший стовпець позначкою **&**. Множина $\boldsymbol{B}$ містить перший стовпець, решта стовпців належать до множини $\boldsymbol{A}$. Мінімальні різниці обчислюються для першого, другого та четвертого рядків. Вони дорівнюють, відповідно, *2*, *2* та *1*. Мінімальна з цих різниць (*1*) додається до елементів першого стовпця. Оскільки у четвертому рядку з'явився інший мінімальний елемент (*6*), то, виконуючи пункти 3 та 4 алгоритму, позначаємо його позначкою *. Перший стовпець формує множину $\boldsymbol{B}$ (дивись матрицю $\boldsymbol{C}_1$). Мінімальна різниця дорівнює *1*.

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{C}_2 = \end{array}\begin{array}{ccccc} \& & \& & \& & \& & \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{Vmatrix} 5^* & 10 & 5^\wedge & 9 & 16 \\ 8^* & 8^\wedge & 11 & 8^\wedge & 18 \\ 9 & 13 & 10 & 3^* & 4 \\ 7 & 9 & 6^* & 21 & 12 \\ 7 & 4^* & 11 & 6 & 13 \end{Vmatrix} \qquad \boldsymbol{C}_3 = \begin{Vmatrix} 6^* & 11 & 6^\wedge & 10 & 16 \\ 9^* & 9^\wedge & 12 & 9^\wedge & 18 \\ 10 & 14 & 11 & 4^* & 4 \\ 8 & 10 & 7^* & 22 & 12 \\ 8 & 5^* & 12 & 7 & 13 \end{Vmatrix}$$

Дії наступного кроку наведені в матриці $\boldsymbol{C}_2$. Мінімальна різниця дорівнює *1*. Збільшуючи елементи множини $\boldsymbol{B}$ на *1*, одержуємо матрицю $\boldsymbol{C}_3$. Позначаючи позначкою * інший мінімальний елемент (*4*) у третьому рядку, позначаємо позначкою * інший мінімальний елемент другого рядка (*9*), що знаходиться у четвертому стовпці.

$$\boldsymbol{C}_4 = \begin{Vmatrix} 6^* & 11 & 6 & 10 & 16 \\ 9 & 9 & 12 & 9^* & 18 \\ 10 & 14 & 11 & 4 & 4^* \\ 8 & 10 & 7^* & 22 & 12 \\ 8 & 5^* & 12 & 7 & 13 \end{Vmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Після цього кожен стовпець матриці витрат має елемент, позначений позначкою * (див. матрицю $\boldsymbol{C}_4$). Отже, оптимальні призначення визначаються матрицею $\boldsymbol{x}^*$, що наводиться вище. При цьому $L(\boldsymbol{x}^*) = 25$.

Розділ 5. Елементи теорії матричних ігор

§ 1. Матрична гра

Матрична гра визначається такими правилами. Грають два гравці P_1 та P_2. Перший з них вибирає число (*стратегію*) i ($i=1,\dots,m$), другий — число j ($j=1,\dots,n$). Вибір гравці роблять одночасно і незалежно один від одного. Після цього гравець P_1 платить P_2 суму c_{ij}, що визначається умовами конкретної гри (якщо $c_{ij}>0$, то P_1 платить P_2, якщо $c_{ij}<0$, то P_2 платить P_1 суму $|c_{ij}|$). Величини c_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, відомі кожному з гравців. Потрібно вказати найкращий вибір для кожного гравця.

Розглянемо матрицю

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{Vmatrix}$$

і назвемо її *платіжною матрицею* або *матрицею виграшів* гравця P_2. Очевидно, що вибір числа i гравцем P_1 можна трактувати, як вибір i-го рядка матриці $\boldsymbol{C}$, вибір числа j гравцем P_2, як вибір j-го стовпця тієї ж матриці.

Зауважимо, що якщо позначити через I та J відповідно множини можливих стратегій гравців P_1 та P_2, тобто $I=\{1,\ldots,i,\ldots,m\}$, $J=\{1,\ldots,j,\ldots,n\}$, то матрична гра повністю визначається трійкою $\boldsymbol{G} = (I, J, \boldsymbol{C})$.

Приклад 5.1 (угадування монет). Кожен з двох гравців незалежно один від одного вибирає певний бік монети, називаючи одночасно свій вибір. Якщо вибрані різні боки монети, то перший гравець платить другому одну грошову одиницю, інакше — другий платить першому гравцеві одну грошову одиницю.

Платіжна матриця цієї гри має вигляд

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

§ 2. Оптимальні чисті стратегії

Розглянемо матричну гру $\boldsymbol{G}$ з точки зору гравця P_2. Нагадаємо, що він вибирає j-й стовпець $(c_{1j},\ldots,c_{mj})'$ матриці $\boldsymbol{C}$. При цьому він одержує від першого гравця принаймні

$$\min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}.$$

Оскільки гравець P_2 прагне зробити свій виграш максимальним і може довільно вибирати стовпець матриці $\boldsymbol{C}$, то він вибирає j таким, що максимізує

$$\min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}.$$

При цьому гарантований виграш P_2 дорівнює величині

$$\underline{v} = \max_{j=1,\ldots,n} \min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}, \tag{5.1}$$

що називається *нижньою ціною гри* $\boldsymbol{G}$.

Аналогічним чином можна розглянути цю ж гру з точки зору гравця P_1. Зрозуміло, що матрицею його виграшів є матриця $-\boldsymbol{C} = \|-c_{ij}\|$, $i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$. Міркуючи аналогічно, робимо висновок, що гарантований виграш гравця P_1 складає

$$\max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} (-c_{ij}) = -\min_{i=1,\ldots,m} \max_{j=1,\ldots,n} c_{ij}.$$

При цьому гравець P_2 одержить щонайбільше

$$\overline{v} = \min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} c_{ij}. \qquad (5.2)$$

Величина $\overline{v}$ називається *верхньою ціною гри* $\boldsymbol{G}$.

Отже, гравець P_2 може гарантувати собі виграш принаймні $\underline{v}$, а гравець P_1 може перешкодити йому одержати більше $\overline{v}$. Якщо $v = \overline{v} = \underline{v}$, тобто

$$v = \min_{i=1,\dots,m} \max_{j=1,\dots,n} c_{ij} = \max_{j=1,\dots,n} \min_{i=1,\dots,m} c_{ij}, \qquad (5.3)$$

то гравець P_2 має зрозуміти, що він може одержати v, а його супротивник перешкодить йому одержати більше v. Тому числа i^*, j^* такі, що у співвідношенні (5.3) $c_{i^*j^*} = v$, природно назвати *оптимальними чистими стратегіями* гравців P_1 та P_2 відповідно. У цьому випадку кажуть, що матрична *гра* $\boldsymbol{G}$ *допускає розв'язок у чистих стратегіях*, а величина v називається *ціною гри*.

Виявляється, що співвідношення (5.3) виконується далеко не для кожної гри, що визначається платіжною матрицею $\boldsymbol{C}$. Отже, не кожна гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Приклад 5.2. Розглянемо матричну гру з платіжною матрицею

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{cc} \left\| \begin{array}{rrr} 50 & 27 & 64 \\ 50 & 5 & 90 \\ 18 & 9 & 12 \\ 25 & 95 & 20 \end{array} \right\| & \begin{array}{r} \mathbf{64} \\ \mathbf{90} \\ \mathbf{18} \\ \mathbf{95} \end{array} \\ \begin{array}{rrr} \mathbf{18} & \mathbf{5} & \mathbf{12} \end{array} & \end{array}$$

У додатковому рядку підраховані величини

$$\min_{i=1,\dots,4} c_{ij}$$

для кожного j, а в додатковому стовпці — величини

$$\max_{j=1,\dots,3} c_{ij}$$

для кожного i. Для цієї гри

$$\min_{i=1,\dots,4} \max_{j=1,\dots,3} c_{ij} = \max_{j=1,\dots,3} \min_{i=1,\dots,4} c_{ij} = 18 = c_{31},$$

тобто співвідношення (5.3) виконується для $i^* = 3$, $j^* = 1$, а $v = 18$.

Очевидно, що якщо один з гравців відступить від своєї оптимальної чистої стратегії, а другий буде її дотримуватися, то становище гравця, що відступає від оптимального вибору, може лише погіршитись.

Приклад 5.3. Для гри "угадування монет", як легко бачити,

$$\overline{v} = \min_{i=1,2} \max_{j=1,2} c_{ij} = 1, \quad \underline{v} = \max_{j=1,2} \min_{i=1,2} c_{ij} = -1, \quad \overline{v} \neq \underline{v},$$

тому ця гра не має розв'язку в чистих стратегіях.

Вияснимо загальні умови, при яких має місце співвідношення (5.3). Нехай $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — дійсна функція дійсних змінних $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$.

Означення 5.1. *Точка* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ *називається сідловою точкою функції* $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *якщо для будь-яких* $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$ *має місце нерівність*

$$f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*). \qquad (5.4)$$

Як частинний випадок маємо: сідловою точкою матриці $\boldsymbol{C} = \|c_{ij}\|$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, *називається пара* (i^*, j^*) *така, що*

$$c_{i^*j} \le c_{i^*j^*} \le c_{ij^*} \qquad (5.5)$$

для всіх $i=1,\ldots,m$ *та* $j=1,\ldots,n$.

Кажуть, що матрична гра має сідлову точку, якщо сідлову точку має її платіжна матриця.

Теорема 5.1. *Матрична гра* **G** *має розв'язок у чистих стратегіях тоді і лише тоді, коли її платіжна матриця* **C** *має сідлову точку. При цьому, якщо* (i^*, j^*) *— сідлова точка матриці* **C**, *то ціна гри* $v = c_{i^*j^*}$.

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з двох лем, що розглядаються нижче.

Лема 5.1. *Нехай для дійсної функції* $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$, *існують*

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Тоді має місце нерівність

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \qquad (5.6)$$

<u>Доведення</u>. За означенням максимуму та мінімуму маємо

$$\max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Оскільки нерівність

$$\max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

має місце для будь-якого $\boldsymbol{x} \in X$, то

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

З останньої нерівності аналогічним чином робимо висновок про справедливість нерівності (5.6).

Зауважимо, що (5.6) має місце і для частинного випадку, коли функція $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ визначає матрицю $\boldsymbol{C} = \|c_{ij}\|$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$. При цьому

$$\min_{i=1,\ldots,m} \max_{j=1,\ldots,n} c_{ij} \ge \max_{j=1,\ldots,n} \min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}.$$

Лема 5.2. *Нехай виконані умови леми 5.1. Для того, щоб виконувалось співвідношення*

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad (5.7)$$

необхідно і достатньо, щоб функція $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *мала сідлову точку. При цьому для сідлової точки* $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$

$$f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) = \min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \qquad (5.8)$$

Доведення.

Необхідність. Нехай має місце співвідношення (5.7). Покажемо, що функція $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ має сідлову точку. Позначимо через $\boldsymbol{x}^*$ та $\boldsymbol{y}^*$ точки, що визначаються з умов

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*) = \max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

Праві частини останніх співвідношень рівні внаслідок (5.7), отже

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*).$$

З останньої рівності за означенням мінімуму маємо

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*),$$

звідки, приймаючи до уваги означення максимуму, одержуємо

$$f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \qquad (5.9)$$

для всіх $\boldsymbol{y} \in Y$.

Аналогічно встановлюється, що для всіх $\boldsymbol{x} \in X$

$$f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \le f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*),$$

що разом з (5.9) означує $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$, як сідлову точку функції $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

Достатність. Нехай $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ — сідлова точка функції $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Покажемо, що при цьому виконується (5.8). З означення сідлової точки (5.4) маємо

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \le \min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*).$$

За означенням мінімуму та максимуму

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le \max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}),$$

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ge \min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*),$$

тому з останніх трьох нерівностей маємо

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \le \max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

що у сукупності з (5.6) завершує доведення (5.8).

Зауважимо, що сформульована вище теорема 5.1 є частинним випадком леми 5.2.

§ 3. Оптимальні змішані стратегії

У попередньому розділі було показано, що для матричних ігор з сідловою точкою можна розумним чином означити поняття оптимальних чистих стратегій гравців. У той же час очевидно, що при відсутності сідлової точки в платіжній матриці гри жодному з гравців не слід постійно використовувати одну і ту ж чисту стратегію.

У зв'язку з цим цілком природною є спроба означити поняття оптимальної стратегії для матричних ігор без сідлової точки в класі так званих *змішаних стратегій*.

Означення 5.2. *Змішаною стратегією гравця P_1 називається вектор*

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_m),\ x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

а змішаною стратегією гравця P_2 — вектор

$$\boldsymbol{y} = (y_1,\dots,y_n)',\ y_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Величини x_i $(i=1,\dots,m)$ та y_j $(j=1,\dots,n)$ трактуються як ймовірності, з якими гравці P_1 та P_2 вибирають відповідно i-й рядок та j-й стовпець матриці $\boldsymbol{C}$.

Зрозуміло, що i-у чисту стратегію гравця P_1 можна розглядати як частинний випадок його змішаної стратегії $\boldsymbol{x}$ при $x_i = 1$, $x_k = 0$, $k \ne i$. Це ж стосується і j-ї чистої стратегії гравця P_2.

Позначимо через X та Y, відповідно, множини змішаних стратегій першого та другого гравців, тобто

$$X = \{\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_m):\ x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

$$Y = \{\boldsymbol{y} = (y_1,\dots,y_n)':\ y_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}.$$

Якщо гравець P_1 використовує свою змішану стратегію $\boldsymbol{x} \in X$, а P_2 — $\boldsymbol{y} \in Y$, то *математичне сподівання плати гравця P_1 гравцеві P_2* (*середній виграш гравця P_2*) знаходиться звичайним чином

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, y_j\ . \qquad (5.10)$$

Трійка $\overline{\boldsymbol{G}} = (X, Y, F)$ називається *усередненням матричної гри $\boldsymbol{G}$*.

Міркуючи аналогічно випадку чистих стратегій, приходимо до висновку, що гравець P_1 може забезпечити собі середній програш не більше

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} G(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \qquad (5.11)$$

а гравець P_2 може забезпечити собі середній виграш не менше

$$\max_{\boldsymbol{y} \in Y} H(\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \qquad (5.12)$$

Задачі (5.11) та (5.12) є задачами пошуку гарантованих змішаних стратегій першим та другим гравцем відповідно.

Якщо для деяких змішаних стратегій $\boldsymbol{x}^* \in X$, $\boldsymbol{y}^* \in Y$

$$F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) \le F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*), \qquad (5.13)$$

для всіх $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$, тобто якщо $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ є сідловою точкою функції $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, то, як було доведено раніше,

$$F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \qquad (5.14)$$

Аналогічно випадку існування розв'язку гри G у чистих стратегіях можна дати такі означення.

Компоненти x^* та y^* сідлової точки (x^*, y^*) функції $F(x,y)$ називаються *оптимальними змішаними стратегіями* відповідно гравців P_1 та P_2, а $F(x^*, y^*)$ — *ціною гри* $\boldsymbol{G}$. При цьому кажуть, що *матрична гра має розв'язок у змішаних стратегіях.*

Теорема 5.2. *Задачі (5.11), (5.12) гравців P_1 та P_2 еквівалентні відповідно таким ЗЛП:*

$$\left.\begin{array}{c} x_{m+1} \to min, \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \le x_{m+1}, \ j=1,\dots,n, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ x_i \ge 0, \ i = 1,\dots,m; \end{array}\right\} \qquad (5.15)$$

$$\left.\begin{array}{c} y_{n+1} \to max, \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \ge y_{n+1}, \ i=1,\dots,m, \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\ y_j \ge 0, \ j = 1,\dots,n. \end{array}\right\} \qquad (5.16)$$

Доведення. Покажемо, що задача (5.11) еквівалентна задачі (5.15). Зрозуміло, що для будь-якої обмеженої на замкненій множині D функції $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ задача

$$\max_{\boldsymbol{y} \in Y} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \min_{\boldsymbol{x} \in X}$$

еквівалентна задачі

$$z \to \min, \ F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le z, \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D.$$

У зв'язку з цим задача (5.11) еквівалентна задачі

$$\left.\begin{aligned} & x_{m+1} \to min, \\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} y_j \le x_{m+1}, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \ge 0, \ i = 1,\dots,m, \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \ge 0, \ j = 1,\dots,n. \end{aligned}\right\} \qquad (5.17)$$

Тому досить показати, що множина допустимих розв'язків задачі (5.17) співпадає з допустимою множиною задачі (5.15).

Дійсно, нехай ***x*** задовольняє умови задачі (5.17). Тоді, зокрема, ***x*** задовольняє і умови задачі (5.15). Для цього досить в (5.17) покласти $y_j = 1$ при деякому j та $y_k = 0$, $k \ne j$. Тепер нехай ***x*** задовольняє обмеження задачі (5.15). Помноживши обидві частини кожної з нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \le x_{m+1}, \ j = 1,\dots,n, \text{ на } y_j \ge 0, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

і підсумовуючи по j, одержимо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} y_j \le x_{m+1},$$

тобто ***x*** задовольняє обмеження задачі (5.17).

Доведення еквівалентності задач (5.12) та (5.16) аналогічне.

Лема 5.3. *Задачі* (5.15), (5.16) *є двоїстими ЗЛП.*

Доводиться ця лема простою перевіркою, виходячи з означення двоїстих *ЗЛП*.

Теорема 5.3 (про мінімакс). *Будь-яка матрична гра має розв'язок у змішаних стратегіях.*

Доведення. За теоремою 5.2 для *ЗЛП* (5.15)

$$\min_{D} x_{m+1} = \min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad (5.18)$$

а для ЗЛП (5.16)

$$\max_{\overline{D}} y_{n+1} = \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad (5.19)$$

де області D та $\overline{D}$ визначаються обмеженнями розглядуваних задач. За лемою 5.3 *ЗЛП* (5.15) та (5.16) є двоїстими. Якщо існує розв'язок однієї з пари двоїстих *ЗЛП*, тобто існує

$$\min_{D} x_{m+1} \quad \text{або} \quad \max_{\overline{D}} y_{n+1},$$

то за теоремою двоїстості існує розв'язок і другої задачі, причому

$$\min_{D} x_{m+1} = \min_{\bar{D}} y_{n+1} .$$

Враховуючи (5.18) та (5.19), звідси маємо

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

а це означає, що існують оптимальні змішані стратегії гравців у розглядуваній матричній грі.

Легко бачити, що *ЗЛП* (15), (16) завжди мають розв'язок. Розглянемо, наприклад, задачу (5.15). Оскільки x_{m+1} за знаком не обмежене, то множина D не є порожньою (будь-яке $\boldsymbol{x} \in X$ є допустимим розв'язком). Через те, що

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \; x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, m,$$

величина $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij} x_i$ обмежена знизу для будь-якого $j = 1, \ldots, n$. Звідси випливає, що x_{m+1} обмежена знизу, отже існує $\min\limits_{D} x_{m+1}$.

Приклад 5.4. Розглянемо матричну гру з платіжною матрицею

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} .$$

Легко бачити, що

$$\bar{v} = \min_{i=1,2} \max_{j=1,2} c_{ij} = 4, \quad \underline{v} = \max_{j=1,2} \min_{i=1,2} c_{ij} = -2, \quad \bar{v} \neq \underline{v} ,$$

тому гра не має сідлової точки.

Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)'$ — змішані стратегії гравців P_1, P_2 відповідно.

Середній виграш гравця P_2 визначається так:

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \, \boldsymbol{C} \, \boldsymbol{y}' = y_1 (-3 x_1 + 4 x_2) + y_2 (5 x_1 - 2 x_2).$$

Задачі (5.11), (5.12) мають вигляд:

$$\max_{y} [y_1 (-3 x_1 + 4 x_2) + y_2 (5 x_1 - 2 x_2)] \to \min_{x}$$

$$\min_{x} [y_1 (-3 x_1 + 4 x_2) + y_2 (5 x_1 - 2 x_2)] \to \max_{y}$$

де $\boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) : \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_1 + x_2 = 1\}$, $\boldsymbol{y} \in Y = \{\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)' : \; y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; y_1 + y_2 = 1\}$.

Задачі (5.15) та (5.16) записуються так:

$$\begin{array}{rcl} x_3 \to \min, & \qquad & y_3 \to \max, \\ -3 x_1 + 4 x_2 \leq x_3, & & -3 y_1 + 5 y_2 \geq y_3, \\ 5 x_1 - 2 x_2 \leq x_3, & & 4 y_1 - 2 y_2 \geq y_3, \\ x_1 + \quad x_2 = 1, & & y_1 + \quad y_2 = 1, \end{array}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$ $\qquad\qquad$ $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$

Розв'язуючи останні *ЗЛП*, знаходимо оптимальні змішані стратегії $\boldsymbol{x}^*=(3/7, 4/7)$, $\boldsymbol{y}^*=(1/2, 1/2)$ гравців P_1 та P_2 відповідно. При цьому ціна гри $v=F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)=1$.

Як відомо, у матричних іграх з сідловою точкою жодному з гравців не слід відступати від своєї оптимальної чистої стратегії за умови, що його противник дотримується своєї оптимальної чистої стратегії. Дослідимо наслідки аналогічних дій гравців у матричній грі, що не має сідлової точки. За теоремою про мінімакс (основною теоремою матричних ігор) така гра завжди має розв'язок у змішаних стратегіях.

Нехай $\boldsymbol{x}^*=(x^*_1,\ldots,x^*_m)$, $\boldsymbol{y}^*=(y^*_1,\ldots,y^*_n)'$ — оптимальні змішані стратегії гравців P_1 та P_2 відповідно. Назвемо $i(j)$-у стратегію гравця P_1 (P_2) активною (суттєвою), якщо $x^*_i > 0$ $(y^*_j > 0)$.

Теорема 5.4 (про активні стратегії). *Якщо гравець P_2 дотримується своєї оптимальної стратегії $\boldsymbol{y}^*$, то його середній виграш*

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*) = \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{y}^* \tag{5.20}$$

залишається незмінним і рівним ціні гри $v=F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ незалежно від стратегії гравця P_1, якщо лише він не виходить за межі своїх активних стратегій (користується будь-якою з них у чистому вигляді, або змішує їх у будь-яких пропорціях).

Доведення. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що всі стратегії гравця P_1 є активними, тобто $x^*_i > 0$, $i=1,\ldots,m$. Якщо це не так, то завжди можна перейти до еквівалентної матричної гри, викреслюючи в платіжній матриці рядки, що відповідають $x^*_i = 0$.

Оскільки оптимальні змішані стратегії $\boldsymbol{x}^*$ та $\boldsymbol{y}^*$ гравців P_1 та P_2 утворюють сідлову точку $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ функції $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{y}$, то

$$v = \boldsymbol{x}^*\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{y}^* \leq \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{y}^* \tag{5.21}$$

для всіх $\boldsymbol{x} \in X$.

Вибираючи i-у чисту стратегію для гравця P_1, з (5.21) одержимо

$$v \leq \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j^*,\ \ i=1,\ldots,m\ . \tag{5.22}$$

Покажемо, що в (5.22) для кожного $i=1,\ldots,m$ насправді має місце рівність, тобто

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j^*,\ i=1,\ldots,m\ . \tag{5.23}$$

Від супротивного. Нехай існують такі i, що

$$v < \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j^*.$$

Не обмежуючи загальності, можна записати, що

$$v < \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j^*,\ \ i = 1,\dots,k,$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j^*,\ \ i = k+1,\dots,m,\ \ k = 1,\dots,m.$$

Домножуючи обидві частини кожного з цих співвідношень на x^*_i $(x^*_i > 0)$ і підсумовуючи результати по $i = 1,\dots,m$, матимемо

$$v = \sum_{i=1}^{m} x_i^* v < \sum_{i=1}^{m} x_i^* \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j^* = v.$$

Одержане протиріччя встановлює вірність рівностей (5.23).

Нехай $\boldsymbol{x} \in X$. Домножуючи співвідношення (5.23) на x_i та підсумовуючи результати по $i = 1,\dots,m,$ матимемо

$$v = \sum_{i=1}^{m} x_i v = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_j^* = \boldsymbol{x C y}^*,$$

що і треба було довести.

Зауважимо, що твердження теореми про активні стратегії залишається вірним, якщо поміняти місцями гравців P_1 та P_2.

Доведена теорема також дає можливість знайти в явному вигляді оптимальні змішані стратегії гравців P_1, P_2 та ціну матричної гри 2×2. Отже, нехай

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}$$

є платіжною матрицею гри. Зауважимо, що $x^*_1 > 0$, $x^*_2 > 0$, бо інакше матрична гра мала б сідлову точку. Із співвідношень (5.23) маємо

$$c_{11}\, y^*_1 + c_{12}\, y^*_2 = v,$$
$$c_{21}\, y^*_1 + c_{22}\, y^*_2 = v.$$

Додаючи до цих рівнянь очевидне $y^*_1 + y^*_2 = 1$, одержуємо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими y^*_1, y^*_2, v. Розв'язавши цю систему, маємо

$$y_1^* = \frac{c_{22} - c_{12}}{m},\quad y_2^* = \frac{c_{11} - c_{21}}{m},\quad v = \frac{|\boldsymbol{C}|}{m},$$

де $m = c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}$, а $|\boldsymbol{C}|$ — визначник матриці $\boldsymbol{C}$.

Аналогічно одержується оптимальна змішана стратегія гравця P_1:

$$x_1^* = \frac{c_{22} - c_{21}}{m},\quad x_2^* = \frac{c_{11} - c_{12}}{m}.$$

Приклад 5.5. Для матричної гри з платіжною матрицею

$$C = \begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}$$

маємо: $m=-3-2-5-4=-14$, $|\boldsymbol{C}|=6-20=-14$. Отже, $\boldsymbol{x}^*=(3/7,4/7)$, $\boldsymbol{y}^*=(1/2,1/2)$, $v=1$.

§ 4. Ітеративний метод Брауна-Робінсон

У попередньому розділі було показано, як знайти точні значення оптимальних змішаних стратегій гравців у матричній грі, що не має сідлової точки. На практиці часто буває достатнім знайти наближення до оптимальних змішаних стратегій, що забезпечують середній виграш, близький до ціни гри. У такому разі можна застосувати один з ітеративних методів розв'язування матричної гри.

Розглянемо ітеративний метод, запропонований Брауном і обгрунтований Робінсон (*метод Брауна-Робінсон*).

В основі цього методу лежить такий принцип: кожен з гравців прагне збільшити свій виграш, вважаючи, що майбутнє подібне минулому. При цьому вважається також, що жоден з гравців не знає своєї оптимальної змішаної стратегії. Такий принцип приводить до деякої послідовності партій гри, для кожної з яких можна підрахувати наближені значення оптимальних змішаних стратегій кожного з гравців, а також нижню та верхню границі для ціни гри.

У першій партії гравці P_1, P_2 вибирають довільно свої чисті стратегії, відповідно, i_1 та j_1. Формується m-вимірний вектор $\boldsymbol{x}^1=(0,...,0,1,0,...,0)$, в якому 1 міститься на i_1-у місці і який характеризує частоти вибору гравцем P_1 своїх чистих стратегій, та n-вимірний вектор $\boldsymbol{y}^1=(0,...,0,1,0,...,0)'$, де 1 розміщена на j_1-у місці і який характеризує частоти вибору чистих стратегій гравцем P_2. Нехай після s партій маємо $\boldsymbol{x}^s=(x_1^s,...,x_i^s,...,x_m^s)$ та $\boldsymbol{y}^s=(y_1^s,...,y_j^s,...,y_n^s)'$ — вектори частот вибору чистих стратегій гравцями P_1 та P_2 відповідно.

Визначаючи свій вибір i_{s+1} у $(s+1)$-й партії, гравець P_1 підраховує свій середній програш

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^s = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j} y_j^s, ..., \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^s, ..., \sum_{j=1}^{n} c_{mj} y_j^s \right)' \tag{5.24}$$

за s попередніх партій (це для нього минуле) і, прагнучи його мінімізувати, знаходить

$$i_{s+1} = \arg \min_{i=1,...,m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^s . \tag{5.25}$$

Міркуючи аналогічно, гравець P_2 підраховує свій середній виграш

$$\boldsymbol{x}^s \boldsymbol{C} = \left(\sum_{i=1}^{m} c_{i1} x_i^s, ..., \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i^s, ..., \sum_{i=1}^{m} c_{in} x_i^s \right)' \tag{5.26}$$

за s попередніх партій і, прагнучи його максимізувати, знаходить свій вибір j_{s+1} у $(s+1)$-й партії гри з умови

$$j_{s+1} = \arg \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i^s. \qquad (5.27)$$

Потім знаходяться вектори частот вибору чистих стратегій гравцями P_1 та P_2 за результатами проведених ($s+1$)-ї партій згідно формул

$$\mathbf{x}^{s+1} = \frac{1}{s+1}\left[s\,\mathbf{x}^{s+1} + \mathbf{I}_m\left(i_{s+1}\right)\right], \qquad (5.28)$$

$$\mathbf{y}^{s+1} = \frac{1}{s+1}\left[s\,\mathbf{y}^{s+1} + \mathbf{I}_n\left(j_{s+1}\right)\right], \qquad (5.29)$$

де $\mathbf{I}_m(i_{s+1}) = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ — m-вимірний вектор з одиницею на i_{s+1}-у місці, а $\mathbf{I}_n(j_{s+1}) = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)'$ — n-вимірний вектор з одиницею на j_{s+1}-у місці.

Має місце таке твердження.

Теорема 5.5. *Для ітеративного методу Брауна-Робінсон існують границі*

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{x}^s = \mathbf{x}^*, \quad \lim_{s\to\infty} \mathbf{y}^s = \mathbf{y}^*,$$

де $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ *— оптимальні змішані стратегії гравців* P_1 *та* P_2*. Крім того,*

$$\lim_{s\to\infty} \max_{j=1,\dots,n} \mathbf{x}^s \mathbf{C} = \lim_{s\to\infty} \min_{i=1,\dots,m} \mathbf{C}\,\mathbf{y}^s = v,$$

де $v = \mathbf{x}^* \mathbf{C}\,\mathbf{y}^*$ *— ціна гри.*

Пропускаючи доведення цієї теореми через його громіздкість, зауважимо, що збіжність методу Брауна-Робінсон досить повільна, що, проте, не є великою перешкодою, якщо цей метод реалізується на *ЕОМ*.

Приклад 5.6. Нехай матрична гра задається платіжною матрицею

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Далі, використовуючи співвідношення (5.24)–(5.29), виконуються обчислення для декількох послідовних ітерацій методу Брауна-Робінсон розв'язування цієї матричної гри.

1)		$i_1 = 1,$	$\mathbf{x}^1 = (1,0),$
		$j_1 = 1,$	$\mathbf{y}^1 = (1,0)'.$
2) $\mathbf{C}\,\mathbf{y}^1 = (-3,4)'$,	$\min \mathbf{C}\,\mathbf{y}^1 = -3,$	$i_2 = 1,$	$\mathbf{x}^2 = (1,0),$
$\mathbf{x}^1\mathbf{C} = (-3,5)$,	$\max \mathbf{x}^1\mathbf{C} = 5,$	$j_2 = 2,$	$\mathbf{y}^2 = (1/2,1/2)'.$
3) $\mathbf{C}\,\mathbf{y}^2 = (1,1)'$,	$\min \mathbf{C}\,\mathbf{y}^2 = 1,$	$i_3 = 2,$	$\mathbf{x}^3 = (2/3,1/3),$
$\mathbf{x}^2\,\mathbf{C} = (-3,5)$,	$\max \mathbf{x}^2\,\mathbf{C} = 5,$	$j_3 = 2,$	$\mathbf{y}^3 = (1/3,2/3)'.$
4) $\mathbf{C}\,\mathbf{y}^3 = (7/3,0)'$,	$\min \mathbf{C}\,\mathbf{y}^3 = 0,$	$i_4 = 2,$	$\mathbf{x}^4 = (1/2,1/2),$
$\mathbf{x}^3\,\mathbf{C} = (-2/3,8/3)$,	$\max \mathbf{x}^3\,\mathbf{C} = 8/3,$	$j_4 = 2,$	$\mathbf{y}^4 = (1/4,3/4)'.$
5) $\mathbf{C}\,\mathbf{y}^4 = (3,-1/2)'$,	$\min \mathbf{C}\,\mathbf{y}^4 = 1/2,$	$i_5 = 2,$	$\mathbf{x}^5 = (2/5,3/5),$
$\mathbf{x}^4\,\mathbf{C} = (1/2,3/2)$,	$\max \mathbf{x}^4\,\mathbf{C} = 3/2,$	$j_5 = 2,$	$\mathbf{y}^5 = (1/5,4/5)'.$

Зауважимо, що раніше (приклад 5.5) для цієї матричної гри були знайдені точні значення оптимальних змішаних стратегій гравців та ціна: $\boldsymbol{x}^* = (3/7, 4/7)$, $\boldsymbol{y}^* = (1/2, 1/2)$, $v = 1$.

Розділ 6. Нелінійне програмування

§ 1. Постановки задач

В загальному випадку задачу математичного програмування можна формулювати так:

знайти мінімум (або максимум) функції

$$f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in E^n, \qquad (6.1)$$

за виконання умов

$$f_i(\boldsymbol{x})\ R_i\ 0,\ \ i=1,\dots,m, \qquad (6.2)$$

де $R_i \in \{ \le, =, \ge \}$.

У тому випадку, коли хоча б одна з функцій $f(\boldsymbol{x})$, $f_i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\dots,m$, є нелінійною, задачу (6.1)–(6.2) називають *задачею нелінійного програмування* (*ЗНЛП*).

Як і в *ЛП* функцію $f(\boldsymbol{x})$ називають *цільовою функцією*, область

$$D = \{\boldsymbol{x} \in E^n : f_i(\boldsymbol{x})\ R_i\ 0,\ \ i=1,\dots,m\} \text{ —}$$

допустимою областю, довільний елемент $\boldsymbol{x} \in D$ — *допустимим вектором* (*точкою, розв'язком*) задачі нелінійного програмування.

Допустимий розв'язок $\boldsymbol{x}^* \in D$ такий, що

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x}) \quad (\text{або}\ \ \boldsymbol{x}^* = \arg\max_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x})),$$

називається *оптимальним розв'язком* задачі (6.1)–(6.2).

Функції $f_i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\dots,m$, називають *функціями умов* задачі *НЛП*.

Зауважимо, що задача максимізації функції $f(\boldsymbol{x})$ еквівалентна задачі мінімізації $-f(\boldsymbol{x})$, обмеження $f_i(\boldsymbol{x}) \ge 0$ еквівалентне обмеженню $-f_i(\boldsymbol{x}) \le 0$, рівність $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ еквівалентна системі двох нерівностей $f_i(\boldsymbol{x}) \le 0$ і $-f_i(\boldsymbol{x}) \le 0$. Тому при формулюванні і розв'язуванні *ЗНЛП* можна обмежитись лише випадком мінімізації функції $f(\boldsymbol{x})$ за умов $f_i(\boldsymbol{x}) \le 0$, $i=1,\dots,m$, $\boldsymbol{x} \in E^n$. Цю задачу ми часто будемо записувати у вигляді

$$\min \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E^n,\ f_i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i=1,\dots,m\}. \qquad (6.3)$$

Зауважимо також, що обмеження-нерівності $f_i(\boldsymbol{x}) \le 0$ завжди можна перетворити в обмеження рівності шляхом введення невід'ємних змінних y_i^2

$$f_i(\boldsymbol{x}) + y_i^2 = 0.$$

В свою чергу систему умов $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i=1,\dots,m$, можна записати у вигляді однієї умови $F(\boldsymbol{x}) = f_1^2(\boldsymbol{x}) + \dots + f_n^2(\boldsymbol{x}) = 0$. Здається, на перший погляд, що задача

$$\min \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E^n,\ F(\boldsymbol{x}) = 0\} \qquad (6.4)$$

простіша за задачу (6.1)–(6.2), але це не так. При зведенні конкретної задачі типу (6.1)–(6.2) до задачі (6.4) втрачається специфіка *ЗНЛП*, що ускладнює пошук її розв'язку.

Необхідно також мати на увазі, що нелінійність легко дозволяє враховувати умову цілочисельності змінних задачі. Наприклад, для того, щоб змінна x_j набувала значень 0 і 1, достатньо, щоб вона задовольняла систему нерівностей: $x_j \geq 0$, $x_j \leq 1$, $x_j(1 - x_j) \leq 0$.

І останнє зауваження. Дуже часто обмеження *ЗНЛП* включають умову

$$\boldsymbol{x} \in X, \text{ де } X \subset E^n,$$

і, як правило,

$$X = \{\boldsymbol{x} \in E^n : x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Тому поряд із задачею (6.3) ми також будемо розглядати задачу *НЛП* у вигляді:

$$\min \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E^n,\ f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \boldsymbol{x} \in X\}. \tag{6.5}$$

Розглянемо тепер класифікацію задач *НЛП*.

1. Класичні задачі оптимізації

Ці задачі полягають у знаходженні екстремуму функції $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in E^n$, при обмеженнях-рівностях

$$f_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ m \leq n.$$

Їх ще називають *задачами відшукання умовного екстремуму*.

Якщо $m = 0$, то маємо *класичну задачу відшукання безумовного екстремуму* функції $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in E^n$.

Для класичних задач оптимізації суттєвою є вимога гладкості (існування і неперервність у функцій $f(\boldsymbol{x})$ і $f_i(\boldsymbol{x})$ частинних похідних принаймні до 2-го порядку включно).

Класичні задачі оптимізації, хоча б принципово, можуть бути розв'язані класичними методами з використанням апарату диференціального числення. Однак труднощі обчислювального характеру, які виникають при цьому настільки значні, що для розв'язування практичних задач цього типу необхідно застосовувати інші методи.

2. Задачі з нелінійною цільовою функцією і лінійними обмеженнями

Ці задачі мають вигляд

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min,$$

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Характерною ознакою таких задач є те, що їх допустима множина є многогранною множиною.

3. Задачі квадратичного програмування

В цих задачах потрібно мінімізувати квадратичну функцію

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \to \min$$

при лінійних обмеженнях

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \le 0, \ i=1,\dots,m,$$

$$x_j \ge 0, \ j=1,\dots,n,$$

і за умови, що $f(\boldsymbol{x})$ є опуклою донизу функцією.

Задачі квадратичного програмування (*ЗКП*) можна віднести як до попереднього класу, так і до класу задач опуклого програмування. Але їх виділяють в окремий клас як із-за специфіки цільової функції, так і через специфіку умов-обмежень.

4. Задачі опуклого програмування

ЗНЛП (6.3) або (6.5), в яких цільова функція $f(\boldsymbol{x})$ є опуклою донизу, а допустима множина – опуклою, відносять до класу задач опуклого програмування (*ЗОП*). Методи розв'язування цих задач є найбільш розробленими у нелінійному програмування.

5. Задачі сепарабельного програмування

Для цих задач характерною ознакою є те, що і цільова функція $f(\boldsymbol{x})$ і функції умов, які ми позначимо для цього випадку через $g_i(\boldsymbol{x})$, є адитивними функціями, тобто їх можна подати у вигляді

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j),$$

$$g_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j), \ i=1,\dots,m.$$

Специфіка цих задач визначає спеціальний клас методів їх розв'язування, які застосовуються і є ефективними тільки для таких задач.

Коротко зупинимось на *особливостях методів*, за допомогою яких розв'язуються задачі нелінійного програмування.

Згадаємо *ЗЛП*. Симплекс-метод дозволяє за скінченне число кроків установити, чи існує розв'язок *ЗЛП*, і знайти його у випадку існування.

Для розв'язування задач *НЛП* доводиться застосовувати, як правило, методи, що дозволяють знаходити лише наближені розв'язки або вимагають нескінченного числа кроків для досягнення точного розв'язку. Окрім цього, майже завжди ці методи дають лише локальні оптимуми. Прикладом таких методів може бути група *градієнтних методів*.

У деяких випадках при розв'язуванні *ЗНЛП* застосовують симплекс-метод, але в основному як допоміжний, для розв'язування допоміжних *ЗЛП*, що виникають в процесі розв'язування *ЗНЛП*.

§ 2. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

Розглянемо на прикладах відмінності *ЗНЛП* від *ЗЛП* і проаналізуємо труднощі, які породжуються нелінійністю. Використаємо для цього геометричну інтерпретацію *ЗЛП* і *ЗНЛП*.

Приклад 6.1. *Розглянемо задачу*

$$z = 0{,}5\, x_1 + 2\, x_2 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 \le 6,$$

$$x_1 - x_2 \le 1,$$

$$x_1 - 2\, x_2 \ge -8,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язуючи її графічно (див. рис. 6.1), знайдемо

$$\boldsymbol{x}^* = (4/3, 14/3),\ z^* = 10.$$

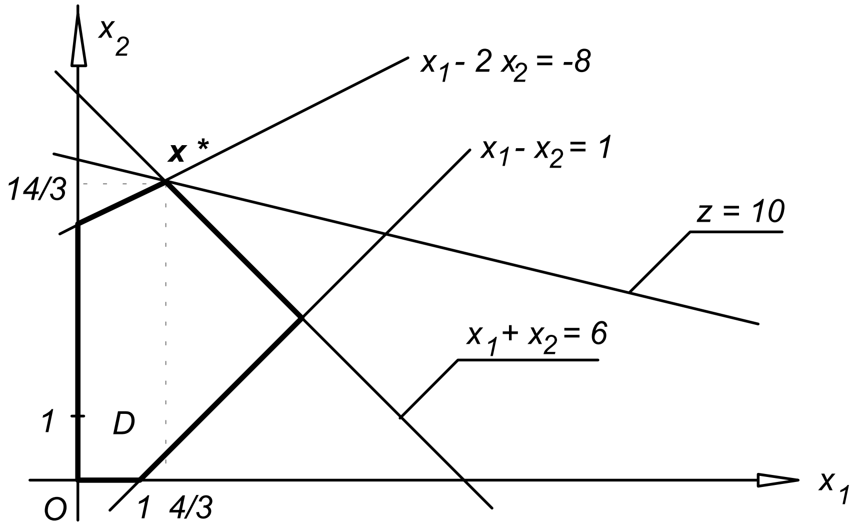


Рис. 6.1

Ще раз підкреслимо найважливіші властивості *ЗЛП*:

1. *Допустима множина ЗЛП є опуклою многогранною множиною, що має скінченне число вершин.*

2. *Поверхнею рівня цільової функції ЗЛП є гіперплощина. Гіперплощини, що відповідають різним значенням сталої рівня, паралельні між собою.*

3. *Локальний мінімум (максимум) в ЗЛП також є і глобальним.*

4. *Якщо цільова функція обмежена знизу (зверху) в задачі мінімізації (максимізації) на допустимій множині ЗЛП, то принаймні одна вершина допустимої множини є оптимальним розв'язком ЗЛП.*

Для задач *НЛП* вказані властивості, як правило, не мають місця.

Розглянемо приклади.

Приклад 6.2. *Мінімізувати функцію*

$$z = 10\,(x_1^2 - 3.5) + 20\,(x_2^2 - 4) \to \min$$

на допустимій множині прикладу 6.1 (*див. рис. 6.2*).

Ця задача є задачею квадратичного програмування. З її геометричної інтерпретації випливає, що оптимальний розв'язок $\boldsymbol{x}^*$ є точкою дотику лінії рівня цільової функції до прямої $x_1 + x_2 = 6$. Положення цієї точки через лінію рівня визначити неможливо, оскільки невідоме відповідне значення сталої рівня z^*. Отже, поки що маємо лише одне рівняння для визначення координат точки $\boldsymbol{x}^*$

$$x_1^* + x_2^* = 6. \tag{6.6}$$

Для того, щоб отримати друге рівняння, зауважимо, що кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня в точці $\boldsymbol{x}^*$ рівний кутовому коефіцієнту прямої $x_1 + x_2 = 6$.

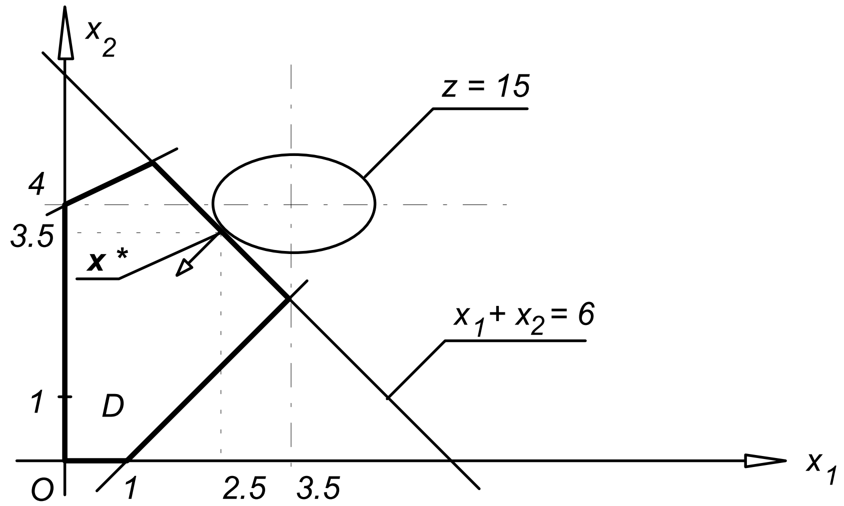


Рис. 6.2

Тоді, вважаючи x_2 неявною функцією від x_1, яка визначається співвідношенням

$$F(x_1, x_2) = 10\,(x_1^2 - 3{,}5) + 20\,(x_2^2 - 4) - z = 0,$$

z — параметром, що визначає сталу рівня, отримаємо за правилом диференціювання неявної функції

$$F'_{x_1} + F'_{x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0,$$

звідки

$$\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{x_2}} = -\frac{20(x_1 - 3{,}5)}{40(x_2 - 4)} = -\frac{(x_1 - 3{,}5)}{2(x_2 - 4)}\,.$$

З іншого боку $\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -1$, як кутовий коефіцієнт прямої $x_2 = -x_1 + 6$. Остаточно, в точці $\boldsymbol{x}^*$ будемо мати рівняння

$$-\frac{x_1^* - 3{,}5}{2(x_2^* - 4)} = -1\,. \tag{6.7}$$

Розв'язавши систему (6.6)–(6.7), отримаємо $\boldsymbol{x}^* = (2{,}5;\,3{,}5)$, і далі легко знаходимо $z^* = 15$.

Зауважимо, що знайдений оптимальний розв'язок щойно розглянутої задачі *НЛП* не є вершиною її допустимої області, хоча і досягається на її межі.

Приклад 6.3. *За умов прикладу 6.1 знайти мінімум функції*

$$z = 10\,(x_1 - 2)^2 + 20\,(x_2 - 3)^2$$

(*див. рис. 6.3*).

Функція z є опуклою квадратичною функцією, яка набуває лише невід'ємних значень. Найменшого значення, рівного нулеві, вона набуває у точці $\boldsymbol{x}^* = (2, 3)$, яка лежить всередині області D.

Отже, оптимальне значення цільової функції може досягатися у внутрішній точці допустимої області *ЗНЛП*.

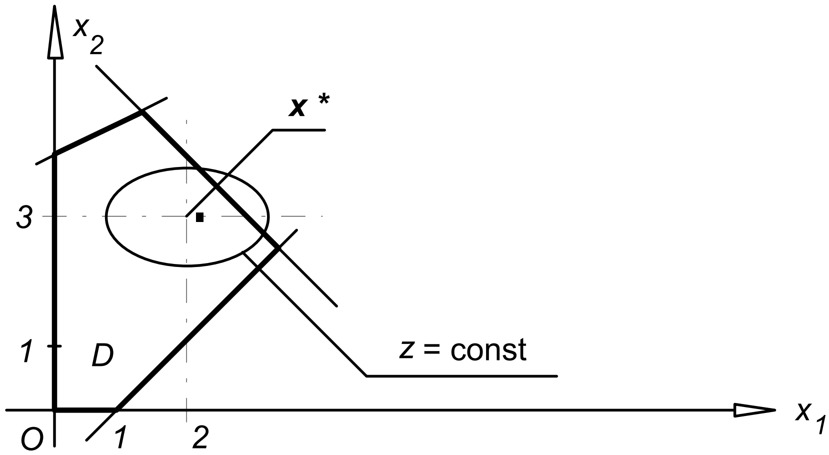


Рис. 6.3

Приклад 6.4. *Знайти максимум функції*

$$z = 25\,(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

за умов

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2, \\ x_1 - x_2 &\geq -2, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1 - 3\,x_2 &\leq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

(див. рис. 6.4).

Допустимою множиною цієї задачі є чотирикутник $V_1V_2V_3V_4$. Лінії рівня суть еліпси. З геометричної інтерпретації випливає, що функція z має на допустимій множині чотири максимуми, які досягаються у всіх вершинах чотирикутника $V_1V_2V_3V_4$. Максимуми в т. V_1, V_2, V_3 є локальними ($z^* = 4, 100, 4$). Глобальним є максимум в т. V_4 ($z^* = 226$). Отже *ЗНЛП* може мати кілька оптимумів, і не обов'язково тільки один з них буде визначати її оптимальний розв'язок.

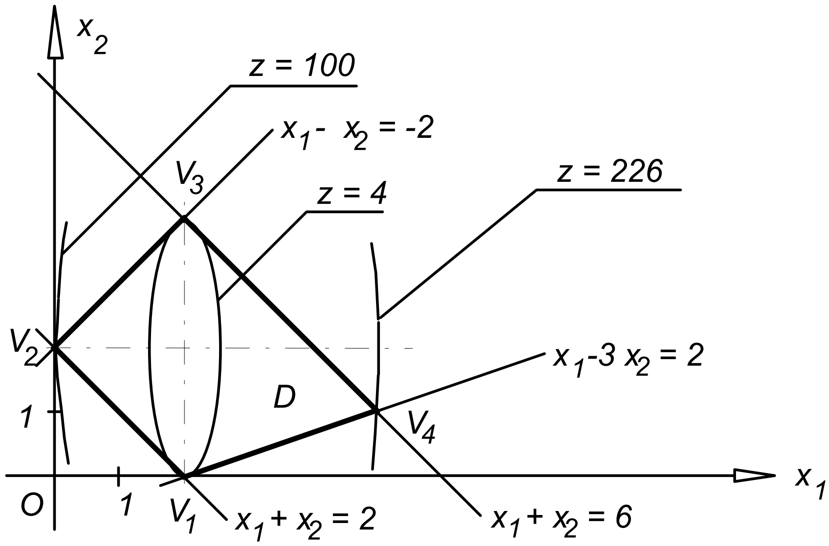


Рис. 6.4

В розглянутих прикладах допустимі множини були опуклими, оскільки визначались системами лінійних нерівностей. У загальному випадку, коли серед обмежень *ЗНЛП* є нелінійні, її допустима множина може бути і не опуклою, і не зв'язною.

Приклад 6.5. Нехай допустима множина *ЗНЛП* визначається системою

$$(x_1 - 1)\, x_2 \le 1,$$
$$x_1 + x_2 \ge 4,$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0,$$

(див. рис. 6.5).

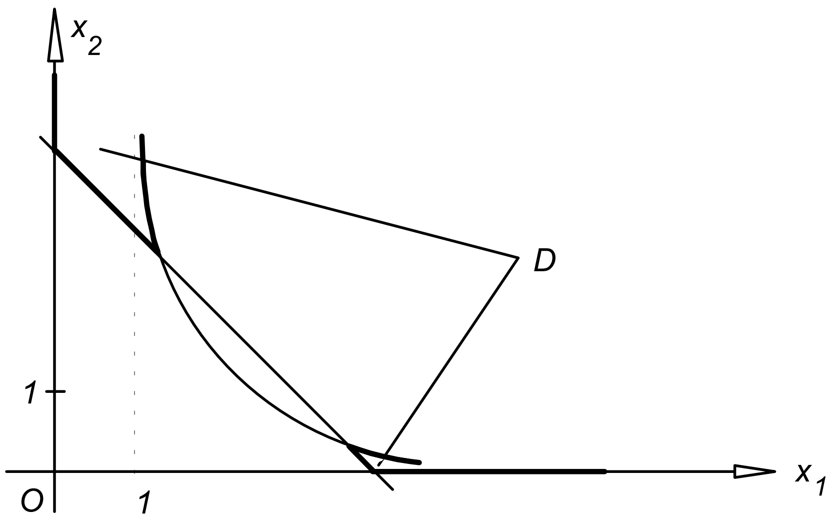


Рис. 6.5

З графічної інтерпретації видно, що *D* не є опуклою і не є зв'язною множиною.

§ 3. Загальні питання нелінійного програмування

З геометричної точки зору функція багатьох змінних $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ визначає n-вимірну поверхню (*гіперповерхню*) в просторі E^{n+1}, кожній точці якої відповідає впорядкований набір дійсних чисел (z, $x_1, \ldots, x_n$).

Поверхнею (*гіперповерхнею*) *рівня* функції $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ (у просторі E^3 – *лінією рівня*) називається множина точок

$$\{\boldsymbol{x} \in E^n : f(\boldsymbol{x}) = z^0 = \text{const}\}.$$

Приклад 6.6. Розглянемо функцію $z = x_1^2 + x_2^2$.

Ця функція задає в 3-вимірному просторі параболоїд обертання. Лінії рівня функції z суть концентричні кола з центром у початку координат (див. рис. 6.6).

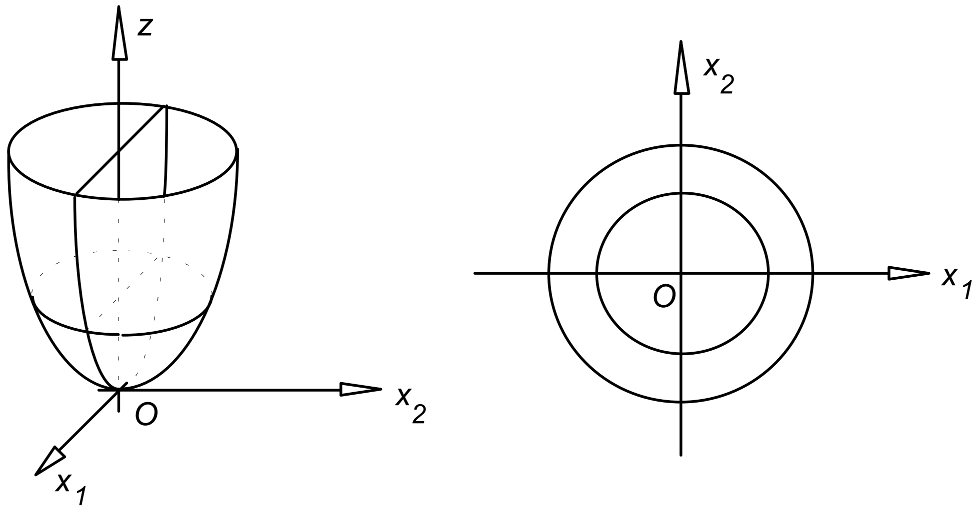


Рис. 6.6

Складність задачі *НЛП* визначається в першу чергу не числом обмежень, а властивостями цільової функції і функцій обмежень. Ці властивості насамперед поділяють на *локальні* та *глобальні*.

До локальних властивостей функції відносять, в першу чергу, ступінь її *гладкості*, тобто властивості, зв'язані з неперервністю функції, існуванням та неперервністю її частинних похідних різних порядків і похідних за напрямком.

Говорять що функція $z = f(\boldsymbol{x})$ *неперервна* в точці $\boldsymbol{x}^0$, якщо $f(\boldsymbol{x}^0)$ існує і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$) таке, що для всіх $\boldsymbol{x}$ таких, що $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| < \delta$ буде

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0)| < \varepsilon.$$

Тут і надалі використовується евклідова норма вектора.

Якщо функція $z = f(\boldsymbol{x})$ неперервна в кожній внутрішній точці деякої області D, то говорять, що $f(\boldsymbol{x})$ *неперервна на D*. Клас функцій неперервних на D позначають черед C_D (або просто C, якщо $D = E^n$).

Частинні похідні функції $z = f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^0$ визначаються як границі (якщо вони звичайно існують)

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}^0 + h\,\mathbf{e}_j) - f(\boldsymbol{x}^0)}{h},$$

де $\boldsymbol{e}_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$ (*1* стоїть на *j*-у місці) – *n-вимірний* одиничний вектор-стовпець, транспонований у вектор-рядок.

Функція $z=f(\boldsymbol{x})$ називається *диференційовною* в точці $\boldsymbol{x}^0$, якщо вона визначена в деякому околі точки $\boldsymbol{x}^0$ і для довільних $\boldsymbol{x}$ із цього околу $f(\boldsymbol{x})$ можна подати у вигляді

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^0) + \nabla^T f(\boldsymbol{x}^0)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|).$$

Вектор

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}_2}, \ldots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}_n}\right)^T$$

називається *градієнтом* функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^0$.

Отже, якщо функція $f(\boldsymbol{x})$ диференційовна в точці $\boldsymbol{x}^0$, то вона буде диференційовною по кожній змінній в точці $\boldsymbol{x}^0$, але не навпаки.

Якщо ж функція $f(\boldsymbol{x})$ неперервно диференційовна по кожній змінній в точці $\boldsymbol{x}^0$, то вона буде і диференційовною в цій точці.

Якщо функція $f(\boldsymbol{x})$ має неперервні частинні похідні у всіх внутрішніх точках деякої множини D, то говорять, що вона *належить класу* C_D^1 (якщо $D=E^n$, то говорять, що $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$). У цьому випадку функція $f(\boldsymbol{x})$ буде диференційовною, а отже матиме градієнт в кожній внутрішній точці множини D.

Звичайним чином вводяться *частинні похідні більш високих порядків*. Наприклад, частинна похідна другого порядку $\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\,\partial x_j}$ визначається як частинна похідна $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ від функції $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$.

Зауважимо, що, якщо $f(\boldsymbol{x}) \in C^2$, то

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j\,\partial x_i}\ .$$

Поряд з градієнтом ми також будемо використовувати *гессіан* функції $f(\boldsymbol{x})$, який визначається як матриця других частинних похідних функції $f(\boldsymbol{x}) \in C^2$

$$H_f(\boldsymbol{x}) = \left\| \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\,\partial x_j} \right\|, \quad i,j=1,\ldots,n.$$

Наведемо без доведення два формулювання **теореми Тейлора**, які надалі нам будуть потрібні.

Якщо $f(\boldsymbol{x})$ *належить класу* C_X^1 *на відкритій опуклій множині* $X \subset E^n$, *то для всіх точок* $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ $(\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{y})$ *існує* $\theta \in (0,1)$ *таке, що*

$$f(\boldsymbol{x}^2) = f(\boldsymbol{x}^1) + \nabla^T f(\theta \boldsymbol{x}^1 + (1-\theta)\,\boldsymbol{x}^2)\,\boldsymbol{y}.$$

Якщо $f(\boldsymbol{x})$ *належить класу* C_X^2 *на відкритій опуклій множині* $X \subset E^n$, *то для всіх точок* $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ $(\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{y})$ *існує* $\theta \in (0, 1)$ *таке, що*

$$f(\boldsymbol{x}^2) = f(\boldsymbol{x}^1) + \nabla^T f(\boldsymbol{x}^1)\,\boldsymbol{y} + (1/2)\,\boldsymbol{y}^T H_f(\theta \boldsymbol{x}^1 + (1-\theta)\,\boldsymbol{x}^2)\,\boldsymbol{y}.$$

Похідною за напрямком $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ $(\|\boldsymbol{r}\| = 1)$ функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^0$ називається границя (звичайно, якщо вона існує)

$$D_r f(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{x}^0)}{h},$$

Нехай $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$. Покладемо $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{r}$ в першій формулі Тейлора. Отримаємо

$$\frac{f(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{x}^0)}{h} = \nabla^T f(\theta \boldsymbol{x}^0 + (1-\theta)(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{r}))\,\boldsymbol{r}.$$

Після переходу до границі при $h \to +0$ в останній рівності будемо мати

$$D_r f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla^T f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{r} = (\nabla f(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{r}) = |\nabla f(\boldsymbol{x}^0)|\ |\boldsymbol{r}| \cos(\nabla f(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{r}).$$

З фізичної точки зору частинні похідні функції $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$ характеризують швидкість зміни функції в напрямках координатних осей, а похідна за напрямком – швидкість зміни функції в заданому напрямку.

Із останньої формули випливає, що при $\|\boldsymbol{r}\| = 1$ похідна за напрямком буде максимальною, якщо напрямок $\boldsymbol{r}$ співпадає з напрямком градієнта $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$. При цьому $D_r f(\boldsymbol{x}^0) = |\nabla f(\boldsymbol{x}^0)|$. З фізичної точки зору це означає, що *градієнт визначає напрямок максимального зростання функції* в точці $\boldsymbol{x}^0$.

Вкажемо *геометричний зміст градієнта* (див. рис. 6.7). Нехай маємо функцію

$$z = f(x_1, x_2).$$

Розглянемо лінію рівня

$$f(x_1, x_2) = z^0.$$

З'ясуємо, як провести дотичну до лінії рівня в точці $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, яка лежить на цій лінії.

Лінія рівня $x_2 = x_2(x_1)$ задана неявно рівнянням

$$F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - z^0 = 0.$$

Рівняння дотичної до лінії рівня в точці $\boldsymbol{x}^0$ має вигляд

$$x_2 - x_2^0 = \frac{d x_2}{d x_1}(x_1^0)(x_1 - x_1^0).$$

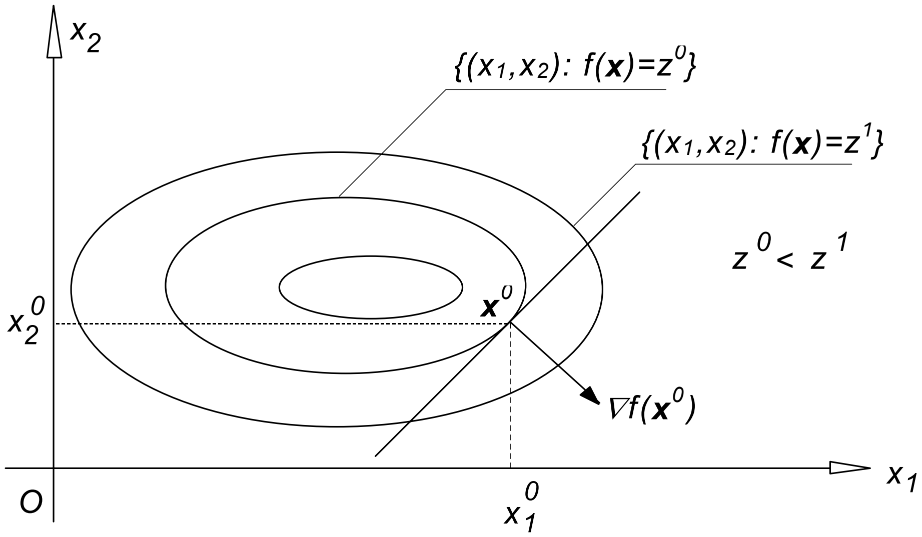


Рис. 6.7

Оскільки

$$\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{x_2}} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\,,$$

то з рівняння дотичної будемо мати

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) = -\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0)\,,$$

або

$$(\nabla f(\mathbf{x}^0),\, \mathbf{x}-\mathbf{x}^0) = 0.$$

З останньої рівності випливає, що з геометричної точки зору *градієнт є вектором нормалі до лінії* (*поверхні при* $n>3$) *рівня в точці* $\mathbf{x}^0$*, який спрямований в сторону зростання функції* $f(\mathbf{x})$.

До *глобальних властивостей* функцій багатьох змінних, в першу чергу, відносять наявність у них *екстремумів*.

Означення 6.1. *Говорять, що функція* $f(\mathbf{x})$*, яка визначена на замкненій множині* $X \subset E^n$*, досягає на ній абсолютного (глобального) мінімуму в точці* $\mathbf{x}^* \in X$*, якщо* $\forall\, \mathbf{x} \in X$ *виконується* $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})$.

Означення 6.2. *Говорять, що функція* $f(\mathbf{x})$, *яка визначена на множині* $X \subset E^n$, *має в точці* $\mathbf{x}^* \in X$ *відносний (локальний) мінімум, якщо існує такий окіл* $S(\mathbf{x}^*)$ *точки* $\mathbf{x}^*$*, що* $\forall\, \mathbf{x} \in S(\mathbf{x}^*) \cap X$ *виконується* $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})$.

Означення 6.3. *Задачу НЛП назвемо одноекстремальною, якщо її довільний відносний мінімум буде і абсолютним.*

§ 4. Елементи опуклого аналізу

При дослідженні задач математичного програмування велике значення має така глобальна властивість функцій f і f_i, як опуклість (увігнутість) та тісно зв'язана з нею властивість опуклості множин.

Означення 6.4. *Множина $W \subset E^n$ називається опуклою, якщо для всіх $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ та $\lambda \in [0, 1]$ виконується умова $\lambda\boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\,\boldsymbol{y} \in W$.*

Означення 6.5. *Проекцією точки $\boldsymbol{x}^0$ на опуклу множину W називають таку точку $\boldsymbol{x}^* \in W$, що*

$$\left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\right\| = \inf_{\boldsymbol{x}\in W}\left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}\right\| = d.$$

При цьому d називають відстанню точки $\boldsymbol{x}^0$ від множини W.

Теорема 6.1 (про проекцію точки на множину). *Для довільної опуклої замкненої множини W і довільної точки $\boldsymbol{x}^0$ існує єдина точка $\boldsymbol{x}^* \in W$, що є проекцією $\boldsymbol{x}^*$ на W.*

<u>Доведення</u>. Якщо $\boldsymbol{x}^0 \in W$, то, очевидно, що $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^0$ і $d = 0$.

Нехай $\boldsymbol{x}^0 \notin W$. Тоді $\exists\, c > 0$ таке, що $\forall\, \boldsymbol{x} \in W$

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}\| > c > 0.$$

Оскільки евклідова норма вектора є неперервною функцією $\boldsymbol{x}$ і внаслідок попередньої нерівності є обмеженою знизу на множині W, то існує її точна нижня грань

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in W}\left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}\right\| = d.$$

Оскільки множина W замкнена, тобто включає в себе всі свої граничні точки і точки межі, то inf досягається принаймні в одній точці $\boldsymbol{x}^* \in W$

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in W}\left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}\right\| = \left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\right\| = d.$$

Дійсно, оскільки $\inf\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}\|$, $\boldsymbol{x} \in W$, існує, то завжди знайдеться послідовність $\{\boldsymbol{x}^k\}$, $\boldsymbol{x}^k \in W$, яка по нормі збігається до d

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^k\right\| = d.$$

Далі, так як послідовність $\{\boldsymbol{x}^k\}$ обмежена, то з неї можна виділити послідовність $\{\boldsymbol{x}^{k_i}\}$, яка буде збігатись до деякої точки $\boldsymbol{x}^* \in W$

$$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}^{k_i} = \boldsymbol{x}^* \in W.$$

До того ж

$$\lim_{i\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^{k_i}\right\| = d,$$

що означає

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\| = d.$$

Доведемо єдиність точки $\boldsymbol{x}^* \in W$. Від супротивного: припустимо, що існують дві точки $\boldsymbol{x}^1 \in W$ і $\boldsymbol{x}^2 \in W$, причому $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$, для яких

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^1\| = \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^2\| = d.$$

Множина W — опукла за умовою теореми, тому опукла комбінація точок $\boldsymbol{x}^1$ і $\boldsymbol{x}^2$ належить їй:

$$\boldsymbol{z} = (1/2)\,(\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{x}^2) \in W.$$

Зауважимо, що точки $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{z}$ лежать в одній площині.

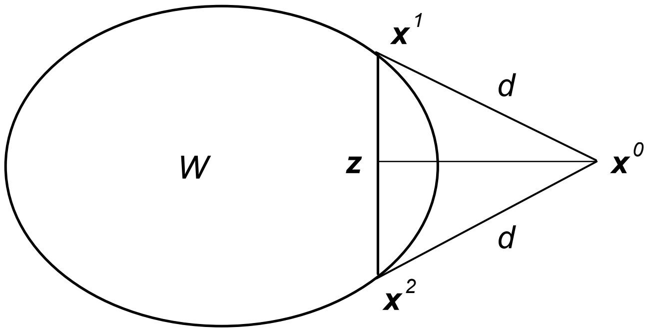


Рис. 6.8

Розглянемо $\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}\|$. Оскільки

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^1\| = \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^2\| = d,$$

то трикутник $\Delta\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{x}^1\boldsymbol{x}^2$ рівнобедрений і вектори $\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}$ та $\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{z}$, а також $\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}$ та $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{z}$ є ортогональними. Тоді за теоремою Піфагора маємо

$$\|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{z}\|^2 + \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^1\|^2,$$

$$\|\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{z}\|^2 + \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^2\|^2,$$

Так як $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$, то $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{z}$ і $\boldsymbol{x}^2 \neq \boldsymbol{z}$. Тому

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}\|^2 < \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^1\|^2,$$

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}\|^2 < \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^2\|^2.$$

Додаючи останні нерівності, отримаємо

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}\|^2 < (1/2)\,(\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^1\|^2 + \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^2\|^2) = d^2,$$

що суперечить означенню inf. Теорема доведена.

Теорема 6.2 (про відділяючу гіперплощину). *Нехай W — замкнена опукла множина і $\boldsymbol{x}^0 \notin W$. Тоді існує гіперплощина*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + b = 0$$

така, що

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^0) + b > 0,$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) + b < 0,\ \forall\ \boldsymbol{y} \in W.$$

Іншими словами, гіперплощина $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + b = 0$ строго відділяє точку $\boldsymbol{x}^0$ від множини W.

<u>Доведення</u>. Оскільки W замкнена опукла множина, то на основі теореми про проекцію існує точка $\boldsymbol{x}^* \in W$ така, що

$$\left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\right\| = \inf_{\boldsymbol{y}\in W}\left\|\boldsymbol{x}^0 - y\right\| = d > 0.$$

Розглянемо гіперплощину

$$L(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) = 0,$$

яка проходить через точку $\boldsymbol{x}^*$ і має вектор нормалі $\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*$ (див. рис. 6.9).

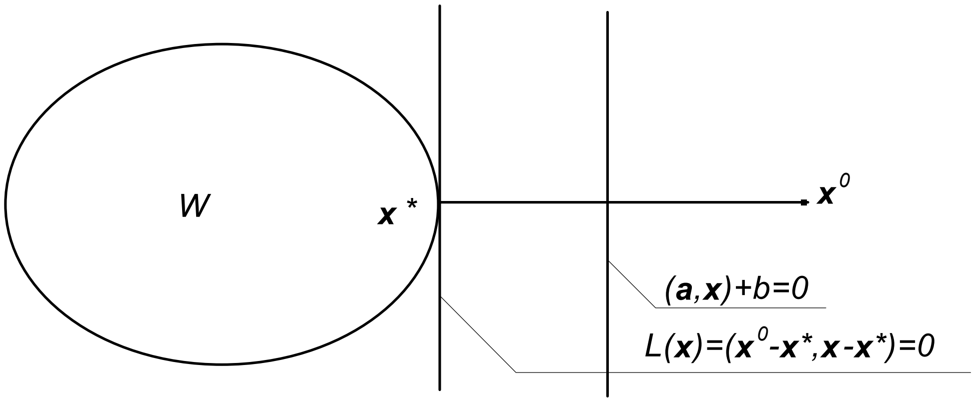


Рис. 6.9

Маємо

$$L(\boldsymbol{x}^0) = (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*) = \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\|^2 = d^2 > 0.$$

Покажемо, що $\forall\ \boldsymbol{y} \in W$ буде $L(\boldsymbol{y}) \le 0$.

Від супротивного припустимо, що існує точка $\boldsymbol{y} \in W$, для якої $L(\boldsymbol{y}) > 0$. Сполучимо точку $\boldsymbol{y}$ з точкою $\boldsymbol{x}^*$ відрізком. Довільну точку відрізка позначимо

$$\boldsymbol{x}(\alpha) = \alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^*,$$

де $\alpha \in [0,1]$.

Розглянемо точки відрізка $\boldsymbol{x}(\alpha)$ відмінні від $\boldsymbol{x}^*$. Оскільки при $\alpha=0$ $\boldsymbol{x}(\alpha) = \boldsymbol{x}^*$ і $L(\boldsymbol{x}^*) = 0$, то з подальшого розгляду виключимо випадок $\alpha = 0$.

Далі, W — опукла множина, тому $\boldsymbol{x}(\alpha) \in W$ при $\alpha \in (0,1]$.

Розглянемо $\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}(\alpha)\|^2$. Маємо

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}(\alpha)\|^2 = \|\boldsymbol{x}^0 - \alpha\boldsymbol{y} - (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^*\|^2 = \|(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*) - \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*)\|^2 =$$
$$= \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\|^2 + \alpha^2\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\|^2 - 2\alpha(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*).$$

Звідси $\forall\alpha \in (0,1]$

$$\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}(\alpha)\|^2 - \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\|^2 = \alpha^2\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\|^2 - 2\alpha(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*).$$

Оскільки $\boldsymbol{x}^*$ — проекція $\boldsymbol{x}^0$ на W, то $\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}(\alpha)\|^2 - \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\|^2 > 0$ $\ \forall\alpha \in (0,1]$. Тому також $\alpha^2\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\|^2 - 2\alpha(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*) > 0$ $\ \forall\alpha \in (0,1]$.

Отже $\forall\alpha \in (0,1]$ будемо мати $\alpha\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\|^2 - 2L(\boldsymbol{y}) > 0$.

Але $\alpha\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\|^2$ за рахунок вибору α може стати меншим за довільне наперед задане додатне число, зокрема, меншим ніж $2L(\boldsymbol{y}) > 0$.

Тоді $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\|^2 - 2L(\boldsymbol{y})$ буде від'ємним, а, значить, буде від'ємним і вираз $\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}(\alpha)\|^2 - \|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*\|^2$, що суперечить означенню проекції точки на множину.

Отже $\forall\boldsymbol{y} \in W$ маємо $L(\boldsymbol{y}) \le 0$.

Розглянемо тепер гіперплощину $L(\boldsymbol{x}) - c = 0$, де $0 < c < d^2$. Оскільки

$$L(\boldsymbol{x}^0) - c = d^2 - c > 0,$$

а $\forall \boldsymbol{y} \in W$ буде $L(\boldsymbol{y}) - c \le -c < 0$, то гіперплощина $L(\boldsymbol{x}) - c = 0$ відділяє точку $\boldsymbol{x}^0$ від множини W.

Остаточно маємо

$$L(\boldsymbol{x}) - c = (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) - c = (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^*) - c = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + b,$$

де $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*$, $b = -(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^*) - c$.

Отже, гіперплощина $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + b = 0$ є шуканою.

Теорема доведена.

Означення 6.6. *Гіперплощина називається опорною, якщо вона проходить через точки межі площини W так, що всі точки множини W лежать по одну сторону від цієї гіперплощини.*

У доведеній теоремі гіперплощина $L(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) = 0$ є опорною, оскільки вона проходить через $\boldsymbol{x}^* \in W$ і $\forall \boldsymbol{y} \in W$ виконується умова $L(\boldsymbol{y}) \le 0$.

Теорема 6.3 (про опорну гіперплощину). *Через кожну точку межі опуклої замкненої множини W можна провести принаймні одну опорну гіперплощину.*

<u>Доведення</u>. Нехай $\bar{\boldsymbol{x}} \in W$ — точка межі множини W. Тоді в довільному ε-околі точки $\bar{\boldsymbol{x}}$ знайдуться точки $\boldsymbol{x}(k) \notin W$ ($k = 1, 2, \dots$), для яких

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}(k) = \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Кожній точці $\boldsymbol{x}(k)$ ($k = 1, 2, \dots$) поставимо у відповідність гіперплощину

$$(\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^*(k), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*(k)) = 0,$$

де $\boldsymbol{x}^*(k)$ — проекція точки $\boldsymbol{x}(k)$ на множину W.

Для кожної з таких гіперплощин, як було доведено в теоремі про відділяючу гіперплощину, виконується нерівність

$$(\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^*(k), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*(k)) \le 0, \ \forall \boldsymbol{y} \in W.$$

Нормуючи вектори $\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^*(k)$, отримаємо для всіх k і $\boldsymbol{y} \in W$

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^*(k)}{|\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^*(k)|}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*(k) \right) \le 0 .$$

Покладемо

$$\boldsymbol{a}_k = \frac{\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^*(k)}{|\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^*(k)|}, \ k = 1, 2, \dots,$$

і розглянемо послідовність $\{\boldsymbol{a}_k\}$. Оскільки ця послідовність обмежена (вона належить замкненій сфері радіуса 1), то з неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{\boldsymbol{a}_{k_i}\}$.

Нехай

$$\lim_{i \to \infty} \boldsymbol{a}_{k_i} = \lim_{i \to \infty} \frac{\boldsymbol{x}(k_i) - \boldsymbol{x}^*(k_i)}{|\boldsymbol{x}(k_i) - \boldsymbol{x}^*(k_i)|} = \boldsymbol{a} \quad (|\boldsymbol{a}| = 1).$$

Для всіх членів послідовності $\{\boldsymbol{a}_{k_i}\}$ маємо

$$(\boldsymbol{a}_{k_i}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*(k_i)) \le 0, \ \forall \boldsymbol{y} \in W.$$

Переходячи до границі при $i \to \infty$, отримаємо

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{x}}) \le 0, \ \forall \ \boldsymbol{y} \in W,$$

оскільки з умови

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}(k) = \bar{\boldsymbol{x}}$$

випливає умова

$$\lim_{i \to \infty} \boldsymbol{x}^*(k_i) = \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Отже, шуканою гіперплощиною є гіперплощина $L(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}) = 0$.

Теорема доведена.

<u>Наслідок</u>. *Якщо $W \subset E^n$ — замкнена, опукла, обмежена множина, то через довільну точку $\boldsymbol{x}^0 \in E^n$ (скінченну), $\boldsymbol{x}^0 \notin W$, можна провести опорну гіперплощину, тобто існує вектор $\boldsymbol{c} \ne \boldsymbol{0}$ такий, що $\forall \boldsymbol{y} \in W$ буде $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0) \le 0$ або $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \le (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^0)$.*

<u>Доведення</u>. Розглянемо конус з вершиною в точці $\boldsymbol{x}^0$, породжений замиканням $\overline{W}$, тобто множину точок $\boldsymbol{K} = \{\alpha \boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^0 : \boldsymbol{y} \in \overline{W}, \ \alpha \ge 0\}$. Оскільки W опукла і замкнена, то конус $\boldsymbol{K}$ також опуклий і замкнений. Тоді на основі теореми про опорну гіперплощину через довільну скінченну точку його межі $\boldsymbol{x}^0 \in Гр\,\boldsymbol{K}$ можна провести опорну гіперплощину. Кожна така опорна гіперплощина буде проходити через вершину конуса $\boldsymbol{K}$ точку $\boldsymbol{x}^0$ і через деяку точку межі множини W, що і треба було довести.

Зауважимо, що обмеженість W є істотною, оскільки в іншому випадку точок межі конуса $\boldsymbol{K}$, через які можна було б провести опорну гіперплощину, що проходила б також і через точку $\boldsymbol{x}^0$, може взагалі не існувати.

Теорема 6.4 (про гіперплощину, яка розділяє дві опуклі множини, що не перетинаються). *Якщо множина X^0 внутрішніх точок опуклої множини X не порожня і не перетинається з опуклою множиною Y ($X^0 \cap Y = \varnothing$), то для множин X та Y існує розділяюча їх гіперплощина, тобто існує вектор $\boldsymbol{c} \ne \boldsymbol{0}$ такий, що*

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \le (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}), \ \ \forall \ \boldsymbol{x} \in X, \forall \ \boldsymbol{y} \in Y.$$

<u>Доведення</u>. Розглянемо множину $Z = X^0 - Y$:

$$Z = \{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{x} \in X^0, \ \boldsymbol{y} \in Y\}.$$

Вона є опуклою (перевіряється безпосередньо) і, оскільки $X^0 \cap Y = \varnothing$, то $\boldsymbol{0}$ не є її внутрішньою точкою.

Якщо $\boldsymbol{0} \notin \overline{Z}$, то в силу наслідку теореми про опорну гіперплощину, або, якщо $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ є точкою межі Z, то в силу теореми про опорну гіперплощину, існує ненульовий вектор $\boldsymbol{c} \ne \boldsymbol{0}$ такий, що

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{0}) \le 0, \ \ \forall \ \boldsymbol{z} \in Z.$$

Тобто $\forall \ \boldsymbol{x} \in X^0$, і $\forall \ \boldsymbol{y} \in Y$ будемо мати

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \le 0 \text{ або } (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \le (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}).$$

Ця нерівність залишається справедливою і для замикань множин X і Y, оскільки граничний перехід не порушує нестрогих нерівностей.

Теорема доведена.

§ 5. Опуклі функції та їх основні властивості

Розглянемо тепер *означення, приклади та властивості опуклих функцій.*

Означення 6.7. *Функцію* $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in X \subset E^n$, *де* X *— опукла множина, називають опуклою (опуклою донизу), якщо* $\forall\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ і $\forall\ \alpha \in [0,1]$ *виконується нерівність*

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) \le \alpha f(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}^2)$$

(дивись рис. 6.10).

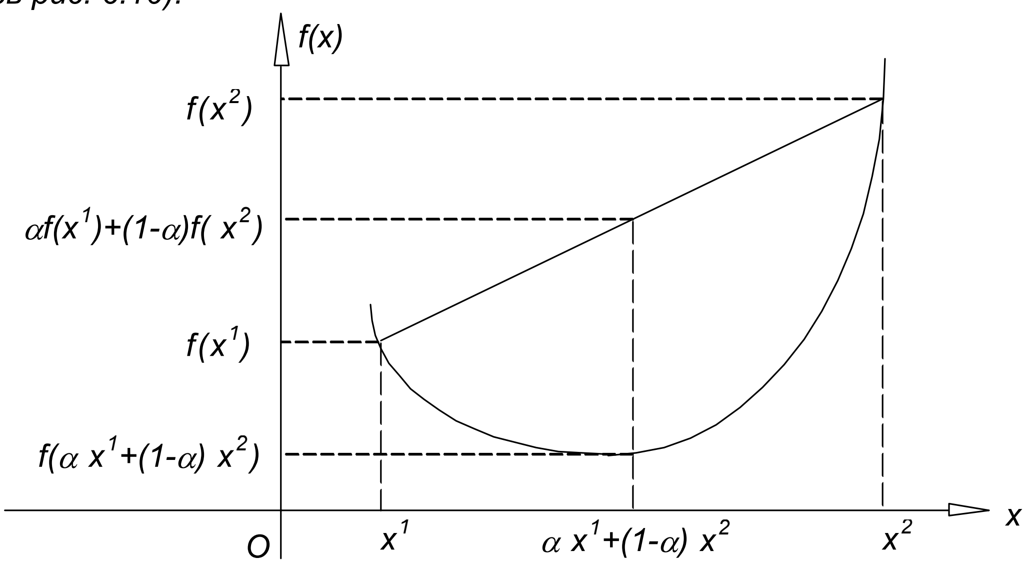


Рис. 6.10

Означення 6.8. *Функцію* $f(\boldsymbol{x})$, *визначену на опуклій множині* $X \subset E^n$ *називають увігнутою (опуклою доверху), якщо* $-f(\boldsymbol{x})$ *є опуклою функцією на* X.

Зауважимо, що опуклість множини X є істотною в цих означеннях, оскільки $\forall$ $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ і $\forall\ \alpha \in [0,1]$ точка $\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2$ повинна належати множині X.

Якщо в означеннях опуклої і увігнутої функцій знаки нестрогої нерівності замінити на знаки строгої нерівності, то будемо мати означення *строго опуклої і строго увігнутої функцій.*

Приклади опуклих функцій

1. *Лінійна функція* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ *є опуклою (і увігнутою) у всьому просторі* E^n.

Перевіряється безпосередньо з використанням означень відповідних функцій.

2. *Квадратична форма* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ *опукла у всьому просторі* E^n, *якщо вона невід'ємно визначена (тобто, якщо* $\forall\ \boldsymbol{x} \in E^n$ *має місце нерівність* $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge 0$).

Дійсно, утворимо опуклу комбінацію двох довільних точок $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2 \in E^n$ і розглянемо відповідне їй значення квадратичної форми.

Маємо $\forall\ \alpha \in [0,1]$ і $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in E^n$

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) = (\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A} (\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) =$$
$$= (\boldsymbol{x}^2 + \alpha(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2))^T \boldsymbol{A} (\boldsymbol{x}^2 + \alpha(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2)) =$$
$$= (\boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}^2 + 2\alpha(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A} (\boldsymbol{x}^2) + \alpha^2 (\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A} (\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2).$$

Так як $0 \le \alpha \le 1$, то $\alpha^2 \le \alpha$, і, оскільки $\forall\ \boldsymbol{x} \in E^n$ виконується $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \ge 0$, то

$$\alpha^2 (\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A} (\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) \le \alpha(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A} (\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2).$$

Використовуючи останню нерівність, отримаємо:

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) \le (\boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^2 + 2\alpha(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^2) + \alpha(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) =$$
$$= (\boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}^2 + \alpha(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A} (\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) = (\boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}^2 + \alpha(\boldsymbol{x}^1)^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}^1 -$$
$$- \alpha(\boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}^2 = \alpha(\boldsymbol{x}^1)^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)(\boldsymbol{x}^2)^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^2 = \alpha f(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}^2),$$

що і треба було довести.

3. *Сума опуклих функцій*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\boldsymbol{x}),$$

визначених на опуклій множині $X \subset E^n$, є опуклою функцією на X.

Дійсно, $\forall\ \alpha \in [0,1]$ і $\forall\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ маємо

$$f(\alpha\ \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\alpha\ \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{k} (\alpha\ f_i(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha)\ f_i(\boldsymbol{x}^2)) = \alpha \sum_{i=1}^{k} f_i(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} f_i(\boldsymbol{x}^2) =$$
$$= \alpha f(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}^2).$$

4. *Квадратична функція $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ є опуклою функцією у всьому просторі E^n, якщо квадратична форма $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ невід'ємно визначена.*

Це твердження є наслідком трьох попередніх тверджень.

5. *Якщо $f(\boldsymbol{x})$ опукла на опуклій множині X, то функція*

$$g(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}), 0\}$$

також опукла на X.

Дійсно, $\forall\ \alpha \in [0,1]$ і $\forall\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ маємо

$$g(\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) = \max\{f(\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2), 0\} \le$$
$$\le \max\{\alpha f(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}^2), 0\} \le$$
$$\le \alpha \max\{f(\boldsymbol{x}^1), 0\} + (1-\alpha) \max\{f(\boldsymbol{x}^2), 0\} = \alpha g(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha) g(\boldsymbol{x}^2).$$

6. *Якщо $g(\boldsymbol{x})$ опукла і невід'ємна на опуклій множині X, то функція $f(\boldsymbol{x}) = g^2(\boldsymbol{x})$ також опукла на X.*

Дійсно, $\forall\ \alpha \in [0,1]$ і $\forall\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ маємо

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) = g^2(\alpha \boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) \le (\alpha g(\boldsymbol{x}^1)+(1-\alpha)g(\boldsymbol{x}^2))^2 =$$
$$= \alpha^2 g^2(\boldsymbol{x}^1)+2\alpha(1-\alpha)g(\boldsymbol{x}^1)g(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)^2 g^2(\boldsymbol{x}^2) =$$
$$= \alpha^2 g^2(\boldsymbol{x}^1)+ (1-\alpha)^2 g^2(\boldsymbol{x}^2)+\alpha(1-\alpha)[g^2(\boldsymbol{x}^1)+g^2(\boldsymbol{x}^2)-$$
$$-(g^2(\boldsymbol{x}^1)-g^2(\boldsymbol{x}^2))^2] = \alpha g^2(\boldsymbol{x}^1)+(1-\alpha)g^2(\boldsymbol{x}^2)-$$
$$-\alpha(1-\alpha)[g(\boldsymbol{x}^1)-g(\boldsymbol{x}^2)]^2 \le \alpha g^2(\boldsymbol{x}^1)+(1-\alpha)g^2(\boldsymbol{x}^2) =$$
$$= \alpha g(\boldsymbol{x}^1)+(1-\alpha)g(\boldsymbol{x}^2).$$

Основні властивості опуклих функцій

1. *Для довільної опуклої функції $g(\boldsymbol{x})$, визначеної на опуклій множині $X \subset E^n$, множина $G = \{\boldsymbol{x} \in X\colon g(\boldsymbol{x}) \le 0\}$ є опуклою множиною.*

Доведення. Розглянемо опуклу комбінацію двох довільних точок із G і покажемо, що вона також належить G.

Маємо $\forall\ \alpha \in [0,1]$ і $\forall\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in G$

$$g(\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2) \le \alpha g(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha)\, g(\boldsymbol{x}^2) \le \alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 0 = 0,$$

тобто $\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2 \in G$, що і треба було довести.

2. Нерівність Ієнсена. *Якщо $f(\boldsymbol{x})$ опукла на опуклій множині $X \subset E^n$ та $\boldsymbol{x}^i \in X$ $(i=1,\ldots,m)$, $\alpha_i \ge 0$ $(i=1,\ldots,m)$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$, то*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}^i\right) \le \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(\boldsymbol{x}^i).$$

Зауважимо, що при $m = 2$ нерівність Ієнсена співпадає з нерівністю, яка визначає опуклу функцію. При $m > 2$ нерівність доводиться за індукцією.
Без доведення (доведення див. [15], стор. 42).

3. Властивість неперервності. *Якщо функція $f(\boldsymbol{x})$ опукла на опуклій множині $X \subset E^n$, то вона неперервна у всіх внутрішніх точках множини X.*
Без доведення (доведення див. [15], стор. 43).

4. Існування похідної по напрямку. *Якщо функція $f(\boldsymbol{x})$ опукла на опуклій множині $X \subset E^n$, то в кожній внутрішній точці $\boldsymbol{x} \in X$ вона має похідну по довільному напрямку $\boldsymbol{r}$ ($\|\boldsymbol{r}\| = 1$)*

$$D_r f(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{x})}{h}.$$

Без доведення (доведення див. [15], стор. 39).

5. Основна властивість диференційовних опуклих функцій. *Якщо диференційовна на опуклій множині $X \subset E^n$ функція $f(\boldsymbol{x})$ $(f(\boldsymbol{x}) \in C_X^1)$ опукла на X, то в кожній внутрішній точці $\boldsymbol{x}^1$ цієї множини ($\boldsymbol{x}^1 \in \mathrm{int}\, X$) виконується нерівність*

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^1)\,(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1) \le f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{x}^1)\ \forall\ \boldsymbol{x}^2 \in X. \qquad (6.8)$$

Доведення. Оскільки $f(\boldsymbol{x})$ опукла на X, то $\forall\ \boldsymbol{x}^1 \in \mathrm{int}\, X$, $\forall\ \boldsymbol{x}^2 \in X$ і $\forall \alpha \in (0, 1)$ має місце умова

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^2 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^1) \le \alpha f(\boldsymbol{x}^2) + (1-\alpha)\,f(\boldsymbol{x}^1).$$

Перепишемо її у вигляді

$$\frac{f(\boldsymbol{x}^1 + \alpha\ (\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1)) - f(\boldsymbol{x}^1)}{\alpha} \le f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{x}^1).$$

Оскільки $f(\boldsymbol{x}) \in C_X^1$, то з першої формули Тейлора маємо

$$f(\boldsymbol{x}^1 + \alpha(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1)) - f(\boldsymbol{x}^1) = \alpha \nabla^T f(\boldsymbol{x}^1 + \theta\alpha(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1))(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1),$$

де $\theta \in (0, 1)$.

Із останніх двох співвідношень отримаємо

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^1 + \theta\alpha(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1))(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1) \le f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{x}^1).$$

Переходячи до границі при $\alpha \to 0$ в останній нерівності, приходимо до нерівності

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^1)(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1) \le f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{x}^1),$$

яку і треба було довести.

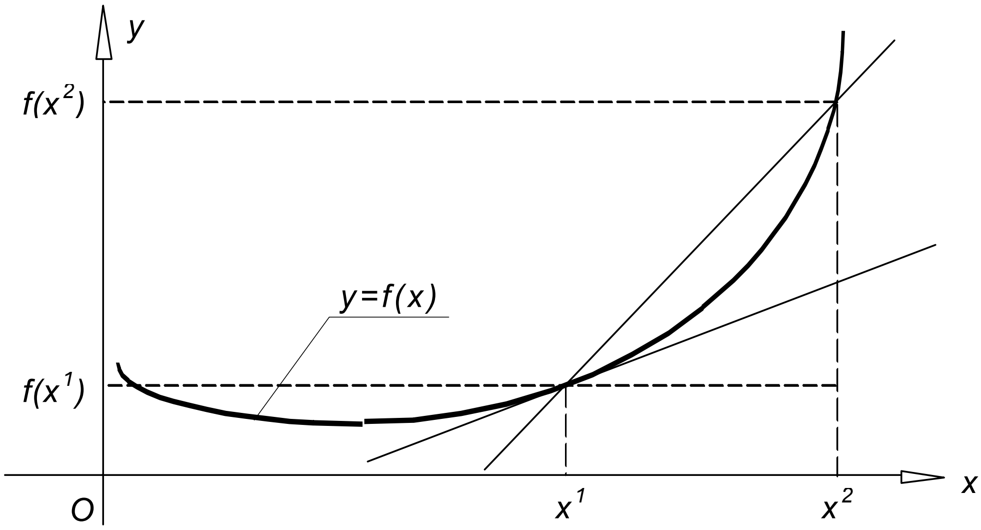


Рис. 6.11

Геометрична інтерпретація нерівності (6.8) для диференційовної опуклої функції $y = f(x)$ однієї змінної ($x \in E^1$) дається на рис. 6.11. При цьому співвідношення (6.8) набуває вигляду

$$f'(x^1) \le \frac{f(x^2) - f(x^1)}{x^2 - x^1} \quad (x^2 > x^1)$$

і ліва його частина визначає в точці x^1 кутовий коефіцієнт дотичної, а права — кутовий коефіцієнт січної для кривої $y = f(x)$.

6. Вірна і обернена теорема до щойно доведеної. *Якщо для диференційовної на опуклій множині X функції $f(\boldsymbol{x})$ ($f(\boldsymbol{x}) \in C_X^1$), в кожній внутрішній точці $\boldsymbol{x}^1$ множини X ($\boldsymbol{x}^1 \in \operatorname{int} X$) має місце нерівність*

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^1)\,(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1) \le f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{x}^1)$$

$\forall\ \boldsymbol{x}^2 \in X$, *то* $f(\boldsymbol{x})$ *опукла на* X.

<u>Доведення</u>. $\forall\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ і $\forall \alpha \in [0,1]$ покладемо $\boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2$. Тоді $\boldsymbol{z} \in X$, оскільки X — опукла множина. За умовою теореми маємо

$$\nabla^T f(\boldsymbol{z})\,(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{z}) \le f(\boldsymbol{x}^1) - f(\boldsymbol{z}),$$
$$\nabla^T f(\boldsymbol{z})\,(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{z}) \le f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{z}).$$

Помножимо першу нерівність на α, другу — на $1-\alpha$ і додамо їх. Отримаємо

$$\nabla^T f(\boldsymbol{z})\,(\alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{z}) \le \alpha f(\boldsymbol{x}^1) + (1-\alpha)\,f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{z}).$$

Оскільки ліва частина останньої нерівності дорівнює $\nabla^T f(\boldsymbol{z})\,\boldsymbol{0} = 0,$ то остаточно отримаємо

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^2 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^1) \le \alpha f(\boldsymbol{x}^2) + (1-\alpha)\,f(\boldsymbol{x}^1)$$

$\forall\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in X$ і $\forall \alpha \in [0,1]$ (з урахуванням рівності $\boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2$).

Властивість доведена.

Співвідношення (6.8) може служити відправним пунктом для визначення важливого поняття *субградієнта* (*узагальненого градієнта*) *функції.*

§ 6. Субградієнт функції та його основні властивості

Означення 6.9. *Нехай функція* $f(\boldsymbol{x})$ *визначена на множині* $X \subset E^n$, *для якої* $\operatorname{int} X \ne \varnothing$. *Якщо в деякій внутрішній точці* $\boldsymbol{x}^1$ *множини* X ($\boldsymbol{x}^1 \in \operatorname{int} X$) $\exists$ *вектор* $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^1)$ *такий, що виконується умова*

$$\hat{\nabla}^T f(\boldsymbol{x}^1)(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1) \le f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{x}^1)$$

$\forall \boldsymbol{x}^2 \in X$, *то вектор* $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^1)$ *називають субградієнтом функції* $f(\boldsymbol{x})$ *в точці* $\boldsymbol{x}^1$.

Введемо поняття *надграфіка* функції багатьох змінних.

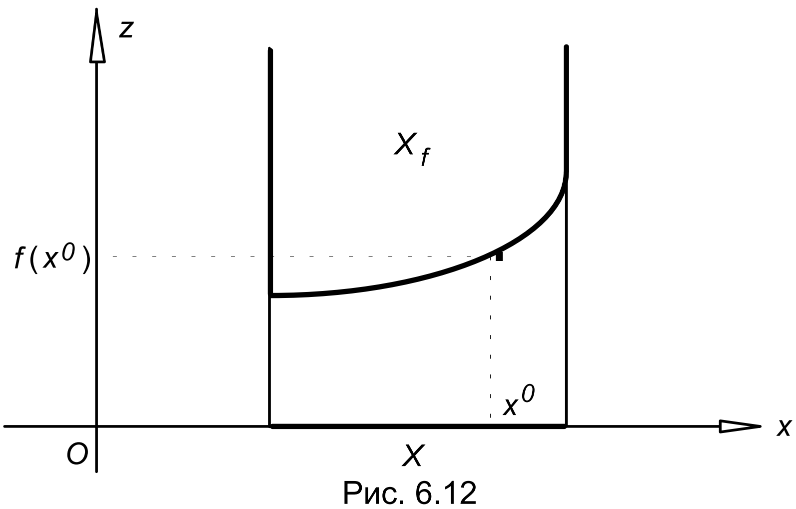


Рис. 6.12

Означення 6.10. *Нехай функція* $z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ *визначена на множині* $X \subset E^n$. *Назвемо надграфіком цієї функції множину* X_f *точок простору* E^{n+1} *таку, що*

$$X_f = \{(z, x_1, \ldots, x_n):\ z \ge f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in X,\ z \in E^1\}.$$

Зауважимо, що за властивістю **1** опуклих функцій надграфік опуклої функції є опуклою множиною, оскільки X_f можна подати у вигляді

$$X_f = \{(z, x_1, \ldots, x_n):\ g(z, x) = -z + f(\boldsymbol{x}) \le 0,\ (z, \boldsymbol{x}) \in E^1 \times X\}.$$

Теорема 6.5 (про існування субградієнта). *Якщо функція $f(\boldsymbol{x})$ опукла на опуклій множині $X \subset E^n$, то у кожній внутрішній точці $\boldsymbol{x}^0 \in X$ існує субградієнт $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^0)$.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{x}^0 \in \operatorname{int} X$ і $(f(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{u}^0 \in E^{n+1}$. Точка $\boldsymbol{u}^0$ є точкою межі надграфіка X_f, оскільки лежить на гіперповерхні $z = f(\boldsymbol{x})$.

Так як для опуклої функції її надграфік є опуклою множиною, то на основі теореми про опорну гіперплощину існує опорна гіперплощина, яка проходить через точку $(f(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{x}^0)$. Нехай рівняння цієї гіперплощини має вигляд

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^0) = 0,$$

причому для всіх $\boldsymbol{u} \in X_f \subset E^{n+1}$ буде

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^0) \le 0.$$

Оскільки $\boldsymbol{a}$ — $(n+1)$-вимірний вектор, подамо його у вигляді $\boldsymbol{a} = (-\lambda, \boldsymbol{r})$, де $\boldsymbol{r}$ — n-вимірний вектор. Тоді рівняння опорної гіперплощини можна переписати у вигляді

$$-\lambda(z - f(\boldsymbol{x}^0)) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = 0,$$

причому $\forall\ (z, \boldsymbol{x}) \in X_f$ повинна мати місце умова

$$-\lambda(z - f(\boldsymbol{x}^0)) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \le 0,$$

де $\lambda > 0$, оскільки нерівність зберігається і при $z \to +\infty$.

Покладемо $\hat{\nabla} = \boldsymbol{r}/\lambda$. Отримаємо $\forall\ (z, \boldsymbol{x}) \in X_f$

$$(\hat{\nabla}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \le z - f(\boldsymbol{x}^0).$$

Зокрема, можна покласти $z = f(\boldsymbol{x})\ \forall\, \boldsymbol{x} \in X$ в цій нерівності. Тоді, позначивши $\hat{\nabla} = \hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^0)$, остаточно будемо мати $\forall\, \boldsymbol{x} \in X$

$$(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \le f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0),$$

тобто: за означенням субградієнта, вектор $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^0)$ є субградієнтом функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^0 \in \operatorname{int} X$.

Зауважимо, що, оскільки вектор нормалі $\boldsymbol{a}$ опорної гіперплощини

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^0) = 0$$

може бути пронормований завжди, а число $\lambda > 0$, то множина векторів вигляду $\hat{\nabla} = \boldsymbol{r}/\lambda$ буде обмеженою завжди. Це означає, що множина субградієнтів $\hat{F}(\boldsymbol{x}^0)$ опуклої функції $f(\boldsymbol{x})$ $\forall\ \boldsymbol{x}^0 \in \operatorname{int} X$ буде обмеженою завжди.

Теорема доведена.

Теорема 6.6 (про властивості множини субградієнтів). *Якщо функція* $f(\boldsymbol{x})$ опукла *на опуклій множині* X *, то множина її субградієнтів* $\hat{F}(\boldsymbol{x}^0)$ $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \operatorname{int} X$ *є непорожньою, обмеженою, опуклою і замкненою.*

Доведення. Існування принаймні одного субградієнта $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \operatorname{int} X$, а також обмеженість їх множини доведені в попередній теоремі.

Доведемо опуклість. Нехай $\hat{\nabla}_1, \hat{\nabla}_2 \in \hat{F}(\boldsymbol{x}^0)$. Це означає, що $\forall \boldsymbol{x} \in X$ виконуються умови

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) \geq (\hat{\nabla}_1, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0),$$

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) \geq (\hat{\nabla}_2, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0).$$

Візьмемо довільне $\alpha \in [0,1]$. Помножимо першу нерівність на α, другу — на $1-\alpha$ і додамо їх. Отримаємо $\forall\ \boldsymbol{x} \in X$

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) \geq (\alpha\, \hat{\nabla}_1 + (1-\alpha)\ \hat{\nabla}_2,\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0),$$

що означає належність опуклої комбінації векторів $\hat{\nabla}_1$, $\hat{\nabla}_2$ до множини $\hat{F}(\boldsymbol{x}^0)$. Отже, множина $\hat{F}(\boldsymbol{x}^0)$ опукла.

Доведемо замкненість. Нехай послідовність $\{\hat{\nabla}_s\} \in \hat{F}(\boldsymbol{x}^0)$ і $\lim \hat{\nabla}_s = \hat{\nabla}$ при $s \to \infty$. Тоді для довільного s та $\forall\ \boldsymbol{x} \in X$ має місце умова

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) \geq (\hat{\nabla}_s, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0).$$

Переходячи в ній до границі при $s \to \infty$, отримаємо $\forall\ \boldsymbol{x} \in X$

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) \geq (\hat{\nabla},\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0),$$

тобто $\hat{\nabla} \in \hat{F}(\boldsymbol{x}^0)$. Отже, $\hat{F}(\boldsymbol{x}^0)$ — замкнена множина.

Теорема доведена.

Теорема 6.7 (про обчислення похідної по напрямку). *Якщо функція* $f(\boldsymbol{x})$ *опукла на опуклій множині* $X \subset E^n$, *то похідна по довільному напрямку* $\boldsymbol{r}$ $(|\boldsymbol{r}| = 1)$ *цієї функції в довільній внутрішній точці* $\boldsymbol{x}^0 \in X$ *обчислюється за формулою*

$$D_r f(\boldsymbol{x}^0) = \max_{\hat{\nabla} \in \hat{F}(\boldsymbol{x}^0)} (\hat{\nabla}, \boldsymbol{r}).$$

Без доведення (доведення див. [16], стор. 288).

Зауваження відносно геометричної інтерпретації субградієнта. Як було з'ясовано раніше, градієнт $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ опуклої диференційовної функції $f(\boldsymbol{x})$ є вектором нормалі дотичної гіперплощини до гіперповерхні рівня в точці $\boldsymbol{x}^0$, спрямованим у напрямку зростання функції $f(\boldsymbol{x})$. Дотична гіперплощина є і опорною у цьому випадку для множини $\{\boldsymbol{x} \in E^n\colon f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^0)\}$, до того ж єдиною.

Якщо опукла функція $f(\boldsymbol{x})$ не є диференційовною в точці $\boldsymbol{x}^0$, то дотичної гіперплощини до гіперповерхні рівня не існує. Але буде існувати безліч опорних гіперплощин для множини $\{\boldsymbol{x} \in E^n\colon f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^0)\}$, що проходитимуть через точку $\boldsymbol{x}^0$. *Вектор нормалі довільної із таких опорних гіперплощин, спрямований в бік* *зростання функції* $f(\boldsymbol{x})$ і буде задавати напрямок *її субградієнта* $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^0)$ *в точці* $\boldsymbol{x}^0$ (див. рис. 6.13).

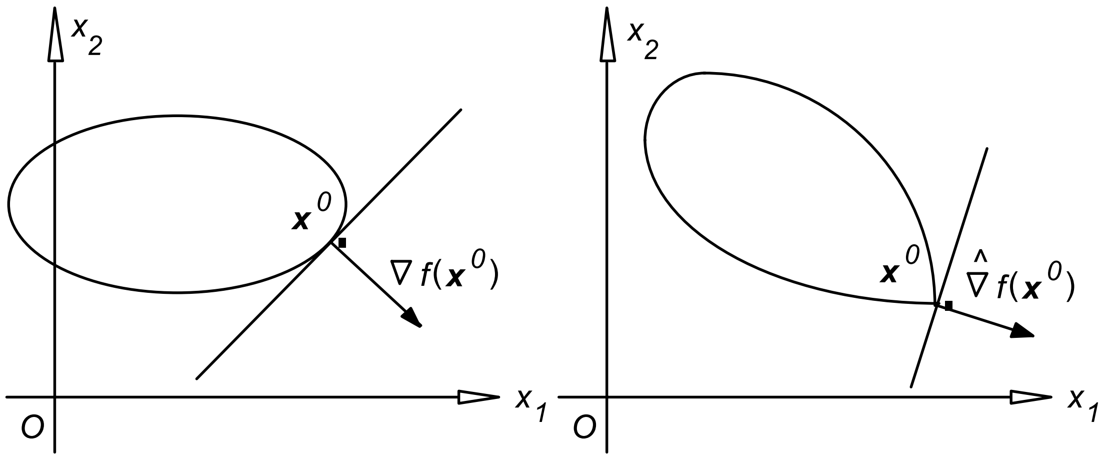


Рис. 6.13

Очевидно, що субградієнт рівний градієнту функції $f(\boldsymbol{x})$ в точках, де вона диференційовна.

§ 7. Екстремальні властивості опуклих функцій

Теорема 6.8 (про рівність абсолютного і відносного мінімумів). *Якщо функція* $f(\boldsymbol{x})$ *опукла на опуклій замкненій множині* $X \subset E^n$, *то довільний відносний мінімум функції* $f(\boldsymbol{x})$, *що досягається в деякій точці множини X, є її абсолютним мінімумом на множині X.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{x}^0 \in X$ точка відносного мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$. Припустимо від супротивного, що $\boldsymbol{x}^0$ не буде точкою абсолютного мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$ на множині X. Це означає, що існує точка $\boldsymbol{x}^* \in X$ така, що

$$f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}^0).$$

Оскільки множина X опукла, то опукла комбінація точок $\boldsymbol{x}^*$ і $\boldsymbol{x}^0$ належить X, тобто

$$\forall\ \alpha \in [0,1],\ \alpha \boldsymbol{x}^* + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^0 \in X.$$

Так як функція $f(\boldsymbol{x})$ опукла і $f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}^0)$ за припущенням, то

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^* + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^0) \le \alpha f(\boldsymbol{x}^*) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}^0) <$$
$$< \alpha f(\boldsymbol{x}^0) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}^0) = f(\boldsymbol{x}^0),$$

тобто $\forall\ \alpha \in [0,1]$ виконується умова

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^* + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^0) < f(\boldsymbol{x}^0).$$

Але при α близьких до нуля точка $\alpha \boldsymbol{x}^* + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^0$ попадає в досить малий окіл точки $\boldsymbol{x}^0$, а отже, остання умова суперечить означенню відносного мінімуму.

Отже, припущення було невірним і $\boldsymbol{x}^0$ є точкою абсолютного мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$ на множині X.

Теорема 6.9 (необхідні і достатні умови мінімуму опуклої функції). *Якщо функція* $f(\boldsymbol{x})$ *опукла на опуклій множині* $X \subset E^n$ *і* $\boldsymbol{x}^* \in \operatorname{int} X$, *то* $\boldsymbol{x}^*$ *є точкою* *абсолютного мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$ на множині X тоді і тільки тоді, коли нуль-вектор належить множині субградієнтів функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^*$ $\boldsymbol{0} \in \hat{F}(\boldsymbol{x}^*)$.*

<u>Доведення</u>. Необхідність. Нехай $\boldsymbol{x}^*$ є точкою абсолютного мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$ на множині X. Це означає, що $\forall\ \boldsymbol{x} \in X$

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$$

або

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^*) \geq (\boldsymbol{0}, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)).$$

Тоді за означенням субградієнта функції в точці, нуль є субградієнтом функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^*$, тобто $\boldsymbol{0} \in \hat{F}(\boldsymbol{x}^*)$.

Достатність. Нехай $\boldsymbol{0} \in \hat{F}(\boldsymbol{x}^*)$. Тоді $\forall \boldsymbol{x} \in X$ за означенням субградієнта має місце умова

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^*) \geq (\boldsymbol{0}, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)),$$

тобто $\forall \boldsymbol{x} \in X \quad f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$, що і треба було довести.

<u>*Наслідок*</u>**.** *Якщо функція $f(\boldsymbol{x}^*)$ опукла і диференційовна на опуклій множині $X \subset E^n$, то умова*

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}^* \in \operatorname{int} X,$$

є необхідною і достатньою умовою абсолютного мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^*$.

<u>Доведення</u>. Дійсно, у випадку $f(\boldsymbol{x}) \in C_X^1$ множина субградієнтів функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^*$ є одноелементною, її утворює єдиний градієнт $\nabla f(\boldsymbol{x}^*)$, який в той же час є і субградієнтом. За умовою наслідку він є нулем, а, отже, виконуються умови попередньої теореми.

Розділ 7. Методи одновимірної оптимізації

§ 1. Постановка задачі

Задача одновимірної оптимізації полягає у відшуканні мінімуму (або максимуму) функції

$$y = f(x) \quad (x \in E^1)$$

на відрізку $[a, b]$.

Ця задача має самостійне значення і в той же час її доводиться розв'язувати при оптимізації функцій багатьох змінних.

Відразу треба зауважити, що класичний підхід до розв'язування задач одновимірної оптимізації, що грунтується на відшуканні коренів рівняння

$$f'(x) = 0 \quad (f(x) \in C^1),$$

далеко не завжди може бути реалізований на практиці. По-перше, в практичних задачах оптимізації часто взагалі невідомо, чи є функція $y = f(x)$ диференційовною, наприклад, якщо вона задана таблично. По-друге, задача розв'язування рівняння $f'(x) = 0$ з обчислювальної точки зору має такий же порядок складності, як і вихідна задача. Ось чому є потреба в застосуванні методів оптимізації, відмінних від класичних, тобто таких, які не зв'язані з похідною.

Ми розглянемо деякі з таких методів одновимірної оптимізації стосовно, так званих, *унімодальних функцій*.

Означення 8.1. *Функцію $y = f(x)$, визначену на відрізку $[a, b]$, назвемо унімодальною, якщо вона має на ньому єдину точку мінімуму $x^* \in [a, b]$ і задовольняє умову*

$$\forall\, x_1, x_2 \text{ таких, що } a \le x_1 < x_2 \le x^*,\ f(x_1) > f(x_2);$$

$$\forall\, x_1, x_2 \text{ таких, що } x^* \le x_1 < x_2 \le b,\ f(x_1) < f(x_2).$$

Очевидно, що це означення "пристосоване" для задачі мінімізації. Для задачі максимізації відповідне означення змінюється елементарно.

Зауважимо, що унімодальна функція може не бути неперервною і може не бути опуклою.

Основна властивість унімодальної функції

Чисельні методи мінімізації унімодальної функції грунтуються на основній її властивості, яка безпосередньо випливає із її означення (див. рис. 7.1).

Нехай функція $y = f(x)$ унімодальна на відрізку $[a, b]$, має на ньому мінімум в точці x^* і точки l та r з цього відрізка такі, що $a < l < r < b$.

Тоді:

якщо $f(l) > f(r)$, то $x^* \in [l, b]$,
якщо $f(l) < f(r)$, то $x^* \in [a, r]$,
якщо $f(l) = f(r)$, то $x^* \in [l, r]$.

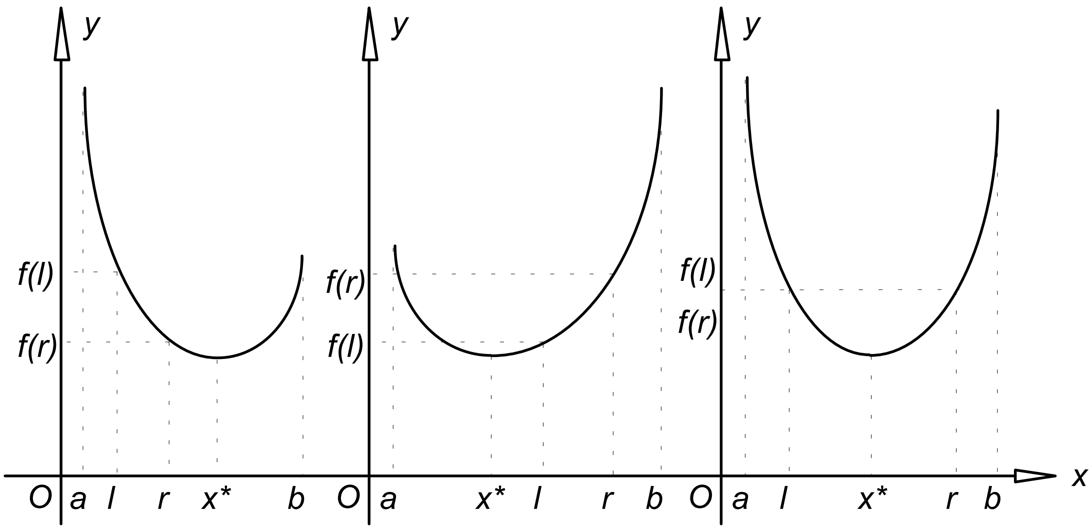


Рис. 7.1

Сформульована властивість дозволяє будувати послідовні алгоритми, на кожному кроці яких скорочується інтервал пошуку мінімуму.

Розглянемо деякі з них.

§ 2. Метод дихотомії або ділення відрізків навпіл

Нехай x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. За вихідний інтервал пошуку вибирають відрізок $[a,b]$. Покладають

$$a^0 = a,\ b^0 = b.$$

Припустимо, що виконано s кроків алгоритму і обчислений інтервал $[a^s,b^s]$, який містить x^*. Розглянемо $s+1$ крок.

Ділимо відрізок $[a^s,b^s]$ навпіл і для деякого досить малого числа $\delta>0$ будуємо точки

$$l^s = (a^s+b^s-\delta)/2 \quad \text{та} \quad r^s = (a^s+b^s+\delta)/2.$$

За основною властивістю унімодальної функції покладаємо:

$$a^{s+1}=l^s,\quad b^{s+1}=b^s,\quad \text{якщо}\ f(l^s)>f(r^s),$$
$$a^{s+1}=a^s,\quad b^{s+1}=r^s,\quad \text{якщо}\ f(l^s)<f(r^s),$$
$$a^{s+1}=l^s,\quad b^{s+1}=r^s,\quad \text{якщо}\ f(l^s)=f(r^s).$$

Отримаємо відрізок $[a^{s+1},\ b^{s+1}]$, який містить точку x^*.

Після здійснення n кроків методу буде знайдено інтервал $[a^n,b^n]$, якому належить точка мінімуму x^* і при цьому, як неважко бачити,

$$b^n-a^n = (b-a)/2^n+(1-2^{-n})\delta.$$

Поклавши наближено $x^*\approx(b^n+a^n)/2$, матимемо похибку обчислення x^*, не більшу, ніж число $\varepsilon=(b^n-a^n)/2$. Число $y^n=f((b^n+a^n)/2)$ приймають за мінімальне значення функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$.

Зауважимо, що на кожному кроці методу дихотомії потрібно обчислювати значення функції у двох точках.

Більш ефективними з обчислювальної точки зору в порівнянні з розглянутим є методи *золотого перетину* та *Фібоначчі*.

§ 3. Метод золотого перетину

Нагадаємо спочатку, що означає – знайти точки золотого перетину відрізка. Нехай маємо проміжок $[a,b]$. Точкою золотого перетину відрізка $[a,b]$ називають таку точку цього відрізка, яка ділить його у середньому пропорціональному відношенні, тобто так, що відношення довжини всього відрізка до його більшої частини рівне відношенню більшої частини до меншої. Зауважимо, що таких точок існує дві на $[a,b]$. Позначимо через r ту з них, для якої виконується умова $r-a>b-r$. Невідому довжину відрізка $[a,r]$ позначимо через x, тоді довжина відрізка $[r,b]$ буде рівна $b-a-x$ і для визначення невідомої величини x отримаємо рівняння

$$\frac{b-a}{x} = \frac{x}{b-a-x} \quad \text{або} \quad x^2+(b-a)x-(b-a)^2 = 0.$$

Звідки $x_{1,2} = (b-a)\dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$. Оскільки $x>0$ і $b-a>0$, то підходить лише один корінь $x = (b-a)\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отже, $r = a + (b-a)\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Інша точка золотого перетину відрізка $[a,b]$, яку ми позначимо через l, лежить на відстані x від точки b, тобто $l = b-(b-a)\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Не важко переконатись у тому, що точка l здійснює золотий переріз відрізка $[a,r]$, а точка r у свою чергу є точкою золотого перетину відрізка $[a,b]$.

Розглянемо тепер ітераційну схему алгоритму золотого перетину.

Нехай x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. На початку обчислень покладають $a^0 = a$, $b^0 = b$.

На s-у кроці визначають величини

$$l^s = b^s - \tau(b^s - a^s),$$
$$r^s = a^s + \tau(b^s - a^s),$$

де стала $\tau = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$. Покладають

$$a^{s+1} = l^s,\quad b^{s+1} = b^s,\quad \text{якщо } f(l^s) > f(r^s),$$
$$a^{s+1} = a^s,\quad b^{s+1} = r^s,\quad \text{якщо } f(l^s) \le f(r^s),$$

Ітерації продовжують доти, поки не буде виконуватись нерівність

$$b^n - a^n \le \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ — задане число, яке визначає похибку розв'язку задачі.

На кожному кроці *МЗП*, починаючи з 1-го, обчислюється лише одне значення функції $f(x)$, тому що одна з точок золотого перерізу на попередньому кроці здійснює золотий переріз проміжка на наступному кроці.

За наближений розв'язок задачі приймають

$$x^* = (a^n + b^n)/2,\quad y^* = f(x^*).$$

При розв'язуванні задачі максимізації функції $f(x)$ необхідно замінити її на функцію $-f(x)$.

Приклад 7.1. *Методом золотого перерізу з точністю $\varepsilon \le 0.05$ знайти мінімум функції $f(x) = e^{-x} - 2\cos x$ на проміжку $[0, 1]$.*

Результати обчислень наведені в наступній таблиці.

Таблиця 7.1

a^s	b^s	l^s	r^s	$f(l^s)$	$f(r^s)$	знак	ε
0.000	1.000	0.382	0.618	–1.1773	–1.0911	<	0.309
0.000	0.618	0.236	0.382	–1.1548	–1.1733	>	0.191
0.236	0.618	0.382	0.472	–1.1733	–1.1576	<	0.118

0.236	0.472	0.326	0.382	–1.1729	–1.1733	>	0.073
0.326	0.472	0.382	0.416	–1.1733	–1.1697	<	0.045

Отже, $x^*=(0.326+0.416)/2 = 0.371,\ f(x^*) = -1.1739.$

§ 4. Метод Фібоначчі

Зауважимо, що існує кілька ітераційних схем методу Фібоначчі, які в основному відрізняються швидкістю збіжності. Розглянемо одну з найбільш простих, не зупиняючись на питаннях збіжності. Отже, нехай x^* – точка мінімуму функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Як і у вже розглянутих методах на початку обчислень покладають $a^0 = a$, $b^0 = b$.

На s-у кроці визначають величини

$$l^s = b^s - \tau_s(b^s - a^s),$$
$$r^s = a^s + \tau_s(b^s - a^s),$$

де $\tau_s = \dfrac{F_{N-s-1}}{F_{N-s}}$, $s=0,\dots,N-3$, $\tau_{N-2} = \dfrac{1+\delta}{2}$, N — задане число ітерацій, $\varepsilon>0$, F_j — числа Фібоначчі, що задаються рекурентним співвідношенням

$$F_j = F_{j-1}+F_{j-2},\quad j=2,3,\dots\quad F_0=F_1=1.$$

Покладають

$$a^{s+1}=l^s,\quad b^{s+1}=b^s,\quad \text{якщо } f(l^s)>f(r^s),$$
$$a^{s+1}=a^s,\quad b^{s+1}=r^s,\quad \text{якщо } f(l^s)<f(r^s),$$
$$a^{s+1}=l^s,\quad b^{s+1}=r^s,\quad \text{якщо } f(l^s)=f(r^s).$$

За наближений розв'язок задачі приймають

$$x^*=(a^N+b^N)/2,\quad y^*=f(x^*).$$

Для *МФ* у випадку заздалегідь фіксованого числа ітерацій довжина кінцевого інтервалу пошуку мінімальна.

При розв'язуванні задачі максимізації функції $f(x)$ необхідно замінити її на функцію $-f(x)$.

§ 5. Метод випадкового пошуку

Метод випадкового пошуку (МВП) застосовується для знаходження мінімуму (максимуму) довільної функції $y=f(\mathbf{x})$, що задана в будь-якій допустимій області D.

Розглянемо реалізацію даного методу для функції однієї змінної. Нехай довільна функція $f(x)$ задана на проміжку $[a,b]$. За допомогою давача випадкових чисел, рівномірно розподілених на проміжку $[0,1]$, будується послідовність випадкових чисел $x\{k\}$, $k=1,\dots,N$, рівномірно розподілених на проміжку $[a,b]$. Обчислюються та порівнюються між собою значення функції $f(x)$ в точках $x\{k\}$. Мінімальне з них приймається за оцінку мінімуму функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$.

Якщо N прямує до нескінченності, отримана оцінка по ймовірності збігається до глобального мінімуму функції, що розглядається.

При розв'язуванні задачі максимізації функції $f(x)$ необхідно замінити її на функцію $-f(x)$.

Розділ 8. Класичні методи оптимізації

§ 1. Необхідні та достатні умови екстремуму

Задача безумовної мінімізації

Розглянемо задачу:

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min, \ \boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n) \in E^n. \qquad (8.1)$$

Теорема 8.1 (необхідні умови мінімуму). *Нехай функція $f(\boldsymbol{x})$ має мінімум (локальний або глобальний) в точці $\boldsymbol{x}^0$. Тоді:*

1) *якщо $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$, то в точці $\boldsymbol{x}^0$ $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = 0$;*
2) *якщо $f(\boldsymbol{x}) \in C^2$, то в точці $\boldsymbol{x}^0 \nabla f(\boldsymbol{x}^0) = 0$ і гессіан $H_f(\boldsymbol{x}^0)$ є невід'ємно визначеною матрицею, тобто $\forall \boldsymbol{y} \in E^n$ $\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{y} \geq 0$.*

<u>Доведення</u>. Доведемо 1). Скористаємося першим формулюванням теореми Тейлора. Маємо $\forall \boldsymbol{y} \in E^n$ при відповідних $\theta \in (0, 1)$

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla^T f(\boldsymbol{x}^0 + \theta \boldsymbol{y}).$$

Оскільки $\boldsymbol{x}^0$ — точка мінімуму $f(\boldsymbol{x})$, то існує окіл $S(\boldsymbol{x}^0)$ точки $\boldsymbol{x}^0$, в якому $\forall \boldsymbol{y} \in E^n$, таких що $\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y} \in S(\boldsymbol{x}^0)$, буде

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}^0) \geq 0.$$

Тому за цих умов при відповідних $\theta \in (0, 1)$ також буде

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^0 + \theta \boldsymbol{y})\boldsymbol{y} \geq 0.$$

Оскільки функція $f(\boldsymbol{x})$ диференційовна, то градієнт $\nabla f(\boldsymbol{x}^0 + \theta \boldsymbol{y})$ при досить малій нормі $\boldsymbol{y}$ буде зберігати знак в околі $S(\boldsymbol{x}^0)$, як неперервна функція. Тоді $\forall \boldsymbol{y}$ з цього околу буде $\nabla^T f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{y} \geq 0$.

Припустимо від супротивного, що $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$.

Тоді в силу довільності $\boldsymbol{y}$ завжди $\exists \boldsymbol{y} \neq 0$ з як завгодно малою нормою, при якому буде $\nabla^T f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{y} < 0$, що суперечить невід'ємності добутку $\nabla^T f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{y}$ при всіх $\boldsymbol{y}$ з досить малою нормою, а, отже, і означенню мінімуму в точці $\boldsymbol{x}^0$. Тому необхідно $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = 0$.

Доведемо 2). Скористаємося другою теоремою Тейлора. Маємо $\forall \boldsymbol{y} \in E^n$ при відповідних $\theta \in (0, 1)$

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla^T f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{y} + (1/2)\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0 + \theta \boldsymbol{y})\boldsymbol{y}.$$

Оскільки $\boldsymbol{x}^0$ — точка мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$, то існує окіл $S(\boldsymbol{x}^0)$ точки $\boldsymbol{x}^0$, в якому $\forall \boldsymbol{y} \in E^n$ таких, що $\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y} \in S(\boldsymbol{x}^0)$, буде

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}^0) \geq 0.$$

Крім того за доведеним $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=0$. Тому за цих умов при відповідних $\theta\in(0,1)$ також буде виконуватись нерівність

$$(1/2)\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{y}\geq 0\,.$$

Неперервність других похідних ($f(\boldsymbol{x})\in C^2$) гарантує збереження знаку функцією $H_f(\boldsymbol{x})$ і в точці $\boldsymbol{x}^0$, тобто буде

$$(1/2)\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0)\,\boldsymbol{y}\geq 0$$

для довільних $\boldsymbol{y}$, що не виводять за межі досить малого околу точки $\boldsymbol{x}^0$.

Якщо матриця $H_f(\boldsymbol{x}^0)$ не є невід'ємно визначеною, то в силу довільності вектора $\boldsymbol{y}$ завжди знайдеться вектор $\boldsymbol{y}$ з як завгодно малою нормою, для якого буде $(1/2)\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0)\,\boldsymbol{y}<0$, а, отже, і $(1/2)\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{y}<0$, що суперечить означенню мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^0$. Теорему доведено.

Означення 8.1. *Точка $\boldsymbol{x}^0$, яка задовольняє умову $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=0$ називається стаціонарною точкою дифференційовної функції $f(\boldsymbol{x})$.*

Інколи умову стаціонарності формулюють так: $\boldsymbol{x}^0$ – *стаціонарна точка дифференційовної функції $f(\boldsymbol{x})$, якщо $\nabla^T f(\boldsymbol{x}^0)\,\boldsymbol{y}=0 \quad \forall\boldsymbol{y}\neq 0$*

Зауваження. *Необхідними умовами максимуму функції $f(\boldsymbol{x})\in C^2$ в точці $\boldsymbol{x}^0$ є умова стаціонарності і недодатна визначеність її гессіана:*

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=0\,,\ \forall\boldsymbol{y}\in E^n\ \ \boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0)\,\boldsymbol{y}\leq 0\,.$$

Доводиться аналогічно.

Теорема 8.2 (достатня умова локального мінімуму). *Нехай:*

1) $f(\boldsymbol{x})\in C^2$ $(\boldsymbol{x}\in E^n)$,
2) *в точці $\boldsymbol{x}^0\in E^n$ виконується умова стаціонарності $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=0$ (або $\nabla^T f(\boldsymbol{x}^0)\,\boldsymbol{y}=0 \quad \forall\boldsymbol{y}\neq 0$),*
3) *гессіан $H_f(\boldsymbol{x}^0)$ є додатно визначеною матрицею.*

Тоді точка $\boldsymbol{x}^0$ є точкою строгого локального мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$.

Доведення. Нехай точка $\boldsymbol{x}^0$ задовольняє умови теореми. Розглянемо різницю $f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}^0)\ \ \forall\boldsymbol{y}\in E^n$.

За другим формулюванням теореми Тейлора та з урахуванням умови 2) маємо $\forall\boldsymbol{y}\in E^n$ і деяких $\theta\in(0,\,1)$

$$f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}^0)=(1/2)\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{y}.$$

За умовами теореми гессіан $H_f(\boldsymbol{x}^0)$ є додатно визначеною матрицею, тобто

$$(1/2)\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0)\,\boldsymbol{y}>0\quad\forall\boldsymbol{y}\in E^n.$$

Оскільки $f(\boldsymbol{x})\in C^2$, то неперервність гессіана $H_f(\boldsymbol{x})$ гарантує збереження його знаку і в деякому околі точки $\boldsymbol{x}^0$. Тоді при $\theta\in(0,\,1)$ і $\forall\boldsymbol{y}\in E^n$ з досить малою нормою будемо мати

$$(1/2)\boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{y}>0\,.$$

Це означає, що для будь-якого $\boldsymbol{y}$, такого що $\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{y}$ попадає в досить малий окіл точки $\boldsymbol{x}^0$, має місце умова

$$f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}^0)>0,$$

тобто точка $\boldsymbol{x}^0$ є точкою строгого локального мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$.

Зауваження. *Достатніми умовами строгого локального максимуму функції $f(\boldsymbol{x})\in C^2$ в точці $\boldsymbol{x}^0\in E^n$ є умова стаціонарності і від'ємна визначеність її гессіана*

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=0,\ \forall \boldsymbol{y}\in E^n\ \ \boldsymbol{y}^T H_f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{y}<0.$$

Доводиться аналогічно.

Критерій Сильвестра. *Нехай $\Delta_1(\boldsymbol{x}),\ldots,\Delta_n(\boldsymbol{x})$ — послідовні головні мінори матриці $H_f(\boldsymbol{x})$.*

Для того щоб матриця $H_f(\boldsymbol{x})$ була додатно визначеною необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\Delta_1(\boldsymbol{x})>0,\ldots,\Delta_n(\boldsymbol{x})>0\ \ \forall \boldsymbol{x}\in E^n.$$

Для того, щоб матриця $H_f(\boldsymbol{x})$ була від'ємно визначеною необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\Delta_1(\boldsymbol{x})<0,\ \Delta_2(\boldsymbol{x})>0,\ldots,(-1)^n\Delta_n(\boldsymbol{x})>0\ \ \forall \boldsymbol{x}\in E^n.$$

Задача умовної мінімізації

Розглянемо задачу на умовний екстремум

$$f^0(\boldsymbol{x})\to\min, \tag{8.2}$$

$$f^i(\boldsymbol{x})=0,\quad i=1,\ldots,m, \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{x}\in E^n,$$

в якій $f^i(\boldsymbol{x})\in C^1$, $i=0,1,\ldots,m.$

Якщо систему (8.3) можна перетворити до еквівалентного вигляду

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1(x_{m+1}, x_{m+2},\ldots, x_n), \\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2(x_{m+1}, x_{m+2},\ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}_m(x_{m+1}, x_{m+2},\ldots, x_n), \end{cases} \tag{8.4}$$

виразивши за допомогою (8.3) перші m змінних x_i ($i=1,\ldots,m$) через інші змінні x_i ($i=m+1,\ldots,n$), то задачу на умовний екстремум (8.2), (8.3) можна звести до задачі на безумовний екстремум для функції

$$f(x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n)=f^0(x_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots,x_m(x_{m+1},\ldots,x_n),x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n)$$

змінних $(x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n)\in E^{n-m}$, яку можна дослідити за допомогою необхідних і достатніх умов, доведених раніше. Але такий підхід має обмежене застосування із-за того, що явний вираз однієї групи змінних через інші змінні за допомогою системи (8.3) можна отримати далеко не завжди.

Більш загальний підхід до дослідження задачі відшукання умовного екстремуму дифференційовної функції дає метод Лагранжа. Цей метод полягає у заміні задачі умовного екстремуму (8.2), (8.3) задачею безумовного екстремуму для функції Лагранжа задачі (8.2), (8.3).

Введемо функцію Лагранжа задачі (8.2), (8.3)

$$L(\boldsymbol{x},\lambda) = \lambda_0 f^0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f^i(\boldsymbol{x})$$

змінних $(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) = (\boldsymbol{x},\lambda) \in E^{n+m+1}$.

Справедлива теорема.

Теорема 8.3 (необхідні умови умовного екстремуму). *Якщо* $\boldsymbol{x}^*$ *— точка локального мінімуму або максимуму функції* $f^0(\boldsymbol{x})$ *за умов* $f^i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1,...,m$, *то необхідно існують змінні* $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*) = \lambda^* \neq 0$, *які називаються множниками Лагранжа, такі, що*

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*)}{\partial x_j} = \lambda_0^* \frac{\partial f^0(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial f^i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,...,n, \qquad (8.5)$$

або

$$\lambda_0^* \nabla f^0(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla f^i(\boldsymbol{x}^*) = 0,$$

тобто вектори $\nabla f^0(\boldsymbol{x}^*), \nabla f^1(\boldsymbol{x}^*), \ldots, \nabla f^m(\boldsymbol{x}^*)$ *є лінійно залежними.*

Доведення. Припустимо противне, тобто, що вказані вектори $\nabla f^0(\boldsymbol{x}^*)$, $\nabla f^1(\boldsymbol{x}^*), \ldots, \nabla f^m(\boldsymbol{x}^*)$ лінійно незалежні. Тоді функціональна матриця $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$, $i = 0,1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, має ранг $m+1$, а, отже існує мінор цієї матриці $m+1$ порядку, відмінний від нуля, який можна вважати якобіаном системи функцій $f^0(\boldsymbol{x}) - f^0(\boldsymbol{x}^*) - t, f^1(\boldsymbol{x}), \ldots, f^m(\boldsymbol{x})$ по деякій підмножині $m+1$ змінних множини змінних $x_1, \ldots, x_n$ в точці $\boldsymbol{x}^*$, $t = 0$.

Тоді за теоремою про неявні функції система

$$\begin{cases} f^0(\boldsymbol{x}) - f^0(\boldsymbol{x}^*) - t = 0, \\ f^1(\boldsymbol{x}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^m(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$$

має розв'язок при всіх t із околу точки $t = 0$, тобто таких, що $|t| < t_0$, де t_0 — досить мале число.

Отже, існує вектор-функція $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t))$, яка визначена і диференційовна при всіх t, $|\boldsymbol{t}| < t_0$, і така, що $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^*$, $f^0(\boldsymbol{x}(t)) = f^0(\boldsymbol{x}^*) + t$ і при $i = 1,...,m$ $f^i(\boldsymbol{x}(t)) = 0$. Звідси маємо $\forall t$, $0 < t \leq t_0$

$$f^0(\boldsymbol{x}(t)) = f^0(\boldsymbol{x}^*) + t > f^0(\boldsymbol{x}^*) > f^0(\boldsymbol{x}^*) - t = f^0(\boldsymbol{x}(-t)).$$

що суперечить умові теореми про те, що $\boldsymbol{x}^*$ є точкою локального мінімуму або максимуму. Отже, наше припущення невірне і умови (8.5) мають місце.

Теорему доведено.

Таким чином, підозрілими на умовний екстремум можуть бути лише ті точки $\bar{x}$, для яких існують множники $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m) \neq 0$, такі що точка $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\lambda}) \in E^{n+m+1}$ задовольняє систему $m+n$ рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_0 \dfrac{\partial f^0(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial f^i(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_j} = 0, \ j = 1, \ldots, n, \\ f^i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{8.6}$$

Зауважимо, що якщо $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\lambda})$ — розв'язок системи (8.6), то $(\alpha\bar{x}, \bar{\boldsymbol{ë}})$ $\forall \alpha > 0$ також є розв'язком цієї системи.

Тому множники λ можна підпорядкувати якій-небудь додатковій умові нормування, наприклад,

$$\lambda_0 \geq 0, \ \left\| \lambda \right\|^2 = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 = 1. \tag{8.7}$$

Якщо система (8.6) має розв’язки $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\lambda})$, такі що $\bar{\lambda}_0 \neq 0$, то задачу мінімізації

$$f^0(\boldsymbol{x}) \to \min, \tag{8.8}$$

за умов

$$f^i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \tag{8.9}$$

називають невиродженою в точці $\bar{\boldsymbol{x}}$.

У невиродженій задачі умову нормування (8.7) можна замінити більш простою умовою $\bar{\lambda}_0 = 1$. Зауважимо, що для невиродженості задачі (8.8), (8.9) в точці $\boldsymbol{x}$ достатньо, щоб вектори $\nabla f^1(\bar{\boldsymbol{x}}), \nabla f^2(\bar{\boldsymbol{x}}), \ldots, \nabla f^m(\bar{\boldsymbol{x}})$, були лінійно незалежними, тобто, щоб рівність

$$\alpha_1 \nabla f^1(\bar{\boldsymbol{x}}) + \alpha_2 \nabla f^2(\bar{\boldsymbol{x}}) + \ldots + \alpha_m \nabla f^m(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$$

була можлива тільки при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Умови (8.6) з умовою нормування (8.7) (або $\lambda_0 = 1$ у невиродженому випадку) визначають систему $n+m+1$ рівнянь з $n+m+1$ невідомими $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ = $= (x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Розв’язавши її, ми знайдемо точки $\bar{\boldsymbol{x}}$, підозрілі на умовний екстремум, і відповідні їм множники Лагранжа $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m) \neq 0$.

Щоб з’ясувати, чи буде в дійсності в точках $\bar{\boldsymbol{x}}$ мінімум або максимум, треба застосувати **достатні умови мінімуму (максимуму)** до функції Лагранжа по змінній $\boldsymbol{x}$, які можна сформулювати так:

Теорема 8.4. *Нехай:*

1) $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\lambda})$ *задовольняє систему* (7.6);
2) *в точці* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *задача невироджена, тобто* $\bar{\lambda}_0 > 0$;

3) *функція $L(\boldsymbol{x}, \lambda)$ в околі точки $\bar{\boldsymbol{x}}$ двічі диференційовна по $\boldsymbol{x}$ і має неперервні всі частинні похідні другого порядку в самій точці $\bar{\boldsymbol{x}}$;*

4) *гессіан $H_L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\lambda})$ по $\boldsymbol{x}$ функції Лагранжа $L(\boldsymbol{x}, \lambda)$ в точці $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\lambda})$ додатно (від'ємно) визначена матриця.*

Тоді точка $\bar{\boldsymbol{x}}$ є точкою локального мінімуму (максимуму) функції $f^0(\boldsymbol{x})$ при умовах (7.3).

Приклад 8.1. *Нехай у просторі E^n дано m точок $\boldsymbol{x}^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$, $i = 1,\dots,m$. Потрібно знайти точку $\boldsymbol{x} \in E^n$, сума квадратів відстаней якої від даних точок була б мінімальною.*

За умовою задачі треба в E^n мінімізувати функцію

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i).$$

Знаходимо її градієнт

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i)$$

та записуємо необхідні умови екстремуму $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$ або

$$2\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i) = 0,$$

звідки отримуємо

$$m\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i = 0.$$

Отже, стаціонарною буде точка

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i \equiv \boldsymbol{x}^0.$$

Знайдемо гессіан $H_f(\boldsymbol{x})$ функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^0$. Маємо

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 2\sum_{i=1}^{m} (x_j - x_j^i) = 2m x_j - 2\sum_{i=1}^{m} x_j^i,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = 2m\delta_{kj}, \quad k, j = 1,\dots,n,$$

де δ_{kj} — символ Кронекера

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad k, j = 1,\dots,n.$$

Тоді $\forall \boldsymbol{x} \in E^n$ маємо $H_f(\boldsymbol{x}) = 2m\boldsymbol{E}$, де $\boldsymbol{E}$ — одинична матриця n-го порядку, і $\forall$ $\boldsymbol{y} \in E^n$ $(\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0})$ $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} H_f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{y} = 2m\|\boldsymbol{y}\|^2 > 0$.

За достатніми умовами в точці $\boldsymbol{x}^0$ функція $f(\boldsymbol{x})$ має строгий локальний мінімум.

Оскільки всі головні мінори матриці $H_f(\boldsymbol{x}) = 2m\boldsymbol{E} \quad \forall \boldsymbol{x} \in E^n$ додатні $(m > 0)$ $\Delta_1 = 2m > 0$, $\Delta_2 = 4m^2 > 0, \ldots,$ $\Delta_n = (2m)^n > 0$, то функція $f(\boldsymbol{x})$ є опуклою в E^n, і точка

$$\boldsymbol{x}^0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i$$

є точкою глобального мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$.

Приклад 8.2. *Нехай треба знайти на n-вимірній сфері*

$$X = \{\boldsymbol{x} \in E^n : ||\boldsymbol{x}||^2 = 1\}$$

точку, сума квадратів відстаней від якої до m даних точок $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^m \in E^n$ була б мінімальною.

Задача зводиться до мінімізації функції

$$f^0(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i \right\|^2$$

за умови $||\boldsymbol{x}||^2 = 1$ або $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1$.

Перепишемо її в скалярному вигляді:

$$f^0(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_k^i\right)^2 \to \min,$$

$$f^1(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 - 1 = 0.$$

Складемо функцію Лагранжа цієї задачі: $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \lambda_0 f^0(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 f^1(\boldsymbol{x}) =$

$$= \lambda_0 \sum_{i=1}^{m} \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i\right\|^2 + \lambda_1((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 1) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - x_k^i\right)^2 + \lambda_1\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2 - 1\right).$$

Запишемо необхідні умови (7.6). Маємо $\nabla_x L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \lambda_0 \nabla f^0(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 \nabla f^1(\boldsymbol{x}) =$

$$= \lambda_0 2\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i) + \lambda_1 2\boldsymbol{x} = 2m\lambda_0 \boldsymbol{x} - 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i + 2\lambda_1 \boldsymbol{x},$$

де $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1$.

Оскільки точка

$$\boldsymbol{x}^0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i$$

є стаціонарною точкою функції $f^0(\boldsymbol{x})$ (див. приклад 8.1), то

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i = m\boldsymbol{x}^0,$$

і остаточно отримаємо

$$\begin{cases} \nabla_x L(\boldsymbol{x},\lambda) = 2\lambda_0 m(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) + 2\lambda_1 \boldsymbol{x} = 0, \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1, \\ \lambda_0 \ge 0,\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1. \end{cases}$$

З'ясуємо, чи може бути задача виродженою. Із умови $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1$ випливає, що $\boldsymbol{x} \neq 0$. Тоді, якщо покласти $\lambda_0 = 0$, перше рівняння дає $\lambda_1 = 0$, що суперечить умові, що вектор λ повинен бути ненульовим.

Отже задача невироджена і $\lambda_0 > 0$. Тоді покладемо $\lambda_0 = 1$ і відкинемо умову нормування. Отримаємо

$$\begin{cases} 2m\boldsymbol{x} - 2m\boldsymbol{x}^0 + 2\lambda_1 \boldsymbol{x} = 0, \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1. \end{cases} \tag{8.11}$$

З першого рівняння маємо $(m+\lambda_1)\boldsymbol{x} - m\boldsymbol{x}^0 = 0$, тобто $\boldsymbol{x} = m\boldsymbol{x}^0/(m+\lambda_1)$. Підставляючи цей вираз для $\boldsymbol{x}$ в друге рівняння, отримаємо після нескладних перетворень: $m^2\|\boldsymbol{x}^0\|^2 = (m+\lambda_1)^2$, або $m\|\boldsymbol{x}^0\| = |m+\lambda_1|$. Розглянемо можливі випадки:

1) $m\|\boldsymbol{x}^0\| = m+\lambda_1$, тоді

$$\lambda_1^{(1)} = m(\|\boldsymbol{x}^0\| - 1) \text{ і } x^{(1)} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}^0\|}\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{x}^0 \neq 0;$$

2) $m\|\boldsymbol{x}^0\| = -m - \lambda_1$, тоді

$$\lambda_1^{(2)} = -m(\|\boldsymbol{x}^0\| + 1) \text{ і } x^{(2)} = -\frac{1}{\|\boldsymbol{x}^0\|}\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{x}^0 \neq 0.$$

Обчислимо гессіан функції Лагранжа по $\boldsymbol{x}$ в знайдених точках $(\boldsymbol{x}^{(1)},\lambda_1^{(1)})$, $(\boldsymbol{x}^{(2)},\lambda_1^{(2)})$. Маємо $\forall \boldsymbol{x} \in E^n$ $H_L^x(\boldsymbol{x},\lambda) = 2m\boldsymbol{E} + 2\lambda_1\boldsymbol{E}$. В точці $(\boldsymbol{x}^{(1)},\lambda_1^{(1)})$

$$H_L^x(\boldsymbol{x}^{(1)},\lambda_1^{(1)}) = 2m\boldsymbol{E} + 2(\|\boldsymbol{x}^0\| - 1)m\boldsymbol{E} = 2m\|\boldsymbol{x}^0\|\boldsymbol{E}.$$

Головні мінори цієї матриці додатні $\Delta_i = (2m\|\boldsymbol{x}^0\|)^i > 0$, тому в точці $\boldsymbol{x}^{(1)}$ функція $f^0(\boldsymbol{x})$ має строгий локальний умовний мінімум.

В точці $(\boldsymbol{x}^{(2)},\lambda_1^{(2)})$

$$H_L^x(\boldsymbol{x}^{(2)},\lambda_1^{(2)}) = 2m\boldsymbol{E} - 2(\|\boldsymbol{x}^0\| + 1)m\boldsymbol{E} = -2m\|\boldsymbol{x}^0\|\boldsymbol{E}.$$

Головні мінори цієї матриці змінюють знак:

$\Delta_1 = -2m\|\boldsymbol{x}^0\| < 0,\ \Delta_2 = (-2m\|\boldsymbol{x}^0\|)^2 > 0, \ldots, \Delta_n = (2m\|\boldsymbol{x}^0\|)^n$ ($\Delta_n < 0$ при $n = 2k-1$, $\Delta_n > 0$ при $n = 2k$), тому в точці $\boldsymbol{x}^{(2)}$ функція $f^0(\boldsymbol{x})$ має строгий локальний умовний максимум.

Оскільки X — замкнена обмежена множина і $f^0(\boldsymbol{x})$ неперервна на X, то $f^0(\boldsymbol{x})$ досягає на ній свого абсолютного мінімуму і абсолютного максимуму. Точки абсолютного максимуму і абсолютного мінімуму повинні бути розв'язками системи (8.10).

Оскільки при $\boldsymbol{x}^0 \neq 0$ розв'язків тільки два $\boldsymbol{x}^{(1)}$ і $\boldsymbol{x}^{(2)}$, то $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^0 / |\boldsymbol{x}^0||$ є точкою глобального мінімуму, а $\boldsymbol{x}^{(2)} = -\boldsymbol{x}^0 / ||\boldsymbol{x}^0||$ — точкою глобального максимуму функції $f^0(\boldsymbol{x})$ на множині X при $\boldsymbol{x}^0 \neq 0$.

Розглянемо випадок $\boldsymbol{x}^0 = 0$. Тоді система (8.11) набуває вигляду

$$\begin{cases} \lambda_0 = 1, \\ (m + \lambda_1)\boldsymbol{x} = 0, \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1, \end{cases}$$

розв'язками якої є $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -m$, $\boldsymbol{x}$ — довільна точка, для якої $||\boldsymbol{x}|| = 1$.

Отже, необхідні умови не дали ніякої корисної інформації, підозрілими на екстремум є всі точки одиничної сфери.

Розглянемо $\forall \boldsymbol{x} \in X$ (при $\boldsymbol{x}^0 = 0$) значення $f^0(\boldsymbol{x})$:

$$f^0(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i) = \sum_{i=1}^{m} \left[(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^i) + (\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^i) \right] =$$

$$= m - 2(\boldsymbol{x}, \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i) + \sum_{i=1}^{m} ||\boldsymbol{x}^i||^2 = m - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0) + \sum_{i=1}^{m} ||\boldsymbol{x}^i||^2 = m + \sum_{i=1}^{m} ||\boldsymbol{x}^i||^2 = \text{const}.$$

Отже, при $\boldsymbol{x}^0 = 0$ $f^0(\boldsymbol{x}) = \text{const}$ на множині X, тобто у всіх точках цієї множини $f^0(\boldsymbol{x})$ досягає свого глобального мінімуму (в той же час і максимуму).

Приклад 7.3. *Нехай треба знайти точки екстремуму функції* $f^0(x) = x$ *на множині* $X = \{(x, y) \in E^2 \colon x^3 - y^2 = 0\}$.

Застосуємо метод множників Лагранжа. Будуємо функцію Лагранжа задачі $L(x, y, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 x + \lambda_1 (x^3 - y^2)$ та записуємо необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0 + 3\lambda_1 x^2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2\lambda_1 y = 0, \\ x^3 - y^2 = 0, \\ \lambda_0 \geq 0, \; \lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1. \end{cases}$$

Якщо припустити, що $\lambda_0 > 0$, то з першого рівняння будемо мати

$$\lambda_0 = -3\lambda_1 x^2, \text{ де } \lambda_1 < 0, \; x > 0.$$

Тоді з рівняння $x^3 - y^2 = 0$ випливає, що $y \neq 0$.

Отже, $\lambda_1 < 0$, $y \neq 0$ і система не буде сумісною, оскільки не задовольняється рівняння $-2\lambda_1 y = 0$. Виходить, що система сумісна лише при $\lambda_0 = 0$. Тоді $\lambda_1 = 1$ і розв'язком системи відносно x і y буде точка $(0, 0)$.

Таким чином, задача є виродженою в точці $(0, 0)$, яка є підозрілою на екстремум.

Виразивши x через y із обмеження $x^3 - y^2 = 0$, отримаємо $f^0(x) = x = y^{2/3}$ при $-\infty < y < \infty$. Ясно, що $(0,0)$ є точкою глобального мінімуму функції $f^0(x)$ на множині X.

§ 2. Геометрична інтерпретація методу Лагранжа

Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in E^2$. Розглянемо задачу

$$z = f^0(x_1, x_2) \to \min,$$

$$f^1(x_1, x_2) = 0.$$

Побудуємо для неї функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 f^0(x_1, x_2) + \lambda_1 f^1(x_1, x_2)$$

І запишемо необхідні умови умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \lambda_0 \dfrac{\partial f^0}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda_0 \dfrac{\partial f^0}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial f^1}{\partial x_2} = 0, \\ f^1(x_1, x_2) = 0, \\ \lambda_0 \ge 0,\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1. \end{cases} \qquad (8.12)$$

Позначимо через $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\lambda})$ довільний розв'язок цієї системи (звичайно, якщо вона взагалі має розв'язки).

Якщо задача вироджена в точці $\bar{\boldsymbol{x}}$, то $\bar{\lambda}_0 = 0$. Тоді $|\bar{\lambda}_1| = 1 > 0$ і система необхідних умов набуває вигляду

$$\begin{cases} \nabla f^1(x_1, x_2) = 0, \\ f^1(x_1, x_2) = 0, \end{cases} \qquad (8.13)$$

для довільної цільової функції $f^0(x_1, x_2) \in C^1$.

Отже, незалежно від вигляду функції $f^0(x_1, x_2)$, точки її умовного екстремуму (якщо вони існують) повинні лежати на лінії $f^1(x_1, x_2) = 0$ і градієнт функції обмеження $\nabla f^1(x_1, x_2)$ повинен в цих точках дорівнювати нулю, тобто, якщо розглядати функцію $y = f^1(x_1, x_2)$, то точки її умовного екстремуму повинні лежати на лінії нульового рівня цієї функції і бути її стаціонарними точками.

Нехай тепер задача невироджена в точці $\bar{\boldsymbol{x}}$. Тоді можна покласти $\bar{\lambda}_0 = 1$ і відкинути умову нормування. Система необхідних умов (8.12) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^0}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f^0}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial f^1}{\partial x_2} = 0, \\ f^1(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь отримуємо

$$\lambda_1 = -\frac{\dfrac{\partial f^0}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}} = -\frac{\dfrac{\partial f^0}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}}$$

звідки

$$-\frac{\dfrac{\partial f^0}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f^0}{\partial x_2}} = -\frac{\dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}}.$$

В той же час за правилом диференціювання неявних функцій $x_2^0(x_1)$ і $x_2^1(x_1)$, які визначаються неявно співвідношеннями $f^0(x_1, x_2) = h$ $(h = \text{const})$ і $f^1(x_1, x_2) = 0$

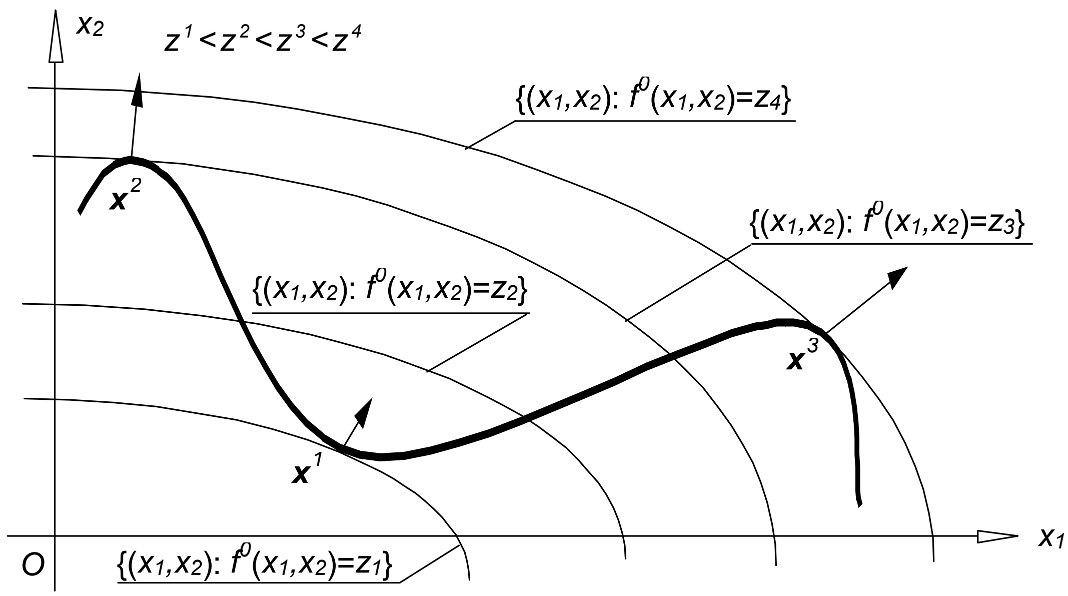


Рис. 8.1

маємо

$$\frac{dx_2^0}{dx_1} - \frac{\dfrac{\partial f^0}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f^0}{\partial x_2}}, \quad \frac{dx_2^1}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}},$$

Це означає, що кутові коефіцієнти дотичних до ліній рівня $f^0(x_1,x_2)=z^k$ і до функції, заданої неявно рівнянням $f^1(x_1,x_2)=0$ співпадають у точках умовного екстремуму (див. рис. 8.1).

В точці x^1 досягається локальний мінімум, в точці x^2 — локальний максимум, в точці x^3 — глобальний максимум.

§ 3. Метод множників Лагранжа у випадку обмежень-нерівностей

Метод множників Лагранжа може бути поширений на відшукання умовного екстремуму функції і у випадку, коли частина обмежень є обмеженнями-нерівностями. Нехай маємо задачу

$$f^0(\boldsymbol{x})\to\min(\max), \tag{8.14}$$

$$f^i(\boldsymbol{x})=0,\ i=1,...,m, \tag{8.15}$$

$$h^l(\boldsymbol{x})\le 0,\ l=1,...,k, \tag{8.16}$$

$$\boldsymbol{x}\in E^n.$$

Будемо вважати, що функції $f^0(\boldsymbol{x})$, $f^i(\boldsymbol{x})$, $h^l(\boldsymbol{x})$, $i=1,...,m,\ l=1,...,k,$ визначені і диференційовні у всіх точках простору $\boldsymbol{x}\in E^n$.

Введемо нові допоміжні змінні $\boldsymbol{y}=(y_1,...,y_k)$, за допомогою яких систему нерівностей (7.16) приведемо до системи рівнянь

$$h^l(\boldsymbol{x})+y_l^2=0,\ \ l=1,...,k.. \tag{8.17}$$

Тоді задача відшукання екстремумів функції $f^0(\boldsymbol{x})$ при умовах (8.15), (8.16) зводиться до рівносильної задачі відшукання екстремумів тієї ж функції при обмеженнях (8.15), (8.17). Під еквівалентністю цих задач розуміється те, що якщо $\boldsymbol{x}^*$— точка локального мінімуму (максимуму) функції $f^0(\boldsymbol{x})$ при обмеженнях (8.15), (8.16), то точка $\bar{\boldsymbol{x}}^*=(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$, де $\boldsymbol{y}^*=(y_1^*,...,y_k^*)$, $y_l^*=(-h^l(\boldsymbol{x}^*))^{1/2},\ l=1,...,k,$ буде точкою локального мінімуму (максимуму) функції $f^0(\boldsymbol{x})$ при обмеженнях (8.15), (8.17), і, навпаки, якщо $\bar{\boldsymbol{x}}^*=(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ — точка локального мінімуму (максимуму) $f^0(\boldsymbol{x})$ при обмеженнях (8.15), (8.17), то $\boldsymbol{x}^*$ — точка локального мінімуму (максимуму) $f^0(\boldsymbol{x})$ при обмеженнях (8.15), (8.16).

Для відшукання екстремумів функції $f^0(\boldsymbol{x})$ при умовах-рівностях (8.15), (8.17) введемо функцію Лагранжа

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda,\mu)=\lambda_0 f^0(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f^i(\boldsymbol{x})+\sum_{l=1}^{k}\mu_l(h^l(\boldsymbol{x})+y_l^2)$$

і запишемо необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \lambda_0 \dfrac{\partial f^0}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j} + \sum\limits_{l=1}^{k} \mu_l \dfrac{\partial h^l}{\partial x_j} = 0, \ j = 1,\ldots,n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_l} = 2 y_l \mu_l = 0, \quad l = 1,\ldots,k, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = f^i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,m, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_l} = h^l(\mathbf{x}) + y_l^2 = 0, \quad l = 1,\ldots,k, \\ \lambda_0 \geq 0, \ \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i^2 + \sum\limits_{l=1}^{k} \mu_l^2 = 1. \end{cases} \tag{8.18}$$

Розв’язавши систему (8.18), знайдемо точки $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, підозрілі на умовний екстремум. Дослідивши їх за допомогою достатніх умов, остаточно отримаємо точки $\bar{\boldsymbol{x}}^* = (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ умовного локального мінімуму та умовного локального максимуму функції $f^0(\boldsymbol{x})$ при умовах (8.15), (8.17).

Відкинувши змінні $\boldsymbol{y}^* = (y_1{}^*,\ldots,y_k{}^*)$, отримаємо точки екстремуму $f^0(\boldsymbol{x})$ при умовах (8.15), (8.16).

Приклад 8.4. *В n-вимірній одиничній кулі* $X = \{\boldsymbol{x} \in E^n : ||\boldsymbol{x}||^2 = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \leq 1\}$ *знайти точку, сума квадратів відстаней від якої до m даних точок* $\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^m \in E^n$ *була б мінімальною.*

За умовою треба мінімізувати функцію

$$f^0(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i \right\|^2$$

при обмеженні $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \leq 1$.

В прикладі 8.1 було показано, що глобальний мінімум функції $f^0(\boldsymbol{x})$ у всьому просторі досягається в точці $\boldsymbol{x}^0 = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i$. Тому при $||\boldsymbol{x}^0|| \leq 1$ точка $\boldsymbol{x}^0$ буде розв’язком сформульованої задачі.

Розглянемо випадок $||\boldsymbol{x}^0|| > 1$. Введемо змінну $y \in E^1$, за допомогою якої зведемо нерівність $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leq 1$ до рівності

$$y^2 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 1 = 0 \tag{8.19}$$

і розглянемо задачу мінімізації функції $f^0(\boldsymbol{x})$ в просторі змінних $\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, y) = (x_1,\ldots, x_n, y) \in E^{n+1}$ за умови (8.19). Будуємо функцію Лагранжа цієї задачі

$$L(\bar{\boldsymbol{x}},\lambda) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{m} \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i \right\|^2 + \lambda_1((\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + y^2 - 1)$$

і записуємо необхідні умови умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \nabla_x L(\bar{\boldsymbol{x}},\lambda) = 2m\lambda_0 \boldsymbol{x} - 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i + 2\lambda_1 \boldsymbol{x} = 2\lambda_0 m(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) + 2\lambda_1 \boldsymbol{x} = 0, \\ \dfrac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}},\lambda)}{\partial y} = 2\lambda_1 y = 0, \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + y^2 - 1 = 0, \\ \lambda_0 \ge 0,\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадок $\lambda_0 = 0$. З умови нормування отримаємо $|\lambda_1| = 1 \neq 0$, а тому з першого та другого рівнянь буде $\boldsymbol{x} = 0$, $y = 0$. Але ці значення не задовольняють третє рівняння. Отже, при $\lambda_0 = 0$ система необхідних умов розв'язків не має.

Тому покладемо $\lambda_0 = 1 > 0$ і перепишемо систему необхідних умов, відкинувши умови нормування.

$$\begin{cases} (m + \lambda_1)\boldsymbol{x} = m\boldsymbol{x}^0,\ (\|\boldsymbol{x}^0\| > 1), \\ \lambda_1 y = 0, \\ \|\boldsymbol{x}\|^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки: а) $\lambda_1 = 0$ і б) $\lambda_1 \neq 0$.

а) Нехай $\lambda_1 = 0$. Тоді з першого рівняння отримаємо $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$, а з другого випливає, що y — довільне. Тому з останнього рівняння будемо мати $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}^0\| = 1 - y^2 \le 1$, що суперечить умові $\|\boldsymbol{x}^0\| > 1$.

Отже при $\lambda_1 = 0$ система несумісна.

б) Розглянемо випадок, коли $\lambda_1 \neq 0$. З другого рівняння отримаємо $y = 0$. Тому третє рівняння дає $\|\boldsymbol{x}\|^2 = 1$. Розв'язуючи перше рівняння, отримуємо $\boldsymbol{x} = m\boldsymbol{x}^0/(m+\lambda_1)$. Підставляючи значення $\boldsymbol{x}$ в умову $\|\boldsymbol{x}\|^2 = 1$, будемо мати $m^2\|\boldsymbol{x}^0\|^2/(m+\lambda_1)^2 = 1$, звідки:

а) $m\|\boldsymbol{x}^0\| = m+\lambda_1$ або $\lambda_1^{(1)} = m(\|\boldsymbol{x}^0\| - 1) > 0$;

б) $m\|\boldsymbol{x}^0\| = -m-\lambda_1$ або $\lambda_1^{(2)} = -m(\|\boldsymbol{x}^0\| + 1) < 0$.

Відповідно отримуємо два розв'язки системи необхідних умов відносно $\boldsymbol{x}$:

$$\text{а)}\ \bar{\boldsymbol{x}}^{(1)} = \left(\frac{\boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}^0\|},\ 0 \right) \text{ при } \lambda_1^{(1)} = m(\|\boldsymbol{x}^0\| - 1) > 0;$$

та

$$\text{б)}\ \bar{\boldsymbol{x}}^{(2)} = \left(-\frac{\boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}^0\|},\ 0 \right) \text{ при } \lambda_1^{(2)} = -m(\|\boldsymbol{x}^0\| + 1) < 0.$$

Отже, екстремум функції $f^0(\boldsymbol{x})$ при умові (8.19) може досягатися лише в точках $\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}$ та $\bar{\boldsymbol{x}}^{(2)}$.

Запишемо гессіан функції Лагранжа по змінних $(\boldsymbol{x}, y) \in E^{n+1}$:

$$H_L^{(\boldsymbol{x},y)}(x,y,\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2(m+\lambda_1)\boldsymbol{E} & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

В точці ($\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}$, $\lambda_1^{(1)}$) маємо

$$H_L^{(x,y)}\left(\frac{\boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}^0\|}, 0, \lambda_1^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 2m\|\boldsymbol{x}^0\|\boldsymbol{E} & 0 \\ 0 & 2m(\|\boldsymbol{x}^0\|-1) \end{pmatrix}.$$

Всі послідовні головні мінори цієї матриці додатні: $\Delta_1 = 2m\|x^0\| > 0$, $\Delta_2 = (2m\|x^0\|)^2 > 0$, ... , $\Delta_n = (2m\|x^0\|)^n > 0$, $\Delta_{n+1} = (2m\|x^0\|)^n(2m(\|x^0\|-1)) > 0$, тому в точці ($\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}, \lambda_1^{(1)}$) функція $f^0(\boldsymbol{x})$ має локальний умовний мінімум.

В точці ($\bar{\boldsymbol{x}}^{(2)}, \lambda_1^{(2)}$) маємо

$$H_L^{(x,y)}\left(-\frac{\boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}^0\|}, 0, \lambda_1^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -2m\|\boldsymbol{x}^0\|\boldsymbol{E} & 0 \\ 0 & -2m(\|\boldsymbol{x}^0\|+1) \end{pmatrix}.$$

Послідовні головні мінори цієї матриці змінюють знак: $\Delta_1 = -2m\|x^0\| < 0$, $\Delta_2 = (-2m\|x^0\|)^2 > 0$, ... , $\Delta_n = (-2m\|x^0\|)^n$ ($\Delta_n < 0$ при $n=2k-1$, $\Delta_n > 0$ при $n=2k$), $\Delta_{n+1} = (-2m\|x^0\|)^n(-2m(\|x^0\|+1))$, де $-2m(\|x^0\|+1) < 0$. Тому в точці ($\bar{\boldsymbol{x}}^{(2)}, \lambda_1^{(2)}$) функція $f^0(\boldsymbol{x})$ має локальний умовний максимум.

Отже, при $\|\boldsymbol{x}^0\| > 1$ функція $f^0(\boldsymbol{x})$ має на одиничній кулі в точці $\boldsymbol{x}^0/\|\boldsymbol{x}^0\|$ локальний мінімум, а в точці $-\boldsymbol{x}^0/\|\boldsymbol{x}^0\|$ — локальний максимум.

Оскільки точок, підозрілих на екстремум, тільки дві, а множина X опукла, замкнена і обмежена, то ці точки і будуть точками глобальних екстремумів функції $f^0(\boldsymbol{x})$ на одиничній кулі.

Розділ 9. Опукле програмування

§ 1. Загальна теорія. Теорема Куна-Таккера

Розглянемо задачу

$$\mathbf{C}: \min\{f^0(\boldsymbol{x}): f^i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i=1,\dots,m,\ \boldsymbol{x}\in X\},$$

де X — опукла множина. Якщо функції $f^i(\boldsymbol{x})$, $i=0,1,\dots,m$, опуклі на X, то задачу **C** *називають задачею опуклого програмування (ЗОП). До опуклого програмування відносять також задачі максимізації вигляду*

$$\max\{g^0(\boldsymbol{x}): g^i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i=1,\dots,m,\ \boldsymbol{x}\in X\},$$

якщо X опукла множина, функція $g^0(\boldsymbol{x})$ опукла доверху на X, а система обмежень (тип яких, тобто, "≤", "=", "≥" не є суттєвим) може бути зведена до вигляду $f^i(\boldsymbol{x}) \le 0$, $i=1,\dots,m$, $\boldsymbol{x}\in X$, де функції $f^i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\dots,m$, опуклі донизу на X.

Як і у класичних задачах оптимізації *функцією Лагранжа* задачі **C** назвемо функцію

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = f^{0}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^{i}(\boldsymbol{x}),$$

де $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \geq 0$.

Означення 9.1. *Пара векторів* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ *називається сідловою точкою функції Лагранжа на множині* $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{u} \geq 0$, *якщо* $\boldsymbol{x}^* \in X$, $\boldsymbol{u}^* \geq 0$ *і для довільних* $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{u} \geq 0$

$$L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}) \leq L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \leq L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*). \tag{9.1}$$

Теорема 9.1 (достатні умови оптимальності). *Якщо функція Лагранжа задачі* **C** *має сідлову точку* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$, то $\boldsymbol{x}^*$ є оптимальним розв'язком задачі **C**, *і при цьому виконується правило доповнюючої нежорсткості*

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* f^{i}(\boldsymbol{x}^*) = 0. \tag{9.2}$$

Доведення. За означенням сідлової точки маємо: $\boldsymbol{x}^* \in X$, $\boldsymbol{u}^* \geq 0$ і для довільних $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{u} \geq 0$ виконується нерівність

$$f^{0}(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^{i}(\boldsymbol{x}^*) \leq f^{0}(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* f^{i}(\boldsymbol{x}^*) \leq f^{0}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* f^{i}(\boldsymbol{x}). \tag{9.3}$$

Треба довести, що $\boldsymbol{x}^* \in D_C = \{\boldsymbol{x} \in E^n\colon\ f^{i}(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \boldsymbol{x} \in X\}$ і що для довільних $\boldsymbol{x} \in D_C$ буде $f^{0}(\boldsymbol{x}^*) \leq f^{0}(\boldsymbol{x})$.

Розглянемо ліву частину нерівності (9.3). Маємо для довільних $\boldsymbol{u} \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i f^{i}(\boldsymbol{x}^*) \leq \sum_{i=1}^{m} u_i^* f^{i}(\boldsymbol{x}^*). \tag{9.4}$$

Із цієї нерівності випливає, що

$$f^{i}(\boldsymbol{x}^*) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m. \tag{9.5}$$

Дійсно, якби для деякого k було б $f^{k}(\boldsymbol{x}^*) > 0$, то, поклавши $u_i = 0$ при $i \neq k$ і $u_k = M$, де $M > 0$ як завгодно велике число, ми порушили б нерівність (9.4), а разом з нею і умови теореми. Отже, $\boldsymbol{x}^* \in D_C$.

Покладемо у нерівності (9.4) всі $u_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Отримаємо

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i^* f^{i}(\boldsymbol{x}^*). \tag{9.6}$$

З іншого боку, помноживши кожну з нерівностей (9.5) на відповідне $u_i^* \geq 0$ та додавши їх, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* f^{i}(\boldsymbol{x}^*) \leq 0. \tag{9.7}$$

Із (9.6) та (9.7) випливає правило доповнюючої нежорсткості (9.2).

Розглянемо тепер праву частину нерівності (9.3). Врахувавши умову (9.2), для довільних $\boldsymbol{x} \in X$ отримаємо

$$f^0(\boldsymbol{x}^*) \le f^0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* f^i(\boldsymbol{x}). \qquad (9.8)$$

В той же час для довільних $\boldsymbol{x} \in D_C$

$$f^i(\boldsymbol{x}) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (9.9)$$

Тоді, помноживши кожну з нерівностей (9.9) на відповідне $u_i^* \ge 0$ та додавши їх, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* f^i(\boldsymbol{x}) \le 0. \qquad (9.10)$$

Далі, розглядаючи нерівність (9.8) на множині $D_C \subset X$ та враховуючи (9.10), остаточно отримаємо: $f^0(\boldsymbol{x}^*) \le f^0(\boldsymbol{x}) \ \ \forall \boldsymbol{x} \in D_C$, тобто $\boldsymbol{x}^*$ є оптимальним розв'язком задачі **C**

Теорема доведена.

Умови регулярності

Означення 9.2. *Якщо для кожного $i = 1, \ldots, m$ існує точка $\boldsymbol{x}^i \in D_C$, в якій*

$$f^i(\boldsymbol{x}^i) < 0, \qquad (9.11)$$

то говорять, що множина D_C задовольняє умову регулярності.

Цю умову ми будемо використовувати в еквівалентній формі, яка називається *умовою регулярності Слейтера.*

Означення 9.3. *Якщо існує точка $\boldsymbol{x} \in D_C$, в якій*

$$f^i(\boldsymbol{x}) < 0, \ i = 1, \ldots, m, \qquad (9.12)$$

то говорять, що множина D_C задовольняє умову Слейтера.

Геометричний зміст умови Слейтера дуже простий — множина внутрішніх точок множини D_C, яка задовольняє умову Слейтера, непорожня: $\operatorname{int} D_C \ne \varnothing$.

Теорема 9.2 (про еквівалентність умов регулярності).
Умова регулярності (9.11) та умова Слейтера (9.12) еквівалентні.

Доведення. Із умови Слейтера безпосередньо випливає умова регулярності, для цього досить $\forall i$ покласти $\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{x}$.

Щоб довести, що із умови регулярності випливає умова Слейтера, покладемо

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{x}^k, \quad \alpha_k \ge 0, \ k = 1, \ldots, m, \ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1.$$

Оскільки всі $\boldsymbol{x}^k \in D_C$, а D_C — опукла множина, то $\boldsymbol{x} \in D_C$.

Скористаємось нерівністю Ієнсена для кожного $i = 1, \ldots, m$. Маємо при $i = 1, \ldots, m$

$$f^i(\boldsymbol{x}) = f^i\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{x}^k\right) \le \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f^i(\boldsymbol{x}^k) < 0$$

внаслідок того, що всі $\alpha_k \geq 0$ і завжди можна вибрати $\alpha_k > 0$ при $k=i$ $\forall i$, а при $k=i$ виконується $f^i(\boldsymbol{x}^i) < 0$ за умовою регулярності.

Теорема доведена.

Теорема 9.3 (Куна-Таккера). *Нехай*

$$\mathbf{C}: \min\{f^0(\boldsymbol{x}): f^i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i=1,\ldots,m,\ \boldsymbol{x} \in X\} \text{ —}$$

задача опуклого програмування, допустима множина

$$D_C = \{\boldsymbol{x} \in E^n: f^i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i=1,\ldots,m,\ \boldsymbol{x} \in X\}$$

якої задовольняє умову регулярності Слейтера.

Допустимий розв'язок $\boldsymbol{x}^* \in D_C$ задачі **C** *є її оптимальним розв'язком тоді і тільки тоді, коли існує невід'ємний вектор $\boldsymbol{u}^* \geq 0$ такий, що точка $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ є сідловою точкою функції Лагранжа задачі* **C** *на множині $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{u} \geq 0$.*

Доведення.

Достатність випливає з теореми про достатні умови оптимальності.

Необхідність. Нехай $\boldsymbol{x}^*$ є оптимальним розв'язком задачі **C**, тобто для довільних $\boldsymbol{x} \in D_C$ виконується $f^0(\boldsymbol{x}^*) \leq f^0(\boldsymbol{x})$.

Введемо у просторі E^{m+1} множини Y і Z за допомогою співвідношень

$$Z = \{\boldsymbol{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_m) \in E^{m+1}:\ z_0 < f^0(\boldsymbol{x}^*),\ z_i < 0,\ i=1,\ldots,m\},$$

$$Y = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in X} Y(\boldsymbol{x}),$$

де $Y(\boldsymbol{x})$ для довільного $\boldsymbol{x} \in X$ визначається так:

$$Y(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \in E^{m+1}:\ f^i(\boldsymbol{x}) \leq y_i,\ i=0,1,\ldots,m\}.$$

Геометрична інтерпретація множин Z та $Y(\boldsymbol{x})$ приводиться на рис. 9.1.

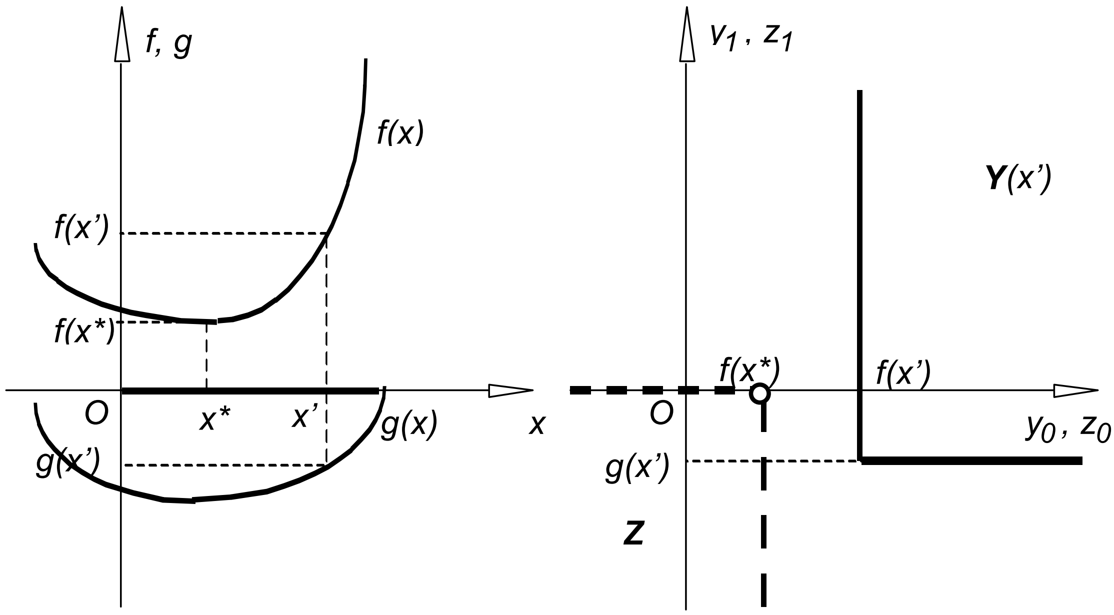


Рис. 9.1

$$f(x) \to \min,\ g(x) \leq 0,\ x \geq 0.$$

$$Z = \{\boldsymbol{z}=(z_0,z_1): z_0<f(x^*),\ z_1<0\}.$$
$$Y = \{\boldsymbol{y}=(y_0,y_1): y_0\geq f(x),\ y_1\geq g(x),\ x\geq 0\},$$

Покажемо, що множини Z і Y опуклі.

Опуклість множини Z очевидна: Z є перетином скінченного числа $m+1$ півпросторів у просторі E^{m+1}.

Аналогічно стверджуємо, що для довільного $\boldsymbol{x}\in X$ множина $Y(\boldsymbol{x})$ також опукла як перетин скінченного числа $m+1$ півпросторів у просторі E^{m+1}.

Далі, для довільних $\boldsymbol{y}^1,\boldsymbol{y}^2\in Y$ утворимо їх опуклу лінійну комбінацію $\overline{\boldsymbol{y}}= =\alpha\boldsymbol{y}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^2$, $\alpha\in[0,1]$, і покажемо, що $\overline{\boldsymbol{y}}$ є елементом множини Y.

Оскільки $\boldsymbol{y}^1\in Y$, то існує $\boldsymbol{x}^1\in X$, для якого $\boldsymbol{y}^1\in Y(\boldsymbol{x}^1)$. Аналогічно, існує елемент $\boldsymbol{x}^2\in X$, для якого $\boldsymbol{y}^2\in Y(\boldsymbol{x}^2)$. Оскільки X опукла множина, то опукла лінійна комбінація елементів $\boldsymbol{x}^1$ та $\boldsymbol{x}^2$ — точка $\overline{\boldsymbol{x}}=\alpha\boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2$, $\alpha\in[0,1]$, є елементом множини X.

Враховуючи опуклість функцій $f^i(\boldsymbol{x})$, $i=0,1,\ldots,m,$ отримаємо

$$f^i(\overline{\boldsymbol{x}}) = f^i(\alpha\boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}^2)\leq \alpha f^i(\boldsymbol{x}^1)+(1-\alpha)\,f^i(\boldsymbol{x}^2)\leq$$
$$\leq\alpha y_i^1 + (1-\alpha)\,y_i^2 = \overline{y_i}\,.$$

Отже, $f^i(\overline{\boldsymbol{x}})\leq\overline{y_i}$, $i=0,1,\ldots,m$, тобто $\overline{\boldsymbol{y}}\in Y(\overline{\boldsymbol{x}})\subset Y$, що означає опуклість множини Y.

Доведемо, що множини Z і Y не перетинаються. Розглянемо два випадки: 1) $\boldsymbol{x}\in D_C$ і 2) $\boldsymbol{x}\notin D_C$, але $\boldsymbol{x}\in X$.

1) Для довільних $\boldsymbol{x}\in D_C$ маємо:

- за умовами теореми: $f^0(\boldsymbol{x}^*)\leq f^0(\boldsymbol{x})$,
- за означенням множини Z: $z_0<f^0(\boldsymbol{x}^*)$,
- за означенням множини Y: $f^0(\boldsymbol{x})\leq y_0$.

Остаточно, для довільних $\boldsymbol{x}\in D_C$ отримаємо: $z_0<f^0(\boldsymbol{x}^*)\leq f^0(\boldsymbol{x})\leq y_0$, тобто $z_0<y_0$.

Це і означає, що множини Z та Y не перетинаються.

2) Оскільки $\boldsymbol{x}\notin D_C$, то знайдеться хоча б один індекс i, для якого виконується $0<f^i(\boldsymbol{x})$. В той же час за означенням множини Y: $f^i(\boldsymbol{x})\leq y_i$, а за означенням множини Z: $z_i<0$.

Таким чином, завжди існує індекс i, для якого $z_i<0<f^i(\boldsymbol{x})\leq y_i$, тобто $z_i<y_i$. А це означає, що і в цьому випадку множини Z та Y не перетинаються.

Отже, множини Z та Y опуклі і не мають спільних точок. Тоді на основі теореми про розділяючу гіперплощину та її наслідку існує ненульовий вектор $\boldsymbol{c}=(c_0,c_1,\ldots,c_m)\neq 0$ такий, що

$$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{z})\leq(\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}), \tag{9.13}$$

для довільних $z\in\overline{Z}$, $y\in\overline{Y}$, де $\overline{Z}$ і $\overline{Y}$ — замикання, відповідно, множин Z і Y.

Оскільки множині $\overline{Z}$ належать точки з як завгодно великими по модулю від'ємними координатами, то із того, що нерівність (9.13) має місце для довільних $y\in\overline{Y}$, випливає умова: $\boldsymbol{c}=(c_0,c_1,\ldots,c_m)\geq\boldsymbol{0}$.

В іншому випадку, тобто, коли б знайшлося хоча б одне $c_i<0$ серед координат вектора $\boldsymbol{c}$, то ліва частина нерівності (9.13) стала б необмеженою на множині $\overline{Z}$ зверху, а, значить, стала б неможливою для довільних $y \in \overline{Y}$ нерівність (9.13).

Зазначимо, що нерівність (9.13) виконується і в граничних точках множин Z та Y. Тому, вибравши для довільних $\boldsymbol{x} \in X$: $y_0 = f^0(\boldsymbol{x})$, $z_0 = f^0(\boldsymbol{x}^*)$, $y_i=f^i(\boldsymbol{x})$, $z_i=0$, $i=1,\ldots,m,$ отримаємо із (9.13) для довільних $\boldsymbol{x} \in X$

$$c_0 f^0(\boldsymbol{x}^*) \le c_0 f^0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} c_i f^i(\boldsymbol{x}). \tag{9.15}$$

Впевнимося, що $c_0>0$. Припустимо противне, тобто, що $c_0=0$. Тоді з (9.15) для довільних $\boldsymbol{x} \in X$ отримаємо

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} c_i f^i(\boldsymbol{x}). \tag{9.16}$$

Тим більше нерівність (9.16) матиме місце для довільних $\boldsymbol{x} \in D_C \subset X$.

З іншого боку для довільних $\boldsymbol{x} \in D_C$ завжди

$$f^i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i=1,\ldots,m. \tag{9.17}$$

Помноживши кожну з нерівностей (9.17) на відповідне $c_i \ge 0$ і додавши їх, отримаємо для довільних $\boldsymbol{x} \in D_C$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f^i(\boldsymbol{x}) \le 0. \tag{9.18}$$

Із (9.16) та (9.18) витікає, що для довільних $\boldsymbol{x} \in D_C$ має місце рівність

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f^i(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{9.19}$$

Кожний доданок цієї суми недодатний, тому сума буде дорівнювати нулю лише тоді, коли всі її доданки для будь-яких $\boldsymbol{x} \in D_C$ дорівнюють нулю

$$c_i f^i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i=1,\ldots,m. \tag{9.20}$$

Оскільки $\boldsymbol{c}=(c_0,c_1,\ldots,c_m)\neq 0$ і всі $c_i \ge 0$, $i=1,\ldots,m$, то умова (9.20) буде виконуватись тільки тоді, коли для тих i, для яких $c_i>0$, буде $f^i(\boldsymbol{x})=0\ \forall \boldsymbol{x} \in D_C$. А це суперечить умові регулярності Слейтера для множини D_C, за якою існує допустима точка $\overline{\boldsymbol{x}} \in D_C$ така, що $f^i(\overline{\boldsymbol{x}})<0$, $i=1,\ldots,m$. Отже, наше припущення невірне і $c_0>0$.

Покладемо $u_i^* = c_i / c_0$, $i=1,\ldots,m$, $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*,\ldots,u_m^*)$. Очевидно, що $\boldsymbol{u}^* \ge \boldsymbol{0}$. Тоді нерівність (9.15) набуде такого вигляду для довільних $\boldsymbol{x} \in X$

$$f^0(\boldsymbol{x}^*) \le f^0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* f^i(\boldsymbol{x}). \tag{9.21}$$

Покладемо в (9.21) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$. Отримаємо

$$0\le\sum_{i=1}^{m}u_i^* f^i(\boldsymbol{x}^*). \tag{9.22}$$

За умовою теореми $\boldsymbol{x}^*\in D_C$, тобто $f^i(\boldsymbol{x}^*)\le 0$, $i=1,\ldots,m$, наслідком чого при довільних $u_i\ge 0$, $i=1,\ldots,m$, є нерівність

$$\sum_{i=1}^{m}u_i f^i(\boldsymbol{x}^*)\le 0. \tag{9.23}$$

При $u_i=u_i^*$, $i=1,\ldots,m$, із (9.23) отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m}u_i^* f^i(\boldsymbol{x}^*)\le 0. \tag{9.24}$$

Система нерівностей (9.22), (9.24) дає умову доповнюючої нежорсткості

$$\sum_{i=1}^{m}u_i^* f^i(\boldsymbol{x}^*)=0. \tag{9.25}$$

Враховуючи (9.25) із (9.21) отримаємо для довільних $\boldsymbol{x}\in X$

$$f^0(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{i=1}^{m}u_i^* f^i(\boldsymbol{x}^*)\le f^0(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}u_i^* f^i(\boldsymbol{x})$$

або

$$L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\le L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*). \tag{9.26}$$

Враховуючи (9.23), (9.25) отримаємо $\forall u_i\ge 0$, $i=1,\ldots,m$,

$$f^0(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{i=1}^{m}u_i f^i(\boldsymbol{x}^*)\le f^0(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{i=1}^{m}u_i^* f^i(\boldsymbol{x}^*)$$

або

$$L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u})\le L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*). \tag{9.27}$$

Порівняння (9.26) і (9.27) дає подвійну нерівність

$$L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u})\le L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\le L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*)$$

$\forall\boldsymbol{x}\in X$ та $\forall\boldsymbol{u}\ge 0$, тобто $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$ є сідловою точкою функції Лагранжа задачі **C**.

Теорема доведена.

Зауважимо, що необхідною і достатньою умовою існування сідлової точки скалярної функції двох векторних аргументів, як було доведено раніше (див. розділ 5), є рівність мінімаксів

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \max_{\boldsymbol{u}\ge 0}\min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), \tag{9.28}$$

причому компоненти сідлової точки $\boldsymbol{x}^*$ та $\boldsymbol{u}^*$ є, відповідно, точками зовнішніх екстремумів в мінімаксах

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= \arg\min_{\boldsymbol{x}\in X}(\max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})), \\ \boldsymbol{u}^* &= \arg\max_{\boldsymbol{u}\ge 0}(\min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})). \end{aligned} \tag{9.29}$$

Значення функції $L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$ в сідловій точці дорівнює спільному значенню мінімаксів.

§ 2. Теорія двоїстості математичного програмування

Існують різні варіанти теореми Куна-Таккера, різні її узагальнення і застосування в теорії екстремальних задач. Ця теорема покладена в основу теорії двоїстості математичного програмування, вона також знаходить застосування і в чисельних методах розв'язування задач математичного програмування (*МП*). Зокрема, теорема Куна-Таккера дозволяє при певних умовах замінити вихідну задачу *МП* задачею відшукання сідлових точок її функції Лагранжа, тобто двома задачами вигляду

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), \tag{9.30}$$

$$\max_{\boldsymbol{u}\ge 0}\min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}). \tag{9.31}$$

Введемо функції

$$F(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), \quad G(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

та розглянемо задачі

$$\min\{F(\boldsymbol{x}):\ \boldsymbol{x}\in X\}, \tag{9.32}$$

$$\max\{G(\boldsymbol{u}):\ \boldsymbol{u}\ge 0\}. \tag{9.33}$$

Задачі (9.32), (9.33) називають, відповідно, прямою та двоїстою задачами МП. Змінні задачі (9.33) $u_1,\ldots,u_m$ *називають двоїстими змінними або множниками Лагранжа.*

Лема 9.1 (про еквівалентність вихідної задачі МП і задачі про мінімакс її функції Лагранжа). *Задача* (9.32) *еквівалентна задачі*

$$\mathbf{C}: \min\{f^0(\boldsymbol{x}): f^i(\boldsymbol{x})\le 0,\ i=1,\ldots,m,\ \boldsymbol{x}\in X\}.$$

<u>Доведення</u>. Маємо

$$F(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \max_{\boldsymbol{u}\ge 0}\left\{ f^0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(\boldsymbol{x})\right\} = \begin{cases} f^0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in D_C, \\ \infty, & \boldsymbol{x}\notin D_C,\ \boldsymbol{x}\in X. \end{cases}$$

Тоді мінімум функції $F(\boldsymbol{x})$ досягається на допустимій множині D_C задачі **C** і збігається з мінімумом функції $f^0(\boldsymbol{x})$, тому задача (9.32) та задача **C** рівносильні.

Лема доведена.

Лема 9.2 (про нерівність, яка зв'язує значення цільових функцій прямої та двоїстої задач МП). *При всіх* $\boldsymbol{x}\in X$, $\boldsymbol{u}\ge 0$ *виконується нерівність* $G(\boldsymbol{u})\le F(\boldsymbol{x})$.

Доведення. При всіх $\boldsymbol{u} \geq 0$ очевидна нерівність

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \leq L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}).$$

Тим більше буде справедливою при всіх $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{u} \geq 0$ нерівність

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \leq \max_{\boldsymbol{u} \geq 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}).$$

тобто $G(\boldsymbol{u}) \leq F(\boldsymbol{x})$.

Лема доведена.

Теорема 9.4 (двоїстості МП). *Якщо функція Лагранжа задачі* **С** *має сідлову точку* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$, *то оптимальні розв'язки прямої (9.32) та двоїстої (9.33) задач існують і при цьому*

$$\max_{\boldsymbol{u} \geq 0} G(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} F(\boldsymbol{x}).$$

Доведення. На основі достатніх умов оптимальності

$$\boldsymbol{x}^* = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in D_C} f^0(\boldsymbol{x}).$$

Тоді на основі леми 9.1 $\boldsymbol{x}^*$ буде оптимальним розв'язком прямої задачі (9.32)

$$\boldsymbol{x}^* = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in X} F(\boldsymbol{x}).$$

Далі, за умовами теореми $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ — сідлова точка функції Лагранжа, тобто $\boldsymbol{x}^* \in X$, $\boldsymbol{u}^* \geq 0$ і для довільних $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{u} \geq 0$

$$L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}) \leq L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \leq L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*).$$

Тоді, з одного боку для довільних $\boldsymbol{u} \geq 0$

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \leq L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}) \leq L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*),$$

а з іншого боку для довільних $\boldsymbol{x} \in X$

$$L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*) \leq \min_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*) \leq L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*).$$

Отже, для довільних $\boldsymbol{u} \geq 0$

$$G(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \leq L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*) \leq \min_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*) = G(\boldsymbol{u}^*),$$

тобто

$$\boldsymbol{u}^* = \arg\max_{\boldsymbol{u} \geq 0} G(\boldsymbol{u})$$

є оптимальним розв'язком двоїстої задачі (9.33).

Далі, із означення сідлової точки випливає для довільних $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{u} \geq 0$

$$L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}) \leq L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*).$$

Тоді наслідком цієї нерівності буде

$$\max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}) \le \min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*),$$

і тим більше буде виконуватись

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} \max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \le \max_{\boldsymbol{u}\ge 0} \min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}). \qquad (9.34)$$

За лемою 9.2 при всіх $\boldsymbol{x}\in X$, $\boldsymbol{u}\ge 0$ виконується нерівність $G(\boldsymbol{u})\le F(\boldsymbol{x})$, тобто при всіх $\boldsymbol{x}\in X$, $\boldsymbol{u}\ge 0$

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \le \max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),$$

звідки випливає

$$\max_{\boldsymbol{u}\ge 0} \min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \le \min_{\boldsymbol{x}\in X} \max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}). \qquad (9.35)$$

Порівняння (9.34) і (9.35) дає рівність мінімаксів

$$\max_{\boldsymbol{u}\ge 0} \min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{x}\in X} \max_{\boldsymbol{u}\ge 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),$$

причому за лемою про рівність мінімаксів їх спільне значення дорівнює $L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$. Отже, остаточно маємо

$$\max_{\boldsymbol{u}\ge 0} G(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{x}\in X} F(\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*).$$

Теорема доведена.

Зауваження до теореми Куна-Таккера та теорії двоїстості.

1. Теорема Куна-Таккера дає необхідні і достатні умови оптимальності в задачах опуклого програмування (*ОП*). Якщо умову Слейтера відкинути, то теорема Куна-Таккера дає тільки достатні умови оптимальності.

2. Про роль умови регулярності Слейтера в теорії двоїстості. Теореми двоїстості мають місце лише тоді, коли функція Лагранжа задачі *МП* має сідлову точку. Необхідно підкреслити, що мається на увазі задача математичного програмування, тобто більш загальна задача ніж задача опуклого програмування.

Якщо існування сідлової точки наперед не гарантоване, то повинні виконуватись умови теореми Куна-Таккера, тобто задача повинна бути задачею *ОП*, а її допустима множина повинна задовольняти умову регулярності Слейтера. Якщо умова Слейтера не виконується, то функція Лагранжа може взагалі не мати сідлової точки, хоча задача *ОП* буде мати оптимальний розв'язок. Ясно, що у цьому випадку теореми двоїстості для такої задачі сенсу не мають.

Приклад 9.1. *Нехай маємо задачу*

$$\mathbf{C}: \min\{-x:\ x^2\le 0,\ x\ge 0\}.$$

Це задача *ОП*. Умова Слейтера для допустимої області задачі **C** не виконується, оскільки множина її внутрішніх точок порожня $\{x:\ x^2<0\}=\varnothing$. Сама допустима множина складається із однієї точки $x=0$. Оптимальний розв'язок задачі **C** існує і рівний нулю: $x^*=0$.

Розглянемо функцію Лагранжа $L(x,u)=-x+ux^2$ цієї задачі в області $x \geq 0$, $u \geq 0$. В сідловій точці (x^*, u^*), якщо вона існує, функція Лагранжа досягає мінімуму по x при $u=u^*$ і максимуму по u при $x=x^*$.

Знайдемо стаціонарні точки функції $L(x,u)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2xu - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} = x^2 = 0. \end{cases}$$

Маємо $x=0$, але не існує таких $u \geq 0$, для яких виконувалось би перше рівняння. Отже, функція Лагранжа $L(x,u)$ не має стаціонарних точок, а тому вона не має і сідлових точок.

І ще про зв'язок сідлової точки функції Лагранжа задачі *ОП* і умови регулярності Слейтера. На питання про те, чи не випливає умова Слейтера із існування сідлової точки функції Лагранжа задачі *ОП*, в загальному випадку потрібно дати негативну відповідь, оскільки існування сідлової точки в такому випадку було б необхідною і достатньою умовою оптимальності (див. [15], стор. 65). Якщо ж система обмежень лінійна, то умова Слейтера зайва, і існування сідлової точки є необхідною і достатньою умовою оптимальності (друга теорема двоїстості лінійного програмування).

Отже, остаточно, розв'язування задачі математичного програмування еквівалентне відшуканню сідлової точки функції Лагранжа цієї задачі за умови, що така точка існує.

Тому важливими для практичного застосування є необхідні і достатні умови існування у функції сідлової точки. Нагадаємо, що у загальному випадку необхідною і достатньою умовою існування сідлової точки у скалярної функції двох векторних аргументів є рівність мінімаксів.

Сформулюємо такі умови для задачі *ОП*

$$\mathbf{C}: \min \{ f^0(\boldsymbol{x}) : f^i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i=1,\ldots,m,\ \boldsymbol{x} \geq 0 \}$$

у випадку диференційовності функцій $f^i(\boldsymbol{x})$, $i=0,1,\ldots,m$.

Теорема 9.5 (необхідні і достатні умови існування сідлової точки функції Лагранжа задачі ОП). *Якщо функції* $f^i(\boldsymbol{x}) \in C^1_X$, $i=0,1,\ldots,m$, *де* $X=\{\boldsymbol{x} \in E^n : \boldsymbol{x} \geq 0\}$, *то необхідною і достатньою умовою того, що точка* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ *є сідловою точкою функції Лагранжа задачі* **C** *в області* $\boldsymbol{x} \geq 0$, $\boldsymbol{u} \geq 0$ *є виконання умов*

$$\begin{cases} \nabla_x L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*) \geq 0, \quad (\boldsymbol{x}^*, \nabla_x L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)) = 0, \quad \boldsymbol{x}^* \geq 0, \\ \nabla_u L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*) \leq 0, \quad (\boldsymbol{u}^*, \nabla_u L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)) = 0, \quad \boldsymbol{u}^* \geq 0, \end{cases} \tag{9.36}$$

де $\nabla_x L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ *і* $\nabla_u L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ *— градієнти функції* $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ *відповідно по* $\boldsymbol{x}$ *та по* $\boldsymbol{u}$.

Без доведення (доведення див. [15], стор. 64).

Зазначимо, що якщо допустима множина задачі **C**

$$D_C = \{ \boldsymbol{x} \in E^n : f^i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i=1,\ldots,m,\ \boldsymbol{x} \geq 0 \}$$

задовольняє умову регулярності Слейтера, то умови (9.36) будуть необхідними і достатніми умовами існування оптимальної точки $\boldsymbol{x}^*$ задачі **С**. Враховуючи це, можна вказати такий *спосіб розв'язування задачі ОП* для випадку, що розглядається:

а) побудувати функцію Лагранжа задачі **С**;

б) записати для неї достатні умови оптимальності (9.36), які використовують, як правило, в еквівалентному вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial x_j} \ge 0, \ j=1,\ldots,n, \quad x_j \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial x_j} = 0, \ j=1,\ldots,n, \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial u_i} = f^i(\boldsymbol{x}) \le 0, \ i=1,\ldots,m, \quad u_i \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial u_i} = 0, \ i=1,\ldots,m, \\ x_j \ge 0, \ j=1,\ldots,n, \quad u_i \ge 0, \ i=1,\ldots,m; \end{cases} \tag{9.37}$$

в) розв'язати систему (9.37) відносно $\boldsymbol{x}$ (звичайно, якщо вона має розв'язок взагалі) і, тим самим, знайти розв'язок $\boldsymbol{x}^*$ задачі **С** .

§ 3. Задача опуклого квадратичного програмування

Зауважимо, що процедуру розв'язування системи (9.37) для довільних опуклих диференційовних функцій $f^i(\boldsymbol{x})$, $i=0,1,\ldots,m,$ реалізувати практично неможливо (мається на увазі аналітично). В той же час ця система ефективно розв'язується, якщо вона є лінійною. Але вона буде лінійною лише для задачі лінійного програмування, яку взагалі недоцільно розв'язувати таким шляхом. Однак система (9.37) може бути частково лінійною. Це буде у випадку, коли $f^0(\boldsymbol{x})$ — квадратична функція, а $f^i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\ldots,m,$ — лінійні функції, тобто, коли оптимізаційна задача буде задачею квадратичного програмування.

Отже, розглянемо *задачу опуклого квадратичного програмування* у вигляді

$$f^0(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}) \to \min, \tag{9.38}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{0}, \tag{9.39}$$

$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \tag{9.40}$$

де $\boldsymbol{c} \in E^n$, $\boldsymbol{x} \in E^n$, $\boldsymbol{D} = \|d_{ij}\|$, $i,j=1,\ldots,n$, — симетрична невід'ємно визначена матриця, $\boldsymbol{A} = \|a_{ij}\|$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, — прямокутна матриця виміру $m \times n$, $\boldsymbol{b} \in E^m$.

Побудуємо функцію Лагранжа задачі (9.38)–(9.40)

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}).$$

Знайдемо градієнти функції Лагранжа по $\boldsymbol{x}$ та по $\boldsymbol{u}$

$$\nabla_x L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}, \ \nabla_u L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$$

та запишемо необхідні і достатні умови існування сідлової точки

$$\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{0}, \tag{9.41}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{0}, \tag{9.42}$$

$$(\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{Dx} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{9.43}$$

$$(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) = 0, \tag{9.44}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}.$$

Введемо невід'ємні вектори балансних змінних $\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_n)\geq\boldsymbol{0}$ та $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_n)\geq\boldsymbol{0}$, за допомогою яких нерівності (9.41), (9.42) перетворимо в рівності. Отримаємо систему

$$\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{Dx} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \tag{9.45}$$

$$\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}, \tag{9.46}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}. \tag{9.47}$$

Із (9.45), (9.46) маємо $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{Dx}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}$. Тому рівності (9.43), (9.44) набувають вигляду

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0,\ (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = 0$$

або в силу умов (9.47)

$$v_j\ x_j = 0,\ j=1,\dots,n, \tag{9.48}$$

$$w_i\ u_i = 0,\ i=1,\dots,m. \tag{9.49}$$

Зауважимо, що деякі з обмежень (9.39) можуть бути рівностями. Тоді на відповідні їм множники Лагранжа u_i не накладаються умови невід'ємності. Крім того, оскільки в цьому випадку відповідні таким обмеженням умови (9.49) виконуватимуться тотожно, то нема потреби їх враховувати і тому їх можна відкинути.

Отже, задача відшукання сідлової точки функції Лагранжа задачі (9.38)–(9.40) звелась до відшукання розв'язку системи (9.45), (9.46) за умов (9.48), (9.49). Система (9.45), (9.46) складається з $m+n$ лінійних рівнянь відносно $2(m+n)$ невідомих x_j, v_j ($j=1,\dots,n$), u_i, w_i ($i=1,\dots,m$). Крім того, як випливає із (9.48), (9.49), довільний розв'язок цієї системи повинен задовольняти умови:

$$\forall j, \text{ якщо } x_j > 0, \text{ то } v_j = 0, \text{ або, якщо } v_j > 0, \text{ то } x_j = 0; \tag{9.50}$$

$$\forall i, \text{ якщо } u_i > 0, \text{ то } w_i = 0, \text{ або, якщо } w_i > 0, \text{ то } u_i = 0. \tag{9.51}$$

Тоді шуканим розв'язком системи (9.45), (9.46) може бути довільний допустимий базисний її розв'язок, для якого змінні x_j та v_j з однаковими індексами j, а також змінні u_i та w_i з однаковими індексами i, не є водночас базисними. Знайти такий розв'язок можна шляхом побудови для системи (9.45), (9.46) допоміжної задачі методом штучного базису з подальшим розв'язуванням її симплекс-методом.

Оптимальний розв'язок допоміжної задачі може не задовольняти умови (9.50), (9.51). Тоді потрібно добитись виконання умов (9.50), (9.51) проведенням необхідної кількості додаткових ітерацій симплекс-методу по заміні векторів базису оптимального розв'язку. При цьому для введення в базис можна вибирати лише ті небазисні вектори, які мають нульові оцінки. Це гарантуватиме незмінність значення цільової функції.

Приклад 9.1. *Розв'язати задачу*

$$z = -5x_1 - 2x_2 + x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \to \min,$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 15,$$
$$x_1 + 2x_2 = 8,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Функція $z = z(x_1, x_2)$ опукла, оскільки

$$z_{11} = 2 > 0,\ \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ \text{ де } z_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j},$$

і за критерієм Сильвестра матриця

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{Vmatrix}$$

додатно визначена, а, отже, додатно визначеною є і квадратична форма $x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$. Тому задача, що розглядається, є задачею опуклого квадратичного програмування.

Будуємо її функцію Лагранжа: $L(x_1, x_2, u_1, u_2) =$

$$= -5x_1 - 2x_2 + x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + u_1(2x_1 + 3x_2 - 15) + u_2(x_1 + 2x_2 - 8)$$

та записуємо необхідні і достатні умови існування сідлової точки

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = -5 + 2x_1 - x_2 + 2u_1 + u_2 \ge 0, && \frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 = 0, \\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 - x_1 + 2x_2 + 3u_1 + 2u_2 \ge 0, && \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 = 0, \\
&\frac{\partial L}{\partial u_1} = 2x_1 + 3x_2 - 15 \le 0, && \frac{\partial L}{\partial u_1} u_1 = 0, \\
&\frac{\partial L}{\partial u_2} = x_1 + 2x_2 - 8 = 0, && x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ u_1 \ge 0.
\end{aligned} \tag{9.52}$$

Зауважимо, що умова $\frac{\partial L}{\partial u_2} u_2 = 0$ виконується тотожно, оскільки $\frac{\partial L}{\partial u_2} = 0$, тому її можна відкинути.

Введемо балансні змінні $v_1 \ge 0$, $v_2 \ge 0$, $w_1 \ge 0$ та перепишемо систему умов (9.52) у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases}
2x_1 - x_2 + 2u_1 + u_2 - v_1 = 5, \\
-x_1 + 2x_2 + 3u_1 + 2u_2 - v_2 = 2, \\
2x_1 + 3x_2 + w_1 = 15, \\
x_1 + 2x_2 = 8, \\
x_1, x_2, u_1, v_1, v_2, w_1 \ge 0,
\end{cases} \tag{9.53}$$

та умов

$$x_1 v_1 = 0,\ x_2 v_2 = 0,\ u_1 w_1 = 0. \tag{9.54}$$

Змінна u_2 вільна за знаком, тому подамо її у вигляді $u_2 = u_3 - u_4$, де $u_3 \geq 0$, $u_4 \geq 0$, та перепишемо систему (9.53)

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 2u_1 + \ \ u_3 - \ u_4 - v_1 & = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 3u_1 + 2u_3 - 2u_4 \ \ \ - v_2 & = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + w_1 & = 15, \\ x_1 + 2x_2 & = 8, \\ x_1, x_2, u_1, u_3, u_4, v_1, v_2, w_1 \geq 0. & \end{cases}$$

Допоміжну задачу для відшукання допустимого базисного розв'язку цієї системи будуємо методом штучного базису. Маємо

$$\begin{cases} \qquad\qquad y_1 + y_2 + y_3 \to min, & \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 2u_1 + \ \ u_3 - \ u_4 - v_1 \qquad + y_1 & = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 3u_1 + 2u_3 - 2u_4 \ \ \ - v_2 \qquad + y_2 & = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + w_1 & = 15, \\ \ \ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + y_3 & = 8, \\ x_1, x_2, u_1, u_3, u_4, v_1, v_2, w_1, y_1, y_2, y_3 \geq 0, & \\ y_1, y_2, y_3 - \text{ штучні змінні.} & \end{cases} \qquad (9.55)$$

Зазначимо, що шуканий розв'язок повинен задовольняти умови (9.54).

Задачу (9.55) розв'язуємо симплекс-методом (див. таблицю 9.1). Символом "∗" позначені дані, які можна не обчислювати. Остання ітерація здійснена з метою задоволення умови $u_1 \ w_1 = 0$.

Оптимальний розв'язок допоміжної задачі $x_1 = 24/7$, $x_2 = 16/7$, $u_3 = 3/7$, $w_1 = 9/7$, $u_1 = u_4 = v_1 = v_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ визначає оптимальний розв'язок вихідної задачі квадратичного програмування: $x_1 = 24/7$, $x_2 = 16/7$. Оптимальне значення цільової функції рівне $z = -88/7$.

Таблиця 9.1.

$x_б$	x_1	x_2	u_1	u_3	u_4	v_1	v_2	$w1$	y_1	y_2	y_3	β	θ
y_1	2	–1	2	1	–1	–1	0	0	1	0	0	5	5/2
y_2	–1	2	**3**	2	–2	0	–1	0	0	1	0	2	2/3
w_1	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	15	
y_3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	
Δ	–2	–3	–5	–3	3	1	1	0	0	0	0	15	
y_1	**8/3**	–7/3	0	–1/3	1/3	–1	2/3	0	1	∗	0	11/3	11/8
u_1	–1/3	2/3	1	2/3	–2/3	0	–1/3	0	0	∗	0	2/3	
w_1	2	3	0	0	0	0	0	1	0	∗	0	15	15/2
y_3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	∗	1	8	8
Δ	–11/3	1/3	0	1/3	–1/3	1	–2/3	0	0	∗	0	35/3	

x_1	1	–7/8	0	–1/8	1/8	–3/8	2/8	0	*	*	0	11/8	
u_1	0	3/8	1	5/8	–5/8	–1/8	–2/8	0	*	*	0	9/8	3
w_1	0	38/8	0	2/8	–2/8	6/8	–4/8	1	*	*	0	98/8	98/38
y_3	0	**23/8**	0	1/8	–1/8	3/8	–2/8	0	*	*	1	53/8	53/23
Δ	0	–23/8	0	–1/8	1/8	–3/8	2/8	0	*	*	0	53/8	
x_1	1	0	0	–2/23	2/23	–6/23	4/23	0	*	*	*	78/23	
u_1	0	0	1	**14/23**	–14/23	–4/23	–5/23	0	*	*	*	6/23	3/7
w_1	0	0	0	1/23	–1/23	3/23	–2/23	1	*	*	*	30/23	30
x_2	0	1	0	1/23	–1/23	3/23	–2/23	0	*	*	*	53/23	53
Δ	0	0	0	0	0	0	0	0	*	*	*	0	
x_1	1	0	*	0	*	*	*	0	*	*	*	24/7	
u_3	0	0	*	1	*	*	*	0	*	*	*	3/7	
w_1	0	0	*	0	*	*	*	1	*	*	*	9/7	
x_2	0	1	*	0	*	*	*	0	*	*	*	16/7	
Δ	0	0	*	1/3	*	*	*	0	*	*	*	0	

Розділ 10. Градієнтні методи

§ 1. Градієнтні методи безумовної оптимізації

У цьому параграфі буде розглянута задача відшукання безумовного екстремуму диференційовної функції $z=f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in E^n$, $f(\boldsymbol{x})\in C^1$.

Ця задача (хоча б принципово) може бути розв'язана класичними методами. Ці методи називаються непрямими, оскільки вони використовують необхідні умови екстремуму $\nabla f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$. Однак слід зауважити, що для реальних задач розв'язування цієї системи є не менш складною проблемою, ніж розв'язування вихідної задачі. Непрямі методи застосовують в основному тоді, коли розв'язок екстремальної задачі необхідно знайти в аналітичному вигляді. Для розв'язування складних практичних задач, як правило, використовують прямі методи, які зв'язані з безпосереднім порівнянням функції в двох чи більше точках.

Нехай маємо деяку точку $\boldsymbol{x}^s\in E^n$. З'ясуємо, як при розв'язуванні задачі мінімізації

$$f(\boldsymbol{x})\to\min,\ \boldsymbol{x}\in E^n,\ f(\boldsymbol{x})\in C^1,$$

перейти до нової точки $\boldsymbol{x}^{s+1}$ так, щоб виконувалась нерівність

$$f(\boldsymbol{x}^{s+1})< f(\boldsymbol{x}^s).$$

Подамо $\boldsymbol{x}^{s+1}$ у вигляді $\boldsymbol{x}^{s+1}=\boldsymbol{x}^s+\rho\boldsymbol{d}$, де вектор $\boldsymbol{d}=(d_1,\ldots,d_n)^T$ визначає напрямок зміщення, а число $\rho>0$ — крок зміщення із точки $\boldsymbol{x}^s$ в точку $\boldsymbol{x}^{s+1}$.

Означення 10.1. *Напрямок* $\boldsymbol{d}$ *назвемо підхожим (для задачі мінімізації), якщо існує* $\rho>0$, для якого $f(\boldsymbol{x}^s+\rho\boldsymbol{d})<f(\boldsymbol{x}^s)$.

Оскільки функція $f(\boldsymbol{x})$ диференційовна, то за теоремою Тейлора маємо

$$f(\boldsymbol{x}^s+\rho\boldsymbol{d})=f(\boldsymbol{x}^s)+\rho\nabla^T f(\xi)\boldsymbol{d},$$

де $\xi=\boldsymbol{x}^s+\theta\rho\boldsymbol{d}$, $\theta\in(0,1)$. Звідси витікає, що напрямок буде підхожим, якщо

$$\nabla^T f(\xi)\boldsymbol{d}<0. \qquad (10.1)$$

При досить малих $\rho>0$ точка ξ попадає в такий окіл точки $\boldsymbol{x}^s$, в якому функція $\nabla^T f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}$ зберігає знак як неперервна ($f(\boldsymbol{x})\in C^1$). Тому в точці $\boldsymbol{x}^s$ теж буде мати місце нерівність подібна (10.1)

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^s)\boldsymbol{d}<0. \qquad (10.2)$$

Отже, ми з'ясували, що при переході від точки $\boldsymbol{x}^s$ до точки $\boldsymbol{x}^{s+1}=\boldsymbol{x}^s+\rho\boldsymbol{d}$, $\rho>0$, напрямок $\boldsymbol{d}$ підхожий, якщо має місце нерівність (10.2), тобто, якщо похідна по напрямку $\boldsymbol{d}$ від функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^s$ є від'ємною:

$$D_d f(\boldsymbol{x}^s)=\nabla^T f(\boldsymbol{x}^s)\boldsymbol{d}=(\nabla f(\boldsymbol{x}^s),\boldsymbol{d})<0.$$

Зауважимо, що якщо $\boldsymbol{d}$ — підхожий напрямок, то і $\rho\boldsymbol{d}$ для довільних $\rho>0$ також є підхожим напрямком. Тому множина всіх підхожих напрямків утворює конус підхожих напрямків з вершиною в точці $\boldsymbol{x}^s$.

З'ясуємо тепер *геометричну інтерпретацію* умови (10.2).

Як відомо, градієнт $\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ є вектором нормалі до гіперповерхні рівня функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^s$ (у двовимірному випадку — лінії рівня), спрямованим у бік зростання функції $f(\boldsymbol{x})$.

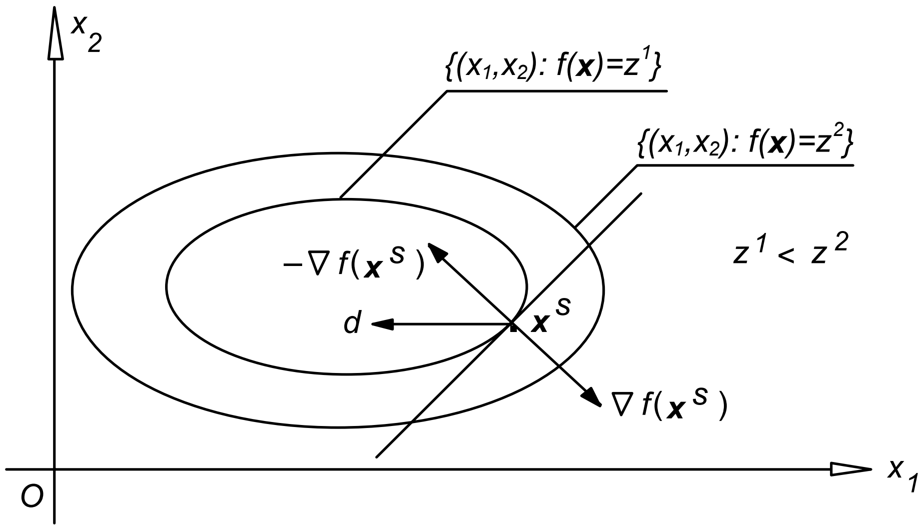


Рис. 10.1

Поряд з градієнтом розглянемо антиградієнт $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$. Візьмемо за напрямок $\boldsymbol{d}$ довільний вектор з початком у точці $\boldsymbol{x}^s$, який утворює гострий кут з антиградієнтом $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$. Маємо у цьому випадку

$$-\nabla^T f(\boldsymbol{x}^s)\boldsymbol{d}=(-\nabla f(\boldsymbol{x}^s),\boldsymbol{d})=|\nabla f(\boldsymbol{x}^s)||\boldsymbol{d}|\cos(\widehat{\nabla f(\boldsymbol{x}^s),\boldsymbol{d}})>0$$

або

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^s)\boldsymbol{d}<0,$$

що означає, що $\boldsymbol{d}$ — підхожий напрямок (див. рис. 10.1).

Нехай $|\boldsymbol{d}| = 1$. Тоді похідна за напрямком $\boldsymbol{d}$

$$D_d f(\boldsymbol{x}^s) = \nabla^T f(\boldsymbol{x}^s)\boldsymbol{d} = (\nabla f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{d}) = |\nabla f(\boldsymbol{x}^s)||\boldsymbol{d}|\cos(\widehat{\nabla f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{d}})$$

матиме найменше значення, рівне $-|\nabla f(\boldsymbol{x}^s)|$, якщо напрямок $\boldsymbol{d}$ збігатиметься з напрямком антиградієнта $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ $((\widehat{\nabla f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{d}}) = \pi)$.

Отже швидкість спадання функції $f(\boldsymbol{x})$ у напрямі антиградієнта $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ є найбільшою.

Якщо за підхожий напрямок $\boldsymbol{d}$ *для мінімізації функції* $f(\boldsymbol{x})$ *використовується антиградієнт (для максимізації — градієнт), то відповідний метод називають градієнтним. Початкову точку* $\boldsymbol{x}^0$ *в градієнтному методі вибирають довільно, а всі інші послідовні наближення до точки мінімуму обчислюються за формулою*

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s - \rho_s \nabla f(\boldsymbol{x}^s),\ s = 1, 2, \ldots \tag{10.3}$$

Такий перехід від точки $\boldsymbol{x}^s$ до точки $\boldsymbol{x}^{s+1}$ зменшує значення функції $f(\boldsymbol{x})$, якщо крок ρ_s досить малий. Розглянемо способи регулювання кроку ρ_s на довільній ітерації градієнтного методу.

Градієнтний метод з подрібненням кроку

Фіксується досить малий крок $\rho_0 > 0$ і, починаючи з точки $\boldsymbol{x}^0$, деяке число раз реалізується процедура (10.3) (див. рис. 10.2). На кожній ітерації обчислюється значення функції $f(\boldsymbol{x}^s)$. Процедуру (10.3) продовжують доти, поки $f(\boldsymbol{x}^s)$ зменшується. При цьому точка $\boldsymbol{x}^s$, як правило, прямує в окіл локального мінімуму,

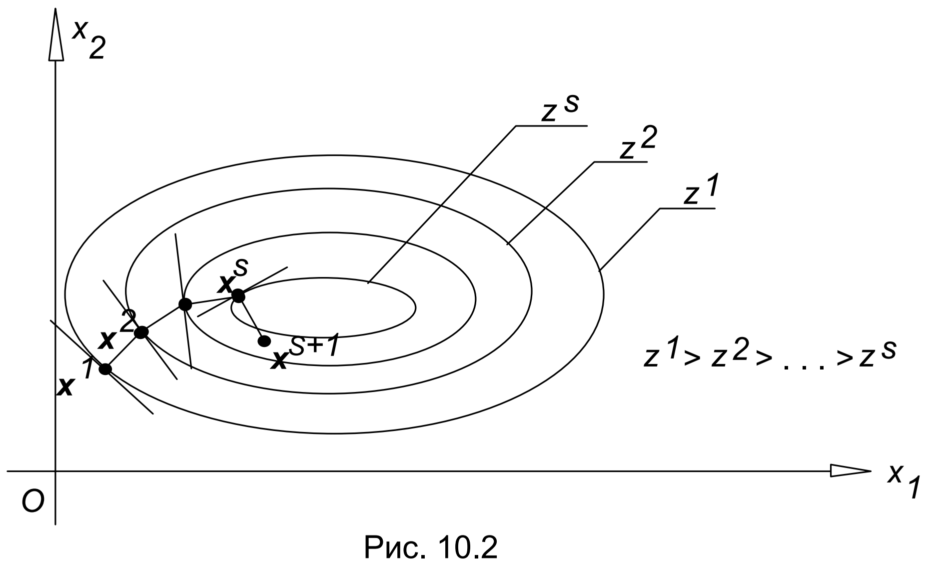


Рис. 10.2

розмір якого одного порядку з ρ_0. Точка $\boldsymbol{x}^s$ досягає цього околу при такому $\bar{s}$, при якому буде

$$f(\boldsymbol{x}^{\bar{s}+1}) \geq f(\boldsymbol{x}^{\bar{s}}).$$

Якщо досягнута точність недостатня, то зменшують крок, тобто вибирають $0 < \rho_1 < \rho_0$, і продовжують ітерації з новим кроком за правилом (10.3) доти, поки точка $\boldsymbol{x}^s$ не попаде в окіл локального мінімуму, розмір якого не більший за задану похибку.

Теорема 10.1 (про збіжність градієнтного методу з подрібненням кроку). *Нехай*:

1) *функція* $f(\boldsymbol{x})$ *опукла і* $f(\boldsymbol{x}) \in C^2$, $\boldsymbol{x} \in E^n$;
2) *множина* $R(\boldsymbol{x}^0)=\{\ \boldsymbol{x} \in E^n\colon\ f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}^0)\}$ *обмежена* ;
3) *на множині* $R(\boldsymbol{x}^0)$ $\forall \eta$, $|\eta| = 1$, *гессіан* $H_f(\boldsymbol{x})$ *задовольняє умову* $(H_f(\boldsymbol{x}))\eta,\ \eta) \le M$ $(M > 0)$.

Тоді:

якщо крок ρ *методу задовольняє умову* $0 < \rho < 2/M$, *то*

$$\lim_{s \to \infty} f(\boldsymbol{x}^s) = \min \mathrm{f}(\boldsymbol{x}).$$

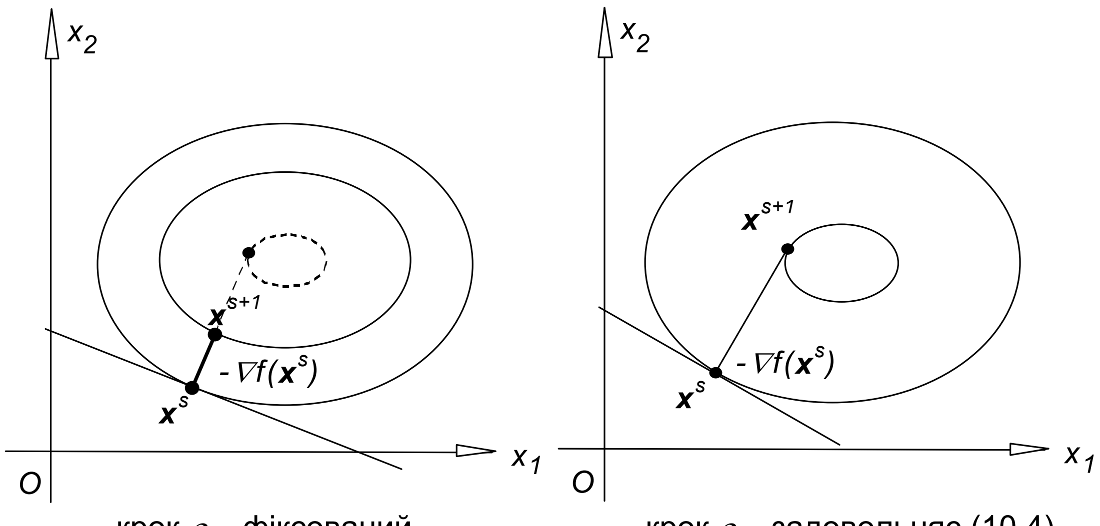
Без доведення (доведення див. [16], стор. 314).

Метод найшвидшого спуску

В цьому градієнтному методі величина кроку ρ_s в процедурі (10.3) вибирається за правилом

$$\rho_s = \arg \min_{\rho > 0} f(\boldsymbol{x}^s - \tilde{n} \nabla f(\boldsymbol{x}^s)). \qquad (10.4)$$

При фіксованому кроці ρ ми повинні зупинятися в точці $\boldsymbol{x}^{s+1}$ на кожній ітерації, незважаючи на те, що напрямок $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ ще веде до зменшення значення цільової функції.



крок ρ_s фіксований — крок ρ_s задовольняє (10.4)

Рис. 10.3

В методі найшвидшого спуску рух після точки $\boldsymbol{x}^{s+1}$ у напрямку антиградієнта $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ уже не приводить до менших значень цільової функції (див. Рис. 10.3). Тому метод найшвидшого спуску відносять до так званих *повнокрокових методів*.

Теорема 10.2 (про збіжність методу найшвидшого спуску).
Нехай:

1) *функція* $f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in E^n)$ *неперервно диференційовна* ($f(\boldsymbol{x}) \in C^1$);
2) *мінімум* $f(\boldsymbol{x})$ *існує* ($\min f(\boldsymbol{x}) > -\infty$);
3) *множина* $R(\boldsymbol{x}^0)=\{ \boldsymbol{x} \in E^n\colon f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}^0)\}$ *обмежена*.

Тоді:

а) *якщо метод найшвидшого спуску закінчується за скінченне число ітерацій N, то* $\| \nabla f(\boldsymbol{x}^N) \| = 0$;
б) *якщо метод не закінчується за скінченне число ітерацій, то послідовність* $\{f(\boldsymbol{x}^s)\}$ *збігається, і для кожної граничної точки* $\boldsymbol{x}'$ *послідовності* $\{\boldsymbol{x}^s\}$ *виконується умова* $\|\nabla f(\boldsymbol{x}')\| = 0$.

Доведення. Можливі дві альтернативи: або метод найшвидшого спуску збігається за скінченне число ітерацій, або не збігається.

Розглянемо першу альтернативу. Нехай процедура (10.3) завершилась за скінченне число ітерацій в точці $\boldsymbol{x}^N$ виконанням умови (10.4). Це означає, що для довільних $\rho > 0$

$$f(\boldsymbol{x}^N - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^N)) \ge f(\boldsymbol{x}^N). \tag{10.5}$$

За теоремою Тейлора для довільного $\rho > 0$ існує $\theta \in (0,1)$ таке, що

$$f(\boldsymbol{x}^N - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^N)) - f(\boldsymbol{x}^N) = -\rho \nabla^T f(\boldsymbol{x}^N - \rho\theta \nabla f(\boldsymbol{x}^N)) \nabla f(\boldsymbol{x}^N).$$

Тоді за умови (10.5) для довільних $\rho > 0$ при $\theta \in (0,1)$ повинно бути

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^N - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^N)) \nabla f(\boldsymbol{x}^N) \le 0. \tag{10.6}$$

Оскільки $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$, то $\nabla f(\boldsymbol{x})$ неперервна функція. Тому $\nabla f(\boldsymbol{x})$ зберігає знак у двох досить близьких точках, тобто при досить малих $\rho > 0$ градієнти

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^N - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^N)) \text{ та } \nabla f(\boldsymbol{x}^N)$$

однакові за знаком.

Отже, при досить малих $\rho > 0$ поряд з (10.6) матиме місце умова

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^N) \nabla f(\boldsymbol{x}^N) \le 0, \tag{10.7}$$

тобто

$$\| \nabla f(\boldsymbol{x}^N) \|^2 \le 0,$$

що може бути лише у випадку

$$\| \nabla f(\boldsymbol{x}^N) \| = 0.$$

Розглянемо тепер іншу альтернативу.

За умови 2) теореми послідовність $\{f(\boldsymbol{x}^s)\}$ обмежена знизу. За побудовою послідовність $\{f(\boldsymbol{x}^s)\}$ спадаюча, оскільки $f(\boldsymbol{x}^{s+1}) < f(\boldsymbol{x}^s)$. Тому вона є збіжною. Нехай

$$\lim_{s \to \infty} f(\boldsymbol{x}^s) = f(\boldsymbol{x}').$$

Розглянемо послідовність $\{\boldsymbol{x}^s\}$. Оскільки $\{f(\boldsymbol{x}^s)\}$ збігається, то з $\{\boldsymbol{x}^s\}$ можна виділити збіжну, наприклад, до точки $\boldsymbol{x}'$, підпослідовність $\{\boldsymbol{x}^{s_k}\}$

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{s_k} = \boldsymbol{x}'.$$

Очевидно, що при цьому буде

$$\lim_{s\to\infty} f(\boldsymbol{x}^s) = \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}^{s_k}) = f(\boldsymbol{x}').$$

Від супротивного припустимо, що $\|\nabla f(\boldsymbol{x}')\| > 0$. Розглянемо тепер підпослідовність $\{\boldsymbol{x}^{s_k+1}\}$. Ця підпослідовність обмежена, оскільки вона за побудовою належить множині $R(\boldsymbol{x}^0)$, яка за умовою 3) теореми обмежена. Тоді, в свою чергу, з $\{\boldsymbol{x}^{s_k+1}\}$ можна вибрати збіжну, скажімо, до $\boldsymbol{x}''$ підпослідовність. Оскільки

$$\boldsymbol{x}^{s_k+1} = \boldsymbol{x}^{s_k} - \rho_{s_k} \nabla f(\boldsymbol{x}^{s_k}),$$

то, спрямувавши $k \to \infty$, отримаємо $\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}' - \rho' \nabla f(\boldsymbol{x}')$, де

$$\rho' = \arg\min_{\rho>0} f(\boldsymbol{x}' - \tilde{n}\nabla f(\boldsymbol{x}')). .$$

Так як за припущенням $\|\nabla f(\boldsymbol{x}')\| > 0$, то $\nabla f(\boldsymbol{x}'') \neq 0$, а, отже, $f(\boldsymbol{x}'') < f(\boldsymbol{x}')$, що суперечить умові про збіжність $\{f(\boldsymbol{x}^s)\}$ до $f(\boldsymbol{x}')$.

Теорема доведена.

Тести на зупинку процедури найшвидшого спуску

Оскільки збіжність методу найшвидшого спуску в загальному випадку не буде скінченною, то необхідно визначити ознаку припинення процесу ітерацій. Наведемо кілька найбільш уживаних критеріїв:

1) $\max_{i=1,\ldots,n} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ задане);

2) $\|\nabla f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ задане);

3) $\left|f(\boldsymbol{x}^{s+1}) - f(\boldsymbol{x}^s)\right| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ задане).

Недоліки градієнтних методів

Мабуть головним недоліком градієнтного методу є те, що він у найкращому випадку забезпечує збіжність послідовності $\{\boldsymbol{x}^s\}$ лише до точки локального мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$.

В загальному випадку послідовність $\{\boldsymbol{x}^s\}$ збігається, як було доведено, до стаціонарної точки $\boldsymbol{x}'$ функції $f(\boldsymbol{x})$, в якій $\nabla f(\boldsymbol{x}') = 0$.

Повну гарантію збіжності $\{\boldsymbol{x}^s\}$ до точки глобального мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$ може дати, наприклад, вимога опуклості функції $f(\boldsymbol{x})$.

Одним із суттєвих недоліків методу найшвидшого спуску є те, що для деяких типів функцій збіжність його може виявитись повільною. Дійсно, якщо число ρ_s мінімізує функцію $g(\rho) = f(\boldsymbol{x}^s) - \rho\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$, то повинно бути

$$\frac{dg(\rho_s)}{d\rho} = (\nabla f(x^{s+1}), \nabla f(x^s)) = 0 ,$$

що означає ортогональність напрямків зміщення на послідовних ітераціях (див. рис. 10.4). Тоді число ітерацій, необхідних для мінімізації погано обумовлених функцій "яристого" типу може бути дуже великим (хоча існують способи покращення збіжності, див., наприклад, [17], стор. 39).

Недоліком градієнтних методів є також те, що неможливе їх безпосереднє застосування до оптимізації недиференційовних функцій або умовної оптимізації диференційовних функцій.

Зауваження. Задача відшукання кроку на кожній ітерації методу найшвидшого спуску є задачею одновимірної оптимізації і може бути розв'язана одним із розглянутих раніше методів одновимірної оптимізації.

Приклад 10.1. *Визначити за допомогою градієнтного методу мінімум функції*

$$f(\boldsymbol{x}) = -4x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2,$$

почавши ітераційний процес з точки $\boldsymbol{x}^0 = (4, 5)$.

Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -4 + 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2 + 2x_2.$$

1-а ітерація. Обчислюємо градієнт функції $f(\boldsymbol{x})$ в початковій точці

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = (4, 8).$$

Він відмінний від нуля, тому будуємо промінь $\boldsymbol{x}^/(\rho)$, що виходить з точки $\boldsymbol{x}^0$ у напрямку антиградієнта

$$\boldsymbol{x}^/(\rho) = \boldsymbol{x}^0 - \rho\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = (4,5) - \rho(4,8) = (4-4\rho, 5-8\rho),\ \rho > 0.$$

Обчислюємо градієнт функції

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^/(\rho)) = (-4 + 2(4-4\rho), -2 + 2(5-8\rho)) = (4-8\rho, 8-16\rho)$$

та розглядаємо функцію $f(\boldsymbol{x})$ в точках променя $\boldsymbol{x}^/(\rho)$ при $\rho > 0$. Функція $f(\boldsymbol{x})$ в цьому випадку буде функцією однієї змінної ρ. Оскільки

$$\frac{df(\boldsymbol{x}^s - \rho\ \nabla f(\boldsymbol{x}^s))}{d\rho} = -(\nabla f(\boldsymbol{x}^s - \rho\ \nabla f(\boldsymbol{x}^s)), \nabla f(\boldsymbol{x}^s)),$$

то в силу необхідних умов екстремуму

$$\frac{df(\boldsymbol{x}^/(\rho))}{d\rho} = -(\nabla f(\boldsymbol{x}^/(\rho)), \nabla f(\boldsymbol{x}^0)) = 0,$$

тобто $-((4-8\rho, 8-16\rho), (4, 8)) = 0$, звідки $160\rho - 80 = 0$ або $\rho_0 = 0.5$. Оскільки

$$\frac{d^2 f(\boldsymbol{x}^/(\rho))}{d\rho^2} = \frac{d}{dx}(160\rho - 80) = 160 > 0 ,$$

то $\rho_0 = 0.5$ є точкою мінімуму $f(\boldsymbol{x}^/(\rho))$. Обчислюємо $\boldsymbol{x}^1$

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 - \rho_0 \nabla f(\boldsymbol{x}^0) = (4,5) - 0.5\,(4,8) = (2,1).$$

2-а ітерація. Обчислюємо градієнт функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^1$.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^1) = (-4+2\times 2, -2+2\times 1) = (0,0).$$

Оскільки він рівний нулю, то точка $\boldsymbol{x}^1$ є стаціонарною точкою функції $f(\boldsymbol{x})$. До того ж $f(\boldsymbol{x})$ опукла вниз, тому $\boldsymbol{x}^1$ буде точкою глобального мінімуму $f(\boldsymbol{x})$.

Приклад 10.2. *Визначити за допомогою градієнтного методу мінімум функції* $f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 3)^2 + 4\,(x_2 - 2)^2$, *почавши ітераційний процес з точки* $\boldsymbol{x}^0 = (0,0)$.

Результати розв'язування задачі методом найшвидшого спуску приведені в таблиці 10.1 та ілюструється рисунком 10.4. Зауважимо, що розрахунки ведуться за формулами

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = (2x_1 - 6, 8x_2 - 16),$$

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s - \rho_s \nabla f(\boldsymbol{x}^s),\ s = 1,2,\ldots,$$

$$\rho_s = \arg\min_{\rho>0} f(\boldsymbol{x}^s - \rho\,\nabla f(\boldsymbol{x}^s)).$$

Таблиця 10.1

s	$\boldsymbol{x}^s$	$f(\boldsymbol{x}^s)$	$\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$	ρ_s	$\lVert\nabla f(\boldsymbol{x}^s)\rVert$
0	(0,0)	25	(–6,–16)	0.138	17.088
1	(0.826,2.204)	4.893	(–4.348, 1.632)	0.365	4.644
2	(2.412,1.609)	0.957	(–1.176,–3.128)	0.138	3.342
3	(2.574,2.041)	0.188	(–0.852, 0.328)		0.913
∞	(3,2)	0	(0,0)		0

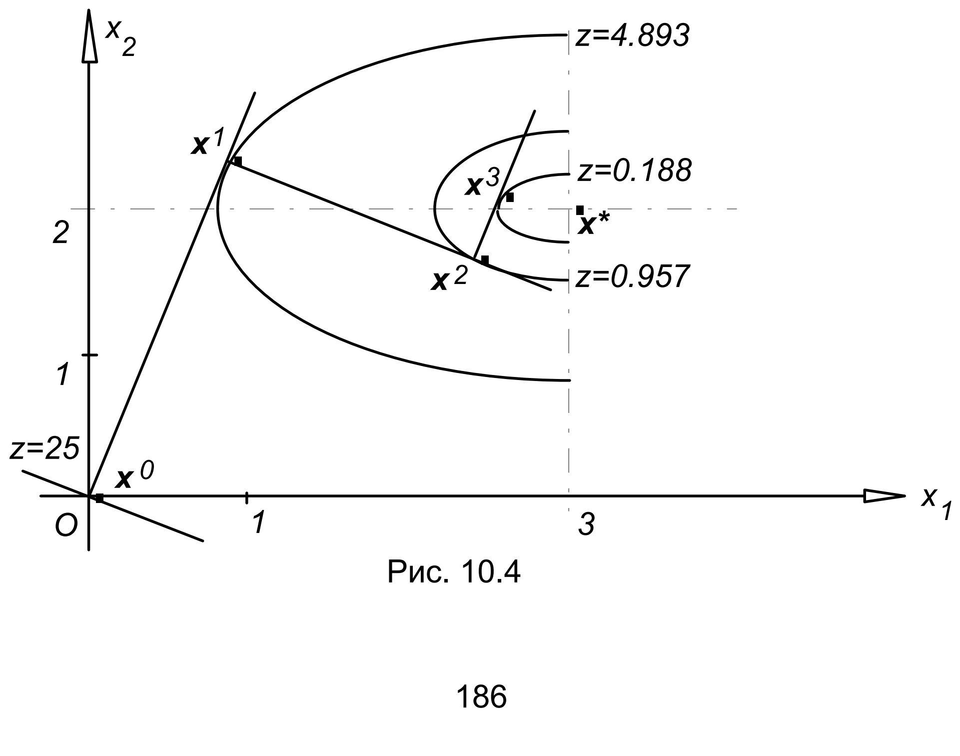


Рис. 10.4

§ 2. Субградієнтний метод

У розглянутому вище градієнтному методі вважалося, що досліджувана на екстремум функція є диференційовною, тобто $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$, $\boldsymbol{x} \in E^n$.

Проте досить часто виникає практична потреба оптимізації негладких функцій, наприклад, функцій такого виду

$$f(\boldsymbol{x}) = \max_i f_i(\boldsymbol{x}),$$

де $f_i(\boldsymbol{x})$ — лінійні функції. Тому розглянемо задачу безумовної мінімізації функції $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in E^n$, за умови, що вона не є диференційовною. При цьому бажано побудувати процедуру, подібну до процедури градієнтного методу

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s - \rho_s \nabla f(\boldsymbol{x}^s),\ s = 1, 2, \ldots$$

Оскільки для функції $f(\boldsymbol{x})$, яка не є диференційовною, градієнт $\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ в точці $\boldsymbol{x}^s$ може не існувати, то природно замінити його більш загальною конструкцією — субградієнтом $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$. Зокрема, це можна завжди зробити, якщо на функцію $f(\boldsymbol{x})$ накласти умову опуклості. Дійсно, якщо $f(\boldsymbol{x})$ — опукла функція, то множина $Z^s = \{\boldsymbol{x} \in E^n : f(\boldsymbol{x}) \le z^s\}$, $z^s = \mathrm{const}$, є опуклою. Тоді в довільній точці $\boldsymbol{x}^s$ гіперповерхні рівня $f(\boldsymbol{x}) = z^s$, яка є границею множини Z^s, існує опорна гіперплощина, а вектор нормалі до неї, що лежить у півпросторі, який не містить множину Z^s, являє собою субградієнт $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$.

Отже розглянемо задачу безумовної мінімізації опуклої функції $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in E^n$. Задамо *субградієнтний метод* (*метод узагальнених градієнтів*) процедурою

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s - \rho_s \gamma_s \hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s),\ s = 1, 2, \ldots, \tag{10.8}$$

де $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$ — субградієнт функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^s$, ρ_s — крок зміщення з точки $\boldsymbol{x}^s$ у напрямку антисубградієнта $-\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$, γ_s — нормуючий множник, $\boldsymbol{x}^0$ — початкове наближення до точки мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$.

Виникають питання вибору кроку ρ_s на кожній ітерації та збіжності процедури (10.8). У порівнянні із звичайним градієнтним методом принципи вибору кроку ρ_s повинні бути суттєво іншими.

Дійсно, у градієнтному методі $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$, тоді $\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ та дотична гіперплощина в точці $\boldsymbol{x}^s$ до гіперповерхні рівня $f(\boldsymbol{x}) = z^s$ існують і єдині, а рух по антиградієнту $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ з точки $\boldsymbol{x}^s$ в точку $\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s - \rho_s \nabla f(\boldsymbol{x}^s)$, $s = 1, 2, \ldots$, приводить при досить малих $\rho_s > 0$ до менших значень цільової функції $f(\boldsymbol{x})$. Зокрема, в методі найшвидшого спуску крок ρ_s вибирають за правилом

$$\rho_s = \operatorname*{argmin}_{\rho > 0} f(\boldsymbol{x}^s - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^s)).$$

Якщо ж $f(\boldsymbol{x}) \notin C^1$, то $\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ може не існувати. В цьому випадку замість дотичної гіперплощини до гіперповерхні рівня $f(\boldsymbol{x}) = z^s$ в точці $\boldsymbol{x}^s$ доцільно розглянути одну із нескінченої сукупності опорних гіперплощин до множини Z^s, що проходять через точку $\boldsymbol{x}^s$, та вектор нормалі до неї, який задає антисубградієнт $-\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$. При цьому, очевидно, може так трапитись, що вектор $-\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$ буде спрямований зовні множини Z^s (див. рис. 10.5). Тому рух у напрямку $-\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$ не приведе до зменшення значень цільової функції $f(\boldsymbol{x})$ навіть при як завгодно малих значеннях кроку ρ_s.

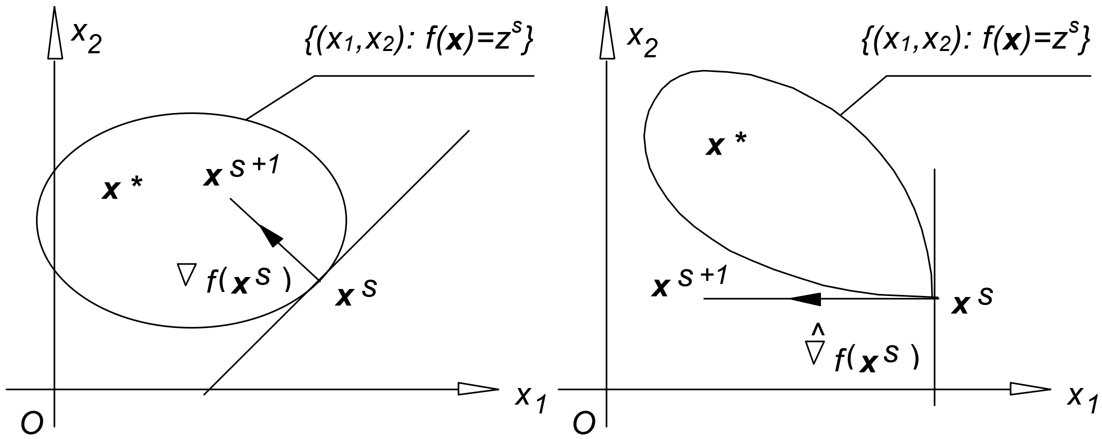


Рис. 10.5

Отже вибір та регулювання кроку ρ_s не можуть бути поставлені в залежність від поведінки функції $f(\boldsymbol{x})$ подібно тому, як це здійснюється в градієнтних методах. Тоді виникає питання, чи доцільно взагалі рухатися в напрямку антисубградієнта $-\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$, якщо при цьому цільова функція не спадає. Виявляється, що на це питання потрібно дати ствердну відповідь і ось чому. Із геометрії розташування точки мінімуму $\boldsymbol{x}^*$, опорної гіперплощини до множини Z^s, яка проходить через точку $\boldsymbol{x}^s$, та вектора $-\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$ (див. рис. 10.5) випливає, що рух у напрямку антисубградієнта $-\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)$ на досить малий крок ρ_s хоча і не зменшує значень функції $f(\boldsymbol{x})$, але все ж наближає $\boldsymbol{x}^{s+1}$ до $\boldsymbol{x}^*$.

Відносно збіжності процедури (10.8) попередньо можна зауважити, що при $\gamma_s = |\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)|^{-1}$ вона дозволяє знаходити мінімум опуклої функції $f(\boldsymbol{x})$, якщо величину кроку ρ_s на s-й ітерації вибирати за виконання умов: $\rho_s > 0$, $\rho_s \to 0$ при $s \to \infty$, $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$. Розбіжність останнього ряду є суттєвою, оскільки у випадку його збіжності завжди можна було б вибрати таке далеке від $\boldsymbol{x}^*$ початкове наближення $\boldsymbol{x}^0$, при якому неможливо було б наблизитись до $\boldsymbol{x}^*$ навіть при як завгодно великих s. Детально збіжність процедури субградієнтного методу розглянута нижче для більш загального випадку у порівнянні з процедурою (10.8).

Введемо операцію $\pi_X(\boldsymbol{z})$ проектування точки $\boldsymbol{z} \in E^n$ на опуклу множину $X \subset E^n$ як таку, що має властивості:

1. $\forall\, \boldsymbol{z} \in E^n \quad \pi_X(\boldsymbol{z}) \in X$;
2. $\forall\, \boldsymbol{x} \in X \quad \|\boldsymbol{x} - \pi_X(\boldsymbol{z})\|^2 \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|^2$.

Очевидно, що

$$\operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x} \in X} \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\|^2$$

задовольняє умови 1 та 2. Тому покладемо

$$\pi_X(\boldsymbol{z}) = \underset{\boldsymbol{x}\in X}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\|^2 \tag{10.9}$$

Наприклад:

a) якщо $X = \left\{x \in E^1 :\ a \le x \le b\right\}$, то

$$\pi_X(z) = \begin{cases} a & \text{при} \quad z < a, \\ z & \text{при} \quad a \le z \le b, \\ b & \text{при} \quad z > a; \end{cases}$$

b) якщо $X = \left\{\boldsymbol{x} \in E^n :\ a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1,\dots,n\right\}$, то

$$(\pi_X(\boldsymbol{z}))_i = \begin{cases} a_i & \text{при} \quad z_i < a_i, \\ z_i & \text{при} \quad a_i \le z_i \le b_i, \\ b_i & \text{при} \quad z_i > a_i, \end{cases}$$

при цьому $\pi_X(\boldsymbol{z}) = ((\pi_X(\boldsymbol{z}))_1, \dots, (\pi_X(\boldsymbol{z}))_n)$.

Розглянемо задачу умовної мінімізації:

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min, \tag{10.10}$$

$$\boldsymbol{x} \in X \subset E^n, \tag{10.11}$$

де $f(\boldsymbol{x})$ — опукла функція, визначена на опуклій множині X.

Для відшукання її розв'язку застосуємо процедуру (10.8), модифікувавши її до потрібного вигляду за допомогою операції проектування (10.9), оскільки вона дозволяє легко враховувати обмеження виду (10.11). Отримаємо

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \pi_X(\boldsymbol{x}^s - \rho_s \gamma_s \hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)),\ s = 1, 2, \dots,\ \forall \boldsymbol{x}^0 \in E^n. \tag{10.12}$$

Питання збіжності процедури (10.12) до розв'язку задачі (10.10), (10.11) розв'язує наступна теорема.

Теорема 10.3 (про збіжність методу проектування субградієнтів).

Нехай множина X^* точок мінімуму опуклої функції $f(\boldsymbol{x})$ на опуклій множині $X \subset E^n$ непорожня

$$X^* = \underset{\boldsymbol{x}\in X}{\operatorname{Argmin}} f(\boldsymbol{x}) \ne \varnothing$$

і існує точка $\boldsymbol{x}^* \in X^*$, для якої $\|\boldsymbol{x}^*\| \le \text{const}$.

Якщо для довільного додатного числа $L < \infty$, існує додатне число $C_L < \infty$ таке, що

$$\|\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x})\| \le C_L \ \textit{при}\ \|\boldsymbol{x}\| \le L, \tag{10.13}$$

а також виконуються умови

$$\gamma_s > 0,\ \gamma_s \|\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)\| \le C_0 = \text{const}, \tag{10.14}$$

$$\rho_s > 0,\ \rho_s \to 0 \ \textit{при}\ s \to 0,\ \ \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \qquad (10.15)$$

то існує підпослідовність $\{f(\boldsymbol{x}^{s_k})\}$ *послідовності* $\{f(\boldsymbol{x}^s)\}$ *така, що*

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}^{s_k}) = f(\boldsymbol{x}^*). \qquad (10.16)$$

<u>Доведення</u>. Розглянемо $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{s+1}\|^2$. Врахувавши властивості операції проектування та умови (10.13), (10.14), отримаємо

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{s+1}\|^2 = \|\boldsymbol{x}^* - \pi_X(\boldsymbol{x}^s - \rho_s\gamma_s \hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s))\|^2 \le \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s + \rho_s\gamma_s \hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)\|^2 =$$

$$= \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s\|^2 + 2\rho_s\gamma_s(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s) + (\rho_s\gamma_s)^2 \|\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s)\|^2 \le$$

$$\le \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s\|^2 + \rho_s\gamma_s[2(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s) + C\rho_s], \qquad (10.17)$$

де $C = C_0 C_L$.

Розглянемо вираз $2(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s) + C\rho_s$. Очевидно, що при кожному $s = 0,1,\ldots$ для довільного додатного числа $\delta > 0$ можливий лише один із випадків:

$$\text{або } 2(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s) + C\rho_s \le -\delta, \qquad (10.18)$$

$$\text{або } 2(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s) + C\rho_s > -\delta. \qquad (10.19)$$

Покажемо, що не існує номера N такого, що при $s \ge N$ виконувалась би нерівність (10.18).

Припустимо від супротивного, що при деякому N нерівність (10.18) має місце для всіх $s \ge N$. Тоді, вибираючи в (10.17) при $s \ge N$ $\gamma > 0$, для якого $\gamma_s \ge \gamma > 0$, отримаємо

$$\left\| \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{s+1} \right\|^2 \le \left\| \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^s \right\|^2 - \delta\gamma\rho_s \le \left\| \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^N \right\|^2 - \delta\gamma \sum_{k=N}^{s} \rho_k. \qquad (10.20)$$

При $s \to \infty$ права частина (10.20), а разом з нею і ліва, внаслідок умови (10.15), необмежено спадає (прямує до $-\infty$), що суперечить невід'ємності виразу $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{s+1}\|^2$. Отже наше припущення невірне і нерівність (10.18) місця не має. Але тоді має місце умова (10.19). Це означає, що існують номери $s = s_k$, $k = 1,2,\ldots$, до того ж як завгодно великі, для яких

$$2(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{s_k}), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{s_k}) + C\rho_{s_k} > -\delta.$$

Оскільки $\rho_s > 0$, $\rho_s \to 0$ при $s \to \infty$, то з останньої нерівності випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існують таке $\delta > 0$ та номер K_ε, що при $k \ge K_\varepsilon$ буде

$$(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{s_k}), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{s_k}) > -\varepsilon.$$

За означенням субградієнта маємо

$$f(\boldsymbol{x}^*) - f(\boldsymbol{x}^{s_k}) \ge (\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{s_k}), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{s_k}).$$

Тому при $k \ge K_\varepsilon$ буде

$$f(\boldsymbol{x}^{s_k}) - f(\boldsymbol{x}^*) < \varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}^{s_k}) = f(\boldsymbol{x}^*).$$

Теорема доведена.

Виникає питання практичного обчислення субградієнтів. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 10.3. *Нехай $f(x)$ — опукла функція скалярного аргументу $x\in E^1$.*

Для цього випадку за аналог субградієнта $\hat{\nabla} f(x)$ функції $f(x)$ в точці x можна взяти опуклу комбінацію правосторонньої та лівосторонньої похідних цієї функції в точці x:

$$\hat{f}_x(x) = \lambda\, f_x^+(x) + (1-\lambda)f_x^-(x),\ \ \lambda\in[0,1]. \qquad (10.21)$$

Тут $\hat{f}_x(x)$ — аналог субградієнта, $f_x^+(x)$ та $f_x^-(x)$ — відповідно правостороння та лівостороння похідні функції $f(x)$ в точці x.

Правомірність подання (10.21) випливає із того факту, що множина субградієнтів опуклої функції $f(x)$ в точці x є опуклою, а $f_x^+(x)$ та $f_x^-(x)$ є елементами цієї множини.

Отже, якщо ми матимемо змогу обчислити в довільній потрібній нам точці правосторонню та лівосторонню похідні функції $f(x)$, то для пошуку мінімуму функції $f(x)$ в області $X\subset E^1$ ми можемо використати процедуру проектування субградієнтів.

Приклад 10.4. *Нехай $f(\boldsymbol{x})$ — сепарабельна функція, тобто*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j),\ \ \boldsymbol{x}\in E^n,$$

де $g_j(x_j)$ — опуклі функції скалярних аргументів.

В цьому випадку за субградієнт $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x})$ функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}$ можна прийняти вектор з координатами

$$\hat{f}_j(\boldsymbol{x}) = \lambda_j\, g_j^+(x_j) + (1-\lambda_j)g_j^-(x_j),\ \ j=1,\dots,n,\ \ \ \lambda_j\in[0,1],$$

де $g_j^+(x_j)$ та $g_j^-(x_j)$ — відповідно правостороння і лівостороння похідні функції $g_j(x_j)$ в точці x_j.

Дійсно, із опуклості функцій $g_j(x_j)$ випливає існування для кожної з них в точці x_j аналога субградієнта

$$\hat{f}_j(x_j) = \lambda_j\, g_j^+(x_j) + (1-\lambda_j)g_j^-(x_j),\ \lambda_j\in[0,1].$$

Це означає, що $\forall\, y_j\in E^1$, $j = 1,\dots,n,$ виконуються нерівності

$$g_j(y_j) - g_j(x_j) \ge (\lambda_j\, g_j^+(x_j) + (1-\lambda_j)g_j^-(x_j))(y_j - x_j),\ \lambda_j\in[0,1].$$

Підсумовуючи їх по $j = 1,\dots,n,$ отримаємо

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \ge (\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),\ \ \forall\, \boldsymbol{y}\in E^n.$$

Тоді за означенням вектор $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x})$ є субградієнтом функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}$.

Приклад 10.5. *Нехай $F(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$, де $g(t)$ — опукла функція скалярного аргументу, правостороння $g^{+}(t)$ та лівостороння $g^{-}(t)$ похідні якої в довільній точці t невід'ємні, а $t = f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in E^n)$ — опукла функція. Тоді субградієнтом функції $F(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}$ є вектор*

$$\hat{\nabla} F(\boldsymbol{x}) = \left[\lambda\ g^{+}(f(\boldsymbol{x})) + (1-\lambda)g^{-}(f(\boldsymbol{x}))\right] \hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}),\ \ \lambda \in [0;1].$$

Дійсно, в точці $\boldsymbol{x}$ $\forall\, \boldsymbol{y} \in E^n$ маємо

$$F(\boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})) \geq [\lambda g^{+}(f(\boldsymbol{x})) + (1-\lambda)g^{-}(f(\boldsymbol{x}))]\,(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})) \geq$$

$$\geq [\lambda g^{+}(f(\boldsymbol{x})) + (1-\lambda)g^{-}(f(\boldsymbol{x}))]\,(\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) =$$

$$= ([\lambda g^{+}(f(\boldsymbol{x})) + (1-\lambda)g^{-}(f(\boldsymbol{x}))]\ \hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = (\hat{\nabla} F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Розв'язування мінімаксних задач

Розглянемо задачу мінімізації опуклої функції

$$F(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{10.22}$$

за умов $\boldsymbol{x} \in X$, де X — опукла множина.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 10.4 (про субградієнт функції $F(\boldsymbol{x}) = \max_{y \in Y} f(\boldsymbol{x}, y)$).

Нехай:

1) $f(\boldsymbol{x}, y)$ — опукла по $\boldsymbol{x}$ $\forall\, y \in Y$;

2) $\exists\, y(\boldsymbol{x})$ таке, що $F(\boldsymbol{x}) = \max_{y \in Y} f(\boldsymbol{x}, y) = f(\boldsymbol{x}, y(\boldsymbol{x}))$;

3) $\forall\, y \in Y$ існує субградієнт $\hat{\nabla}_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, y)$.

Тоді субградієнт $\hat{\nabla} F(\boldsymbol{x})$ функції $F(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x} \in X$ обчислюється за формулою

$$\hat{\nabla} F(\boldsymbol{x}) = \hat{\nabla}_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, y)\Big|_{y = y(\boldsymbol{x})}. \tag{10.23}$$

Доведення. Маємо $\forall\, \boldsymbol{z} \in X$

$$F(\boldsymbol{z}) - F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z}, y(\boldsymbol{z})) - f(\boldsymbol{x}, y(\boldsymbol{x})) \geq f(\boldsymbol{z}, y(\boldsymbol{x})) - f(\boldsymbol{x}, y(\boldsymbol{x})) \geq$$

$$(\hat{\nabla}_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, y(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}) = (\hat{\nabla} F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}).$$

Теорема доведена.

Розглянемо приклади на застосування доведеної теореми.

Нехай $f(\boldsymbol{x}) = \left| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - b \right|$. Подамо $f(\boldsymbol{x})$ у вигляді $\max_{y \in Y} f(\boldsymbol{x}, y)$. Неважко помітити, що

$$f(\boldsymbol{x}) = \max_{-1 \leq y \leq 1} \left[y \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - b \right) \right] = \max_{-1 \leq y \leq 1} f(\boldsymbol{x}, y).$$

Перевіряємо виконання умов теореми. Маємо:

1) функція $f(\boldsymbol{x},y)=y\left(\sum_{j=1}^{n}a_j x_j-b\right)$ як лінійна відносно змінних x_j є опуклою по $\boldsymbol{x}$ для всіх $y\in[-1;1]$;

2) існує $y(\boldsymbol{x})$, на якому досягається $\max\limits_{-1\le y\le 1} f(\boldsymbol{x},\, y)$, оскільки

$$f(\boldsymbol{x}) = \max_{y\in Y} f(\boldsymbol{x},y) = f(\boldsymbol{x},y(\boldsymbol{x})) = y(\boldsymbol{x})\left(\sum_{j=1}^{n}a_j x_j-b\right),$$

$$\text{де } y(\boldsymbol{x})=\begin{cases} 1, \text{ якщо } \sum\limits_{j=1}^{n}a_j x_j-b\ge 0, \\ -1, \text{ якщо } \sum\limits_{j=1}^{n}a_j x_j-b< 0. \end{cases} \tag{10.24}$$

3) для всіх $y\in[-1;1]$ існує субградієнт по $\boldsymbol{x}$ функції $f(\boldsymbol{x},y)$ — вектор $\hat{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\, f(\boldsymbol{x},y)$ з координатами $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x},y)}{\partial x_j}=ya_j$, $j = 1,\ldots,n,$ тобто $\hat{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\, f(\boldsymbol{x},y) = =(ya_1,\ldots,ya_n)$.

Отже умови теореми виконуються. Тоді субградієнт функції $f(\boldsymbol{x})$ має вигляд

$$\hat{\nabla}\, f(\boldsymbol{x}) = \hat{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\, f(\boldsymbol{x},y(\boldsymbol{x})) = (y(\boldsymbol{x})a_1,\ldots,y(\boldsymbol{x})a_n) = y(\boldsymbol{x})(a_1,\ldots,a_n), \tag{10.25}$$

де $y(\boldsymbol{x})$ визначається формулами (10.24).

Розглянемо тепер задачу про розв'язування перевизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,\ldots,m,\ m>n. \tag{10.26}$$

П.Л.Чебишовим запропоновано вважати розв'язком цієї системи вектор $\boldsymbol{x}\in E^n$, який мінімізує максимальну по модулю нев'язку рівнянь системи (10.26). Тоді задача розв'язування системи (10.26) у відповідності з зазначеним полягає у пошуку вектора $\boldsymbol{x}\in E^n$, який мінімізує функцію

$$f(\boldsymbol{x})=\max_{i=1,\ldots,m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right|. \tag{10.27}$$

Для відшукання мінімуму функціїї $f(\boldsymbol{x})$ можна використати процедуру субградієнтного методу (10.8). Перепишемо (10.27) у вигляді

$$f(\boldsymbol{x})=\max_{i=1,\ldots,m} f(\boldsymbol{x},i), \tag{10.28}$$

де $f(\boldsymbol{x},i)=\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right|$ — опуклі функції по $\boldsymbol{x}$ для кожного $i = 1,\ldots,m$.

Позначимо через $i(\boldsymbol{x})$ номер рівняння, для якого досягається максимум у (10.27), при цьому $f(\boldsymbol{x})$ набуде вигляду

$$f(\boldsymbol{x}) = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i(\boldsymbol{x})\,j} x_j - b_{i(\boldsymbol{x})} \right| = f(\boldsymbol{x}, i(\boldsymbol{x})).$$

Тоді, як доведено при розгляді попереднього прикладу, існує субградієнт $\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x})$ функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}$ (формули (10.24), (10.25)), і він рівний

$$\hat{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = y_{i(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x})(a_{i(\boldsymbol{x})1}, \ldots, a_{i(\boldsymbol{x})n}),$$

де $y_{i(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \sum_{j=1}^{n} a_{i(\boldsymbol{x})j} x_j - b_{i(\boldsymbol{x})} \geq 0, \\ -1, \text{ якщо } \sum_{j=1}^{n} a_{i(\boldsymbol{x})j} x_j - b_{i(\boldsymbol{x})} < 0. \end{cases}$

Розділ 11. Методи можливих напрямків

§ 1. Метод Зойтендейка

Розглянемо задачу *НЛП*

$$\min \{ f^0(\boldsymbol{x}) \colon f^i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i = 1,\ldots,m,\ \boldsymbol{x} \in E^n \} \tag{11.1}$$

за умови, що функції $f^i(\boldsymbol{x})$ диференційовні, $f^i(\boldsymbol{x}) \in C^1$, $i = 0,1,\ldots,m$.

Зауважимо, що до вигляду (11.1) легко зводиться і *ЗНЛП* з умовами невід'ємності змінних $x_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$. Для цього достатньо включити в загальну систему обмежень $f^i(\boldsymbol{x}) \leq 0$, $i = 1,\ldots,m$, умови $-x_j \leq 0$, $j = 1,\ldots,n$.

Нехай точка $\boldsymbol{x}^s \in X$, де $X = \{ \boldsymbol{x} \in E^n \colon f^i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i = 1,\ldots,m \}$. Обмеження $f^i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ назвемо *активним* в точці $\boldsymbol{x}^s$, якщо $f^i(\boldsymbol{x}^s) = 0$. Позначимо через $I_s = \{ i : f^i(\boldsymbol{x}^s) = 0 \}$ множину індексів активних обмежень в точці $\boldsymbol{x}^s$. Очевидно, що тільки ці обмеження визначають напрямки просування із допустимої точки $\boldsymbol{x}^s$ в іншу допустиму точку $\boldsymbol{x}^{s+1}$.

Будемо, поки-що, вважати $\boldsymbol{x}^{s+1}$ довільною точкою простору E^n і подамо її у вигляді $\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s + \rho \boldsymbol{r}^s$, де $\boldsymbol{r}^s$ — довільний вектор напрямку зміщення із точки $\boldsymbol{x}^s$, а $\rho > 0$ — крок зміщення. Напрямок $\boldsymbol{r}^s$ назвемо *можливим напрямком*, якщо існує $\rho > 0$ таке, що точка $\boldsymbol{x}^{s+1}$ задовольняє умову:

$$\boldsymbol{x}^{s+1} \in X \text{ або } f^i(\boldsymbol{x}^{s+1}) \leq 0,\ i = 1,\ldots,m. \tag{11.2}$$

Оскільки $\boldsymbol{x}^s$ — допустима точка, тобто $f^i(\boldsymbol{x}^s) \leq 0$, $i = 1,\ldots,m,$ то умови (11.2) еквівалентні умовам

$$f^i(\boldsymbol{x}^{s+1}) \leq f^i(\boldsymbol{x}^s),\ i = 1,\ldots,m. \tag{11.3}$$

Далі, оскільки тільки активні у точці $\boldsymbol{x}^s$ обмеження впливають на вибір можливого напрямку, то в умовах (11.3) слід вважати, що $i\in I_s$.

Будемо вимагати, щоб $\boldsymbol{r}^s$ був напрямком *можливим*, тоді він повинен визначатися умовами

$$f^i(\boldsymbol{x}^{s+1})\le f^i(\boldsymbol{x}^s),\ i\in I_s, \tag{11.4}$$

і *підхожим*, тоді він повинен задовольняти нерівність

$$f^0(\boldsymbol{x}^{s+1})< f^0(\boldsymbol{x}^s) \tag{11.5}$$

при досить малих $\rho>0$.

Як було доведено вище (див. Розділ 10), умова (11.5) буде виконуватись при досить малих $\rho>0$, тобто напрямок $\boldsymbol{r}^s$ буде підхожим, якщо похідна по напрямку $\boldsymbol{r}^s$ від функції $f^0(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^s$ буде від'ємною:

$$D_{r^s}f^0(\boldsymbol{x}^s)= (\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s),\boldsymbol{r}^s)<0\,. \tag{11.6}$$

Аналогічно приходимо до висновку, що умови (11.4) будуть виконуватись при досить малих $\rho>0$ тільки для тих напрямків $\boldsymbol{r}^s$, для яких похідні $D_{r^s}f^i(\boldsymbol{x}^s)$, $i\in I_s$, недодатні:

$$D_{r^s}f^i(\boldsymbol{x}^s)= (\nabla f^i(\boldsymbol{x}^s),\boldsymbol{r}^s)\le 0\,,\ i\in I_s. \tag{11.7}$$

Для обмеження довжин векторів $\boldsymbol{r}^s$ до системи умов (11.6)–(11.7), яка визначає всі можливі і підхожі напрямки, додають, як правило, яку-небудь умову нормування, наприклад, таку:

$$-1 \le \boldsymbol{r}_j^s\le 1\,,\ j=1,...,n. \tag{11.8}$$

Остаточно, для відшукання можливого і підхожого напрямку $\boldsymbol{r}^s$ отримуємо *задачу лінійного програмування*

$$\begin{aligned}
&D_{r^s}f^0(\boldsymbol{x}^s)= (\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s),\boldsymbol{r}^s) \to \min,\\
&D_{r^s}f^i(\boldsymbol{x}^s) = (\nabla f^i(\boldsymbol{x}^s),\boldsymbol{r}^s)\le 0,\ i\in I_s,\\
&-1\le r_j^s\le 1,\ j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{11.9}$$

Якщо оптимальне значення цієї задачі невід'ємне, то $\boldsymbol{x}^s$ – стаціонарна точка функції $f^0(\boldsymbol{x})$ за умов $f^i(\boldsymbol{x})\le 0$, $i=1,\dots,m$, $\boldsymbol{x}\in E^n$; в іншому випадку вектор $\boldsymbol{r}^s$ визначає можливий і підхожий напрямок. Тоді у знайденому напрямку $\boldsymbol{r}^s$ будуємо промінь $\boldsymbol{x}(\rho)=\boldsymbol{x}^s+\rho\boldsymbol{r}^s$ $(\rho>0)$ і, підставляючи $\boldsymbol{x}(\rho)$ у всі неактивні обмеження, знаходимо число ε, яке обмежує крок ρ зверху: $0<\rho\le\varepsilon$. Конкретне значення ρ_s визначаємо як

$$\rho_s = \underset{\rho\in(0,\varepsilon]}{\arg\min} f^0(\boldsymbol{x}^s + \rho\boldsymbol{r}^s)$$

за допомогою якої-небудь процедури одновимірної оптимізації.

Зауважимо, що, як і для градієнтних методів, метод можливих напрямків не гарантує нічого більшого, ніж збіжність $\boldsymbol{x}^s$ до стаціонарної точки функції $f^0(\boldsymbol{x})$.

До вибору початкового наближення $\boldsymbol{x}^0$. За $\boldsymbol{x}^0$ можна взяти довільну допустиму точку $\boldsymbol{x} \in X$. Якщо обмеження задачі (11.1) лінійні, то за $\boldsymbol{x}^0$ можна взяти довільний базисний розв'язок системи обмежень задачі (11.1).

Приклад 11.1. *Розв'язати методом можливих напрямків задачу*

$$f^0(x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 \to \max,$$
$$f^1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2 - 1 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

вибираючи $\boldsymbol{x}^0 = (1/2, 0)$.

Перетворюємо задачу до потрібного вигляду:

$$f^0(x_1,x_2) = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 \to \min,$$
$$f^1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2 - 1 \le 0,$$
$$f^2(x_1,x_2) = -x_1 \le 0,$$
$$f^3(x_1,x_2) = -x_2 \le 0.$$

Обчислюємо градієнти:

$$\nabla f^0(x_1,x_2) = (-2x_1 + 2, -2x_2),$$
$$\nabla f^1(x_1,x_2) = (2x_1, 1),$$
$$\nabla f^2(x_1,x_2) = (-1, 0),$$
$$\nabla f^3(x_1,x_2) = (0, -1).$$

1-а ітерація. Визначаємо активні обмеження в точці $\boldsymbol{x}^0$:

$$f^1(1/2, 0) = -3/4 \ne 0,$$
$$f^2(1/2, 0) = -1/2 \ne 0,$$
$$f^3(1/2, 0) = 0. \quad \text{(Активне обмеження)}$$

Нехай $\boldsymbol{r}^0 = (r_1^0, r_2^0)$ — вектор невідомого можливого і підхожого напрямку. Обчислюємо необхідні значення параметрів

$$\nabla f^0(1/2, 0) = (1, 0),\ \ \nabla f^3(1/2, 0) = (0, -1),$$
$$D_{\boldsymbol{r}^0} f^0(\boldsymbol{x}^0) = (\nabla f^0(1/2, 0), \boldsymbol{r}^0) = ((1, 0), (r_1^0, r_2^0)) = r_1^0,$$
$$D_{\boldsymbol{r}^0} f^3(\boldsymbol{x}^0) = (\nabla f^3(1/2, 0), \boldsymbol{r}^0) = ((0, -1), (r_1^0, r_2^0)) = -r_2^0,$$

та записуємо допоміжну задачу *ЛП* для визначення $\boldsymbol{r}$

$$L = D_{\boldsymbol{r}^0} f^0(\boldsymbol{x}^0) = r_1^0 \to \min,$$
$$D_{\boldsymbol{r}^0} f^3(\boldsymbol{x}^0) = -r_2^0 \le 0, \qquad (11.10)$$
$$-1 \le r_1^0 \le 1,$$
$$-1 \le r_2^0 \le 1.$$

Задача (11.10) легко розв'язується графічно, вона має альтернативний оптимум: $\boldsymbol{r}^* = (-1, r_2^*)$, $0 \le r_2^* \le 1$, $L^* = -1$. Оскільки її оптимальне значення рівне -1, то можливі і підхожі напрямки існують і задаються векторами $\boldsymbol{r}^* = (-1, r_2^*)$, $0 \le r_2^* \le 1$. За $\boldsymbol{r}^0$ приймаємо той з них, який має найбільшу довжину: $\boldsymbol{r}^0 = (-1, 1)$.

Далі, будуємо промінь $\boldsymbol{x}(\rho)$, що виходить із точки $\boldsymbol{x}^0$ в напрямку $\boldsymbol{r}^0$

$$\boldsymbol{x}(\rho) = \boldsymbol{x}^0 + \rho \boldsymbol{r}^0 = (1/2, 0) + \rho(-1, 1) = (1/2 - \rho, \rho),\ \rho > 0.$$

За допомогою неактивних обмежень визначаємо обмеження для ρ зверху.

$$\begin{cases} f^1(1/2 - \rho, \rho) = (1/2 - \rho)^2 + \rho - 1 \le 0, \\ f^2(1/2 - \rho, \rho) = \rho - 1/2 \le 0, \\ \rho > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо: $0 < \rho \le 1/2$. Отже, при $0 < \rho \le 1/2$ точка $\boldsymbol{x}(\rho)$ залишиться в межах допустимої області.

Знаходимо

$$\min_{0<\rho\le 1/2} f^0(\boldsymbol{x}(\rho)) = \min_{0<\rho\le 1/2} f^0(1/2 - \rho, \rho).$$

Маємо

$$\frac{d}{d\rho} f^0(\boldsymbol{x}(\rho)) = \frac{d}{d\rho} f^0(\boldsymbol{x}^0 + \rho \boldsymbol{r}^0) = (\nabla f^0(\boldsymbol{x}^0 + \rho \boldsymbol{r}^0), \boldsymbol{r}^0) =$$

$$= (\nabla f^0(1/2 - \rho, \rho), (-1, 1)) = ((-2(1/2 - \rho) + 2, -2\rho), (-1, 1)) = -4\rho - 1 = 0.$$

Звідси отримуємо: $\rho = -1/4 < 0$. Крім того маємо

$$\frac{d^2}{d\rho^2} f^0(\boldsymbol{x}(\rho)) = -4 < 0.$$

Отже, $\rho = -1/4$ — точка максимуму функції $g(\rho) = f^0(\boldsymbol{x}(\rho)) = f^0(\boldsymbol{x}^0 + \rho \boldsymbol{r}^0)$, яка є опуклою доверху. Тому мінімальне значення $f^0(\boldsymbol{x}^0 + \rho \boldsymbol{r}^0)$ досягається на правому кінці відрізка $(0, 1/2]$, тобто при $\rho_0 = 1/2$.

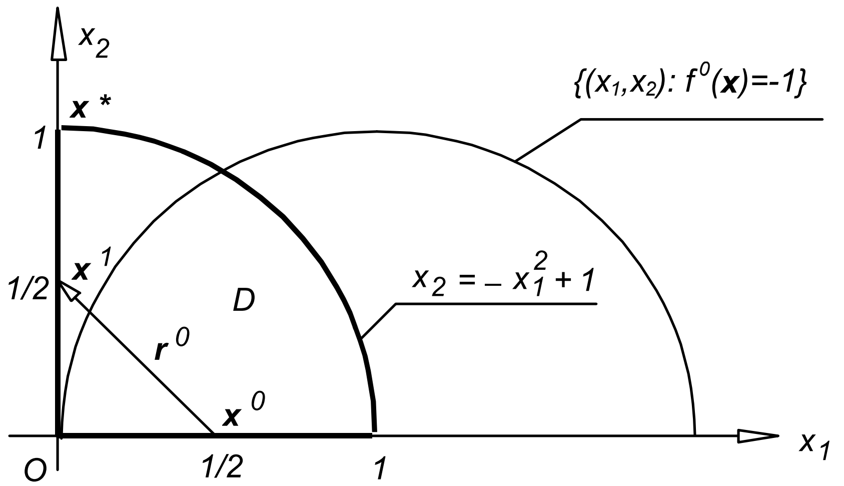


Рис. 11.1

Остаточно отримаємо (див. рис. 11.1)

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 + \rho_0 \boldsymbol{r}^0 = (1/2, 0) + 1/2\ (-1, 1) = (0, 1/2).$$

Переходимо до наступної ітерації.

2-а ітерація. Визначаємо активні обмеження в точці $\boldsymbol{x}^1$:

$f^1(0, 1/2) = -1 \neq 0$,

$f^2(0, 1/2) = 0$, (Активне обмеження)

$f^3(0, 1/2) = -1/2 \neq 0$.

Будуємо допоміжну оптимізаційну задачу для визначення можливого і підхожого напрямку $\boldsymbol{r}^1 = (r_1^1, r_2^1)$:

$$\nabla f^0(0, 1/2) = (2,-1),\ \nabla f^2(0, 1/2) = (-1,0),$$

$$D_{\boldsymbol{r}^1} f^0(\boldsymbol{x}^1) = (\nabla f^0(0, 1/2), \boldsymbol{r}^1) = ((2,-1), (r_1^1, r_2^1)) = 2r_1^1 - r_2^1,$$

$$D_{\boldsymbol{r}^1} f^2(\boldsymbol{x}^1) = (\nabla f^2(0, 1/2), \boldsymbol{r}^1) = ((-1,0), (r_1^1, r_2^1)) = -r_1^1,$$

$$L = D_{\boldsymbol{r}^1} f^0(\boldsymbol{x}^1) = 2r_1^1 - r_2^1 \to \min,$$

$$D_{\boldsymbol{r}^1} f^2(\boldsymbol{x}^1) = -r_1^1 \leq 0,$$

$$-1 \leq r_1^1 \leq 1,$$

$$-1 \leq r_2^1 \leq 1.$$

Задача має єдиний розв'язок: $\boldsymbol{r}^* = (0, 1)$, $L^* = -1$. Її оптимальне значення рівне -1, тому вектор $\boldsymbol{r}^1 = (0, 1)$ є вектором можливого і підхожого напрямку.

Будуємо промінь $\boldsymbol{x}(\rho)$, що виходить із точки $\boldsymbol{x}^1$ в напрямку $\boldsymbol{r}^1$

$$\boldsymbol{x}(\rho) = \boldsymbol{x}^1 + \rho \boldsymbol{r}^1 = (0, 1/2) + \rho(0,1) = (0, \rho + 1/2),\ \rho > 0.$$

Визначаємо інтервал можливих значень для ρ, підставляючи $\boldsymbol{x}(\rho)$ у неактивні обмеження:

$$\begin{cases} f^1(0, \rho + 1/2) = \rho + 1/2 - 1 \leq 0, \\ f^3(0, \rho + 1/2) = -(\rho + 1/2) \leq 0, \\ \rho > 0, \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо: $0 < \rho \leq 1/2$. Отже, при $0 < \rho \leq 1/2$ точка $\boldsymbol{x}(\rho)$ залишиться в межах допустимої області.

Знаходимо

$$\min_{0<\rho\leq 1/2} f^0(\boldsymbol{x}(\rho)) = \min_{0<\rho\leq 1/2} f^0(\rho, \rho + 1/2).$$

Покладемо $g(\rho) = f^0(0, \rho + 1/2) = -1-(\rho + 1/2)^2$ та використаємо необхідні і достатні умови екстремуму для функції $g(\rho)$. Маємо: $g'(\rho) = -2\rho - 1 = 0$, звідки $\rho = -1/2 < 0$. Оскільки $g''(\rho) = -2 < 0$, то $\rho = -1/2$ — точка максимуму функції $g(\rho) = f^0(\boldsymbol{x}(\rho)) = f^0(\boldsymbol{x}^1 + \rho \boldsymbol{r}^1)$, яка є опуклою доверху. Тому мінімальне значення $f^0(\boldsymbol{x}^1 + \rho \boldsymbol{r}^1)$ досягається на правому кінці відрізка $(0, 1/2]$, тобто при $\rho_1 = 1/2$.

Обчислюємо точку $\boldsymbol{x}^2$:

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 + \rho_1 \boldsymbol{r}^1 = (0, 1/2) + 1/2\ (0, 1) = (0, 1).$$

Переходимо до наступної ітерації.

3-а ітерація. Визначаємо активні обмеження в точці $\boldsymbol{x}^2$:

$f^1(0,1) = 0$, (Активне обмеження)

$f^2(0,1) = 0$, (Активне обмеження)

$f^3(0,1) = -1 \neq 0$.

Будуємо допоміжну оптимізаційну задачу для визначення можливого і підхожого напрямку $\boldsymbol{r}^2 = (r_1^2, r_2^2)$:

$$\nabla f^0(0,1) = (2,-2),\ \nabla f^1(0,1) = (0,1),\ \nabla f^2(0,1) = (-1,0),$$

$$D_{\boldsymbol{r}^2} f^0(\boldsymbol{x}^2) = (\nabla f^0(0,1), \boldsymbol{r}^2) = ((2,-2), (r_1^2, r_2^2)) = 2r_1^2 - 2r_2^2,$$

$$D_{\boldsymbol{r}^2} f^1(\boldsymbol{x}^2) = (\nabla f^1(0,1), \boldsymbol{r}^2) = ((0,1), (r_1^2, r_2^2)) = r_2^2,$$

$$D_{\boldsymbol{r}^2} f^2(\boldsymbol{x}^2) = (\nabla f^2(0,1), \boldsymbol{r}^2) = ((-1,0), (r_1^2, r_2)) = -r_1^2,$$

$$L = D_{\boldsymbol{r}^2} f^0(\boldsymbol{x}^2) = 2r_1^2 - 2r_2^2 \to \min,$$

$$D_{\boldsymbol{r}^2} f^1(\boldsymbol{x}^2) = r_2^2 \leq 0,$$

$$D_{\boldsymbol{r}^2} f^2(\boldsymbol{x}^2) = -r_1^2 \leq 0,$$

$$-1 \leq r_1^2 \leq 1,$$

$$-1 \leq r_2^2 \leq 1.$$

Задача має єдиний розв'язок: $\boldsymbol{r}^* = (0,0)$, $L^* = 0$. Оскільки її оптимальне значення рівне 0, то можливих і підхожих напрямків в точці $\boldsymbol{x}^2$ не існує, а, отже, точка $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^* = (0,1)$ і буде оптимальним розв'язком вихідної задачі. Значення $f^0(\boldsymbol{x}^*)$ рівне $f^0(0,1) = -2$..

Зауважимо, що можливий і підхожий напрямок r^s, знайдений методом Зойтендейка, не завжди співпадає з напрямком антиградієнта $-\nabla f^0(x^s)$, коли той є можливим. Це може привести до значного збільшення кількості ітерацій, а, значить, і часу розв'язування задачі. Тому для покращення збіжності методу можливих напрямків можна комбінувати його з методом найшвидшого спуску по антиградієнту тоді, коли той є можливим напрямком. Крім того, у випадку, коли на деякій ітерації при визначенні вектора можливого і підхожого напрямку r^s активними є тільки лінійні обмеження, то *ЗЛП* для визначення r^s будують за іншою, більш ефективною схемою.

§ 2. Метод можливих напрямків для ЗЛНПз лінійними обмеженнями

Розглянемо алгоритм комбінованого методу на прикладі задачі з нелінійною цільовою функцією і лінійними обмеженнями

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1,...,m,$$

$$x_j \geq 0, j = 1,...,n.$$

Нехай $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$. Розглянемо $s+1$-у ітерацію, вважаючи, що

$$\boldsymbol{x}^s \in D = \left\{ \boldsymbol{x} \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\ldots,m,\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n \right\}.$$

1. Обчислюємо градієнт $\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ і перевіряємо умову $\nabla f(\boldsymbol{x}^s) = 0$. Якщо умова виконується, то $\boldsymbol{x}^s$ — стаціонарна точка і кінець обчислень. Якщо умова не виконується, то переходимо до наступного пункту.

2. Підставляємо $\boldsymbol{x}^s$ в усі обмеження задачі і формуємо множини індексів I_s та J_s активних обмежень в точці $\boldsymbol{x}^s$

$$I_s = \left\{ i : i = 1,\ldots,m, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \right\},$$

$$J_s = \{ j : j = 1,\ldots,n,\ x_j^s = 0 \}.$$

Переходимо до наступного пункту.

3. Перевіряємо, чи буде антиградієнт $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ можливим напрямком. Для цього будуємо промінь $\boldsymbol{x}(\rho) = \boldsymbol{x}^s - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^s)$, $\rho > 0$, який виходить із точки $\boldsymbol{x}^s$ в напрямі антиградієнта $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ і підставляємо $\boldsymbol{x}(\rho)$ в активні обмеження. Отримуємо систему лінійних нерівностей відносно ρ. Розв'язуємо її. Якщо $\rho > 0$, то антиградієнт $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ є можливим напрямком, переходимо до наступного пункту. Якщо $\rho \le 0$, то антиградієнт $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ не є можливим напрямком, переходимо до визначення можливих і підхожих напрямків, тобто до пункту 7.

4. Визначаємо множину значень кроку ρ, для яких точка променя $\boldsymbol{x}(\rho)$ залишається допустимою. З цією метою підставляємо $\boldsymbol{x}(\rho) = \boldsymbol{x}^s - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ в усі неактивні обмеження. Отримуємо систему лінійних нерівностей відносно ρ. Вона визначає шуканий інтервал $(0, \varepsilon]$ для кроку ρ. Переходимо до наступного пункту.

5. Знаходимо

$$\rho_s = \arg\min_{\rho \in (0,\varepsilon]} f(\boldsymbol{x}^s - \tilde{n} \nabla f(\boldsymbol{x}^s)).$$

Зауважимо, що процедура відшукання ρ_s є процедурою одновимірної оптимізації. Вона реалізується або за допомогою необхідних і достатніх умов екстремуму функції однієї змінної, або за допомогою чисельних методів типу дихотомії, золотого перерізу, Фібоначчі. Переходимо до наступного пункту.

6. Обчислюємо

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s - \rho_s \nabla f(\boldsymbol{x}^s).$$

Переходимо до пункту 1.

7. Будуємо задачу *ЛП* для відшукання підхожих і можливих напрямків. Нехай $\boldsymbol{r}^s = (r_1^s, \ldots, r_n^s)$ поки-що невідомий вектор можливого напрямку. Будуємо промінь $\boldsymbol{x}'(\rho)$, який виходить із точки $\boldsymbol{x}^s$ в напрямку $\boldsymbol{r}^s$:

$$\boldsymbol{x}'(\rho) = \boldsymbol{x}^s - \rho \boldsymbol{r}^s,\ \rho > 0.$$

Підставляємо $\boldsymbol{x}'(\rho)$ в активні обмеження. Отримуємо систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^s + \rho \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} r_j^s \le b_i, & i \in I_s, \\ x_j^s + \rho\ r_j^s, & j \in J_s. \end{cases}$$

Звідки, враховуючи умови

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^s = b_i\,, & i \in I_s\,, \\ x_j^s = 0, & j \in J_s\,, \end{cases}$$

та $\rho > 0$ маємо

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} r_j^s \le 0, & i \in I_s\,, \\ r_j^s \ge 0, & j \in J_s\,. \end{cases} \qquad (11.11)$$

До останньої системи додаємо умову нормування, яка обмежує довжину вектора $\boldsymbol{r}^s$

$$-1 \le r_j^s \le 1,\ j = 1,\dots,n. \qquad (11.12)$$

Серед всіх можливих напрямків знаходимо напрямок $\boldsymbol{r}^s$, який мінімізує похідну по напрямку $\boldsymbol{r}^s$ від функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^s$. Він є оптимальним розв'язком задачі мінімізації

$$D_{\boldsymbol{r}^s} f(\boldsymbol{x}^s) = (\nabla f(\boldsymbol{x}^s), \boldsymbol{r}^s) \to \min, \qquad (11.13)$$

з обмеженнями (11.11) і (11.12).

Розв'язавши задачу (11.11)–(11.13), перевіряємо умову:

- якщо оптимальне значення функції (11.13) невід'ємне, то кінець обчислень, оскільки підхожих напрямків в точці $\boldsymbol{x}^s$ не існує; $\boldsymbol{x}^s$ — стаціонарна точка функції $f(\boldsymbol{x})$ в області D;
- якщо оптимальне значення функції (11.13) від'ємне, то виконуємо дії пунктів 4, 5, 6, замінивши антиградієнт $-\nabla f(\boldsymbol{x}^s)$ вектором знайденого можливого і підхожого напрямку $\boldsymbol{r}^s$.

Приклад 11.2. *Розв'язати задачу комбінованим методом*

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

вибираючи $\boldsymbol{x}^0 = (2, 4)$.

Розв'язування. Обчислимо градієнт $\nabla f(x_1, x_2)$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 - 12,\ 2x_2 - 8).$$

1-а ітерація.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = (-8, 0) \neq 0.$$

Визначаємо активні обмеження в точці $\boldsymbol{x}^0$:

$2 + 4 = 6 < 8,$

$2 + 3 \times 4 = 14 < 18,$

$2 > 0,$

$4 > 0.$

Активних обмежень немає. Точка $\boldsymbol{x}^0$ є внутрішньою точкою допустимої області задачі, тому напрямок антиградієнта $-\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ є можливим. Будуємо

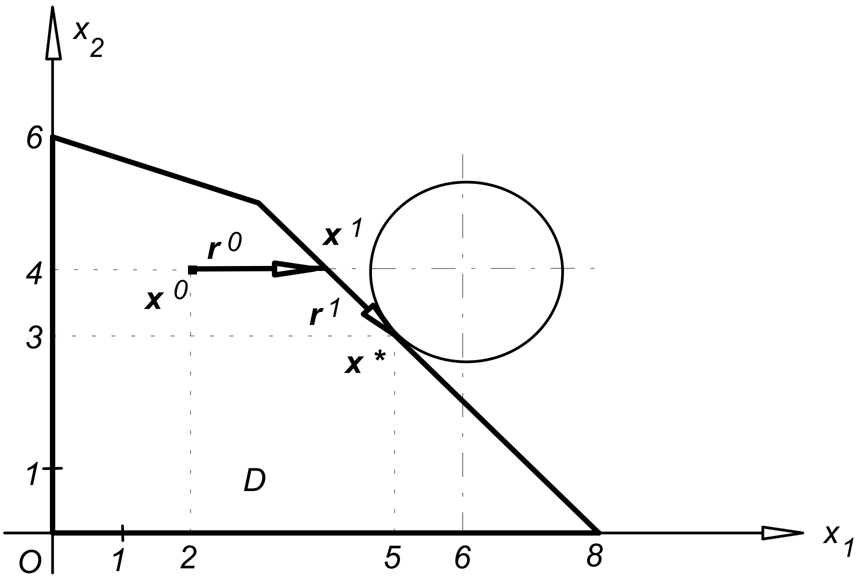


Рис. 11.2

промінь $\boldsymbol{x}(\rho)$, що виходить із точки $\boldsymbol{x}^0$ в напрямі антиградієнта $-\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$:

$$\boldsymbol{x}(\rho) = \boldsymbol{x}^0 - \rho\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = (2, 4) - \rho(-8, 0) = (2+8\rho, 4),\ \rho > 0.$$

Визначаємо інтервал допустимих значень ρ:

$$\begin{cases} 2 + 8\rho + 4 \leq 8, \\ 2 + 8\rho + 12 \leq 18, \\ 2 + 8\rho \geq 0, \\ 4 > 0, \\ \rho > 0. \end{cases}$$

Звідки маємо $\rho \in (0, 1/4]$.

Знаходимо найменше значення функції $g(\rho) = f(\boldsymbol{x}^0 - \rho\nabla f(\boldsymbol{x}^0))$ на відрізку $(0, 1/4]$. Скористаємось необхідними умовами екстремуму функції однієї змінної:

$$\frac{dg(\rho)}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} f(\boldsymbol{x}^0 - \rho\nabla f(\boldsymbol{x}^0)) = (-\nabla f(\boldsymbol{x}^0 - \rho\nabla f(\boldsymbol{x}^0)), \nabla f(\boldsymbol{x}^0)) =$$

$$= -((2(2+8\rho) - 12, 0), (-8, 0)) = 8(16\rho - 8) = 0,$$

звідки маємо $\rho = 1/2$.

Так як $\frac{d^2 g(\rho)}{d\rho^2} = 128 > 0$, то $\rho = 1/2$ є точкою мінімуму функції $g(\rho)$ для всіх ρ. Оскільки ця точка лежить праворуч від допустимого інтервалу, а функція $g(\rho)$ опукла донизу, то мінімальне значення функції $g(\rho)$ досягається на правому кінці допустимого інтервалу для ρ. Отже, $\rho_0 = 1/4$.

Обчислюємо $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 - \rho_0 \nabla f(\boldsymbol{x}^0) = (2, 4) - (1/4)(-8, 0) = (4, 4)$.

<u>2-а ітерація</u>.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^1) = (-4, 0) \neq 0.$$

Визначаємо активні обмеження в точці $\boldsymbol{x}^1$:

$4 + 4 = 8,$ (Активне обмеження)

$4 + 3 \times 4 = 16 < 18,$

$4 > 0,$

$4 > 0.$

Перевіряємо, чи є антиградієнт $-\nabla f(\boldsymbol{x}^1)$ можливим напрямком. Будуємо промінь $\boldsymbol{x}(\rho)$, що виходить з точки $\boldsymbol{x}^1$ в напрямі антиградієнта $-\nabla f(\boldsymbol{x}^1)$:

$$\boldsymbol{x}(\rho) = \boldsymbol{x}^1 - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^1) = (4, 4) - \rho(-4, 0) = (4 + 4\rho, 4), \ \rho > 0.$$

Підставляємо точку $\boldsymbol{x}^1$ в активне обмеження: $4 + 4\rho + 4 \leq 8$, звідки $\rho \leq 0$. Водночас повинно бути $\rho > 0$. Тому $-\nabla f(\boldsymbol{x}^1)$ не є можливим напрямком.

Визначимо можливий напрямок. Нехай $\boldsymbol{r}^1 = (r_1^1, r_2^1)$ — вектор невідомого можливого напрямку. Будуємо промінь $\boldsymbol{x}'(\rho)$, що виходить із точки $\boldsymbol{x}^1$ в напрямі $\boldsymbol{r}^1$:

$$\boldsymbol{x}'(\rho) = \boldsymbol{x}^1 + \rho \boldsymbol{r}^1 = (4, 4) + \rho(r_1^1, r_2^1) = (4 + \rho r_1^1, 4 + \rho r_2^1), \ \rho > 0.$$

Підставляючи точку $\boldsymbol{x}'(\rho)$ в активне обмеження, отримаємо

$$4 + \rho r_1^1 + 4 + \rho r_2^1 \leq 8,$$

або

$$r_1^1 + r_2^1 \leq 0.$$

Додаємо до останньої нерівності умову нормування

$$-1 \leq r_1^1 \leq 1,$$

$$-1 \leq r_2^1 \leq 1.$$

Знаходимо похідну за напрямком $\boldsymbol{r}^1$ від функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}^1$:

$$D_{\boldsymbol{r}^1} f(\boldsymbol{x}^1) = (\nabla f(\boldsymbol{x}^1), \boldsymbol{r}^1) = ((-4, 0), (r_1^1, r_2^1)) = -4 r_1^1.$$

Остаточно отримуємо задачу *ЛП* для визначення підхожого і можливого напрямку

$$-4 r_1^1 \to \min,$$

$$r_1^1 + r_2^1 \leq 0,$$

$$-1 \leq r_1^1 \leq 1,$$

$$-1 \leq r_2^1 \leq 1.$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є вектор $\boldsymbol{r}^1 = (1, -1)$. Відповідні значення r_1^1, r_2^1 дорівнюють $r_1^1 = 1$, $r_2^1 = -1$. Значення похідної за напрямком $\boldsymbol{r}^1$

$$D_{\boldsymbol{r}^1} f(\boldsymbol{x}^1) = -4 r_1^1 = -4 < 0.$$

Отже, напрямок $\boldsymbol{r}^1 = (1,-1)$ є можливим і підхожим. Будуємо промінь $\boldsymbol{x}'(\rho)$, що виходить із точки $\boldsymbol{x}^1$ в напрямку $\boldsymbol{r}^1$:

$$\boldsymbol{x}'(\rho) = \boldsymbol{x}^1 + \rho \boldsymbol{r}^1 = (4, 4) + \rho(1,-1) = (4+\rho, 4-\rho),\ \rho > 0.$$

Підставляючи $\boldsymbol{x}'(\rho)$ у неактивні обмеження, визначаємо допустимий інтервал для ρ:

$$\begin{cases} 4+\rho+3(4-\rho) \le 18, \\ 4+\rho \ge 0, \\ 4-\rho \ge 0, \\ \rho > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо $0 < \rho \le 4$.

Обчислимо найменше значення функції $g(\rho) = f(\boldsymbol{x}^1 + \rho \boldsymbol{r}^1)$ на відрізку $(0, 4]$. Маємо

$$\frac{dg(\rho)}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} f(\boldsymbol{x}^1 + \rho r^1) = (\nabla f(\boldsymbol{x}^1 + \rho \boldsymbol{r}^1), \boldsymbol{r}^1) =$$
$$= ((2(4+\rho)-12, 2(4-\rho)-8), (1,-1)) = 4\rho - 4 = 0,$$

звідки знаходимо $\rho = 1$.

Так як $\dfrac{d^2 g(\rho)}{d\rho^2} = 4 > 0$, то $\rho = 1$ є точкою мінімуму опуклої донизу функції $g(\rho)$. Точка $\rho = 1$ належить допустимому інтервалу для ρ. Тому $\rho_1 = 1$ і

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 + \rho_1 \boldsymbol{r}^1 = (4, 4) + (1,-1) = (5, 3).$$

3-я ітерація. Обчислюємо

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^2) = (-2, -2) \ne 0.$$

Визначаємо активні обмеження в точці $\boldsymbol{x}^2$:

$5 + 3 = 8,$ (Активне обмеження)
$5 + 3 \times 3 = 14 < 18,$
$5 > 0,$
$3 > 0.$

Перевіряємо, чи буде антиградієнт $-\nabla f(\boldsymbol{x}^2)$ можливим напрямком. Будуємо промінь, що виходить з точки $\boldsymbol{x}^2$ в напрямі антиградієнта $-\nabla f(\boldsymbol{x}^2)$:

$$\boldsymbol{x}(\rho) = \boldsymbol{x}^2 - \rho \nabla f(\boldsymbol{x}^2) = (5, 3) - \rho(-2,-2) = (5+2\rho, 3+2\rho),\ \rho > 0.$$

Підставляємо точку $\boldsymbol{x}(\rho)$ в активне обмеження: $5+2\rho+3+2\rho \le 8$, звідки $\rho \le 0$. В той же час $\rho > 0$. Тому $-\nabla f(\boldsymbol{x}^2)$ не є можливим напрямком.

Будуємо допоміжну *ЗЛП* для відшукання можливого напрямку. Нехай $\boldsymbol{r}^2 = (r_1^2, r_2^2)$ — вектор невідомого можливого напрямку, $\boldsymbol{x}'(\rho)$ — промінь у напрямку $\boldsymbol{r}^2$. Маємо

$$\boldsymbol{x}'(\rho) = \boldsymbol{x}^2 + \rho \boldsymbol{r}^2 = (5, 3) + \rho(r_1^2, r_2^2) = (5+\rho r_1^2, 3+\rho r_2^2),\ \rho > 0.$$

Підстановка $\boldsymbol{x}'(\rho)$ в активне обмеження дає нам

$$5+\rho r_1^2 + 3 + \rho r_2^2 \le 8,\ \rho > 0,$$

або з умовами нормування

$r_1^2 + r_2^2 \le 0,$

$-1 \le r_1^2 \le 1,$

$-1 \le r_2^2 \le 1.$

За цих умов ми повинні мінімізувати функцію

$$D_{r^2} f(\boldsymbol{x}^2) = (\nabla f(\boldsymbol{x}^2), \boldsymbol{r}^2) = ((-2,\ -2), (r_1^2, r_2^2)) = -2r_1^2 - 2r_2^2.$$

Оскільки $r_1^2 + r_2^2 \le 0$, то $-2(r_1^2 + r_2^2) \ge 0$, тобто підхожих напрямків не існує. Отже, точка $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^2 = (5, 3)$ є оптимальним розв'язком задачі, $f(\boldsymbol{x}^*) = f(5,3) = 2$.

§ 3. Метод проекції градієнта

Розглянемо задачу пошуку умовного екстремуму, яка полягає в мінімізації цільової функції $z = f^0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in E^n$, $f(\boldsymbol{x}) \in C^1$, за умови, що $\boldsymbol{x} \in D$, де D — опукла множина, зокрема,

$D = \{\boldsymbol{x} \in E^n$: $f^i(\boldsymbol{x}) \le 0$, $f^i(\boldsymbol{x})$ — *опуклі функції*, $i = 1,\dots,m$, $\boldsymbol{x} \ge 0\}$.

Як вже зазначалось, в градієнтних методах у разі виходу точки $\boldsymbol{x}^s$ на границю допустимої множини напрямок антиградієнта перестає бути, взагалі кажучи, можливим. У цьому випадку замість процедури

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s - \rho_s \nabla f^0(\boldsymbol{x}^s),\ s = 1, 2, \dots, \tag{11.14}$$

повинна бути розглянута інша процедура, яка дозволяє перейти від допустимої точки $\boldsymbol{x}^s$ до іншої допустимої точки $\boldsymbol{x}^{s+1}$ таким чином, щоб значення цільової функції $f^0(\boldsymbol{x})$ зменшилось. Іншими словами, у співвідношенні (11.14) необхідно замість неможливого напрямку $-\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s)$ розглянути деякий можливий напрямок $\boldsymbol{r}^s$. Для знаходження цього напрямку розглянемо точку $\boldsymbol{x}^s - \rho \nabla f^0(\boldsymbol{x}^s)$ $(\rho > 0)$ та спроектуємо її на область D. Одержимо точку $\boldsymbol{y}^s = \pi_D(\boldsymbol{x}^s - \rho \nabla f^0(\boldsymbol{x}^s))$, де π_D — оператор проектування на область D. Оскільки множина D — опукла, то відрізок $[\boldsymbol{x}^s, \boldsymbol{y}^s] \in D$, а, отже, напрямок $\boldsymbol{r}^s = \boldsymbol{y}^s - \boldsymbol{x}^s$ — можливий (див. рис. 11.3).

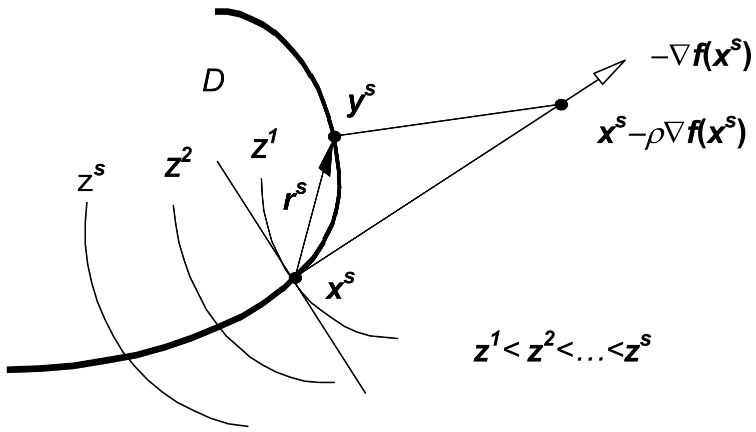


Рис. 11.3

Тепер замість процедури (11.14) в методі проекції градієнта розглянемо процедуру

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \boldsymbol{x}^s - \rho_s \boldsymbol{r}^s,\ s = 1, 2, \dots, \tag{11.15}$$

де $\rho_s > 0$ обирається так, щоб $f^0(\boldsymbol{x}^{s+1}) < f^0(\boldsymbol{x}^s)$ та $\boldsymbol{x}^{s+1} \in D$.

У випадку довільної опуклої області D задача пошуку проекції $\boldsymbol{y}^s$ надто складна. З аналітичної точки зору, як вже відзначалось (див. Розділ 6, §4), вона полягає у знаходженні точки $\boldsymbol{y}^s \in D$, найближчої до даної точки $\boldsymbol{x}^s - \rho\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s) \notin D$:

$$\boldsymbol{y}^s = \arg\min_{\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{D}} \left\| (\boldsymbol{x}^s - \tilde{n}\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s)) - \boldsymbol{y} \right\|^2. \qquad (11.16)$$

У задачі (11.16) цільова функція — квадратична та опукла донизу. Отже, якщо допустима множина D задається лінійними обмеженнями, то ця задача є задачею опуклого квадратичного програмування, яка може бути розв'язана квадратичним симплекс-методом.

Приклад 11.3. *Розв'язати методом проекції градієнта задачу*

$$z = f^0(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_2 \to \min,$$
$$0 \le x_1 \le 2,$$
$$0 \le x_2 \le 1.$$

Проведемо одну ітерацію методу, вибираючи $\boldsymbol{x}^s = (1, 1)$ (див. рис. 11.4).

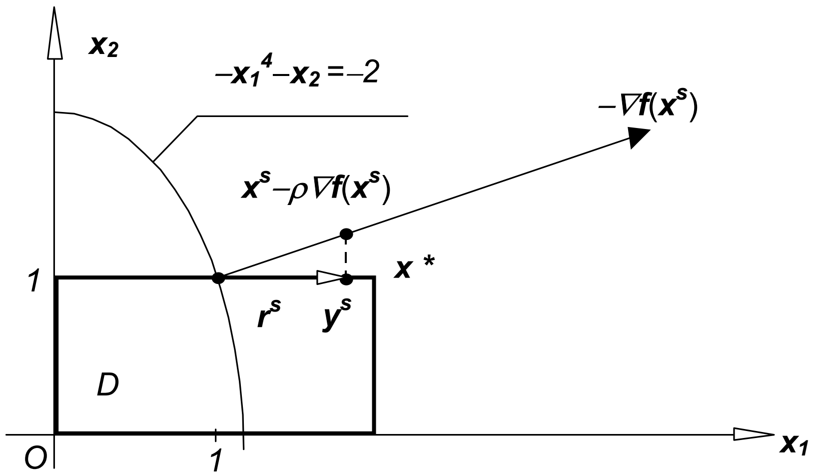


Рис. 11.4

Маємо

$$f^0(\boldsymbol{x}^s) = 2,\ \nabla f^0(x_1, x_2) = (-4x_1^3, -1),\ \ \nabla f^0(\boldsymbol{x}^s) = (-4, -1),$$

$$\boldsymbol{x}^s - \rho\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s) = (1 + 4\rho, 1 + \rho).$$

Ясно, що $\boldsymbol{x}^s - \rho\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s) \notin D$ при будь-якому $\rho > 0$, і тому напрямок $-\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s)$ — неможливий. Для знаходження проекції $\boldsymbol{y}^s$ точки $\boldsymbol{x}^s - \rho\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s)$ на множину D необхідно розв'язати таку задачу опуклого квадратичного програмування:

$$(1 + 4\rho - y_1)^2 + (1 + \rho - y_2)^2 \to \min,$$
$$0 \le y_1 \le 2,$$
$$0 \le y_2 \le 1.$$

Розв'язком вказаної задачі є вектор

$$\boldsymbol{y}^s = \begin{cases} (1 + 4\rho,\ 1), & 0 < \rho \le 1/4, \\ (2,\ 1), & \rho > 1/4, \end{cases}$$

звідки маємо

$$\boldsymbol{r}^s = \boldsymbol{y}^s - \boldsymbol{x}^s = \begin{cases} (4\rho\ ,\ 0), & 0 < \rho \le 1/4, \\ (1,\ 0), & \rho > 1/4. \end{cases}$$

Зрозуміло, що обидва варіанти останнього співвідношення задають один і той же напрямок. За цей напрямок можна обрати вектор $\boldsymbol{r}^s = (1, 0)$. Після обчислення величини можливого, а потім і оптимального, кроку у заданому напрямку ($\rho_{s+1} = 1$) отримуємо: $\boldsymbol{x}^{s+1} = (2, 1)$ і при цьому $f^0(\boldsymbol{x}^{s+1}) = -9$. Можна впевнитись, що знайдений розв'язок — оптимальний. Отже, остаточно маємо: $\boldsymbol{x}^* = (2, 1)$, $f^0(\boldsymbol{x}^*) = -9$.

Зауважимо, що у випадку, коли $f^0(\boldsymbol{x}) \notin C^1$, але $f^0(\boldsymbol{x})$ — опукла функція, заміна градієнта $\nabla f^0(\boldsymbol{x}^s)$ на субградієнт $\hat{\nabla} f^0(\boldsymbol{x}^s)$ у процедурах, що описані вище, дає *метод проекції субградієнта*. Цікаво, що при цьому вихідна задача є задачею опуклого програмування, і тому її розв'язок забезпечує глобальний мінімум цільової функції.

Розділ 12. Методи штрафних та бар'єрних функцій

Ідея методів штрафних та бар'єрних функцій полягає в зведенні *ЗНЛП* з обмеженнями до спеціальної задачі безумовної оптимізації. При цьому обмеження вихідної задачі включаються в цільову функцію цієї допоміжної оптимізаційної задачі. Зауважимо, що ця ідея вже використовувалась при розв'язуванні класичної задачі пошуку умовного екстремуму методом Лагранжа, а також в задачі опуклого програмування (теорема Куна-Таккера).

Нехай маємо задачу

$$\min \{ f^0(\boldsymbol{x}) :\ f^i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i = 1,\dots,m,\ \boldsymbol{x} \in E^n \}. \tag{12.1}$$

Введемо до розгляду функцію

$$P(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} \in D = \{ \boldsymbol{x} \in E^n : f^i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i = 1,\dots,m \}, \\ \infty, & \boldsymbol{x} \notin D. \end{cases} \tag{12.2}$$

Замінимо задачу умовної оптимізації (12.1) задачею безумовної оптимізації

$$\min \{ F(\boldsymbol{x}) :\ F(\boldsymbol{x}) = f^0(\boldsymbol{x}) + P(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in E^n \}. \tag{12.3}$$

Функцію $P(\boldsymbol{x})$ називають *штрафною*, оскільки вона викликає нескінченний штраф за вихід з області D.

Очевидно, що оптимальні розв'язки задач (12.1) і (12.3) однакові.

Геометрична інтерпретація викладеного для функції однієї змінної приведена нижче (див. рис. 12.1).

Очевидно також і те, що для так введеної функції штрафу $P(\boldsymbol{x})$ (див. співвідношення (12.2)) задача (12.3) розв'язуванню не піддається. Тому в дійсності замість вказаної $P(\boldsymbol{x})$ розглядається послідовність штрафних функцій, які апроксимують $P(\boldsymbol{x})$ і мають хороші аналітичні властивості.

Означення 12.1. *Функція $P(f^1(\boldsymbol{x}),\dots,f^m(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{r})$, де $\boldsymbol{r} = (r_1,\dots,r_m)$ — деякий вектор керуючих параметрів, а $f^i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\dots,m$, — функції обмежень задачі (12.1), називається штрафною, якщо*

$$\lim_{r_i \to \infty\ (i=1,\dots,m)} P(y_1,\dots,y_m,\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & y_i \le 0,\ i=1,\dots,m, \\ \infty, & \text{в іншому випадку}. \end{cases}$$

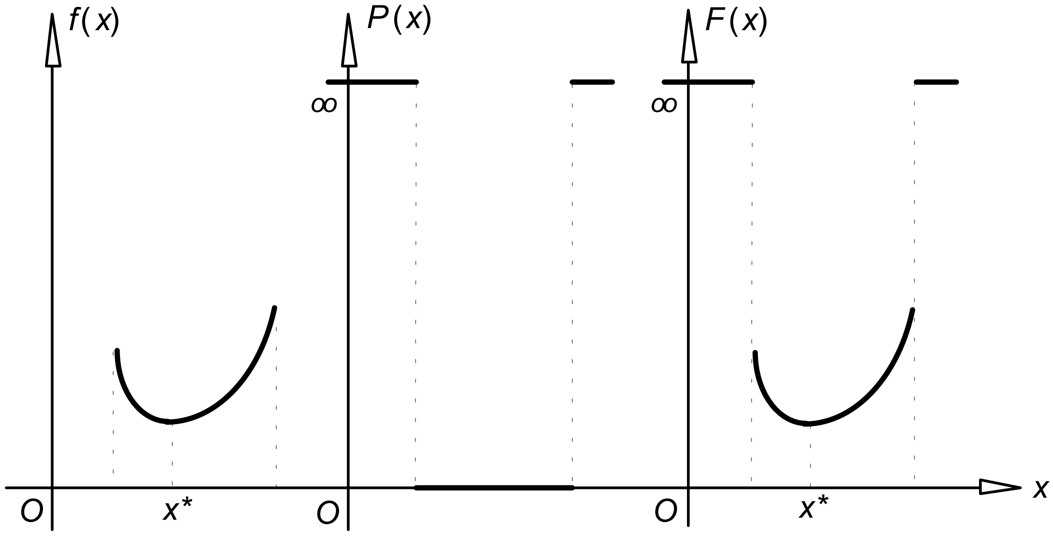


Рис. 12.1

Замість задачі (12.3) введемо до розгляду послідовність задач безумовної оптимізації

$$\min\{F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = f^0(\boldsymbol{x}) + P(f^1(\boldsymbol{x}),\dots,f^m(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{r})\}. \qquad (12.4)$$

Метод штрафних функцій полягає в переході від задачі (12.1) до послідовності задач безумовної оптимізації (12.4) з наступним їх розв'язуванням яким-небудь методом безумовної оптимізації.

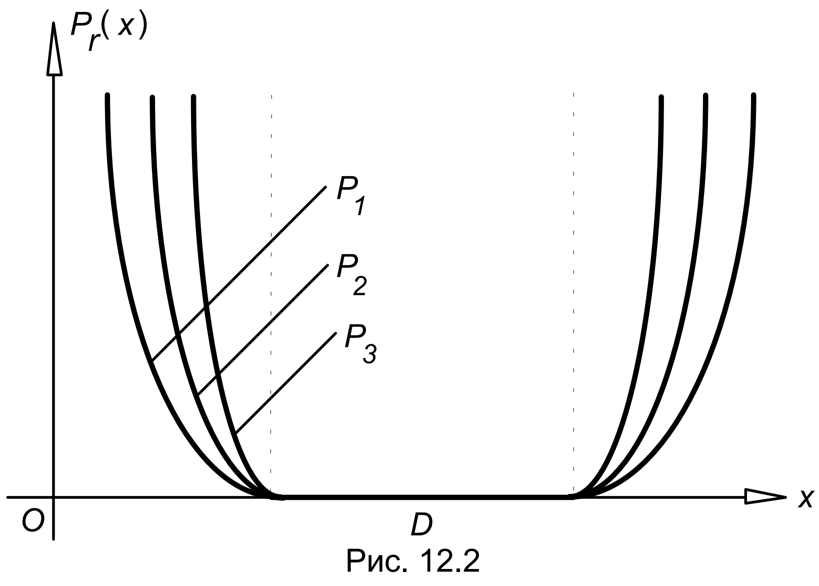


Рис. 12.2

При вдалому виборі штрафних функцій $P(f^1(\boldsymbol{x}),\dots,f^m(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{r})$ можна очікувати, що послідовність розв'язків задач (12.4) буде збігатися до розв'язку задачі (12.1).

Вкажемо на відмінність *методу бар'єрних функцій* від методу штрафних функцій. В методі штрафних функцій апроксимація функції $P(\boldsymbol{x})$ здійснюється зовні області D (див. рис. 12.2), а в методі бар'єрних функцій функції $B(f^1(\boldsymbol{x}),...,f^m(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{r})$ наближають $P(\boldsymbol{x})$ зсередини області D (див. рис. 12.3).

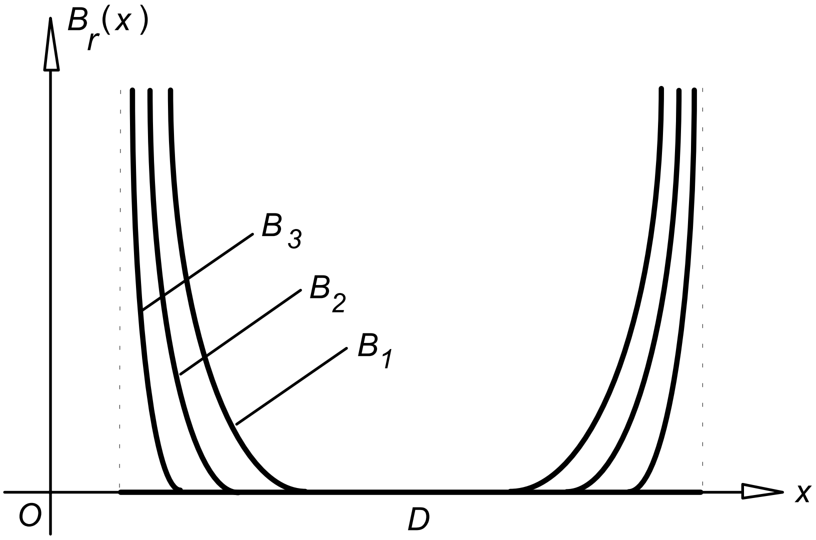


Рис. 12.3

Найчастіше за штрафну вибирають функцію такого вигляду

$$P(f^1(\boldsymbol{x}),...,f^m(\boldsymbol{x}),r) = \frac{1}{r}P(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m} P_i(f^i(\boldsymbol{x})), \quad (12.5)$$

де r — керуючий параметр, а функції $P_i(y)$ визначені, неперервні і невід'ємні для довільного y, причому: $P_i(y)=0$ при $y \le 0$ і $P_i(y) \to \infty$ монотонно при $y \to \infty$.

Прикладами функцій $P_i(f^i(\boldsymbol{x}))$ можуть бути такі функції:

$$P_i^1(f^i(\boldsymbol{x})) = \max\{0, f^i(\boldsymbol{x})\}, \quad (12.6)$$

$$P_i^2(f^i(\boldsymbol{x})) = [\max\{0, f^i(\boldsymbol{x})\}]^2. \quad (12.7)$$

Зауважимо, що функція (12.6) в загальному випадку недиференційовна, навіть, якщо $f^i(\boldsymbol{x}) \in C^1$, в той час як функція (12.7) — диференційовна, якщо диференційовна $f^i(\boldsymbol{x})$.

Якщо ж обмеження задачі (12.1) мають вигляд рівнянь $f^i(\boldsymbol{x})=0$, $i=1,\dots,m,$ то функції $P_i(y)$ у (12.5) повинні задовольняти такі умови: $P_i(y)=0$ при $y=0$ і $P_i(y) \to \infty$ монотонно при $|y| \to \infty$. Для цього випадку функції $P_i(f^i(\boldsymbol{x}))$ найдоцільніше вибирати у вигляді

$$P_i(f^i(\boldsymbol{x})) = [f^i(\boldsymbol{x})]^2.$$

Теорема 12.1 (про збіжність методу штрафних функцій). *Нехай* $\boldsymbol{x}^*$ *є розв'язком задачі* (12.1)

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x} \in D} f^0(\boldsymbol{x}), \quad (12.8)$$

а $\boldsymbol{x}^*(r)$ $\forall r>0$ *є розв'язком задачі* (12.4)

$$\boldsymbol{x}^*(r) = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in E^n} F(\boldsymbol{x}, r). \qquad (12.9)$$

Якщо штрафна функція визначається рівністю (12.5), *функції* $f^i(\boldsymbol{x})$, *i=1,…,m, неперервні і існує замкнена множина* $Y \subset E^n$ *така, що* $\boldsymbol{x}^*(r) \in Y$ $\forall r > 0$, *то*

$$\lim_{r\to 0} F(\boldsymbol{x}^*(r), r) = f^0(\boldsymbol{x}^*). \qquad (12.10)$$

Доведення. Доведемо, що одночасно мають місце дві нерівності

$$\lim_{r\to 0} F(\boldsymbol{x}^*(r), r) \le f^0(\boldsymbol{x}^*). \qquad (12.11)$$

$$\lim_{r\to 0} F(\boldsymbol{x}^*(r), r) \ge f^0(\boldsymbol{x}^*). \qquad (12.12)$$

Це і буде означати, що виконується рівність (12.10).

Доведемо нерівність (12.11). Маємо $\forall r_2 > 0$ в силу (12.9)

$$F(\boldsymbol{x}^*(r_1), r_1) = \min_{\boldsymbol{x}\in E^n} F(\boldsymbol{x}, r_1) \le F(\boldsymbol{x}^*(r_2), r_1). \qquad (12.13)$$

Нехай $r_1 \ge r_2 > 0$. Оскільки за означенням (12.5) $P(\boldsymbol{x}) \ge 0$, то

$$(1/r_1)\, P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) \le (1/r_2)\, P(\boldsymbol{x}^*(r_2)).$$

Тоді

$$F(\boldsymbol{x}^*(r_1), r_1) \le F(\boldsymbol{x}^*(r_2), r_1) = f^0(\boldsymbol{x}^*(r_2)) + (1/r_1)\, P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) \le$$
$$\le f^0(\boldsymbol{x}^*(r_2)) + (1/r_2)\, P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) = F(\boldsymbol{x}^*(r_2), r_2).$$

Отже при $r_1 \ge r_2 > 0$

$$F(\boldsymbol{x}^*(r_1), r_1) \le F(\boldsymbol{x}^*(r_2), r_2), \qquad (12.14)$$

тобто при спаданні r функція $F(\boldsymbol{x}^*(r), r)$ не спадає.

За означенням (12.5) $P(\boldsymbol{x}) = 0$ при $\boldsymbol{x} \in D$. Тому $P(\boldsymbol{x}^*) = 0$, оскільки $\boldsymbol{x}^* \in D$, і

$$F(\boldsymbol{x}^*(r), r) = \min_{\boldsymbol{x}\in E^n} F(\boldsymbol{x}, r) \le F(\boldsymbol{x}^*, r) = f^0(\boldsymbol{x}^*) + (1/r)P(\boldsymbol{x}^*) = f^0(\boldsymbol{x}^*). \qquad (12.13)$$

Отже, $\forall r > 0$

$$F(\boldsymbol{x}^*(r), r) \le f^0(\boldsymbol{x}^*). \qquad (12.15)$$

Тоді існує границя

$$\lim_{r\to 0} F(\boldsymbol{x}^*(r), r) = F^* \qquad (12.16)$$

і виконується нерівність

$$F^* = \lim_{r\to 0} F(\boldsymbol{x}^*(r), r) \le f^0(\boldsymbol{x}^*). \qquad (12.17)$$

Доведемо тепер нерівність (12.12). Маємо $\forall r_1 > 0$

$$F(\boldsymbol{x}^*(r_2), r_2) = \min_{\boldsymbol{x}\in E^n} F(\boldsymbol{x}, r_2) \le F(\boldsymbol{x}^*(r_1), r_2). \qquad (12.18)$$

Розпишемо (12.13) і (12.18). Маємо $\forall r_1 > 0$ та $\forall r_2 > 0$

$$f^0(\boldsymbol{x}^*(r_1)) + (1/r_1)\,P(\boldsymbol{x}^*(r_1)) \le f^0(\boldsymbol{x}^*(r_2)) + (1/r_1)\,P(\boldsymbol{x}^*(r_2)), \qquad (12.19)$$

$$f^0(\boldsymbol{x}^*(r_2)) + (1/r_2)\,P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) \le f^0(\boldsymbol{x}^*(r_1)) + (1/r_1)\,P(\boldsymbol{x}^*(r_1)). \qquad (12.20)$$

Додамо нерівності (12.19), (12.20). Отримаємо

$$(1/r_2)(P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) - P(\boldsymbol{x}^*(r_1))) \le (1/r_1)(P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) - P(\boldsymbol{x}^*(r_1))) \qquad (12.21)$$

або

$$(1/r_1 - 1/r_2)(P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) - P(\boldsymbol{x}^*(r_1))) \ge 0. \qquad (12.22)$$

Нехай $r_1 \ge r_2 > 0$. Тоді $1/r_1 \le 1/r_2$ або $(1/r_1 - 1/r_2) \le 0$ і, як наслідок, із нерівності (12.22) отримаємо

$$(P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) - P(\boldsymbol{x}^*(r_1))) \le 0. \qquad (12.23)$$

Із нерівності (12.19) маємо

$$f^0(\boldsymbol{x}^*(r_1)) - f^0(\boldsymbol{x}^*(r_2)) \le (1/r_1)\,(P(\boldsymbol{x}^*(r_2)) - P(\boldsymbol{x}^*(r_1)))$$

або, враховуючи (12.23) та умову $r_1 > 0$,

$$f^0(\boldsymbol{x}^*(r_1)) - f^0(\boldsymbol{x}^*(r_2)) \le 0.$$

Отже, при $r_1 \ge r_2 > 0$

$$f^0(\boldsymbol{x}^*(r_1)) \le f^0(\boldsymbol{x}^*(r_2)), \qquad (12.24)$$

тобто функція $f^0(\boldsymbol{x}^*(r))$ не спадає при спаданні r.

Далі, за означенням (12.5) $P(\boldsymbol{x}) \ge 0$, тому $\forall r > 0$

$$f^0(\boldsymbol{x}^*(r)) \le f^0(\boldsymbol{x}^*(r)) + (1/r)\,P(\boldsymbol{x}^*(r)) = F(\boldsymbol{x}^*(r), r). \qquad (12.25)$$

В свою чергу функція $F(\boldsymbol{x}^*(r), r)$ (згідно співвідношень (12.14), (12.16)) також не спадає при $r \to 0$ і має границю, рівну F^*. Тому $\forall r > 0$

$$f^0(\boldsymbol{x}^*(r)) \le F^*,$$

тобто $f^0(\boldsymbol{x}^*(r))$ обмежена зверху. Оскільки при $r \to 0$ послідовність $f^0(\boldsymbol{x}^*(r))$ неспадна, то вона має границю при $r \to 0$, причому

$$\lim_{r\to 0} f^0(\boldsymbol{x}^*(r)) \le F^* = \lim_{r\to 0} F(\boldsymbol{x}^*(r), r). \qquad (12.26)$$

Покажемо, що

$$\lim_{r\to 0} f^0(\boldsymbol{x}^*(r)) = f^0(\boldsymbol{x}^*).$$

Від супротивного припустимо, що існують $\delta > 0$ та послідовність $r_k \to 0$ при $k \to \infty$ такі, що $\forall k$ виконується

$$|f^0(\boldsymbol{x}^*(r_k)) - f^0(\boldsymbol{x}^*)| > \delta. \qquad (12.27)$$

За умовами теореми $\forall r > 0 \quad \boldsymbol{x}^*(r) \in Y$, де Y — замкнена множина. Тоді із послідовності $\boldsymbol{x}^*(r_k)$ завжди можна вибрати збіжну підпослідовність. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^*(r_k) = \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Оскільки

$$(F(\boldsymbol{x}^*(r_k), r_k) = f^0(\boldsymbol{x}^*(r_k)) + (1/r_k)\, P(\boldsymbol{x}^*(r_k)),$$

то

$$P(\boldsymbol{x}^*(r_k)) = r_k\, (F(\boldsymbol{x}^*(r_k), r_k) - f^0(\boldsymbol{x}^*(r_k))).$$

Функція $P(\boldsymbol{x})$ неперервна, тому, переходячи до границі при $k\to\infty$, отримаємо

$$\lim_{k\to\infty} P(\boldsymbol{x}^*(r_k)) = 0 = P(\boldsymbol{x}).$$

Оскільки $P(\boldsymbol{x})=0\ \forall \boldsymbol{x}\in D$, то

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in D. \tag{12.28}$$

Ми довели (див. нерівність (12.17)), що

$$\lim_{r\to 0} F(\boldsymbol{x}^*(r), r) \le f^0(\boldsymbol{x}^*).$$

Також було доведено (див. нерівність (12.26)), що

$$\lim_{r\to 0} f^0(\boldsymbol{x}^*(r)) \le \lim_{r\to 0} F(\boldsymbol{x}^*(r), r).$$

Тому

$$\lim_{r\to 0} f^0(\boldsymbol{x}^*(r)) \le f^0(\boldsymbol{x}^*),$$

тим більше буде

$$\lim_{k\to\infty} f^0(\boldsymbol{x}^*(r_k)) \le f^0(\boldsymbol{x}^*).$$

Оскільки $f^0(\boldsymbol{x})$ — неперервна функція, то із останньої нерівності отримуємо при $k\to\infty$

$$f^0(\bar{\boldsymbol{x}}) \le f^0(\boldsymbol{x}^*). \tag{12.29}$$

Так як $\bar{\boldsymbol{x}} \in D$, а

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in D} f^0(\boldsymbol{x}^*)$$

за умовами теореми, то отримана нерівність суперечить умовам теореми, тобто наше припущення було невірним і тому

$$\lim_{r\to 0} f^0(\boldsymbol{x}^*(r)) = f^0(\boldsymbol{x}^*).$$

Теорема доведена.

Приклад 12.1. *Розв'язати задачу методом штрафних функцій*

$$\min\{x^2 - 10x : x \le 1\}.$$

Покладемо

$$P(f^1(x), r) = (1/r)(\max\{0, f^1(x)\})^2 = (1/r)(\max\{0, x-1\})^2,$$

тоді

$$F(x, r) = f^0(x) + P(f^1(x), r) = x^2 - 10x + (1/r)(\max\{0, x-1\})^2.$$

Схематичні графіки функцій $f^0(x)$, $P(f^1(x), r)$, $F(x, r)$ наведені на рис. 12.4. Функція $F(x, r)$ опукла і диференційовна по x при довільних додатних значеннях параметра r.

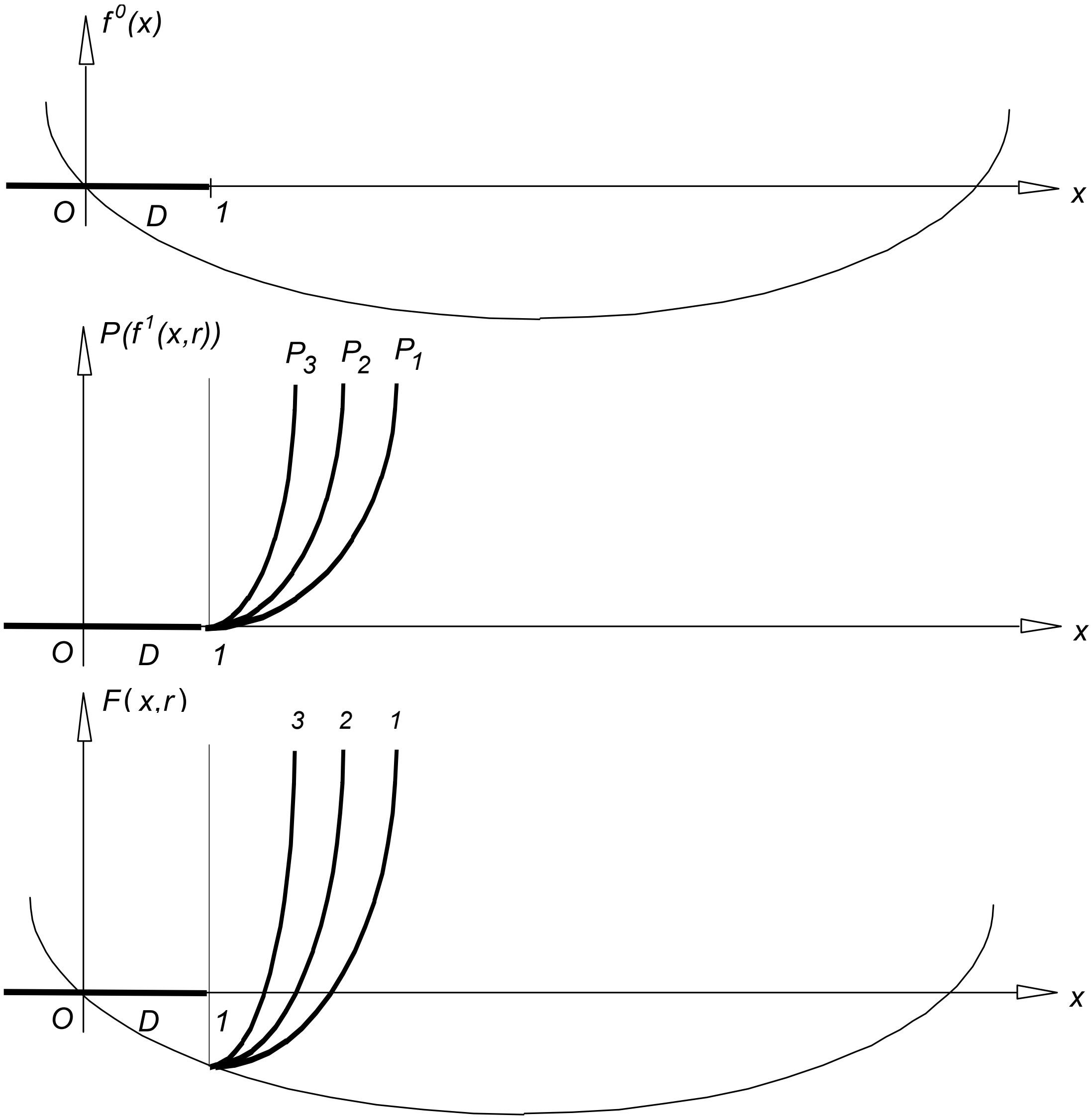


Рис. 12.4

Маємо:

а) всередині допустимої області (при $x < 1$)

$F(x, r) = x^2 - 10x$,

б) на межі та зовні допустимої області (при $x \geq 1$)

$F(x, r) = x^2 - 10x + (1/r)(x - 1)^2$.

Скористаємось необхідними умовами екстремуму:

$$\text{а)} \quad \begin{cases} dF/dx = 2x - 10 = 0, \\ x < 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 5, \\ x < 1. \end{cases}$$

Отримана система не має розв'язків всередині допустимої області.

б) $\begin{cases} dF/dx = 2x - 10 + (2/r)(x-1) = 0, \\ x \ge 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} x^*(r) = (5r+1)/(r+1), \\ x \ge 1. \end{cases}$

Остання система дає стаціонарну точку $x^*(r) = (5r+1)/(r+1)$, в якій функція $F(x, r)$, як опукла донизу по x, має мінімум. Оптимальний розв'язок вихідної задачі

$$x^* = \lim_{r \to 0} x^*(r) = \lim_{r \to 0} ((5r+1)/(r+1)) = 1.$$

Слід зауважити, що розглянутий приклад розв'язаний аналітично в силу його простоти.

Приклад 12.2. *Розв'язати задачу методом штрафних функцій*

$$\min \{ x^2 + xy + y^2 : x + y = 2 \}.$$

Маємо для цієї задачі

$$P(f^1(x, y), r) = (1/r)(f^1(x, y))^2 = (1/r)(x + y - 2)^2,$$

$$F(x, y, r) = f^0(x) + P(f^1(x, y), r) = x^2 + xy + y^2 + (1/r)(x + y - 2)^2.$$

Для довільного додатного значення параметра r функція $F(x, y, r)$ опукла і диференційовна по x та y. Скориставшись необхідними умовами екстремуму, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} F(x, y, r) = 2x + y + (2/r)(x + y - 2) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial y} F(x, y, r) = x + 2y + (2/r)(x + y - 2) = 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, матимемо:

$$x^*(r) = y^*(r) = (4/r)/(3 + 4/r) = 4/(3r + 4),$$

звідки

$$x^* = y^* = \lim_{r \to 0} 4/(3r + 4) = 1.$$

Література

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. — М.: Наука, 1981. — 340 с.
2. Бейко И.В. и др. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — К.: Вища шк., 1983. — 512 с.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций. — М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 336 с.; Т. 2. — 488 с.; Т. 3. — 494 с.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
5. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). — М.: Наука, 1961. — 304 с.
6. Гилл Ф. и др. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. — 509 с.
7. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969. — 382 с.

8. Ермольев Ю.М. и др. Математические методы исследования операций. — К.: Вища шк., 1979. — 312 с.
9. Ермольев Ю.М. Мельник И.М. Экстремальные задачи на графах. — К.: Вища шк., 1968. — 174 с.
10. Зайченко Ю.П. Исследование операций. — К.: Вища шк., 1988. — 552 с.
11. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. — К.: Вища шк., 1990. — 239 с.
12. Исследование операций. / Под ред. Дж. Моудера, М. Ýлмаграби. — М.: Мир, 1981. — Т. 1. — 712 с.; Т. 2. — 677 с.
13. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высш. шк., 1975. — 270 с.
14. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. — 192 с.
15. Карманов В.Г. Математическое программирование. — М.: Наука, 1975. — 286 с.
16. Ляшенко И.Н. и др. Линейное и нелинейное программирование. — К.: Вища шк., 1975. — 372 с.
17. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы.— М.: Наука, 1990. — 486 с.
18. Муртаф Б. Современное линейное программирование. — М.: Мир, 1984. — 224 с.
19. Попов Ю.Д. Линейное и нелинейное программирование. — К., УМК ВО, 1988. — 188 с.
20. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967. — 506 с.
21. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 534 с.
22. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование: теория, методы и приложения. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

Зміст

Навчальне електронне видання

Попов Юрій Дмитрович
ТЮПТЯ Володимир Іванович
ШЕВЧЕНКО Віталій Іванович

Методи оптимізації