3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=b(x)$$

називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням n-го порядку.

Рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=0$$

називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням n-го порядку.

Якщо при $x\in[a,b]$, $a_0(x)\neq 0$ коефіцієнти $b(x)$, $a_i(x)$, $i=\overline{0,n}$ неперервні, то для рівняння

$$y^{(n)}(x)=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y^{(n-1)}(x)-\ \dots\ -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}y(x)+\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

виконуються умови теореми існування та єдиності і існує єдиний розв'язок $y=y(x)$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

3.1. Лінійні однорідні рівняння.

3.1.1. Властивості лінійних однорідних рівнянь

Властивість 1. Лінійність і однорідність зберігаються при довільному перетворенні незалежної змінної

$$x = \varphi(t).$$

Властивість 2. Лінійність і однорідність зберігаються при лінійному перетворенні невідомої функції

$$y(x) = \alpha(x) z(x).$$

3.1.2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь

Властивість 1. Якщо $y = y_1(x)$ є розв'язком однорідного лінійного рівняння,

то і $y = Cy_1(x)$, де C - довільна стала, теж буде розв'язком однорідного лінійного рівняння.

Властивість 2. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння,

то і $y = y_1(x) + y_2(x)$ теж буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Властивість 3. Якщо $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$- розв'язки однорідного лінійного рівняння, то і

$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, де $C_1,\ C_2,\ ,\ C_n$- довільні сталі, також буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Властивість 4. Якщо комплексна функція дійсного аргументу $y(x)=u(x)+iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то окремо дійсна частина $u(x)$ і уявна $v(x)$ будуть також розв'язками цього рівняння.

3.1.3. Лінійна залежність і незалежність розв'язків. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння вищого порядку

Визначення. Функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ називаються **лінійно залежними** на відрізку $[a,b]$ якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1,\ \dots\ ,\ C_n$ такі, що при всіх $x\in[a,b]$

$$C_1y_1(x)+C_2\,y_2(x)+\ \dots+C_ny_n(x)\equiv 0.$$

Якщо ж тотожність справедлива лише при $C_1=C_2=\ \dots\ =C_n=0$,

то функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ називаються **лінійно незалежними**.

Приклад 3.1.1. Функції $1,\ x,\ x^2,\ \dots\ ,\ x^{n-1}$ - лінійно незалежні на будь-якому відрізку $[a,b]$, тому що вираз $C_1+C_2x+\ \dots\ +C_nx^{n-1}=0$ є многочленом ступеню $(n-1)$ і має не більш, ніж $(n-1)$ дійсних коренів.

Приклад 3.1.2. Функції $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \dots\ ,\ e^{\lambda_n x}$, де всі λ_i - дійсні різні числа - лінійно незалежні.

Приклад 3.1.3. Функції $1,\ \sin x,\ \cos x,\ \dots\ ,\ \sin nx,\ \cos nx$ - лінійно незалежні.

Теорема. Для того щоб розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння $y_1(x), \ \dots \ , y_n(x)$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб **визначник Вронського**

$$W[y_1, \ \dots \ , y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

не дорівнював нулю в жодній точці $x \in [a,b]$, тобто $W[y_1(x), \ \dots \ , y_n(x)] \neq 0$.

Теорема. Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ \dots \ + a_n(x)y(x) = 0$$

є лінійна комбінація n - лінійно незалежних розв'язків

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Визначення. Будь-які n -лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку називаються **фундаментальною системою розв'язків**.

3.1.4. Формула Остроградського – Ліувіля

Формула, яка пов’язує значення визначника Вронського в довільній точці і його значення в початковій точці

$$W\left[y_1(x), y_2(x), \ \dots \ , y_n(x)\right] =$$

$$= W\left[y_1(x_0), y_2(x_0), \ \dots \ , y_n(x_0)\right] e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}.$$

називається формулою Остроградського-Ліувілля.

Зокрема, якщо рівняння має вид

$$y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ \dots \ + p_n(x) y(x) = 0,$$

то формула запишеться у вигляді

$$W\left[y_1(x), y_2(x), \ \dots \ , y_n(x)\right] =$$

$$= W\left[y_1(x_0), y_2(x_0), \ \dots \ , y_n(x_0)\right] e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx}.$$

3.1.5. Формула Абеля

Розглянемо застосування формули Остроградського-Ліувіля до рівняння 2-го порядку

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0.$$

Нехай $y_1(x)$- один з розв’язків.

Тоді
$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розкривши визначник, одержимо

$$y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x) = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розділивши на $y_1^2(x)$, запишемо

$$\frac{y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x)}{y_1^2(x)} = C_2 \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx},$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)=C_2\,\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$\frac{y(x)}{y_1(x)}=C_2\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx+C_1.$$

Остаточно

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2\left\{y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx\right\}.$$

Отримана формула називається **формулою Абеля**.

Вона дозволяє по одному відомому розв’язку знайти загальний розв’язок однорідного лінійного рівняння другого порядку.

3.1.6. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_ny(x)=0.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y(x)=e^{\lambda x}$.

Продиференціювавши, одержимо $y'(x)=\lambda e^{\lambda x},\quad y''(x)=\lambda^2e^{\lambda x},\ \dots,\ y^{(n)}(x)=\lambda^ne^{\lambda x}$.

Підставивши отримані значення $y,\ y',\ \dots,\ y^{(n)}$ диференціальне рівняння перепишемо

$$\lambda^ne^{\lambda x}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\ \dots\ +a_ne^{\lambda x}=0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ \dots\ +a_n=0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n- коренів.

У залежності від їхнього вигляду будемо мати різні розв'язки.

1) Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \; \ldots \; , \lambda_n$ ***- дійсні і різні.***

Тоді функції $e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, \; \ldots \; , \quad e^{\lambda_n x}$ є розв'язками

й оскільки всі λ_i різні, то $e^{\lambda_i x}$- розв'язки лінійно незалежні,

тобто $\left\{e^{\lambda_i x}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ фундаментальна система розв'язків.

Загальним розв'язком буде лінійна комбінація $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}.$

2) Нехай маємо комплексно спряжені корені $\lambda = p + iq, \quad \overline{\lambda} = p - iq.$

Їм відповідають розв'язки $e^{(p+iq)x}, \quad e^{(p-iq)x}.$

Розкладаючи їх по формулі Ейлера, одержимо:

$$e^{(p+iq)x} = e^{px}e^{iqx} = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx = u(x) + iv(x),$$

$$e^{(p-iq)x} = e^{px}e^{-iqx} = e^{px}\cos qx - ie^{px}\sin qx = u(x) - iv(x).$$

І, як випливає з властивості 4, функції $u(x)$ й $v(x)$ будуть окремими розв'язками.

Таким чином, кореням $\lambda = p + iq, \quad \overline{\lambda} = p - iq$ відповідають два лінійно незалежних розв'язки

$$u(x) = e^{px}\cos qx, \quad v(x) = e^{px}\sin qx.$$

Загальним розв'язком, що відповідає цим двом кореням, буде

$$y(x) = C_1 e^{px}\cos qx + C_2 e^{px}\sin qx.$$

3) Нехай λ - кратний корінь, кратності k, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k,\ k \le n$.

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$.

Тоді загальним розв'язком, що відповідає кореню λ кратності k, буде лінійна комбінація цих функцій

$$y(x) = C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}.$$

б) Нехай $\lambda = v \ne 0$ - і корінь дійсний.

Тоді кореню $\lambda = v$ кратності k відповідає розв'язок

$$y(x) = C_1 e^{vx} + C_2 x e^{vx} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{vx}.$$

в) Нехай характеристичне рівняння має корені $\lambda = p + iq$, $\overline{\lambda} = p - iq$ кратності k.

Тоді загальним розв'язком, що відповідає цим кореням буде

$$y(x) = C_1 e^{px}\cos qx + C_2 x e^{px}\cos qx + \ldots + C_k x^{k-1} e^{px}\cos qx +$$

$$+ C_{k+1} e^{px}\sin qx + C_{k+2} x e^{px}\sin qx + \ldots + C_{2k} x^{k-1} e^{px}\sin qx.$$

3.1.7. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо деякі лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які за допомогою заміни незалежної змінної або шуканої функції можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1) **Рівнянням Ейлера** називають диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ \dots \ + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = 0$$

Заміна пряма $x = e^t$ й зворотня $t = \ln x$.

2) Узагальнене рівняння Ейлера (**рівняння Лагранжа**)

$$(ax+b)^n y^{(n)}(x) + p_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ \dots + p_{n-1}(ax+b) y'(x) + p_n y(x) = 0$$

Заміна $(ax+b) = e^t$

3) **Рівняння Чебишова**

$$(1-x^2) y''(x) - x y'(x) + n^2 y(x) = 0$$

Заміна $t = \arccos x$ $(x = \cos t)$

4) **Рівняння Бесселя** $x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu) y(x) = 0$ при $\nu = 1/4$