Розв'язування лінійних однорідних систем з постійними коефіцієнтами.

Метод Ейлера.

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \qquad (1)$$

Розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді

$$y = he^{\lambda x}. \qquad (2)$$

$$\lambda he^{\lambda x} = Ahe^{\lambda x},$$

$$\lambda h = Ah, \quad (A - \lambda E)h = 0.$$

$$|\lambda E - A| = 0 = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - дійсні і різні. Тоді

$$y_1 = h_1 e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = h_2 e^{\lambda_2 x}, \ \ldots.., \ y_n = h_n e^{\lambda_n x}. \quad (3)$$

2) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $h_{1,2} = a \pm ib$, тоді

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x), \quad (4)$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x}(b\cos\beta x + a\sin\beta x). \quad (5)$$

$$y_1(x) = (a+ib)e^{(\alpha+i\beta)x} = (a+ib)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}a\cos\beta x + ie^{\alpha x}b\cos\beta x + iae^{\alpha x}\sin\beta x - be^{\alpha x}\sin\beta x.$$

$$y(x)_1 = e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(b\cos\beta x + \sin\beta x). \quad (6)$$

3) λ - корінь кратності k має тільки m лінійно-незалежних власних векторів $(m < k)$, тоді

$$y(x) = (h_0 + h_1 x + \ldots + h_{k-m}x^{k-m})e^{\lambda x}. \quad (7)$$

$$rank(A - \lambda E) = r, \qquad (8)$$

$m = n - r$ - число лінійно-незалежних власних векторів.

Загальний розв'язок системи (1) має вигляд

$$y(x) = C_1 h_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n h_n e^{\lambda_n x}. \quad (9)$$

Приклад1:

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}. \qquad (10)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (11)$$

Власні значення:

$$\lambda_1 = 1 + 3i\,,\ \lambda_2 = 1 - 3i\,. \quad (12)$$

Визначимо власний вектор для власного значення $\lambda_1 = 1 + 3i$:

$$(A - \lambda E)h = 0\,, \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = 0\,,\ \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

тоді

$$h_2 = \overline{h_1} \text{ для } \lambda_2 = 1 - 3i\,.$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Перший розв’язок системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = h_1 e^{(1+3i)t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) e^t(\cos 3t + i\sin 3t)\,, \quad (16)$$

або

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t\cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t\sin 3t + i\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t\sin 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t\cos 3t\right). \quad (17)$$

Другий розв’язок системи для комплексно-спряженого власного значення:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t\cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t\sin 3t - i\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t\sin 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t\cos 3t\right). \quad (18)$$

Загальний розв’язок системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t\cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t\sin 3t\right] + C_2\left[\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t\sin 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t\cos 3t\right)\right].$$

Приклад2:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}. \quad (19)$$

$$x'' = 2x' + y'\,, \quad (20)$$

$$x'' = 2x' + 3x + 4y\,, \quad (21)$$

$$y = x' - 2x\,, \quad (22)$$

$$x'' = 2x' + 3x + 4x' - 8x,$$

$$x'' - 6x' + 5x = 0, \quad (23)$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0, \quad (24)$$

$$\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 1. \quad (25)$$

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{5t}, \quad (26)$$

$$x' = c_1 e^t + 5c_2 e^{5t},$$

$$y = c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} - 2c_1 e^t - 2c_2 e^{5t},$$

$$y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}. \ (27)$$