Варіаційне числення.

Задачі, у яких необхідно дослідити функціонал на максимум або мінімум, називаються задачами варіаційного числення.
Функціоналом називається відображення деякої множини функцій X на множину дійсних чисел R. $I: X \to R$.

Необхідні умови:

Випадок 1.
Нехай $y(x)$ екстремаль задачі з закріпленими кінцями

$$I(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

$$y(a) = A,\ y(b) = B.$$

Тоді $y(x)$ задовольняє рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0,\ \ a \le x \le b.$$

Випадок 2.
Нехай $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ екстремалі задачі з закріпленими кінцями

$$I(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)dx,$$

$$y_i(a) = A_i,\ y_i(b) = B_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Тоді $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ задовольняють рівняння Ейлера

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx}F'_{y'_i} = 0,\ i = \overline{1,n},\ \ a \le x \le b.$$

Випадок 3.
Нехай $y(x)$ екстремалі задачі з закріпленими кінцями

$$I(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)})dx,$$

$$y(a) = A,\ y'(a) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1},$$

$$y(b) = B,\ y'(b) = B_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}.$$

Тоді $y(x)$ задовольняє рівняння Ейлера

$$F'_y(x,y,y',\dots,y^{(n)}) - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y',\dots,y^{(n)}) + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}}(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0,$$
$$a \le x \le b.$$

Достатні умови Лежандра:

Нехай функція $F(x,y,y')$ має неперервну частинну похідну $F_{y'y'}(x,y,y')$, а екстремаль C включена в поле екстремалей. Якщо на екстремалі C має місце умова $F_{y'y'} > 0$, то на кривій C досягається слабкий мінімум, якщо $F_{y'y'} < 0$ - слабкий максимум.

Якщо $I(y,z)$, то умова Лежандра має вигляд:

$\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} > 0$ - слабкий мінімум, $\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} < 0$ - слабкий максимум.

Приклад.1 Знайти екстремаль функціонала

$$I(y(x)) = \int_0^1 (y'^3 + y')dx,$$
$$y(0)=0,\ y(1)=2.$$

Розв’язок:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0,$$
$$-\frac{d}{dx}(3y'^2+1) = 0,$$
$$-6y'y''=0,\ (y'y')' = y''y' + y'y'' = 2y''y'.$$
$$y'=0,\ y=c_1.$$
$$y''=0,\ \frac{d}{dx}y'=0,\ y'=c_2,\ y=c_2x+c_3.$$
$$y(0)=0=c_3,\ y(1)=2=c_2.$$

Тоді екстремаль $y=2x$.

$F_{y'y'} = \dfrac{d}{dy'}(3y'^2+1) = 6y' = 12 > 0$ - слабкий мінімум.

Приклад.2 Знайти екстремаль функціонала

$$I(y,z)=\int_0^1 (y'^2+z'^2)dx,$$

$$y(0)=0,\ y(1)=1,$$

$$z(0)=0,\ y(1)=2.$$

Розв'язок:

$$F'_{y_i}-\frac{d}{dx}F'_{y'_i}=0,\ i=\overline{1,n}.$$

$$-\frac{d}{dx}2y'=0,\ y''=0.$$

$$-\frac{d}{dx}2z'=0,\ z''=0.$$

$y=c_1x+c_2$,

$y(0)=0=c_2,\ y(1)=1=c_1+c_2$,

Екстремаль $y=x$.

$z=c_3x+c_4$,

$z(0)=0=c_4,\ z(1)=2=c_3+c_4$,

Екстремаль $z=2x$.

$\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0$ - слабкий мінімум.

Приклад.3 Знайти екстремаль функціонала

$$I(y)=\int_0^{\pi/2} (y''^2-y^2-x^2)dx,$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=0,$$

$$y(\frac{\pi}{2})=0,\ y'(\frac{\pi}{2})=-1.$$

Розв'язок:

$F'_y=-2y$,

Рівняння Ейлера:

$$-2y+\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0,\ y^{(4)}-y=0.$$

$\lambda^4 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1, \lambda_{3,4} = \pm i$.

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$.

$c_1 = c_2 = c_4 = 0, c_3 = 1$.

Екстремаль: $y = \cos x$.