Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 9.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2020

Зміст I

Зміст

Нехай (Ω, F, P)— деякий ймовірнісний простір, $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ — борелівська σ-алгебра, задана на $\mathbf{R}$.

Означення

Якщо $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ для довільної борелівської множини A, то функцію $\xi(\omega) : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ називають вимірною.

Означення

Скінченну дійснозначну вимірну функцію називають *випадковою величиною* (в.в.).

Означення (Еквівалентне визначення в.в.)

Дійсна скін. функція $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ називається випадковою величиною, якщо

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in F.$$

Означення

Функцією розподілу (ф.р.) в.в. ξ називається

$$F_\xi(x) = F(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}) = P\{\xi \le x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Лема

Функція розподілу $F(x) = P\{\xi \leq x\}$ *в.в.* ξ *задовольняє власт.:*

- *для* $x_1 < x_2$
$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1);$$
-
$$P\{\xi < x\} = F(x-) = F(x - 0);$$

Доведення

Оскільки $\{\xi \le x_2\} = \{\xi \le x_1\} \cup \{x_1 < \xi \le x_2\}$, то

$$P\{\xi \le x_2\} = P\{\xi \le x_1\} + P\{x_1 < \xi \le x_2\} \Rightarrow$$

$$P\{x_1 < \xi \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Подамо подію $\{\xi < x\}$ як об'єднання несумісних подій

$$\{\xi < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x - \frac{1}{n-1} < \xi \le x - \frac{1}{n}\right\} =$$

$$= \{\xi \le x - 1\} \cup \{x - 1 < \xi \le x - \frac{1}{2}\} \cup \{x - \frac{1}{2} < \xi \le x - \frac{1}{3}\} \cup \dots$$

Доведення

тому за власт. P3(сигма-адитивності)

$$P\{\xi < x\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{x - \frac{1}{n-1} < \xi \leq x - \frac{1}{n}\right\} =$$

$$= F(x-1) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \left(F\left(x - \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n-1}\right)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} F\left(x - \frac{1}{N}\right) = F(x-).$$

Наслідок

Якщо $F(x)$ — функція розподілу для в.в. ξ, то

1. $$P\{\xi = x\} = F(x) - F(x-);$$
2. $$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1-);$$
3. $$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2-) - F(x_1);$$
4. $$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2-) - F(x_1-).$$

Доведення.

Вправа. □

Теорема (про характеристичні власт. ф.р.)

Для ф.р. $F(x)P\{\xi \leq x\}$ виконуються характеристичні властивості:

- *(монотон.)* $F(x)$ *— неспадна;*
- *(неперер.)* $F(x)$ *— неперервна праворуч;*
- *(нормов.)* $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$

Доведення

- Оскільки для $x_1 < x_2$
  $P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$.
- Покажемо,що $F(x) = F(x+)$. Для цього розглянемо спадну послідовність подій

$$B_n = \left\{x < \xi \leq x + \frac{1}{n}\right\} \downarrow \emptyset.$$

З властивості неперервності ймовірності випливає, що $P(B_n) \to 0$. Отже,

$$P(B_n) = P\left\{x < \xi \leq x + \frac{1}{n}\right\} = F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \to 0, \quad n \to \infty$$

$$\Leftrightarrow F(x+) = \lim_{n\to\infty} F(x + \frac{1}{n}) = F(x).$$

- Доведемо нормованість. Подамо Ω через об'єднання несумісних подій:

$$\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \{\omega : n-1 < \xi(\omega) \leq n\}.$$

Оскільки $P(A_n) = F(n) - F(n-1)$, то звідси маємо

$$1 = P(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} P(A_n) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} (F(N) - F(-N)).$$

Отже,

$$F(+\infty) = \lim_{N\to\infty} F(N) = 1; \; F(-\infty) = \lim_{N\to\infty} F(-N) = 0.$$

За функцією розподілу можна подати класифікацію в.в. Для цього спочатку сформулюємо такий результат.

Лема

Довільна функція розподілу $F(x)$ має не більш як зліченне число точок розриву першого роду.

Доведення.

Так як $P\{\xi = x\} = F(x) - F(x-)$, то в точках розриву $P\{\xi = x\} > 0$. Тому $\exists n_0 \in \mathbf{N} : P\{\xi = x\} \geq \frac{1}{n_0}$.
Оскільки при кожному натуральному n може бути не більше n точок x з $P\{\xi = x\} \geq \frac{1}{n}$, то у функції $F(x)$ є не більш як зліченне число точок розриву. $\square$

Позначимо через $x_1, x_2, \ldots$ усі точки розриву функції $F(x)$.

Означення

Якщо ймовірності $P\{\xi = x_k\} = p_k$ такі, що $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, то говоримо, що в.в. ξ має дискретний розподіл.

Прикладами дискретних розподілів є біометричний, пуассонівський, геометричний і т.д.

Означення

Розподіл в.в. ξ називатимемо абсолютно неперервним, якщо існує вимірна функція $f(u)$, яка називається щільністю, така, що

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

Означення

Якщо функція розподілу в.в. ξ неперервна, але не має щільності, то розподіл ξ називається сингулярним.

Теорема (Теорема Лебега)

Будь-яку функцію розподілу $F(x)$ можна подати у вигляді

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x),$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$,
$F_1(x)$— *дискретна функція розподілу,*
$F_2(x)$— *абсолютно неперервна функція розподілу,*
$F_3(x)$— *сингулярна функція розподілу.*

Зміст

В.в. ξ та її функцію розподілу F_ξ називають *абсолютно неперервними*, якщо існує невід'ємна функція $f_\xi(x)$ така, що

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,\mathrm{d}u$$

для будь-якого $x \in \mathbf{R}$. Тут інтеграл треба розуміти як інтеграл Рімана-Стілтьєса у разі кусково-неперервної функції $f_\xi(x)$ та як інтеграл Лебега-Стілтьєса у разі вимірної функції $f_\xi(x)$. Функцію $f_\xi(x)$ називають *щільністю розподілу* в.в. ξ та функції розподілу F_ξ.

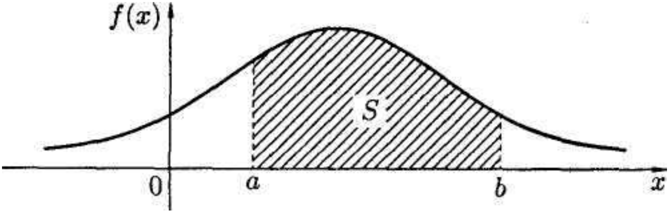
Із властивостей функції розподілу випливають такі властивості щільності:

- **невід'ємність:** $f_\xi(x) > 0$; ($\Leftarrow F(x)\uparrow$)
- **нормованість:** $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(y)\,\mathrm{d}y = 1$ ($\Leftarrow F(+\infty) = 1$).

Будь-яка невід'ємна інтегровна нормована функція є щільністю деякої функції розподілу, оскільки з властивостей інтегралу (Рімана чи Лебега) випливають характеристичні властивості функції розподілу. Якщо функція розподілу диференційовна, то щільність (майже всюди) збігається з похідною функції розподілу:

- $$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{\mathrm{d}F_\xi(x)}{\mathrm{d}x}.$$

- $$P\{a < \xi \le b\} = \int_a^b f_\xi(x)dx, \quad \forall a < b, a, b \in \mathbf{R}$$



Знаходження моментів для н.в.в.

Для в.в. $\xi(\omega)$, заданих на ймовірнісному просторі (Ω, F, P), загальне визначення математичного сподівання вводиться послідовно для дискретних в.в., далі для невід'ємних та знакозмінних інтегровних в.в..

Фактично, *математичним сподіванням* $M\xi$ в.в. ξ є її інтеграл Лебега:

$$M\xi = \int_\Omega \xi \, \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Зауважимо, що $M\xi$ існує тоді і лише тоді, коли існує $M|\xi|$. Тоді в.в. ξ називають *інтегровною*.

Має місце рівність

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{d}F_\xi(x),$$

у правій частині якого стоїть інтеграл Стілтьєса. Якщо в.в. ξ абсолютно неперервна і має щільність $f_\xi(x)$, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Якщо X – дискретна в.в. з розподілом $\{(x_i, p_i)\}_{i\geq 1}$, то

$$M\xi = \sum_{i\geq 1} p_i x_i \quad \left(= \sum_{i\geq 1} x_i \mathbf{P}(\xi = x_i) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\omega) \right).$$

Нехай $g(x)$ – борелівська функція, т.б. дійсна функція, визначена на $\mathbf{R}$ так, що для будь-якого $a \in \mathbf{R}$ множина $\{x\colon g(x) < a\}$ є борелівською. Тоді

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

Рівномірний розподіл

Означення

В.в. ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, що позначається $\xi \sim \mathcal{U}[a, b]$, якщо її щільність є сталою всередині цього відрізку та дорівнює нулю поза ним, тобто

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{I}_{x \in [a,b]}. \tag{1}$$

Це означає, що ймовірність попадання величини в якусь множину всередині відрізка пропорційна довжині цієї множини (як інтеграл від щільності) і не залежить від її положення. Таким чином, виконується умова рівноймовірності значень.

Моменти:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2};$$

$$M\xi^2 = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3};$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Експоненційний (показниковий) розподіл

Означення

В.в. ξ має показниковий розподіл з параметром λ, $\lambda > 0$,, якщо її щільність має вигляд

$$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Функція розподілу експоненційного розподілу:

$$F_\xi(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0;$$

Експоненційний розподіл часто використовують як просту модель тривалості життя певних типів обладнання.

Гамма-розподіл

Нагадаємо спершу, що гамма-функцію $\Gamma(\alpha)$ визначають для $\alpha > 0$ таким чином:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} \, \mathrm{d}y.$$

Зокрема,

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

для $\alpha > 1$ (тобто коли n – ціле число, то $\Gamma(n) = (n-1)!$) та $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Гамма-розподіл

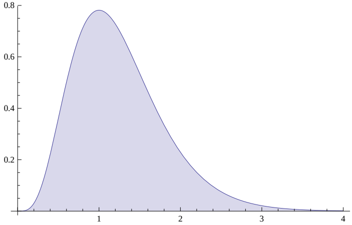
Сім'я гамма-розподілів має два додатних параметри і є дуже гнучкою. Щільність може набувати різної форми залежно від значень параметрів і визначена на додатній півосі $\{x\colon x > 0\}$.

Означення

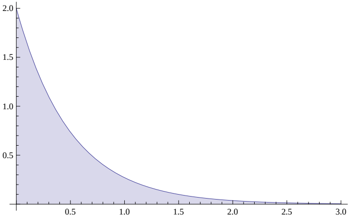
Щільність гамма-розподілу з параметрами α та λ має вигляд

$$f_\xi(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

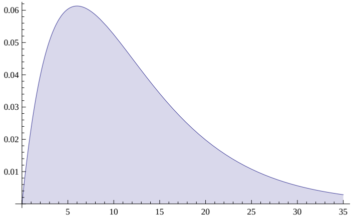
Гамма-розподіл



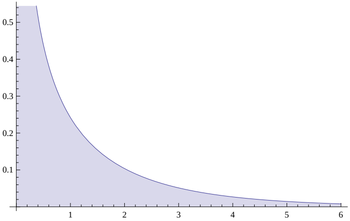
$\alpha = 5,\ \lambda = 4$



$\alpha = 1,\ \lambda = 2$



$\alpha = 2,\ \lambda = \frac{1}{\ }$



$\alpha = \frac{1}{\ },\ \lambda = \frac{1}{\ }\ (\nu = 1)$

Гамма-розподіл

Зауваження

Експоненційний (показниковий) розподіл – це гамма розподіл з параметром $\alpha = 1$.

Зауваження

Хі-квадрат (χ^2) розподіл з параметром ν "ступеней вільності" – це гамма розподіл з параметрами $\alpha = \frac{\nu}{2}$, де ν – натуральне число, та $\lambda = \frac{1}{2}$. Щільність хі-квадрат розподілу з ν ступеней вільності:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Нормальний (ґауссівський) розподіл

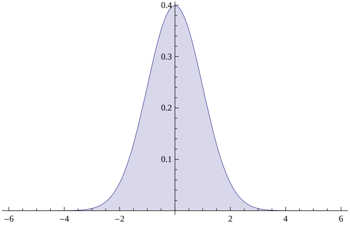
Цей розподіл, відомий за своєю симетричною дзвоноподібною формою, відіграє фундаментальну роль у теорії та практиці статистики, оскільки, по-перше, є гарною моделлю для розподілу вимірювань, які проводять на практиці у різного роду ситуаціях та, по-друге, гарним наближенням для різних інших розподілів, зокрема, є граничним для біноміального. Нормальний розподіл використовують для побудови багатьох інших розподілів (логнормальний, хі-квадрат, Фішера, Стьюдента тощо), на ньому ґрунтується велика кількість статистичних висновків.

Нормальний (ґауссівський) розподіл

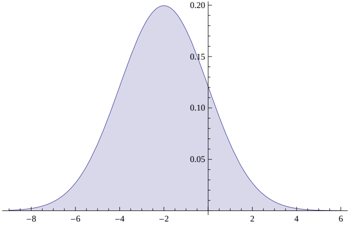
Нормальний розподіл $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ має два параметри, які зручним чином безпосередньо виражаються через середнє μ та стандартний відхил σ. Розподіл симетричний відносно μ. Щільність нормального розподілу

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нормальний (ґауссівський) розподіл



$\mu = 0,\ \sigma = 1$



$\mu = -2,\ \sigma = 2$

Рис. Щільності нормального розподілу

Властивості

- $\xi \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow \quad M\xi = m,\ D\xi = \sigma^2.$
- Якщо $\xi \sim N(m, \sigma^2)$, то $\xi a + b \sim N(ma + b, a^2\sigma^2)$.

Зауваження

Ця властивість дозволяє будь-яку нормально розподілену в.в. звести до стандартного гауссівського розподілу, а саме до $N(0, 1)$. Якщо $\xi \sim N(m, \sigma^2)$, то $z = \frac{\xi - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

- Якщо ξ_i— незалежні в.в. з $\xi_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2).$$

Властивості

- Якщо $\xi \sim N(m, \sigma^2)$, то

$$P\{a < \xi < b\} = P\{\frac{a-m}{\sigma} < \frac{\xi - m}{\sigma} < \frac{b-m}{\sigma}\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функція розподілу для стандартної гауссівської в.в. Її значення знаходять зі статистичних таблиць.

Властивості

- Якщо $z \sim N(0,1)$, то для її функції розподілу справедлива властивість

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi\left(a\right),$$

де $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Вона випливає з того, що щільність z $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ є симетричною функцією.

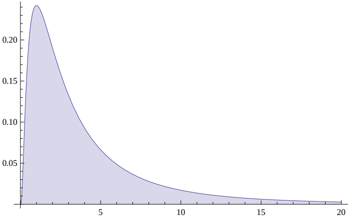
https://edpuzzle.com/media/5f806112fe8cf440e1c3e234

Логнормальний розподіл

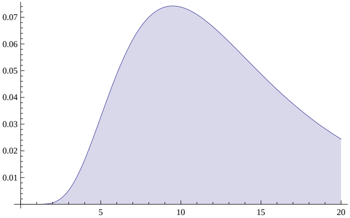
Якщо X відображає, наприклад, величину вимоги, а $Y = \ln X$ має нормальний розподіл, то кажуть, що в.в. X має логнормальний розподіл, $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$.

Щільність логнормального розподілу:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad 0 < x < \infty.$$



$\mu = 1,\ \sigma = 1$



$\mu = \frac{5}{2},\ \sigma = \frac{1}{2}$

Рис. Щільності логнормального розподілу

Зміст

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, F, P), на якому визначені n в.в. $X_1, \ldots, X_n$. Вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ називають *випадковим вектором* або *n-вимірною в.в.*

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – довільні в.в.

Означення

Сумісною функцією розподілу випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називають функцію $F_{\mathbf{X}}(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, яка в точці $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ дорівнює

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \mathbf{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n).$$

Як і в одновимірному випадку, багатовимірна функція розподілу має подібні властивості:

(1) $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ – неспадна функція за будь-яким аргументом;

(2) – неперервна праворуч за будь-яким аргументом;

(3) – задовольняє співвідношення

$$F_X(+\infty, \ldots, +\infty) = 1, \quad \lim_{x_k \to -\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

для довільних значень інших аргументів.

На відміну від функції розподілу одновимірної в.в., сумісна функція розподілу має ще одну характеристичну властивість. Для її формулювання позначимо через $\Pi_{\mathbf{x}}$ кут

$$\Pi_{\mathbf{x}} = (-\infty, \mathbf{x}] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n], \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Для початку припустимо, що розмірність $n = 2$. Зауважимо, що паралелепіпед $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]]$ можна зобразити у вигляді вкладеної різниці вкладених різниць кутів:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\Pi_{\mathbf{b}} \backslash \Pi_{\mathbf{b}'}) \backslash (\Pi_{\mathbf{a}} \backslash \Pi_{\mathbf{a}'}),$$

де точки $\mathbf{b}' = (a_1, b_2)$, $\mathbf{a}' = (a_2, b_1)$. Тоді

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}} \backslash \Pi_{\mathbf{b}'}) - \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}} \backslash \Pi_{\mathbf{a}'}) =$$

$$= \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}}) - \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}'}) - \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}}) + \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}'}).$$

Позначимо через $\Delta_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]}F_{\mathbf{X}}$ приріст сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ на паралелепіпеді $(\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Тоді при $n=2$ приріст $F_{\mathbf{X}}$ на прямокутнику $(\mathbf{a},\mathbf{b}]$ дорівнює $\Delta_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]}F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}) - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}') - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}') + F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a})$. У загальному випадку $n>2$ правило чергування знаків при значеннях функції у вершинах паралелепіпеда $(\mathbf{a},\mathbf{b}]$ визначається аналогічно.

Зокрема, нехай $\Delta^k_{(a_k,b_k]} F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ позначає k-ий частковий приріст на $(a_k, b_k]$. Використовуючи метод математичної індукції, легко показати, що приріст сумісної функції розподілу на паралелограмі $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ є результатом послідовних часткових приростів:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \Delta_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]} F_{\mathbf{X}} = \Delta^1_{(a_1,b_1]} \ldots \Delta^{n-1}_{(a_k,b_k]} \Delta^n_{(a_k,b_k]} F_{\mathbf{X}}. \quad (2)$$

В одновимірному випадку перераховані властивості (1) – (3) є необхідними й достатніми для того, щоб функція $F_X(x)$ була функцією розподілу деякої в.в. X. У багатовимірному випадку цих властивостей вже недостатньо. Для того, щоб функція $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ була функцією розподілу деякого випадкового вектора $\mathbf{X}$, треба додати ще одну:

(4) для довільних $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ вираз (2) невід'ємний.

Те, що ця умова може не виконуватися, незважаючи на наявність у функції $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ властивостей (1) – (3), показує наступний приклад. Нехай

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \geq 0, \text{ або } x+y \leq 1, \text{ або } y \leq 0; \\ 1, & \text{в іншій частині площини.} \end{cases}$$

Ця функція задовольняє умови (1) – (3), але для неї $F(1,1) - (F(1,\frac{1}{2})) - F(\frac{1}{2},1) + F(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -1$, і, відповідно, четверта умова не виконується. Отже, функція $F(x,y)$ не може бути сумісною функцією розподілу, оскільки інакше ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в прямокутник $\frac{1}{2} < X \leq 1, \frac{1}{2} < Y \leq 1$ буде від'ємним числом.

Нехай випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ має сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$. *Маргінальну функцію розподілу* в.в. X_k визначають так:

$$F_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}(X_k < x_k) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \ldots, \infty, x_k, \infty, \ldots, \infty),$$

де x_k – k-ий аргумент функції $F_{\mathbf{X}}$.

Означення

Випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ та його сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$ називають абсолютно неперервними, якщо існує невід'ємна вимірна функція $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ така, що

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty,\mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$$

для будь-якого $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Функцію $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ називають *сумісною щільністю* випадкового вектора та сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}$.

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n)\, \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_{k-1}\, \mathrm{d}y_{k+1} \dots$$

Властивості сумісної щільності:

- $f_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0$;
- $\int_{\mathbf{R}^n} f_X(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 1$;
- $\mathbf{P}(x_{11} < X_1 \leq x_{12}, \dots, x_{n1} < X_n \leq x_{n2}) = \int_{x_{11}}^{x_{12}} \dots \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n)\, \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n$;
- $$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n).$$

Зміст

Кожна в.в. породжує випадкові події, які є прообразами борелівських множин. Незалежність в.в. означає, що всі такі породжені події незалежні.

Означення

Отже, *в.в.* $X_1, \ldots, X_n$ *незалежні в сукупності*, якщо всі породжені ними випадкові події незалежні в сукупності, тобто для довільних $B_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$

$$\mathbf{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \in B_k).$$

Зокрема, в.в. $X_1, \ldots, X_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли відповідна сумісна функція розподілу для всіх $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ розкладається у добуток

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \leq x_k) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k).$$

Коли випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$, то абсолютно неперервні в.в. $X_1, \ldots, X_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k).$$

Теорема про спадковість незалежності

Має місце наступна теорема про перетворення незалежних в.в.

Теорема

Нехай в.в. $X_1, \ldots, X_n$ незалежні в сукупності, а $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ – борелівські функції. Тоді в.в.

$$g(X_1), \ldots, g(X_n)$$

незалежні в сукупності.

Доведення.

Для довільних множин $B_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $1 \le k \le n$ розглянемо

$$\mathbf{P}(g_1(X_1) \in B_1, \dots, g_n(X_n) \in B_n) =$$

$$= \mathbf{P}(X_1 \in g_1^{-1}(B_1), \dots, X_n \in g_n^{-1}(B_n)) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \in g_1^{-1}(B_k))$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(g(X_k) \in B_k).$$

Отже, $g(X_1), \dots, g(X_n)$ – незалежні в сукупності. $\square$

Зміст

Теорема

Якщо X та Y – незалежні в.в. із щільностями $f_X(x)$ і $f_Y(x)$, то сума $X+Y$ має функцію розподілу

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y)dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y)dF_X(y),$$

яку називають згорткою функцій розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$ і позначають $F_X * F_Y(x) = F_{X+Y}(x)$; та щільність, яка дорівнює згортці щільностей $f_X(x)$ і $f_Y(x)$, тобто

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(a-y)f_X(y)\,\mathrm{d}y.$$

Доведення

Оскільки в.в. X та Y незалежні, то $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Тому

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y\le a) &= \iint\limits_{\{(x,y):\, x+y\le a\}} f_X(x)\cdot f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x)\cdot dx\right) f_Y(y)dy =
\end{aligned}$$

використовуючи заміну $x = u - y$ $(u \in (-\infty, a),\ du = dx)$, маємо

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(a) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{a} f_X(u-y)\cdot du\right) f_Y(y)dy = \\
&= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-y)f_Y(y)dydu.
\end{aligned}$$

Якщо взяти похідну за a цієї функції, то отримаємо щільність в.в.$X + Y$:

$$f_{X+Y}(a) = F'_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a - y) f_Y(y) dy.$$

ПИТАННЯ?