2.1. ПОСТАНОВКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ КЕРОВАНОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Розглянемо систему керування, що описується лінійними диференціальними рівняннями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad (2.1)$$

де $x(t)$ – n-мірний, $u(t)$ – m-мірний вектор-стовпці, $A(t)$, $B(t)$ – відомі матриці відповідних розмірностей, елементи яких залежать від часу t.
Такі системи називаються ***нестаціонарними системами керування***.

Визначення 2.1. Система (2.1) називається ***цілком керованою***, якщо для двох довільних точок x^0, x^1 із фазового простору X і двох довільних значень t_0, t_1 аргументу t існує така функція керування $u(t), t \in [t_0, t_1]$, при якій розв'язок системи рівнянь (2.1) задовольняє умови $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$.

Позначимо: $X(t,\xi)$ – **фундаментальна матриця для однорідних рівнянь**, що відповідають рівнянням (2.1), нормована в точці ξ.

Введемо матрицю $$W(t,\xi) = X(t,\xi)B(\xi).$$

Матрицю $W(t,\xi)$ називають ***матрицею імпульсних перехідних функцій***.

Вважаємо $W(t,\xi)=\begin{pmatrix} w_1(t,\xi) \\ \vdots \\ w_n(t,\xi \end{pmatrix}$, де $w_i(t,\xi)$ – вектор-рядок:

$$w_i(t,\xi)=(w_{i1}(t,\xi),\ldots,w_{in}(t,\xi)),\ i=\overline{1,n} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1.. Для того, щоб система (2.1) була цілком керованою, необхідно й досить, щоб вектор-функції $w_1(t,\xi),\ldots,w_n(t,\xi)$ були лінійно-незалежними на довільному проміжку $[t_0,t_1]$.

Зауважимо, що умови, наведені в теоремі 2.1, практично важко використовувати, бо матриця $W(t,\xi)$ наперед не задається і її треба кожного разу обчислювати для різних значень t і ξ. Тому бажано знайти умови цілком керованості, що виражаються через матриці $A(t)$, $B(t)$.

Розглянемо це питання для систем керування, в яких A,B – матриці зі сталими елементами.
Такі системи будемо називати лінійними ***стаціонарними системами:***

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t). \tag{2.3}$$

Теорема 2.2. Для цілком керованості стаціонарної системи (2.3) n-го порядку необхідно й досить, щоб

$$rangS_n=rang(B,AB,\ldots,A^{n-1}B)=n. \tag{2.4}$$

Наслідок 2.1. Якщо в системі (2.3) вектор керування $u(t)$ одномірний, а $B = b$ – стовпчик, то необхідна й достатня умова цілком керованості має вигляд:

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0. \tag{2.5}$$

Співвідношення (2.4) і (2.5) називаються ***критеріями цілком керованості Калмана*** для лінійних стаціонарних систем.

Визначення 2.2. (*Цілком керованість на заданому проміжку*). Нестаціонарна система (2.1) називається цілком керованою на заданому проміжку $[t_0, t_1]$, якщо для 2-х довільних значень $x^0, x^1 \in X$ фазового простору можна вказати таку функцію керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, що розв`язок цієї системи задовольняє крайові умови: $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$.

Теорема 2.3. Якщо для деякого t із заданого проміжку $[t_0, t_1]$ виконується умова

$$rang[z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)] = n, \tag{2.6}$$

де $z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t) z_{k-1}(t) - \dfrac{dz_{k-1}}{dt}, \quad k = \overline{2, n},$

то система (2.1) – цілком керована на заданому проміжку.

2.2. СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ У ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

У теорії керування розглядаються задачі про спостережуваність.

Зміст цих задач: встановити алгоритм визначення частини або всіх фазових координат системи за умови, що відома друга частина фазових координат або деякі функції від цих координат, а також відома математична модель системи керування у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо задачу спостережуваності для лінійних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{2.8}$$

де $x(t)$ – n-мірний вектор стану системи, $A(t)$ – відома матриця $n \times n$.

Визначення 2.3. Задачу знаходження вектора $x(t)$ стану системи (2.8) або окремих його компонент за відомою на деякому проміжку $[t_0, t_1]$ функцією

$$y(t) = g^T(t)x(t), \tag{2.9}$$

де $g(t)$– відома n-мірна вектор-функція, будемо називати ***задачею спостережуваності лінійної системи*** (2.8).

Функцію $y(t)$ називають ***функцією (сигналом) виходу системи*** (2.8).

Зауваження 2.1. (***Узагальнення визначення 2.3***):
знайти вектор $x(t)$ або окремі його компоненти за відомою вектор-функцією виходу

$$y(t) = G^T(t)x(t), \tag{2.10}$$

де $G(t)$ – відома матриця $n \times m$.

Визначення 2.4. Якщо задача спостережуваності (2.8), (2.9) (або (2.8), (2.10)) має розв`язок, то система називається ***цілком спостережуваною*** або частково спостережуваною залежно від того, усі чи частину компонент вектора $x(t)$ вдається встановити.

Визначення 2.5. Пара матриць $A(t), G(t)$ називається спостережуваною, якщо можна розв`язати задачу спостережуваності для системи (2.8) за вектором виходу (2.10).

Розглянемо найбільш прості розв’язки задач спостережуваності.

Теорема 2.4. Нехай для кожного $t \in [t_0, t_1]$ існують і відомі $n-1$ похідні від вектора виходу (2.10) системи (2.8). Тоді для існування розв`язку задачі спостережуваності для системи (2.8) у фіксованій точці t у вигляді лінійної комбінації значень $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ досить, щоб

$$rang \tilde{S}_n = n, \tag{2.11}$$

де

$$\tilde{S}_n(t) = (G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)), \tag{2.12}$$

$$G_1^T(t) = G^T(t), \; G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt}, \; \nu = \overline{1, n-1}. \tag{2.13}$$

Зауваження 2.2. Коли $G_1(t) = g(t)$, то умова (2.11) має вигляд:

$$\det\ \tilde{S}_n(t) = \det(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \neq 0, \tag{2.15}$$

де

$$g_1^T(t) = g^T(t),\ \ g_\nu^T(t) = g_{\nu-1}^T(t)A(t) + \frac{dg_{\nu-1}^T(t)}{dt},\ \ \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Тоді для фіксованого t маємо:

$$x(t) = \tilde{S}_n^{*-1}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Зауваження 2.3. Якщо система рівнянь (2.8) стаціонарна, тобто $A(t) = A = const$ і $G_1(t) = const$ $(g(t) = const)$, то тоді матриця $\tilde{S}_n$, умови (2.11), (2.15) і формула (2.16) набудуть відповідно вигляду:

$$\tilde{S}_n(t) = (G, A^T G, \dots, A^{T^{n-1}} G).$$

$$rang\tilde{S}_n = rang(G, A^T G, \dots, A^{T^{n-1}} G) = n. \tag{2.17}$$

$$\det \tilde{S}_n(t) = \det (g, A^T g, \dots, A^{T^{n-1}} g) \neq 0. \tag{2.18}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} g^T \\ g^T A \\ \vdots \\ g^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Відзначимо, що розв'язок задачі спостережуваності через вектор виходу та його похідні буває незручним на практиці, що пов'язано з необхідністю чисельно знаходити похідні заданої функції виходу $y(t)$.

2.3. ЗВ'ЯЗОК МІЖ СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЮ ТА КЕРОВАНІСТЮ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

Нехай маємо умову цілком керованості:

$$rang(\, z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)) = n, \tag{2.20}$$

де

$$z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t) z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}(t)}{dt}, \; k = \overline{2, n}$$

для лінійної системи керування

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t).$$

Запишемо також умову цілком спостережуваності для лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \quad \text{з виходом} \quad y(t) = G^T(t)x(t):$$

$$rang(G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)) = n, \tag{2.21}$$

де

$$G_1^T(t) = G^T(t), \;\; G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t) A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt}, \quad \nu = \overline{1, n-1}.$$

Умови (2.20), (2.21) подібні між собою за формою. Утім, існує зв`язок між ними й за змістом.

Теорема 2.5. Якщо виконується умова цілком керованості системи

$$\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x(t) + G(t)u(t) \tag{2.22}$$

то виконується умова (2.21) цілком спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \qquad \text{з виходом} \qquad y(t) = G^T(t)x(t).$$

Систему (2.22) називають ***спряженою*** до системи керування (2.1).

Таким чином, дана теорема дозволяє зводити дослідження задач спостережуваності лінійних систем до дослідження задач керованості спряжених систем. Це дає можливість використовувати результати, що стосуються керованості, при розв`язуванні задач спостережуваності.

Розглянемо випадок, коли елементи матриць A, G не залежать від t і перенесемо результати з теорії керованості на задачу спостережуваності.

Теорема 2.6. Для того щоб існував розв’язок задачі спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax \text{ з вектором виходу (вимірів) } \quad y = G^T x$$

необхідно й досить, щоб виконувалась умова:

$$rang\tilde{S}_n = rang(G, A^T G, \ldots, A^{T^{n-1}} G) = n.$$

Зауваження 2.4. Найчастіше задачі спостережуваності виникають у системах керування, тому вони розв’язуються паралельно із задачею керування рухом системи.

Щодо лінійних систем, це означає, що задача спостережуваності виникає не для системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

а для системи керування $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, де $u(t)$ – m-мірний вектор керування.

При цьому вектор виходу $y(t) = G^T(t)x(t)$ має розмірність m.

2.4. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У багатьох випадках дослідникам невідомі як сама структура математичних моделей системи керування, так і параметри моделей. Це призводить до необхідності оцінки або самої структури й параметрів математичної моделі, або значень окремих параметрів при заданій наперед структурі моделі.

Розглянемо задачу знаходження невідомих параметрів математичної моделі, якщо її структура визначена у вигляді системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Задача знаходження (оцінки) невідомих параметрів математичної моделі об'єкта дослідження називається задачею ідентифікації.

Для ілюстрації підходів до розв'язання проблем такого типу розглянемо найпростішу задачу ідентифікації.

Нехай стан системи визначається вектором $\boldsymbol{x(t)}$ із $\boldsymbol{n}$-мірного евклідового простору і для деякого значення аргументу $\boldsymbol{t}$ у результаті вимірів отримані вектори

$$x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \tag{2.26}$$

У цьому випадку задача ідентифікації полягає в необхідності знайти таку матрицю $\boldsymbol{A}$ розмірності $\boldsymbol{n \times n}$, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax, \\ &\frac{d^2 x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt}, \\ &\ldots \\ &\frac{d^n x}{dt^n} = A\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Якщо для відомих вимірів (2.26) існує матриця $\boldsymbol{A}$, яка задовольняє співвідношення (2.27), то задача ідентифікації системи має розв'язок.

Позначивши рядки матриці $\boldsymbol{A}$ через $\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \ldots, \boldsymbol{a}_n^T$, рівняння (2.27) можна переписати у вигляді:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dx_j}{dt} = a_j^T x, & \\ \ldots . & , \quad (j = 1,2,\ldots,n). \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} = a_j^T \dfrac{d^n x}{dt^n} & \end{array} \tag{2.28}$$

Розглядаючи співвідношення (2.28) при кожному значенні $\boldsymbol{j}$ як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно елементів рядка $\boldsymbol{a}_j^T = (\boldsymbol{a}_{j1}, \boldsymbol{a}_{j2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{jn})$, можна записати

$$\begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2 x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}. \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{2.29}$$

Умова існування розв’язку системи (2.29) має вигляд:

$$\det\left(\boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}\boldsymbol{x}}{dt^{n-1}}\right) \neq \mathbf{0}. \tag{2.30}$$

Якщо умова (2.30) виконується, то це означає, що параметри $\boldsymbol{a}_j$ математичної моделі у цьому випадку визначаються за формулами:

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^T \\ \dfrac{d\boldsymbol{x}^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}\boldsymbol{x}^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \dfrac{d\boldsymbol{x}_j}{dt} \\ \dfrac{d^2\boldsymbol{x}_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n\boldsymbol{x}_j}{dt^n} \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}). \tag{2.31}$$

У результаті підстановки співвідношень (2.27) в умову (2.30) неважко отримати

$$\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \ldots \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}. \qquad (2.32)$$

Порівнявши (2.32) з умовою (2.5) цілком керованості системи (2.3), можна сформулювати ***зв'язок між задачами ідентифікації та керованості***:

для існування розв'язку задачі ідентифікації у вигляді математичної моделі

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{Ax}$$

за умови спостереження вектора стану $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ достатньо, щоб матриця $\boldsymbol{A}$ та вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ задовольняли умову (2.5) цілком керованості системи (2.3),

де
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}).$$

Подібну аналогію можна встановити також між умовами ідентифікації та цілком спостережуваності.

Оскільки матриця $\boldsymbol{A}$ наперед невідома, то на практиці умову ідентифікації перевіряють за допомогою умови (2.30).