### 1.3. Рівняння, що зводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

де $a, b, c$ - сталі.

Зробимо заміну $$ax + by + c = z.$$

Тоді $$adx + bdy = dz$$ і $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Підставивши в вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z)$$ або $$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{dz}{a + bf(z)} - dx = 0$$ і $$\int \frac{dz}{a + bf(z)} - x = C.$$

Загальний інтеграл має вигляд $$\Phi(ax + by + c, x) = C.$$

© A. Shatyrko, 2020

## 1.4. Однорідні рівняння

### 1.4.1. Загальна теорія

Нехай рівняння має вигляд $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

**Визначення.**
Якщо функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні одного ступеня, то рівняння називається однорідним.

Нехай функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні ступеня $k$,

тобто $$M(tx,ty) = t^k M(x,y), \qquad N(tx,ty) = t^k N(x,y).$$

Робимо заміну $$y = ux, \qquad dy = udx + xdu.$$

Після підстановки одержуємо

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)(udx + xdu) = 0,$$

або $$x^k M(1,u)dx + x^k N(1,u)(udx + xdu) = 0.$$

A.Shatyrko, 2020 ©

Скоротивши на $x^k$ і розкривши скобки, запишемо

$$M(1,u)dx + uN(1,u)dx + xN(1,u)du = 0.$$

Згрупувавши, одержимо рівняння зі змінними, що розділяються

$$[M(1,u) + uN(1,u)]dx + xN(1,u)du = 0,$$

або
$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)} du = C.$$

Взявши інтеграли та замінивши $u = y/x$,

отримаємо загальний інтеграл $\Phi(x, y/x) = C.$

A.Shatyrko, 2020 ©

### *1.5. Рівняння, що зводяться до однорідних*

Нехай маємо рівняння вигляду $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Розглянемо два випадки

**1)** $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді система алгебраїчних рівнянь $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв’язок $(x_0, y_0)$.

Проведемо заміну $x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0$ та отримаємо

A.Shatyrko, 2020 ©

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1(x_1 + x_0) + b_1(y_1 + y_0) + c_1}{a_2(x_1 + x_0) + b_2(y_1 + y_0) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1)}{a_2 x_1 + b_2 y_1 + (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2)}\right).$$

Оскільки $(x_0, y_0)$ - розв'язок системи алгебраїчних рівнянь, то диференціальне рівняння прийме вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1} == f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1}\right)$$

і є однорідним нульового ступеня.

Робимо заміну $y_1 = ux_1, \qquad dy_1 = udx_1 + x_1 du.$

Підставимо в рівняння

$$u + x_1 \frac{du}{dx_1} = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 u x_1}{a_2 x_1 + b_2 u x_1}\right).$$

Одержимо

$$x_1 du + \left[u - f\left(\frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u}\right)\right] dx_1 = 0.$$

© A.Shatyrko, 2020

Розділивши змінні, маємо

$$\int \frac{du}{u - f\left(\frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u}\right)} + \ln x_1 = C.$$

І загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$\Phi(u, x_1) = C.$$

Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, x - x_0\right) = C.$$

A.Shatyrko, 2020 ©

2) Нехай $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто строки лінійно залежні і $$a_1x + b_1y = \alpha(a_2x + b_2y).$$

Робимо заміну $$a_2x + b_2y = z.$$

Звідси $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right).$$

Підставивши в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right),$$

або

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right).$$

A.Shatyrko, 2020 ©

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{dz}{a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right)} - x = C.$$

Загальний інтеграл має вигляд

$$\Phi(a_2 x + b_2 y, x) = C.$$

© A.Shatyrko, 2020

## *1.6. Лінійні рівняння першого порядку*

**1.6.1. Загальна теорія**

**Визначення.** Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається лінійним диференціальним рівнянням.

Його загальний вигляд такий:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Якщо $q(x) \equiv 0$, тобто рівняння має вигляд $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$ то воно зветься ***однорідним***.

Однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються і розв’язується таким чином:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln C,$$

$$\ln y = -\int p(x)dx + \ln C.$$

A.Shatyrko, 2020 ©

Нарешті
$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Розв'язок **неоднорідного** рівняння будемо шукати **методом варіації довільних сталих** (**методом невизначених множників Лагранжа**). Він складається в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але $C$ вважається невідомою функцією від $x$,

тобто
$$C = C(x)$$

і
$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо $y$ у рівняння

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Звідси
$$dC(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Проінтегрувавши, одержимо

A.Shatyrko, 2020 ©

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

І загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C].$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0)=y_0$, то розв'язок можна записати у формі Коші:

$$y(x,x_0,y_0)=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}y_0+\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{t}^{x}p(\xi)d\xi}q(t)dt.$$

A.Shatyrko, © 2020

### 1.6.2. Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^m, \qquad m \neq 1$$

називається **рівнянням Бернуллі**.

Розділимо на $y^m$ і одержимо

$$y^{-m}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-m} = q(x).$$

Зробимо заміну:

$$y^{1-m} = z, \qquad (1-m)y^{-m}\frac{dy}{dx} = dz/dx$$

Підставивши в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x).$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв’язок має вигляд

$$z = e^{-(1-m)\int p(x)dx}\left[(1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx + C\right].$$

© A Shatyrko, 2020

### 1.6.3. Рівняння Рікатті

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

називається **рівнянням Рікатті.**

В загальному випадку рівняння Рікатті не інтегрується.
Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Рікатті, що інтегруються в квадратурах.

Розглянемо один з них.
Нехай відомий один частковий розв'язок $y = y_1(x)$.

Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} + p(x)\left[y_1(x) + z\right] + r(x)\left[y_1(x) + z\right]^2 = q(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ - частинний розв'язок, то

$$\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 + r(x){y_1}^2 \equiv q(x).$$

Розкривши скобки і використовуючи вказану тотожність, одержуємо

A. Shatyrko, 2020 ©

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z + 2r(x)y_1(x)z \quad + r(x)z^2 = 0.$$

Перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) + 2r(x)y_1(x)\right]z = -r(x)z^2,$$

це рівняння Бернуллі з $m = 2$.

A.Shatyrko, 2020 ©