Секвенційні числення логік 1-го порядку

$$\vdash\lnot) \quad \frac{\vdash\Phi,\Sigma}{\vdash\lnot\Phi,\Sigma} \qquad \vdash\lnot) \quad \frac{\vdash\Phi,\Sigma}{\vdash\lnot\Phi,\Sigma}$$

$$\vdash\lor) \quad \frac{\vdash\Phi,\Sigma \quad \vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi\lor\Psi,\Sigma} \qquad \vdash\lor) \quad \frac{\vdash\Phi,\vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi\lor\Psi,\Sigma}$$

$$\vdash\&) \quad \frac{\vdash\Phi,\vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi\&\Psi,\Sigma} \qquad \vdash\&) \quad \frac{\vdash\Phi,\Sigma \quad \vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi\&\Psi,\Sigma}$$

$$\vdash\to) \quad \frac{\vdash\Phi,\Sigma \quad \vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi\to\Psi,\Sigma} \qquad \vdash\to) \quad \frac{\vdash\Phi,\vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi\to\Psi,\Sigma}$$

Нові правила для кванторів:

$$\vdash\exists \quad \frac{\vdash A_x[y],\Sigma}{\vdash\exists x A,\Sigma}$$, де y — нова змінна, що не зустрічається в A та Σ.

$$\vdash\exists \quad \frac{\vdash A_x[z_1],\dots,\vdash A_x[z_m],\Sigma,\vdash\exists x A}{\vdash\exists x A,\Sigma}$$, де

$z_1,\dots,z_m$ — всі вільні змінні в A, Σ та згодом їх наступники

$$\vdash\forall \quad \frac{\vdash A_x[z_1],\dots,\vdash A_x[z_m],\Sigma,\vdash\forall x A}{\vdash\forall x A,\Sigma}$$

$$\vdash\forall \quad \frac{\vdash A_x[y],\Sigma}{\vdash\forall x A,\Sigma}$$

$A_a[b]$ — формула, отримана з A заміною всіх входжень a на b

Приклад 1. Чи існує виведення?

$$\dashv (\exists x P(x) \to Q(x)) \ominus (P(x) \to \exists x Q(x))$$

⊕ (⊢→)

$$\vdash \exists x P(x) \to Q(x), \ \dashv P(x) \ominus \exists x Q(x)$$

⊕ (⊢→)

$$\vdash P(x), \dashv \exists x Q(x), \ \vdash \exists x P(x) \ominus Q(x)$$

⊕ (⊢→)

$\dashv \exists x P(x), \vdash P(x), \dashv \exists x Q(x)$ ⊕(⊢∃)	$\vdash Q(x), \vdash P(x), \dashv \exists x Q(x)$ ⊕(⊢∃)
$\dashv P(x), \vdash P(x), \dashv \exists x Q(x),$ $\dashv \exists x P(x)$	$\vdash Q(x), \vdash Q(x), \vdash P(x),$ $\dashv \exists x Q(x)$
X	X

Отримали замкнене секв. дерево ⟹
⟹ виведення існує.

Приклад 2. Чи вірно:

$$P(x) \to \exists x Q(x) \vDash \exists x P(x) \to Q(x)?$$

Приклад 3. Чи вірно:

$$\exists x \forall y\, P(x,y) \vDash \forall y\, \exists x\, P(x,y)?$$