## Стійкість. Задача стабілізації.

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \quad (1)$$

Розв’язок $x = \varphi(t)$ системи (1) називається стійким по Ляпунову, якщо для $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$, що для всякого розв’язку $x(t)$ тієї ж системи, початкове значення якої задовольняє нерівності

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$

при $t > t_0 \quad |x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$.

**Приклад**.
Дослідити стійкість розв’язків з вказаними початковими умовами

$$3(t-1)\dot{x} = x, \ x(2) = 0.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{3(t-1)}, \quad \ln x = \frac{1}{3}\int \frac{d(t-1)}{t-1} = \ln(t-1) + \ln c,$$

$$x(t) = (t-1)^{1/3} c,$$

$$x(2) = (2-1)^{1/3} c = 0, \ \Rightarrow c = 0.$$

Тобто розв’язок $x(t) = 0$.

$$\left|(t-1)^{1/3} c - 0\right| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Розв’язок не стійкий.

**Теорема**. Незбурений розв’язок $x(t) = 0$ системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

асимптотична стійкий, коли всі дійсні частини коренів характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ від’ємні.

**Критерій Гурвіца.** Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$|A - \lambda E| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

мали від’ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб головні мінори матриці Гурвіца

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

були додатні.

**Приклад.**
Дослідити, при яких значеннях параметрів $a$ і $b$ нульовий розв’язок системи

$$y''' + ay'' + by' + 2y = 0$$

є асимптотично стійким.

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 2 = 0.$$

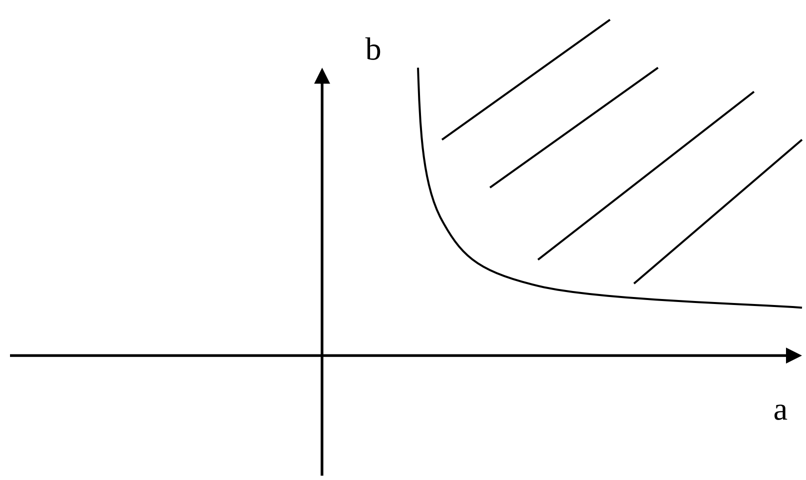
$$a_0 = 1,\ a_1 = a, a_2 = b, a_3 = 2.$$

Тоді матриця Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & b & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Умови теореми Гурвіца:

$$a > 0,\ ab - 2 > 0,\ 2ab - 4 > 0.$$




**Приклад.**
За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв’язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^{y} \end{cases}.$$

Розкладемо в околі нульового розв'язку нелінійні функції в системі та залишимо тільки лінійну частину розкладу:

$$\cos 3x = 1 - 3\sin 3x\big|_{x=0}(x-0) = 1,$$

$$e^{y} = 1 + e^{y}\big|_{y=0}(y-0) = 1 + y,$$

$$\sqrt{4+8x} = 2 + \frac{8}{2\sqrt{4+8x}}\bigg|_{x=0}(x-0) = 2 + 2x,$$

$$e^{x+2y} = 1 + e^{x+2y}\big|_{x=0,y=0}(x-0) + 2e^{x+2y}\big|_{x=0,y=0}(y-0) = 1 + x + 2y.$$

Тоді

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x + 2y - 1 \\ \dot{y} = 2 + 2x - 2 - 2y \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}.$$

Запишемо характеристичне рівняння системи:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0.$$

$$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2.$$

Значить нульовий розв'язок системи не стійкий.

**Приклад.**

Розв'язати задачу аналітичного конструювання регулятора для системи

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$A + BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - 1 & 1 \\ 2 & 2 + c_2 \end{pmatrix}$$

.

Запишемо характеристичне рівняння

$$\det(A+BC-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} 2c_1-1-\lambda & 1 \\ 2 & 2+c_2-\lambda \end{pmatrix}=$$
$$=\lambda^2-(2c_1+c_2+1)\lambda+4c_1+2c_1c_2-c_2-4=0$$
Матриця Гурвіца:
$$G=\begin{pmatrix} -(2c_1+c_2+1) & 1 \\ 0 & 4c_1+2c_1c_2-c_2-4 \end{pmatrix}.$$
Тоді
$$-(2c_1+c_2+1)>0,\ -(2c_1+c_2+1)(4c_1+2c_1c_2-c_2-4)>0.$$
Визначаємо область зміни $c_1, c_2$.

**Синтез моделі з забезпеченням заданих власних значень.**

Розглянемо основну модель з постійними параметрами
$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t). \qquad (1)$$
Власні коливання для основної моделі визначає множина власних значень
$$\varphi_A(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n,$$
$$\det(\lambda E-A)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n=0. \qquad (2)$$
Потрібно в основній моделі змінити власні значення моделі всі або їх частину, тобто
$$\det(\lambda E-A-D)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=$$
$$=(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\ldots(\lambda-\mu_n). \qquad (3)$$
Розглянемо наступну модель
$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+bu(t), \qquad (4)$$
$$u(t)=c^Tx(t). \qquad (5)$$
Тобто $D=bc^T$. Тоді замкнена система наступна
$$\frac{dx(t)}{dt}=(A+bc^T)x(t),$$
$$\varphi_{A+bc^T}(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n. \qquad (6)$$
Зробимо заміну змінних для системи (4)
$$x=Sy, \qquad (7)$$
$$S=(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b),\ \det S\neq 0.$$

Будемо мати

$$S\frac{dy(t)}{dt} = ASy(t) + bu(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = S^{-1}ASy(t) + S^{-1}bu(t).$$

$$S^{-1}S = S^{-1}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = E_n.$$

$$S^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, S^{-1}Ab = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, S^{-1}A^{n-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_A(A) = A^n + p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2} + \ldots + p_nE_n = 0.$$

Останнє рівняння помножимо з права на вектор $b$

$$A^nb + p_1A^{n-1}b + p_2A^{n-2}b + \ldots + p_nb = 0,$$

$$A^nb = -p_nb - p_{n-1}Ab - \ldots - p_2A^{n-2}b - p_1A^{n-1}b.$$

Зліва помножимо на матрицю $S^{-1}$

$$S^{-1}A^nb = -p_nS^{-1}b - p_{n-1}S^{-1}Ab - \ldots - p_2S^{-1}A^{n-2}b - p_1S^{-1}A^{n-1}b,$$

$$S^{-1}A^nb = -\begin{pmatrix} p_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \ldots - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S^{-1}A^nb,$$

або $$A^nb = -S\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$S^{-1}ASy(t) = S^{-1}A(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b)y(t) =$$

$$= (S^{-1}Ab, S^{-1}A^2b, \ldots, S^{-1}A^nb)y(t) =$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -p_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_1 \end{pmatrix} y(t).
$$

Так як $S^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, тоді

$$
\frac{dy(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -p_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(t),
$$

$$
u(t) = d^T y(t), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} d^T y(t) = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} y(t),
$$

$$
\det(\lambda E - S^{-1}AS) = \det(\lambda S^{-1}S - S^{-1}AS) = \det(S^{-1}(\lambda E - A)S) =
$$

$$
= \det S^{-1} \det(\lambda E - A) \det S = \det(\lambda E - A).
$$

$$
\det \begin{pmatrix} d_1 - \lambda & d_2 & \dots & d_{n-1} & d_n - p_n \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & -p_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 =
$$

$$
= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n =
$$

$$
= (-1)^n \left( P_n(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} d_k P_{n-k}(\lambda) \right) = 0,
$$

де

$$
P_{n-k}(\lambda) = \lambda^{n-k} + p_1 \lambda^{n-k-1} + \ldots + p_{n-k}.
$$

Тоді

$$\begin{cases} a_1 = p_1 - d_1 \\ a_2 = p_2 - d_1 p_1 - d_2 \\ \vdots \\ a_n = p_n - \sum_{k=1}^{n} d_k p_{n-k}, \; p_0 = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} d = p - a,$$

де $d^T = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, $p^T = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Pd = p - a,$$

$$d = P^{-1}(p - a),$$

$$u(t) = d^T y(t) = d^T S^{-1} x(t), \quad (u(t) = c^T x(t)),\; x(t) = Sy(t),$$

$$c^T = dS^{-1},$$

$$c = S^{-1T} d,$$

$$c = S^{-1T} P^{-1}(p - a). \quad (8)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A + b(p - a)^T P^{-1T} S^{-1}\right) x(t). \quad (9)$$

Приклад.

Розв’язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

так, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(t) + 2u(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

Мало наперед задані корені $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Тобто

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u(t) = (c_1, c_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

або

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Тоді

$$p_1 = -2, \; p_2 = 1, \quad p = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Бажане характеристичне рівняння:

$$(\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Тобто $a_1 = 3, a_2 = 2$, або $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Матриця

$$S = (b, Ab) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)^T P^{-1^T} S^{-1}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \; (10)$$