ВСТУП

Логіка – наука про закони мислення. Математична логіка має за мету формалізацію та дослідження законів мислення математичними методами. Поняття і методи математичної логіки дають обгрунтування правильності тих чи інших способів отримання істинного знання. Апарат математичної логіки засвідчує високу ефективність при моделюванні різноманітних предметних областей і програмних систем.

Зародження логіки відносять до VI ст. до н. е. (Фалес, Парменід, Піфагор). Загальні принципи логічних міркувань розвинув Платон. Основоположником логіки як цілісної науки був Арістотель. Він розробив аксіоматичний метод, створив першу систему логіки – силогістику, заклав основи модальної логіки. Визначним кроком у розвитку логіки була ідея створення універсального логічного числення, яку запропонував Г. Лейбніц. Хоча ця ідея значно випередила свій час, вона фактично привела до виникнення математичної логіки. Першу завершену систему власне математичної логіки на базі строгої логіко-математичної мови (алгебра логіки) запропонував Дж. Буль. Г. Фреге ввів поняття предиката і кванторів, розвинув теорію смислу логіко-математичних мов. На цій основі Дж. Пеано виклав цілі розділи математики мовою математичної логіки і аксіоматизував арифметику.

Програму обгрунтування математики на базі математичної логіки висунув Д.Гільберт. Програма Гільберта передбачала побудову формально-аксіоматичних моделей основних розділів математики та подальше доведення їх несуперечливості надійними, фінітними засобами. Таким чином, математичні теорії стали предметом вивчення окремої математичної науки, яку Д.Гільберт назвав метаматематикою, або теорією доведень. Величезний внесок в створення і розвиток теорії доведень зробили Г. Генцен, В.Аккерман, П.Бернайс та ін. Саме з розробки Д.Гільбертом та його учнями теорії доведень на базі розвинутої в роботах Г.Фреге та Б.Рассела логічної мови починається становлення математичної логіки як самостійної математичної дисципліни.

Програма Гільберта не може бути реалізована сповна. Принципову обмеженість формально-аксіоматичного методу засвідчують знамениті теореми К.Гьоделя про неповноту. Згідно цих теорем, несуперечливість кожної досить багатої формальної теорії не може бути доведена засобами самої теорії. Проте існують досить переконливі доведення несуперечливості багатьох теорій, зокрема, формальної арифметики, хоча такі доведення проводяться засобами, що не можуть бути формалізовані в рамках самих теорій.

З математичною логікою тісно пов'язана теорія алгоритмів, яка визначає й досліджує формальні моделі алгоритмів та алгоритмічно обчислюваних функцій.

Поняття алгоритму належить до первісних понять математики, таких, як поняття множини чи натурального числа, воно є концептуальною основою процесів обробки інформації.

Виникнення й бурхливий розвиток швидкодіючих обчислювальних машин відкрили нові сфери застосування теорії алгоритмів, яка стала теоретичною базою програмування та інформатики.

Алгоритмічні обчислювальні процеси відомі людству з глибокої давнини. Такими є, наприклад, арифметичні дії над цілими числами, знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел тощо. Проте в явному вигляді поняття алгоритму сформувалося лише на початку XX ст.

Під *алгоритмом* розуміють скінченну сукупність точно визначених правил для чисто механічного розв'язку задач певного класу.

Сукупність правил алгоритму задає обчислювальний процес, названий *алгоритмічним*, що починається з початкового даного (вибраного з деякої фіксованої для алгоритму множини початкових даних) і спрямовується на отримання визначеного ним результату.

Наведене формулювання можна розглядати тільки як пояснення, а не як формальне визначення. Для подальшого уточнення поняття алгоритму зазвичай виділяють такі його характерні властивості, як фінітність, масовість, дискретність, елементарність, результативність.

Фінітність – алгоритм є скінченним об'єктом, що є необхідною умовою його механічної реалізовності.

Масовість – початкові дані для алгоритму можна вибирати з певної *множини* даних; це означає, що алгоритм призначено не для однієї конкретної задачі, а для класу однотипних задач.

Дискретність – розчленованість процесу виконання алгоритму на окремі кроки.

Елементарність – кожен крок алгоритму має бути простим, елементарним, можливість виконання його людиною або машиною не повинна викликати сумнівів.

Результативність – алгоритм має засоби, які дозволяють відбирати з даних, отриманих на певному кроці виконання, результативні, після чого алгоритм зупиниться.

До основних властивостей алгоритму часто відносять *детермінованість* – однозначність процесу виконання алгоритму. Це означає, що при заданих початкових даних кожне дане, отримане на певному (не початковому) кроці, однозначно визначається даними, отриманими на попередніх кроках.

Для опису алгоритму треба вказати множину його початкових, або вхідних даних, та множину даних, до яких належать результати, або вихідних даних. За допомогою алгоритму кожний конкретний результат отримується за скінченну кількість кроків із скінченної множини даних. Кажуть, що до таких даних алгоритм застосовний. Проте в деяких ситуаціях процес виконання алгоритму для певних вхідних даних продовжується необмежено. Кажуть, що до таких даних алгоритм незастосовний. Таким чином, кожний алгоритм із множинами вхідних даних X та вихідних даних Y визначає *часткову* функцію $f : X \rightarrow Y$.

Функція *алгоритмічно обчислювана* (АОФ), якщо існує алгоритм, який її обчислює.

Множина L *алгоритмічно перелічна*, якщо L є множиною значень деякої АОФ, тобто існує алгоритм, який перелічує елементи множини L і тільки їх.

Множина L *алгоритмічно розв'язна* відносно множини U, якщо існує алгоритм, який дозволяє для кожного $x \in U$ визначати, $x \in L$ чи $x \notin L$.

До центральних понять математичної логіки належить поняття числення. Воно відбиває і узагальнює інтуїтивну уяву про індуктивне породження об’єктів, яке дуже поширене в математиці.

Під *численням* розуміють скінченну множину точно визначених *породжувальних правил* (правил виведення), які дозволяють із певних заданих об’єктів отримувати інші об’єкти.

Об’єкти, до яких застосовуються правила виведення, називають *засновками*.

Отриманий із засновків об’єкт називають *висновком*.

Множину породжених численням об’єктів задають індуктивно. На першому кроці процесу породження (виведення) початкові об’єкти задаються породжувальними правилами із порожньою множиною засновків. Об’єкт вважається породженим на певному кроці, якщо він отримується за допомогою певного породжувального правила із об’єктів, породжених на попередніх кроках.

Якщо на першому кроці процесу породження дозволити брати початкові об’єкти із певної множини A, дістанемо числення з входом. Таке числення $\mathfrak{I}$ перетворює множину A в множину об’єктів B, породжених із об’єктів множини A за допомогою числення $\mathfrak{I}$.

Поняття числення і алгоритму тісно пов'язані. Кожний алгоритм можна трактувати як числення із входом, яке має такі породжувальні правила, що виконання кожного з них відповідає виконанню одного кроку алгоритму. Отже, поняття алгоритму можна звести до поняття числення в смислі зведення алгоритмічного процесу до процесу породження. З іншого боку, поняття числення можна звести до поняття алгоритму в смислі зведення розгалуженого процесу породження до послідовного процесу переліку так, щоб алгоритм переліку відтворив усі породжені численням об’єкти і тільки їх. Такий алгоритм послідовно додає до множини вже породжених об’єктів (спочатку порожньої) скінченну множину нових, отриманих однократним застосуванням породжувальних правил до вже породжених об’єктів.

Теорія алгоритмів як окремий розділ математики, що вивчає загальні властивості алгоритмів, виникла в межах математичної логіки в 30-х рр. ХХ ст. Необхідність уточнення поняття алгоритму стала неминучою після усвідомлення неможливості існування алгоритмів розв’язку низки масових проблем, в першу чергу пов'язаних з арифметикою та математичною логікою (проблема істинності для арифметичних формул, проблема істинності для формул числення предикатів першого порядку, десята проблема Гільберта про розв'язність діофантових рівнянь). Виникла гіпотеза, що для деяких масових проблем алгоритми їх розв'язку взагалі не існують. Проте для доведення неіснування алгоритму треба мати його точне математичне визначення, тому після сформування поняття алгоритму як нової та окремої сутності першочерговою стала проблема знаходження адекватних формальних моделей алгоритму та дослідження їх властивостей. Такі моделі були запропоновані як для первісного поняття алгоритму (машини Тьюрінга, регістрові машини, нормальні алгоритми Маркова та ін.), так і для похідного поняття АОФ (λ-означувані функції, частково рекурсивні функції та ін.). Доведено, що кожна з цих моделей задає (з точністю до кодування) один і той же клас функцій. Тому є всі підстави вважати, що кожна з таких моделей дає строге математичне уточнення інтуїтивного поняття АОФ. Таке твердження стосовно АОФ та строго визначеного класу частково рекурсивних функцій сформулював у 1936 р. А.Чорч (*теза Чорча*).

Поняття *програми* є, у певному розумінні, синонімом поняття алгоритму. В основі уточнення поняття програмування як процесу конструювання програм лежить запропоноване В.Н. Редьком поняття програмної логіки (алгебри). Функції, задані за допомогою програмної логіки, називають програмованими.

Потужним імпульсом для розвитку математичної логіки та теорії алгоритмів стала поява комп'ютерів. Виявилося, що в рамках математичної логіки вже є готовий апарат для проектування обчислювальної техніки. Розвиток інформаційних технологій і програмування веде до розширення сфери застосування математичної логіки й теорії алгоритмів. Апарат математичної логіки належить до основних засобів моделювання різноманітних предметних областей, він є основою, ядром сучасних інформаційних систем. Методи й поняття теорії алгоритмів успішно використовуються в багатьох галузях науки, зокрема, в основах математики, теорій інформації та керування, обчислювальній математиці, конструктивному аналізі, теорії ймовірності, економіці. Теорія алгоритмів є надійним теоретичним фундаментом програмування та інформатики.

При написанні даного посібника в першу чергу використовувались підручники [6, 13] та посібники [21, 22]. Посібник узгоджено з програмою нормативної дисципліни "Алгоритми, логіка та теорія складності" для студентів спеціальності "Інформаційні системи", він може бути використаний студентами спеціальностей "Прикладна математика" та "Системний аналіз".

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Вважаємо відомими базові математичні поняття множини, відношення, відображення, декартового добутку та ін. Будемо дотримуватись позначень підручника [13].

Для полегшення читання нагадаємо необхідні поняття та позначення.

Множини натуральних чисел, цілих чисел, раціональних чисел та дійсних чисел позначаємо відповідно N, Z, Q та R.

Множину всіх підмножин довільної множини A позначаємо 2^A .

Словом в алфавіті T назвемо довільну скінченну послідовність символів із T.

Довжиною слова назвемо кількість його символів. Довжину слова α зазвичай позначаємо $|\alpha|$.

Слово, яке не містить жодного символу, назвемо *порожнім* словом. Таке слово позначаємо ε.

Для порожнього слова його довжина $|\varepsilon| = 0$.

Якщо a – символ, то позначаємо $a^0 = \varepsilon$, $a^{n+1} = a{\cdot}a^n$ для $n{\geq}0$.

Множину всіх слів у алфавіті T позначаємо T^*.

Мовою (вербальною множиною) в алфавіті T назвемо довільну підмножину $L \subseteq T^*$.

X-Y-алгоритм назвемо *вербальним*, якщо X та Y – вербальні множини.

Функцію (відображення) $f : X{\to}Y$ назвемо *вербальною*, якщо X та Y – вербальні множини.

Нехай A та R – довільні множини, f – довільна однозначна часткова функція вигляду $f : A{\to}R$.

Якщо значення $f(a)$ визначене, то пишемо $f(a){\downarrow}$. Якщо $f(a)$ невизначене, то пишемо $f(a){\uparrow}$.

Якщо $f(a)$ визначене та рівне b, то пишемо $f(a){\downarrow}b$.

Для довільних функцій f та g пишемо $f(a) \cong g(b)$, якщо з $f(a){\downarrow}$ та $g(b){\downarrow}$ випливає $f(a) = g(b)$.

Функція $f : A{\to}R$ *тотальна,* якщо $f(a){\downarrow}$ для всіх $a{\in}A$.

Множину $D_f = \{a{\in}A \mid f(a){\downarrow}\}$ назвемо *множиною визначення* функції f.

Множину $E_f = \{b{\in}R \mid f(a){\downarrow}b$ для деякого $a{\in}D_f \}$ назвемо *множиною значень* функції f.

Пару (D_f, E_f) назвемо *типом* функції f.

Графіком функції f назвемо множину $\{(a, f(a)) \mid a{\in}D_f\}$.

Нехай $\boldsymbol{U}$ – деяка множина, яку трактуємо як *універсум*.

Характеристичною функцією довільної множини $A \subseteq \boldsymbol{U}$ назвемо функцію $\chi_A : \boldsymbol{U}{\to}\{0,1\}$ таку:

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } a \in A, \\ 0, \text{ якщо } a \notin A \end{cases}$$

Частковою характеристичною функцією довільної $A \subseteq \boldsymbol{U}$ назвемо функцію $\chi_A^ч : \boldsymbol{U}{\to}\{1\}$ таку:

$$\chi_A^ч(a) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } a \in A, \\ \text{невизначене, якщо } a \notin A \end{cases}$$

Основним поняттям логіки з семантичного погляду є поняття предиката. З цим поняттям тісно пов'язане поняття висловлення.

Під *висловленням* розуміють речення, яке можна розглядати з погляду його істинності чи хибності. Під *суб'єктом* (*суб'єктами*) розуміють те, про кого або про що говориться у висловленні. *Предикат* виражає *властивості* суб'єкту (суб'єктів) та *відношення* між суб'єктами.

Висловлення може приймати одне з двох значень – істина або фальш, тому з семантичного погляду предикат можна уточнити як функцію, що конкретним іменованим суб'єктам ставить у відповідність значення T або F. Предикат стає висловленням, якщо вказати значення імен його суб'єктів. Наприклад, предикат "x є простим числом" стає висловленням "5 є простим числом", яке істинне, якщо значенням імені x є число 5. Той же предикат стає висловленням "8 є простим числом", яке хибне, якщо значенням імені x є число 8. Називаючи *даним* множину пар імен суб'єктів та їх значень, дістаємо, що *висловлення є значенням предикату на конкретному даному.* Предикат стає висловленням при фіксуванні конкретних значень імен даного, до якого предикат застосовується. Наприклад, застосувавши предикат "якщо $x>y$ та $y>z$, то $x>z$" до даного $[x{\mapsto}17, y{\mapsto}11, z{\mapsto}3]$, дістанемо висловлення "якщо 17>11 та 11>3, то 17>3".

Поняття предиката і висловлення як математичні поняття можна розглядати тоді, коли виділені спеціальні істиннісні значення T та F, що інтерпретуються як "істина" та "фальш".

Під *предикатом* на множині A розуміють функцію вигляду $P : A{\to}Bool$, де $Bool = \{T, F\}$.

Областю істинності та *областю хибності* предиката P на множині A назвемо множини

$$\boldsymbol{T_P} = \{d{\in}A \mid P(d) = T\} \text{ та } \boldsymbol{F_P} = \{d{\in}A \mid P(d) = F\}.$$

Якщо P тотальний, то $\boldsymbol{T_P}{\cup}\boldsymbol{F_P} = A$.

Характеристичною функцією тотального предиката $P : A\to\{T, F\}$ назвемо функцію $\chi_P: A\to\{0, 1\}$ таку: $\chi_P(a) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } P(a) = T, \\ 0, \text{ якщо } P(a) = F. \end{cases}$

Частковою характеристичною функцією тотального предиката $P : A\to\{T, F\}$ назвемо функцію $\chi^ч_P$ $: A\to\{1\}$ таку: $\chi^ч_P(a) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } P(a) = T, \\ \text{невизначене, якщо } P(a) = F. \end{cases}$

Предикат P на множині A (частково) *істинний,* або *неспростоавний*, якщо $\boldsymbol{T_P}\cap\boldsymbol{F_P} = \varnothing$.

Це означає, що для довільних $a\in A$ із умови $P(a)\downarrow$ випливає $P(a) = T$.

Предикат P на множині A *виконуваний* якщо існує $a\in A$ таке, що $P(a)\downarrow = T$, тобто $\boldsymbol{T_P}\neq\varnothing$.

Нехай Fn – деяка множина функцій. Довільну функцію вигляду $Fn^n\to Fn$ назвемо *n-арною композицією*, або *n-арною операцією* на множині Fn.

Поняття логіки можна уточнити через поняття логічної системи.

Під *логічною системою* розуміємо об'єкт вигляду $(\boldsymbol{M}, \mathfrak{I}, \boldsymbol{I}, \models, \vdash)$.

Тут $\boldsymbol{M}$ – семантичні моделі логіки (світи розгляду), $\mathfrak{I}$ – дескрипції (засоби опису світів), $\boldsymbol{I}$ – відношення денотації (інтерпретації) дескрипцій на моделях, $\models$ – відношення семантичної *істинності* на множині дескрипцій; $\vdash$ – відношення *виведення* (синтаксичної істинності) на множині дескрипцій.

Семантичні моделі логіки задаються [13] предикатними композиційними системами, які визначають засоби побудови предикатів над деякою множиною даних. Дескрипції, що є описами предикатів, задаються як формули мови логіки. Відношення $\models$ уточнюється за допомогою поняття істинного предикату. Для задання відношення виведення $\vdash$ найчастіше використовують формально-аксіоматичні числення гільбертівського типу (формальні системи) та ґенценівського типу (секвенційні числення).

Фундаментальними властивостями логіки, що задаються за допомогою відношень $\models$ та $\vdash$, є *несуперечливість* (*коректність*) $\vdash\subseteq\models$ та *повнота* $\models\subseteq\vdash$.

Під *формальною системою* (ФС) розуміють трійку (L, A, P), де L – мова, A – множина *аксіом*, P – множина *правил виведення.*

Мова задається алфавітом та правилами побудови слів мови, які називаються *формулами*.

Кожна аксіома є формулою.

Правила виведення (ПВ) діють на множині формул.

Записуватимемо ПВ у вигляді $P_1, P_2,..., P_n \vdash P$, де $P_1, P_2 ,..., P_n$ – засновки, P – висновок.

Формула, отримана із аксіом за допомогою ПВ, називається *теоремою*.

Виведення – це скінченна послідовність формул $\Phi_1, ..., \Phi_m$, де кожна із цих формул або аксіома, або отримана із попередніх формул цієї послідовності за допомогою деякого правила виведення.

Неважко переконатись, що Φ є теоремою $\Leftrightarrow$ Φ має виведення.

В цьому посібнику будемо розглядати логіки традиційних рівнів – пропозиційний та першопорядкові.

На *пропозиційному рівні* дані предикати мають вигляд $A\to\{T, F\}$, де A – сукупність абстрактних даних. На цьому рівні композиції називають логічними зв'язками, вони фактично працюють лише з істиннісними значеннями, що й пояснює традиційне трактування логічних зв'язок як булевих функцій. Базовими композиціями пропозиційного рівня є диз'юнкція $\vee$ та заперечення $\neg$.

Дамо визначення 1-арної композиції $\neg$ та 2-арної композиції $\vee$. Предикати $\neg(P)$ та $\vee(P, Q)$ традиційно позначають $\neg P$ та $P\vee Q$. Зазначені предикати задамо так.

$(\neg P)(d) = T \Leftrightarrow P(d) = F$;
$(\neg P)(d) = F \Leftrightarrow P(d) = T$;
$(P\vee Q)(d) = T \Leftrightarrow P(d) = T$ або $Q(d) = T$;
$(P\vee Q)(d) = F \Leftrightarrow P(d) = F$ та $Q(d) = F$.

На *першопорядкових рівнях* дані мають вигляд *іменних множин*. Такі дані будуються із множини предметних імен та множини предметних значень. Іменна множина – це множина пар, 1-ю компонентою яких є ім’я (змінна), а 2-ю компонентою – значення цього імені. При цьому одне ім’я не може іменувати два різних значення.

Іменні множини (під різними назвами) дуже поширені в математиці та програмуванні. Зокрема, до іменних множин можна віднести кортежі (пари, n-ки), послідовності, індексовані множини тощо.

Кожну множину пар можна трактувати як функцію, звідки маємо наступне визначення.

V-іменна множина (V-ІМ) над A – це [2] довільна однозначна функція $\delta : V\to A$.

A та V трактуємо як множину предметних імен та множину предметних значень.

Множину всіх V-ІМ над A позначимо ${}^{V}\!A$.

Множину всіх скінченних (фінітних) V-ІМ над A позначаємо ${}^{V}\!A_F$.

V-ІМ зазвичай подають [13] у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$. Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, причому $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Функцію $im : {}^{V}\!A \to 2^V$ вводимо так: $im(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$;

Для V-ІМ вводимо теоретико-множинні операції $\cap$ та \.

Відома [2] операція ∇ *накладки* V-ІМ δ_2 на V-ІМ δ_1: визначається так:

$\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup \{v \mapsto a \in \delta_1 \mid v \notin im(\delta_2)))$.

Функцію вигляду $f : {}^{V}\!A \to R$ назвемо *V-квазіарною* функцією.

Функцію вигляду $f : {}^{V}\!A_F \to R$ назвемо *V-фінарною* функцією.

Функцію вигляду $f : A^X \to R$ назвемо *X-арною* функцією.

Якщо $R = A$, то відповідно отримуємо V-квазіарну, V-фінарну, X-арну функцію на A.

X-арні функції називають також функціями від змінних X.

Фінарні функції називають скінченно-арними,

Функцію вигляду $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$ назвемо V-квазіарним предикатом на A.

Множини V-квазіарних функцій на A та V-квазіарних предикатів на A позначаємо як Fn^A та Pr^A –

Традиційні n-арні функції, тобто функції вигляду $f : A^n \to R$, можуть трактуватися як $\{1,...,n\}$-арні.

Фундаментальними властивостями функцій та предикатів класичної логіки і програмування є їх монотонність за розширенням даних. Для функцій із значеннями в множині простих даних, зокрема, для предикатів, це означає збереження прийнятого значення при розширенні даних. Така властивість називається еквітонністю, саме вона дає змогу вводити фіктивні (неістотні) предметні імена (змінні), від яких не залежить значення функції (предиката).

Функція $f : {}^{V}\!A \to R$ *еквітонна,* якщо для довільних d, $d' \in {}^{V}\!A$ із $f(d)\downarrow$ та $d' \supseteq d$ випливає $f(d')\downarrow = f(d)$.

Кожну еквітонну X-арну функцію f можна трактувати як Y-арну для довільного $Y \supseteq X$. При цьому всі імена із $Y \backslash X$ неістотні для функції f.

Предметне ім'я x *неістотне* для еквітонної функції f, якщо для довільних $d \in {}^{V}\!A$ та $a \in A$ маємо: $f(d)\downarrow$ та $f(d \nabla x \mapsto a)\downarrow \Rightarrow f(d) = f(d \nabla x \mapsto a)$.

Логічними композиціями логік 1-го порядку є логічні зв'язки та квантори. Використовуються також (для класичної логіки в неявному вигляді) композиції суперпозиції та спеціальні 0-арні композиції – функції деномінації (розіменування).

Дамо визначення 1-арних параметризованих за іменами композицій квантифікації $\exists \boldsymbol{x}$ та $\forall \boldsymbol{x}$.

Предикати $\exists \boldsymbol{x}(P)$ та $\forall \boldsymbol{x}(P)$ позначаємо $\exists \boldsymbol{x} P$ та $\forall \boldsymbol{x} P$. Зазначені предикати задамо так:

$(\exists \boldsymbol{x} P)(d) = T \Leftrightarrow P(d \nabla x \mapsto b) = T$ для деякого $b \in A$;

$(\exists \boldsymbol{x} P)(d) = F \Leftrightarrow P(d \nabla x \mapsto a) = F$ для всіх $a \in A$;

$(\forall \boldsymbol{x} P)(d) = T \Leftrightarrow P(d \nabla x \mapsto a) = T$ для всіх $a \in A$;

$(\forall \boldsymbol{x} P)(d) = F \Leftrightarrow P(d \nabla x \mapsto b) = F$ для деякого $b \in A$.

Композиція суперпозиції $\boldsymbol{S}^{v_1,...v_n}$ V-квазіарним функціям f, g_1, ..., g_n зіставляє V-квазіарну функцію □$\boldsymbol{S}^{v_1,...v_n}(f, g_1,...,g_n)$,□ значення якої для кожного $d \in {}^{V}\!A$ обчислюється так:

$\boldsymbol{S}^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)(d) = f(d \nabla [v_1 \mapsto g_1(d),...,v_n \mapsto g_n(d)])$.

Для логіки можна розглядати дві різновидності суперпозицій: функцій у функції та функцій у предикати.

Функції деномінації (розіменування) $'\boldsymbol{v}$, де $v \in V$, задамо так: для кожного $d \in {}^{V}\!A$ $'\boldsymbol{v}(d) = v(d)$.

2. ФОРМАЛЬНІ МОДЕЛІ АЛГОРИТМІВ ТА АЛГОРИТМІЧНО ОБЧИСЛЮВАНИХ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі розглянемо найпоширеніші формальні моделі алгоритмічних машин та алгоритмічно обчислюваних функцій.

2.1. Машини з натуральнозначними регістрами

Машина з натуральнозначними регістрами (МНР) є різновидністю регістрових машин, їх можна трактувати як ідеалізовану модель комп'ютера. МНР складається із послідовності регістрів (необмеженної, взагалі кажучи), вмістом яких є натуральні числа.

Регістри позначаємо (нумеруємо) натуральними числами, починаючи з 0: $R_0, R_1, ..., R_n, ...$

Вміст регістру R_n позначаємо $'R_n$.

Послідовність $('R_0, 'R_1,..., 'R_n, ...)$ вмістів регістрів МНР називатимемо *конфігурацією* МНР.

МНР може змінити вміст регістрів згідно виконуваної нею команди. Скінченний список команд утворює *програму* МНР. Команди програми послідовно нумеруємо натуральними числами, починаючи з 1. Номер команди в програмі називатимемо *адресою* команди.

МНР-програму з командами $I_1, I_2,..., I_k$ позначимо $I_1I_2...I_k$.

Довжину (кількість команд) МНР-програми P позначимо $|P|$.

Команди МНР бувають 4-х типів.

Тип 1. Обнулення n-го регістру $Z(n)$: $'R_n := 0$.

Тип 2. Збільшення вмісту n-го регістру на 1 $S(n)$: $'R_n := 'R_n+1$.

Тип 3. Копіювання вмісту регістру $T(m, n)$: $'R_n := 'R_m$ (при цьому $'R_m$ не змінюється).

Тип 4. Умовний перехід $J(m, n, q)$: *якщо* $'R_n = 'R_m$, *то перейти до виконання* q*-ї команди, інакше виконувати наступну за списком команду програми*.

Число q в команді $J(m, n, q)$ назвемо *адресою переходу*.

Команди типів 1–3 називають *арифметичними*. Після виконання арифметичної команди МНР повинна виконувати наступну за списком команду програми.

Виконання однієї команди МНР назвемо *кроком* МНР.

Саме МНР-програми є формальними моделями алгоритмів, поняття МНР використовується для опису функціонування МНР-програм.

Виконання програми МНР починає, перебуваючи в деякій *початковій* конфігурації, з виконання першої за списком команди. Наступна для виконання команда програми визначається так, як описано вище. Виконання програми завершується (програма зупиняється), якщо наступна для виконання команда відсутня (тобто номер наступної команди перевищує номер останньої команди програми). Конфігурація МНР в момент завершення виконання програми називається *фінальною*, вона визначає результат роботи МНР-програми над даною початковою конфігурацією.

Якщо МНР-програма P ніколи не зупиняється при роботі над початковою конфігурацією $(a_0, a_1, ...)$, це позначаємо $P(a_0, a_1, ...)\uparrow$, якщо коли-небудь зупиниться, це позначаємо $P(a_0, a_1,...)\downarrow$.

Якщо МНР-програма P при роботі над початковою конфігурацією $(a_0, a_1, ...)$ зупиняється із фінальною конфігурацією $(b_0, b_1, ...)$, це позначаємо $P(a_0, a_1, ...)\downarrow(b_0, b_1, ...)$.

Замість $P(a_1, a_2 , ...)\downarrow(b, ...)$ надалі будемо писати $P(a_1, a_2, ...)\downarrow b$.

МНР-програми – скінченні об’єкти, кожна МНР-програма в процесі виконання використовує тільки скінченну множину регістрів, усі вони явно вказані у МНР-програмі. Тому будемо розглядати тільки скінченні конфігурації – вигляду $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$, де $'R_m = 0$ для всіх $m > n$. Такі конфігурації позначаємо $(a_0, a_1, ..., a_n)$. Якщо МНР-програма P починає роботу над скінченною початковою конфігурацією, то в процесі виконання P МНР перебуватиме тільки в скінченних конфігураціях.

МНР-програма P стандартна, якщо в P для кожної команди вигляду $J(m, n, q)$ виконується умова $q \le |P| + 1$.

Конкатенацією стандартних МНР-програм $P = I_1I_2...I_k$ та $Q = I_1I_2...I_m$ назвемо стандартну МНР-програму $I_1...I_kI_{k+1}...I_{k+m}$, де команди $I_{k+1},..., I_{k+m}$ по суті є командами програми Q, у яких кожна команда вигляду $J(m, n, q)$ замінена командою $J(m, n, q + k)$.

МНР-програми P та Q *еквівалентні*, якщо при роботі над однаковими початковими конфігураціями вони або обидві зупиняються з однаковими фінальними конфігураціями, або обидві не зупиняються.

МНР-програма P *обчислює* часткову n-арну функцію $f: N^n \to N$, якщо

$$f(a_1, a_2,..., a_n) = b \Leftrightarrow P(a_1, a_2,..., a_n)\downarrow(b, ...).$$

Функція $f : N^n \to N$ *МНР-обчислювана*, якщо існує МНР-програма, яка обчислює цю функцію.

Кожна МНР-програма обчислює нескінченну кількість функцій, заданих на N, але, зафіксовуючи наперед *арність* функцій (тобто формат вхідних даних – кількість компонент початкових конфігурацій), отримуємо, що кожна МНР-програма обчислює *єдину* функцію заданої арності.

Кожну функцію, задану на N, можна трактувати як предикат, інтерпретуючи 1 та 0 як істиннісні значення T та F. Фактично в цьому випадку як предикат виступає його характеристична функція.

Розглянемо приклади МНР-програм для функцій та предикатів.

***Приклад* 1.** МНР-програма для всюди невизначеної функції:

1) $J(0, 0, 1)$

***Приклад* 2.** МНР-програма для функції $f(x) = \mathrm{sg}(x)$:

1) $J(0, 1, 4)$
2) $Z(0)$
3) $S(0)$

***Приклад* 3.** МНР-програма для предикату "$x = y$":

1) $J(0, 1, 3)$
2) $J(0, 0, 4)$
3) $S(2)$
4) $T(2, 0)$

***Приклад* 4.** МНР-програма для функції $f(x, y) = x+y$:

1) $J(1, 2, 5)$
2) $S(0)$
3) $S(2)$
4) $J(0, 0, 1)$

***Приклад* 5.** МНР-програма для функції $f(x) = 3x$:

1) $T(0, 1)$
2) $J(1, 2, 6)$
3) $S(0)$
4) $S(0)$
5) $S(2)$
6) $J(0, 0, 2)$

***Приклад* 6.** МНР-програма для функції $f(x, y) = x-y$:

1) $J(0, 1, 5)$
2) $S(1)$
3) $S(2)$
4) $J(0, 0, 1)$
5) $T(2, 0)$

***Приклад* 7.** МНР-програма для функції $f(x, y) = x \dot{-} y$

1) $J(0, 1, 7)$
2) $J(0, 2, 6)$
3) $S(1)$
4) $S(2)$
5) $J(0, 0, 1)$
6) $Z(2)$
7) $T(2, 0)$

***Приклад* 8.** МНР-програма для функції $f(x, y) = \max(x, y)$:

1) $J(0, 2, 5)$
2) $J(1, 2, 6)$
3) $S(2)$
4) $J(0, 0, 1)$
5) $T(1, 0)$

***Приклад* 9.** МНР-програма для функції $f(x) = x/2$:

1) $J(0, 2, 6)$
2) $S(2)$

3) $S(2)$
4) $S(1)$
5) $J(0, 0, 1)$
6) $T(1, 0)$

Приклад **10.** МНР-програма для функції $f(x) = [x/2]$:
1) $J(0, 2, 7)$
2) $S(2)$
3) $J(0, 2, 7)$
4) $S(2)$
5) $S(1)$
6) $J(0, 0, 1)$
7) $T(1, 0)$

Приклад **11.** МНР-програма для функції $f(x, y, z) = x + \min(y, z)$:
1) $J(0, 3, 6)$
2) $J(2, 3, 6)$
3) $S(3)$
4) $S(0)$
5) $J(0, 0, 1)$

Приклад **12.** МНР-програма для функції $f(x, y) = x \cdot y$,
1) $J(3, 1, 9)$
2) $J(0, 2, 6)$
3) $S(2)$
4) $S(4)$
5) $J(0, 0, 2)$
6) $Z(2)$
7) $S(3)$
8) $J(0, 0, 1)$
9) $T(4, 0)$

Питання для самоконтролю

1. Що таке МНР?
2. Що таке конфігурація МНР?
4. Опишіть команди МНР.
3. Що таке програма МНР?
5. Як виконується програма МНР?
6. Дайте визначення еквівалентних МНР-програм.
7. Дайте визначення стандартної МНР-програми.
8. Як визначається конкатенація стандартних МНР-програм?
9. Як визначається обчислюваність функції $f: N^n \to N$ за допомогою МНР-програми P?
10. Що таке МНР-обчислювана функція?

Вправи

1. Доведіть, що для кожної МНР-програми можна збудувати еквівалентну їй МНР-програму без команд $T(m, n)$.

2. Вкажіть МНР-програми для функцій:

1) $f(x, y) = 2x+y+1$;
2) $f(x, y) = x+3y+2$;
3) $f(x) = (x+1)/3$;
4) $f(x) = [x/3]$;
5) $f(x, y) = 2x - y$;
6) $f(x, y) = 2y - x$;
7) $f(x, y, z) = (x - y) + z$;
8) $f(x, y, z) = x - (y + z)$;
9) $f(x) = \mathrm{nsg}(x)$;
10) $f(x, y) = \mathrm{sg}(x+y)$;
11) $f(x, y) = \mathrm{sg}(x \cdot y)$;
12) $f(x, y) = \min(x, y)$;
13) $f(x, y) = \max(2x, y)$;
14) $f(x, y, z) = x - \min(y, z)$;
15) $f(x, y, z) = \max(x, y - z)$;
16) $f(x, y) = \max(x, 2y) + 3x$;
17) $f(x) = x!$;
18) $f(x, y) = x^y$.

3. Вкажіть МНР-програми для предикатів:
1) "x – непарне число"; 2) "$x = 3$";
3) "$x \neq y$"; 4) "$x < y$";
5) 2) "$x \geq y$"; 6) "$x > y$".

2.2. Машини Тьюрінга

Машина Тьюрінга (МТ) – це впорядкована 5-ка (Q, T, δ, q_0, q^*), де:
– Q – скінченна множина внутрішніх станів;
– T – скінченний алфавіт символів стрічки; тут T містить спеціальний символ порожньої клітки λ;
– $\delta: Q{\times}T{\to}Q \times T \times \{R, L, \varepsilon\}$ – однозначна функція переходів;
– $q_0{\in}Q$ – початковий стан;
– $q^*{\in}Q$ – фінальний стан.

МТ *детермінована*, якщо функція δ однозначна, інакше МТ *недетермінована*.

Функцію переходів задаватимемо скінченною множиною команд одного з 3-х видів: $qa{\to}pbR$, $qa{\to}pbL$ та $qa{\to}pb$, де $p, q{\in}Q$, $a, b{\in}T$, ${\to}{\notin}Q{\cup}T$. При цьому, зазвичай, не для всіх пар $(q, a){\in}Q \times T$ існує команда з лівою частиною qa. Це означає, що функція δ не є тотальною. Проте зручніше вважати функцію δ тотальною, тому для всіх пар $(q, a){\notin}D_\delta$ неявно (не додаючи відповідні команди вигляду $qa{\to}qa$) вводимо довизначення $\delta(q, a) = (q, a, \varepsilon)$.

Неформально МТ складається з скінченної пам'яті, розділеної на клітки нескінченної з обох боків стрічки та голівки читання-запису. В кожній клітці стрічки міститься єдиний символ із T, причому в кожен даний момент стрічка містить скінченну кількість символів, відмінних від символа λ. Голівка читання-запису в кожен даний момент оглядає єдину клітку стрічки. Якщо МТ знаходиться в стані q та голівка читає символ a, то при виконанні команди $qa{\to}pbR$ (команди $qa{\to}pbL$, $qa{\to}pb$) МТ переходить в стан p, замість символу a записує на стрічці символ b та зміщує голівку на 1 клітку направо (відповідно на 1 клітку наліво, залишає голівку на місці).

Конфігурація, або *повний стан МТ* – це слово вигляду xqy, де $x, y{\in}T^*$, $q{\in}Q$. Неформально це означає, що на стрічці записане слово xy, тобто зліва і справа від xy можуть стояти тільки символи λ, МТ знаходиться в стані q, голівка читає 1-й символ підслова y.

Конфігурацію вигляду q_0x, де 1-й та останній символи слова x відмінні від λ, назвемо *початковою*.

Конфігурацію вигляду xq^*y назвемо *фінальною*.

Після переходу до фінального стану, отже, до фінальної конфігурації, МТ зупиняється.

Нехай МТ знаходиться в конфігурації $xcqay$, де $x, y{\in}T^*$, $a, c{\in}T$, $q{\in}Q$. Після виконання команди $qa{\to}pbR$ (команди $qa{\to}pbL$, команди $qa{\to}pb$) МТ перейде до конфігурації $xcbpy$ (відповідно до конфігурації $xpcby$, конфігурації $xcpby$).

Кожна МТ задає вербальне відображення $T^* \to T^*$ таким чином.

МТ M переводить слово $u{\in}T$ в слово $v{\in}T^*$, якщо вона з початкової конфігурації q_0u переходить до фінальної конфігурації xqy, де $q{\in}F^*$, $xy = \alpha v \beta$, $\alpha, \beta{\in}\{\lambda\}^*$. При цьому перший та останній символи слова v відмінні від λ, або $v = \varepsilon$. Цей факт записуємо так: $v = M(u)$.

Якщо МТ M, починаючи роботу з початкової конфігурації q_0u, ніколи не зупиниться, кажуть, що M *зациклюється* при роботі над словом u. Тоді $M(u)$ не визначене.

МТ M_1 та M_2 *еквівалентні*, якщо вони задають одне і те ж вербальне відображення.

МТ M *обчислює* часткову функцію $f: N^k{\to}N$, якщо вона кожне слово вигляду $|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_k}$ переводить в слово $|^{f(x_1,...,x_k)}$ у випадку $(x_1, ..., x_k){\in}D_f$, та $M(|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_k})$ невизначене при $(x_1, ..., x_k){\notin}D_f$.

Функція *обчислювана за Тьюрінгом*, або *МТ-обчислювана*, якщо існує МТ, яка її обчислює.

Кожна МТ обчислює нескінченну множину функцій натуральних аргументів та значень, але зафіксовуючи наперед арність функцій, дістаємо, що кожна МТ обчислює *єдину* функцію заданої арності.

Розглянемо приклади МТ.

***Приклад* 1.** МТ, яка обчислює функцію $x+y$:

$q_0| \to q_0|R$
$q_0\# \to q_0|R$
$q_0\lambda \to q_1\lambda L$
$q_1| \to q^*\lambda$

***Приклад* 2.** МТ, яка обчислює функцію $f(x) = \mathrm{sg}(x)$:

$q_0\lambda \to q^*\lambda$
$q_0 | \to q_1 | R$
$q_1 | \to q_1\lambda R$
$q_1\lambda \to q^*\lambda$

Приклад **3.** МТ, яка обчислює предикат "*x* парне":

$q_0 | \to q_1\lambda R$
$q_1 | \to q_0\lambda R$
$q_0\lambda \to q^*|$
$q_1\lambda \to q^*\lambda$

Приклад **4.** МТ, яка обчислює предикат "$x = 2$":

$q_0\lambda \to q^*\lambda$
$q_0 | \to q_1\lambda R$
$q_1\lambda \to q^*\lambda$
$\mathrm{q}_1 | \to q_2\lambda R$
$q_2\lambda \to q^*|$
$q_2 | \to q_3\lambda R$
$q_3 | \to q_3\lambda R$
$q_3\lambda \to q^*\lambda$

Приклад **5.** МТ, яка обчислює функцію $f(x, y) = x - y$:

$q_0 | \to q_1\lambda R$
$q_1| \to q_1 | R$
$q_1\# \to q_1\# R$
$q_1\lambda \to q_2\lambda L$
$q_2 | \to q_3\lambda L$
$q_3 | \to q_3|L$
$q_3 \# \to q_3\# L$
$q_3\lambda \to q_0\lambda R$
$q_{2v}\# \to q^*|$
$q_0 \# \to q_4\lambda R$
$q_4\lambda \to q^*\lambda$

Приклад **6.** МТ, яка обчислює функцію $f(x, y) = x+2y$:

$q_0 | \to q_0 | R$
$q_0\# \to q_0\# R$
$q_0\lambda \to q_1\lambda L$
$q_1 | \to q_2\lambda R$
$q_2 | \to q_2 |R$
$q_2\lambda \to q_3|L$
$q_3| \to q_3 |L$
$q_3\lambda \to q_1|L$
$q_1 \# \to q_4 |L$
$q_4 | \to q_4 |L$
$q_4\lambda \to q_5\lambda R$
$q_5 | \to q^*\lambda$

Приклад **7.** МТ, яка обчислює функцію $f(x) = [x/3]$:

$q_0\lambda \to q^*\lambda$
$q_0 | \to q_1\lambda R$
$q_1 | \to q_2\lambda R$
$q_2 | \to q_2 | R$
$q_2\lambda \to q_3\lambda L$
$q_2\, a \to q_3\, aL$
$q_3 | \to q_4 aL$

$q_4 | \to q_4 | L$
$q_4\lambda \to q_0\lambda R$
$q_1 a \to q_0 a$
$q_3 \lambda \to q_0 \lambda R$
$q_0 a \to q_0 | R$

***Приклад* 8.** МТ, яка обчислює функцію $f(x, y) = x{\cdot}y$

$q_0\# \to q_1\lambda R$
$q_1 | \to q_1\lambda R$
$q_1\lambda \to q^*\lambda$
$q_1 a \to q_1 | R$
$q_0 | \to q_2\lambda R$
$q_2| \to q_2 | R$
$q_2\# \to q_3\# R$
$q_3 | \to q_4\lambda R$
$q_4 | \to q_4 | R$
$q_4 a \to q_4 aR$
$q_4\lambda \to q_5 aL$
$q_5| \to q_5 | L$
$q_5 a \to q_5 aL$
$q_5\lambda \to q_3 | R$
$q_3 a \to q_6 aL$
$q_6 | \to q_6 | L$
$q_6\# \to q_6 \# L$
$q_6\lambda \to q_0\lambda R$
$q_3\lambda \to q_7\lambda L$
$q_7\# \to q_7\lambda L$
$q_7| \to q_7\lambda L$
$q_7\lambda \to q^*\lambda$

***Приклад* 9.** МТ, яка кожне слово $x{\in}T^*$ переводить в слово $x\#x$
(тут $\#{\notin}T$).

$q_0\, t \to q_0\, tR$ для всіх $t{\in}T$
$q_0\lambda \to q_1\# L$
$q_1\, t \to q_1\, tL$ для всіх $t{\in}T$
$q_1\lambda \to q_2\lambda R$
$q_2\, t \to q_t\, \lambda R$ для всіх $t{\in}T$
$q_t\, p \to q_t\, pR$ для всіх $t{\in}T,\ p{\in}T{\cup}\{\#\}$
$q_t\, \lambda \to q'_t\, tL$ для всіх $t{\in}T$
$q'_t\, p \to q'_t\, pL$ для всіх $t{\in}T,\ p{\in}T{\cup}\{\#\}$
$q'_t\, \lambda \to q_2 tR$ для всіх $t{\in}T$
$q_2\, \# \to q^*\#$

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення машини Тьюрінга.
2. Дайте визначення детермінованої та недетермінованої МТ.
3. Опишіть команди МТ.
4. Що таке конфігурація МТ?
5. Що таке початкова конфігурація МТ? фінальна конфігурація МТ?
6. Як змінюється конфігурація МТ при виконанні команди МТ відповідного типу?
7. Як МТ задає вербальне відображення?
8. Дайте визначення еквівалентних МТ.
9. Як визначається обчислюваність функції $f : N^n \to N$ за допомогою МТ?
10. Що таке МТ-обчислювана функція?

Вправи

1. Вкажіть МТ, яка кожне слово $x \in T^*$ переводить:
1) в слово xx;
2) в слово xx^R; де x^R – дзеркальне відображення слова x;
3) в слово x^R; де x^R – дзеркальне відображення слова x.

2. Вкажіть МТ для функцій:

1) $f(x) = \mathrm{sg}(x/2)$;
2) $f(x) = \mathrm{nsg}[x/2]$;
3) $f(x, y) = \mathrm{sg}(x+y)$;
4) $f(x, y) = \mathrm{nsg}(x \cdot y)$;
5) $f(x) = x/3$;
6) $f(x) = [x/2]$;
7) $f(x, y) = (x+1) - y$;
8) $f(x, y) = x \dot{-} y$;
9) $f(x, y) = |x - (y+2)|$;
10) $f(x, y) = 3x+y$;
11) $f(x, y) = x - 2y$;
12) $f(x, y, z) = 2x+y+z$;
13) $f(x, y, z) = 2x - (y+z)$;
14) $f(x, y) = \max(x, y)$;
15) $f(x, y) = \min(x, y)$;
16) $f(x, y) = [x/y]$;
17) $f(x, y) = \mathrm{mod}(x, y)$;
18) $f(x) = 2^x$.
19) $f(x) = x!$;
20) $f(x, y) = x^y$.

3. Вкажіть МТ для предикатів:

1) "x непарне";
2) "$x = 1$";
3) "$x > y$";
4) "$x < y$";
5) "$x \le y$";
6) "$x \ne y$".

2.3. Обчислюваність функцій на N

Основними обчислюваними операціями для n-арних функцій на множині N є наступні операції: *операція суперпозиції* $\mathbf{S}^{n+1}$, *операція примітивної рекурсії* $\mathbf{R}$, *операція мінімізації* $\mathbf{M}$.

Операція $\mathbf{S}^{n+1}$ n-арній функції $g(x_1, ..., x_n)$ та n функціям $g_1(x_1, ..., x_m), ..., g_n(x_1, ..., x_m)$ одної і тої ж арності зіставляє функцію $f(x_1, ..., x_m) = g(g_1(x_1, ..., x_m), ..., g_n(x_1, ..., x_m))$.

Таку функцію будемо позначати $\mathbf{S}^{n+1}(g, g_1, ..., g_n)$, її арність співпадає з арністю $g_1, ..., g_n$.

Операція *примітивної рекурсії* $\mathbf{R}$ n-арній функції g та $(n+2)$-арній функції h зіставляє $(n+1)$-арну функцію f, яку позначають $\mathbf{R}(g, h)$, що задається рекурсивним визначенням:

$$f(x_1, ..., x_n, 0) = g(x_1, ..., x_n)$$
$$f(x_1, ..., x_n, y+1) = h(x_1, ..., x_n, y, f(x_1, ..., x_n, y))$$

Це означає, що для всіх значень $a_1, ..., a_n, b$ значення $f(a_1, ..., b_n, b)$ обчислюється так:

$$f(a_1, ..., a_n, 0) = g(a_1, ..., a_n)$$
$$f(a_1, ..., a_n, 1) = h(a_1, ..., a_n, 0, f(a_1, ..., a_n, 0))$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$f(a_1, ..., a_n, b) = h(a_1, ..., a_n, b-1, f(a_1, ..., a_n, b-1))$$

При $n = 0$ вважаємо, що функція g – 1-арна константа.

Операція мінімізації $\mathbf{M}$ кожній $(n+1)$-арній функції g зіставляє n-арну функцію f, яку позначають $\mathbf{M}(g)$, що задається співвідношенням $f(x_1, ..., x_n) = \mu_y(g(x_1, ..., x_n, y) = 0)$

Для всіх значень $x_1, ..., x_n$ значення $f(x_1,..., x_n)$ обчислюється так. Послідовно обчислюємо $g(x_1,..., x_n, y)$ для $y = 0, 1, 2, ...$ Перше таке значення y, для якого $g(x_1, ..., x_n, y) = 0$, – шукане значення $f(x_1, ..., x_n)$. При цьому для всіх $t < y$ необхідно $g(x_1, ..., x_n, t)\downarrow \ne 0$.

Функція g може бути тотальною, а функція $f = \mathbf{M}(g)$ – навіть всюди невизначеною.

Наприклад, $f(x) = \mu_y(x+y+1 = 0)$.

Базовими функціями називають функції $\boldsymbol{o}(x) = 0$, $\boldsymbol{s}(x) = x+1$ та функції-селектори $\boldsymbol{I}^{n}_{m}(x_1, ..., x_n) = x_m$, де $n \ge m \ge 1$.

Всі базові функції тотальні та алгоритмічно обчислювані.

Функцію, яку можна отримати із базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції та примітивної рекурсії, називають *примітивно рекурсивною функцією* (ПРФ).

Функцію, яку можна отримати із базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації, називають *частково рекурсивною* функцією (ЧРФ).

Тотальну ЧРФ називають *рекурсивною* функцією (РФ).

Із наведених визначень випливають наступні твердження:

1. *Якщо функції g, g_1, ..., g_n тотальні алгоритмічно обчислювані, то функція* $\mathbf{S}^{n+1}(g, g_1, ..., g_n)$ *тотальна алгоритмічно обчислювана.*

2. *Якщо функції g та h тотальні алгоритмічно обчислювані, то функція* $\mathbf{R}(g, h)$ *тотальна алгоритмічно обчислювана.*

3. *Якщо функція g алгоритмічно обчислювана, то функція* $\mathbf{M}(g)$ *алгоритмічно обчислювана.*

4. *Кожна ЧРФ – алгоритмічно обчислювана функція.*

5. *Кожна РФ та кожна ПРФ – тотальна алгоритмічно обчислювана функція.*

6. *Для класів функцій мають місце співвідношення ПРФ* $\subseteq$ *РФ* $\subseteq$ *ЧРФ.*

Алгебра ($\mathfrak{R}$; $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}^3$, ...), носієм $\mathfrak{R}$ якої є клас всіх ЧРФ, а операціями – операції $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}$ та $\mathbf{S}^{n+1}$, де $n\geq 1$, називається *алгеброю ЧРФ*, або *алгеброю Чорча*.

Алгебра ($\mathfrak{R}_{pr}$; $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}^3$, ...), носієм $\mathfrak{R}_{pr}$ якої є клас всіх ПРФ, а операціями – операції $\mathbf{R}$ та $\mathbf{S}^{n+1}$, де $n\geq 1$, називається *алгеброю ПРФ*.

Введемо поняття *операторного терма алгебри ЧРФ* та *операторного терма алгебри ПРФ*. Алфавіт складатиметься із символів базових функцій $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{s}$ та $\boldsymbol{I}^n_m$, де $n \geq m \geq 1$, символів операцій $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}$ та $\mathbf{S}^{n+1}$, де $n \geq 1$, а також допоміжних символів "(", ")" та "," .

Дамо індуктивне визначення ОТ алгебри ЧРФ.

1) кожен символ базової функції є ОТ; такі ОТ назвемо *атомарними*;

2) якщо t_0, t_1, ..., t_n – ОТ, то $\mathbf{S}^{n+1}(t_0, t_1, ..., t_n)$ – ОТ;

3) якщо t_1 та t_2 – ОТ, то $\mathbf{R}(t_1, t_2)$ – ОТ;

4) якщо t – ОТ, то $\mathbf{M}(t)$ – ОТ.

Аналогічно дається індуктивне визначення ОТ алгебри ПРФ.

Кожна ЧРФ є значенням деякого ОТ алгебри ЧРФ. Проте не кожен ОТ алгебри ЧРФ має певне значення. Наприклад, операторні терми $\mathbf{R}(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{I}^4_2)$ та $\mathbf{S}^3(\boldsymbol{I}^2_1, \boldsymbol{I}^3_2, \boldsymbol{I}^2_2)$ не мають значення. Завдання ЧРФ операторними термами не є однозначним. Наприклад, операторні терми $\boldsymbol{o}$, $\mathbf{S}^2(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{s})$, $\mathbf{S}^2(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{o})$ та $\mathbf{S}^2(\boldsymbol{o}, \mathbf{S}^2(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{s}))$ задають одну і ту ж функцію $\boldsymbol{o}(x)$.

Розглянемо приклади ПРФ, ЧРФ та РФ.

***Приклад* 1.** Функції-константи – ПРФ.

n-арна нуль-функція $\boldsymbol{o}^n(x_1, ..., x_n) = 0$ задається ОТ $\mathbf{S}^2(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{I}^n_1)$;

n-арна константа $\boldsymbol{k}^n(x_1, ..., x_n) = k$ задається ОТ $\mathbf{S}^2(\boldsymbol{s}, \mathbf{S}^2(\boldsymbol{s},...,\mathbf{S}^2(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{I}^n_1)...)$.

***Приклад* 2.** Функція $f(x_1, x_2) = x_1+x_2$ – ПРФ. Справді, маємо

$$f(x_1, 0) = x_1 = \boldsymbol{I}^1_1(x_1);$$
$$f(x_1, x_2+1) = x_1+(x_2+1) = (x_1+x_2)+1 = \boldsymbol{s}(x_1+x_2) = \boldsymbol{s}(f(x_1, x_2)).$$

Таким чином, функція $f(x_1, x_2) = x_1+x_2$ виникає примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = \boldsymbol{I}^1_1(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3+1 = \boldsymbol{s}(x_3) = \mathbf{S}^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{I}^3_3)(x_1, x_2, x_3)$.

Операторний терм функції x_1+x_2 має вигляд $\mathbf{R}(\boldsymbol{I}^1_1, \mathbf{S}^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{I}^3_3))$.

***Приклад* 3.** Функція $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ – ПРФ. Справді, маємо

$$f(x_1, 0) = 0 = \boldsymbol{o}(x_1);$$
$$f(x_1, x_2+1) = x_1 \cdot (x_2+1) = x_1 \cdot x_2+x_1 = f(x_1, x_2)+x_1.$$

Отже, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ виникає примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = \boldsymbol{o}(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3+x_1$. За прикладом 2 функція h є ПРФ, тому f – ПРФ. Операторний терм $\otimes$ функції $x_1 \cdot x_2$ має вигляд $\mathbf{R}(\boldsymbol{o}, \mathbf{S}^3(\oplus, \boldsymbol{I}^3_3, \boldsymbol{I}^3_1))$, де $\oplus$ – операторний терм функції x_1+x_2.

***Приклад* 4.** Функція $f(x_1, x_2) = (x_1)^{x_2}$ – ПРФ. Справді, маємо

$$f(x_1, 0) = (x_1)^0 = 1;$$
$$f(x_1, x_2+1) = (x_1)^{x_2+1} = (x_1)^{x_2} \cdot x_1 = f(x_1, x_2) \cdot x_1 .$$

Таким чином, функція $f(x_1, x_2) = (x_1)^{x_2}$ виникає примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = 1^1(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot x_1$. За прикладом 3 функція h є ПРФ, тому f – ПРФ.

ОТ функції $(x_1)^{x_2}$ має вигляд $\mathbf{R}(\mathbf{S}^2(\boldsymbol{s},\boldsymbol{o}), \mathbf{S}^3(\otimes, \boldsymbol{I}^3_3, \boldsymbol{I}^3_1))$, де $\otimes$ –ОТ функції $x_1 \cdot x_2$.

***Приклад* 5.** Функція $sg(x_1) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x_1 = 0, \\ 1, \text{ якщо } x_1 \geq 1, \end{cases}$ – ПРФ.

Справді, маємо: $sg(0) = 0 = \boldsymbol{o}(x_1)$; $sg(x_1+1) = 1$.

ОТ функції $sg(x_1)$ має вигляд $\mathbf{R}(\boldsymbol{o}, \mathbf{S}^2(\boldsymbol{s}, \mathbf{S}^2(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{I}_1^2)))$.

***Приклад* 6.** Функція $nsg(x_1) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_1 = 0, \\ 0, \text{ якщо } x_1 \geq 1, \end{cases}$ – ПРФ.

Справді, маємо: $nsg(0) = 1 = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{o}(x_1))$; $nsg(x_1+1) = 0$.

ОТ функції $nsg(x_1)$ має вигляд $\mathbf{R}(\mathbf{S}^2(\boldsymbol{s},\boldsymbol{o}), \mathbf{S}^2(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{I}_1^2))$.

***Приклад* 7.** Функція $x_1 \dot{-} x_2 = \begin{cases} x_1 - x_2, \text{ якщо } x_1 \geq x_2, \\ 0, \text{ якщо } x_1 \leq x_2, \end{cases}$ є ПРФ

Спочатку покажемо що функція $x_1 \dot{-} 1$ – ПРФ. Справді, маємо

$0 \dot{-} 1 = 0 = \boldsymbol{o}(x_1)$;

$(x_1 + 1) \dot{-} 1 = x_1 = \boldsymbol{I}_1^2(x_1, x_2)$.

Операторний терм функції $x_1 \dot{-} 1$ має вигляд $\mathbf{R}(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{I}_1^2)$.

Тепер покажемо що функція $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$ – ПРФ. Маємо

$f(x_1, 0) = x_1 \dot{-} 0 = \boldsymbol{I}_1^1(x_1)$;

$f(x_1, x_2+1) = x_1 \dot{-} (x_2 + 1) = (x_1 \dot{-} x_2) \dot{-} 1 = f(x_1, x_2) \dot{-} 1$.

Отже, функція $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$ виникає примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = \boldsymbol{I}_1^1(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 \dot{-} 1$. Звідси операторний терм функції $x_1 \dot{-} x_2$ має вигляд $\mathbf{R}(\boldsymbol{I}_1^1, \mathbf{S}^2(\mathbf{R}(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{I}_1^2), \boldsymbol{I}_1^3))$.

***Приклад* 8**. Функція $f(x_1, x_2) = |x_1 – x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$ – ПРФ.

***Приклад* 9**. Функція $f(x_1, x_2) = x_1 – x_2 = \mu_{x_3}(|x_1–(x_2+x_3)| = 0)$ – ЧРФ.

***Приклад* 10.** Всюди невизначена функція $f_\varnothing$ – ЧРФ. ·

Справді, $f_\varnothing(x_1) = \mu_{x_1}(x_1+1 = 0)$, тому $f_\varnothing$ є значенням ОТ $\mathbf{M}(\boldsymbol{s})$.

***Приклад* 11.** Функція $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ – ЧРФ. ·

Справді, $[x_1/x_2] = \mu_{x_3}(x_2 \cdot (x_3+1) > x_1) = \mu_{x_3}(nsg(x_2 \cdot (x_3+1) \dot{-} x_1) = 0)$.

***Приклад* 12.** Функція $f(x_1) = [\sqrt{x_1}]$ – РФ.

Справді, $[\sqrt{x_1}]$ тотальна та $[\sqrt{x_1}] = \mu_{x_2}((x_2+1)\cdot(x_2+1) > x_1) = \mu_{x_2}(nsg((x_2+1)\cdot(x_2+1) \dot{-} x_1) = 0)$.

Наведемо деякі елементарні властивості ПРФ і РФ. Для спрощення звичайно позначатимемо x_{n+1} та x_{n+2} як y та z відповідно

Теорема 2.1. *Нехай* $(n+1)$*-арна функція* g *є ПРФ. Тоді ПРФ є* $(n+1)$*-арна функція* f*, задана умовою*

$$f(x_1,..., x_n, y) = \sum_{k=0}^{y} g(x_1,..., x_n, k).$$

Домовимося надалі вважати, що при $z<y$ $\sum_{k=y}^{z} a_k = 0$.

Теорема 2.2. *Нехай* $(n+1)$*-арна функція* g *є ПРФ. Тоді ПРФ є* $(n+2)$*-арна функція* f*, задана умовою*

$$f(x_1, ..., x_n, y, z) = \sum_{k=y}^{z} g(x_1,..., x_n, k).$$

Теорема 2.3. *Нехай* $(n+1)$*-арна функція* g *та* n*-арні функції* α *і* β *є ПРФ. Тоді ПРФ є* n*-арна функція* h*, задана умовою*

$$h(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=\alpha(x_1,...,x_n)}^{\beta(x_1,...,x_n)} g(x_1,..., x_n, k).$$

Теореми 2.1–2.3 називають *теоремами підсумовування.* Замінивши в цих теоремах символ суми Σ на символ добутку П, одержимо *теореми мультиплікації.*

$(n+1)$-арна функція f отримується із $(n+1)$-арної функції g за допомогою операції *обмеженої мінімізації*, якщо вона задається так:

$$f(x_1, ..., x_n, y) = \begin{cases} \text{перше, починаючи з } 0, \text{ значення } z \text{ таке, що } z \le y \\ \text{та } g(x_1, ..., x_n) = 0, \text{ якщо таке значення } z \text{ існує,} \\ \text{значення } y, \text{ якщо такого значення } z \text{ не існує.} \end{cases}$$

Цей факт позначаємо так: $f(x_1, ..., x_n, y) = \mu_{z \le y}((g(x_1, ..., x_n, z) = 0)$.

Теорема 2.4 (про обмежену мінімізацію). *Нехай $(n+1)$-арна функція g є ПРФ. Тоді ПРФ є $(n+1)$-арна функція f, задана умовою*

$$f(x_1, ..., x_n, y) = \mu_{z \le y}((g(x_1, ..., x_n, z) = 0).$$

Наслідок. *Нехай функції $g(x_1, ..., x_n, y)$ та $\alpha(x_1, ..., x_n)$ є ПРФ. Тоді ПРФ є функція*

$$f(x_1, ..., x_n) = \mu_{y \le \alpha(x_1, ..., x_n)}((g(x_1, ..., x_n, y) = 0).$$

***Приклад* 13.** Довизначимо функцію $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ таким чином: $[x_1/0] = x_1$. Така $[x_1/x_2]$ є ПРФ.

Справді, значення $[a/b]$ рівне кількості нулів в послідовності $1 \cdot b \dot{-} a$, $2 \cdot b \dot{-} a$, ..., $a \cdot b \dot{-} a$. Маємо $[x_1/x_2] = \sum_{k=1}^{x_1} nsg(k \cdot x_2 \dot{-} x_1)$, тому $[x_1/x_2]$ є ПРФ за теоремою 2.3.

***Приклад* 14.** Функція $mod(x_1, x_2)$ – остача від ділення x_1 на x_2, є ЧРФ.

Справді, $mod(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} (x_2 \cdot [x_1/x_2])$.

Беручи тут довизначену функцію $[x_1/x_2]$, дістанемо довизначену функцію $mod(x_1, x_2)$: $mod(x_1, 0) = 0$. Така довизначена $mod(x_1, x_2)$ є ПРФ.

***Приклад* 15.** Функція $f(x_1) = [\sqrt{x_1}]$ є ПРФ за теоремою 2.4.

Справді, $[\sqrt{x_1}] = \mu_{x_2 \le x_1}(nsg((x_2+1) \cdot (x_2+1) \dot{-} x_1) = 0)$.

***Приклад* 16.** Функція $nd(x)$ – кількість дільників числа x, – є ПРФ при довизначенні $nd(0) = 1$.

Справді, $nd(x) = \sum_{k=0}^{x} nsg(\mathrm{mod}(x, k))$.

***Приклад* 17.** Функція $\pi(x)$ – кількість простих чисел, які не більші за число x, – є ПРФ.

Справді, $\pi(x) = \sum_{k=0}^{x} nsg(| nd(x) - 2 |)$.

***Приклад* 18.** Функція $p(x)$ – x-ве просте число, – є ПРФ

За визначенням $p(0) = 2$, $p(1) = 3$, $p(2) = 5$ і т.д.

В загальному випадку $p(x) = \mu_{y \le 2^{2^x}}(|\pi(y) - (x+1)| = 0)$.

Доведення того, що $p(x) \le 2^{2^x}$, проведемо індукцією по x. Для $x = 0$ маємо $p(0) = 2 \le 2^{2^0}$. Нехай $p(x) \le 2^{2^x}$ для всіх $x \le k$. Покажемо $p(k+1) \le 2^{2^{k+1}}$. Розглянемо число $b = p(0) \cdot p(1) \cdot \cdot p(k)+1$. За припущенням індукції $p(0) \le 2^{2^0}$, …, $p(k) \le 2^{2^k}$. Тому $b \le 2^{2^0+2^1+...+2^k} + 1 < 2^{2^{k+1}}$. Але кожний простий дільник числа b більший за $p(k)$, тому $p(k+1) \le b \le 2^{2^{k+1}}$.

***Приклад* 19.** Функція $ex(x, y)$ – степінь числа $p(x)$ в числі y, – є ПРФ при довизначенні $ex(x, 0) = 0$.

Справді, $ex(x, y) = \mu_{z \le y}(nsg(\mathrm{mod}(y, p(x)^{z+1})) \cdot sg(y) = 0)$.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення операцій суперпозиції $\boldsymbol{S}^{n+1}$, примітивної рекурсії $\boldsymbol{R}$, мінімізації $\boldsymbol{M}$.
2. Укажіть властивості операцій $\boldsymbol{S}^{n+1}$, $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{M}$.
3. Дайте визначення базових обчислюваних n-арних функцій.
4. Дайте визначення ПРФ, ЧРФ та РФ.
5. Укажіть властивості ПРФ, ЧРФ та РФ.
6. Дайте визначення алгебри ЧРФ та алгебри ПРФ.
7. Дайте визначення операторного терма алгебри ЧРФ та операторного терма алгебри ПРФ.
8. Сформулюйте теореми про підсумовування та про мультиплікацію.

9. Сформулюйте теорему про кускове задання.
10. Дайте визначення операції обмеженої мінімізації.
11. Сформулюйте теорему про обмежену мінімізацію.

Вправи

1. Чи може бути тотальною функція $\mathbf{S}^{n+1}(g, g_1, ..., g_n)$, якщо g нетотальна ?
2. Чи може бути тотальною функція $\mathbf{S}^{n+1}(g, g_1, ..., g_n)$, якщо одна з функцій $g_1, ..., g_n$ нетотальна ?
3. Чи може бути тотальною функція $\mathbf{R}(g, h)$, якщо g нетотальна ?
4. Чи може бути тотальною функція $\mathbf{R}(g, h)$, якщо h нетотальна ?
5. Чи може бути тотальною функція $\mathbf{M}(g)$, якщо g нетотальна ?
6. Доведіть, що функція $НСК(x_1, x_2)$ (найменше спільне кратне чисел x_1 та x_2) є ПРФ при довизначенні $НСК(n, 0) = НСК(0, n) = 0$.
7. Доведіть, що функція $НСD(x_1, x_2)$ (найбільший спільний дільник чисел x_1 та x_2) є ПРФ при довизначенні $НСD(n, 0) = НСD(0, n) = 0$.
8. Доведіть, що при належному довизначенні наступні функції є ПРФ:
1) $\sigma(x)$ – сума дільників числа x;
2) $spd(x$сума простих дільників числа x;
3) $kpd(x)$ – кількість простих дільників числа x.
9. Вкажіть ОТ алгебри n-арних ЧРФ для функцій:

1) $f(x_1) = (x_1)!$;	2) $f(x_1, x_2) = (x_2 +1)!$;
3) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2+x_3)!$;	4) $f(x_1) = (2x_1)!!$;
5) $f(x_1) = (2x_1+1)!!$;	6) $f(x_1, x_2) = x_2^{x_1+2}$;
7) $f(x_1, x_2) = (x_1+1)^{x_2}$;	8) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^{x_1+x_3}$;
9) $f(x_1) = [x_1\sqrt{3}]$;	10) $f(x_1) = [\log_2(x_1)]$;
11) $f(x_1) = [\sqrt[3]{x_1}]$;	12) $f(x_1, x_2) = [\log_3(x_1+x_2)]$.

2.4. Теза Чорча

Розглянемо співвідношення між різними формальними моделями поняття алгоритмічно обчислюваної функції. Обмежимося розглядом n-арних функцій на множині N.

Теорема 2.5. *Наступні класи функцій співпадають*:
1) *клас ЧРФ;*
2) *клас програмованих на N n-арних функцій;*
3) *клас МНР-обчислюваних функцій;*
4) *клас функцій, обчислюваних за Тьюрінгом;*

Таким чином, розглянуті нами формалізми задають один і той же клас n-арних функцій на N. При цьому самі визначення формалізмів гарантують ефективну обчислюваність описуваних ними функцій. Тому є всі підстави вважати, що такі формалізми є різними математичними уточненнями інтуїтивного поняття алгоритмічно обчислюваної функції. Вперше таке твердження стосовно рекурсивних функцій висунув у 1936 році А. Чорч, тому воно дістало назву "*теза Чорча*". Узагальнення тези Чорча для часткових функцій в цьому ж році запропонував С. Кліні.

Теза Чорча (ТЧ) формулюється наступним чином:

Теза Чорча. **Клас ЧРФ збігається з класом *n*-арних АОФ, заданих на множині натуральних чисел.**

Поняття АОФ не є строго визначеним математичним поняттям, тому теза Чорча математичному доведенню не підлягає. Теза Чорча є *природно-науковим фактом*, який засвідчує адекватність формальних моделей інтуїтивного поняття АОФ.

Із тези Чорча як наслідок випливає:

клас РФ співпадає з класом тотальних n-арних АОФ, заданих на множині натуральних чисел.

Значення тези Чорча полягає в наступному.

1) Прийняття тези Чорча перетворює інтуїтивні поняття алгоритму, обчислюваності, розв'язності в об'єкти математичного вивчення.

2) Використання тези Чорча як своєрідної аксіоми дозволяє в багатьох випадках замінити формальні завдання алгоритмів на неформальні їх описи. Це дає істотне спрощення доведень, звільняючи його від зайвих деталей. Проте доведення на основі тези Чорча має бути ретельно аргументованим! При виникненні найменших сумнівів треба вміти провести чисто формальне доведення.

Приклад. Нехай функція f є ЧРФ. Доведемо, що тоді функція $h(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in E_f, \\ \text{невизначене в інших випадках,} \end{cases}$

теж є ЧРФ. Для цього розглянемо процес глобального обчислення всіх значень функції f. Такий процес розіб'ємо на етапи. На кожному етапі починаємо обчислення для наступного значення аргументу. На етапі 0 робимо 1-й крок обчислення $f(0)$. На етапі 1 робимо 1-й крок обчислення $f(1)$ та 2-й крок обчислення $f(0)$ і т.д. На етапі n робимо 1-й крок обчислення $f(n)$, 2-й крок обчислення $f(n-1)$, … , $(n+1)$-й крок обчислення $f(0)$. Якщо на якомусь етапі обчислення певного $f(m)$ завершується, порівнюємо $f(m)$ та x. При умові $f(m) = x$ процес глобальних обчислень завершується, адже тоді $x \in E_f$, тому результатом нашої роботи буде число 1. При умові $f(m) \neq x$ продовжуємо процес глобальних обчислень. Таким чином, нами описано *алгоритм* для обчислення функції $h(x)$, звідки за тезою Чорча функція $h(x)$ є ЧРФ.

Питання для самоконтролю

1. Укажіть співвідношення між різними формальними уточненнями поняття алгоритмічно обчислюваної функції.
2. Сформулюйте тезу Чорча.
3. Чи можна формально довести тезу Чорча?
4. Як ви можете аргументувати вірність тези Чорча?
5. У чому полягає значення тези Чорча?

Вправи

1. Доведіть співпадіння наступних класів функцій:

1) клас ЧРФ та клас програмованих на N n-арних функцій;

2) клас ЧРФ та клас МНР-обчислюваних функцій;

2. Доведіть рекурсивність функції f, заданої такою умовою: $f(n)$ є $(n+1)$-ю цифрою після коми в десятковому розкладі числа e.

3. Доведіть рекурсивність функції f, заданої такою умовою: $f(n)$ є $(n+1)$-ю цифрою після коми в десятковому розкладі числа π.

4. Нехай функції f та g є ЧРФ. Доведіть:

1) функція $h(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in D_f \cup D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках,} \end{cases}$ є ЧРФ;

2) функція $h(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in D_f \cap D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках,} \end{cases}$ є ЧРФ;

3) функція $h(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in D_f \cup E_g, \\ \text{невизначене в інших випадках,} \end{cases}$ є ЧРФ;

4) функція $h(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in E_f \cap D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках,} \end{cases}$ є ЧРФ.

5. Нехай функції f та g є ЧРФ. Чи вірно, що завжди є ЧРФ функція $h(x)$, задана умовою

$$h(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \in D_f \setminus D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках,} \end{cases} ?$$

3. НУМЕРАЦІЇ. ТЕОРЕМИ ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ ДЛЯ ІНДЕКСНИХ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі розглядаються ефективні нумерації формальних моделей алгоритмів та АОФ. Вводяться фундаментальні поняття універсальної функції, універсальної машини Тьюрінга, універсальної МНР-програми. Розглянуто теореми Кліні про нерухому точку для індексних рекурсивних функцій.

3.1. Кодування та нумерації. Канторові нумерації

Кодування множини A на множині B – це ін'єктивне та сюр'єктивне відображення $\varphi : A \to B$ таке, що існують алгоритми $\aleph$ та $\Re$:

– для кожного $a \in A$ $\aleph(a) \in \varphi(a)$;

– для кожного $b \in B$ $\Re(b) = \varphi^{-1}(b)$.

Нумерацією множини A називають сюр'єктивне функціональне відображення $\xi: N \to A$.

Однозначною нумерацією множини A називають бієктивне відображення $\xi : N \to A$.

Нумерація $\xi : N \to A$ *ефективна*, якщо існують алгоритми $\aleph$ та $\Re$:

– для кожного $a \in A$ $\aleph(a) \in \xi^{-1}(a)$;

– для кожного $n \in N$ $\Re(n) = \xi(n)$.

Таким чином, $\xi: N \to A$ – ефективна нумерація $\Leftrightarrow$ $\xi^{-1} : A \to N$ – кодування A на N.

Введемо однозначні ефективні нумерації пар та n-ок натуральних чисел, які називаються *канторовими нумераціями*.

Всі пари натуральних чисел розташуємо в послідовність так:

пара (x, y) *передує парі* (u, v) $\Leftrightarrow$ $x+y<u+v$ *або* $(x+y = u+v$ та $x<u)$.

Номер пари (x, y) в такій послідовності позначають $C(x, y)$ та називають *канторовим номером* пари (x, y). Зрозуміло, що $C(x, y) = [(x+y+1)\cdot(x+y)/2]+x$

Ліву та праву компоненти пари з номером n позначають відповідно $\boldsymbol{l}(n)$ та $\boldsymbol{r}(n)$. Функції $\boldsymbol{l}(n)$ та $\boldsymbol{r}(n)$ називають відповідно лівою та правою координатними функціями.

Функція $C(x, y)$ задає бієкцію $N\times N \to N$, пара функцій $(\boldsymbol{l}(n), \boldsymbol{r}(n))$ задає бієкцію $N \to N\times N$.

Функції C, $\boldsymbol{l}$ та $\boldsymbol{r}$ зв'язані тотожностями:

$$C(\boldsymbol{l}(n), \boldsymbol{r}(n)) = n;\ \boldsymbol{l}(C(x, y)) = x;\ \boldsymbol{r}(C(x, y)) = y.$$

Маючи нумерацію пар натуральних чисел, можна ввести нумерацію n-ок натуральних чисел для довільного $n>2$:

$$C^n(x_1, x_2,..., x_n) = C^{n-1}(C(x_1, x_2), x_3,..., x_n) = C(...C(C(x_1, x_2), x_3),...), x_n).$$

Координатні функції $C_{n1}, ..., C_{nn}$ вводимо так:

Нехай $C^n(x_1, x_2,..., x_n) = m$; тоді $C_{n1}(m) = x_1$; $C_{n2}(m) = x_2$; ..., $C_{nn}(m) = x_n$.

Для функцій C^n, $C_{n1}, ..., C_{nn}$ справджуються такі тотожності:

$$C^n(C_{n1}(x), ..., C_{nn}(x)) = x;$$
$$C_{nk}(C^n(x_1, x_2,..., x_n)) = x_k,\ 1\le k\le n.$$

Теорема 3.1. 1) *Функції $C(x, y)$, $\boldsymbol{l}(n)$ та $\boldsymbol{r}(n)$ є ПРФ.*
2) *Функції C^n, $C_{n1}, ..., C_{nn}$ є ПРФ.*

***Приклад* 1.** Знайдемо $\boldsymbol{l}(100)$ та $\boldsymbol{r}(100)$. Для $x = \boldsymbol{l}(100)$ та $y = \boldsymbol{r}(100)$ маємо рівняння $C(x, y) = 100$. Нехай $x+y = p$. Тоді p є найбільшим натуральним числом, для якого $p\cdot(p+1) \le 2\cdot 100$. Звідси $p = 13$. Маємо $x+y = 13$, $x = 100 - [(13\cdot 14)/2] = 9$, $y = 13–9 = 4$. Отже, $\boldsymbol{l}(100) = 9$ та $\boldsymbol{r}(100) = 4$.

***Приклад* 2.** Розв'яжемо рівняння $C^4(x, y, z, v) = 205$. За визначенням $C(C(C(x, y), z), v) = 205$. Нехай $C(C(x, y), z) = a$, маємо $C(a, v) = 205$. Нехай $a+v = p$. Тоді p є найбільшим натуральним числом, для якого $p\cdot(p+1)\le 2\cdot 205$. Звідси маємо $p = 19$, звідки $a = 15$ та $v = 4$. Тепер маємо $C(C(x, y), z) = 15$. Нехай $C(x, y) = b$, тоді $C(b, z) = 15$. Нехай $b+z = q$. Тоді q є найбільшим натуральним числом, для якого $q\cdot(q+1) \le 2\cdot 15$. Звідси $q = 5$, звідки $b = 0$ та $z = 5$. Маємо $C(x, y) = 0$, звідки $x = 0$ та $y = 0$.

***Приклад* 3.** Задамо однозначну ефективну нумерацію всіх скінченних послідовностей натуральних чисел на основі їх кодування κ: $\bigcup\limits_{k\ge 0} N^k \to N$:

$$\kappa(\varnothing) = 0;\ \kappa(a_1, ..., a_n) = C(C^n(a_1, ..., a_n), n-1)+1.$$

Відображення κ бієктивне. Обернене відображення $\eta = \kappa^{-1}$ – шукана однозначна нумерація.

***Приклад* 4.** Однозначну ефективну нумерацію всіх скінченних послідовностей натуральних чисел можна задати на основі кодування σ: $\bigcup_{k\geq 0} N^k \to N$:

$$\sigma(\varnothing) = 0;\ \sigma(a_1, ..., a_n) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + ... + 2^{a_1+a_2+...+a_n+n-1}.$$

Бієктивність відображення σ випливає із однозначності подання кожного натурального числа в двійковій системі числення. Обернене відображення $\lambda = \sigma^{-1}$ – шукана однозначна нумерація.

***Приклад* 5**. Однозначну ефективну нумерацію всіх непорожніх скінченних послідовностей натуральних чисел можна задати на основі кодування ν: $\bigcup_{k\geq 1} N^k \to N$, що є модифікацією кодування σ:

$$\nu(a_1, ..., a_n) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + ... + 2^{a_1+a_2+...+a_n+n-1} - 1.$$

Обернене відображення $\zeta = \nu^{-1}$ – шукана однозначна нумерація.

***Приклад* 6**. Ефективну нумерацію φ множини формул довільної мови 1-го порядку із зліченним алфавітом [13] введемо наступним чином. Занумеруємо множини предметних імен $x_0, x_1, ...$, константних символів $c_0, c_1, ...$, функціональних символів $f_0, f_1, ...$ та предикатних символів $p_0, p_1, ...$.

Кодування τ термів та формул ξ задамо так:

$\tau(x_k) = 3\cdot k$;
$\tau(c_k) = 3\cdot k+1$;
$\tau(f_k t_1...t_n) = 3\cdot C(C^{n+1}(k, \tau(t_1),..., \tau(t_n)), n-1)+2$;
$\xi(p_k t_1...t_n) = 4\cdot C(C^{n+1}(k, \tau(t_1),..., \tau(t_n)), n-1)$;
$\xi(\neg\Phi) = 4\cdot\xi(\Phi)+1$;
$\xi(\Phi\vee\Psi) = 4\cdot C(\xi(\Phi),\xi(\Psi))+2$;
$\xi(\exists x_k\Phi) = 4\cdot \mathrm{C}(k, \xi(\Phi))+3$.

Номером (*індексом*) довільної формули Φ вважатимемо її код ξ(Φ). Всі ті натуральні числа, які не є кодами формул, вважатимемо номером формули $x_0 = x_0$. Зрозуміло, що так введена нумерація $\phi = \xi^{-1}$ неоднозначна. Формулу з номером n позначатимемо ϕ_n .

Кодувати довільну скінченну послідовність натуральних чисел. дозволяє також *функція Гьоделя* $\mathbf{\Gamma}(x, y) = mod(\boldsymbol{l}(x), 1+(y+1)\cdot\boldsymbol{r}(x))$.

З визначення випливає, що $\mathbf{\Gamma}(x, y)$ є ПРФ.

Теорема 3.2 (про основну властивість функції Гьоделя). *Для довільної скінченної послідовності натуральних чисел $b_0, b_1, .., b_n$ існує натуральне число t таке, що $\mathbf{\Gamma}(t, i) = b_i$ для всіх $i\in\{0,..., n\}$.*

Використання функції Гьоделя дає змогу промоделювати операцію примітивної рекурсії операціями суперпозиції та мінімізації:

Теорема 3.3. *Функція $f = \mathbf{R}(g, h)$ може бути отримана із функцій g, h, базових функцій і функцій +, × та $\dot{-}$ за допомогою скінченної кількості застосувань операцій $\mathbf{S}^{n+1}$ та* **M**.

Таким чином, клас ЧРФ збігається з класом функцій, отриманих із функцій $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{I}^n_m$, +, ×, $\dot{-}$ за допомогою операцій $\mathbf{S}^{n+1}$ та **M**.

Питання для самоконтролю

1. Що таке кодування множини A на множині B?
2. Що таке нумерація? однозначна нумерація?
3. Які нумерації називають ефективними?
4. Який зв'язок ефективних нумерацій та кодувань?
5. Як визначаються канторові нумерації пар та n-ок натуральних чисел?
6. Укажіть тотожності для нумераційних функцій C, $\boldsymbol{l}$ та $\boldsymbol{r}$.
7. Укажіть тотожності для нумераційних функцій C^n, $C_{n1},..., C_{nn}$.
8. Задайте однозначні ефективні нумерації всіх скінченних послідовностей і всіх скінченних непорожніх послідовностей натуральних чисел:
– на основі канторових нумераційних функцій;
– на основі подання натуральних чисел у двійковій системі числення.
9. Дайте визначення функції Геделя.
10. Сформулюйте основну властивість функції Геделя.
11. Сформулюйте теорему про елімінацію операції примітивної рекурсії.

Вправи

1. Знайдіть $\boldsymbol{l}(150)$, $\boldsymbol{r}(150)$ та $\boldsymbol{l}(200)$, $\boldsymbol{r}(200)$.

2. Розв'яжіть рівняння $C(x, y) = 2012$.

3. Розв'яжіть наступні рівняння:

$C^3(x,y,z) = 131$; $C^3(x,y,z) = 143$;
$C^3(x,y,z) = 226$; $C^4(x,y,z,v) = 123$;
$C^4(x,y,z,v) = 333$; $C^4(x,y,z,v) = 282$.

4. Функція $f : N \to N$ називається функцією великого розмаху (ФВР), якщо для кожного $a \in N$ рівняння $f(x) = a$ має нескінченну кількість розв'язків. Доведіть, що:

1) функції $\boldsymbol{l}(x)$ та $\boldsymbol{r}(x)$ є ФВР;

2) для кожної рекурсивної ФВР $L(x)$ існує рекурсивна ФВР $R(x)$ така, що пара (L, R) задає бієкцію $N \to N\times N$;

3) для $L(x)$, $R(x)$ та функції $\mathrm{C}(x, y) = \mu_t(x = L(t)\ \&\ y = R(t))$ мають місце тотожності $\mathrm{C}(L(n), R(n)) = n$; $L(\mathrm{C}(x, y)) = x$; $R(\mathrm{C}(x, y)) = y$. Це означає, що функції L, R та C грають роль канторових нумераційних функцій $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}$ та C.

3.2. Ефективні нумерації формальних моделей алгоритмів та АОФ

Розглянемо приклади ефективних нумерацій формальних моделей алгоритмів та алгоритмічно обчислюваних функцій.

***Приклад* 1.** Однозначну ефективну нумерацію всіх МНР-програм задамо на основі кодування МНР-програм як скінченних послідовностей команд МНР. Кодування команд θ задамо так:

$$\theta(Z(n)) = 4\cdot n;$$
$$\theta(S(n)) = 4\cdot n+1;$$
$$\theta(T(m, n)) = 4\cdot C(m, n)+2;$$
$$\theta(J(m, n, q+1)) = 4\cdot C(C(m, n), q)+3.$$

Таке θ – бієктивне відображення множини всіх команд МНР на N.

Використовуючи розглянуту вище бієкцію $\nu : \bigcup_{k\geq 1} N^k \to N$, задамо кодування τ всіх МНР-програм так. Якщо P – МНР-програма $I_1I_2...I_k$, то $\tau(P) = \nu(\theta(I_1),..., \theta(I_k))$. Відображення ν та θ бієктивні, тому τ теж бієкція. Тоді $\varphi = \tau^{-1}$ – шукана однозначна нумерація.

Нумерація φ ефективна. Справді, за кожною МНР-програмою P ефективно обчислюється її номер $\tau(P)$. З іншого боку, за кожним $n\in N$ ефективно визначається МНР-програма $P = \varphi(n)$. Для цього подамо число $n+1$ як суму зростаючих степенів числа 2: $n+1 = 2^{b_1} + 2^{b_2} +...+ 2^{b_k}$, де $0 \leq b_1 <...< b_k$. Далі визначимо послідовність чисел $a_1, ..., a_k$: $a_1 = b_1$, $a_{i+1} = b_{i+1} - b_i - 1$ для $1 < i < k$. За числами $a_1, ..., a_k$ як за кодами команд МНР відновимо відповідні команди. Послідовність цих команд і є шукана $P = \varphi(n)$.

МНР-програму з кодом n позначатимемо P_n.

***Приклад* 2.** Знайдемо код МНР-програми P, яка обчислює бінарну функцію $x+y$. Використаємо приклад 3 розділу 2.1. Маємо:

1) $J(1, 2, 5)$; $\theta(J(1, 2, 5)) = 4\cdot C(C(1,2),4)+3 = 4\cdot C(7,4)+3 = 4\cdot 73+3 = 295$;
2) $S(0)$; $\theta(S(0)) = 4\cdot 0+1 = 1$;
3) $S(2)$; $\theta(S(2)) = 4\cdot 2+1 = 9$;
4) $J(0, 0, 1)$; $\theta(J(0, 0, 1)) = 4\cdot C(C(0,0),0)+3 = 4\cdot C(0,0)+3 = 4\cdot 0+3 = 3$.

Тепер $\tau(P) = \nu(295, 1, 9, 3) = 2^{295} + 2^{297} + 2^{307} + 2^{311} - 1$.

***Приклад* 3.** Знайдемо $P_{5119} = \varphi(5119)$. Маємо $5119+1 = 5120 = 2^{10}+2^{12}$, звідки $a_1 = 10$, $a_2 = 12-10-1 = 1$. Але $10 = 2+4\cdot C(1,0)$, тому P_{5119} така:

1) $T(1, 0)$;
2) $S(0)$.

***Приклад* 4.** Ефективну нумерацію всіх МТ задамо на основі кодування МТ. Кожну МТ можна задати послідовністю її команд такою, що 1-а команда містить в лівій частині символ q_0, остання команда містить в правій частині символ q^*. Множину команд МТ можна впорядкувати у вигляді послідовності з зазначеною властивістю багатьма способами, тому така нумерація МТ неоднозначна.

Занумеруємо внутрішні стани МТ і символи стрічки. Нехай $Q = \{q_0,..., q_f\}$, $T = \{a_0,..., a_m\}$.

Задамо кодування μ команд МТ:

$\mu(q_ia_j{\to}q_ka_1) = 3{\cdot}C^4(i, j, k, l)$;

$\mu(q_ia_j{\to}q_ka_1L) = 3{\cdot}C^4(i, j, k, l)+1$;

$\mu(q_ia_j{\to}q_ka_1R) = 3{\cdot}C^4(i, j, k, l)+2$.

Таке μ є бієктивним відображенням множини всіх можливих команд машин Тьюрінга на N. Використовуючи розглянуту вище бієкцію $\nu\colon \bigcup_{k\geq 1} N^k \to N$, визначимо код МТ M, заданої послідовністю команд $I_1I_2...I_к$, таким чином: $\rho(M) = \nu(\mu(I_1),..., \mu(I_k))$. Але ν та μ бієктивні, тому ρ теж бієкція. Тоді $\varphi = \rho^{-1}$ – шукана однозначна нумерація послідовностей команд МТ, але неоднозначна нумерація всіх МТ. Неважко переконатись, що така нумерація ефективна.

Приклад 2.1. Знайдемо код МТ M, яка обчислює функцію $x+y$. Нехай $a_0 = \lambda$, $a_1 = |$, $a_2 = \#$, $q^* = q_2$.

Використаємо приклад 1 розділу 2.2:

$q_0|\to q_0|R$; $\mu(q_0|\to q_0|R) = 3{\cdot}C^4(0,1,0,1)+2 = 3{\cdot}C(2,1)+2 = 3{\cdot}8+2 = 26$;

$q_0\#\to q_0|R$; $\mu(q_0\#\to q_0|R) = 3{\cdot}C^4(0,2,0,1)+2 = 3{\cdot}C(9,1)+2 = 3{\cdot}64+2 = 194$;

$q_0\lambda\to q_1\lambda L$; $\mu(q_0\lambda\to q_1\lambda L) = 3{\cdot}C^4(0,0,1,0)+1 = 3{\cdot}C(1,0)+1 = 3{\cdot}2+1 = 7$;

$q_1|\to q^*\lambda$; $\mu(q_1|\to q^*\lambda) = 3{\cdot}C^4(1,1,2,0) = 3{\cdot}C(25,0) = 3{\cdot}350 = 1050$.

Тепер $\rho(M) = \nu(26, 194, 7, 1050) = 2^{26} + 2^{221} + 2^{229} + 2^{1280} - 1$.

***Приклад* 5.** Ефективну нумерацію ϕ m-арних ЧРФ для всіх $m \geq 1$ задамо на основі кодування γ ОТ алгебри ЧРФ. Кожну ЧРФ можна описати нескінченною кількістю різних ОТ, тому ϕ неоднозначна.

Кодування γ операторних термів задамо так:

$\gamma(\boldsymbol{o}) = 0$;

$\gamma(\boldsymbol{s}) = 4$;

$\gamma(\boldsymbol{I}^n_m) = 4{\cdot}C(n-m, m-1) + 8$;

$\gamma(\mathbf{S}^{n+1}(t_0, t_1,..., t_n)) = 4{\cdot}C(C^{n+1}(\gamma(t_0), \gamma(t_1),..., \gamma(t_n)), n-1) +1$;

$\gamma(\mathbf{R}(t_0, t_1)) = 4{\cdot}C(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) +2$;

$\gamma(\mathbf{M}(t)) = 4{\cdot}\gamma(t) +3$.

Число $n\in N$ вважаємо *номером* ЧРФ f, якщо n є кодом якогось ОТ, і значенням цього ОТ є функція f. Числа, які не є кодами ОТ, та коди тих ОТ, які не задають ЧРФ, вважаємо номерами всюди невизначеної функції $f_\varnothing$. Отже, за кожною ЧРФ ефективно знаходиться її номер. З іншого боку, за кожним $n\in N$ ефективно визначається ЧРФ f така, що $\phi(n) = f$: за n як за кодом будуємо ОТ; якщо ОТ з таким кодом існує та задає ЧРФ, то $\phi(n)$ – ця ЧРФ f; якщо ОТ з таким кодом існує, але не задає ЧРФ, або якщо ОТ з таким кодом не існує, то $\phi(n) = f_\varnothing$. Тому ϕ – ефективна нумерація.

***Приклад* 6.** Знайдемо код ОТ алгебри n-арних ЧРФ для всюди невизначеної функції $f_\varnothing$. Для $f_\varnothing$ маємо ОТ $\mathbf{M}(\boldsymbol{s})$, звідки $\gamma(\mathbf{M}(\boldsymbol{s})) = 4{\cdot}\gamma(\boldsymbol{s})+3 = 4{\cdot}4+3 = 19$.

***Приклад* 7.** Ефективну неоднозначну нумерацію всіх ПРФ задамо на основі кодування π ОТ алгебри ПРФ. Таке кодування задамо так:

$\pi(\boldsymbol{o}) = 0$;

$\pi(\boldsymbol{s}) = 3$;

$\pi(\boldsymbol{I}^n_m) = 3{\cdot}C(n-m, m-1) + 6$;

$\pi(\mathbf{S}^{n+1}(t_0, t_1,..., t_n)) = 3{\cdot}C(C^{n+1}(\pi(t_0), \pi(t_1),..., \pi(t_n)), n-1)+1$;

$\pi(\mathbf{R}(t_0, t_1)) = 3{\cdot}C(\pi(t_0), \pi(t_1))+2$.

Число $n\in N$ вважаємо *номером* ПРФ f, якщо n є кодом якогось ОТ та значенням цього ОТ є функція f. Числа, які не є кодами ОТ, та коди тих ОТ, які не задають ПРФ, вважаємо номерами функції $\boldsymbol{o}$.

***Приклад* 8.** Знайдемо код ОТ алгебри ПРФ для $f(x_1, x_2) = x_1+x_2$. Для x_1+x_2 маємо ОТ $\mathbf{R}(\boldsymbol{I}^1_1, \mathbf{S}^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{I}^3_3))$, звідки

$\pi(\mathbf{R}(\boldsymbol{I}^1_1, \mathbf{S}^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{I}^3_3))) = 3{\cdot}C(\pi(\boldsymbol{I}^1_1), \pi(\mathbf{S}^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{I}^3_3))) +2 = 3{\cdot}C(6, 3{\cdot}C(C(\pi(\boldsymbol{s}), \pi(\boldsymbol{I}^3_3)), 0)+1)+2 =$

$= 3{\cdot}C(6, 3{\cdot}C(C(3, 15), 0)+1)+2 = 3{\cdot}C(6, 3{\cdot}C(174, 0)+1)+2 = 3{\cdot}C(6, 3{\cdot}15399+1)+2 = 3{\cdot}C(6, 46198)+2 =$

$= 3{\cdot}1067427916+2 = 3202283748+2 = 3202283750$.

***Приклад* 9.** Ефективну нумерацію всіх програмованих на N n-арних функцій задамо на основі кодування операторних термів ППА-AR-N. Така нумерація неоднозначна.

$\gamma(\boldsymbol{o}) = 0;$

$\gamma(\boldsymbol{s}) = 4;$

$\gamma(+) = 8;$

$\gamma(\cdot) = 12;$

$\gamma(\dot{-}) = 16:$

$\gamma(\boldsymbol{I}^{n}_{m}) = 4\cdot(C(n-m, m-1) + 5);$

$\gamma(\mathbf{S}^{n+1}(t_0, t_1, \ldots, t_n)) = 4\cdot C(C^{n+1}(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)), n-1)+1;$

$\gamma({}^{N}\boldsymbol{\Delta}(t_0, t_1, t_2)) = 4\cdot C^3(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2))+2;$

$\gamma({}^{N}☼(t_0, t_1)) = 4\cdot C(\gamma(t_0), \gamma(t_1))+3.$

***Приклад* 10.** Ефективну нумерацію всіх МНР-обчислюваних функцій фіксованої арності n задамо на основі кодування МНР-програм (приклад 1). *Номером* n-арної МНР-обчислюваної функції f буде код МНР-програми, яка обчислює функцію f. Кожна n-арна МНР-обчислювана функція може задаватися нескінченною кількістю різних МНР-програм, тому така нумерація неоднозначна.

***Приклад* 11.** Ефективну нумерацію всіх МНР-обчислюваних функцій можна ввести на основі кодування МНР-програм. *Номером n-арної* функції f буде число $C(k, n)$, де k – код МНР-програми для f.

***Приклад* 12.** Ефективну нумерацію всіх МТ-обчислюваних функцій фіксованої арності n задамо на основі кодування МТ. *Номером* n-арної МТ-обчислюваної функції f буде код МТ, яка обчислює f. Кожна n-арна МТ-обчислювана функція може задаватися нескінченною кількістю різних МТ, тому така нумерація неоднозначна.

***Приклад* 13.** Ефективну нумерацію всіх обчислюваних за Тьюрінгом функцій введемо на основі кодування МТ. *Номером* МТ-обчислюваної функції f арності n буде число $C(k, n)$, де k – код МТ для f.

Питання для самоконтролю

1. Як задаються кодування та нумерація МНР програм?
2. Як задаються кодування та нумерація МТ?
3. Опишіть кодування ОТ алгебри n-арних ЧРФ.
4. Опишіть кодування ОТ алгебри n-арних ПРФ.
5. Опишіть кодування ОТ ППА-AR-N.
6. Як задати ефективну нумерацію всіх МНР-обчислюваних функцій фіксованої арності n?
7. Як задати ефективну нумерацію всіх МТ-обчислюваних функцій фіксованої арності n?

Вправи

1. Вкажіть МНР-програму та її код для функцій:

1) $f(x) = 2x$;
2) $f(x,y) = x-y$;
3) $f(x) = x/2$;
4) $f(x) = [x/2]$;
5) $f(x) = \mathrm{nsg}(x)$;
6) $f(x) = \mathrm{sg}(x)$;
7) $f(x, y) = \mathrm{nsg}(x+y)$;
8) $f(x, y) = \mathrm{sg}(x\cdot y)$;
9) $f(x, y) = \min(x, y)$;
10) $f(x, y) = \max(x, y)$.

2. Вкажіть МНР-програму та її код для предикатів:

1) "x – непарне число";
2) "x – парне число";
3) "$x = 3$";
4) "$x \neq y$".

3. Визначіть всі МНР-програми з кодами від 0 до 99.

4. Вкажіть МТ та її код для функцій та предикатів:

1) $f(x) = \mathrm{sg}(x)$;
2) $f(x) = \mathrm{nsg}(x)$;
3) $f(x, y) = \mathrm{sg}(x+y)$;
4) $f(x, y) = \mathrm{nsg}(x+y)$;
5) $f(x) = \mathrm{sg}[x/2]$;
6) $f(x) = \mathrm{nsg}(x/2)$;
7) "x –парне число";
8) "x – непарне число".

3.3. Нумерації *n*-арних ЧРФ. Універсальні функції. *s-m-n*-теорема

В силу співпадіння класів ЧРФ, програмованих на N функцій, МНР-обчислюваних функцій та МТ-обчислюваних функцій, нумерації прикладів 10 та 12 розділу 3.2 можна розглядати як ефективні нумерації всіх n-арних ЧРФ для фіксованого n, а нумерації прикладів 5, 9, 11, 13 – як ефективні нумерації всіх n-арних ЧРФ.

Зафіксуємо для кожного $n \geq 1$ ефективну нумерацію n-арних ЧРФ. Зазвичай це буде нумерація на основі кодування МНР-програм (приклад 10), часом нумерація на основі кодування МТ (приклад 12). Такі нумерації назвемо *стандартними нумераціями* n-арних ЧРФ.

Для стандартних нумерацій введемо такі позначення.

n-арну ЧРФ з номером m позначаємо φ_m^n. У випадку $n = 1$ вживаємо спрощене позначення φ_m.

Область визначення та область значень функції φ_m^n позначаємо відповідно D_m^n та E_m^n.

У випадку $n = 1$ вживатимемо позначення D_m та E_m.

Номер функції назвемо також *індексом* функції.

Номер функції в стандартній намерації назвемо *стандартним індексом* функції.

Нумерація ξ *Гьодельова*, якщо існують РФ f та g такі:

– для кожного $m \in N$ $\varphi_m^n = \xi_{f(m)}$;

– для кожного $k \in N$ $\xi_k = \varphi_{g(k)}^n$.

Це означає, що існує пара алгоритмів, перший з яких за стандартним індексом функції знаходить її ξ-індекс, а другий за ξ-індексом функції знаходить її стандартний індекс.

Нехай $\boldsymbol{F}$ –деякий клас функцій вигляду $X \to Y$, для якого задана нумерація $\xi : N \to \boldsymbol{F}$. З кожною такою нумерацією ξ можна зв'язати функцію $u : N \times X \to Y$, визначену умовою $u(n, x) = \xi_n(x)$. Таку функцію u називають *спряженою* з нумерацією ξ.

Нумерація *обчислювана*, якщо спряжена з нею функція є ЧРФ.

Універсальні функції. Позначаємо $\boldsymbol{F}^m$ клас всіх функцій із $\boldsymbol{F}$ фіксованої арності m.

Функція $u(y, x_1, ..., x_n)$ *універсальна* для класу $\boldsymbol{F}^n$, якщо:

– для кожного значення m функція $u(m, x_1, ..., x_n) \in \boldsymbol{F}^n$;

– для кожної $f \in \boldsymbol{F}^n$ існує таке m, що $f(x_1, ..., x_n) = u(m, x_1, ..., x_n)$ для всіх значень $x_1, ..., x_n$.

Теорема 3.4. *Нехай* $\boldsymbol{T}$ *– деякий клас тотальних n-арних функцій на N, який містить функції* $\boldsymbol{o}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{I}_m^n$ *та замкнений відносно суперпозиції. Нехай функція u універсальна для* $\boldsymbol{T}^n$*. Тоді* $u \notin \mathbf{T}$.

Наслідок 1. *Функція, універсальна для класу n-арних РФ, не є ЧРФ.*

Наслідок 2. *Функція, універсальна для класу n-арних ПРФ, не є ПРФ.*

Теорема 3.5. *Існує РФ, універсальна для класу n-арних ПРФ.*

Наслідок. *Для відповідних класів функцій маємо строгі включення* ПРФ $\subset$ РФ $\subset$ ЧРФ.

Теорема 3.6. *Існує ЧРФ, універсальна для класу n-арних ЧРФ.*

Такою буде функція $u(y, x_1, ..., x_n) = \varphi_y^n(x_1, ..., x_n)$.

МНР-програма, яка обчислює універсальну ЧРФ, називається універсальною МНР-програмою.

Універсальна програма декодує довільне число y в програму P_y, а далі моделює роботу P_y. Тому така універсальна програма може бути задана в явному вигляді. Отже, можна конструктивно знайти індекс k універсальної функції u в стандартній нумерації $(n+1)$-арних ЧРФ, тобто u – це функція φ_k^{n+1}.

Машина Тьюрінга, яка обчислює універсальну ЧРФ, називається *універсальною МТ*. Таку МТ, здатну моделювати роботу довільної МТ за її кодом, теж можна задати в явному вигляді.

***s-m-n*-теорема.** Для кожного фіксованого значення $a_1, ..., a_m$ аргументів $x_1, ..., x_m$ $(m+n)$-арна ЧРФ $\varphi_z^{m+n}(x_1,..., x_m, y_1, ..., y_n)$ стає n-арною ЧРФ $\varphi_k^n(y_1, ..., y_n)$. Її індекс k ефективно знаходиться за z та $a_1, ..., a_m$. Це означає, що існує $(m+1)$-арна РФ, яка обчислює цей індекс:

Теорема 3.7 (*s-m-n*-теорема). *Для довільних m, n>*1 *існує* $(m+1)$*-арна РФ* $s_n^m(z, x_1, ..., x_m)$ *така, що для всіх* $z, x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n$ *маємо* $\varphi_z^{m+n}(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = \varphi^n_{s_n^m(z, x_1, ..., x_m)}(y_1, ..., y_n)$.

***Приклад* 1.** Залежність функції s_n^m від n можна зняти, якщо для задання ЧРФ використати МТ. Справді, за z визначаємо МТ з кодом z для функції φ_z^{m+n}. Задамо нову МТ M, яка зліва від початкового вмісту стрічки дописує слово $|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_m}$, а далі моделює роботу МТ з кодом z. Така МТ M при вході $|^{y_1}\#|^{y_2}\#...\#|^{y_n}$ обчислює n-арну функцію φ_k^n, причому k – код МТ M, – не залежить від n **.**

Теорема 3.8 (s-m-n-теорема в спрощеній формі). *Для кожної ЧРФ* $f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$ *існує РФ* $s(x_1, ..., x_m)$ *така: для всіх* $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n$ *маємо* $f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = \varphi^n_{s(x_1,...,x_m)}(y_1, ..., y_n)$.

Зокрема, при $m = n = 1$ маємо:

Теорема 3.9. *Для кожної ЧРФ* $f(x, y)$ *існує РФ* $s(x)$ *така, що* $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ *для всіх значень* x, y.

Розглянемо приклади застосування s-m-n-теореми.

***Приклад* 2.** Існує РФ $s(x, y)$ така, що для всіх $x, y, z\in N$ маємо $\varphi_{s(x,y)}(z) = \varphi_x(z)+\varphi_y(z)$.

Функція $f(x, y, z) = \varphi_x(z)+\varphi_y(z)$ є ЧРФ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y)$: $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z) =$ $= \varphi_x(z)+\varphi_y(z)$ для всіх $x, y, z\in N$

***Приклад* 3.** Для кожної 1-арної ЧРФ f існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x\in N$ маємо $D_{s(x)} = f^{-1}(D_{3x+1})$.

Розглянемо функцію $g(x, y) = \varphi_{3x+1}(f(y))$. Така функція є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така: для всіх $x, y\in N$ маємо $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$. Зафіксуємо x. Тепер маємо $y\in D_{s(x)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ $g(x, y)\downarrow \Leftrightarrow$ $\varphi_{3x+1}(f(y))\downarrow \Leftrightarrow f(y)\in D_{3x+1} \Leftrightarrow y\in f^{-1}(D_{3x+1})$. Звідси $D_{s(x)} = f^{-1}(D_{3x+1})$.

***Приклад* 4.** Існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x\in N$ маємо $E_{s(x)} = D_x$.

Функція $f(x, y) = \begin{cases} y, \text{ якщо } y\in D_x, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ; за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, y)$ $= \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх $x, y\in N$. Зафіксуємо x. За побудовою функції f маємо $D_{s(x)} = E_{s(x)}$. Тепер $y\in E_{s(x)} \Leftrightarrow y\in D_{s(x)}$ $\Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow f(x, y)\downarrow \Leftrightarrow y\in D_x$. Звідси $E_{s(x)} = D_x$.

***Приклад* 5.** Існує РФ $t(x)$ така, що для всіх $x\in N$ маємо $D_{t(x)} = E_x$.

Функція $f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y\in E_x, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ; за s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$ така: $f(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$ для всіх $x, y\in N$. Зафіксуємо x. Маємо $y\in D_{t(x)} \Leftrightarrow \varphi_{t(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow f(x, y)\downarrow \Leftrightarrow y\in E_x$. Тому $D_{t(x)} = E_x$.

***Приклад* 6.** Існує РФ $s(x)$ така: $D^2_{s(x)} = \{(u, v) |\ x = 2u+7v\}$ для всіх $x\in N$.

Функція $f(x, u, v) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 2u+7v, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, u, v) = \varphi^2_{s(x)}(u, v)$ для всіх $x, u, v\in N$. Зафіксуємо x. Тепер $(u, v)\in D^2_{s(x)} \Leftrightarrow \varphi^2_{s(x)}(u, v)\downarrow \Leftrightarrow f(x, u, v)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 2u+3v$. Звідси $D^2_{s(x)} = \{(u, v) \mid x = 2u+7v\}$.

***Приклад* 7.** Існує РФ $u(x, y)$ така: $D_{u(x,y)} = D_x\cup D_y$ для всіх $x, y\in N$.

Функція $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z\in D_x \text{ або } z\in D_y, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $u(x, y)$ така, що $f(x, y, z) = \varphi_{u(x,y)}(z)$ для всіх $x, y, z\in N$. Зафіксуємо x та y. Маємо $z\in D_{u(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{u(x,y)}(z)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x, y, z)\downarrow \Leftrightarrow z\in D_x\cup D_y$. Звідси випливає $D_{u(x,y)} = D_x\cup D_y$.

***Приклад* 8.** Існує РФ $s(x, y)$ така, що для всіх $x, y\in N$ маємо $D_{s(x,y)} = E_{s(x,y)} = D_x\cap D_y$.

Функція $f(x, y, z) = \begin{cases} z, \text{ якщо } z\in D_x \text{ та } z\in D_y, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y)$ така: $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z)$ для всіх $x, y, z\in N$. Зафіксуємо x та y. За побудовою f маємо $D_{s(x,y)} = E_{s(x,y)}$. Тепер $z\in E_{s(x,y)} \Leftrightarrow z\in D_{s(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z)\downarrow \Leftrightarrow f(x, y, z)\downarrow \Leftrightarrow z\in D_x \cap D_y$. Звідси $D_{s(x,y)} = E_{s(x,y)} = D_x\cap D_y$.

Питання для самоконтролю

1. Як задати ефективну нумерацію всіх n-арних ЧРФ?
2. Як задати ефективну нумерацію всіх n-арних ПРФ?
3. Які нумерації n-арних ЧРФ вважаємо стандартними?
4. Що таке стандартний індекс ЧРФ?
5. Дайте визначення геделевої нумерації n-арних ЧРФ.
6. Дайте визначення спряженої з нумерацією функції.
7. Дайте визначення обчислюваної нумерації.

8. Дайте визначення універсальної функції.
9. Сформулюйте теореми про універсальні функції.
10. Що таке універсальна ЧРФ? універсальна МНР-програма? універсальна МТ?
11. Опишіть принцип роботи універсальної МНР-програми.
12. Сформулюйте s-m-n-теорему в загальному вигляді та у спрощеній формі.

Вправи

1. Чи існують m, $n\in N$ такі, що $m\neq n$, $m\in D_n$ та $n\in D_m$?
2. Чи існують m, $n\in N$ такі, що $m\neq n$, $m\in E_n$ та $n\in E_m$?
3. Доведіть, що кожна Гьодельова нумерація ефективна.
4. Наведіть приклад однозначної нумерації n-арних ЧРФ.
5. Встановіть зв'язок між нумераціями та універсальними функціями.
6. Доведіть існування таких РФ s:
1) $D^3_{s(x)} = \{(u, v, w) \mid x = u+v^2+w^3\}$ для всіх $x\in N$;
2) $D^4_{s(x)} = \{(u, v, w, t) \mid x = 3u+2v+7w+5t\}$ для всіх $x\in N$;
3) $D_{s(x,y)} = E_x\cap E_y$ для всіх $x, y\in N$;
4) $E_{s(x,y)} = D_x\cup E_{y+1}$ для всіх $x, y\in N$;
5) $D_{s(x,y)} = E_{2x+3}\cap D_{3y+2}$ для всіх $x, y\in N$;
6) $E_{s(x,y,z)} = (D_{3x}\cup D_y)\cap D_{z+5}$ для всіх $x, y, z\in N$;
7) $E_{s(x,y)} = (D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$ для всіх $x, y\in N$;
8) $D_{s(x,y)} = f^{-1}(D_{x+3}\cup D_{2y+5})$ для всіх $x, y\in N$ (тут f□ – фіксована ЧРФ).

3.4. Теореми Кліні про нерухому точку для індексних функцій

Теореми про нерухому точку зустрічаються в багатьох розділах математики. В цьому посібнику розглянемо теореми про нерухому точку для індексних рекурсивних функцій.

Теорема 3.10. *Нехай f – $(n+1)$-арна РФ. Тоді існує n-арна РФ g така, що для всіх значень $x_1, ..., x_n$ маємо* $\varphi_{g(x_1,...,x_n)} = \varphi_{f(g(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n)}$.

Переформулюємо теорему 3.10 для випадку $n = 0$.

Теорема 3.11. *Нехай $f(x)$ – РФ. Тоді існує $n\in N$ таке, що* $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Первісне формулювання С.Кліні теореми про нерухому точку:

Теорема 3.12. *Нехай $h(z, x)$ – ЧРФ. Тоді існує $n\in N$ таке, що для всіх x маємо* $h(n, x) = \varphi_n(x)$.

Теорема Кліні про нерухому точку насправді є теоремою про псевдонерухому точку: умова $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$ не означає, що $n = f(n)$, а свідчить лише про те, що n та $f(n)$ – індекси однієї і тої ж ЧРФ.

***Приклад* 1.** МНР-програму P назвемо самотвірною, якщо для довільного $x\in N$ маємо $P(x)\downarrow\tau(P)$, де $\tau(P)$ – код програми P. На перший погляд, таких програм бути не може, бо для побудови P треба знати $\tau(P)$ тобто саму програму P. Проте МНР-програма P така, що $P(x)\downarrow\tau(P)$ для всіх значень x, існує! Візьмемо функцію $h(z, x) = z$. За теоремою 3.4.3 існує таке n: для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$. Отже, $\varphi_n(x) = h(n, x) = n$ для всіх x. Тому програма P_n – шукана.

***Приклад* 2.** Існує $n\in N$ таке, що для всіх x маємо $\varphi_n(x) = 3n+x^{2n}$.

Візьмемо функцію $h(z, x) = 3z+x^{2z}$. За теоремою 3.12 існує таке n, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$. Отже, $\varphi_n(x) = h(n, x) = 3n+x^{2n}$ для всіх x.

***Приклад* 3**. Існує $n\in N$ таке, що $D_n = E_n = N\setminus\{n, 5n\}$.

Візьмемо функцію $h(z, x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x\neq z \text{ та } x\neq 5z, \\ & \text{невизначене інакше.}\end{cases}$ Така h є ЧРФ. За теоремою 3.12 існує таке n, що $h(n, x) = \varphi_n(x)$ для всіх x. Тоді $\varphi_n(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x\neq n \text{ та } x\neq 5n, \\ & \text{невизначене інакше.}\end{cases}$ Звідси $D_n = E_n = N\setminus\{n, 5n\}$.

***Приклад* 4.** Існує $n\in N$ таке, що $D_n = E_n = \{x \mid x \text{ непарне}\}\cup\{1, 2,..., n\}$.

Функція $h(z, x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \text{ непарне або } x \in \{1,2,...,z\}, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ. За теоремою 3.12 існує таке n, що $h(n, x) = \varphi_n(x)$ для всіх x. Тоді $\varphi_n(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \text{ непарне або } x \in \{1,2,...,n\}, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Звідси маємо $D_n = E_n = \{x \mid x \text{ непарне}\} \cup \{1, 2, ..., n\}$.

***Приклад* 5.** Існує $n \in N$ таке, що $D_n = E_n = \{x \mid \varphi_n(5x)\downarrow\} \cap \{x \mid x \text{ парне}\}$.

Функція $h(z, x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \varphi_z(5x)\downarrow \text{ та } x \text{ парне,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За теоремою 3.12 існує таке n, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x) = \varphi_n(x) = =$ $\begin{cases} x, & \text{якщо } \varphi_n(5x)\downarrow \text{ та } x \text{ парне,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ тому отримуємо $D_n = E_n = \{x \mid \varphi_n(5x)\downarrow\} \cap \{x \mid x \text{ парне}\}$.

***Приклад* 6.** Існує РФ $g(x)$ така: $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{g(x)+3^x\}$ для всіх $x \in N$.

Функція $h(t, x, y) = \begin{cases} y, & \text{якщо } y = t + 3^x, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(t, x)$ така: $h(t, x, y) = \varphi_{s(t,x)}(y)$ для всіх $t, x, y \in N$. За теоремою 3.10 існує РФ g така, що $\varphi_{g(x)} = \varphi_{s(g(x),x)}$ для всіх $x \in N$. Тоді маємо $\varphi_{g(x)}(y) = \varphi_{s(g(x),x)}(y) = h(g(x), x, y) = \begin{cases} y, & \text{якщо } y = g(x) + 3^x, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$ Тому для кожного $x \in N$ маємо $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{g(x)+3^x\}$.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для індексних РФ.
2. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для 1-арних індексних РФ.
3. Наведіть первісне формулювання С. Кліні теореми про нерухому точку.
4. Чи вірно, що умова $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$ означає $n = f(n)$?
5. Що таке самотвірна МНР-програма?

Вправи

1. Виведіть теорему 3.11 із теореми 3.12 та навпаки.

2. Доведіть , що існує $n \in N$ таке:

1) $D_n = \{x \mid \varphi_n(x)\downarrow\} \cap \{x \mid x \text{ є парним числом}\}$;
2) $E_n = \{x \mid \varphi_n(2x+1)\downarrow\} \cup \{x \mid x \text{ є простим числом}\}$;
3) $D_n = E_n = N \backslash \{1, 2, 3,..., n\}$;
4) $D_n = E_n = \{n, 2n, 3n,..., n^2\}$;
5) $D_n = E_n = \{x \mid x \text{ є парним числом}\} \backslash \{2n, 4n, 6n\}$;
6) $E_n = \{x \mid x \text{ не є простим числом}\} \cup \{2n, 3n, 5n, 7n\}$;

3. Доведіть, що існує РФ $g(x)$ така, що для всіх $x \in N$ маємо:

1) $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{3g(x)+x^3\}$;
2) $E_{g(x)} = \{7x+(3+x)g(x)\}$;
3) $D_{g(x)} = \{5x+g(x)+2^{g(x)}\}$;
4) $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{x \cdot g(x)+2^x+3\}$.

4. Доведіть, що для кожних РФ $g(x)$ та $m \in N$ існує $n \in N$ таке, що $D_n = D_m \cup \{g(n)\}$.

5. Чи існують $m, n \in N$ такі, що $m \neq n$, $D_m = \{n\}$ та $D_n = \{m\}$?

6. Спробуйте побудувати самотвірну МНР-програму.

7. Доведіть, що для кожної РФ $f(x)$ та для кожного $k \in N$ існує $n \in N$ таке, що $n>k$ та $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

8. Доведіть: нехай $f(x)$ – строго монотонна тотальна функція така, що з умови $m \neq n$ випливає $\varphi_{f(m)} \neq \varphi_{f(n)}$, причому $f(n)$ є найменшим індексом функції $\varphi_{f(n)}$; тоді f не є ЧРФ (це означає відсутність "природних" однозначних ефективних нумерацій ЧРФ).

9. Збудуйте нескінченну послідовність попарно різних натуральних чисел n_0, n_1, … таку:

1) для всіх $i \in N$ маємо $D_{n_{i+1}} = \{n_i\}$;

2) для всіх $i \in N$ маємо $D_{n_i} = \{n_{i+1}\}$.

4. РЕКУРСИВНІ, РЕКУРСИВНО ПЕРЕЛІЧНІ МНОЖИНИ. РЕКУРСИВНІ, ЧАСТКОВО РЕКУРСИВНІ ПРЕДИКАТИ

Введені раніше для функцій поняття примітивної рекурсивності, рекурсивності та часткової рекурсивності перенесемо на класи множин і предикатів. Розглянемо такожя фундаментальні результати про алгоритмічно нерозв'язні та часково розв'язні проблеми.

4.1. Примітивно рекурсивні, рекурсивні та рекурсивно перелічні множини.

Множина $M \subseteq N^n$:

– *рекурсивна* (РМ), якщо її характеристична функція χ_M рекурсивна;

– *примітивно рекурсивна* (ПРМ), якщо χ_M примітивно рекурсивна.

Множина $M \subseteq N$ – *рекурсивно перелічна* (РПМ), якщо $M = \varnothing$ або $M = E_f$ для деякої РФ f.

Множина $M \subseteq N^n$ є РПМ, якщо $M = \varnothing$ або $M = \{(g_1(x), ..., g_n(x)) \mid x \in N\}$ для деяких 1-арних РФ $g_1, ..., g_n$.

Як наслідки тези Чорча дістаємо такі твердження:

– *клас РМ збігається з класом алгоритмічно розв'язних множин натуральних чисел*;

– *клас РПМ збігається з класом алгоритмічно перелічних множин натуральних чисел.*

Для кожної $L \subseteq N^n$ визначимо *множину-згортку*

$$C^n(L) = \{C^n(x_1, ..., x_n) \mid (x_1, ..., x_n) \in L\}.$$

Нехай $L \subseteq N^n$ та $M \subseteq N^n$. Безпосередньо із визначень випливає:

$$C^n(L \cup M) = C^n(L) \cup C^n(M),$$
$$C^n(L \cap M) = C^n(L) \cap C^n(M),$$
$$C^n(N^n \setminus L) = N \setminus C^n(L).$$

Теорема 4.1. *Множина $L \subseteq N^n$ рекурсивна* (*примітивно рекурсивна*, *рекурсивно перелічна*) $\Leftrightarrow$ *множина $C^n(L)$ рекурсивна* (*примітивно рекурсивна*, *рекурсивно перелічна*)

Враховуючи теорему 4.1, обмежимося розглядом рекурсивних, примітивно рекурсивних та рекурсивно перелічних множин на N.

Теорема 4.2. 1) *кожна скінченна множина є ПРМ*

2) *кожна ПРМ є РМ*;

3) *кожна РМ є РПМ*;

4) *клас ПРМ строго включається в клас РМ.*

Вкажемо деякі властивості РМ та РПМ [5, 13]:

1) (теорема Поста). *Якщо множини L та $\overline{L}$ рекурсивно перелічні*, *то множини L та $\overline{L}$ рекурсивні.*

2) (узагальнена теорема Поста). *Нехай A та B – РПМ*, *причому $A \cap B = \varnothing$ та множина $A \cup B$ рекурсивна. Тоді A та B рекурсивні.*

3) *Множина L є нескінченною РМ $\Leftrightarrow$ $L = E_f$ для деякої строго монотонної РФ f.*

***Приклад* 1.** Покажемо, що множина L є непорожньою РМ $\Leftrightarrow$ $L = E_f$ для деякої монотонної РФ f.

Нехай $L = E_f$ для деякої монотонної РФ f. Нехай E_f нескінченна, тоді $\chi_{E_f}(x) = nsg(\prod_{k=0}^{\mu_z(x<f(z))} |x - f(k)|)$.

Нехай E_f скінченна та m – максимальний елемент E_f. Тоді $\chi_{E_f}(x) = nsg(\prod_{k=0}^{\mu_k(f(k)=m)} |x - f(k)|)$. В обох випадках χ_{E_f} рекурсивна, звідки E_f рекурсивна та $E_f \neq \varnothing$.

Нехай $L \neq \varnothing$ є РМ. Задамо функцію f схемою примітивної рекурсії

$$f(0) = \mu_k(\chi_L(k) = 1);$$
$$f(x+1) = f(x)\, nsg(\chi_L(x+1)) + (x+1)\, \chi_L(x+1).$$

За побудовою $L = E_f$ та f монотонна і тотальна. Отже, f – шукана монотонна РФ.

Теорема 4.1.3. *Наступні визначення РПМ еквівалентні*:

df1) *$L = \varnothing$ або L є областю значень деякої РФ;*

df2) *L є областю значень деякої ЧРФ;*

df3) *L є областю визначення деякої ЧРФ;*

df4) *часткова характеристична функція множини L є ЧРФ.*

***Приклад* 2.** Класи ПРМ та РМ замкнені відносно операцій $\cup$, $\cap$ та доповнення.

Нехай χ_A та χ_B – РФ (ПРФ). Маємо $\chi_{A\cup B}(x) = sg(\chi_A(x) + \chi_B(x))$, $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$ та $\chi_{\overline{A}}(x) = nsg(\chi_A(x))$, тому $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$ та $\chi_{\overline{A}}$ – теж РФ (ПРФ).

Стандартну ефективну нумерацію РПМ введемо на основі нумерацій n-арних ЧРФ згідно df3: *номером* (*індексом*) *РПМ* $L\subseteq N^n$ *є номер* n*-арної ЧРФ* f *такої, що* $L = D_f$.

РПМ $L \subseteq N^n$ з номером m позначаємо D_m^n, або D_m при $n = 1$.

***Приклад* 3.** Клас РПМ замкнений відносно операцій $\cup$ та $\cap$.

За s-m-n-теоремою існують РФ $u(x, y)$ та $s(x, y)$ такі, що для всіх $x, y\in N$ маємо $D_{u(x,y)} = D_x\cup D_y$ та $D_{s(x,y)} = D_x\cap D_y$ (приклади 7 та 8 підрозділу 3.3). Тому якщо A та B є РПМ, то $A\cup B$ та $A\cap B$ теж є РПМ, причому індекси множин $A\cup B$ та $A\cap B$ ефективно знаходяться за індексами множин A та B.

Для довільної множини $L\subseteq N$ введемо позначення $L_{2x} = \{2x|\ x\in L\}$ та $L_{2x+1} = \{2x+1|\ x\in L\}$.

Для множин, заданих на N, визначимо операції сполучення $\oplus$ та добутку $\otimes$:

$A\oplus B = \{2x|x\in A\}\cup\{2x+1|x\in B\} = A_{2x}\cup B_{2x+1}$;

$A\otimes B = \{C(x, y)|\ x\in A, y\in B\}$.

Теорема 4.4. 1) *Множини* A та B *РМ/РПМ* $\Leftrightarrow$ $A\oplus B$ *РМ/РПМ.*

2) *Якщо* $A\neq\varnothing$ *та* $B\neq\varnothing$, *то* A *та* B *РМ/РПМ* $\Leftrightarrow$ $A\otimes B$ *РМ/РПМ.*

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення РМ, ПРМ, РПМ.
2. Сформулюйте наслідки тези Чорча для РМ та РПМ.
3. Що таке множина-згортка?
4. Укажіть співвідношення між класами ПРМ, РМ та РПМ.
5. Відносно яких теоретико-множинних операцій замкнені класи ПРМ та РМ?
6. Відносно яких теоретико-множинних операцій замкнений клас ПРМ?
7. Наведіть властивості РМ та РПМ
8. Сформулюйте еквівалентні визначення РПМ.
9. Сформулюйте теорему Поста для множин.
10. Як задається стандартна нумерація РПМ?
11. Дайте визначення операцій $\oplus$ та $\otimes$. Чи замкнені щодо $\oplus$ та $\otimes$ є такі класи: ПРМ; РМ; РПМ?

Вправи

1. Нехай A та B – РПМ, C – РМ, причому $A\cap B = \varnothing$, $A\subseteq C\subseteq A\cup B$. Доведіть, що тоді A є РМ.
2. Нехай f – РФ, g – ін'єктивна РФ така, що E_g – РМ, причому $f(x)\geq g(x)$ для всіх x. Доведіть, що тоді E_f є РМ.
3. Нехай A – РМ, f – сюр'єктивна РФ така, що $f(A)\cap f(N\setminus A) = \varnothing$. Доведіть: $f(A)$ є РМ.
4. Нехай L – нескінченна РПМ. Доведіть, що тоді існує нескінченна РМ M така, що $M\subseteq L$.
5. Нехай L – нескінченна РПМ. Доведіть, що тоді існує ін'єктивна РФ f така, що $L = E_f$.
6. Доведіть, що для довільних РПМ A та B існують РПМ L та M такі, що $L\subseteq A$, $M\subseteq B$, $L\cap M = \varnothing$ та $L\cup M = A\cup B$.
7. Доведіть теорему про еквівалентні визначення РПМ.

4.2. Рекурсивні та частково рекурсивні предикати

Тотальний n-арний предикат на N:

– *рекурсивний* (РП), якщо його характеристична функція рекурсивна;

– *примітивно рекурсивний* (ПРП), якщо його характеристична функція є ПРФ;

– *частково рекурсивний* (ЧРП), якщо його часткова характеристична функція є ЧРФ.

Теорема 4.5. 1) *предикат* P *є ЧРП* (*РП*, *ПРП*) $\Leftrightarrow$ T_P *є РПМ* (*відповідно РМ*, *ПРМ*);

2) *класи ПРП та РП замкнені відносно логічних операцій* $\vee$, &, $\neg$;

3) *клас ЧРП замкнений відносно операцій* $\vee$ *та* &;

4) *клас ПРП строго включається в клас РП*;

5) *кожний рекурсивний предикат є ЧРП*;

6) *якщо* P *та* $\neg P$ *– ЧРП, то* P *та* $\neg P$ *– РП*;

Теорема 4.6. *Предикат* $Q(x_1, ..., x_n)$ *є ЧРП тоді і тільки тоді, коли існує РП* $R(x_1, ..., x_n, y)$ *такий*: $Q(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \exists yR(x_1, ..., x_n, y)$.

Теорема 4.7. *Нехай* $Q(x_1, ..., x_n, y)$ – *ЧРП. Тоді* □$yQ(x_1, ..., x_n, y)$ *теж ЧРП.*

Наслідок. *Нехай* $Q(x_1,...,x_n, y)$ *є ЧРП, тоді* $\exists y_1…\exists y_k\mathrm{Q}(x_1,...,x_n, y_1,..., y_k)$ *теж ЧРП.*

Надалі замість "$P(x_1, ..., x_n) = T$" будемо також писати "$P(x_1, ..., x_n)$".

***Приклад* 1.** Предикат "x є числом Ферма" є ЧРП.

"x є числом Ферма" $\Leftrightarrow \exists u\exists v\exists w(u>0\ \&\ v>0\ \&\ w>0\ \&\ u^x+v^x = w^x)$. Але предикат в дужках є РП, тому за теоремою 4.6 наш предикат є ЧРП.

***Приклад* 2.** Предикат "$y\in E_x$" є ЧРП.

Маємо $y\in E_x \Leftrightarrow \exists z\exists k(P_x(z){\downarrow}y$ за k кроків). Предикат в дужках є РП, тому за теоремою 4.6 наш предикат є ЧРП.

***Приклад* 3.** Предикат "$D_x \neq\varnothing$" є ЧРП.

Маємо $D_x\neq\varnothing \Leftrightarrow \exists z\exists k(P_x(z){\downarrow}$ за k кроків). Предикат в дужках є РП, тому за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП

***Приклад* 4.** Предикат "$\{x, y\}\subseteq D_z$" є ЧРП.

Маємо $\{x, y\}\subseteq D_z \Leftrightarrow x\in D_z\ \&\ y\in D_z \Leftrightarrow \exists k(P_z(x){\downarrow}y$ за k кроків) &. $\exists k(P_z(y){\downarrow}y$ за k кроків). В дужках РП, тому наш предикат ЧРП.

***Приклад* 5.** Предикат "φ_x неін'єктивна" є ЧРП.

φ_x неін'єктивна $\Leftrightarrow \exists a\exists b\exists c\ (a\neq b\ \&\ \varphi_x(a) = c\ \&\ \varphi_x(b) = c) \Leftrightarrow \exists a\exists b\exists c\exists k\exists l\ (a\neq b\ \&(P_x(a){\downarrow}c$ за k кроків) & & $(P_x(b){\downarrow}c$ за l кроків)).

Теорема 4.8. *Функція* $f(x_1, ..., x_n)$ *частково рекурсивна* $\Leftrightarrow$ *предикат* "$y = f(x_1, ..., x_n)$" *є ЧРП.*

***Приклад* 6.** Нехай f є ЧРФ, A є РПМ. Тоді $f^{-1}(A)$ та $f(A)$ є РПМ.

Маємо $x\in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x)\in A$. Але останній предикат є ЧРП.

Маємо $x\in f(A) \Leftrightarrow \exists z(z\in A\ \&\ x = f(z))$. За теоремою 4.8 "$x = f(z)$" є ЧРП, тому справа в дужках ЧРП. За теоремою 4.7 "$x\in f(A)$" є ЧРП.

***Приклад* 7.** Існує РФ $s(x, y)$ така, що $E_{s(x,y)} = (D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$ для всіх x, y□$\in N$.

Множину $(D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$ позначимо L. Функція $f(x, y, z) = = \begin{cases} z, \text{ якщо } z\in L, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$ є ЧРФ, бо "$z\in L$" є ЧРП. Справді, $z\in L \Leftrightarrow z = x \vee z = y \vee (z\in D_{3x}\ \&\ z\in E_{2y}) \Leftrightarrow z = x \vee z = y \vee (\exists k(P_{3x}(z){\downarrow}$ за k кроків) & & $\exists u\exists k(P_{3y}(u){\downarrow}z$ за k кроків)). За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y)$ така, що $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z)$ для всіх x, y, z. Зафіксуємо x та y. За побудовою функції f $D_{s(x,y)} = E_{s(x,y)}$. Тепер $z\in E_{s(x,y)} \Leftrightarrow z\in D_{s(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z){\downarrow} \Leftrightarrow \Leftrightarrow f(x, y, z){\downarrow} \Leftrightarrow z\in L$. Звідси $E_{s(x,y)} = L = (D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$.

Масова проблема *алгоритмічно розв'язна*, або *розв'язна*, якщо відповідний предикат рекурсивний, інакше проблема *алгоритмічно нерозв'язна*, або *нерозв'язна*.

Масова проблема *частково алгоритмічно розв'язна*, або *частково розв'язна*, якщо відповідний предикат є ЧРП.

Проблема зупинки формулюється так: за x та y встановити, чи є визначеним значення $\varphi_x(y)$. *Проблема самозастосовності* формулюється так: за x встановити, чи є визначеним значення $\varphi_x(x)$.

Теорема 4.9. *Предикати* "$\varphi_x(x){\downarrow}$" *і* "$\varphi_x(y){\downarrow}$" *нерекурсивні*,

Таким чином, проблеми самозастосовності та зупинки алгоритмічно нерозв'язні.

***Приклад* 8.** Множина $D = \{x \mid \varphi_x(x){\downarrow}\}$ – нерекурсивна РПМ.

Характеристична функція множини D є характеристичною функцією предикату "$\varphi_x(x){\downarrow}$", яка нерекурсивна згідно теореми 4.2.7. Але D є областю визначення ЧРФ $u(x) = \varphi_x(x)$, тому D є РПМ.

***Приклад* 9.** Множина $\overline{D} = \{x \mid \varphi_x(x){\uparrow}\}$ не є РПМ.

Якщо $\overline{D}$ є РПМ, то за теоремою Поста множини $\overline{D}$ та D рекурсивні, що суперечить прикладу 8.

***Приклад* 10.** Предикат "$\varphi_x(x){\uparrow}$" не є ЧРП. Справді, область істинності цього предикату – множина $\overline{D}$.

***Приклад* 11.** Функція $\varphi_x(x)$ не має рекурсивних довизначень.

Функцію g називають розширенням функції f (позначаємо $f\subseteq g$), якщо $\Gamma_f\subseteq\Gamma_g$. Довизначення – цетотальне розширення функції.

Припустимо супротивне: функція $\varphi_x(x)$ має рекурсивне довизначення $f(x)$. Тоді $nsg(\varphi_x(x))$ має рекурсивне довизначення $g(x)$. Нехай g суть функція φ_k. Значення $nsg(\varphi_k(k)) = nsg(g(k))$ визначене, бо g є РФ. Маємо $nsg(\varphi_k(k)) = g(k) = \varphi_k(k)$ □ суперечність.

Таким чином, із теореми 4.9 випливає:

– клас РПМ незамкнений відносно операції доповнення.

– клас ЧРП незамкнений відносно логічної операції $\neg$.

– маємо наступні строгі включення: ПРФ $\subset$ РФ $\subset$ ЧРФ; ПРМ $\subset$ РМ $\subset$ РПМ; ПРП $\subset$ РП $\subset$ ЧРП.

***Приклад* 12.** Не існує РФ $s(x, y)$ така, що $D_{s(x,y)} = E_x \backslash D_y$ для всіх x та y.

Нехай така РФ $s(x, y)$ існує. Візьмемо значення x та y такі, що $E_x = N$ та $D_y = D$.

Тоді $E_x \backslash D_y = N \backslash D = \overline{D}$ – не РПМ, але $D_{s(x,y)}$ є РПМ. Маємо суперечність.

***Приклад* 13.** Існує РП $R(x, y)$ такий, що $\forall x R(x, y)$ не є ЧРП.

Нехай $R(x, y)$ – це РП $\neg(P_x(x)\downarrow$ за y кроків). Тоді $\forall x R(x, y) \Leftrightarrow \forall x \neg(P_x(x)\downarrow$ за y кроків) $\Leftrightarrow \varphi_x(x)\uparrow$. Але "$\varphi_x(x)\uparrow$" не є ЧРП.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення РП, ПРП, ЧРП.
2. Який зв’язок між ПРП, РП, ЧРП та ПРМ, РМП, РПМ?
3. Відносно яких логічних зв’язок замкнені класи ПРП та РП?
4. Відносно яких логічних зв’язок замкнений клас ЧРП?
5. Укажіть співвідношення між класами ПРП, РП та ЧРП.
6. Сформулюйте теорему Поста для предикатів.
7. Що таке алгоритмічно розв’язна масова проблема?
8. Що таке частково алгоритмічно розв’язна масова проблема?
9. Як формулюються проблема зупинки та проблема самозастосовності?
10. Сформулюйте наслідки алгоритмічної нерозв’язності проблеми самозастосовності.
11. Наведіть приклади нерекурсивних РПМ і множин, які не є РПМ.
12. Наведіть приклади нерекурсивних ЧРП і предикатів, які не є ЧРП.

Вправи

1. Нехай f є РФ, A є РМ. Доведіть, що тоді $f^{-1}(A)$ є РМ. Чи вірно, що для довільних РФ f та РМ A множина $f(A)$ завжди є РМ ?.

2. Нехай □f є ЧРФ, A є РПМ.

1) Доведіть, що тоді множини $f^{-1}(A)$ та $f(A)$ є РПМ.

2) Чи залишиться зазначене вище твердження вірним, якщо слова "ЧРФ" та "РПМ" відповідно замінити на "РФ" та "РМ"?

3. Доведіть, що якщо A є РПМ, то $\bigcup\limits_{x\in A} D_x$ та $\bigcup\limits_{x\in A} E_x$ теж РПМ.

4. Чи існує РФ $f(x, y)$ така, що якщо $P_x(y)$ зупиняється, то це відбувається за $\le f(x, y)$ кроків?

5. Чи має рекурсивні довизначення функція $\varphi_x(y) + \varphi_y(x)$?

6. Нехай всі множини R_m, де $m\in N$, рекурсивні. Чи завжди множина $\bigcap\limits_{m\in N} R_m$ є РМ? є РПМ?

7. Чи існує РФ s така:

1) для всіх $x, y\in N$ $E_{s(x, y)} = D_{5x+3y} \cup E_{7y+2x}$?

2) для всіх $x, y\in N$ $D_{s(x, y)} = (E_{2x} \cup D_{x+2y}) \cap D_{3y}$?

3) для всіх $x, y\in N$ $E_{s(x, y)} = (D_{3x} \cap E_{2y}) \cup \{3y, x+y\}$?

4) для всіх $x, y\in N$ $D_{s(x, y)} = (E_{4x} \cup D_{3y+x}) \backslash \{x+3, y\}$?

5) для всіх $x, y\in N$ $E_{s(x, y)} = f^{-1}(D_{2x} \cup E_{3y})$? (тут f – фіксована ЧРФ)

6) для всіх $x, y\in N$ $D_{s(x,y)} = f(D_x \cap E_{2y})$? (тут f – фіксована ЧРФ)

7) для всіх $x\in N$ $D_{s(x)} = C(D_x^2)$?

8) для всіх $x\in N$ $D^2_{s(x)} = C^{-1}(D_x)$?

9) для всіх $x, y\in N$ $D_{s(x,y)} = \overline{\overline{D}_x \otimes \overline{E}_y}$?

10) для всіх $x, y, z \in N$ $E_{s(x, y, z)} = E_x \backslash (D_y \cup E_z)$?

11) для всіх $x, y, z \in N$ $D_{s(x, y, z)} = (E_x \cap \overline{D}_y) \backslash D_z)$?

8. Доведіть (теорема про графік): $f(x_1, ..., x_n)$ є ЧРФ $\Leftrightarrow$ Γ_f є РПМ.

9. Доведіть (теорема Кліні про нормальну форму): для кожної n-арної ЧРФ f існує $(n+1)$-арна РФ g така, що для всіх $x_1 \in N, ..., x_n \in N$ маємо $f(x_1, ..., x_n) = \boldsymbol{l}(\mu_t(g(x_1, ..., x_n, t) = 0))$.

10. Доведіть:

1) Якщо функція f є ПРФ/РФ, то Γ_f теж є ПРМ/РМ.
2) Існують нерекурсивні ЧРФ із скінченним графіком.
3) Існує РФ f така, що Γ_f не є ПРМ.
4) Існують ЧРФ з нерекурсивним графіком.

4.3. Індексні множини. Теореми Райса

Нехай $\varphi : N \to \Im$ – ефективна нумерація множини об'єктів $\Im$, нехай $\Re \subseteq \Im$. Множину номерів всіх об'єктів із $\Re$ позначатимемо $N(\Re)$, тобто $N(\Re) = \varphi^{-1}(\Re)$. Множини вигляду $N(\Re)$, де $\Re \subseteq$ ЧРФ^n (зокрема, $\Re \subseteq$ ЧРФ^1), будемо називати *індексними множинами*.

Теорема 4.10 (Райс). *Нехай* $\Re \subset$ ЧРФ^n та $\Re \neq \varnothing$. *Тоді множина* $N(\Re)$ *нерекурсивна.*

Наслідок. *Нехай* $\Re \subset$ РПМ *та* $\Re \neq \varnothing$. *Тоді* $N(\Re)$ *не є РМ.*

Теорема Райса стверджує, що жодна нетривіальна властивість в класах всіх n-арних ЧРФ та всіх РПМ не може бути ефективно розпізнана!

***Приклад* 1.** Множина $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ є нерекурсивною РПМ.

Предикат "$D_x \neq \varnothing$" є ЧРП, бо $D_x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y \exists k (P_x(y){\downarrow}$ за k кроків), а предикат "$P_x(y){\downarrow}$ за k кроків" рекурсивний. Тому $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ є РПМ. Але за теоремою Райса $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ не є РМ.

Припустивши $f_\varnothing \in \Re$, дістаємо твердження, певною мірою дуальне до теореми Райса.

Теорема 4.11. *Нехай* $\Re \subset$ ЧРФ^n *та* $f_\varnothing \in \Re$. *Тоді* $N(\Re)$ *не є РПМ.*

***Приклад* 2.** Множини $\{x \mid D_x$ є РМ$\}$ не є РПМ.

Множина $\varnothing$ є рекурсивною, тому $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid D_x$ є РМ$\}$.

***Приклад* 3.** Множини $\{x \mid D_x$ скінченна$\}$ не є РПМ.

Множина $\varnothing$ є скінченною, тому $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid D_x$ скінченна$\}$.

Питання для самоконтролю

1. Які множини називають індексними?
2. Чи є індексною діагональна множина D?
3. Сформулюйте теорему Райса.
4. У чому полягає значення теореми Райса?
5. Сформулюйте теорему, дуальну до теореми Райса.
6. Наведіть приклади використання теорем про індексні множини.

Вправи

1. Чи будуть РПМ наступні множини:

1) $\{C(x, y) \mid x \in D_y\}$?	2) $\{x \mid x \in E_x\}$?
3) $\{x \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$?	4) $\{x \mid \varphi_x$ не є сюр'єктивна$\}$?
5) $\{x \mid E_x$ є ПРМ$\}$?	6) $\{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}$?

2. Чи будуть ЧРП наступні предикати:

1) "$(0, 1) \in D_x^2$"?	2) "$1 \in E_x^2$" ?
3) "$\{0, 1\} \subseteq D_x$" ?	4) "$\{x, y\} \subseteq E_{3x+2y}$" ?
5) "$\varphi_x(y)$ просте" ?	6) "$\varphi_{3x}(2y)$ парне" ?
7) "$\varphi_x(y) + z$ непарне" ?	8) "$\{x, y, z+1\} \subseteq D_{x+2y+3z}$" ?
9) "$E_x \neq N$" ?	10) "$E_x \neq E_y$" ?
11) "$D_x = E_y$" ?	12) "$D = E_x$" ?

3. Доведіть теорему Райса на основі теореми Кліні про нерухому точку.

5. ЗВІДНОСТІ. ПРОДУКТИВНІСТЬ ТА КРЕАТИВНІСТЬ

Для доведення розв’язності чи нерозв’язності масових проблем часто використовують метод звідності одних проблем до інших. Кажуть, що проблема α *зводиться* до проблеми β, якщо із розв'язності β випливає розв'язність α. Отже, якщо нерозв'язна проблема α зводиться до проблеми β, то β теж нерозв'язна. Метод нумерацій дозволяє масові проблеми подавати за допомогою певних числових множин, тому обмежимося розглядом звідності множин.

Існують різні уточнення поняття звідності множини A до множини B. Ці уточнення відрізняються за способом використання та об'ємом інформації про множину B, яку можна використати для розв'язку питання про множину A. В цьому посібнику обмежимося розглядом сильних звідностей – m-звідності та 1-звідності.

5.1. *m*-звідність. *m*-степені

Множина A *m-зводиться* до множини B, якщо існує РФ g така, що для всіх $x\in N$ $x\in A \Leftrightarrow g(x)\in B$.

Це записуємо як $A \le_m B$, або $g : A \le_m B$, якщо треба вказати, що саме РФ g m-зводить A до B.

Будемо писати $A <_m B$, якщо $A \le_m B$ та невірно $B \le_m A$.

Пишемо $A \,|_m\, B$, якщо невірно $A \le_m B$ та невірно $B \le_m A$.

Введемо відношення m-еквівалентності: $A \equiv_m B \Leftrightarrow A \le_m B$ та $B \le_m A$.

Окремим випадком m-звідності є 1-звідність.

Множина A *1-зводиться* до множини B (записуємо $A \le_1 B$), якщо існує ін'єктивна РФ g така, що для всіх $x\in N$ маємо $x\in A \Leftrightarrow g(x)\in B$.

Аналогічно вводяться відношення $<_1$, $|_1$ та 1-еквівалентності $\equiv_1$.

Вкажемо основні властивості m-звідності та 1-звідності.

r1) *Якщо* $A \le_1 B$, *то* $A \le_m B$.
r2) *Відношення* $\le_1$ *та* $\le_m$ *рефлексивні і транзитивні*.
r3) $A \le_m B \Leftrightarrow \overline{A} \le_m \overline{B}$; *те ж вірне для* $\le_1$.
r4) *Якщо* $A \le_m B$ *та* B *є РМ, то* A *є РМ; те ж для* $\le_1$.
r5) *Якщо* $A \le_m B$ *та* B *є РПМ, то* A *є РПМ; те ж для* $\le_1$.
r6) *Якщо* A *є нерекурсивна РПМ, то невірно* $A \le_m \overline{A}$ *та невірно* $\overline{A} \le_m A$*; те ж для* $\le_1$.
r7) $A \le_m N \Leftrightarrow A = N$; *те ж для* $\le_1$.
r8) $A \le_m \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$; *те ж для* $\le_1$.
r9) $N \le_m A \Leftrightarrow A \ne \varnothing$.
r10) $N \le_1 A \Leftrightarrow A$ *має нескінченну рекурсивно перелічну підмножину.*
r11) $\varnothing \le_m A \Leftrightarrow A \ne N$.
r12) *Якщо* A *рекурсивна і* $B \ne \varnothing$ *та* $B \ne N$, *то* $A \le_m B$.
r13) *Для довільної множини* B *маємо* $A \le_m A\oplus B$ *та* $A \le_m B\oplus A$.
r14) *Для довільної множини* $B \ne \varnothing$ *маємо* $A \le_m A\otimes B$ *та* $A \le_m B\otimes A$.

***Приклад* 1.** Покажемо, що $A\oplus N \equiv_m A$ для довільної $A \subseteq N$, а у випадку $A \ne \varnothing$ та $A \ne N$ маємо $A\oplus N \equiv_1 A$.

Нехай $A \ne \varnothing$ та $A \ne N$. Візьмемо $b\notin A$. Тоді ін'єктивна РФ $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{якщо } x \text{ парне,} \\ b, & \text{якщо } x \text{ непарне,} \end{cases}$ 1-зводить $A\oplus N$ до A. Ін'єктивна РФ $g(x) = 2x$ 1-зводить зводить A до $A\oplus N$. Отже, тоді $A\oplus N \equiv_1 A$, тому й $A\oplus N \equiv_m A$.

У випадку $A = \varnothing$ чи $A = N$ маємо, що A та $A\oplus N$ рекурсивні. Звідси $A\oplus N \equiv_m A$.

***Приклад* 2.** Покажемо, що $D \le_m \{x \mid \varphi_x \text{ є РФ}\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x \text{ є РФ}\}$. Нехай g – довільна РФ. Тоді $f(x, y) = \begin{cases} g(y), & \text{якщо } x\in D, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } x\notin D \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y)$ для всіх x, y. При $x\in D$ маємо $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = g(y)$ для всіх y, звідки $\varphi_{s(x)} = g$ є РФ, тому $s(x)\in A$. При $x\notin D$ $\varphi_{s(x)}(y)\uparrow$ для всіх y, звідки $\varphi_{s(x)} = f_\varnothing$ не є РФ, тому $s(x)\notin A$. Отже, $x\in D \Leftrightarrow s(x)\in A$, тому РФ $s(x) : D \le_m A$.

***Приклад* 3.** Покажемо, що $D \le_m \{x \mid D_x \text{ є РМ}\}$.

Позначимо $A = \{x \mid D_x \text{ є РМ}\}$. Нехай g – така ЧРФ, що D_g не є РМ. Розглянемо функцію $f(x, y) = \begin{cases} g(y), & \text{якщо } P_x(x) \text{ не зупиниться за } \le y \text{ кроків,} \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } P_x(x)\downarrow \text{ за } \le y \text{ кроків,} \end{cases}$ за ТЧ вона є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$

така, що $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y)$ для всіх x та y. При $x\in D$ маємо $P_x(x)\downarrow$, тому існує t таке, що $P_x(x)\downarrow$ за t кроків. Для кожного $y \geq t$ $P_x(x)\downarrow$ за $\leq y$ кроків, звідки $f(x, y)\uparrow$ для всіх $y \geq t$. Звідси $\varphi_{s(x)}(y)\uparrow$ для всіх $y \geq t$, тому $\varphi_{s(x)}$ скінченна. Отже, $D_{s(x)}$ є РМ. Звідси при $x\in D$ маємо $s(x)\in A$.

Нехай тепер $x\notin D$. Звідси $P_x(x)\uparrow$, тому для кожного $y\in N$ $P_x(x)$ не зупиниться за $\leq y$ кроків. Отже, для всіх $y\in N$ маємо $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = g(y)$. Звідси $D_{s(x)} = D_g$ не є РМ, тому $s(x)\notin A$.

Маємо $x\in D \Leftrightarrow s(x)\in A$, тому РФ $s(x) : D \leq_m A$.

Введемо класи еквівалентності відносно $\equiv_m$: $d_m(A) = \{B \mid A \equiv_m B\}$. Такі класи еквівалентності будемо називати *m-степенями.*

Відношення $\leq_m$ індукує на множині m-степенів відношення часткового порядку, яке теж будемо позначати $\boldsymbol{\leq_m}$:

$\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$, якщо $A \leq_m B$ для всіх $A\in\boldsymbol{a}$, $B\in\boldsymbol{b}$.

Будемо писати $\boldsymbol{a} <_m \boldsymbol{b}$, якщо $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$.

Писатимемо $\boldsymbol{a} |_m \boldsymbol{b}$, якщо невірно $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$ та невірно $\boldsymbol{b} \leq_m \boldsymbol{a}$.

m-степінь *рекурсивна*, якщо вона містить РМ.

m-степінь *рекурсивно перелічна* (РП), якщо вона містить РПМ.

Аналогічно визначаються 1-степені та відношення $\boldsymbol{\leq_1}$ на множині 1-степенів, визначаються рекурсивні та рекурсивно перелічні 1-степені. Зрозуміло, що кожна m-степінь складається із 1-степенів.

Із r4) та r5) випливає, що кожна рекурсивно перелічна m-степінь складається тільки з РПМ, кожна рекурсивна m-степінь складається тільки з РМ. Те ж вірне для 1-степенів.

Згідно r7) та r8) існують 2 специфічні рекурсивні m-степені, які складаються з єдиної множини: $\boldsymbol{0} = d_m(\varnothing) = \{\varnothing\}$ та $\boldsymbol{n} = d_m(N) = \{N\}$. Згідно r4) та r12) всі інші РМ утворюють рекурсивну m-степінь $\boldsymbol{0_m}$.

Визначимо також рекурсивно перелічну m-степінь $\boldsymbol{0'_m} = d_m□D)$.

Із r4), r5), r7), r8), r12) маємо елементарні властивості m-степенів:

$d1)$ $\boldsymbol{0_m} \leq_m \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \neq \boldsymbol{n}$.

$d2)$ $\boldsymbol{n} \leq_m \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$.

$d3)$ $\boldsymbol{0} \leq_m \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{n}$.

$d4)$ Якщо $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$ і m-степінь $\boldsymbol{b}$ є РП, то m-степінь $\boldsymbol{a}$ теж є РП.

Точною верхньою гранню m-степенів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ назвемо m-степінь $\boldsymbol{c}$:

– $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{c}$ та $\boldsymbol{b} \leq_m \boldsymbol{c}$;

– $\boldsymbol{c} \leq_m \boldsymbol{d}$ для кожної m-степені $\boldsymbol{d}$ такої, що $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{d}$ та $\boldsymbol{b} \leq_m \boldsymbol{d}$.

Теорема 5.1. *Для кожної пари m-степенів* $\boldsymbol{a}$ *та* $\boldsymbol{b}$ *існує єдина точна верхня грань* $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = d_m□(A\oplus B)$, *де* $A\in\boldsymbol{a}$ *та* $B\in\boldsymbol{b}$.

***Приклад* 4.** Покажемо: якщо $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$.

Нехай $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$. Тоді існує РФ f така, що $f : A \leq_m B$ для деяких $A\in\boldsymbol{a}$ та $B\in\boldsymbol{b}$. Задамо РФ $g(x)$ = = $\begin{cases} f(x/2), \text{ якщо } x \text{ парне,} \\ (x-1)/2, \text{ якщо } x \text{ непарне.} \end{cases}$ Тоді $g : A\oplus B \leq_m B$. Але $B \leq_m A\oplus B$, звідки $A\oplus B \equiv_m B$. Отже, $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$.

Питання для самоконтролю

2. Дайте визначення m-звідності.
3. Дайте визначення 1-звідності.
4. Наведіть елементарні властивості m-звідності.
5. Наведіть елементарні властивості 1-звідності.
6. Дайте визначення відношення m-еквівалентності.
7. Дайте визначення відношення 1-еквівалентності.
8. Що таке m-степінь? 1-степінь?
9. Укажіть елементарні властивості m-степенів.
10. Що таке рекурсивний m-степінь?
11. Що таке рекурсивно-перелічний m-степінь?
12. Які ви знаєте рекурсивні m-степені?
13. Що таке супремум (точна верхня грань) m-степенів?
14. Сформулюйте теорему про супремум.

Вправи

1. Доведіть, що для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж злічення кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_m B$. Звідси доведіть, що кожна m-степінь скінченна або злічення.

2. Доведіть, що для кожної m-степені $\boldsymbol{b}$ існує не більше ніж злічення множина m-степенів $\boldsymbol{a}$ таких, що $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$.

3. Оцініть потужності множини всіх m-степенів і множини всіх рекурсивно перелічних m-степенів.

4. Доведіть, що $A \oplus \overline{A} \equiv_1 \overline{A \oplus \overline{A}}$.

5. Доведіть, що $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{a}$.

6. Доведіть:

1) $\{x \mid \varphi_x = \boldsymbol{o}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x$ є константа $C\}$;

2) $\{x \mid \varphi_x = \boldsymbol{o}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$;

3) $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\} \equiv_m \{x \mid D_x$ нескінченна$\}$.

4) $\{x \mid D_x$ нескінченна$\} \equiv_m \{x \mid E_x$ нескінченна$\}$.

7. З'ясуйте:

1) Нехай $A = \{x \mid E_x$ є ПРМ$\}$. Чи вірно $A \leq_m D$? $A \leq_m \overline{D}$?

2) Нехай $A = \{x \mid \varphi_x$ не сюр'єктивна$\}$. Чи вірно $A \leq_m D$? $A \leq_m \overline{D}$?

3) Нехай $A = \{x \mid D_x = N\}$. Чи вірно $A \leq_m D$? $A \leq_m \overline{D}$?

8. Доведіть, що $A \leq_m B \Leftrightarrow A \otimes N \leq_1 B \otimes N$.

9. Доведіть, що для довільної $A \subseteq N$ маємо $A \leq_1 A \otimes N$ та $A \otimes N \equiv_m A$

10. Дослідіть структуру рекурсивних 1-степенів.

5.2. Продуктивні та креативні множини

Нехай A – довільна не РПМ. Тоді не існує такого n, що $A = D_n$. Тому для кожної підмножини $D_x \subseteq A$ існує елемент $y \in A \setminus D_x$ (зрозуміло, що множина таких y є нескінченною). Якщо таке y ефективно обчислюється за x, множину A називають продуктивною. Отже, маємо таке визначення.

Множина A *продуктивна*, якщо існує РФ g така що з умови $D_x \subseteq A$ випливає $g(x) \in A \setminus D_x$.

Функцію g тоді називають *продуктивною функцією* множини A.

Множина *креативна*, якщо вона рекурсивно перелічна і має продуктивне доповнення.

***Приклад* 1.** Множина $\overline{D}$ продуктивна із продуктивною функцією $g(x) = x$. Нехай $D_x \subseteq \overline{D}$. Якщо $x \in D_x$, то $\varphi_x(x)\downarrow$, тому $x \notin \overline{D}$, що суперечить $D_x \subseteq \overline{D}$. Отже, $x \notin D_x$, тому $x \in \overline{D}$. Звідси $x \in \overline{D} \setminus D_x$.

***Приклад* 2.** Множина D креативна, бо D є РПМ, а $\overline{D}$ продуктивна.

Теорема 5.2. *Нехай A – продуктивна множина та $A \leq_m B$. Тоді множина B продуктивна.*

Наслідок. *Нехай множина A креативна, B – РПМ та $A \leq_m B$. Тоді множина B креативна.*

***Приклад* 3.** Для кожного $a \in N$ множина $C_a = \{x \mid \varphi_x(x) = a\}$ креативна.

Функція $f(z, x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } z \in D, \\ \text{невизначене} & \text{інакше.} \end{cases} = a \cdot \chi^{ч}_{D}(z) + 0 \cdot x$ є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ s така, що $f(z, x) = \varphi_{s(z)}(x)$ для всіх z, x. Звідси маємо $z \in D \Leftrightarrow \varphi_{s(z)}(s(z))\downarrow = a \Leftrightarrow s(z) \in C_a$, тому РФ $s : D \leq_m C_a$. Предикат "$x \in C_a$" є ЧРП: $x \in C_a \Leftrightarrow P_x(x)\downarrow a$. Отже, C_a є РПМ, тому за наслідком теореми 5.2 множина C_a креативна.

Теорема 5.3. 1) *Якщо A продуктивна, то $A \oplus B$ і $B \oplus A$ продуктивні.*

2) *Якщо A креативна та B РПМ, то $A \oplus B$ і $B \oplus A$ креативні.*

3) *Якщо A продуктивна та $B \neq \varnothing$, то $A \otimes B$ і $B \otimes A$ продуктивні.*

4) *Якщо A креативна, $B \neq \varnothing$ і B є РПМ, то $A \otimes B$ і $B \otimes A$ креативні.*

Наслідок. *Клас креативних множин незамкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ та доповнення.*

Якщо A креативна, то $A \oplus N$ та $N \oplus A$ креативні. Але множина $(A \oplus N) \cup (N \oplus A) = N$ рекурсивна, тому не креативна. Згідно прикладу 3 $C_0 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$ та $C_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$ креативні. Але $C_0 \cap C_1 = \varnothing$ рекурсивна, тому не креативна.

Незамкненість відносно доповнення випливає з визначення креативної множини. □

Теорема 5.4. *Для продуктивності індексної множини $N(\Re)$ достатньою є одна з наступних умов*:

Пр1) $\Re \subset$ ЧРФ^n *та* $f_{\varnothing} \in \Re$;

Пр2) *існує* $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n *така, що* $\theta \notin \mathfrak{R}$ *для кожної скінченної* $\theta \subseteq f$;
Пр3) *існують* $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n *та* $g \in$ ЧРФ^n *такі, що* $g \notin \mathfrak{R}$ *та* $f \subseteq g$.

***Приклад* 4.** Індексна множина L нерекурсивна РПМ $\Leftrightarrow$ L креативна.

Нехай $L = N(\mathfrak{R})$. Якщо L нерекурсивна, то $\varnothing \neq \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n. L є РПМ, тому $f_\varnothing \notin \mathfrak{R}$, інакше L продуктивна за Пр1. Отже, $f_\varnothing \in$ ЧРФ$^n \setminus \mathfrak{R}$, звідки $\overline{L} = N($ЧРФ$^n \setminus \mathfrak{R})$ продуктивна за Пр1. Звідси L креативна.

***Приклад* 5.** Множини $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ та $\{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$ продуктивні.

Множина $A = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$ продуктивна за Пр1, бо $f_\varnothing$ не є РФ. Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ продуктивна за Пр2, бо для кожної РФ g кожна скінченна функція $\theta \subseteq g$ не є РФ.

Для таких A та B $A \cup B = N$ та $A \cap B = \varnothing$ – не продуктивні. Якщо L креативна, то $M = \overline{L}$ продуктивна, але $L = \overline{M}$ не продуктивна.

Таким чином, *клас продуктивних множин незамкнений відносно* $\cup$, $\cap$, *доповнення.*

***Приклад* 6.** Множина $A = \{x \mid E_x = \{0\}\}$ продуктивна за Пр3.

Маємо $A = N(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid E_x = \{0\}\}$. Нехай g – тотожна функція, нехай f така, що $\Gamma_f = \{(0, 0)\}$. Тоді $f \in \mathfrak{R}$, $g \notin \mathfrak{R}$ та $f \subseteq g$.

***Приклад* 7.** Множина $A = \{x \mid \varphi_x$ є задана ЧРФ $g\}$ продуктивна.

Якщо g – нескінченна функція, то A продуктивна за Пр2. Якщо функція g скінченна, то A продуктивна за Пр3.

***Приклад* 8.** Множина $A = \{x \mid \varphi_x$ не є задана ЧРФ $g\}$ продуктивна при $g \neq f_\varnothing$ та креативна при $g = f_\varnothing$.

Якщо $g \neq f_\varnothing$, то $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ не є задана ЧРФ $g\}$, тому A продуктивна за Пр1. Якщо $g = f_\varnothing$, то множина $A = \{x \mid \varphi_x \neq f_\varnothing\} = \{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ є РПМ, тому креативна згідно прикладу 4.

***Приклад* 9.** Множина $A = \{4x+3 \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ продуктивна.

Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ продуктивна за Пр2. Ін'єктивна РФ $4x+3 : B \leq_1 A$, тому A продуктивна.

***Приклад* 10.** Множина $A = \{2x+1 \mid 3 \in D_x\}$ креативна.

Множина $B = \{x \mid 3 \in D_x\}$ креативна, бо це індексна нерекурсивна РПМ. Ін'єктивна РФ $2x+1 : B \leq_1 A$, тому A креативна.

***Приклад* 11.** Множина $A = \{x \mid \{1, 5\} \subseteq D_x\} \oplus \{x \mid x$ непарне$\}$ креативна.

Множина $B = \{x \mid \{1, 5\} \subseteq D_x\}$ креативна як індексна нерекурсивна РПМ. Множина $C = \{x \mid x$ непарне$\}$ є РМ. Тому $A = B \oplus C$ креативна.

***Приклад* 12.** Множина $A = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\} \otimes D$ продуктивна.

Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$ продуктивна за Пр1, $D \neq \varnothing$. Тому множина $A = B \otimes D$ продуктивна.

РПМ L *m-повна*, якщо $A \leq_m L$ для кожної РПМ A.

***Приклад* 13.** Множина D m-повна.

Покажемо: A є РПМ $\Leftrightarrow$ $A \leq_m D$. Звідси випливає m-повнота D.

D є РПМ, тому $A \leq_m D \Rightarrow A$ є РПМ. Якщо A є РПМ, то $f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in A, \\ \text{невизначене, якщо } x \notin A, \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. Звідси $x \in A \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = 1$ для всіх $y \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(s(x))\downarrow \Leftrightarrow s(x) \in D$. Тому $s : A \leq_m D$.

Звідси випливає: множина L m-повна $\Leftrightarrow$ $L \equiv_m D$. Отже, кожна m-повна множина креативна.

Як наслідок отримуємо, що m-степінь $\mathbf{0'}_m$ складається із m-повних множин.

Теорема 5.5 (Майхілл). *Якщо L креативна, то L m-повна.*

Наслідок. *Множина L креативна* $\Leftrightarrow$ *множина L m-повна.*

***Приклад* 14.** Множина $K = \{C(x, y) \mid x \in D_y\}$ креативна.

Нехай B – довільна РПМ, нехай m – її індекс, тобто $B = D_m$. Тоді $x \in B \Leftrightarrow x \in D_m \Leftrightarrow C(x, m) \in K$. Отже, ін'єктивна РФ $C(x, m) : B \leq_1 K$. Звідси РПМ K – m-повна, тому K креативна.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення продуктивної множини.
2. Дайте визначення креативної множини.

3. Укажіть достатні умови продуктивності для індексних множин.
4. Укажіть властивості продуктивних і креативних множин.
5. Укажіть замкненість продуктивних і креативних множин щодо теоретико-множинних операцій.
6. Дайте визначення *m*-повної РПМ.
7. Сформулюйте теорему Майхілла.
8. Як співвідносяться класи *m*-повних та креативних множин?

Вправи

1. Доведіть, що якщо $\Re \neq \varnothing$ та $\Re \subset$ ЧРФ^n , то $D \leq_m \boldsymbol{N}(\Re)$.
2. Встановіть, до якого класу належать множини:

1) $\{x \mid 4 \in D_x\}$;
2) $\{x \mid E_x = \{1, 2\}\}$;
3) $\{x \mid \{1, 2\} \subseteq E_x\}$;
4) $\{x \mid D_x$ креативна$\}$;
5) $\{x \mid E_x$ не проста$\}$;
6) $\{x \mid x \notin E_x\}$;
7) $\{3x^2 + 2 \mid \varphi_x$ є константа $\}$;
8) $D \otimes \{x \mid E_x$ не креативна$\}$;
9) $\{x \mid x$ непарне$\} \oplus \{x \mid \varphi_x = \boldsymbol{o}\}$;
10) $\{x \mid D_x$ проста$\} \otimes \{x \mid x$ не просте$\}$;
11) $\{2x \mid x \in D_x\}$;
12) $\{3x+7 \mid x \in E_x\}$;
13) $\{x^2 \mid D_x$ креативна$\} \oplus N$;
14) $\{C(x, y) \mid x \in E_y\}$.

3. В якому відношенні щодо *m*-звідності $A, \overline{A}, D, \overline{D},$ якщо:

1) $A = \{x \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$;
2) $A = \{x \mid 2 \notin E_x\}$;
3) $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 5\}$;
4) $A = \{2x+7 \mid x \in E_x\} \otimes D$.

4. В якому відношенні щодо *m*-звідності D, $\overline{D}$, $D \oplus \overline{D}$ та $D \otimes \overline{D}$?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андон Ф.И., Яшунин А.Е., Резниченко В.А. Логические модели интеллектуальных информационных систем. - Киев: Наукова думка, 1999. – 396 с.
2. Басараб И.А., Никитченко Н.С., Редько В.Н. Композиционные базы данных. – К., 1992.
3. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. – М., 1994.
4. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра, языки, программирование. – К., 1978.
5. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. – М., 1983.
6. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.
7. Клини С. Математическая логика. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
8. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М., 1975.
9. Лісовик Л.П., Шкільняк С.С. Теорія алгоритмів. – К., 2003.
10. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М., 1965.
11. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М., 1976.
12. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск: НГУ, 2000.
13. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008.
14. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Основи математичної логіки. – К., 2006.
15. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М., 1972.
16. Редько В.Н. Универсальные программные логики и их применение. – Системное и теоретическое программирование. Тезисы докл. 4 Всес. симпозиума. – Кишинев, 1983.
17. Успенский В.А., Семенов А.Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. – М., 1987.
18. Фейс Р. Модальная логика. – Москва, Наука, 1974. – 520 с
19. Чень Ч., Ли Р.. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Наука, 1983.– 256 с.
20. Дж.Шенфилд. Математическая логика. – М., 1975.
21. Шкільняк С.С. Математична логіка. Приклади і задачі. – К., 2007.
22. Шкільняк С.С. Теорія алгоритмів: приклади і задачі. – К., 2003.