Секвенційні числення 1-го порядку

Розглянемо числення секвенційного типу логік 1-го порядку. Такі числення будуємо на основі властивостей відношення |= логічного наслідку для множин формул.

Враховуючи семантичні властивості відношення |=, для секвенцій відмічених формул вводимо базові секвенційні форми $\vdash\neg$, $\dashv\neg$, $\vdash\vee$, $\dashv\vee$ та $\vdash\exists$, $\dashv\exists$.

Секвенційні форми, успадковані від пропозиційного числення:

$$\vdash\neg\ \frac{\dashv A,\Sigma}{\vdash \neg A,\Sigma}, \qquad \dashv\neg\ \frac{\vdash A,\Sigma}{\dashv \neg A,\Sigma};$$

$$\vdash\vee\ \frac{\vdash A,\Sigma \qquad \vdash B,\Sigma}{\vdash A\vee B,\Sigma}, \qquad \dashv\vee\ \frac{\dashv A, \dashv B,\Sigma}{\dashv A\vee B,\Sigma};$$

$$\vdash\&\ \frac{\vdash A, \vdash B,\Sigma}{\vdash A\,\&\,B,\Sigma}, \qquad \dashv\&\ \frac{\dashv A,\Sigma \qquad \dashv B,\Sigma}{\dashv A\,\&\,B,\Sigma};$$

$$\vdash\to\ \frac{\dashv A,\Sigma \qquad \vdash B,\Sigma}{\vdash A\to B,\Sigma}, \qquad \dashv\to\ \frac{\vdash A, \dashv B,\Sigma}{\dashv A\to B,\Sigma}.$$

Нові секвенційні форми для кванторів:

$$\vdash\exists\ \frac{\vdash A_x[y],\Sigma}{\vdash \exists xA,\Sigma},$$ де y – ***нова*** змінна, що не зустрічається в A та Σ,

$A_a[b]$ – формула, отримана з A заміною всіх входжень a на b;

$$\dashv\exists\ \frac{\dashv A_x[z_1],\ldots,\dashv A_x[z_m],\Sigma,\dashv \exists xA}{\dashv \exists xA,\Sigma},$$ де $z_1,\ldots,z_m$ – ***всі вільні*** змінні в A та Σ та згодом їх наступниках;

$$\vdash\forall\ \frac{\vdash A_x[z_1],\ldots,\vdash A_x[z_m],\Sigma,\vdash \forall xA}{\vdash \forall xA,\Sigma};$$

$$\dashv\forall\ \frac{\dashv A_x[y],\Sigma}{\dashv \forall xA,\Sigma}.$$

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) процедура завершена позитивно, отримане скінченне замкнене секвенційне дерево;

2) процедура завершена негативно (отримали скінченне незамкнене дерево), або вона не завершується (тоді маємо нескінченне секвенційне дерево). В такому дереві існує незамкнений шлях $\wp$, який дає змогу визначити контрмодель.

***Приклад* 1.** Виведення формули $(\exists x\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))\to\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x)$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \dashv(\exists x\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))\to\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x). & \\
 & \downarrow & \\
 & \vdash\exists x\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x),\ \dashv\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x) & \\
\swarrow & & \searrow \\
\dashv\exists x\mathrm{P}(x),\ \dashv\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x) & & \vdash\mathrm{Q}(x),\ \dashv\mathrm{P}(x)\to\exists x\mathrm{Q}(x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\dashv\exists x\mathrm{P}(x),\ \vdash\mathrm{P}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{Q}(x) & & \vdash\mathrm{Q}(x),\ \vdash\mathrm{P}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{Q}(x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\dashv\mathrm{P}(x),\ \vdash\mathrm{P}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{Q}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{P}(x)\ \times & & \vdash\mathrm{Q}(x),\ \vdash\mathrm{P}(x),\ \dashv\mathrm{Q}(x),\ \dashv\exists x\mathrm{Q}(x)\ \times
\end{array}
$$

Отримали замкнене секвенційне дерево.

***Приклад* 2.** Для встановлення вірності $P(x)\to\exists xQ(x) \models \exists xP(x)\to Q(x)$ будуємо виведення секвенції $\vdash P(x)\to\exists xQ(x),\ \dashv\exists xP(x)\to Q(x)$.

$$\vdash P(x)\to\exists xQ(x),\ \dashv\exists xP(x)\to Q(x)$$

$\dashv P(x),\ \dashv\exists xP(x)\to Q(x)$	$\vdash\exists xQ(x),\ \dashv\exists xP(x)\to Q(x)$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\dashv P(x),\ \vdash\exists xP(x),\ \dashv Q(x)$	$\vdash\exists xQ(x),\ \vdash\exists xP(x),\ \dashv Q(x)$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\dashv P(x),\ \vdash P(u),\ \dashv Q(x)$	$\vdash Q(u),\ \vdash\exists xP(x),\ \dashv Q(x)$
	$\downarrow$
	$\vdash Q(u),\ \vdash P(v),\ \dashv Q(x)$

Отримали незамкнене секвенційне дерево, тому невірно, що $P(x)\to\exists xQ(x) \models \exists xP(x)\to Q(x)$.
Для лівого незамкненого шляху отримуємо контрмодель ***A***:

	P	Q
x	*F*	*F*
u	*T*	будь-яке

Для правого незамкненого шляху маємо контрмодель ***B***:

	P	Q
x	будь-яке	*F*
u	будь-яке	*T*
v	*T*	будь-яке

***Приклад* 3.** Для встановлення вірності $\exists x\forall yP(x, y) \models \forall y\exists xP(x, y)$ будуємо виведення секвенції $\vdash\exists x\forall yP(x, y),\ \dashv\forall y\exists xP(x, y)$.

$$\vdash\exists x\forall yP(x,y),\ \dashv\forall y\exists xP(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$\vdash\forall yP(u,y),\ \dashv\forall y\exists xP(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$\vdash\forall yP(u,y),\ \dashv\exists xP(x,v)$$
$$\downarrow$$
$$\vdash P(u,u),\ \vdash P(u,v),\ \vdash\forall yP(u,y),\ \dashv\exists xP(x,v)$$
$$\downarrow$$
$$\vdash P(u,u),\ \vdash P(u,v),\ \vdash\forall yP(u,y),\ \dashv P(u,v),\ \dashv P(v,v)\ \dashv\exists xP(x,v)\ \times$$

Отримали замкнене секвенційне дерево.

***Приклад* 4 - самостійно.** Невірно, що $\forall y\exists xP(x, y) \models \exists x\forall yP(x, y)$. Процес виведення відповідної секвенції виявиться нескінченним.

<u>**Завдання**</u>

Побудуйте виведення чи доведіть його відстутність для таких формул:
1) $\exists xA(x)\vee B(x)\to\exists x(A(x)\vee B(x))$;
2) $\exists x(A(x)\vee B(x))\to\exists xA(x)\vee B(x)$;
3) $(\forall xA(x)\to B(x))\to(A(x)\to\forall xB(x))$;
4) $\forall x(A(x)\to B(x))\to(\exists xA(x)\to\forall xB(x))$.