1.7. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має такий вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Функція $F(x, y, y')$ вважається неперервною в деякій області $D \subset \Re^3$.

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційована на інтервалі (a, b), називають **розв'язком** рівняння (1), якщо на цьому інтервалі вона перетворює його у тотожність.

Іноді рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв'язати відносно y' і воно має n-коренів,

тобто його можна записати у вигляді $\prod_{i=1}^{n}\left[y' - f_i(x, y)\right] = 0$.

Розв'язавши кожне з рівнянь $y' = f_i(x, y),\ i = \overline{1, n}$,

отримаємо n загальних розв'язків (або інтервалів)

$$y = \varphi_i(x, C),\ i = \overline{1, n} \qquad (\text{або}\ \ \varphi_i(x, y) = C,\ i = \overline{1, n}\ ).$$

І загальний розв’язок вихідного рівняння, не розв’язаного відносно похідної має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n}\left[y-\varphi_i(x,C)\right]=0 \qquad \text{або} \qquad \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x,y)-C\right)=0.$$

Рівняння (1), так само, як і рівняння розв’язане відносно похідної, визначає на площині xOy деяке поле напрямків. **Але тепер, як правило, у заданій точці (x_0, y_0) матимемо не один, а декілька напрямків поля, бо розв’язуючи $F(x_0, y_0, y')=0$ відносно y', зазвичай одержуємо декілька дійсних різних розв’язків.**

Задача Коші для рівняння (1) формулюється так само, як і для рівняння, розв’язного відносно похідної, тобто, потрібно знайти розв’язок $y=y(x)$ рівняння (1), що задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$.

При цьому, якщо таких розв’язків не більше ніж кількість напрямків поля, визначеного рівнянням (1) у цій точці, тобто не більше кількості розв’язків y_0' рівняння $F(x_0, y_0, y')=0$ то кажуть, що задача Коші має єдиний розв’язок. В противному випадку єдиність розв’язку цієї задачі порушується.

Нехай y_0' - один з дійсних коренів рівняння (1).
З’ясуємо коли ж таки справджується єдність розв’язку.

Теорема.

Нехай ліва частина рівняння (1) задовольняє наступні умови:

1) функція $F(x, y, y')$ визначена і неперервна разом з частинними похідними $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y_0');

2) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

3) $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0, y_0, y_0')} \neq 0$

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційований у деякому околі точки $x = x_0$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$, і такий, що $y'(x_0) = y_0'$.

Особливим розв'язком називають розв'язок, у кожній точці якого порушується умова його єдиності. Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному значення довільної сталої C.

З Теореми випливає, що особливі розв'язки можуть існувати лише у тих точках, де порушуються умови цієї теореми. Тобто якщо $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то особливі розв'язки потрібно шукати серед тих точок, координати яких задовольняють систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad p = y'.$$

Якщо ця система сумісна, то, виключаючи параметр p, отримаємо деяку множину точок $\varphi(x, y) = 0$, яка може бути особливим розв'язком рівняння (1).
Однак, потрібно ще перевірити, чи геометричне місце точок $\varphi(x, y) = 0$ є розв'язком заданого рівняння, і чи у кожній точці порушується властивість єдиності розв'язку (тобто чи знайдений розв'язок є особливим).

1.7.1. Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Рівняння вигляду $F(y') = 0$.

Нехай алгебраїчне рівняння $F(k) = 0$ має по крайній мірі один дійсний корінь $k = k_0$.

Тоді, інтегруючи $y' = k_0$, одержимо $y = k_0 x + C$.

Звідси $k_0 = \dfrac{y - C}{x}$

і вираз $F\left(\dfrac{y - c}{x}\right) = 0$ містить всі розв'язки вихідного диференціального рівняння.

2) **Рівняння вигляду** $F(x, y') = 0$.

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи співвідношення $dy = y'\,dx$,

одержимо $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$.

Проінтегрувавши, запишемо

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

І загальний розв’язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

3) Рівняння вигляду $F(y, y') = 0.$

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді $\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx,$

отримаємо $\varphi'(t)dt = \psi(t)dx$ і $dx = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$

Проінтегрувавши, запишемо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C.$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

4) Рівняння Лагранжа $y = \phi(y')x + \psi(y')$.

Введемо параметр $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$

і отримаємо $y = \phi(p)x + \psi(p)$.

Продиференціювавши, запишемо $dy = \phi'(p)xdp + \phi(p)dx + \psi'(p)dp$.

Замінивши $dy = pdx$

одержимо $pdx = \phi'(p)xdp + \phi(p)dx + \psi'(p)dp$.

Звідси $[p - \phi(p)]dx - \phi'(p)xdp = \psi'(p)dp$.

І отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

Його розв'язок $$x=e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}e^{\int\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}dp+C\right]=\Psi(p,C).$$

І остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді

$$\begin{cases}x=\Psi(p,C)\\ y=\varphi(p)\Psi(p,C)+\psi(p).\end{cases}$$

5) Рівняння Клеро.

Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$ є рівняння Клеро $y = y'x + \psi(y')$.

Поклавши $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$,

отримаємо $y = px + \psi(p)$.

Продиференціюємо $dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp.$

Оскільки $dy = pdx$,

то $pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp.$

Скоротивши, одержимо $[x + \psi'(p)]dp = 0.$

Можливі два випадки.

1. $x+\psi'(p)=0$ і розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p). \end{cases}$$

2. $dp=0, \quad p=C$ і розв'язок має вигляд

$$y=Cx+\psi(C).$$

Загальним розв'язком рівняння Клеро буде сім'я прямих $y=Cx+\psi(C)$.

Цю сім'ю огинає особа крива $x=-\psi'(p), \quad y=-p\psi'(p)+\psi(p)$.

6) Параметризація загального вигляду.

Нехай диференціальне рівняння $F(x,y,y')=0$ вдалося записати у вигляді системи рівнянь з двома параметрами

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v), \\ y'=\theta(u,v) \end{cases}.$$

Використовуючи співвідношення $dy = y'\,dx$, одержимо

$$\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}dv=\theta(u,v)\left[\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}dv\right].$$

Перегрупувавши члени, запишемо

$$\left[\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}-\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\right]du=\left[\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right]dv.$$

Звідси

$$\frac{du}{dv}=\frac{\theta(u,v)\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}-\dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}-\theta(u,v)\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}}.$$

Або отримали рівняння вигляду

$$\frac{du}{dv}=f(u,v).$$

Зауваження. Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної !