6. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

або у векторно-матричному вигляді

$$x'(t) = A(t)x + f(t)$$

називається **системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь**.

6.1. Властивості розв’язків лінійних неоднорідних систем

Властивість 6.1.1.

Якщо вектор $\overline{x(t)} = \begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} \\ \overline{x_2(t)} \\ \dots \\ \overline{x_n(t)} \end{pmatrix}$ є розв’язком лінійної неоднорідної системи, а $x_0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \\ \dots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$ - розв’язком відповідної лінійної однорідної системи, то сума $\overline{x}(t) + x_0(t)$- є розв’язком лінійної неоднорідної системи.

Властивість 6.1.2 (Принцип суперпозиції).

Якщо вектори $x_i = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \dots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,n}$ є розв'язками лінійних неоднорідних систем

$$x'(t) = A(t)x(t) + f_i(t), \; i = \overline{1,n},$$

де $f_i(t) = \begin{pmatrix} f_{1i}(t) \\ \dots\dots\dots \\ f_{ni}(t) \end{pmatrix}$,

то вектор $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$, де C_i - довільні сталі буде розв'язком лінійної неоднорідної системи

$$x'(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t).$$

Властивість 6.1.3.

Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $x(t) = u(t) + iv(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$

є розв'язком неоднорідної системи

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

де $f(t) = p(t) + iq(t)$, $p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$, $q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$,

то окремо дійсна $u(t)$ і уявна $v(t)$ частини є розв'язками системи.

Теорема (про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи).

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи складається із **суми загального розв'язку однорідної системи** і якого-небудь **частинного розв'язку неоднорідної системи**.

6.2. Метод варіації довільних сталих пошуку частинного розв’язку неоднорідної системи

Для лінійної неоднорідної системи на площині

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + f_2(t) \end{cases}$$

метод варіації довільної сталої реалізується таким чином.

Нехай

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

це фундаментальна матриця розв’язків відповідної однорідної системи.

Тобто загальний розв’язок відповідної однорідної системи має вигляд $\quad x(t)_{\text{з.о.}} = X(t)C$

Тоді частинний розв’язок неоднорідної шукається у вигляді (тобто це загальний однорідного але довільні сталі вже не константи, а вірійовані функції)

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Де значення $C_1(t)$ та $C_2(t)$ знаходяться з розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(t)x_{11}(t)+C_2'(t)x_{12}(t)= f_1(t) \\ C_1'(t)x_{21}(t)+C_2'(t)x_{22}(t)= f_2(t). \end{cases} \qquad (*)$$

Звідси

$$C_1(t)=\int \frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & x_{12}(t) \\ f_2(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}} dt, \qquad C_2(t)=\int \frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & f_1(t) \\ x_{21}(t) & f_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}} dt.$$

І загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

6.3. Формула Коші

Нехай $X(t,t_0)$- фундаментальна система, нормована при $t=t_0$ тобто $X(t_0,t_0)=E$, де E - одинична матриця.

Загальний розв’язок відповідної однорідної системи має вигляд

$$x(t)=X(t,t_0)C.$$

Вважаючи C невідомою вектор-функцією і повторюючи викладення методу варіації довільної сталої, одержимо систему рівнянь типу (*):

$$X(t,t_0)C'(t)=f(t).$$

Звідси
$$\frac{dC(t)}{dt}=X^{-1}(t,t_0)f(t).$$

Проінтегруємо отриманий вираз і отримаємо

$$C(t)=C+\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau.$$

Тут C - вектор із сталих, що отриманий при інтегруванні системи.

Підставивши у вихідний вираз, одержимо:

$$x(t) = X(t,t_0)[C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau,t_0) f(\tau) d\tau] =$$

$$= X(t,t_0)C + \int_{t_0}^{t} X(t,t_0) X^{-1}(\tau,t_0) f(\tau) d\tau.$$

Якщо $X(t,t_0)$- фундаментальна матриця, нормована при $t = t_0$, тоді $X(t,t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$.

Звідси

$$X(t,t_0)X^{-1}(\tau,t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)[X(\tau)X^{-1}(t_0)]^{-1} = X(t)X^{-1}(\tau) = X(t,\tau).$$

Підставивши початкові значення $x(t_0) = x_0$ і з огляду на те, що $X(t_0,t_0) = E$, одержимо

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f(\tau) d\tau$$

формулу Коші, загального розв’язку неоднорідного рівняння.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння, що задовольняє нульовій початковій умові, має вид

$$x_{ч.н.}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f(\tau) d\tau .$$

Якщо система зі **сталою матрицею** A, тоді

$$X(t,t_0) = X(t-t_0), \qquad X(t,\tau) = X(t-\tau) .$$

І **формула Коші** має вигляд:

$$x(t) = X(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau) f(\tau) d\tau .$$

6.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо система лінійних диференціальних рівнянь **зі сталими коефіцієнтами**, а векторна функція $f(t)$ спеціального виду, то частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Доведення існування частинного розв'язку зазначеного виду аналогічно доведенню для лінійних рівнянь вищих порядків.

1) Нехай кожна з компонент вектора $f(t)$ є многочленом степеня ***не більш ніж*** s, тобто

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \ldots\ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^1 t + A_s^1 \\ A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^2 t + A_s^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^n t + A_s^n \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda_i \neq 0,\ i = \overline{1,n}$,
то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто для всіх рівнянь частинні розв'язки шукаються у вигляді поліномів порядку s

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^1 t + B_s^1 \\ B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^2 t + B_s^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^n t + B_s^n \end{pmatrix}.$$

б) Якщо характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ \dots \ = \lambda_r = 0$, тоді частинний розв'язок шукається у вигляді многочлена степеня $s+r$ для кожного рівняння, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \dots\dots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \ \dots \ + B_{s+r}^1 \\ B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \ \dots + B_{s+r}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \ \dots + B_{s+r}^n \end{pmatrix}.$$

Причому перші $(s+1)n$ коефіцієнти B_i^j, $i = \overline{0, s}$, $j = \overline{1, n}$ знаходяться точно, а інші з точністю до сталих інтегрування $C_1, \ \dots \ , C_n$, що входять у загальний розв'язок однорідних систем.

2) Нехай $f(t)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots\dots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ \dots \ + A_{s-1}^1 t \ + A_s^1) \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ \dots \ + A_{s-1}^2 t \ + A_s^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ \dots \ + A_{s-1}^n t \ + A_s^n) \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення p, тобто $\lambda_i \neq p,\ i=\overline{1,n}$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ \ldots\ + B_{s-1}^1 t \ + B_s^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ \ldots\ + B_{s-1}^2 t \ + B_s^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ \ldots\ + B_{s-1}^n t \ + B_s^n) \end{pmatrix}.$$

б) Якщо p є коренем характеристичного рівняння кратності r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ \ldots\ = \lambda_r = p$, то частинний розв'язок шукається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \ \ldots\ + B_{s+r}^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \ \ldots\ + B_{s+r}^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \ \ldots\ + B_{s+r}^n) \end{pmatrix}.$$

І, як у попередньому пункті, перші $(s+1)n$ коефіцієнти $B_i^j,\ i=\overline{0,s},\ j=\overline{1,n}$ знаходяться точно, а інші з точністю до сталої інтегрування $C_1,\ \ldots\ ,C_n$.

3) Нехай $f(t)$ має вигляд:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \ldots\ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^1 t \ \ + A_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^2 t \ \ + A_s^2)\cos qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^n t \ \ + A_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^1 t \ \ + B_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^2 t \ \ + B_s^2)\sin qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^n t \ \ + B_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення $p \pm iq$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^s + C_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + C_{s-1}^1 t \ + C_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^s + C_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + C_{s-1}^2 t \ + C_s^2)\cos qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(C_0^n t^s + C_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + C_{s-1}^n t \ + C_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^s + D_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + D_{s-1}^1 t \ + D_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^s + D_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + D_{s-1}^2 t \ + D_s^2)\sin qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(D_0^n t^s + D_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + D_{s-1}^n t \ + D_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

б) Якщо $p \pm iq$ є коренем характеристичного рівняння кратності r, то частинний розв’язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^{s+r} + C_1^1 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + C_{s+r}^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^{s+r} + C_1^2 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + C_{s+r}^2)\cos qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(C_0^n t^{s+r} + C_1^n t^{s+r-1} + \ \ldots \ + C_{s+r}^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^{s+r} + D_1^1 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + D_{s+r}^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^{s+r} + D_1^2 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + D_{s+r}^2)\sin qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(D_0^n t^{s+r} + D_1^n t^{s+r-1} + \ \ldots \ + D_{s+r}^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$