Екзаменаційна робота з дисципліни

“Дослідження операцій”

Студента групи К-28

Гущі Дмитра Сергійовича

Білет 23

1. Кутові точки опуклих множин. Довести теорему про множину оптимальних розв’язків задачі ЛП та кутові точки .

Означення. Точка x опуклої множини X називається кутовою(крайньою), якщо її не можна представити у вигляді

$$x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2, \text{де } x^2 \in X, x^1 \neq x^2, 0 < \alpha < 1$$

Кутові точки опуклої многогранної множини називаються її вершинами.

Теорема. Цільова функція ЗЛП досягає оптимального значення у вершині многогранника розв'язків. Якщо цільова функція досягає цього значення у двох та більше точках, то вона досягає того ж значення у будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.

Доведення. Нехай x^i, i = 1,….r, -- вершини многогранника D і, розглядаючи задачу мінімізації покладемо x^*= arg min L(x) [x∈D]. Останнє співвідношення означає що

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \text{ x∈D}$$

або з використанням позначення скалярного добутку

$$(c, x^*) \leq (c, x), x \in D, \text{де c} = (c_1, \dots, c_n)$$

Якщо x^*-- вершина D, то першу частину теореми доведено. Нехай

x^* не є вершиною D, За лемою 1.4 (Будь-яка точка многогранника є опуклою лінійною комбінацією його вершин) існують $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, r, \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = 1,$ такі що $x^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i$

Використовую *відомі властивості скалярного добутку, маємо*

$$(c, x^k) = \left(c, \sum_{a=1}^{r} a_i x^i\right) = \sum_{i=}^{r} a_i(c, x^i) \geq (c, x^k) \sum_{i=1}^{r} a_i$$
$$= (c, x^k), \text{де x така вершина що } (c, x^k) = \min(c, x^i)\ [1 \leq i \leq r]$$

Все це означає що існує вершина x^k допустимої області D, де цільова фукція приймає найменше значення. Доведемо другу частину теореми. Нехай цільова функція досягає свого мінімального значення у точках

$x^1, \dots, x^s$ тобто $(c, x^i) = I = \min L(x)[x \in D], i = 1, \dots, s$

Розглянемо опуклу лінійну комбінацію $x^* = \sum_{i=1}^{s} a_i x^i, a_i \geq 0, i = 1, \dots, s\ a_1 + \dots + a_s$ *= 1*

Покажемо, що L(x) = 1. Дійсно,*

$$L(x^*) = (c, x^*) = \left(c, \sum_{i=1}^{s} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{s} a_i (c, x^i) = I \sum_{i=1}^{s} a_i = I$$

Згідно доведеної теореми розв'язки ЗЛП слід шукати серед вершин її допустимої множини.

2. Нехай у М – методі розв'язку ЗЛП отримали оптимальний розв'язок xy=(x_1 , …, x_n , y_1 , …,y_m), І існує $y_i > 0$. Довести, що тоді допустима область D = Ø.

Теорема. Нехай М-задача розв'язана симплекс методом і $\tilde{x}^*$=(x^*_1 , …, x^*_n , y^*_1 , …,y^*_m) – її оптимальний розв'язок. Тоді:

1) Якщо серед чисел $y_1^*, \dots, y_m^*$ є відмінні від нуля, то вихідна КЗЛП не має допустимих розв'язків.
2) Якщо $y_1^* = y_2^* = \dots = y_m^* = 0$, то вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ є оптимальним розв'язком КЗЛП.

Допустима область D буде рівна пустій множині у випадку якщо якась компонента $y^*_j > 0$. Доведемо це від супротивного. Нехай $(x_1^*, \dots x_n^*) -$ допустимий розв'язок СЗЛП. Тоді $\overline{x^*} = \{x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0\}$ є допустимим розв'зяком КЗЛП ($\bar{x} \in \bar{D}$). Але при цьому $\bar{L} = 0$, що суперечить умові min $\bar{L} > 0, \bar{x} \in \bar{D}$.

3. Розв'язати дану задачу двоїстим симплекс-методом :

$$\boldsymbol{L = x_1 + 4x_2 \to min}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Для побудови першого опорного плану систему нерівностей приведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних (перехід до канонічної формі). У 1-му нерівності сенсу (≤) вводимо базисну змінну x3. У 2-му нерівності сенсу (≤) вводимо базисну змінну x4.

$$2x1 + x2 + x3 \ = \ 8$$
$$-3x1 - x2 + x4 \ = \ -3$$

Вирішимо систему рівнянь щодо базисних змінних: x3, x4
Вважаючи, що вільні змінні рівні 0, отримаємо перший опорний план:
X0 = (0,0,8,-3)

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	8	2	1	1	0
x_4	-3	-3	-1	0	1
F(X0)	0	-1	-4	0	0

Серед негативних значень базисних змінних вибираємо найбільший по модулю. Провідним буде 2-а рядок, а змінну x4 слід вивести з базису.

Мінімальне значення θ відповідає 1-му стовпцю, тобто змінну x1 необхідно ввести в базис.На перетині провідних рядки і стовпці знаходиться дозволяє елемент (РЕ), рівний (-3).

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	8	2	1	1	0
x_4	-3	-3	-1	0	1
F(X0)	0	-1	-4	0	0
θ		$^1/_3$	-4	-	-
Базис	B	x1	x2	x3	x4
x3	6	0	1/3	1	2/3
x1	1	1	1/3	0	-1/3
F(X0)	1	0	-11/3	0	-1/3

У базисному стовпці всі елементи позитивні.
Переходимо до основного алгоритму симплекс-методу.

Серед значень індексного рядка немає позитивних. Тому ця таблиця визначає оптимальний план завдання. Остаточний варіант симплекс-таблиці:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	6	0	$^1/_3$	1	$^2/_3$
x_1	1	1	$^1/_3$	0	$^{-1}/_3$
F(X1)	1	0	$^{-11}/_3$	0	$^{-1}/_3$

$$x1 = 1, x2 = 0$$
$$F(X) = 1 * 1 + 4 * 0 = 1$$