3.1. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ТА АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай система керування описується рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u(t)) \tag{3.1}$$

де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ – відповідно вектори стану та керувань, $F(t, x(t), u(t))$ – n-мірна вектор-функція, що описує рух системи.

Попередньо розглянемо систему (3.1), як диференціальних рівнянь, в більш компактному вигляді

$$\dot{y} = F(y, t). \tag{*}$$

Розв'язок системи рівнянь (*) має вигляд

$$y = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ – векторна функція, що складається з n – неперервно диференційованих функцій $\varphi^T(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$.

Будемо використовувати одну з норм Евклідового простору R^n

$$\|\varphi(t) - y(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i(t) - \varphi_i(t)\right)^2}.$$

Визначення 3.1 Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (*) називається ***стійким за Ляпуновим*** (рівномірно за часом), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $y = y(t)$ системи (*) при $t > t_0$ буде виконуватись $\|\varphi(t) - y(t)\| < \varepsilon$, при $\|\varphi(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ рис.3.1.

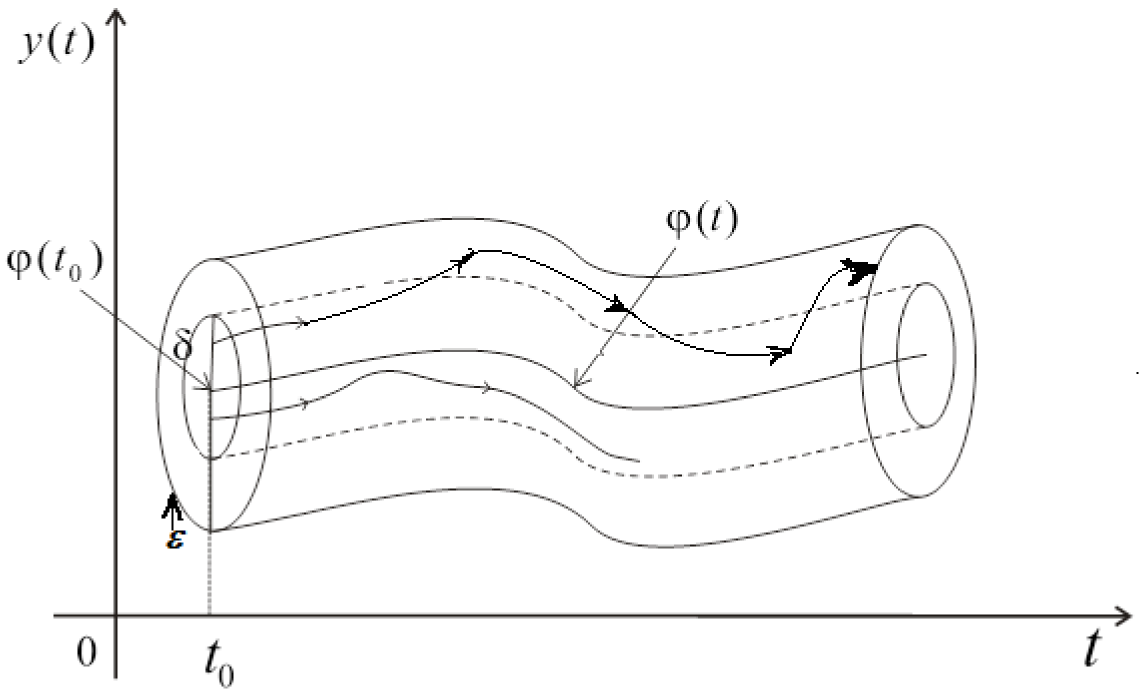

Рис.3.1.

Визначення 3.2 Розв'язок $\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{t})$ системи (*) називається ***асимптотично стійким*** (рівномірно за часом), якщо він стійкий за Ляпуновим (Визн. 3.1) і

$$\lim_{\boldsymbol{t}\to\infty}\left\|\varphi(\boldsymbol{t})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\right\|=0.$$

Область $\Delta(\boldsymbol{t}_0)=\left\{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}_0):\lim\limits_{\boldsymbol{t}\to\infty}\left\|\varphi(\boldsymbol{t})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\right\|=0\right\}$ називається *областю притягання* рис.3.2.

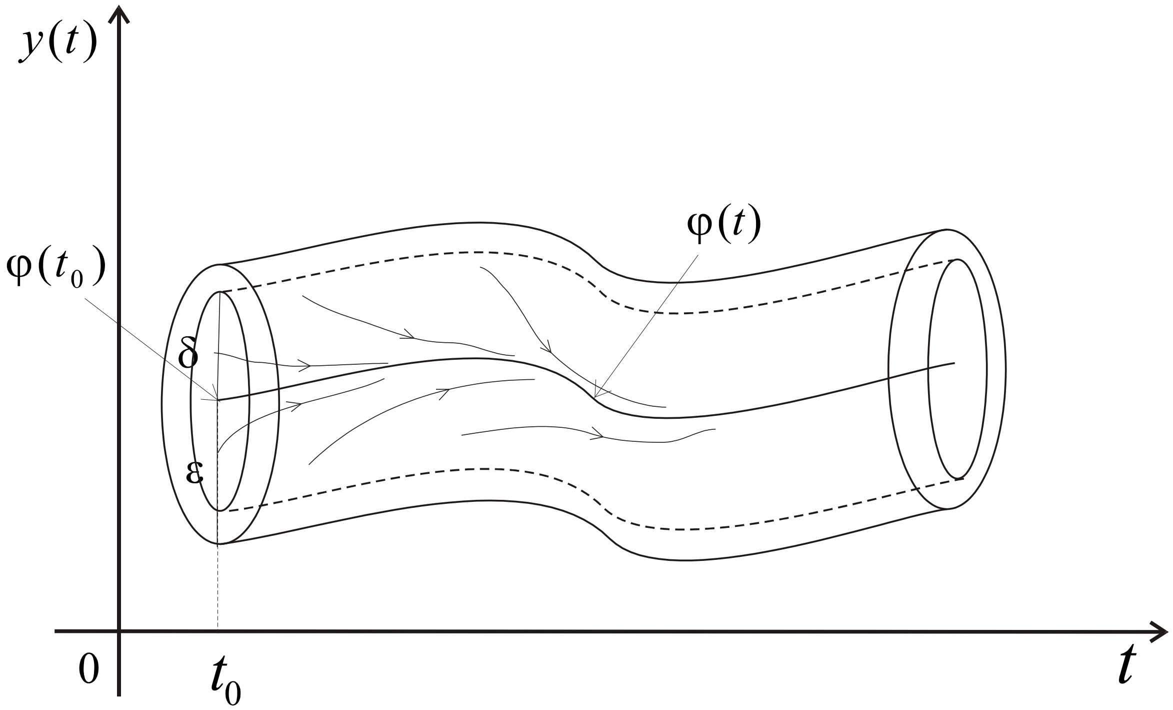

Рис.3.2.

Визначення 3.3 Розв'язок $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{t})$ системи (*) називається ***нестійким***, якщо для скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує хоча б один розв'язок $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$ такий, що при деякому $\boldsymbol{T} > \boldsymbol{t}_0$ буде виконуватись $\|\varphi(\boldsymbol{T}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{T})\| > \varepsilon$, хоча $\|\varphi(\boldsymbol{t}_0) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}_0)\| < \delta$, де $\delta > 0$ як завгодно мала величина рис.3.3.

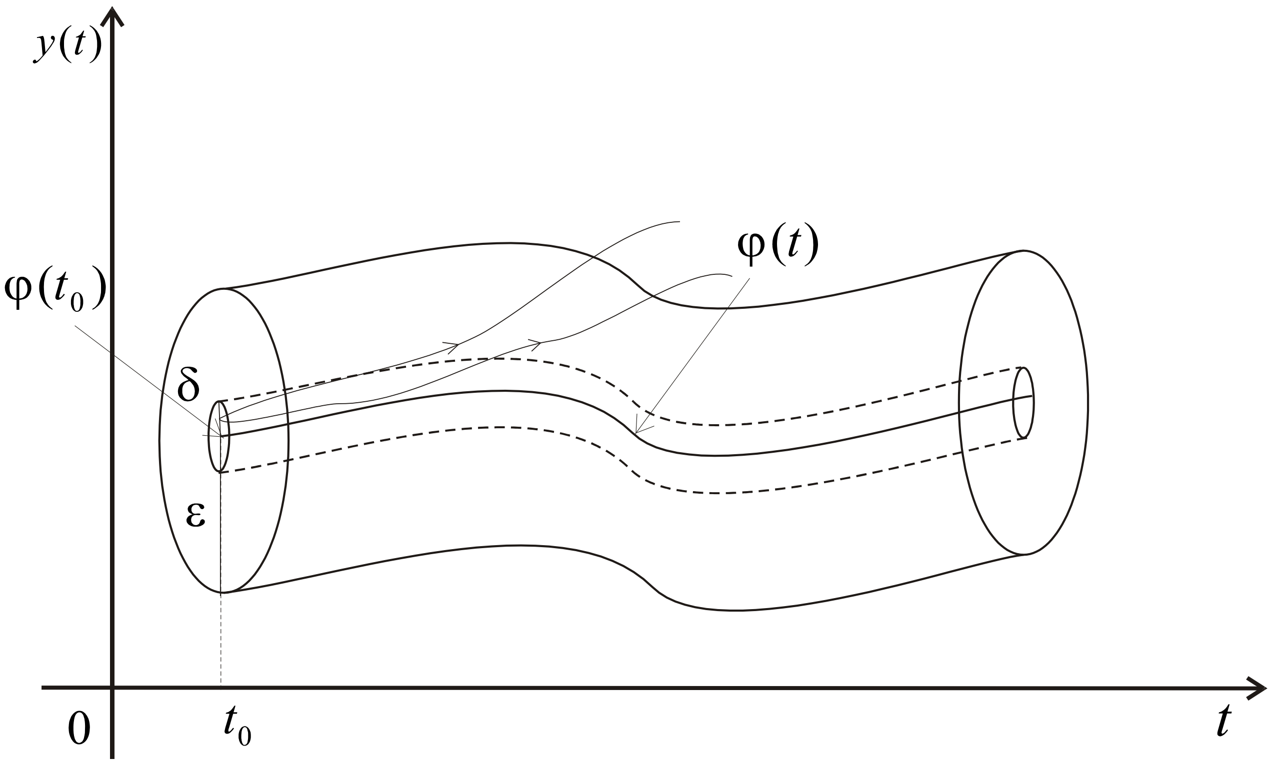

Рис.3.3.

Для постановки задач дослідження стійкості та конструювання регуляторів потрібно задати певний бажаний рух системи (3.1).

Будемо вважати, що траєкторія $x(t)$ на інтервалі $[t_0, \infty)$ змінюється згідно із заданим програмним режимом:

$$x(t) = x_{np}(t), \ \ t \in [t_0, \infty). \tag{3.2}$$

Нехай у момент часу $t^{(0)}$ система задовольняє умову $x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)})$.

Тоді ***задачу програмного керування можна сформулювати*** так:
знайти програмне керування $u_{np}(t)$, при якому розв'язок системи (3.1) забезпечує умову (3.2).

Задача дослідження стійкості програмного руху $x_{np}(t^{(0)})$ полягає у визначенні властивостей розв'язку системи (3.1) під дією програмного керування $u(t) = u_{np}(t)$ для $t > t^{(0)}$, якщо в початковий момент часу $t^{(0)}$ вектор стану системи отримує деяке збурення $\Delta x(t^{(0)})$:

$$x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)}) + \Delta x(t^{(0)}). \tag{3.3}$$

Визначення 3.4. ***Програмний рух*** $x_{np}(t)$ системи (3.1) називається ***стійким за Ляпуновим***, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що, якщо для початкових умов системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u_{np}(t)) \tag{3.4}$$

виконується нерівність $$\left\|\Delta x(t^{(0)})\right\| = \left\|x(t^{(0)}) - x_{np}(t^{(0)})\right\| \le \delta,$$

то при $t > t^{(0)}$ для розв'язку системи (3.4) справедлива оцінка

$$\left\|\Delta x(t)\right\| \le \varepsilon,$$

де $\Delta x(t) = x(t) - x_{np}(t)$.

Визначення 3.5. ***Програмний рух*** системи (3.4) називається ***асимптотично стійким***, якщо до умов стійкості додається гранична умова:

$$\lim_{t\to\infty} \left\|\Delta x(t)\right\| = 0.$$

Під дією початкових збурень траєкторія збуреного руху буде мати вигляд

$$x(t) = x_{np}(t) + \Delta x(t).$$

Запишемо рівняння для $\Delta x(t)$ згідно із системою (3.4):

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = F(t, x_{np}(t) + \Delta x(t), u_{np}(t)) - F(t, x_{np}(t), u_{np}(t)) = \Phi(t, \Delta x(t), u_{np}(t)). \quad (3.5)$$

Очевидно, що стійкість за Ляпуновим програмного руху системи (3.4) означає стійкість збурення $\Delta x(t) \equiv 0$ за Ляпуновим для системи (3.5).

Надалі будемо досліджувати на стійкість незбурений рух $\Delta x(t) \equiv 0$.

Зазвичай, програмний рух системи (3.4) і відповідний незбурений рух системи (3.5) є нестійкими.

Тому будемо розглядати задачу забезпечення стійкості цих систем шляхом введення додаткового керування $\Delta u(t,\Delta x(t))$, яке разом із програмним керуванням становить закон керування системою:

$$u(t) = u_{np}(t) + \Delta u(t,\Delta x(t)) \tag{3.6}$$

Тоді задача аналітичного конструювання регулятора системи (3.1) полягає у виборі такої залежності $\Delta u(t,\Delta x(t))$, за якої розв'язок $\Delta x(t) \equiv 0$ системи рівнянь

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = X(t,\Delta x(t),\Delta u(t,\Delta x(t))), \tag{3.7}$$

де $$X(t,\Delta x(t),\Delta u(t,\Delta x(t))) = \Phi(t,\Delta x(t),u_{np}(t) + \Delta u(t,\Delta x(t))),$$

був би стійким (асимптотично стійким) за Ляпуновим.

Якщо задати наперед структуру залежності $\Delta u(t,\Delta x(t))$ з точністю до значень деяких параметрів, то задача аналітичного конструювання регулятора зводиться до вибору значень цих параметрів системи (3.7) згідно з умовами стійкості за Ляпуновим розв'язку $\Delta x(t) \equiv 0$.

Часто таку задачу називають ***задачею статбілізації.***

3.2. СТІЙКІСТЬ У ЗАСТОСУВАННІ ДО АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай система (3.7) є лінійною:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t, \Delta x(t)). \tag{3.8}$$

Позначивши $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$, перепишемо систему (3.8) у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t, x(t)). \tag{3.9}$$

Задачу аналітичного конструювання регулятора для лінійної системи (3.9) сформулюємо таким чином:

знайти матрицю $C(t)$ розмірності $m \times n$ таку, щоб при керуванні $u(t, x(t)) = C(t)x(t)$ нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.9), тобто системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + B(t)C(t))x(t) \tag{3.10}$$

буде асимптотично стійким за Ляпуновим.

Розглянемо спочатку лінійні стаціонарні системи

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x(t). \tag{3.11}$$

Скористаємось відомими результатами дослідження стійкості розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь.

Теорема 3.1. Для асимптотичної стійкості за Ляпуновим лінійної стаціонарної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{A}x(t) \tag{3.12}$$

необхідно й досить, щоб усі корені λ_j характеристичного рівняння

$$\det(\tilde{A} - \lambda E) = 0 \tag{3.13}$$

мали від'ємні дійсні частини:

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.14}$$

Тут і далі E – одинична матриця.

Застосуємо цю теорему до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (3.11).

Запишемо для цієї системи характеристичне рівняння

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BC}-\boldsymbol{\lambda E})=\mathbf{0}. \tag{3.15}$$

Корені даного рівняння будуть залежати від невідомих елементів матриці $\boldsymbol{C}$, тобто $\boldsymbol{\lambda_j}=\boldsymbol{\lambda_j}(\boldsymbol{C})$.

Згідно з теоремою 3.1, невідомі елементи матриці $\boldsymbol{C}$ вибираємо з умови $\operatorname{Re}\boldsymbol{\lambda_j}<\mathbf{0},\quad \boldsymbol{j}=\overline{\mathbf{1},\boldsymbol{n}}$, що й забезпечить асимптотичну стійкість системи (3.11).

Теорема 3.2 (Критерій Рауса-Гурвиця). Нехай характеристичне рівняння (3.13) має вигляд:

$$\boldsymbol{a_0\lambda^n}+\boldsymbol{a_1\lambda^{n-1}}+\ldots+\boldsymbol{a_n}=\mathbf{0}. \tag{3.16}$$

Тоді для того, щоб усі корені характеристичного рівняння (3.16) мали від'ємні дійсні чистини: $\operatorname{Re}\boldsymbol{\lambda_j}<\mathbf{0},\quad \boldsymbol{j}=\overline{\mathbf{1},\boldsymbol{n}}$, необхідно й досить виконання умови додатності всіх головних мінорів матриці:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n+1} & a_n \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

де $\boldsymbol{a_j}=\mathbf{0}$ при $\boldsymbol{j}>\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{a_0}\neq\mathbf{0}$.

Тобто має виконуватись система нерівностей:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{тощо.} \tag{3.18}$$

Якщо застосувати критерій Рауса-Гурвиця до задачі аналітичного конструювання регулятор системи (3.11), то отримаємо головні мінори, які будуть залежати від невідомих елементів матриці $\boldsymbol{C}$.

В результаті маємо систему нерівностей

$$\Delta_j(C) > 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{3.19}$$

Матриця $\boldsymbol{C}$, що знаходиться з цієї системи нерівностей, згідно з теоремою 3.2 забезпечує від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння, тобто виконання умови (3.14). Тоді згідно з критерієм асимптотичної стійкості (теорема 3.1) лінійна стаціонарна система (3.11) буде асимптотично стійкою за Ляпуновим.

МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Розглянемо систему зі скалярним керуванням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t), \ A, b - const. \tag{3.20}$$

Тут A - $n \times n$ матриця, b – n-вектор-стовпчик, u – скаляр.

Теорема 3.3. Якщо система (3.20) цілком керована, тобто виконується умова

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0 \tag{3.21}$$

то існує функція керування

$$u(t) = c^T x(t), \qquad \text{де} \quad c = (c_1, \ldots, c_n)^T \tag{3.22}$$

при якій система

$$\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x(t) \tag{3.23}$$

має наперед довільно задані корені $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння

$$\det(A + bc^T - \lambda E) = 0. \tag{3.24}$$

Доведення цієї теореми побудовано так, що одночасно вказано алгоритм знаходження величин $c_1,\ldots,c_n$ за відомими значеннями коренів $\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24).

У процесі доведення отримано явний вигляд вектора c:

$$c=(S_n^{-1})^T\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ p_1 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & 1\end{bmatrix}(p-a) \tag{3.25}$$

Тут

$$S_n=(b, Ab,\ldots, A^{n-1}b),$$

$$\begin{pmatrix}p_n\\ p_{n-1}\\ \vdots\\ p_1\end{pmatrix}=-S_n^{-1}A^n b,$$

a – n-вектор стовбчик,

що знаходиться через відомі значення коренів $\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24), фактично це значення коефіцієнтів відповідного характеристичного поліному.

Алгоритм розв’язку задачі модального керування.

0-й крок. Обчислити матрицю керованстi $S_n = (b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)$, та переконатися у цілком керованості досліджуваної системи.

1-й крок. Обчислити матрицю обернену до матриці керовності: $(S_n)^{-1}$

2-й крок. Обчислити вектор $A^n b$

3-й крок. Обчислити вектор $\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S^{-1}A^n b$

4-й крок. Визначити характеристичний поліном за заданими коренями

$$(\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2)\ldots(\lambda - \bar{\lambda}_n) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

та скомпонувати вектор коефіцієнтів характеристичного полінома $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

5-й крок. Обчислити за формулою (3.25) вектор $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (S_n{}^{-1})^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right)$$

6-й крок. Записати шукане керування

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$