Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Теорія алгоритмів та математична логіка
2 курс ОКР „бакалавр”, 2 семестр
Екзаменаційний білет № 9
Виконав студент групи К28
Гуща Дмитро

1. *Теорема про повноту ЧВ.*

Теорема. Всяка тавтологія вивідна в численні висловлювань.

Доведення. Нехай A – довільна формула, що містить змінні p, q, r. Якщо значення A = 1, коли 3 змінні = 1. Якщо A = 0, на наборі 0,0, 1, то $\neg p, \neg q, r \vdash \neg A$. Якщо формула A є тавтологією, то тоді виявляється, що вона вивідна із всіх можливих інтерпретацій. Якщо тепер $p, q, \neg r \to A$ і $p, q \vdash r \to A$ за теоремою дедукції. Із аксіоми III.3 одержуємо $\vdash (r\to A)\to((\neg r\to A)\to(r\vee\neg r\to A))$. За правилом висновку $p, q \vdash r \vee \neg r \to A$, тобто $p, q, r\vee\neg r \vdash A$. Оскільки $\vdash r\vee\neg r$, то $p, q \vdash A$.

2. *Довести, що $\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B) \to C$.*

1. $\neg A \vdash \neg A$
2. $\neg A, \neg B \vdash \neg A$
3. $\neg A, \neg B \vdash (\neg B \to \neg A)$ (за теоремою дедукції)
4. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (підстановка у IV.1 з використанням правила силогізму для IV.2 та IV.3)
5. $(\neg B \to \neg A) \vdash (A \to B)$ (за теоремою дедукції)
6. $\neg A, \neg B \vdash (A \to B)$ (з 3 та 5 використовуючи теорему дедукції та правило силогізму)
7. $\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B)$
8. $\neg A, \neg B; C \vdash C$ (оскільки $\Gamma \vdash C$, якщо $C \in \Gamma$)
9. $\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B) \to C$ (оскільки якщо $\vdash R$, то $\vdash (b \to R)$)

3. Дослідити формулу:

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \vee \exists x B(x)).$$

Розглянемо обернено твердження:

$$\neg\forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \vee \exists x B(x))$$

Зводимо до попередньої нормальної форми:

$$\neg(\neg\forall x(A(x) \vee B(x)) \vee (\forall x A(x) \vee \exists x B(x)))$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge \neg (\forall x A(x) \vee \exists x B(x))$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg\forall x A(x) \wedge \neg\exists x B(x))$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge (\exists x(\neg A(x)) \wedge \forall x(\neg B(x)))$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge \exists x \forall z(\neg A(x) \wedge \neg B(z))$$

$$\forall x \exists y \forall z((A(x) \vee B(x)) \wedge \neg A(y) \wedge \neg B(z))$$

Зводимо до стандартної форми шляхом елімінації квантора існування:

$$y = f(x)$$

$$\forall x \forall z((A(x) \vee B(x)) \wedge \neg A(f(x)) \wedge \neg B(z))$$

Множина диз’юнктів

$$S = \{A(x) \vee B(x), \neg A(f(x)), \neg B(z)\}$$

Ербранівськії універсум:

$$E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}$$

Виведення порожнього диз’юнкта:

1. $A(x) \vee B(x)$
2. $\neg A(f(x))$
3. $\neg B(z)$
4. $A(f(a)) \vee B(f(a))$ (підстановка $f(a)$ замість x у 1)
5. $\neg A(f(a))$ (підстановка a замість x у 2)
6. $\neg B(f(a))$ (підстановка $f(a)$ замість z у 3)
7. $B(f(a))$ (з 4 і 5)
8. $\square$ (з 6 і 7)

Отже обернене твердження є суперечливим, тому початкова формула є тавтологією.