Метод динамічного програмування розв’язування задач оптимального керування.

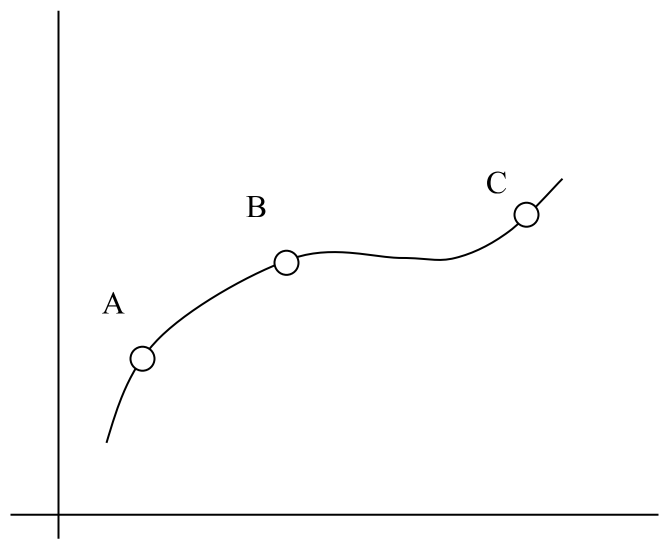
Розглянемо задачу оптимального керування. Потрібно знайти керування та траєкторії, на яких функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1)) \quad (1)$$

досягає мінімального значення для системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x,u,t). \quad (2)$$

Принцип оптимальності: якщо деяка траєкторія АС керованої системи (2)є оптимальною траєкторією задачі (1)-(2), то траєкторія ВС також



буде оптимальною.

Алгоритм методу динамічного програмування розв’язування задачі оптимального керування для дискретних систем складається з двох частин: знаходження керувань як функцій від станів системи (прямий хід) та обчислення оптимальних керувань і оптимальної траєкторії (зворотній хід).

Дискретний варіант:

Дискретні моменти часу $t_0, t_1, \ldots, t_N$, $\Delta t = t_{k+1} - t_k$.

Функціонал

$$I=\sum_{k=0}^{N-1}F_0(x_k,u_k,t_k)\Delta t+\Phi(x_N), \quad (3)$$

дискретна системи

$$x_{k+1}=F(x_k u_k,t_k). \qquad (4)$$

Функція Беллмана:

$$S_k(x_k,t_k)=\min_{\{u_j\}_k^{N-1}}[\sum_{j=k}^{N-1}F_0(x_j,u_j,t_j)+\Phi(x_N)]=$$

$$=\sum_{j=k}^{N-1}F_0(x_j,u_j^0,t_j)+\Phi(x_N). \qquad (5)$$

Різницеве рівняння Беллмана:

$$S_k(x_k,t_k)=\min_{u_k}[F_0(x_k,u_k,t_k)+S_{k+1}(F(x_k,u_k,t_k),t_{k+1}], \quad (6)$$

при цьому

$$S_N(x_N,t_N)=\Phi(x_N).$$

Приклад 1. знайти оптимальні керування та траєкторію, на яких функціонал

$$I=\sum_{i=0}^{2}(x_1(i)+u(i))+x_2(3) \quad (7)$$

досягає мінімального значення для дискретної системи керування

$$\begin{cases} x_1(i+1)=x_1(i)+2u(i)+x_2(i) \\ x_2(i+1)=x_1(i)+u(i) \end{cases} \quad (8)$$

з початковими умовами

$$x_1(0)=1,\ x_2(0)=0, \quad (9)$$

і обмеженнями на керування

$$|u(0)|\le 2,\ |u(1)|\le 3,\ |u(2)|\le 5. \quad (10)$$

Розв'язування.

$N=3$.

Прямий хід:

1. $k=2$, $k=N-1$

$$S_2(x_1(2),x_2(2),t(2))=\min_{|u(2)|\le 5}[(x_1(2)+u(2))+x_2(3)]=$$

$$=\min_{|u(2)|\le 5}[x_1(2)+u(2)+x_1(2)+u(2)]=$$

$$= \min_{|u(2)|\le 5}[2x_1(2) + 2u(2)] \Rightarrow$$

Оптимальне керування $u^0(2) = -5$.

$$S_2(x_1(2), x_2(2), t(2)) = 2x_1(2) - 10.$$

2. $k = 1$

Запишемо різницеве рівняння Беллмана

$$S_1(x_1(1), x_2(1), t(1)) = \min_{|u(1)|\le 3}[(x_1(1) + u(1)) + 2(x_1(1) + 2u(1) + x_2(1)) - 10] =$$

$$= \min_{|u(1)|\le 3}[(3x_1(1) + 5u(1)) + 2x_2(1) - 10].$$

Звідси оптимальне керування $u^0(1) = -3$.

$$S_1(x_1(1), x_2(1), t(1)) = 3x_1(1) + 2x_2(1) - 25.$$

3. $k = 0$

$S_0(x_1(0), x_2(0), t(0)) =$

$$= \min_{|u(0)|\le 2}[(x_1(0) + u(0)) + 3(x_1(0) + 2u(0) + x_2(0)) + 2(x_1(0) + u(0)) - 25] =$$

$$= \min_{|u(0)|\le 2}[6x_1(0) + 3x_2(0) + 9u(0) - 25].$$

Звідси оптимальне керування $u^0(0) = -2$.

Мінімальне значення функціоналу

$$S_0(x_1(0), x_2(0), t(0)) = -37.$$

Зворотній хід:

1. $k = 0$

$u^0(0) = -2$. Значення $x_1^0(0), x_2^0(0)$ беремо з початкових умов

$x_1^0(0) = 1, x_2^0(0) = 0$.

Тоді з рівняння системи маємо

$x_1^0(1) = x_1^0(0) + 2u^0(0) + x_2^0(0) = -3,$

$x_2^0(1) = x_1^0(0) + u^0(0) = -1.$

2. $k = 1$

$u^0(1) = -3,$

$x_1^0(2) = x_1^0(1) + 2u^0(1) + x_2^0(1) = -10,$

$x_2^0(2) = x_1^0(1) + u^0(1) = -6.$

3. $k = 2$

$u^0(2) = -5,$

$x_1^0(3) = x_1^0(2) + 2u^0(2) + x_2^0(2) = -26$,
$x_2^0(3) = x_1^0(2) + u^0(2) = -15$.

Відповідь:
Оптимальне керування
$u^0(0) = -2$, $u^0(1) = -3$, $u^0(2) = -5$.
Оптимальна траєкторія
$x_1^0(0) = 1, x_2^0(0) = 0$,
$x_1^0(1) = -3, x_2^0(1) = -1$,
$x_1^0(2) = -10, x_2^0(2) = -6$,
$x_1^0(3) = -26, x_2^0(2) = -15$.