Властивості оцінок $\hat{\alpha}, \hat{y}, \hat{\sigma}^2$.

Теорема. Оцінки $\hat{\alpha}, \hat{y}, \hat{\sigma}^2$ мають такі властивості.

I. Для $\hat{\alpha}$ справедливо:

а) $\hat{\alpha} \sim \mathcal{N}\left(\alpha, \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1}\right)$,

б) $\hat{\alpha}_i \sim \mathcal{N}\left(\alpha_i, \sigma^2 d_i\right)$,

де $d_i = \left\{\left(X^T X\right)^{-1}\right\}_{ii}$, тобто d_i є i-тим діагональним елементом матриці $\left(X^T X\right)^{-1}$.

II. Статистика $$\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\alpha}-\alpha)^T \left(X^T X\right)(\hat{\alpha}-\alpha) \sim \chi^2(p).$$

III. Для оцінки $\hat{y}$ справедливо:

а) $\hat{y} \sim \mathcal{N}\left(X\alpha, \sigma^2 X \left(X^T X\right)^{-1} X^T\right)$,

б) $\hat{y}(k) \sim \mathcal{N}\left(x^T(k)\alpha, \sigma^2 x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)\right), \; k = \overline{1, N}$.

IV. Для оцінки $\hat{\sigma}^2$ справедливо:

а) $\dfrac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-p)$,

б) $M\hat{\sigma}^2 = \sigma^2, \; D\hat{\sigma}^2 = \dfrac{2\sigma^4}{N-p}$.

V. Оцінки $\hat{\alpha}$ та $\hat{\sigma}^2$ є незалежними.

VI. Оцінки $\hat{\alpha}, \hat{y}$ та $\hat{\sigma}^2$ є ефективними.

VII. *Теорема Андерсона – Тейлора.*

Вкажемо явно у регресійній моделі поточну кількість

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{N-p} y^T P y, & (*) \\ \dfrac{1}{N-p} e^T P e. & (**) \end{cases}$$

Причому скористалися тим, що

$$PX = \Theta_{N,p},$$

після транспонування отримуємо також таке

$$X^T P = \Theta_{p,N}. \quad (0.13)$$

Також була прийнята до уваги ідемпотентність матриці P, тобто $P^2 = P$. Доведення на самостійну роботу.

Підрахуємо тепер

$$tr(P) = tr\left(E_N - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T\right) = tr(E_N) - tr\left(X\left(X^T X\right)^{-1} X^T\right) =$$

$$= N - tr\left(E_p\right) = N - p. \quad (0.14)$$

Тут скористалися тим, що якщо $A \in M_{p,q}(\mathbb{R}),\ B \in M_{q,p}(\mathbb{R})$, то

$$tr(AB) = tr(BA).$$

Так як матриця P є симетричною та ідемпотентною, тобто є проекційною, то згідно леми 3 та (0.14) отримуємо

$$rank(P) = tr(P) = N - p.$$

Так як $\dfrac{1}{\sigma} e \sim \mathcal{N}\left(\theta_N, E_N\right)$, то, скориставшись лемою 2, отримуємо

$$\frac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \overset{(**)}{=} \frac{(N-p)\dfrac{1}{N-p} e^T P e}{\sigma^2} = \frac{e^T P e}{\sigma^2} = \left(\frac{e}{\sigma}\right)^T P \left(\frac{e}{\sigma}\right) \overset{Л.2}{\sim} \chi^2(N-p).$$

IV.б. Так як $M\chi^2(q)=q,\ D\chi^2(q)=2q$, то з властивості **IV.а** випливає

$$\frac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(N-p)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(N-p)}{\sigma^2}M\hat{\sigma}^2=M\left\{\dfrac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right\}=N-p,\\[2ex]\dfrac{(N-p)^2}{\sigma^4}D\hat{\sigma}^2=D\left\{\dfrac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right\}=2(N-p),\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\cancel{(N-p)}}{\sigma^2}M\hat{\sigma}^2=\cancel{N-p},\\[2ex]\dfrac{(N-p)^{\cancel{2}}}{\sigma^4}D\hat{\sigma}^2=2\cancel{(N-p)},\end{array}\right|\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}M\hat{\sigma}^2=\sigma^2,\\[2ex]D\hat{\sigma}^2=\dfrac{2\sigma^4}{N-p}.\end{array}\right|$$

[redacted]

Лема 4. Нехай

- $\vec{\xi}\sim\mathcal{N}\left(\vec{m},\sigma^2E_N\right),\quad\vec{\xi}\in\mathbb{R}^N,$
- $A\in M_{p,N}(\mathbb{R}),\quad B\in M_N(\mathbb{R}),$

Тоді статистики

$$A\vec{\xi}\ \text{ і }\ \vec{\xi}^TB\vec{\xi}\ \text{ є незалежними}\quad\Leftrightarrow\quad AB=\Theta_{p,N}.$$

V. Потрібно впевнитися, що незалежними є статистики

$$\hat{\alpha}=\left(X^TX\right)^{-1}X^Ty\qquad\text{та}\qquad\hat{\sigma}^2\overset{(*)}{=}\frac{1}{N-p}y^TPy=y^T\frac{P}{N-p}y.$$

Так як $y\sim\mathcal{N}\left(X\alpha,\sigma^2E_N\right)$, то згідно леми 4 для цього достатньо впевнитися, що дорівнює нульовій матриці такий добуток

$$\left(X^TX\right)^{-1}X^T\frac{P}{N-p}=\frac{1}{N-p}\left(X^TX\right)^{-1}\underline{X^TP}\overset{(0.13)}{=}\Theta_{p,N}.$$

Доведення властивостей **VI** та **VII** не наводяться у зв'язку з їх громіздкістю. ■

Оцінка параметрів регресійної моделі при наявності лінійних обмежень

Згадаємо постановку задачі у класичному регресійному аналізі. Вважаємо, що для регресійної моделі

$$y = X\alpha + e \tag{0.15}$$

справедливі усі припущення класичного регресійного аналізу:

I. $e \sim \mathcal{N}\left(\theta_N, \sigma^2 E_N\right), \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$,

II. $rank(X) = p$,

III. немає ніяких обмежень на α, тобто $\alpha \in \mathbb{R}^p$.

Введемо позначення $Q(\alpha) = \|y - X\alpha\|^2$. Тоді відомо, що при справедливості припущень I, II, III оцінка МНК є розв'язком такої оптимізаційної задачі

$$\hat{\alpha} = \arg\min_{\alpha} Q(\alpha) = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y.$$

Послабимо тепер припущення III, а саме будемо вважати, що α задовольняє деякій системі алгебраїчних рівнянь, а саме:

III'. $\alpha \in \mathcal{L}$, де $\mathcal{L} = \left\{\alpha : A\alpha = b, rank(A) = q\right\}, A \in M_{q,p}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^q$.

Тоді оцінка МНК для об'єкту (0.15) при справедливості припущень I, II, III', тобто при наявності лінійних обмежень, є розв'язком такої оптимізаційної задачі

$$\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} = \arg\min_{\alpha \in \mathcal{L}} Q(\alpha).$$

А її вигляд задає таке твердження.

Теорема. Оцінка МНК для об'єкту (0.15) при справедливості припущень I, II, III' визначається таким чином

$$\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} = \hat{\alpha} - \left(X^T X\right)^{-1} A^T \left[A\left(X^T X\right)^{-1} A^T \right]^{-1} [A\hat{\alpha} - b], \tag{0.16}$$

де $\hat{\alpha} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$.

Наслідок. Похибка оцінювання $\Delta(\hat{\alpha}_{\mathcal{L}})$ для оцінки $\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}$ має вигляд:

$$\Delta(\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}) = \hat{\alpha}_{\mathcal{L}} - \alpha = U\left(X^T X\right)^{-1} X^T e, \tag{0.17}$$

де $U = E_p - \left(X^T X\right)^{-1} A^T \left[A\left(X^T X\right)^{-1} A^T \right]^{-1} A$.

Доведення наслідку. Так як згідно (0.9)

$$\Delta(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} - \alpha = \left(X^T X\right)^{-1} X^T e,$$

то $\hat{\alpha} = \alpha + \left(X^T X\right)^{-1} X^T e$. Тоді

$$\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} = \hat{\alpha} - \left(X^T X\right)^{-1} A^T \left[A\left(X^T X\right)^{-1} A^T \right]^{-1} [A\hat{\alpha} - b] =$$

$$= \alpha + \underline{\underline{\left(X^T X\right)^{-1} X^T e}} - \left(X^T X\right)^{-1} A^T \left[A\left(X^T X\right)^{-1} A^T \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\underline{A\alpha} + A\underline{\underline{\left(X^T X\right)^{-1} X^T e}} \underline{- b} \right] =$$

$$= \alpha + \left\{ E_p - \left(X^T X\right)^{-1} A^T \left[A\left(X^T X\right)^{-1} A^T \right]^{-1} A \right\} \left(X^T X\right)^{-1} X^T e =$$

$$= \alpha + U\left(X^T X\right)^{-1} X^T e.$$

Або остаточно отримуємо

$$\Delta(\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}) = \hat{\alpha}_{\mathcal{L}} - \alpha = U\left(X^T X\right)^{-1} X^T e. \qquad \blacksquare$$

Властивості оцінок $\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}$, $\hat{\sigma}^2_{\mathcal{L}}$.

Теорема. Оцінки $\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}$, $\hat{\sigma}^2_{\mathcal{L}}$ мають такі властивості.

I. $\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} \sim \mathcal{N}\left(\alpha, \sigma^2 U\left(X^T X\right)^{-1}\right)$,

II. $M\hat{\sigma}^2_{\mathcal{L}} = \sigma^2$,

де $U = E_p - \left(X^T X\right)^{-1} A^T \left[A\left(X^T X\right)^{-1} A^T\right]^{-1} A$.

Лема. Справедливі такі матричні тотожності:

- $\left(X^T X\right)^{-1} U^T = U\left(X^T X\right)^{-1}$,
- $U^2 = U$.

Доведення леми. На самостійну роботу.

Доведення теореми. I: Так як згідно (0.17) та припущення I класичного регресійного аналізу

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{\mathcal{L}} = \alpha + U\left(X^T X\right)^{-1} X^T e, \\ e \sim \mathcal{N}\left(\theta_N, \sigma^2 E_N\right), \sigma^2 \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

то оцінка $\hat{\alpha}_{\mathcal{L}}$, як лінійне перетворення нормально розподіленого вектора e, згідно Зауваження 3 буде теж нормально розподілена

$$\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} \sim \mathcal{N}\left(\alpha + \underbrace{U\left(X^T X\right)^{-1} X^T \theta_N}_{\substack{\| \\ \theta_p}}, \sigma^2 U\left(X^T X\right)^{-1} \cancel{X^T E_N X}\, \cancel{\left(X^T X\right)^{-1}} U^T \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}_{\mathcal{L}} \sim \mathcal{N}\left(\alpha, \sigma^2 \underbrace{U\left(X^T X\right)^{-1} U^T}_{\substack{\| \\ U\left(X^T X\right)^{-1}}} \right) \Rightarrow \hat{\alpha}_{\mathcal{L}} \sim \mathcal{N}\left(\alpha, \sigma^2 \underbrace{UU}_{\substack{\| \\ U}}\left(X^T X\right)^{-1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}_{\mathcal{L}} \sim \mathcal{N}\left(\alpha, \sigma^2 U\left(X^T X\right)^{-1} \right).$$

У передостанніх двох переходах скористалися допоміжною лемою.

ІІ: Для доведення, що $M\hat{\sigma}^2_{\mathcal{L}_1} = \sigma^2$, достатньо впевнитися, що

$$M\left\| y - X\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} \right\|^2 = \left[N - (p - q) \right] \sigma^2 .$$

Так як $\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} = \alpha + U\left(X^T X\right)^{-1} X^T e$, то

$$M\left\| y - X\hat{\alpha}_{\mathcal{L}} \right\|^2 = M\left\| y - X\left(\alpha + U\left(X^T X\right)^{-1} X^T e \right) \right\|^2 =$$

$$= M\left\| \underbrace{y - X\alpha}_{\substack{\| \\ e}} - XU\left(X^T X\right)^{-1} X^T e \right\|^2 = M\left\| e - XU\left(X^T X\right)^{-1} X^T e \right\|^2 =$$

$$= M\left\| \left[E_N - XU\left(X^T X\right)^{-1} X^T \right] e \right\|^2 =$$

$$= Me^T \left[E_N - XU\left(X^T X\right)^{-1} X^T \right]^T \left[E_N - XU\left(X^T X\right)^{-1} X^T \right] e =$$

$$= Mtr\left\{e^T\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]^T\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]e\right\} =$$

$$= Mtr\left\{ee^T\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]^T\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]\right\} =$$

$$= tr\left\{\underbrace{\left[M\left(ee^T\right)\right]}_{\substack{\| \\ \sigma^2 E_N}}\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]^T\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]\right\} =$$

$$= \sigma^2 tr\left\{\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]^T\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]\right\} =$$

$$= \sigma^2 tr\left\{\left[E_N - X\underbrace{\left(X^TX\right)^{-1}U^T}_{\substack{\| \\ U\left(X^TX\right)^{-1}}}X^T\right]\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]\right\} =$$

$$= \sigma^2 tr\left\{\left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]^2\right\} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{на самостійній роботі впевнитися, що} \\ \left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]^2 = \left[E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right], \end{array}\right| =$$

$$= \sigma^2 tr\left\{E_N - XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right\} = \sigma^2\left\{N - tr\left[XU\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]\right\} =$$

$$= \sigma^2 \left\{ N - tr\left[U \cancel{\left(X^T X \right)^{-1}} \cancel{X^T X} \right] \right\} = \sigma^2 \left\{ N - tr[U] \right\} =$$

$$= \sigma^2 \left\{ N - tr\left[E_p - \left(X^T X \right)^{-1} A^T \left[A \left(X^T X \right)^{-1} A^T \right]^{-1} A \right] \right\} =$$

$$= \sigma^2 \left\{ N - \left[tr\left(E_p \right) - tr\left(\left(X^T X \right)^{-1} A^T \left[A \left(X^T X \right)^{-1} A^T \right]^{-1} A \right) \right] \right\} =$$

$$= \sigma^2 \left\{ N - \left[p - tr\left(\cancel{A \left(X^T X \right)^{-1} A^T} \cancel{\left[A \left(X^T X \right)^{-1} A^T \right]^{-1}} \right) \right] \right\} =$$

$$= \sigma^2 \left\{ N - \left[p - tr\left(E_q \right) \right] \right\} = \sigma^2 \left\{ N - [p - q] \right\}. \qquad \blacksquare$$

Довірчі інтервали та області для параметрів регресійної моделі

I. Довірча область для α з рівнем довіри $(1-\gamma), \gamma > 0$.

Так як згідно властивостей II та IV.а оцінок $\hat{\alpha}$ та $\hat{\sigma}^2$

$$\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\alpha} - \alpha)^T \left(X^T X \right) (\hat{\alpha} - \alpha) \sim \chi^2(p),$$

$$\frac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-p),$$

причому ці статистики є незалежними згідно властивості V для оцінок $\hat{\alpha}$ та $\hat{\sigma}^2$, то по побудові

$$\frac{\dfrac{\dfrac{1}{\cancel{\sigma^2}}(\hat{\alpha}-\alpha)^T\left(X^TX\right)(\hat{\alpha}-\alpha)}{p}}{\dfrac{\dfrac{\cancel{(N-p)}\hat{\sigma}^2}{\cancel{\sigma^2}}}{\cancel{N-p}}} \sim F(p,N-p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p\hat{\sigma}^2}(\hat{\alpha}-\alpha)^T\left(X^TX\right)(\hat{\alpha}-\alpha) \sim F(p,N-p).$$

Тоді логічно до довірчої області для α віднести усі значення останньої статистики крім області великих значень, у яку ця статистика повинна попадати з ймовірністю $(1-\gamma)$. Тобто потрібна довірча область для α набуває вигляду

$$\boxed{\frac{1}{p\hat{\sigma}^2}(\alpha-\hat{\alpha})^T\left(X^TX\right)(\alpha-\hat{\alpha}) < F_\gamma(p,N-p), \qquad (0.18)}$$

де $F_\alpha(m,n)$ – 100α відсоткова точка F-розподілу з m та n ступенями свободи.

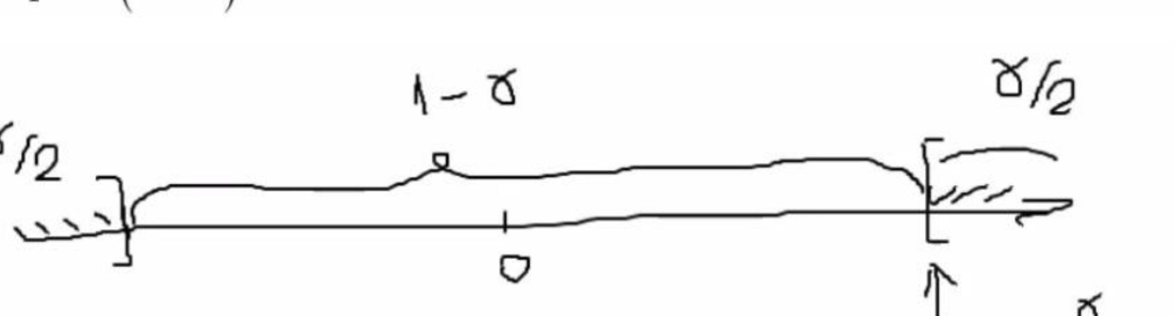
II. Довірчий інтервал для α_i з рівнем довіри $(1-\gamma), \gamma > 0$.

Згідно властивостей І.б та IV.а оцінок $\hat{\alpha}$ та $\hat{\sigma}^2$ справедливо

$$\hat{\alpha}_i \sim \mathcal{N}\left(\alpha_i, \sigma^2 d_i\right),$$

$$\frac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-p),$$

де $d_i = \left\{\left(X^TX\right)^{-1}\right\}_{ii}$, тобто d_i є i-тим діагональним елементом матриці $\left(X^TX\right)^{-1}$. Тоді



$$\frac{\hat{\alpha}_i-\alpha_i}{\sigma\sqrt{d_i}}\sim\mathcal{N}(0,1)\Rightarrow-\frac{\hat{\alpha}_i-\alpha_i}{\sigma\sqrt{d_i}}=\frac{\alpha_i-\hat{\alpha}_i}{\sigma\sqrt{d_i}}\sim\mathcal{N}(0,1).$$

А так як дві останні статистики є незалежними згідно властивості V для оцінок $\hat{\alpha}$ та $\hat{\sigma}^2$, то це дозволяє стверджувати, що по побудові

$$\frac{\dfrac{\alpha_i-\hat{\alpha}_i}{\cancel{\sigma}\sqrt{d_i}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\cancel{(N-p)}\hat{\sigma}^2}{\cancel{\sigma^2}}}{\cancel{N-p}}}}\sim t(N-p)\Rightarrow\frac{\alpha_i-\hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{d_i}}\sim t(N-p).$$

Тоді логічно до довірчого інтервалу для α_i віднести усі значення останньої статистики крім областей її екстремальних значень, у які ця статистика повинна попадати з ймовірністю $(1-\gamma)$. Тоді врахування симетричності розподілу цієї статистики, можемо стверджувати, що потрібний довірчий інтервал для α_i задається нерівністю

$$\left|\frac{\alpha_i-\hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{d_i}}\right|<t_{\frac{\gamma}{2}}(N-p),$$

або розкривши модуль отримуємо остаточний результат

$$\boxed{\hat{\alpha}_i-\hat{\sigma}\sqrt{d_i}\,t_{\frac{\gamma}{2}}(N-p)<\alpha_i<\hat{\alpha}_i+\hat{\sigma}\sqrt{d_i}\,t_{\frac{\gamma}{2}}(N-p),\ i=\overline{1,p},\qquad(0.19)}$$

де $t_\alpha(n)$ – 100α відсоткова точка t-розподілу Стьюдента з n ступенями свободи.

III. Інтервали Бонфероні.

Постановка задачі: побудувати довірчу область у вигляді гіперпаралелепіпеда для $\alpha\left(\alpha\in\mathbb{R}^p,p>2\right)$ з рівнем довіри не менше ніж $(1-\gamma),\gamma>0$.

Розв'язок: потрібний гіперпаралелепіпед є перетином довірчих інтервалів виду (0.19) для усіх компонент вектора α з рівнем довіри $\left(1-\frac{\gamma}{p}\right), \gamma > 0$, а саме:

$$\hat{\alpha}_i - \hat{\sigma}\sqrt{d_i}\, t_{\frac{\gamma}{2p}}(N-p) < \alpha_i < \hat{\alpha}_i + \hat{\sigma}\sqrt{d_i}\, t_{\frac{\gamma}{2p}}(N-p), i = \overline{1,p}. \qquad (0.20)$$

Доведення. Нехай A_i - подія, яка полягає у тому, що α_i належить відповідному довірчому інтервалу виду (0.20), причому зрозуміло, що $P(A_i) = 1-\frac{\gamma}{p},\ i=\overline{1,p}$.

Підрахуємо ймовірність належності α гіперпаралелепіпеду, який задається системою нерівностей (0.20):

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right\} = 1 - P\left\{\bigcup_{i=1}^{p} \overline{A}_i\right\} \geq 1 - \sum_{i=1}^{p} \underbrace{P\left\{\overline{A}_i\right\}}_{\overset{\parallel}{\frac{\gamma}{p}}} = 1-\gamma \Rightarrow P\left\{\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right\} \geq 1-\gamma. \qquad \blacksquare$$

є перетином довірчих інтервалів виду (0.19) для усіх компонент вектора α

Довірчі інтервали та області для апроксимацій функції регресії у регресійній моделі

I. Довірча область для $X\alpha$ з рівнем довіри $(1-\gamma), \gamma > 0$.

Так як довірча область для α з рівнем довіри $(1-\gamma)$ має вигляд (0.18):

$$\frac{1}{p\hat{\sigma}^2}(\hat{\alpha}-\alpha)^T \left(X^T X\right)(\hat{\alpha}-\alpha) < F_\gamma(p, N-p) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p\hat{\sigma}^2}(X\hat{\alpha}-X\alpha)^T (X\hat{\alpha}-X\alpha) < F_\gamma(p, N-p) \Rightarrow$$

Або остаточно отримуємо потрібну довірча область для $X\alpha$ у вигляді

$$\frac{1}{p\hat{\sigma}^2}\left\|X\alpha - X\hat{\alpha}\right\|^2 < F_\gamma(p, N-p), \qquad (0.21)$$

де $F_\alpha(m,n)$ – 100α відсоткова точка F-розподілу з m та n ступенями свободи, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p}\left\|y - X\hat{\alpha}\right\|^2, \alpha \in \mathbb{R}^p$.

II. Довірчий інтервал для $x^T(k)\alpha$ з рівнем довіри $(1-\gamma), \gamma > 0$.

Згідно властивості III.б для оцінки $\hat{y}(k)$ справедливо

$$\hat{y}(k) = x^T(k)\hat{\alpha} \sim \mathcal{N}\left(x^T(k)\alpha, \sigma^2 x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)\right), \quad k = \overline{1,N},$$

$$\Rightarrow \frac{x^T(k)\hat{\alpha} - x^T(k)\alpha}{\sigma\sqrt{x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)}} \sim \mathcal{N}(0,1), \quad k = \overline{1,N},$$

$$\Rightarrow \frac{x^T(k)\alpha - x^T(k)\hat{\alpha}}{\sigma\sqrt{x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)}} \sim \mathcal{N}(0,1), \quad k = \overline{1,N}.$$

В свою чергу згідно властивості IV.а для оцінки $\hat{\sigma}^2$ має місце

$$\frac{(N-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-p),$$

А так як дві останні статистики є незалежними згідно властивості V для оцінок $\hat{\alpha}$ та $\hat{\sigma}^2$, то це дозволяє стверджувати, що по побудові

$$\frac{\dfrac{x^T(k)\alpha - x^T(k)\hat{\alpha}}{\cancel{\sigma}\sqrt{x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\cancel{(N-p)}\hat{\sigma}^2}{\cancel{\sigma^2}}}{\cancel{N-p}}}} \sim t(N-p), \quad k = \overline{1,N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^T(k)\alpha - x^T(k)\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)}} \sim t(N-p), \quad k = \overline{1,N}.$$

Тоді логічно до довірчого інтервалу для $x^T(k)\alpha$ віднести усі значення останньої статистики крім областей її екстремальних значень, у які ця статистика повинна попадати з ймовірністю $(1-\gamma)$. Тоді врахування симетричності розподілу цієї статистики, можемо стверджувати, що потрібний довірчий інтервал для α_i задається нерівністю

$$\left|\frac{x^T(k)\alpha - x^T(k)\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)}}\right| < t_{\frac{\gamma}{2}}(N-p), \quad k=\overline{1,N},$$

або розкривши модуль отримуємо остаточний результат

$$\boxed{\begin{aligned} x^T(k)\hat{\alpha} - \hat{\sigma}\sqrt{x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)}\, t_{\frac{\gamma}{2}}(N-p) < \\ < x^T(k)\alpha < \\ < x^T(k)\hat{\alpha} + \hat{\sigma}\sqrt{x^T(k)\left(X^T X\right)^{-1} x(k)}\, t_{\frac{\gamma}{2}}(N-p), \quad k=\overline{1,N}, \end{aligned} \qquad (0.22)}$$

де $t_\alpha(n)$ – 100α відсоткова точка t-розподілу Стьюдента з n ступенями свободи.