Метод невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)\,, \quad (1)$$

де $f_i(t) = e^{\alpha t}(P_{m_i}(t)\cos\beta t + R_{k_i}(t)\sin\beta t)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Тоді частковий розв'язок неоднорідної системи можна знайти за методом невизначених коефіцієнтів

$$x_i = e^{\alpha t}(Q^i_{m+s}(t)\cos\beta t + T^i_{m+s}(t)\sin\beta t)\,,\; i = 1,2,\ldots,n\,,\; (2)$$

де $Q^i_{m+s}(t), T^i_{m+s}(t)$ - поліноми степеня $m+s$ із невизначених коефіцієнтів, $m = \max\limits_i\{m_i, k_i\}$, $s = 0$, якщо $\lambda = \alpha + i\beta$ не є власним значенням матриці A, $s = k$, якщо λ - кратності k.

Приклад 1.

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = x + t^2 \end{cases} . \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок однорідної системи:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}. \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Розв'яжемо систему (5):

Розв'язок шукає у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at+b)e^t \\ (ct+d)e^t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t + ate^t + be^t \\ ce^t + cte^t + de^t \end{pmatrix},$$

Маємо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} (t+2) \\ (t+1) \end{pmatrix}e^t.$$

Розв'яжемо систему (6):
Розв'язок шукає у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + ft + g \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at + b \\ 2dt + f \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} (t+2) \\ (t+1) \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Метод варіації довільної сталої.

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t). \quad (7)$$

Розв'язок однорідної системи:

$$y(t) = \sum_i c_i y_i(t). \quad (8)$$

Нехай $c_i(t)$ і підставимо (8) в (7):

$$\sum_i c_i(t) \frac{dy_i(t)}{dt} + \sum_i \frac{dc_i(t)}{dt} y_i(t) = A \sum_i c_i(t) y_i(t) + f(t),$$

так як $\frac{dy_i(t)}{dt} = Ay_i(t)$, $i = \overline{1,n}$,

$$\sum_i c_i(t) A y_i(t) + \sum_i \frac{dc_i(t)}{dt} y_i(t) = A \sum_i c_i(t) y_i(t) + f(t),$$

$$\sum_i \frac{dc_i(t)}{dt} y_i(t) = f(t).$$

Та знаходимо $c_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Приклад 2.

$$\begin{cases} x' = y + tg^2 t - 1 \\ y' = -x + tgt \end{cases}. \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tg^2 t - 1 \\ tgt \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок однорідної системи:

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i,$$

Для $\lambda_1 = i$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок однорідної системи

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = c_1' \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} tg^2 t - 1 \\ tgt \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dc_1}{dt} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \frac{dc_2}{dt} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tg^2 t - 1 \\ tgt \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dt} \cos t + \dfrac{dc_2}{dt} \sin t = tg^2 t - 1 \\ -\dfrac{dc_1}{dt} \sin t + \dfrac{dc_2}{dt} \cos t = tgt \end{cases}, \quad (11)$$

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{dc_2}{dt} \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{\cos t}, \quad (12)$$

$$\frac{dc_2}{dt} \left(\frac{\cos^2 t}{\sin t} + \sin t \right) = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t},$$

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}, \quad (13)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t. \quad (14)$$

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{dc_2}{dt}\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{\cos t}, \quad (15)$$

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{\sin^2 t}{\cos t} - \frac{1}{\cos t},$$

$$c_1(t) = -\sin t. \quad (16)$$

Частинний розв’язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_ч = -\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t\right)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Загальний розв’язок неоднорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + -\sin t\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t\right)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad (18)$$