5.3. РІВНЯННЯ БЕЛМАНА ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Рівняння Белмана для неперервних систем в інтегральній формі

Розглянемо задачу оптимального керування з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторій. Потрібно знайти мінімум функціонала

$$Q = Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1)) \qquad (5.12)$$

для системи

$$x'(t) = f(x,u,t) \qquad (5.13)$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$,

і з обмеженнями на керування

$$u = u(t) \in \Omega_t(U) \qquad (5.14)$$

та на траєкторії

$$x = x(t) \in \Omega_t(X), \qquad (5.15)$$

для всіх $t_0 \le t \le t_1$.

Вважаємо, що

моменти часу t_0, t_1 фіксовані,

функції $G(x,u,t)$, $\Phi(x(t))$, вектор-функції $f(x,u,t)$ – неперервні за змінними x,u і кусково-неперервні за t на проміжку $[t_0,t_1]$.

Крім того, для функції $f(x,u,t)$ виконуються умови Ліпшиця за змінною керування, тобто для довільних w,v з множини (5.14):

$$\left| f(x,w,t) - f(x,v,t) \right| \le \alpha \left| w - v \right|,$$

де $\alpha > 0$ – деяка стала величина.

Припускаємо, що $u(t)$ – кусково-неперервна функція змінної t на проміжку $[t_0,t_1]$.

Візьмемо для довільного фіксованого $t \in [t_0, t_1]$ деяку точку $x = x(t) \in \Omega_t(X)$.

Для цих t і $x(t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$ відповідно, розглянемо задачу (5.12)-(5.15).

Розв'язок цієї задачі запишемо як $u^0(\tau, x)$, $x^0(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t_1$.

Мінімум відповідного функціонала для даного розв'язку позначимо через $S(x,t)$.

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t\le\tau\le t_1\\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{\int_t^{t_1} G(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \Phi(x(t_1))\} =$$

Задача А

$$= \int_t^{t_1} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Візьмемо на інтервалі $[t, t_1]$ довільний момент часу $t + \Delta t$ і точку $x(t + \Delta t) \in \Omega_{t+\Delta t}(X)$.

Розглянемо задачу (5.12)-(5.15) для цих $t + \Delta t$, $x(t + \Delta t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$ відповідно.

Відзначимо, що ця задача відрізняється від попередньої лише початковими даними.

Мінімум відповідного функціонала позначимо через $S(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$.

$$S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) =$$

$$= \min_{\substack{u(\tau) \in \Omega_\tau(U) \\ t+\Delta t \le \tau \le t_1 \\ x(t+\Delta t) \in \Omega_{t+\Delta t}(X)}} \left\{ \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(t_1)) \right\} =$$

Задача В

$$= \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau, x(t + \Delta t), \tau) d\tau + \Phi(\tilde{x}(t_1)),$$

де $\tilde{u}(\tau, x(t + \Delta t))$, $\tilde{x}(\tau)$ – розв’язок задачі (5.12)-(5.15) на проміжку $[t + \Delta t, t_1]$.

Виберемо за $\boldsymbol{x(t+\Delta t)}$ той стан системи (5.13), в який вона потрапляє в момент $\boldsymbol{t+\Delta t}$, рухаючись із точки $\boldsymbol{x(t)}$ по оптимальній траєкторії $\boldsymbol{x^0(\tau)}$, тобто за стан $\boldsymbol{x(t+\Delta t)}$ візьмемо стан $\boldsymbol{x^0(t+\Delta t)}$.

Тоді, згідно з принципом оптимальності, розв'язки наведених вище двох задач збігаються на проміжку $\boldsymbol{t+\Delta t \le \tau \le t \le t_1}$.

Тому

$$S(x(t+\Delta t),t+\Delta t)=\int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau+\Phi(x^0(t_1)).$$

Повернемося до значення функціонала $\boldsymbol{S(x,t)}$.

Використовуючи властивість адитивності інтеграла можемо записати

$$S(x,t)=\int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau+$$

$$+\int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau+\Phi(x^0(t_1)).$$

Звідси

$$S(x,t)=\int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau+S(x^0(t+\Delta t),t+\Delta t),$$

де траєкторія $\boldsymbol{x^0(t+\Delta t)}$ системи (5.13) отримана під дією керування $\boldsymbol{u^0(\tau)}$.

Отже,

$$S(x,t)=\int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau + S(x^0(t+\Delta t,u^0(\tau)),t+\Delta t).$$

Ця рівність виконується лише для оптимального керування $u^0(\tau)$. Якщо брати інші керування з множини допустимих керувань згідно з (5.14), то права частина останньої рівності може тільки збільшитись.

Отже, отримаємо **рівняння Белмана в інтегральній формі**

$$S(x,t)=$$

*

$$=\min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1\\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}}\left\{\int_{t}^{t+\Delta t} G(x(\tau),u(\tau,x),\tau)d\tau + S(x(t+\Delta t,u(\tau,x)),t+\Delta t)\right\}.$$

Позначимо це рівняння через *.

Рівняння Белмана в диференціальній формі для неперервних систем

Для задачі (5.12)-(5.15),

запишемо рівняння Белмана в диференціальній формі.

Для цього скористаємося отриманим вище рівнянням Белмана в інтегральній формі (*).

Додатково до наведених у цій задачі умов будемо вважати:

керування $\boldsymbol{u(t)}$ неперервні за $\boldsymbol{t}$,

для задачі (5.12)-(5.15) функція $\boldsymbol{S(x,t)}$ має неперервні частинні похідні:

за фазовими координатами $$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \equiv grad_x^T S(x,t) \equiv \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_n}\right),$$

та часом $$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t};$$

За цих припущень, розклавши рівняння Белмана в інтегральній формі **(*)** в ряд Тейлора й знехтувавши членами другого порядку й вище, можна записати рівняння у вигляді:

для задачі з фіксованим часом і вільним правим кінцем

$$\boldsymbol{S(x,t) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{G(x(\tau),u(\tau),\tau)\Delta t + S(x,t) +}$$

$$\boldsymbol{+\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\Delta t + grad_x^T S(x,t)(x(t+\Delta t,u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\};}$$

Тут $\boldsymbol{\tau}$ – деяке фіксоване значення, $\boldsymbol{o(\Delta t)}$ – нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж $\boldsymbol{\Delta t}$.

Зауважимо, що величина $\boldsymbol{S(x,t)}$ зліва і справа взаємно знищується.

При переході до границі при $\Delta t \to 0$ матимемо:

$$\tau \to t, \quad u(\tau) \to u(t),$$

$$x(\tau) \to x(t), \quad x(t+\Delta t, u(\tau)) \to x(t),$$

$$\frac{x(t+\Delta t, u(\tau)) - x(t)}{\Delta t} \to x'(t).$$

Отже, одержимо рівняння:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0 \le t \le t_1}} \{G(x,u,t) + \operatorname{grad}_x^T S(x,t) x'(t)\},$$

Це рівняння має виконуватись у кожній точці оптимальної траєкторії системи $x' = f(x,u,t)$.

В результаті

рівняння Белмана в диференціальній формі
для задачі з фіксованим часом й вільним правим кінцем траєкторій (5.12)-(5.15)

прийме вигляд

(+) $$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U)\\ t_0\le t\le t_1}}\{G(x,u,t)+\operatorname{grad}_x^T S(x,t)\cdot f(x,u,t)\},$$

$$S(x,t_1)=\Phi(x(t_1)).$$

Початкові умови випливають із вигляду функції $S(x,t)$.

Приклад 6.1. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u)=\int_0^T u^2(t)dt+\lambda x^2(T),$$

приймає свого мінімального значення для системи

$$x'(t)=u(t)$$

з початковою умовою $$x(0)=x_0.$$

Тут $\lambda>0$ – задана стала величина, T – задане, $0\le t\le T$.

Розв’язок.
Оскільки час фіксований, то рівняння Белмана в диференціальній формі для цієї задачі запишемо у вигляді

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\min_u\{u^2(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}u(t)\},$$

$$S(x,T)=\lambda x^2(T). \qquad (!)$$

Звідси

$$\min_{u}\{\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+u^2(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}u(t)\}=0 \qquad (*)$$

З необхідної умови мінімуму по керуванню маємо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}+2u(t)=0$$

Отже, знайдене керування буде мати вигляд:

$$u^0(t)=-\frac{1}{2}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}$$

Підставивши цей вираз у рівняння Белмана (*)

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=0,$$

одержимо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2=0$$

Отримали нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних.

Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x,t)$ – будемо шукати у вигляді полінома з невідомими коефіцієнтами, які залежать від часу t:

$$S(x,t) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2. \qquad (**)$$

Підставимо останній вираз $S(x,t)$ у рівняння Белмана (**) та в умову для $S(x,t)$ (!):

$$\begin{cases} c_0'(t) + c_1'(t)x + c_2'(t)x^2 - \dfrac{1}{4}(c_1(t) + 2c_2(t)x)^2 = 0 \\ c_0(T) + c_1(T)x + c_2(T)x^2 = \lambda x^2 \end{cases}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь з початковими умовами (на правому кінці)

$$\begin{cases} c_0'(t) - \dfrac{1}{4}c_1^2(t) = 0 \\ c_1'(t) - c_1(t)c_2(t) = 0 \\ c_2'(t) - c_2^2(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0(T) = 0 \\ c_1(T) = 0 \\ c_2(T) = \lambda \end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що $c_1^2(t) \ge 0$, знаходимо

$$c_0(t) \equiv 0,\ c_1(t) \equiv 0,\ 0 \le t \le T.$$

Розв'яжемо останнє рівняння системи:

$$\frac{dc_2(t)}{dt} - c_2^2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dc_2(t)}{c_2^2(t)} = dt \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{c_2(t)} = t + C \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{1}{t+C}$$

де C – стала інтегрування.

Враховуючи умову $c_2(T) = -\dfrac{1}{T+C} = \lambda$, маємо $C = -\dfrac{1+\lambda T}{\lambda}$.

Отже,
$$c_2(t) = \frac{\lambda}{1-\lambda(t-T)}.$$

Таким чином функція Белмана остаточно запишеться у наступному вигляді

$$S(x,t)=\frac{\lambda x^2}{1-\lambda(t-T)}.$$

Тоді функція керування (виписана через функцію Белмана) як функція координат системи,

$$u^0=-\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)},\quad 0\le t\le T$$

є розв'язком задачі синтезу оптимального керування.

Далі підставимо u^0 у систему:

$$x'(t)=-\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)}\quad\Rightarrow\quad\frac{dx}{dt}=-\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{d(1-\lambda(t-T))}{1-\lambda(t-T)}\quad\Rightarrow\quad\ln x=\ln C(1-\lambda(t-T))$$

де C – стала інтегрування.

Таким чином, траєкторія має вигляд

$$x = C(1 - \lambda(t - T)).$$

Невідому константу визначимо з початкової умови:

$$x(0) = (1 + \lambda T)C = x_0.$$

Звідси $$C = \frac{x_0}{1 + \lambda T}.$$

Отже, оптимальна траєкторія матиме вигляд

$$x^0(t) = \frac{(1 - \lambda(t - T))x_0}{1 + \lambda T}$$

Тоді $$u^0(t) = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda T}, \quad 0 \le t \le T$$ – оптимальне керування.

Приклад 6.2. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{1} u^2(t)dt + \frac{1}{2}x_2^2(1), \quad \text{де} \quad t \in [t_0, 1],$$

для системи

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \end{cases}$$

з початковою умовою

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}$$

досягає свого мінімального значення.

Розв’язок. Запишемо рівняння Белмана для функції $S(x,t)$:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\min_{u}\{\frac{1}{2}u^{2}(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}x_2(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}u(t)\}$$

за умови

$$S(x_1,x_2,1)=\frac{1}{2}x_2^2(1)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\min_{u}\{\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}u^{2}(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}x_2(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}u(t)\}=0$$

З необхідної умови мінімуму маємо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}+u(t)=0$$

Звідси отримаємо вигляд можливого оптимального керування через функцію Белмана

$$u^{0}(x_1,x_2,t)=-\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}\quad.$$

Підставимо це $u^{O}(x_1, x_2, t)$ у рівняння Белмана.

Отже, для розв'язування задачі треба знайти функцію $S(x_1, x_2, t)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}\right)^2 = 0$$

за умови, що

$$S(x_1, x_2, 1) = \frac{1}{2} x_2^2(1)$$

Функцію $S(x_1, x_2, t)$ <u>будемо шукати у вигляді квадратичної форми</u>:

$$S(x_1, x_2, t) = c_{11}(t)x_1^2 + 2c_{12}(t)x_1x_2 + c_{22}(t)x_2^2$$

Підставимо це зображення функції $S(x_1, x_2, t)$ у рівняння та умову для функції $S(x_1, x_2, t)$ і для визначення коефіцієнтів полінома отримаємо систему диференціальних рівнянь з початковими умовами (на правому кінці)

$$\begin{cases} c'_{11}(t) - 2c_{12}^2(t) = 0 \\ c'_{12}(t) + c_{11}(t) - 2c_{12}(t)c_{22}(t) = 0, \\ c'_{22}(t) + 2c_{12}(t) - 2c_{22}^2(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{11}(1) = 0 \\ c_{12}(1) = 0 \\ c_{22}(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Виконавши необхідні обчислення, знаходимо:

$$c_{11}(t) = c_{12}(t) \equiv 0; \;\; c_{22}(t) = \frac{1}{2(2-t)} \;\; , \; t \in [t_0, 1].$$

Отже, у даному випадку функція Белмана має остаточний вигляд

$$S(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} \frac{x_2^2(t)}{2-t}.$$

Тоді $$u^0(x_1, x_2, t) = \frac{x_2(t)}{t-2}$$ – розв’язок задачі синтезу оптимального керування.

Таким чином, система керування матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = \dfrac{x_2}{t-2} \end{cases}$$

Зінтегруємо систему

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dt}{t-2} \quad \Rightarrow \quad \ln x_2 = \ln C(t-2) \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = C(t-2)$$

$$x_1'(t) = C(t-2), \qquad x_1(t) = Ct(\frac{1}{2}t - 2) + D$$

де C, D – сталі інтегрування.

З початкових умов визначимо невідомі сталі інтегрування:

$$x_1(t_0) = Ct_0(\frac{1}{2}t_0 - 2) + D = x_{10}$$

$$x_2(t_0) = C(t_0 - 2) = x_{20}$$

Звідси

$$C=\frac{x_{20}}{(t_0-2)},\qquad D=x_{10}-\frac{x_{20}t_0(\frac{1}{2}t_0-2)}{(t_0-2)}.$$

Отже, оптимальна траєкторія системи матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{x_{20}}{(t_0-2)}t(\dfrac{1}{2}t-2)+x_{10}-\dfrac{x_{20}t_0(\frac{1}{2}t_0-2)}{(t_0-2)} \\ x_2(t)=\dfrac{x_{20}}{t_0-2}(t-2) \end{cases}$$

Тоді оптимальне керування запишеться

$$u^0(x_1,x_2,t)=\frac{x_{20}}{t_0-2}.$$

5.4. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай об'єкт керування описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{5.22}$$

де $x(t) = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор стану системи, $A(t)$ – $n \times n$ матриця, $u(t) = (u_1, \dots, u_r)^T$ – вектор керувань, $B(t)$ – матриця розмірності $n \times r$, $t \in [t_0, t_1]$.

Початковий стан заданий $x(t_0) = x_0$,
час t_1 – фіксований,
стан $x(t_1)$ – вільний.

Задача полягає в тому, щоб для системи (5.22) знайти керування й траєкторію, на яких функціонал

$$Q(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt + \frac{1}{2} x^T(t_1)Fx(t_1) \tag{5.23}$$

досягає свого мінімального значення.

Тут $Q(t), R(t), F$ – симетричні додатно-визначені матриці.

Задача оптимального керування лінійною системою (5.22) з мінімізацією квадратичного функціонала (5.23) у теорії керування називається задачею **аналітичного конструювання оптимального регулятора** для лінійної системи.

Розв'яжемо цю задачу за допомогою рівняння Белмана в диференціальній формі, яке для даної задачі набуває вигляду:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\min_{u(t)}\{\frac{1}{2}x^T Q(t)x+\frac{1}{2}u^T R(t)u+\operatorname{grad}_x^T S(x,t)(A(t)x+B(t)u)\},$$

де $$grad_x^T S(x,t)\equiv\frac{\partial S^T(x,t)}{\partial x}\equiv(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_n}).$$

Знайдемо керування з необхідної умови екстремуму:

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial u}=R(t)u+B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=0,$$

$$R(t)u=-B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}.$$

Звідси $$u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}.$$

Підставимо це керування в рівняння Белмана для $S(x,t)$. Маємо

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}x^T Q(t)x +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T B(t)R^{-1}(t)R(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} +$$

$$+\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T \left(A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)\},$$

Звідки

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}x^T Q(t)x -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T A(t)x,$$

$$S(x,t_1) = \frac{1}{2}x^T(t_1)Fx(t_1).$$

Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x,t)$ – будемо шукати у вигляді квадратичної форми

$$S(x,t) = \frac{1}{2} x^T P(t) x,$$

де $P(t)$ – симетрична матриця, що підлягає визначенню.

Знайдемо похідні за часом і за станами цієї функції.

Маємо $$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = P(t)x, \quad \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T \frac{dP(t)}{dt} x.$$

Підставимо ці вирази в рівняння й отримаємо:

$$-\frac{1}{2} x^T \frac{dP(t)}{dt} x = \frac{1}{2} x^T Q(t) x - \frac{1}{2} x^T P(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) P(t) x + x^T P(t) A(t) x.$$

Це буде виконуватися для довільних значень x тоді й тільки тоді, коли матриця $P(t)$ задовольняє рівняння

$$-\frac{1}{2} \frac{dP(t)}{dt} = \frac{1}{2} Q(t) - \frac{1}{2} P(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) P(t) + P(t) A(t).$$

Скористаємось тим, що для матриць справедливо: $CD = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}C^T D$.

Остаточно отримаємо

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t). \qquad (5.24)$$

$$P(t_1) = F. \qquad (5.25)$$

Диференціальні рівняння (5.24) називаються **матричним рівнянням Ріккаті**.

Таким чином, матрична функція $P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ є розв'язком задачі Коші (5.24), (5.25) із зворотним напрямком зміни аргументу t.

Розв’язавши цю задачу Коші, знайдемо $P(t)$, а значить і функцію $S(x,t)$.

Тоді оптимальне керування запишеться, як $u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x$,
а система керування прийме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\right]x.$$

Разом з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ маємо задачу Коші розв’язавши яку отримаємо оптимальну траєкторію.