1.2. СТРУКТУРНІ СХЕМИ ОПИСУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Систему керування в загальному випадку можна зобразити у вигляді структурної схеми:

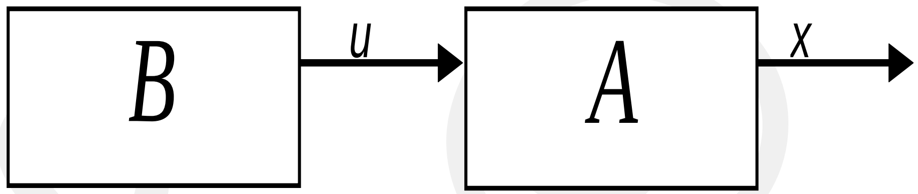


Рис. 1.2.

Тут:

$\boldsymbol{A}$ – об'єкт керування;

$\boldsymbol{B}$ – пристрій керування (або керуючий пристрій),

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \left(\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t}), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\boldsymbol{t})\right)^T$ – вектор фазових координат або фазовий стан системи,

^{T} – знак транспонування;

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}$ – фазовий простір,

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \left(\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{t}), \ldots, \boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{t})\right)^T$ – векторна функція керування.

Вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ називають ***вихідним сигналом***.

Вектор $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ називають ***вхідним сигналом*** (входом до об'єкта $\boldsymbol{A}$).

Будемо вважати, що фазовий стан $x(t)$ об'єкта керування A в довільний момент часу $t > t_0$ визначається повністю й однозначно за його відомим початковим станом $x(t_0)$ та керуванням $u(t)$ при $t > t_0$.

Пару векторних функцій $(u(t), x(t))$ називають ***процесом керування***.

Для різних систем керування внутрішні характеристики об'єкта керування описуються відповідними залежностями різної природи – алгебраїчними, диференціальними, інтегральними та ін.

Правила (закон) перетворення вхідних сигналів у вихідні називають рівнянням об'єкта.

Широко розповсюджені неперервні системи керування, об'єкти яких описуються звичайними диференціальними рівняннями (див. приклади 1.1 – 1.3). Такі системи називають **системами із зосередженими параметрами**. Системи керування, об'єкти яких описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних, називаються **системами з розподіленими параметрами**.

Критеріями оптимальності керування (критеріями якості об'єкта керування) *є* функції або ***функціонали на екстремум***.

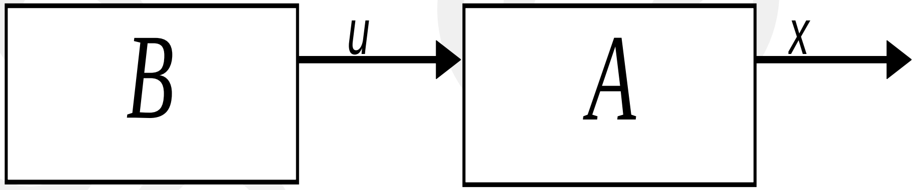
Зміст оптимальності в різних задачах може бути різним:
– приведення системи до заданого стану за найкоротший проміжок часу, тобто найшвидше;
– мінімізація енергетичних витрат на керування;
– мінімізація відхилення фазового стану системи від заданої траєкторії тощо.

Процес керування, що забезпечує екстремум (мінімум або максимум) функціонала якості об'єкта керування, називається оптимальним процесом керування.

Розглянемо тепер, які функції виконує пристрій керування $\boldsymbol{B}$.

Розглянемо два суттєво різних типи систем керування.

1) ***Системи програмного керування*** або незамкнені системи (***системи без оберненого зв'язку***).



У таких системах об'єкти керування $\boldsymbol{A}$ мають точно визначені наперед рівняння, що описують їх функціонування. Ці об'єкти керування позбавлені впливу випадкових збурень. Критерій якості для них є детермінованою величиною. Усі канали зв'язку, як пристрою керування так і об'єкта керування, захищені від будь-яких випадкових зовнішніх впливів та збурень.

Оптимальне керування $\boldsymbol{u^{O}(t)}$ можна обчислити наперед для всіх t ще до початку функціонування системи. Керуючий пристрій $\boldsymbol{B}$ має забезпечити тільки подачу розрахованого наперед керування $\boldsymbol{u^{0}(t)}$ на вхід об'єкта керування $\boldsymbol{A}$.

Утім, системи програмного керування мають обмежене застосування на практиці. Як правило, система керування має додаткові лінії зв'язку, за якими надходить інформація про стан об'єкта $\boldsymbol{A}$ на вхід керуючого пристрою $\boldsymbol{B}$.

2) ***Системи керування з оберненим зв'язком (замкнені системи керування).***

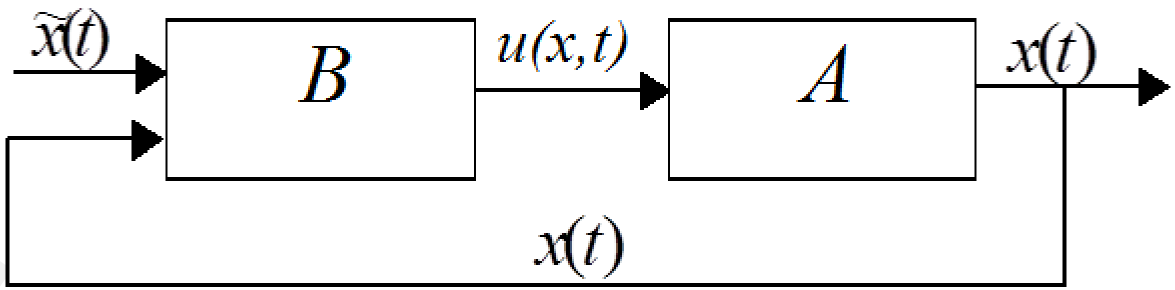


Рис. 1.3.

Тут $\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ – заданий (програмний) вплив, що визначає роботу пристрою $\boldsymbol{B}$. Для програмних систем цей сигнал можна вважати частиною внутрішньої структури пристрою $\boldsymbol{B}$.

Обернений зв'язок необхідний, оскільки динамічні характеристики систем можуть бути відомі лише наближено і, крім того, на систему можуть впливати зовнішні збурення, як правило, випадкового характеру.

Контур оберненого зв'язку дозволяє керуючому пристрою враховувати відхилення й робити відповідну корекцію руху.

Системи з випадковими збуреннями, що діють на об'єкт керування, можна зобразити у вигляді структурної схеми:

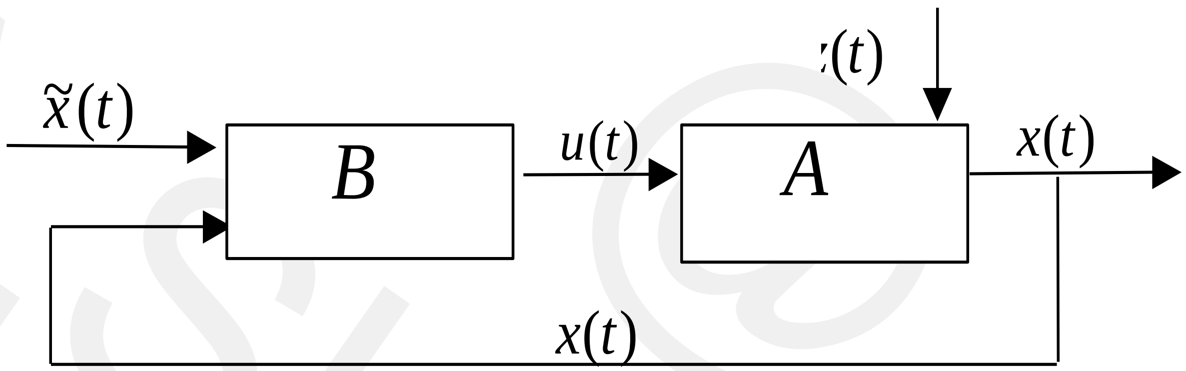


Рис. 1.4.

Тут $\boldsymbol{z(t)}$ – вектор випадкових збурень.

Критерій оптимальності для таких систем: знайти мінімум (максимум) функціонала

$$\boldsymbol{Q = M\{\int_{t_0}^{t_1} G(\tilde{x}(t), x(t), u(t), z(t), t)dt\}}$$

де $\boldsymbol{M}\{\cdot\}$ – математичне сподівання.

Параметри керування реальних систем не можуть приймати довільні значення, тобто завжди $u(t) \in \Omega(U)$.

Множину $\Omega(U)$ називають ***областю допустимих керувань*** (або областю керування),
де U – простір змінних $u_1, \dots, u_r$.
Множина $\Omega(U)$ задається, як правило, системою рівностей або нерівностей.

Аналогічно $x(t) \in \Omega(X)$, де $\Omega(X)$ – ***область можливих станів*** системи,
де X – простір змінних $x_1, \dots, x_n$.

У загальному випадку можуть бути обмеження й на функціонали від вектор-функцій $u(t)$, $x(t)$, $z(t)$:

$$L_\mu[x(t), u(t), z(t)] \in \Omega_\mu(L), \mu = \overline{1, m},$$

де $\Omega_\mu(L)$ – допустима область зміни функціонала.

Зауваження 1.1. ***У теорії керування вважають, що керування є кусково-неперервними або вимірними функціями.***

Термінологія, наведена вище, справедлива не тільки для неперервних систем, а й для дискретно-неперервних та дискретних систем керування.

Класифікація систем керування *можлива також і за іншими ознаками*:

1) ***Системи з повною інформацією про об'єкт керування***.
Такі системи – математична абстракція. Це тому, що в керуючий пристрій $\boldsymbol{B}$ введена повна апріорна інформація: рівняння об'єкта, усі обмеження, інформація про критерій оптимальності, про сигнал $\boldsymbol{x(t)}$, збурення $\boldsymbol{z(t)}$, про стан $\boldsymbol{x(t)}$ у кожний момент часу $\boldsymbol{t}$, що в реальних системах зробити майже неможливо.

Утім, ця абстракція часто з достатньою точністю відповідає реальним системам керування, коли неповнотою інформації можна знехтувати.

2) ***Системи з неповною інформацією про об'єкт керування й пасивним її накопиченням у процесі керування***.

Нехай неповнота інформації – це неповнота заданого сигналу $\boldsymbol{x(t)}$: тобто на вхід надходить сигнал $\boldsymbol{y(t)} : \boldsymbol{y(t)} \neq \tilde{x}(\boldsymbol{t})$. Процес накопичення інформації про $\boldsymbol{x(t)}$ не залежить від алгоритму (стратегії) керуючого пристрою $\boldsymbol{B}$. Накопичення інформації полягає у спостереженні й побудові прогнозу про сигнал $\boldsymbol{x(t)}$. Сам процес спостереження не залежить від того, яке рішення прийме пристрій $\boldsymbol{B}$ про характер $\boldsymbol{x(t)}$. Інформацію, отриману в результаті спостережень, можна тільки використати, але її не можна збільшити.

3) ***Системи з неповною інформацією про об'єкт керування, але з активним накопиченням її в процесі керування*** (системи дуального керування).

Пристрій $\boldsymbol{B}$ подає на $\boldsymbol{A}$ деяку послідовність керувань $\{\boldsymbol{u_i(t)}\}$, (тут $\boldsymbol{i}$ – індекс послідовності) і по оберненому зв'язку отримує реакції $\{\boldsymbol{y_i(t)}\}$, які аналізуються керуючим пристроєм $\boldsymbol{B}$. Пристрій $\boldsymbol{B}$ робить висновки про характеристики об'єкта керування, зокрема, про сигнал $\boldsymbol{x(t)}$. Мета цих дій об'єкта $\boldsymbol{B}$ – сприяти більш точному вивченню характеристик об'єкта керування $\boldsymbol{A}$ для більш ефективного керування цим об'єктом, тобто для генерації необхідних керувань. Системи з неповною інформацією виникають через те, що на систему впливають випадкові, непередбачені збурення.

1.3. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Для математичної постановки задачі оптимального керування розглянемо фазові координати системи як функції часу $x = x(t)$ на деякому проміжку $t_0 \le t \le t_1$.

У початковий момент t_0 потрібно задати початкову умову $x(t_0) = x_0$, а також керування як функції часу $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді фазові координати $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ визначатимуться як розв'язок задачі Коші:

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$
$$x(t_0) = x_0,$$

де

$f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$ – відома вектор-функція,

Функція $f(x(t), u(t), t)$ описує внутрішні характеристики об'єкта керування та враховує зовнішні впливи на об'єкт.

Визначення 1.1.

Неперервна функція $x = x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, що задовольняє рівність

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_0, \quad t_0 \le t \le t$$

називається ***розв'язком*** даної задачі Коші або траєкторією, що відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$ та керуванню $u = u(\cdot)$ і позначається через $x = x(\cdot, u, x_0)$ або $x = x(t, u, x_0)$.

Початкова точка траєкторії $x(t_0, u, x_0)$ називається ***лівим кінцем траєкторії***,

t_0 – ***початковим моментом часу***,

$x(t_1, u, x_0)$ називається ***правим кінцем траєкторії***,

t_1 – ***кінцевим моментом часу***.

Перейдемо до постановки задачі оптимального керування в загальному випадку.

Нехай

$$x(t) = x(t, u(\cdot), x_0) \in G(t), t_0 \le t \le t_1 \qquad (1.19)$$

$$t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1 \qquad (1.20)$$

де $G(t)$ – деяка задана множина з $E^n : G(t) \subset E^n$, а Θ_0, Θ_1 – задані множини на числовій осі $R = \{t : -\infty < t < +\infty\}$.

Не виключено, що $\Theta_0 = R$, $\Omega_1 = R$.

Обмеження вигляду (1.19) часто називають ***фазовими обмеженнями***.

Функції керування $u = u(t)$ мають задовольняти певні вимоги неперервності та гладкості, оскільки при надто розривних функціях $u(t)$ поставлена задача та керування $u(t)$ можуть не мати сенсу. У більшості прикладних задач керування $u(t)$ вибираються у вигляді кусково-неперервних функцій (див. зауваження 1.1.).

Є класи задач керування, в яких від функцій $u(t)$, крім неперервності, вимагається існування їх кусково-неперервних похідних. Такі керування називають ***кусково-гладкими***.

Керування $u(t)$, узагалі кажучи, задовольняють певні обмеження, які запишемо у вигляді

$$u(t) \in V(t), \;\; t_0 \le t \le t_1,$$

де $V(t)$ – задана множина: $V(t) \subseteq E^r$ при кожному $t \in [t_0, t_1]$.

Обмеження (1.20) потрібні, бо початковий та кінцевий моменти часу можуть залежати від керування (напр., у задачах швидкодії) і не завжди можуть бути задані наперед. Тоді вказують обмеження типу (1.20).

Розглянемо умови на кінцях траєкторії $x(t)$.

З обмеження (1.19) випливає при $t = t_0$ і $t = t_1$: $x(t_0) \in G(t_0)$, $x(t_1) \in G(t_1)$ відповідно.

Утім, бувають ситуації, наприклад, при $G(t) = E^n$, $t_0 \le t \le t_1$, коли обмеження на кінцях зручніше виділяти й розглядати окремо.

Будемо вважати, що в E^n при кожному $t_0 \in \Theta_0$ задана множина $S_0(t_0)$ і при кожному $t_1 \in \Theta_1$ задана множина $S_1(t_1)$.

Умови на кінцях траєкторії будемо тоді записувати у вигляді:

$$\begin{aligned} & x(t_0) \in S_0(t_0), t_0 \in \Theta_0 \\ & x(T) \in S_1(T), T \in \Theta_1 \end{aligned} \tag{1.21}$$

У задачах оптимального керування прийнята така **класифікація умов** (1.20), (1.21):

якщо множина $\boldsymbol{\Theta_0}$ складається з єдиної точки, то ***початковий момент часу називають фіксованим***;
якщо $\boldsymbol{\Theta_1}$ складається з єдиної точки, то ***кінцевий момент часу називають фіксованим.***

Якщо множина $\boldsymbol{S_0(t_0)}$ (або $\boldsymbol{S_1(t_1)}$) складається з однієї точки й не залежить від $\boldsymbol{t_0}$: (або відповідно $\boldsymbol{S_1(T)=\{x_1\}, T\in\Theta_1}$), то кажуть, що:
лівий (або правий) кінець траєкторії закріплений.

Якщо $\boldsymbol{S_0(t_0)\equiv E^n, t_0\in\Theta_0}$, або $\boldsymbol{S_1(t_1)\equiv E^n, t_1\in\Theta_1}$,
то ***лівий (або правий) кінець траєкторії називають вільним.***

В інших випадках
лівий (або правий) кінець траєкторії називають рухомим (може рухатись по заданій кривій).

Нехай рух фазової точки $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$x' = f(x, u, t) \tag{1.25}$$

де функція $f(x, u, t)$ визначена при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$, $t_0 \le t \le t_1$.

Визначення 1.2. *Набір* $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ *називається* ***допустимим набором****, якщо*

- *керування* $u = u(\cdot) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ *визначене й кусково-неперервне на* $t_0 \le t \le t_1$ *і задовольняє обмеження* $u(t) \in V(t), t_0 \le t \le t_1$; $t_0 \in \Theta_0$, $t_1 \in \Theta_1$, $t_0 \le t_1$;
- $x = x(\cdot) = x(\cdot, u(t), x_0)$ – *траєкторія задачі Коші:*

$$x' = f(x, u, t),\ t_0 \le t \le t_1,\ x(t_0) = x_0, \tag{1.26}$$

яка визначена на відрізку $[t_0, t_1]$ *і задовольняє фазове обмеження (1.19),*

а $x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0)$, $x(t_1) \in S_1(t_1)$.

Будемо вважати, що множина допустимих наборів $(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ непорожня.

Нехай на множині допустимих наборів задана функція (або цільова функція, функціонал)

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1), \tag{1.27}$$

де

$f^0(x(t), u(t), t)$, $g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1)$ – задані функції при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$,

$\sup \Theta_0 < \inf \Theta_1$, $\quad S_0(t_0) \subseteq G(t_0)$, $\quad t_0 \in \Theta_0$, $\quad S_1(t_1) \subseteq G(t_1)$, $\quad t_1 \in \Theta_1$.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб мінімізувати або максимізувати функціонал (1.27) на множині допустимих наборів вигляду $(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$.

Зауваження 1.2. Обмежимося розглядом задач на мінімум, оскільки задача на максимум функціонала J завжди може бути зведена до еквівалентної задачі на мінімум функціонала ($-J$).

Позначимо $J_* = \inf(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$, де нижня грань береться за всіма допустимими наборами.

Визначення 1.3. *Допустимий набір* $(t_{0*}, t_{1*}, x_{0*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ *називається* ***розв'язком задачі оптимального керування***,

$u_*(\cdot)$ – *оптимальним керуванням,*

$x_*(\cdot)$ – *оптимальною траєкторією системи,*

якщо

$$J(t_{0*}, t_{1*}, x_{0*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot)) = J_*.$$

Тоді задачу оптимального керування можна записати у вигляді:

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1) \to \inf \qquad (1.28)$$

$$x' = f(x(t), u(t), t), \; t_0 \le t \le t_1 \qquad (1.29)$$

$$x \in G(t), t_0 \le t \le t_1 \qquad (1.30)$$

$$x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0), \; x(t_1) \in S_1(t_1), \quad t_0 \in \Theta_0, \; t_1 \in \Theta_1 \qquad (1.31)$$

$$u \in V(t), \; t_0 \le t \le t_1. \qquad (1.32)$$

Вважаємо тут керування $u = u(\cdot)$ кусково-неперервним на $[t_0, t_1]$ (якщо не сказане інше).

На практиці зустрічаються задачі оптимального керування більш загального вигляду, ніж задача (1.28) – (1.32).

У теорії керування розглядаються також задачі, що враховують

- запізнення інформації,

- задачі з параметрами,

- з дискретним часом,

- з більш загальним виглядом цільової функції,

- задачі для інтегро-диференціальних рівнянь,

- для рівнянь із частинними похідними,

- для стохастичних рівнянь,

тощо.