Рівняння з відокремлюваними змінними

Практичне заняття з курсу "Диференціальні рівняння"

Пічкур В. В., Матвієнко В. Т., Харченко І. І., Васін П. О.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
кафедра моделювання складних систем

2020

Диференціальне рівняння

$x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$

f

$= 0$ (1)

Означення

називається диференціальним рівнянням.

Означення

n називається порядком диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння

Означення

Функція $y(x)$ *називається розв'язком диференціального рівняння* (1), *якщо вона* n*-разів неперервно диференційована на деякому інтервалі* $(a, b) = I$ *і задовольняє диференціальному рівнянню* (1) $\forall\, x \in I$.

Приклад

$$y^{00} + 3xy^{0} + 2y = x^2$$

диференціальне рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння

Означення

При $n = 1$ диференціальне рівняння (1) називається диференціальним рівнянням першого порядку

$$F(x, y, y^0) = 0. \quad (2)$$

Означення

Диференціальне рівняння (2) називається розвязаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (3)$$

Диференціальне рівняння. Розв’язок

Означення

Розвязком диференціального рівняння (3) *на інтервалі I назвемо фун кцію*

$$y = \phi(x),$$

визначену і неперервно диференційовану на I, яка не виходить з області визначення функції f (*x*, *y*) *і яка перетворює диференціальне рівняння* (3) *в тотожність* $\forall\, x \in I$, *тобто*

$$d\phi(x)$$

$$dx \equiv f(x, y(x)),\ x \in I.$$

Приклад

$$y^0 = y$$

$$y = e^x$$

$$y = 2e^x$$

Диференціальне рівняння. Розв’язок

частинний розв’язок

загальний розв’язок

особливий розв'язок

загальний інтеграл

інтеграл

Диференціальне рівняння в диференціальній формі

Означення

Поряд з dy

$$dx = f(x, y)$$

будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціальній формі

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

або в більш загальному вигляді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (4)$$

$M(x, y)$, $N(x, y)$ – *неперервні в деякій області.*

Задача Коші

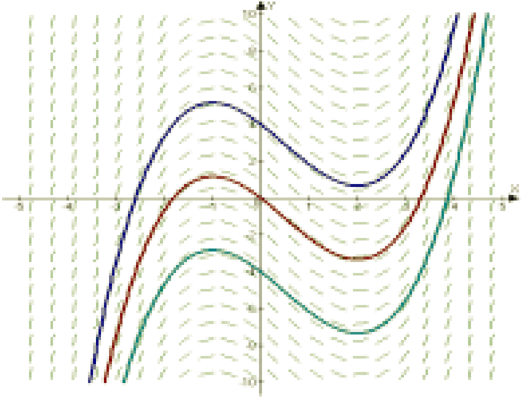
Означення

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Знайти такий розв'язок $y = y(x)$*, який проходить через задану точку* (x_0, y_0)

$$y(x_0) = y_0. \quad (5)$$

Задача Коші



Огюстен Луї Коші

Рівняння з відокремленими змінними

Означення

Розглянемо рівняння

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \quad (6)$$

де $X(x)$, $Y(y)$ – неперервні функції своїх аргументів. Диференціальне рівняння (6) називається рівнянням з відокремлени ми змінними.

Рівняння з відокремленими змінними

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

m

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = 0$$

d

m

Загальний розв’язок в квадратурах

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C, \quad (7)$$

C – довільна константа.

Рівняння з відокремленими змінними

$$\int_{x_0}^{x} X(s)ds + \int_{y_0}^{y} Y(s)ds = C. \quad (8)$$

Якщо потрібно знайти розв'язок задачі Коші $y(x_0) = y_0$, то $C = 0$

$$\int_{x_0}^{x} X(s)ds + \int_{y_0}^{y} Y(s)ds = 0 \quad (9)$$

Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення

Рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \quad (10)$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними. Тут $m(x)$, $n(y)$, $f(x)$, $g(y)$ – неперервні функції.

Відокремлюємо змінні

Припустимо

$$f(x)n(y) \neq 0$$

$$\frac{m(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{n(y)}dy = 0. \quad (11)$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (10)

$$\int \frac{m(x)}{f(x)}dx + \int \frac{g(y)}{n(y)}dy = C, \quad (12)$$

C – довільна константа.

При діленні на $f(x)n(y)$ ми можемо втратити розв’язки, які визначаю ться рівняннями $n(y) = 0$, $f(x) = 0$.

Задача 1

Розв'язати рівняння

$$y^0 \sin x = y \ln y$$

Розв’язок

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y$$

Розділивши змінні, отримаємо рівняння

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$$

Проінтегрувавши, знайдемо

Розв’язок

$y \ln y =$
Z_{dx}

$\sin x + \ln C,$

Z_{dy}

C – довільна константа. Перший інтеграл дає

Z_{dy}

$\ln y = \ln |\ln y|$

$y \ln y =$
$Z_{d \ln y}$

Розв’язок

Другий інтеграл

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}.$$

Оскільки

$(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \frac{1}{2}\,1$

1

$(1 - \cos x) + 1\,(1 + \cos x)$

,

то $\int_1$

$\sin x dx = -\frac{1}{2}\int 1$ $d \cos x =$

$1 - \cos x + 1$

$1 + \cos x$

$= \frac{1}{2}\ln|1 - \cos x| - \frac{1}{2}\ln|1 + \cos x| = \ln\ tg\frac{x}{2}$

Розв’язок

$$\ln|\ln y| = \ln tg \frac{x}{2} + \ln C$$

C – довільна константа.

$$\Downarrow$$

$$\ln y = C\, tg \frac{x}{2}$$

$$\Downarrow$$

$y = e^{C\, tg\, \frac{x}{2}}$

загальний розв’язок рівняння. Тут C –

довільна константа.

Розв’язок

При $y = 1$ функція $y \ln y = 0$. Підставляємо
$y = 1$ в

$y^0 \sin x = y \ln y$

Одержуємо тотожність.

$y(x) = 1$ – розв’язок, який ми втратили при розділенні змінних

Аналогічно $x = 0$.

Відповідь

$y = e^{C\, tg \frac{x}{2}}$

загальний розв’язок рівняння, C –

довільна константа, $y = 1$, $x = 0$

Задача 2

Розв’язати рівняння

$$x^2y^2y^0 + y = 1.$$

Розв'язок

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} + y = 1.$$

$$\Downarrow$$

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$x^2y^2dy + (y - 1)dx = 0.$$

Розв’язок

$$x^2y^2dy + (y - 1)dx = 0.$$

Розділимо на $x^2(y - 1)$

$$\Downarrow$$

y^2

$y - 1dy + ^{dx}$

$x^2 = 0.$

Z_{y^2}

$y - 1^{dy} +$

Тут C – довільна константа.

Z_{dx}

$x^2 = C.$

Розв’язок

$\int y^2$

$y - 1 dy =$
$\int y^2 - 1$

$y - 1 dy +$

$\int$

$\int 1$

$y - 1 dy =$

$(y+1)dy + y^2$

$\int$

$\int y - 1dy = \frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1|$ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$.

$2 + y + \ln|y-1| - \frac{1}{x} = C$

загальний інтеграл рівняння. Тут C –

довільна константа.

Розв'язок

При $y = 1$ функція $y - 1 = 0$. Підставляємо $y = 1$ в

$$x^2 y^2 dy + (y - 1)dx = 0.$$

Одержуємо тотожність.

$y(x) = 1$ – розв'язок, який ми втратили при розділенні змінних

Відповідь

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| - \frac{1}{x} = C$$

загальний інтеграл рівняння, C – довільна

константа, $y = 1$

Спеціальний випадок

$$\frac{dy}{dx} = f\,(ax + by + c),$$

де a, $b \neq 0$, c — сталі, $f\,(x)$ – неперервна функція.

Зробимо заміну

$$z = ax + by + c$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}$$

Спеціальний випадок

Підставляємо в

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dz}{a + bf(z)} - dx = 0$$

Задача 3

Розв’язати рівняння

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Розв’язок

Введемо заміну змінних

$$z = 4x + 2y - 1.$$

$$z^0 = 4 + 2y^0$$

$$z^0 - 4 = 2\sqrt{z}$$

$$z^0 = 4 + 2\sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{2 + \sqrt{z}} = 2dx.$$

Z

$2dx + C,$

C – довільна константа

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}} =$$

Розв’язок

Знайдемо

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}}$$

Заміна

$$\sqrt{z} = t,\ dz = 2tdt,\ 2 + \sqrt{z} = 2 + t,$$

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}} = \int \frac{2tdt}{2+t} = 2\int \frac{t+2-2}{2+t}$$

$t + 2^{dt} =$ $= 2t - 4 \ln |2 + t| =$ $2\sqrt{z} - 4 \ln 2 + \sqrt{z} \cdot$

Розв’язок

C – довільна константа

Z_{dz}

$2 + \sqrt{z} =$

Z

$2dx + C,$

$$z = 4x + 2y - 1$$

$$\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}\right) - x = C,$$

Відповідь

$$2\sqrt{z} - 4\ln\left(2 + \sqrt{z}\right) = 2x + 2C.$$

C – довільна константа

Задача 4

Розв’язати рівняння

$$x(1 + y^2) + y(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Розв’язок

Представимо дане рівняння у вигляді

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0.$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на $(1+x^2)(1+y^2)$, отримаємо рівняння з розділеними змінними

$$\frac{x}{1 + x^2}dx + \frac{y}{1 + y^2}dy = 0.$$

Розв’язок

Інтегруючи це рівняння, послідовно знаходимо

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = \frac{1}{2}\ln C \quad \frac{1}{2}\ln C = C_1 .$$

Звідси $(1+x^2)(1+y^2) = C$.

Відповідь

Загальний інтеграл рівняння

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = C,$$

C – довільна константа

Задача 5

Знайти частинний розв’зок рівняння

$$(1 + \exp x)yy^0 = e^x,$$

який задовольнить початкову умову

$$y(0) = 1.$$

Розв’язок

$$(1 + e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Розділюючи змінні, отримуємо

$$ydy = \frac{e^x dx}{1 + e^x}.$$

Розв’язок

Інтегруючи, знайдемо загальний інтеграл

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C. \quad (13)$$

Підставлюючи в (13) $x = 0$ та $y = 1$, матимемо

$$\frac{1}{2} = \ln 2 + C, \text{ звідки } C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Розв’язок

Підставляючи в (13) знайдене значення *C*, отримуємо

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Відповідь

$$\frac{y^2}{2} = \ln\frac{1 + e^x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Методи інтегрування I

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0;$$

Методи інтегрування II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C, \ a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln \frac{|x-1|}{|x+1|} + C;$$

$$\int dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|}+C,\ a \neq 0.$$

Метод підстановки

Метод підстановки полягає у тому, що ми в інтегралі $\int f(x)dx$ робимо підстановку $x = g(t)$. Тоді $dx = g'(t)dt$ і

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Методи інтегрування III

Формула інтегрування за частинами

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$