Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 7.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2020

Зміст I

Зміст

Означення

Д.в.в. ξ називається сумовною, якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty.$$

Означення

Нехай ξ — сумовна д.в.в. з множиною значень $X = \{x_1, x_2 \dots\}$ та розподілом $p_k = P(A_k) = P\{\xi = x_k\}$, $k \geq 1$. Математичним сподіванням д.в.в. ξ називається число

$$M\xi = E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k.$$

Властивості матем. сподівання для д.в.в.

ξ, η — сумовні д.в.в.

- **йм. індикатора:** $M\mathbf{I}_A(\omega) = P(A)$
- **нормованість:** $Mc = c$ для довільної сталої $c \in \mathbf{R}$;
- **невід'ємність:** якщо $\xi \geq 0$, то $M\xi \geq 0$;
- **однорідність:** $M(c\xi) = cM\xi$ для довільної сталої $c \in \mathbf{R}$;
- **адитивність:** $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$;
- **монотонність:** якщо $\xi \leq \eta$, то $M\xi \leq M\eta$;
- **додатність:** якщо в.в. $\xi \geq 0$ та $M\xi = 0$, то $\xi = 0$;
- **інваріантність:** якщо $\xi = \eta$, то $M\xi = M\eta$;
- **опуклість:** $|M\xi| \leq M|\xi|$.

Розподіл Бернуллі

Означення

В.В. ξ має розподіл Бернуллі з параметром p, $p \in (0,1)$, $\xi \sim Be(p)$.

ξ	0	1
P	q	p

$$p + q = 1, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

$$M\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Біноміальний розподіл

ξ має біноміальний розподіл з параметрами n та p, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, $\xi \sim Bi(n,p)$.

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad 0 < p < 1.$$

Знайдемо матем. сподівання для ξ двома способами.
І спосіб. За означенням

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

Зробимо заміну індексу сумування $l = k - 1$ та використаємо формулу Біном-Ньютона

$$(a+b)^m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l a^l b^{m-l}$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l p^l (1-p)^{n-1-l} = np\,(p+1-p)^{n-1} = np.$$

II спосіб.

$\xi \sim Bi(n, p)$ характеризує к-сть успіхів в n випробуваннях Бернуллі. Нехай

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо в i-тому випробуванні успіх з йм.} \quad p; \\ 0, & \text{якщо в i-тому випробуванні неуспіх з йм.} \quad 1-p \end{cases}$$

В.в.

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Кожна в.в. X_i, $i = 1, \ldots, n$, має розподіл Бернуллі з параметром p. Показали, що $MX_i = p$. Тому

$$M\xi = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} MX_i = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Розподіл Пуассона

В.в. ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, $\xi \sim \Pi(\lambda)$, якщо

$$\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Обчислимо м.сп. двома способами.

І спосіб. За озн. м.сп.

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

Розподіл Пуассона

зробимо заміну $k-1=l$ та використаємо $e^x=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^l}{l!}$

$$= e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{l+1}}{l!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!} =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Розподіл Пуассона

II Спосіб.

Оскільки за теоремою Пуассона пуассонівська в.в. є граничною для біноміальної при $n \cdot p_n \to \lambda$, $n \to \infty$, тобто

$$p_n(k) = P\{\mu_n = k\} \to_{n\to\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

то математичне сподівання пуассонівського розподілу можна знайти, як границю м.сп. біноміального розподілу при $n \cdot p_n \to \lambda$. Тому

$$M\xi = \lim_{n\to\infty,\, np_n\to\lambda} np_n = \lambda.$$

Вправа. Знайти матем. сподівання для геометричного, від'ємного біноміального розподілів.

Зміст

Означення

Математичне сподівання $M\xi^n$ називається моментом n-го порядку в.в. ξ.

Означення

Абсолютним моментом n-го порядку в.в. ξ називається $M|xi|^n$.

Означення

Центральним моментом n-го порядку та абсолютним центральним моментом n-го порядку в.в. ξ називаються $M\left(\xi - M\xi\right)^n$ і $M\left|\xi - M\xi\right|^n$, відповідно.

Означення

Центральний момент 2-го порядку $M(\xi - M\xi)^2$ називається дисперсією в.в. ξ.

Позначення. $\mathbf{D}\xi = Var\xi$.

Зауваження

Дисперсія є мірою розсієння випадкової величини відносно свого середнього значення.

Означення

Величину $\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}\xi}$ називають *середньоквадратичним* або *стандартним відхиленням (відхилом)* в.в. ξ.

Властивості дисперсії

Теорема

Справедливі такі влстивості для дисперсії д.в.в.:

- $\mathbf{D}\xi \geq 0$;
- $\mathbf{D}\xi = 0$ *тоді і лише тоді, коли* $\mathbf{P}(\xi = M\xi) = 1$
- *Формула для обчислення дисперсії*

$$\mathbf{D}\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

- $$\mathbf{D}(aX + b) = a^2\mathbf{D}X, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Доведення

- За означенням $\mathbf{D}\xi = M(\xi - M\xi)^2$. Оскільки $(\xi - M\xi)^2 \geq 0$, то з властивості невід'ємності матем. сподівання маємо $\mathbf{D}\xi = M(\xi - M\xi)^2 \geq 0$.
- $\Leftarrow$ Нехай $\xi = c = const$, тоді за власт. нормованості $Mc = c$. Тому $\mathbf{D}\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(c - c)^2 = 0$.
  $\Rightarrow$ Нехай $D\xi = 0$. Доведемо, що $\mathbf{P}(\xi = M\xi) = 1$. Оскільки $(\xi - M\xi)^2 \geq 0$ і $M(\xi - M\xi)^2 = 0$, то з власт.додатності випливає

$$(\xi - M\xi)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}(\xi = M\xi) = 1.$$

Доведення

- Формула для обчислення дисперсії: за означенням

$$\mathbf{D}\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2\right) =$$

За власт. однорідності, адитивності та нормованості матем. сподівання маємо

$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + M(M\xi)^2 = M\xi^2 - 2\left(M\xi\right)^2 + \left(M\xi\right)^2 =$$

$$= M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2.$$

Доведення

- Формула для обчислення дисперсії: за означенням

$$\mathbf{D}\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2\right) =$$

За власт. однорідності, адитивності та нормованості матем. сподівання маємо

$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + M(M\xi)^2 = M\xi^2 - 2\,(M\xi)^2 + (M\xi)^2 =$$

$$= M\xi^2 - (M\xi)^2\,.$$

Доведення

- Покажемо

$$\mathbf{D}(a\xi + b) = a^2\mathbf{D}\xi, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Оскільки $M(a\xi + b) = aM\xi + b$, то

$$\mathbf{D}(a\xi + b) = M\left(a\xi + b - M(a\xi + b)\right)^2 =$$

$$M\left(a\xi + b - aM\xi - b\right)^2 = M\left(a^2(\xi - M\xi)^2\right) =$$

$$= a^2 M(\xi - M\xi)^2 = a^2\mathbf{D}\xi, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Доведення

- Покажемо
$$\mathbf{D}(a\xi + b) = a^2\mathbf{D}\xi, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$
Оскільки $M(a\xi + b) = aM\xi + b$, то
$$\mathbf{D}(a\xi + b) = M\left(a\xi + b - M(a\xi + b)\right)^2 =$$
$$M\left(a\xi + b - aM\xi - b\right)^2 = M\left(a^2(\xi - M\xi)^2\right) =$$
$$= a^2M(\xi - M\xi)^2 = a^2\mathbf{D}\xi, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Зауваження

Якщо в.в. ξ має матем. сподівання $M\xi$, то матем. сподівання в.в. $\xi - M\xi$ дорівнює 0.

$$M(\xi - M\xi) = M\xi - M\xi = 0.$$

Зауваження

Якою б не була в.в. ξ, *стандартизована в.в.*

$$\xi^* = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} = \frac{\xi - M\xi}{\sigma}$$

завжди має нульове математичне сподівання та одиничну дисперсію.

Зауваження

Якщо в.в. ξ має матем. сподівання $M\xi$, то матем. сподівання в.в. $\xi - M\xi$ дорівнює 0.

$$M(\xi - M\xi) = M\xi - M\xi = 0.$$

Зауваження

Якою б не була в.в. ξ, *стандартизована в.в.*

$$\xi^* = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} = \frac{\xi - M\xi}{\sigma}$$

завжди має нульове математичне сподівання та одиничну дисперсію.

Розподіл Бернуллі

Означення

$\xi \sim Be(p),\ p \in (0,1).$

ξ	0	1
P	q	p

$$M\xi = p.$$

Знайдемо другий момент, використовуючи теорему про обчислення матем. сподівання:

$$M\xi^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p.$$

За формулою обчислення дисперсії

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = p - p^2 = pq.$$

Біноміальний розподіл

$\xi \sim Bi(n,p)$.

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1.$$

$$M\xi = np$$

Знайдемо дисперсію для ξ двома способами.
І спосіб. Другий момент:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2 \pm k) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)} + M\xi =$$

Зробимо заміну індексу сумування $l = k - 2$ та використаємо формулу Біном-Ньютона

$$(a+b)^m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l a^l b^{m-l}$$

$$= n(n-1)p^2 (p+1-p)^{n-2} + M\xi = n(n-1)p^2 + np.$$

Отже,

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - (np)^2 =$$

$$= np - np^2 = np(1-p) = npq.$$

II спосіб.

$\xi \sim Bi(n, p)$. В.в.

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Кожна в.в. X_i, $i = 1, \ldots, n$, має розподіл Бернуллі з параметром p. Показали, що $DX_i = pq$. Для незалежних в.в. дисперсія суми дорівнює сумі дисперсії (доведемо пізніше). Тому

$$D\xi = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

Розподіл Пуассона

$\xi \sim \Pi(\lambda)$,

$$\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$M\xi = \lambda.$$

Довести, що

$$D\xi = \lambda$$

(Вправа, двома способами: за означенням та з використанням Т. Пуассона).

Вправа. Знайти дисперсію для геометричного, від'ємного біноміального розподілів.

Зміст

Нерівність Коші

Теорема (Нерівність Коші)

Нехай ξ, η*—в.в., для яких* $M|\xi|^2 < \infty$, $M|\eta|^2 < \infty$, *тоді*

$$M(\xi\eta)^2 \leq M\xi^2 M\eta^2.$$

Доведення.

$\forall t \in \mathrm{R}$ розглянемо в.в. $(t\xi + \eta)^2 \geq 0$. За власт. невід'ємності матем. сподівання

$$M(t\xi + \eta)^2 \geq 0.$$

$$M(t\xi + \eta)^2 = M(t^2\xi^2 + 2t\xi\eta + \eta^2) = t^2 M\xi^2 + 2tM\xi\eta + M\eta^2 \geq 0.$$

Для квадратичного тричлена відносно t це означає, що його дискримінант повинен бути $D_t \leq 0$.

$$D_t = 4(M\xi\eta)^2 - 4M\xi^2 M\eta^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad M(\xi\eta)^2 \leq M\xi^2 M\eta^2.$$

□

Теорема

Нехай ξ *в.в.*, $M|\xi|^2 < \infty$, *тоді* $\forall c \in \mathbf{R}$

$$\min_{c\in\mathbf{R}} M(\xi - c)^2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

Доведення.

$$M(\xi - c)^2 = M(\xi \mp M\xi - c)^2 = M\left((\xi - M\xi) + (M\xi - c)\right)^2 =$$

$$= M\left((\xi - M\xi)^2 + (M\xi - c)^2 + 2(\xi - M\xi)(M\xi - c)\right) =$$

$(M\xi - c)$— невипадкове значення

$$= M(\xi - M\xi)^2 + (M\xi - c)^2 + 2(M\xi - c)M(\xi - M\xi) =$$

$$= M(\xi - M\xi)^2 + (M\xi - c)^2 \geq M(\xi - M\xi)^2 = D\xi, \quad c \in \mathbf{R}.$$

$\square$

Зміст

Лема

Нехай в.в. $X \geq 0$ *і* $M|X| < \infty$. *Тоді для довільної сталої* $c > 0$

$$\mathbf{P}(X \geq c) \leq \frac{\mathbf{E}X}{c}.$$

Доведення.

$\forall c > 0$ розглянемо допоміжну в.в.

$$\eta_c = \begin{cases} 0, & \text{якщо } X < c; \\ c, & \text{якщо} X \geq c. \end{cases}$$

$$M\eta_c = 0 \cdot P\{X < c\} + c \cdot P\{X \geq c\}$$

Оскільки $\eta_c \leq X$, то за монотонністю математичного сподівання

$$MX \geq M\eta_c = c\mathbf{P}(X \geq c).$$

Теорема (Нерівність Чебишева для дисперсій)

Якщо існує $D\xi$, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \qquad (1)$$

Доведення.

Із загальної нерівності Чебишова для невід'ємної в.в. $X = (\xi - M\xi)^2$ отримуємо

$$\mathbf{P}(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}((\xi - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

$\square$

Зауваження

Нерівність Чебишева дає загрублену оцінку відхилення в.в. від свого математичного сподівання, оскільки виконується для довільного розподілу та не врвховує специфіку нормального розподілу

Якщо у нерівність Чебишева підставити замість ε $3\sigma = 3\sqrt{D\xi}$, то отримаємо такий наслідок

Наслідок (Правило 3σ)

Якщо існує $D\xi$, то

$$\mathbf{P}(|\xi - M\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$$

Зауваження

Якщо в.в. ξ має нормальний розподіл, то ліва частина нерівності приблизно дорівнює 0.003. Останньою ймовірністю можна знехтувати. Тому, наприклад, у техніці вважають, що випадкові похибки при обробці деталей не перевищують 3σ.

6σ

6σ— методологія, що використоовується у корпоративному менеджменті для вдосконалення виробництва та усунення дефектів.
Спочатку метод розроблявся компанією "Motorola" та її інженером Білом Смітом (з 1986 р.), але зараз ним користується багато компаній. Значний вплив на його розвиток справили попередні концепції вдосконалення якості продукції, наприклад, методології контолю якості, тотального управління якістю (TQM) та нульових дефектів.

Ціллю даного методу є докладання зусиль по зниженню відхилень від якості продукції однакового типу при виробництві, що вважається ключовим фактором успішності бізнесу.

Якщо вик. нерівність Чебишева при $\varepsilon = 6\sigma$, то

$$\mathbf{P}(|\xi - M\xi| \geq 6\sigma) \leq \frac{1}{36}.$$

Зміст

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, F, P), на якому визначені n в.в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Означення

Вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ називають *випадковим вектором* або *n-вимірною в.в.*

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – д. в.в.

Означення

Функцію

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n)$$

для всіх можливих значень $(x_1, \ldots, x_n)$ називають *сумісним* або *n-вимірним розподілом дискретного випадкового вектора* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Вона має такі властивості:

- $p(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ для всіх значень $x_1, \dots, x_n$;
- $\sum\limits_{x_1} \cdots \sum\limits_{x_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1.$

Означення

Маргінальний (тобто одновимірний) розподіл в.в. X_k за відомим сумісним розподілом визначають так:

$$p_k = \mathbf{P}(X_k = x_k) =$$

$$= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Зауваження

Одновимірні закони розподілу однозначно визначаються за багатовимірними. Зворотне твердження у загальному випадку невірне. Воно буде справедливим в одному частковому випадку, а саме, коли випадкові величини незалежні.

Кожна в.в. породжує випадкові події, які є прообразами борелівських множин. Незалежність в.в. означає, що всі такі породжені події незалежні.

Означення

в.в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *незалежні в сукупності*, якщо всі породжені ними випадкові події незалежні в сукупності, тобто для довільних $B_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k \in B_k).$$

Зокрема, в.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли відповідна сумісна функція розподілу для всіх $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ розкладається у добуток

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k \leq x_k) = \prod_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x_k).$$

Означення

Дискретні в.в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ будуть незалежними в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$\mathsf{P}(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(\xi_k = x_k)$$

для всіх можливих значень $(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема про спадковість незалежності

У подальшому часто будемо використовувати такий результат.

Теорема (Теорема про спадковість незалежності)

Нехай ξ, η—незалежні д.в.в. f, g—довільні дійсні функції, що визначені на множині значень ξ, η відповідно. Тоді в.в. $f(\xi)$ і $g(\eta)$ також є незалежними.

Доведення.

Слід показати, що для довільних u, $v \in \mathbf{R}$

$$P\{f(\xi) = u, g(\eta) = v\} = P\{f(\xi) = u\}P\{g(\eta) = v\}.$$

Позначимо

$$B_1 = f^{-1}(u) = \{x : f(x) = u\}, \quad B_2 = g^{-1}(v) = \{x : g(x) = v\}.$$

Тоді

$$P\{f(\xi) = u, g(\eta) = v\} = P\{\xi \in B_1, \eta \in B_2\} =$$

$$= P\{\xi \in B_1\}P\{\eta \in B_2\} = P\{f(\xi) = u\}P\{g(\eta) = v\}.$$

$\square$

Приклад

Кубик підкидається один раз. Нехай ξ — індикатор випадання парного значення (2,4,6), η —індикатор випадання екстремального значення (1, 6). Чи залежні ξ, η?

Знайдемо сумісний розподіл двох в.в.

$\eta \setminus \xi$	$1(2,4,6)$	$0(1,3,5)$	P_η
$1(1,6)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
$0(2,3,4,5)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
P_ξ	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

Оскільки

$$P\{\xi = x, \eta = y\} = P\{\xi = x\}P\{\eta = y\}, \quad \forall x, y \in \{0;1\}$$

то в.в.ξ і η є незалежними.

Знайдемо сумісний розподіл двох в.в.

$\eta \setminus \xi$	$1(2,4,6)$	$0(1,3,5)$	P_η
$1(1,6)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
$0(2,3,4,5)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
P_ξ	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

Оскільки

$$P\{\xi = x, \eta = y\} = P\{\xi = x\}P\{\eta = y\}, \quad \forall x, y \in \{0;1\}$$

то в.в.ξ і η є незалежними.

ПИТАННЯ?