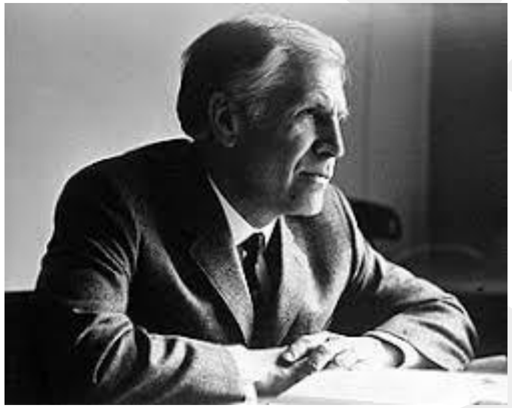
6.1. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ ТА ФІКСОВАНИМИ ПОЧАТКОВИМ І КІНЦЕВИМ МОМЕНТАМИ ЧАСУ



Розглянемо задачу оптимального керування із закріпленими кінцями траєкторій та фіксованим часом. Треба мінімізувати функціонал

$$J(u(t))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)dt \to \inf \tag{6.1}$$

для системи

$$x'(t)= f(x(t),u(t),t), \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{6.2}$$

за умов

$$x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, \tag{6.3}$$

$$u(t) \in V, t_0 \le t \le t_1, \tag{6.4}$$

де $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))^T$ – фазові координати,

$u(t)=(u_1(t),\dots,u_r(t))^T$ – керування, що вважаються кусково-неперервними функціями на $[t_0,t_1]$, моменти часу t_0, t_1 і точки x_0, x_1 – задані,

множина $V \subseteq E^r$ (E^r - Евклідів r-вимірний простір) не залежить від часу,

фазові обмеження для $t \in [t_0,t_1]$ відсутні,

$f(x(t),u(t),t)=(f^1(x(t),u(t),t),\dots, f^n(x(t),u(t),t))^T$.

Для формальної постановки задачі введемо деякі позначення та будемо вважати виконаними певні припущення.

Припустимо, що функції $f^{j}(x(t),u(t),t)$, $j=\overline{0,n}$ мають частинні похідні (*для спрощення записів аргументи функцій будемо опускати в тих випадках, які не викликають непорозумінь*):

$$\frac{\partial f^{j}(x(t),u(t),t)}{\partial x_i}=\frac{\partial f^{j}}{\partial x_i}=f^{j}_{x_i},\ i=\overline{1,n}.$$

Аналогічно позначимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\begin{pmatrix} f^{1}_{x_1} & \cdots & f^{1}_{x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f^{n}_{x_1} & \cdots & f^{n}_{x_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f^{1}_{x} \\ \vdots \\ f^{n}_{x} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f^{0}}{\partial x}=f^{0}_{x}=(f^{0}_{x_1},\quad \ldots,\quad f^{0}_{x_n})^{T}. \tag{6.5}$$

Вважаємо:

функції $f^{j}(x(t),u(t),t)$, $j=\overline{0,n}$ та частинні похідні f_x, f^{0}_{x} з формул (6.5) – неперервні за сукупністю аргументів $(x,u,t)\in E^{n}\times E^{r}\times[t_0,t_1]$.

Далі, введемо n **допоміжних змінних** $\psi(t) = (\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))^T \in E^n$

та **сталу** ψ_0.

Для цих змінних і сталої визначимо функцію:

$$H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0) =$$

$$= \psi_0 f^0(x(t),u(t),t) + \psi_1(t) f^1(x(t),u(t),t) + \ldots + \psi_n(t) f^n(x(t),u(t),t) = \qquad (6.6)$$

$$= \psi_0 f^0(x(t),u(t),t) + \psi^T(t) f(x(t),u(t),t).$$

Функція $H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)$ називається **функцією Гамільтона – Понтрягіна.**

Нехай $u = u(t)$ – кусково-неперервне керування, що задовольняє умову (6.4),
а $x(t) = x(t, u, x_0)$ – розв'язок системи (6.2), що відповідає цьому керуванню $u(t)$, початковій умові x_0 і визначений на всьому відрізку $[t_0, t_1]$.

Парі $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ поставимо у відповідність систему лінійних диференціальних рівнянь відносно допоміжних змінних $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))^T$:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6.7}$$

або інакше

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial f^j(x(t), u(t), t)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

де $\psi_0(t) = \psi_0$ – стала величина.

Систему лінійних диференціальних рівнянь (6.7) називають **спряженою системою**,
що відповідає парі $(u(t), x(t, u, x_0))$, $t_0 \le t \le t_1$.

Запишемо систему (6.7) у векторній формі:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -H'_x(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$$

або

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi_0 f_x^0(x(t), u(t), t) - (f_x(x(t), u(t), t)^T \psi(t),$$

для всіх $t_0 \le t \le t_1$.

Теорема 6.1. (**Принцип максимуму** – необхідна умова оптимальності. Закріплені кінці траєкторій, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (6.1)-(6.4).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t), t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

1) $\psi_0 \le 0, \quad |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0, \quad t_0 \le t \le t_1$; (6.8)

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв’язку $(u(t), x(t))$;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$, тобто:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0). \qquad (6.9)$$

Центральне місце в теоремі 6.1 займає умова максимуму. Тому **теорему 6.1** і наступні аналогічні теореми прийнято називати **принципом максимуму**.

Умова (6.8) гарантує, що функція не перетвориться на тотожний нуль і робить умову максимуму (6.9) змістовною.

Як користуватися теоремою 6.1 на практиці?

Знаходять функцію $u = u(x, t, \psi, \psi_0)$, що дає $\sup\limits_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$.

При цьому змінні x, t, ψ і стала ψ_0 вважаються параметрами.

Відзначимо, що $u = u(x, t, \psi, \psi_0) \in V$. (6.10).

Якщо початкова задача (6.1)-(6.4) має розв'язок, то функція (6.10) визначена на непорожній множині, що випливає з умови максимуму (6.9).

Далі складають систему з $2n$ диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H'_x(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases} \tag{6.11}$$

для всіх $t \in [t_0, t_1]$ відносно невідомих функцій $x(t), \psi(t)$.

Загальний розв'язок системи (6.11) містить $2n$ довільних сталих.
Для їх визначення треба мати $2n$ умов.

В задачі (6.1) – (6.4) ці умови такі: $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$.

Система (6.11) містить ще один невідомий параметр $\psi_0 \le 0$.

Як його визначити?

Зауважимо, що функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$, яка визначається співвідношенням (6.6), лінійна й однорідна відносно змінних $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$, тобто

$$H(x(t), u(t), t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) = \alpha H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0), \quad \forall \alpha.$$

Звідси та з умови

$$H(x(t), u(x, t, \psi(t), \psi_0), t, \psi(t), \psi_0) = \sup_{u \in V} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) \tag{6.12}$$

маємо

$$u(x, t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) \equiv u(x, t, \psi(t), \psi_0), \quad \forall \alpha. \tag{6.13}$$

Отже теорема 6.1 визначає $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ лише з точністю до додатного множника, і цим множником можна скористатися на свій розсуд.

На практиці, враховуючи умови теореми 6.1, зокрема, обмеження (6.8), найчастіше покладають

$$|\psi_0|^2 + \|\psi(\bar{t})\|^2 = 1, \quad \psi_0 \le 0, \tag{6.14}$$

де $\bar{t}$ – деякий момент часу, $t_0 \le \bar{t} \le t_1$,

наприклад, $\bar{t} = t_0$ або $\bar{t} = t_1$.

У тих задачах, у яких вдається заздалегідь показати, що $\psi_0 < 0$, замість умови нормування (6.14) часто покладають

$$\psi_0 = -1.$$

Крайову задачу,
що складається з умови максимуму (6.12), системи диференціальних рівнянь (6.11), крайових умов (6.3) та умови нормування (6.14),

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x,t,\psi,\psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H'_x(x, u(x,t,\psi,\psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$

$$H(x(t), u(x,t,\psi(t),\psi_0), t, \psi(t), \psi_0) = \sup_{u \in V} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$$

$$|\psi_0|^2 + \|\psi(\bar{t})\|^2 = 1, \quad \psi_0 \le 0$$

називають **крайовою задачею принципу максимуму** для задачі оптимального керування (6.1) – (6.4).

Нехай вдалося визначити з умов (6.11), (6.3), (6.14) деякі $x(t), \psi(t), \psi_0$, $t_0 \le t \le t_1$. Підставимо їх у (6.10) і отримаємо функцію:

$$u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0) \in V, \quad t_0 \le t \le t_1. \tag{6.15}$$

Нехай ця функція виявилася кусково-неперервною функцією. З (6.10), (6.12), (6.15) випливає, що отримане керування $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ задовольняє умову максимуму (6.9), тобто згідно з теоремою 6.1 може претендувати на роль оптимального керування задачі (6.1)-(6.4), а відповідна до нього траєкторія $x(t) = x(t, u(t), x_0)$, $t_0 \le t \le t_1$ – на роль оптимальної траєкторії цієї задачі. Тобто вони є розв'язком, підозрілим на оптимальний.

Чи буде знайдена пара $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ насправді розв'язком задачі (6.1)-(6.4), тобто оптимальним розв'язком, **теорема 6.1** не гарантує, оскільки ця теорема **дає** лише **необхідну умову оптимальності**. Може бути, що пара $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ задовольняє умови теореми 6.1, але не є розв'язком задачі (6.1)-(6.4).

Утім, якщо з якихось міркувань відомо (зазвичай, з фізичного змісту задачі), що дана задача (6.1)-(6.4) має розв'язок, а з крайової задачі принципу максимуму знайдені $x(t), \psi(t), \psi_0, t_0 \le t \le t_1$ однозначно, то знайдене керування (6.15) і буде оптимальним.

6.2. ФОРМУЛЮВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ ТА ФІКСОВАНИМ ЧАСОМ

Розглянемо задачу оптимального керування з більш загальними умовами на кінцях траєкторій; початковий і кінцевий моменти часу, як і раніше, фіксовані:

$$J(x_0, u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_1)) \to \inf , \qquad (6.16)$$

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le t_1, \qquad (6.17)$$

$$x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_I, \qquad (6.18)$$

$$u(t) \in V, \ t_0 \le t \le t_1, \qquad (6.19)$$

де керування $u(t)$ – кусково-неперервні на $t \in [t_0, t_1]$,

тобто $u(t) = u(t+0)$ при $t_0 \le t \le t_1$, а при $t = t_1$: $u(t_1) = u(t_1 - 0)$;

початковий і кінцевий моменти часу t_0, t_1 – фіксовані;

$f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$.

Вважаємо, що правий кінець траєкторій ***вільний***: $S_I \equiv E^n$,

та (або)

лівий кінець траєкторій ***вільний***: $S_0 \equiv E^n$, Далі будемо вважати:

функції $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{0, n}$, $\Phi(x)$ мають частинні похідні за змінними $x_1, \dots, x_n$ і неперервні разом із цими похідними за сукупністю своїх аргументів при всіх $x \in E^n$, $u(t) \in V$, $t \in [t_0, t_1]$

Також позначимо: $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi'_x = (\Phi_{x_1}, \dots, \Phi_{x_n})^T,$$

Теорема 6.2 (**Принцип максимуму** – необхідна умова оптимальності. Кінці траєкторій вільні, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (6.16)-(6.19).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t), t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

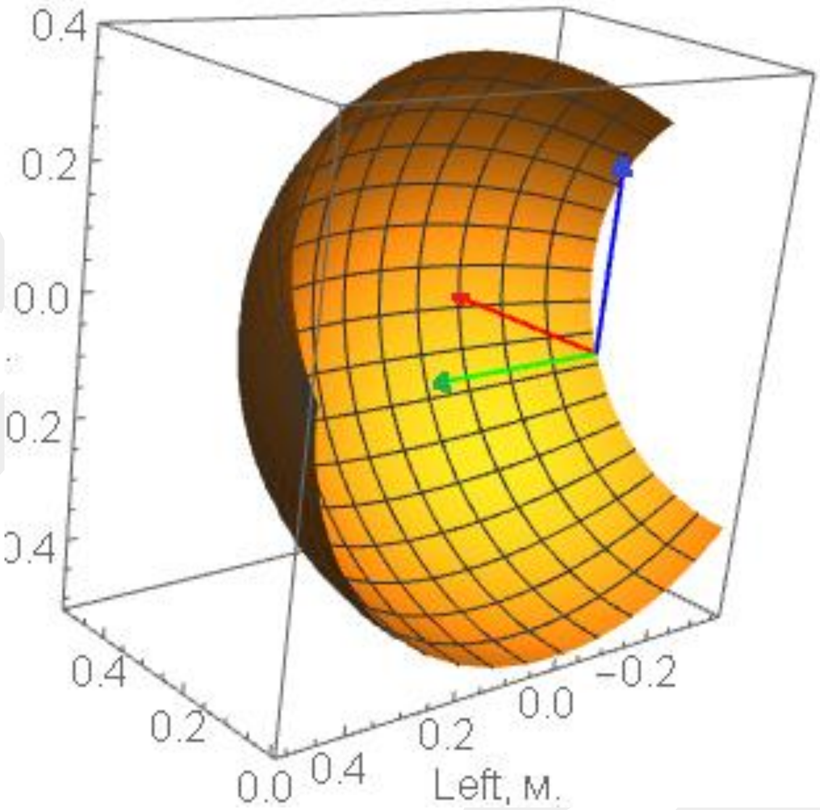
1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0, \quad t_0 \le t \le t_1$;

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв’язку $(u(t), x(t))$, який розглядається;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$, тобто:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0).$$

4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(t)$ виконуються умови трансверсальності, які у випадку задачі (6.16)-(6.19) означають, що вектор $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi'_x(x(t_1))$ ***ортогональний до множини*** S_I у точці $x(t_1) \in S_I$, а вектор $\psi(t_0)$ ***ортогональний до множини*** S_0 у точці $x(t_0) \in S_0$.


0.4
0.2
0.0
0.2
0.4
0.4
0.2
0.0
0.4
0.2
0.0
−0.2
Left, м.

Тут також можна прийняти умову нормування (6.14), або умову $\psi_0 = -1$, якщо відомо, що $\psi_0 < 0$.

Ще треба вказати $2n$ умов для визначення $2n$ сталих, від яких залежатиме загальний розв'язок системи (6.11).

Для цього розглянемо **умови трансверсальності** на кінцях траєкторії $x(t)$.

Наведемо ці ***умови на правому кінці*** траєкторії.

Правий кінець вільний, тобто: $S_I \equiv E^n$.

Тоді умова ортогональності вектора $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi'_x(x(t_1))$ до всього простору E^n означає:

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi'_x(x(t_1)) = 0. \tag{6.24}$$

Це дає n граничних умов для системи (6.11).

Наведемо ***умови трансверсальності на лівому кінці*** траєкторії $x(t)$.

Лівий кінець вільний, тобто: $S_0 \equiv E^n$.

Тоді умова трансверсальності записується так:

$$\psi(t_0) = 0. \tag{6.30}$$

Співвідношення (6.30) дають n граничних умов для системи (6.11).