4. Системи диференціальних рівнянь

4.1. Загальна теорія

Система звичайних диференціальних рівнянь

$$F_k(x, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(k_1)}, y_2', y_2'', \dots, y_2^{(k_2)}, \dots, y_n', y_n'', \dots, y_n^{(k_n)}) = 0, \qquad (1)$$
$$k = 1, n$$

яка є розв'язною відносно старших похідних $y_1^{(k_1)}$, $y_2^{(k_2)}, \dots,$ $y_n^{(k_n)}$

називається **канонічною системою** диференціальних рівнянь.

Зазвичай вона записується наступним чином

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(k_2-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(k_n-1)}), \\ y_2^{(k_2)} = f_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(k_2-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(k_n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(k_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(k_2-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(k_n-1)}). \end{cases} \qquad (2)$$

Порядком системи називається число $p = k_1 + k_2 + \dots k_n$

Приклад 1.

Звести до канонічного вигляду систему рівнянь

$$\begin{cases} y_2 y_1' - \ln(y_1'' - y_1) = 0 \\ e^{y_2'} - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

►

Дана система має третій порядок, бо $k_1 = 2$, а $k_2 = 1$. Отже $p = 3$.

Розв'яжемо перше рівняння відносно y_1'', а друге відносно y_2' й отримаємо канонічну систему

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'} \\ y_2' = \ln(y_1 + y_2) \end{cases}$$

◄

Співвідношення вигляду

$$\begin{cases} F_1(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \\ F_2(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \end{cases}$$

називається **системою** n- звичайних диференціальних рівнянь **першого порядку**.

Якщо система розв'язана відносно похідних і має вигляд

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \end{cases} \qquad (3)$$

то вона називається **системою в нормальній формі**.

Число n називається **порядком нормальної системи** (3).

Дві системи називаються **еквівалентними**, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки.

Будь яку канонічну систему (2) можна звести до еквівалентної їй нормальної системи (3). Порядок цих систем буде однаковим.

Приклад 2.

Звести до нормальної наступну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - y(t) = 0 \\ t^3\dfrac{dy(t)}{dt} - 2x(t) = 0 \end{cases}$$

►Дана система має третій порядок, бо $k_1 = 2$, а $k_2 = 1$. Отже $p = 3$.

Покладемо $x(t) = x_1(t)$, $\dfrac{dx(t)}{dt} = x_2(t)$, $y(t) = x_3(t)$

Тоді матимемо наступну нормальну систему того ж таки третього порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = \dfrac{2x_1(t)}{t^3} \end{cases}$$

◄

Приклад 3.

Звести до нормальної системи наступне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+p(t)\frac{dx(t)}{dt}+q(t)x(t)=0$$

► Покладемо

$$x(t)=x_1(t), \qquad \frac{dx(t)}{dt}=x_2(t).$$

Тоді

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t), \; \frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{dx_2(t)}{dt}$$

Отже нормальна система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-p(t)x_2(t)-q(t)x_1(t) \end{cases}$$

◄

Визначення 4.1.1. Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається набір $\boldsymbol{n}$ неперервно диференційованих функцій $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, які тотожно задовольняють кожному з рівнянь системи.

У загальному випадку розв'язок системи залежить від $\boldsymbol{n}$ - довільних сталих і має вигляд

$$x_1(t, C_1, \ldots, C_n), \ \ldots, \ x_n(t, C_1, \ldots, C_n)$$

Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку ставиться в такий спосіб. Потрібно знайти розв'язок, що задовольняє початковим умовам (умовам Коші)**:**

$$x_1(t_0) = x_1^0, \ \ldots, \ x_n(t_0) = x_n^0.$$

Визначення 4.1.2. Розв'язок $x_1(t, C_1, \ldots, C_n), \ \ldots, \ x_n(t, C_1, \ldots, C_n)$ називається **загальним**, якщо за рахунок вибору сталих $C_1, \ldots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь досить важливим є поняття інтеграла системи. В залежності від гладкості (тобто диференційованості) можна розглядати два визначення інтеграла.

Визначення 4.1.3.

1. Функція $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ стала вздовж розв'язків системи, називається інтегралом системи.

2. Функція $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ повна похідна, якої в силу системи тотожно дорівнює нулю, називається інтегралом системи.

Для лінійних рівнянь існує поняття лінійної залежності і незалежності розв'язків. Для нелінійних рівнянь (систем рівнянь) аналогічним поняттям є функціональна незалежність.

Визначення 4.1.4.

Інтеграли $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, … , $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ називаються **функціонально незалежними**, якщо не існує функції n- змінних $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ такої, що

$$\Phi(F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)) \equiv 0.$$

Теорема.

Для того щоб інтеграли $F_1(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t)$, $F_2(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t)$,…, $F_n(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t)$ системи звичайних диференціальних рівнянь були функціонально незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Якобі (якобіан) був відмінний від тотожного нуля, тобто

$$\frac{D(F_1, F_2, \ \dots \ , F_n)}{D(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n)} \neq 0.$$

або ж

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 0.$$

Визначення 4.1.5. Якщо $F\ (x_1, x_2,\ \dots\ , x_n, t)$ інтеграл системи диференціальних рівнянь, то рівність $F\ (x_1, x_2,\ \dots\ , x_n, t) = C$ називається **першим інтегралом**.

Визначення 4.1.6. Сукупність n- функціонально незалежних інтегралів називається **загальним інтегралом** системи диференціальних рівнянь.

Власне кажучи **загальний інтеграл -** це **загальний розв'язок** системи диференціальних рівнянь **у неявному вигляді.**

Теорема. (існування та єдиності розв'язку задачі Коші).

Для того щоб система диференціальних рівнянь, розв'язних відносно похідної, мала єдиний розв'язок, що задовольняє умовам Коші: $x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ \dots\ ,\ x_n(t_0)=x_n^0$

Достатньо виконання наступних умов:

1) функції $f_1, f_2, \dots, f_n$ - неперервні за змінними $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ в околі початкової точки $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0$;

2) функції $f_1, f_2, \dots, f_n$ задовольняють умову Ліпшиця за аргументами $x_1, x_2, \dots, x_n$ у тому ж околі.

Зауваження Т. Умову Ліпшиця можна замінити більш грубою умовою, що перевіряється легше: умовою існування обмежених частинних похідних, тобто

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \le M,\ \ i, j = 1,2,\ \dots\ , n.$$

Зауваження 1. Не всяку систему можна звести до одного диференціального рівняння!

Наприклад система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) \end{cases}$$

розпадається на два окремих рівняння. Загальний розв'язок отримується інтегруванням кожного з рівнянь самостійно

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{t}.$$

Зауваження 2. Якщо число рівнянь в системі - n, а число невідомих функцій - N, причому $n < N$, то така система називається **невизначеною**. В цьому випадку можна довільно вибирати $N - n$ шуканих функцій (диференційованих необхідну кількість разів), й в залежності від них визначати останні n функцій.

Зауваження 3. Якщо число рівнянь в системі - n, а число невідомих функцій - N, причому $n > N$, то така система може виявитися **несумісною**. Тобто вона не має розв'язку.

4.1.1. Геометрична інтерпретація розв'язків

Назвемо $n+1$ -вимірний простір змінних $x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t$ **розширеним фазовим простором** $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Тоді розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ \dots \ , x_n = x_n(t)$ визначає в просторі $\mathfrak{R}^{n+1}$ деяку криву, що називається **інтегральною кривою**.

Загальний розв'язок (чи загальний інтеграл) визначає сім'ю інтегральних кривих, що всюди щільно заповнюють деяку область $D \subset \mathfrak{R}^{n+1}$ (область існування та єдиності розв'язків).

Задача Коші ставиться як виділення із сім'ї інтегральних кривих, окремої кривої, що проходить через задану початкову точку $M(x_1^0, x_2^0, \ \dots \ , x_n^0, t_0) \in D$.

4.1.2. Механічна інтерпретація розв'язків

В евклідовому просторі R^n змінних $x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)$

розв'язок $x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t), \ \dots \ , \ x_n = x_n(t)$

визначає **закон руху** по деякій траєкторії в залежності від часу t.

При такій інтерпретації

функції $f_1, \ f_2, \ \dots \ , \ f_n$ є **складовими швидкості руху**,

простір зміни змінних називається - **фазовим простором**,

система - **динамічною**,

крива, на якій відбувається рух $x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t), \ \dots \ , \ x_n = x_n(t)$ - **фазовою траєкторією**.

Фазова траєкторія є проекцією **інтегральної кривої** на **фазовий простір**.

Приклад 4. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -x(t) \end{cases}$$

з початковими даними $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$.

► Продиференціюємо за t перше рівняння системи, і в те що отримали підставимо друге рівняння.

Матимемо одне рівняння другого порядку $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = 0$.

Його розв'язок $x(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t)$.

Тоді (зважаючи на друге рівняння системи) маємо

$$y(t) = -C_1\sin(t) + C_2\cos(t)$$

Розв'язком задачі Коші матимемо

$$x(t) = x_0\cos(t) + y_0\sin(t), \quad y(t) = -x_0\sin(t) + y_0\cos(t) \qquad (*)$$

Піднесемо кожне з останніх до квадрату й почленно складемо:

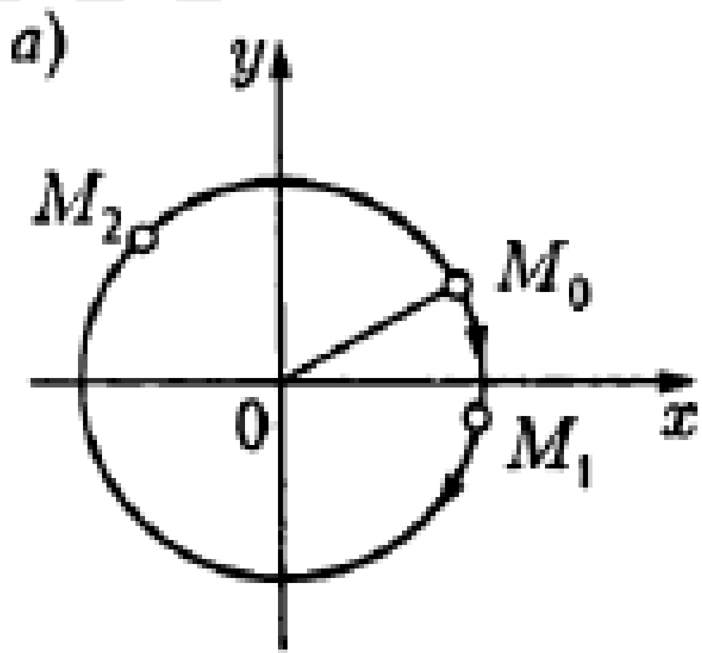
$x^2(t) + y^2(t) = R^2$, де $R = \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2}$. (Інтеграл системи).

Це коло, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Провівши деякі нескладні аналітичні міркування

(замінивши рівняння (*) на $x(t) = R\sin(t+\alpha), y(t) = R\cos(t+\alpha)$, де $\sin\alpha = \frac{x_0}{R}$, $\cos\alpha = \frac{y_0}{R}$)

побачимо, що в залежності від зміни часу, рух точки $M(x(t), y(t))$ відбувається згідно наступного рисунку



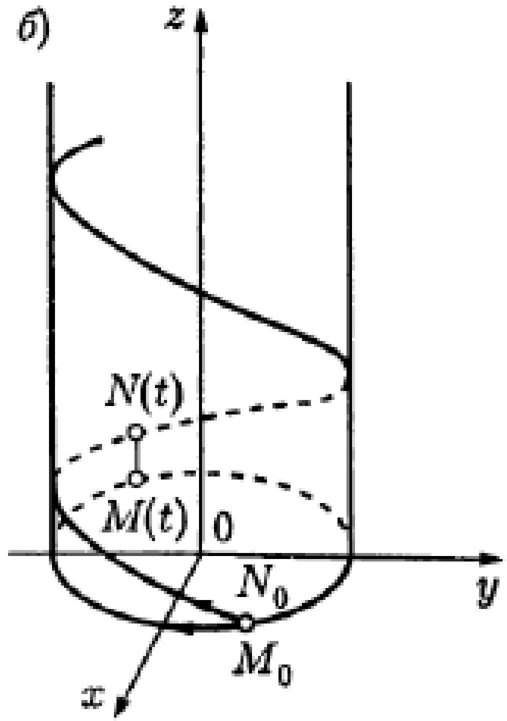
Дамо тепер іншу інтерпретацію отриманого результату.

У трьохвимірному просторі візьмемо праву систему декартових координат O_{xyz}.

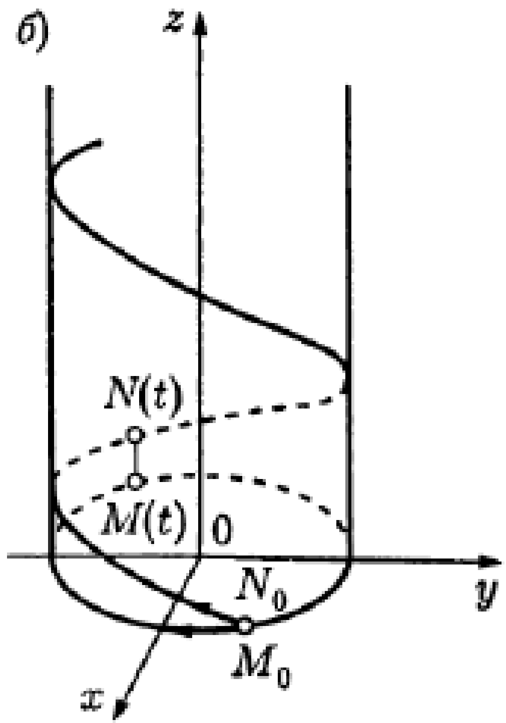
Легко переконатися, що точка $N(x(t), y(t), z(t))$, тобто точка з координатами

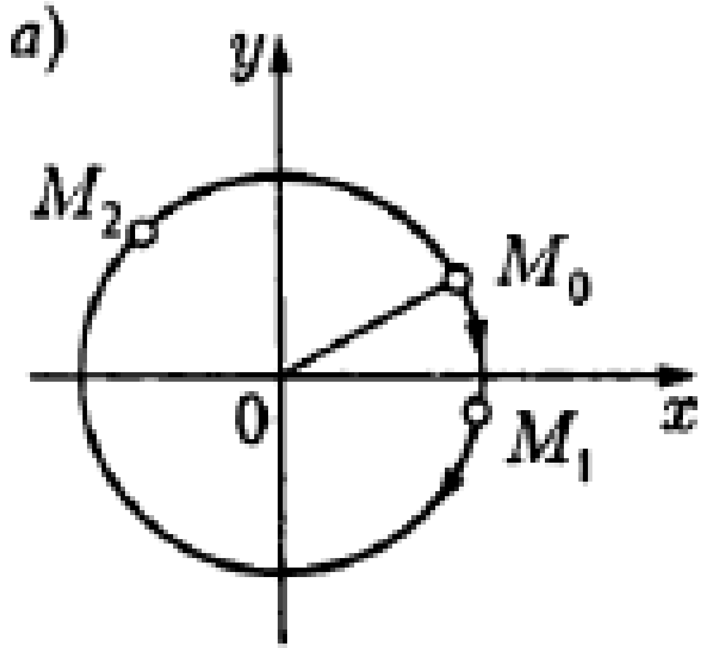
$$x(t) = R\sin(t+\alpha), y(t) = R\cos(t+\alpha), z(t) = t$$

рухається відповідно до наступного рис.



Цілком очевидно, що початкові точки M_0 та N_0 співпадають, й при будь якому t точка $N(t)$ проектується на фазову площину у точку $M(t)$.





◄

4.1. Метод виключення

(зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння)

Частковим випадком канонічної системи диференціальних рівнянь є одне рівняння n-го порядку, що розв'язне відносно старшої похідної

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right).$$

Введенням нових функцій

$$x_1 = x'(t), \quad x_2 = x''(t), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x^{(n-1)}(t)$$

це рівняння заміняється нормальною системою n рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1}, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \end{cases}$$

Можна стверджувати й зворотнє, що можливо (*згадаємо приклад Зауваження 1*), нормальна система n рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

еквівалентна одному диференціальному рівнянню n-го порядку.

На цьому побудовано один з методів інтегрування систем диференціальних рівнянь –
метод виключення.

Проілюструємо його на прикладі системи двох рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + f(t), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t).$$

Тут a, b, c, d - константи, $f(t), g(t)$ - задані відомі функції, $x(t), y(t)$ - шукані невідомі функції.

З першого рівняння цієї системи знаходимо

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right).$$

й підставимо праву частину в друге рівняння замість $y(t)$, а похідну правої частини замість $\frac{dy(t)}{dt}$.

Отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно $x(t)$

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0,$$

де A, B, C - константи.

Розв'язавши його знаходимо $x(t) = x(C_1, C_2, t)$, далі диференціюємо й маємо $\frac{dx(t)}{dt}$.

Підставляємо їх у попередній вираз, отриманий з першого рівняння, й знаходимо $y(t)$.