Виразимість. Арифметичні предикати, множини, функції

Нехай $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$ – деяка алгебраїчна система (АС). Предикат P на A *виразимий формулою* Φ сигнатури σ, якщо P – це предикат Φ_A.

Предикат P на A *виразимий в АС* $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$, якщо P виразимий деякою формулою Φ сигнатури σ. Інакше кажучи, предикат P на A виразимий в АС $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$, якщо існує така формула Φ сигнатури σ, що P – це предикат Φ_{A}.

Множина, що є областю істинності предикату, виразимого в АС $\boldsymbol{A}$, називається *виразимою в АС* $\boldsymbol{A}$ *множиною*. Функція, графік якої – виразима в АС $\boldsymbol{A}$ множина, називається *виразимою в* АС $\boldsymbol{A}$ *функцією*.

Множину натуральних чисел N з виділеними константами 0 та 1, визначеними на N стандартними бінарними функціями додавання + і множення × та стандартним предикатом рівності назвемо *стандартною інтерпретацією*, або *стандартною моделлю* мови арифметики. Тобто, стандартна інтерпретація L_{ar} – це АС $\boldsymbol{N} = (N, \sigma_{ar})$.

Арифметична формула, істинна на $\boldsymbol{N}$, називається *істинною арифметичною формулою* (ІАФ).

Кожна всюди істинна арифметична формула є ІАФ, але не кожна ІАФ всюди істинна. Наприклад, формула $\neg\exists x(x+1=0)$ є ІАФ, але вона не істинна на $\boldsymbol{Z} = (Z, \sigma_{ar})$ та на $\boldsymbol{R} = (R, \sigma_{ar})$.

Предикати, множини та функції, виразні в $\boldsymbol{N} = (N, \sigma_{ar})$, назвемо *арифметичними.*

Отже, функція f арифметична, якщо її графік Γ_f є арифметичною множиною. Звідси маємо: арифметична формула Φ виражає функцію f, якщо Φ виражає предикат "$y=f(x_1, \ldots, x_n)$".

Приклад. Предикати "x є парним числом" та "x ділиться на y" – арифметичні, вони виражаються формулами $\exists y(x=y+y)$ та $\exists z(x=y\times z)$.

Приклад. Предикат "x є простим числом" арифметичний. Він виражається арифметичною формулою $\forall y\forall z(x=y\times z\rightarrow y=1 \vee z=1)\&\neg x=1$.

Приклад. Предикати "$x\leq y$" та "$x<y$" арифметичні, бо вони виражаються арифметичними формулами $\exists z(x+z=y)$ та $\exists z(x+z=y\,\&\,x\neq y)$.

Слід зауважити, що предикат "$x\leq y$" в АС $\boldsymbol{N} = (N, \sigma_{ar})$, $\boldsymbol{R} = (R, \sigma_{ar})$ та $\boldsymbol{Z} = (Z, \sigma_{ar})$ виражається різними арифметичними формулами. Справді, для $\boldsymbol{N}$ маємо $\exists z(x+z=y)$; для $\boldsymbol{R}$ маємо $\exists z(x+z\times z=y)$, для $\boldsymbol{Z}$ маємо $\exists z\exists u\exists v\exists w(x+z\times z+u\times u+v\times v+w\times w=y)$. Останнє співвідношення використовує результат теореми Лагранжа про чотири квадрати: довільне натуральне число можна подати у вигляді суми чотирьох квадратів цілих чисел.

Окрім того, арифметичними є такі функції:

1) Функції $x+y$, $x\times y$ та $x–y$ виражаються арифметичними формулами $z=x+y$, $z=x\times y$ та $y+z=x$.

2) Функція $[x/y]$ виражається арифметичною формулою $z\times y\leq x\,\&\,x<(z+1)\times y$.

3) Функція $\mathrm{mod}(x, y)$ виражається арифметичною формулою $\exists u(x=z+u\times y\,\&\,z<y)$.

4) Функція $[\sqrt{x}\,]$ виражається арифметичною формулою $z\times z\leq x\ \&\ x<(z+1)\times(z+1)$.

Твердження. Клас арифметичних множин замкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ та доповнення.

Доведення. Нехай множини A та B виражаються арифметичними формулами Φ та Ψ. Тоді $A\cup B$, $A\cap B$ та $\overline{A}$ виражаються відповідно арифметичними формулами $\Phi\vee\Psi$, $\Phi\&\Psi$ та $\neg\Phi$.

Інтерпретація мови 1-го порядку

Інтерпретацією, або *моделлю* мови L сигнатури σ будемо називати алгебраїчну систему (АС) з доданою сигнатурою вигляду $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}, \sigma)$. Множину A називають *областю інтерпретації*. Значення символів та виразів мови L задамо на $\boldsymbol{A}$ природним чином.

Конкретна інтерпретація мови L на АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}, \sigma)$ визначається відображенням $\boldsymbol{I} : \sigma \to Fn^A \cup Pr^A$. Відображення інтерпретації для термів і формул мови L задається за допомогою відображення $\boldsymbol{J} : Tr \cup Fm \to Fn^A \cup Pr^A$, яке індуктивно визначається за допомогою $\boldsymbol{I}$.

Функцію, що є значенням терма t на АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}, \sigma)$, позначаємо t_A . Предикат, що є значенням формули Φ на АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}, \sigma)$, позначаємо Φ_A . Це означає, що $\boldsymbol{J}(t) = t_A$, $\boldsymbol{J}(\Phi) = \Phi_A$.

Формула Φ *істинна при інтерпретації на* $\boldsymbol{A}$, або *істинна на* $\boldsymbol{A}$, або $\boldsymbol{A}$*-істинна* (позначаємо $\boldsymbol{A} \models \Phi$), якщо предикат Φ_A є істинним.
Формула Φ *всюди істинна* (позначаємо $\models \Phi$), якщо вона істинна при кожній інтерпретації.
Формула Φ *виконувана при інтерпретації на* $\boldsymbol{A}$, або *виконувана на АС* $\boldsymbol{A}$, або $\boldsymbol{A}$*-виконувана*, якщо предикат Φ_A є виконуваним.
Формула Φ *виконувана*, якщо Φ виконувана при деякій інтерпретації.

Приклад. Формула $x = x$ всюди істинна.

Приклад. Формула $\forall x \forall y (x = y)$ істинна на всіх 1-елементних АС і тільки на них; формула $\neg\forall x \forall y (x = y)$ істинна на всіх k-елементних АС, де $k>1$, і тільки на них.

Замиканням формули Φ з вільними іменами $x_1, ..., x_n$ назвемо замкнену формулу $\forall x_1 ... \forall x_n \Phi$.

Семантична теорема замикання. $\boldsymbol{A} \models \Phi \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \models \overline{\Phi}$, де $\overline{\Phi}$ – *замикання формули* Φ.

Логічний та тавтологічний наслідки

Окремим випадком всюди істинних формул є тавтології.

Формула *пропозиційно нерозкладна,* якщо вона атомарна або має вигляд $\exists x \Phi$. Нехай Fm_0 – множина всіх пропозиційно нерозкладних формул мови L.

Істиннісна оцінка мови L – це довільне відображення $\tau : Fm_0 \to \{T, F\}$. Його можна продовжити на формули: $\tau : Fm \to \{T, F\}$: $\tau(\neg\Phi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = F$; $\tau(\Phi \vee \Psi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = T$ або $\tau(\Psi) = T$.

Формула Φ мови L *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi) = T$ для кожної істиннісної оцінки τ мови L.

Кожна тавтологія є всюди істинною формулою, але зворотне невірне. Наприклад, всюди істинна формула вигляду x=x – не тавтологія.
На множині формул введемо відношення тавтологічного наслідку $\models$, логічного наслідку $|=$, , тавтологічної еквівалентності $\sim_{т}$ та логічної еквівалентності $\sim$.

Формула Ψ є *тавтологічним наслідком* формули Φ (позначаємо $\Phi \models \Psi$), якщо $\Phi \to \Psi$ – тавтологія.
Формули Φ та Ψ *тавтологічно еквівалентні* (позначаємо $\Phi \sim_{т} \Psi$), якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.
Формула Ψ є *логічним наслідком* формули Φ (позначаємо $\Phi \,|{=}\, \Psi$), якщо $\Phi \to \Psi$ всюди істинна.
Формули Φ та Ψ *логічно еквівалентні* (позначаємо $\Phi \sim \Psi$), якщо $\Phi \,|{=}\, \Psi$ та $\Psi \,|{=}\, \Phi$.

Зрозуміло, що $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow$ формули $\Phi \to \Psi$ та $\Psi \to \Phi$ всюди істинні.

Формула Ψ є логічним наслідком множини формул $\{\Phi_1, ..., \Phi_n\}$, що позначатимемо $\{\Phi_1, ..., \Phi_n\} \,|{=}\, \Psi$, якщо $\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_n \,|{=}\, \Psi$. Аналогічно визначаємо $\{\Phi_1, ..., \Phi_n\} \models \Psi$.

Замість $\varnothing \models \Psi$ та $\varnothing \mid= \Psi$ пишемо відповідно $\models \Psi$ та $\mid= \Psi$.

Основні властивості для $\models$, $\sim_т$, $\mid=$ та $\sim$:
1) Φ тавтологія $\Leftrightarrow$ $\models \Phi$.
2) Φ всюди істинна $\Leftrightarrow$ $\mid= \Phi$.
3) якщо $\Phi \models \Psi$, то $\Phi \mid= \Psi$, але не завжди із $\Phi \mid= \Psi$ випливає $\Phi \models \Psi$;
4) $\Phi \sim_т \Psi \Leftrightarrow\ \models \Phi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \Phi \leftrightarrow \Psi$ тавтологія;
5) $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow\ \mid= \Phi \leftrightarrow \Psi$;
6) відношення $\models$ та $\mid=$ рефлексивні і транзитивні;
7) відношення $\sim_т$ та $\sim$ рефлексивні, транзитивні і симетричні.

Контрприклад для 3). $\exists x \exists y(x=y) \mid= \exists y \exists x(x=y)$, але невірно $\exists x \exists y(x=y) \models \exists y \exists x(x=y)$.

Той факт, що Φ всюди істинна, надалі позначаємо $\mid= \Phi$.

Еквівалентні перетворення формул. Нормальні форми

Основою еквівалентних перетворень формул є семантична теорема еквівалентності:
Нехай Φ' *отримана із формули* Φ *заміною деяких входжень формул* $\Phi_1, ..., \Phi_n$ *на* $\Psi_1, ..., \Psi_n$ *відповідно. Якщо* $\Phi_1 \sim \Psi_1, ..., \Phi_n \sim \Psi_n$, *то* $\Phi \sim \Phi'$.

Формула A' називається *варіантою* формули A, якщо A' можна отримати із A послідовними замінами такого типу: підформулу $\exists x$B замінюємо на $\exists y \mathrm{B}_x[y]$, де y не вільна в B. *Якщо* A' *– варіанта формули* A, *то* A $\sim$ A'.

Формула A – *пренексна*, або знаходиться в *пренексній* (попередній) *нормальній формі*, якщо A має вигляд $Qx_1...Qx_n$B, де Qx_k – кванторний префікс $\exists x_k$ або $\forall x_k$, B – безкванторна формула, яку називають матрицею формули A.

Введемо *пренексні операції* над формулами, які дозволять кожну формулу перетворити до еквівалентної їй пренексної формули:
a) заміна A деякою її варіантою;
b) заміна в A підформул вигляду $\neg\exists x\mathrm{B}(x)$ та $\neg\forall x\mathrm{B}(x)$ на $\forall x\neg\mathrm{B}(x)$ та $\exists x\neg\mathrm{B}(x)$ відповідно;
c) заміна в A підформул вигляду $Qx\mathrm{B}(x)\vee\mathrm{C}$ на $Qx(\mathrm{B}(x)\vee\mathrm{C})$, якщо x не вільне в C; заміна в A підформул вигляду $\mathrm{B}\vee Qx\mathrm{C}(x)$ на $Qx(\mathrm{B}\vee\mathrm{C}(x))$, якщо x не вільне в B.
d) заміна в A підформул вигляду $Qx\mathrm{B}(x)\wedge\mathrm{C}$ на $Qx(\mathrm{B}(x)\wedge\mathrm{C})$, якщо x не вільне в C, та підформул вигляду $\mathrm{B}\wedge Qx\mathrm{C}(x)$ на $Qx(\mathrm{B}\wedge\mathrm{C}(x))$, якщо x не вільне в B;
e) заміна в A підформул вигляду $\mathrm{B}\rightarrow Qx\mathrm{C}(x)$ на $Qx(\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{C}(x))$, якщо x не вільне в B;
f) заміна в A підформул вигляду $\exists x\mathrm{B}(x)\rightarrow\mathrm{C}$ на $\forall x(\mathrm{B}(x)\rightarrow\mathrm{C})$, та підформул вигляду $\forall x\mathrm{B}(x)\rightarrow\mathrm{C}$ на $\exists x(\mathrm{B}(x)\rightarrow\mathrm{C})$, якщо x не вільне в C.

Зауважимо, що для $\leftrightarrow$ подібних операцій немає, тому $\leftrightarrow$ слід розписувати через $\rightarrow$ та &.

Пренексною формою формули A назвемо пренексну формулу A', утворену із A за допомогою пренексних операцій.

Кожна формула має пренексну форму, причому якщо A' *– пренексна форма формули* A, *то* A $\sim$ A'.

***Приклад* 1.** Знайдемо пренексну форму для формули $\exists z(x=y+z) \rightarrow (x=y)\vee\exists z((x=y+z)\&\neg(z=0))$:
$\exists z(x=y+z) \rightarrow (x=y)\vee\exists t((x=y+t)\&\neg(t=0))$ – операція a);
$\exists z(x=y+z) \rightarrow \exists t(x=y \vee x=y+t\,\&\neg(t=0))$ – операція c);
$\forall z(x=y+z \rightarrow \exists t(x=y \vee x=y+t\,\&\neg(t=0)))$ – операція f);
$\forall z\exists t(x=y+z \rightarrow x=y \vee x=y+t\,\&\neg(t=0))$ – операція e).

Комбінацію кванторів $\forall x\exists y$ можна трактувати як твердження про існування певної функції, значення y якої залежить від x. Ця ідея лежить в основі визначення скулемівської нормальної форми.

Нехай $\boldsymbol{Q}\bar{v}\,M(\bar{v})$ – замкнена пренексна формула. Тут $\boldsymbol{Q}\bar{v}$ – кванторні префікси (всі ці кванторні префікси – за різними предметними іменами), $\bar{v}$ – всі вільні предметні імена (змінні) безкванторної формули M, причому $\bar{v}$ складається з $\exists$-кванторних імен $y_1, \ldots, y_n$ та $\forall$-кванторних імен $x_1, \ldots, x_m$. Зіставимо кожному кванторному префіксу $\exists y_i$ із $\boldsymbol{Q}\bar{v}$ $\{\bar{x}_i\}$-арну функцію f_i, де $\bar{x}_i$ – всі ті $\forall$-кванторні імена із $\bar{v}$, що передують y_i в $\boldsymbol{Q}\bar{v}$. Функції f_i зіставимо новий функціональний символ f_i, арність якого рівна кількості змінних в $\bar{x}_i$. Якщо y_i не передує в $\boldsymbol{Q}\bar{v}$ жодний $\forall$-кванторний префікс, то f_i – константа, f_i – константний символ. Замінимо всі входження y_i в M на терм $f_i(\bar{x}_i)$, $i\in\{1,\ldots n\}$. В результаті отримаємо формулу $\forall x_1\ldots\forall x_m M(x_1, \ldots, x_m, f_1(\bar{x}_1), \ldots, f_n(\bar{x}_n))$. Таке перетворення називається скулемізацією, а самі формули зазначеного вигляду – скулемівськими, або формулами в скулемівській формі.

Приклад **2.** Нехай формула має вигляд $\forall x\, p(x, x) \wedge \forall x\exists y(q(y)\to p(x, y)) \wedge \forall y\exists x(p(x, y))$. Зводячи її до пренексної форми, отримуємо $\forall x\forall z\exists y\forall u\exists v(p(x, x) \wedge (q(y)\to p(z, y)) \wedge p(v, u))$. Тепер $\exists y$ зіставимо 2-арний функціональний символ f, $\exists v$ зіставимо 3-арний функціональний символ g, замінимо входження y термом $f(x, y)$, входження v – термом $g(x, y, u)$. В результаті отримаємо скулемівську формулу $\forall x\forall z\forall u(p(x,x)\wedge(q(f(x,y))\to p(z,f(x,y)))\wedge p(g(x,y,u),u))$.

Приклад **3.** Нехай формула має вигляд $\exists x\, p(x) \wedge \forall x(p(x)\to\exists y(p(y))$. Зводячи її до пренексної форми, отримуємо $\exists x\forall z\exists y(p(x)\wedge(p(z)\to p(y))$. Тепер $\exists x$ зіставимо константний символ c, $\exists y$ зіставимо 1-арний функціональний символ f, замінимо входження x константним символом c, входження y – термом $f(z)$. У результаті отримаємо скулемівську формулу $\forall z(p(c)\,\&\,(p(z)\to p(f(z)))$.

Завдання

Вкажіть пренексну форму для таких формул:

1) $\forall x\mathrm{A}(x)\to \forall y(\exists z\mathrm{B}(x, y, z)\to\neg\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\exists x\mathrm{C}(x, y))$;

2) $\exists z(x=y+z)\to(x=y)\vee\exists z((x=y+z)\wedge\neg(z=0))$;

3) $\exists x\mathrm{A}(x, y)\to\forall x(\neg\exists y\mathrm{B}(x, y)\to \exists y\mathrm{C}(y))$.

Замкніть отриману формулу і приведіть до скулемівської нормальної форми.

Зведіть до скулемівської форми із матрицею в КНФ такі формули:

1) $\forall x\neg p(x, x)\wedge\forall x\exists y\, p(x, y)\wedge\forall x\forall z\forall y(p(x, z)\wedge p(z, y)\to p(x, y))$;

2) $\forall x\neg q(x,x)\wedge\forall x\forall z\exists y(q(x,y)\to q(x,z)\wedge q(z,y))\wedge\forall x\forall y\forall z(q(x,y)\wedge q(y,z)\to q(x,z))$;

3) $\exists x(p(x)\wedge\forall y(q(y)\to h(x,y))\wedge\forall x(p(x)\to\forall y(r(y)\to\neg h(x,y)))\to\forall x(q(x)\to\neg r(x))$.