Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 1.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2020

Зміст I

Зміст

Література до курсу:

- Є.О. Лебєдев, М.М. Шарапов "Курс лекцій з теорії ймовірностей"
- И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.Й. Ядренко "Теория вероятностей и математическая статистика", Киев: В.школа, 1989.
- А.Н.Ширяев " Вероятность", 2т., Москва: Наука, 2001.
- М.В. Карташов "Теорія ймовірностей та математична статистика", Київ: ТВіМС, 2004.
- Є.О. Лебєдев, М.С. Братійчук,О.А.Чечельницький, М.М. Шарапов, І.В. Розора "Збірник задач з прикладної статисики" (Збірник задач з теорії ймовірностей), Київ, 2010.

Історична довідка

Теорія ймовірностей — це математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ.
У стародавніх Китаї, Греції, Індії, Єгипті вже використовували ймов. судження для

- перепису населення;
- визначення чисельності військ.

Історична довідка

Т. Йм. зародилась у листуванні двох великих вчених **Б.Паскаля**(1623–1662) **П.Ферма** (1601–1665) щодо азартних ігор.
Наукову основу т.йм. заклав **Я. Бернуллі** (1654–1705) у трактаті "Мистецтво припущень". (Ввів поняття йм., як числа від 0 до 1)

Подальші успіхи у т.йм. пов'язані з іменами Муарва, Лапласа, Гаусса, Пуассона.
Сучасна т.йм. була створена у працях Бернштейна, Бореля, Колмогорова, Гнеденка, Прохорова, Скорохода та ін.

Можливе застосування

- при аналізі даних;
- у методах машинного навчання;
- у природничих науках;
- у страхуванні, фінансах;
- у комунікаційних мережах;
- при моделюванні випадкових явищ тощо.

Теорія ймовірностей— це розділ математики, в якому вивчаються математичні моделі випадкових (стохастичних) явищ.

З погляду ймовірнісників всі явища можна поділити на

- детерміновані;
- недетерміновані неповторювані (наявність життя на Марсі);
- недетерміновані повторювані з непередбаченою поведінкою частот(прогноз пведінки послідовних цифр числа π)
- недетерміновані повторювані зі стійкою поведінкою частот (відносна частота події має певну границю при нескін. зротанні к-ті спостережень.

Явища з отанньої групи наз. випадковими.

Приклад

Підкидання монети

Науковець	к-ть підкидань	відносна частота
Бюффон	4000	0,5080
Морган	4800	0,5005
Пірсон	24000	0,5005
Феллер	10000	0,4979

Підходи

Для побудови т.йм. використовують такі підходи:

- суб'єктивний;
- класичний;
- частотний;
- **аксіоматичний.**

Зміст

Означення

Стохастичним експериментом називають експеримент (випробування), результат якого не можна передбачити заздалегідь, але який можна повторити в незалежний спосіб необмежене число разів.

Означення

Певний фіксований результат експеримента,який не можна виразити через сукупність інших результатів, називається елементарною подією.

Позначення. ω

Означення

Множина всіх елементарних подій називається простором елементарних подій (ПЕП).

Позначення. Ω

Означення

ПЕП називається дискретним, якщо множина Ω скін. або зліч.

Приклади I

1. Кидають гральний кубик один раз.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Підкидуємо монету два рази

$$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}$$

3. Підкидуємо монету до першої появи Г

$$\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \text{РРРГ}, \cdots; \omega_\infty = \text{РР} \cdots \text{РР} \cdots\}$$

Приклади II

4. Реєструється проміжок часу до виходу з ладу приладу. Результат— термін безвідмовної роботи приладу.

$$\Omega = [0, \infty)$$

5. **Задача про зустріч.** Дві особи A і B домовились зустрітись на проміжнку часу $[0, T]$.
   Нехай x —час приходу A; y — час приходу B.

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq T\}$$

6. Спостерігається частина, яка бере участь у броунівському русі. ПЕП — множина всіх можливих траєктортій частини.

Випадкові події

Означення

Підмножини Ω називаються подіями (випадковими подіями). Сама множина Ω називається достовірною подією, а порожня множина $\emptyset$ неможливою подією.

Позначення. $A, B, C \cdots$

Будемо говорити, що при здійсненні експерименту відбулася подія A, якщо як результат ми отримали ω_0 і $\omega_0 \subset A$. При цьому про елементарну подію ω_0 говорять як про таку, що сприяє події A або тягне за собою подію A.

Приклади I

1. Кидають гральний кубик один раз. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   $$A = \{\text{випала грань з числом кратним 3}\};$$

2. Підкидуємо монету два рази $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}$
   $A = \{\text{хоча б один раз випав Г}\};$ $A = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}\}$

3. Підкидуємо монету до першої появи Г.

   $A = \{\text{зроблено не більше трьох підкидань}\}$ $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$

Приклади II

4. Реєструється проміжок часу до виходу з ладу приладу. Результат— термін безвідмовної роботи приладу.

   $A = \{$термін безвідмовної роботи приладу понад 100 од.часу$\}$

   $$A = [100, \infty)$$

5. **Задача про зустріч.** Дві особи A і B домовились зустрітись на проміжку часу $[0, T]$. Нехай кожна з осіб чекає один одного не більше ніж τ, $0 < \tau < T$.

   $$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq T\}$$

   $A = \{$відбулась зустріч$\}$, $\qquad A = \{(x, y) \in \Omega | |x - y| \leq \tau\}$

Операції над подіями

Оскільки події є множинами, то для операцій над подіями справедливі ті ж самі правила, що і для операцій над множинами:

Означення

Сумою(об'єднанням) подій A і B називається подія C, яка відбувається лише тоді, коли відбувається подія A або подія B.

Позначення. $C = A \cup B$.

Означення

Добутком (перетином) подій A і B називається подія C, яка відбувається лише тоді, коли відбувається і подія A, і подія B.

Позначення. $C = A \cap B$ або $C = AB$.

Означення

Події A і B називаються несумісними подіями, якщо

$$A \cap B = \emptyset.$$

Означення

Різницею подій A і B називається подія C, яка відбувається лише тоді, коли відбувається подія A, і не відбувається подія B. В цьому випадку пишуть $C = A \backslash B$.

Означення

Подія $\Omega \backslash A$ називається протилежною до події A (доповненням до події A, запереченням події A) і позначається як $\overline{A}$.

Якщо кожна елементарна подія, яка сприяє події A, сприяє і події B, то говорять, що подія B випливає з події A, або подія A тягне за собою подію B. Це відношення між подіями записують у вигляді $A \subset B$ (або $B \supset A$).

Операції над подіями

Означення

Послідовність подій A_n, $n \geq 1$, називається зростаючою, якщо

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

Означення

Послідовність подій B_n, $n \geq 1$, називається спадною, якщо

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$$

Операції над подіями I

Оскільки події є множинами, то для операцій над подіями справедливі ті ж самі правила, що і для операцій над множинами:

1. Комутативність

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A$$

2. Асоціативність

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

3. Розподільний закон добутку відносно додавання

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Операції над подіями II

4. Розподільний закон додавання відносно добутку

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Правила де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Зміст

Розглянемо стохастичний експеримент і подію A, яка спостерігається в ньому. Нехай експеримент незалежним чином повторюється n разів, а n_A — число експериментів, в яких відбулась подія A (абсолютна частота).

Означення

Відношення

$$h_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

називається частотою (відносною частотою) події A в серії експериментів.

Зауваження

$$n_A \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$$

Властивості $h_n(A)$: I

1. $$0 \leq h_n(A) \leq 1$$

2. $$h_n(\Omega) = 1,$$

   де Ω — достовірна подія, що настає при кожному здійсненні експеримента.

3. $$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B),$$

   де A, B — несумісні події.

Зауваження

Частота змінюється, якщо буде проведена інша серія з n експериментів або якщо змінюється n.

Означення

Якщо при великих n частота $h_n(A)$ мало відрізняється від деякого фіксованого p, то говорять, що подія A стохастична стійка, а число p представляє собою ймовірність події A.

Зміст

Розглянемо випадок скін. ПЕП.

$$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\},$$

де ω_i, $i = \overline{1, n}$, —елементарні події.
Кожній ел. події ставиться у відповідність деяке число

$$\omega_i \longmapsto p_i$$

з властивостями

1. $$p_i \geq 0, \qquad i = \overline{1, n};$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Означення

Випадковою подією у скін. йм. схемі будемо називати підмножину з ПЕП, $A \subseteq \Omega$.

Скільки всього випадкових подій існує для цієї схеми?

Нехай подія

$$A = \{\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_k}\}$$

Означення

Ймовірність події A визначимо як

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}.$$

$$P(\emptyset) = 0.$$

Властивості

1. (невід'ємність) $\forall A \subseteq \Omega$: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. (нормованість) $P(\Omega) = 1$.
3. (адитивність) Якщо $A \cap B = \emptyset$, то
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
4. $$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Якщо для скін. ймов. схеми виконується

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n},$$

то

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1}$$

де $|A|$—потужність події A (кількість елементів в ній).
(1) ще називають **класичним означенням ймовірності.**

Елементи комбінаторики I

При застосуванні останньої формули використовується, як правило, такий розділ математики як комбінаторика. Наведемо деякі формули та позначення з цього розділу, які найчастіше використовуються при підрахунках:

- $n!$ —число різних можливих перестановок з n елементів;
- $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k!)}$ — число комбінацій з n елементів по k, в яких порядок елементів не враховується;
- $A_n^k = \frac{n!}{(n-k!)}$ — число комбінацій з n елементів по k, в яких враховується порядок елементів.

Елементи комбінаторики II

- $\overline{C}_n^k = C_{k+n-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1!)}$ — число комбінацій (без урахування порядку) з n типів елементів по k з повтореннями.

Елементи комбінаторики

Правило добутку комбінаторики:

якщо подія A_1 може відбутися n_1 різними способами, подія A_2 незалежно від цього може відбутися n_2 різними способами, подія A_3 незалежно від цього може відбутися n_3 різними способами . . . подія A_m незалежно від цього може відбутися n_m різними способами, то послідовність подій $A_1, A_2, \cdots, A_m$ може відбутися $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ різними способами.

Приклад

Приклад

Серед 10 угод страхування авто 5 укладено на випадок крадіжки, 3 – на випадок ушкоджень з вини автовласника та 2 – на випадок ушкоджень не з вини автовласника. Всі страхові випадки рівноможливі. Знайти ймовірність того, що з трьох страхових випадків:

а) будуть рівно два, що мають одну і ту саму причину;

б) всі випадки будуть мати різні причини.

Розв'язок: Нехай A та B означають події:

$$A = \{\text{з трьох страхових випадків будуть рівно два,}$$

$$\text{що мають одну і ту саму причину}\},$$

$$B = \{\text{всі випадки мають різні причини}\}.$$

Тоді

$$P(A) = \frac{C_5^2 C_5^1 + C_3^2 C_7^1 + C_2^2 C_8^1}{C_10^3} = \frac{79}{120}$$

$$P(B) = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{C_10^3} = \frac{1}{4}.$$

ПИТАННЯ?