Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 4.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2020

Зміст I

Зміст

- ($F1$, нормованість) $\Omega \in F$
- ($F2$, доповнення) $A \in F \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in F$
- ($F3$, зліч. об'єднання) $\forall n \geq 1 A_n \in F, \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

- (P1, невід'ємність) $\forall A \in F\ P(A) \geq 0$;
- (P2, нормованість) $P(\Omega) = 1$;
- (P3, σ -адитивність) $\forall n \geq 1 A_n \in F : \ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Зміст

1. Ймовірність доповнення. Нехай $A \in F$, тоді
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$
2. Ймовірність неможливої події
$$P(\emptyset) = 0.$$
3. Ймовірність вкладеної різниці
$$A, \in F \quad A \subset B \Rightarrow \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$
4. Монотонність ймовірності
$$A, B \in F, \quad A \subset B \ \Rightarrow \ P(A) \leq P(B).$$

5. Множина значень ймовірності

$$\{P(A),\ A \in F\} \subset [0,1].$$

6. Йм. об'єднання двох подій

$$A, B \in F \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

7. Формула включення-виключення. Нехай A_k, $k = \overline{1, n}$ — випадкові події, тоді

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

8. Напівадитивність ймовірності

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \quad A_k \in F$$

Позначимо

$$B_1 = A_1, \cdots, B_k = A_k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} A_i).$$

Тоді

- $\{B_k, k = \overline{1, n}\}$ — попарно несумісні події.
- $B_k \subset A_k$
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$.

За адитивністю та монотон. ймовірності маємо:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

8. Напівадитивність ймовірності

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \quad A_k \in F$$

Позначимо

$$B_1 = A_1, \cdots, B_k = A_k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} A_i).$$

Тоді

- $\{B_k, k = \overline{1, n}\}$ — попарно несумісні події.
- $B_k \subset A_k$
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$.

За адитивністю та монотон. ймовірності маємо:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

8. Напівадитивність ймовірності

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \quad A_k \in F$$

Позначимо

$$B_1 = A_1, \cdots, B_k = A_k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} A_i).$$

Тоді

- $\{B_k,\ k = \overline{1,n}\}$ — попарно несумісні події.
- $B_k \subset A_k$
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$.

За адитивністю та монотон. ймовірності маємо:

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

8. Напівадитивність ймовірності

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \quad A_k \in F$$

Позначимо

$$B_1 = A_1, \cdots, B_k = A_k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} A_i).$$

Тоді

- $\{B_k,\ k = \overline{1, n}\}$ — попарно несумісні події.
- $B_k \subset A_k$
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$.

За адитивністю та монотон. ймовірності маємо:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

9. Неперевність ймовірності

Якщо A_n—монотон. послідовність, то

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n).$$

- Якщо $A_n \in F$— зростаюча послідовність $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_n \uparrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A).$$
- Якщо B_n— спадна послідовність $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, $B_n \downarrow B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, то
$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B).$$

9. Неперевність ймовірності

Якщо A_n—монотон. послідовність, то

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n).$$

- Якщо $A_n \in F$— зростаюча послідовність $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_n \uparrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A).$$

- Якщо B_n— спадна послідовність $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, $B_n \downarrow B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B).$$

Доведення 9. I

а) Розглянемо нову посл. $C_n,\ n \geq 1$:

$$C_1 = A_1, \quad C_2 = A_2 \setminus A_1, \cdots, C_n = A_n \setminus A_{n-1},\ n > 1,$$

для якої виконуються власт.

- $C_n,\ n \geq 1$, попарно несумісні;
- $$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} C_k;$$

Доведення 9. II

- $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

  Тоді за власт. $P3$ маємо

$$P(A) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(C_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} C_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Доведення 9. III

б) Для доведення використаємо тв. а). Якщо

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots, \quad B_n \downarrow B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n,$$

то

$$\overline{B_1} \subset \overline{B_2} \subset \cdots, \quad \overline{B_n} \uparrow \overline{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}.$$

Тоді з а) випливає, що

$$P(\overline{B_n}) = 1 - P(B_n) \uparrow P(\overline{B}) = 1 - P(B).$$

10. Злічення напівадивність

$$\forall A_n \in F \quad P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Дане твердження випливає із напівадитивності та неперервності

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

10. Злічення напівадивність

$$\forall A_n \in F \quad P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Дане твердження випливає із напівадитивності та неперервності

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

11. Еквівалентність неперервності нулі та сигма-адитивності для адитивної міри

Означення

Будемо говорити, що йм. P на класі подій F неперервна в нулі, якщо

$$\forall A_n \in F : \quad A_n \downarrow \emptyset \quad (A_1 \supset A_2 \supset \cdots , \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset)$$

має місце збіжність

$$P(A_n) \to 0.$$

Теорема

Адитивна ймовірність P на сигма-аглебрі F буде σ-адитивною $\Leftrightarrow$ ймовірність P неперервна в 0.

11. Еквівалентність неперервності нулі та сигма-адитивності для адитивної міри

Означення

Будемо говорити, що йм. P на класі подій F неперервна в нулі, якщо

$$\forall A_n \in F : \quad A_n \downarrow \emptyset \quad (A_1 \supset A_2 \supset \cdots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset)$$

має місце збіжність

$$P(A_n) \to 0.$$

Теорема

Адитивна ймовірність P на сигма-аглебрі F буде σ-адитивною $\Leftrightarrow$ ймовірність P неперервна в 0.

Доведення. I

$\Rightarrow$ (Необхідність). Випливає з власт. 9 неперервності ймовірності.
$\Leftarrow$ (Достатність). Нехай P- адитивна ймовірність та вик. неперервність в 0, т.б.

$$B_n \downarrow \emptyset \;\Rightarrow\; P(B_n) \to 0.$$

Доведемо σ-адитивність P, т.б.
$\forall n \geq 1 A_n \in F : \; A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j,$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Доведення. II

Позначимо

$$B_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B_1 = \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k, \cdots \quad B_{n+1} = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \cdots$$

Очевидні власт.

- $$B_1 \supset B_2 \supset \cdots,$$
- $$B_n \downarrow \emptyset, \text{ а,отже, за припущенням } \quad P(B_n) \to 0,\ n \to \infty,$$
- $$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup B_n.$$

Доведення. III

- $$B_n \cap A_i = \emptyset,\ i = \overline{1, n}$$

Тоді

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + P(B_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(B_n) \to \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),\ n \to \infty.$$

Отже, виконується σ-адитивність

Продовження неперервної йм. на σ-алгебру

Теорема (Каратеодорі)

Нехай P*—* σ*-адитивна ймов. міра на алгебрі* F_0*. Тоді* $\exists!$ σ*-адитивна ймов. міра* $Q(\cdot)$*, яка визначена на найменшій* σ*-алгебрі* $F = \sigma[F_0]$*, і є продовженням міри* P*, т.б.* $\forall A \in F_0\ P(A) = Q(A)$.

12. Продовження неперервної йм. на σ-алгебру

Для того, щоб адитивна ймовірність P на алгебрі подій F_0 мала продовження до σ-адитивної йм. міри на породженій σ-алгебрі $F = \sigma[F_0] \Leftrightarrow$ вона була неперернвною в 0 на алгебрі F_0.

Доведення.

$\Rightarrow$ випливає з властивості 9. неперервності йм.

$\Leftarrow$ випливає з властивості 11. та Т. Каратеодорі. $\square$

Вправи

Доведіть, що мають місце такі нерівності:

1. $$\forall A, B \in F \quad P(A \cup B)P(A \cap B) \leq P(A)P(B).$$

2. $$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}).$$

3. $$P^2(A \cap B) + P^2(\overline{A} \cap B) + P^2(A \cap \overline{B}) + P^2(\overline{A} \cap \overline{B}) \geq \frac{1}{4}.$$

4. $$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

Зміст

Умовні йм. використовують у випадку коли в ході стох. експерименту стає відомо певна інфрмація про його результати.

Приклад

Двічі підкидаємо симетр. кубик. $B = \{\text{сума} < 4\}$, $A = \{\text{перший раз з'явилась}'1'\}$. Відомо, що відбулась подія B. Яка йм. події A?

1.
$$B\{(1,1);(1,2);(2,1)\}, \quad A = \{(1,i), i = \overline{1,6}\}$$
$$P(A|B) = \frac{2}{3}.$$

2.
$$A \cap B = \{(1,1);(1,2)\}, \quad P(B) = \frac{3}{36}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$
.
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}.$$

Нехай (Ω, F, P) — деякий йм. простір. $B \in F, P(B) > 0$.

Означення

Умовною ймовірністю події A за умови, що відбулась подія B, називається

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

Для умовної йм. виконуються власт.

- (невід'ємність) $P(A|B) \geq 0$,
- (нормованість) $P(\Omega|B) = 1$,
- (нормованість) $P(B|B) = 1$,
- (σ-адитивність) Якщо A_i — послідовність попарно несумісних подій, то

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

Якщо F_B— σ-алгебра всіх множин виду $A \cap B$, $A \in F$, то трійку $(B, F_B), P(\cdot|B)$ можна також розглядати як імов. простір. Тому для умовної йм. справедливі властивості, що і для йм. міри.

З (1) випливає, що

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B), \quad P(B) > 0.$$

Теорема (Формула добутку)

Якщо $P(B) > 0$, $P(A) > 0$, *то*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B). \tag{2}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

Формулу (2) допускає узагальнення.

Теорема (Узагальнена формула добутку)

Нехай A_i, $i = \overline{1, n}$ *— випадкові події, для яких* $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$, *тоді*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i). \quad (3)$$

Доведення I

Покажемо спочатку $\forall k = \overline{1, n-1}\ P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i)$. Дійсно, оскільки

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i \subset \cdots \subset A_1,$$

то за монотон. йм.

$$0 < P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \leq P(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \leq \cdots \leq P(A_1).$$

Отже, маємо право розглядати йм. $P(A_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i)$.

ММІ.

Доведення II

1. Для $n = 2$ рівність (3) виконується ($\Leftarrow$ (2))
2. Припустимо, що (3) вик. для n подій.
3. Доведемо для для $n + 1$.

$$P(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k) = P(A_{n+1} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)) = P(A_{n+1} | \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)) P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) =$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_{n+1}| \bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Приклад

Припустимо, що страхова компанія має два типи угод A_1 та A_2, кількість яких дорівнює відповідно n та m. Всі страхові випадки однаково ймовірні. Нехай C_i — подія, яка полягає в тому, що i-ий позов до компанії належить типу A_1. Знайти ймовірність того, що перші три позови будуть за угодами типу A_1.

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1)P(C_2|C_1)P(C_3|C_1 \cap C_2) =$$

$$= \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} \cdot \frac{n-2}{n+m-2}.$$

Приклад

Припустимо, що страхова компанія має два типи угод A_1 та A_2, кількість яких дорівнює відповідно n та m. Всі страхові випадки однаково ймовірні. Нехай C_i — подія, яка полягає в тому, що i-ий позов до компанії належить типу A_1. Знайти ймовірність того, що перші три позови будуть за угодами типу A_1.

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1)P(C_2|C_1)P(C_3|C_1 \cap C_2) =$$
$$= \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} \cdot \frac{n-2}{n+m-2}.$$

У деякому імовірнісному просторі (Ω, F, P) розглянемо події $H_1, H_2, \dots, H_n (n \geq 2)$, які мають такі властивості:

а) події $H_1, H_2, \dots, H_n$ несумісні, тобто жодні дві з них не можуть здійснитися одночасно;

б) одна з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ обов'язково відбудеться, тобто $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, причому $\mathbf{P}(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Означення

Якщо події $H_1, H_2, \dots, H_n$ мають властивості а) та б), то кажуть, що вони утворюють повну групу подій (ПГП).

Теорема (Формула повної ймовірності)

Нехай A – деяка подія, а події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють ПГП. Тоді має місце рівність

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)P(H_k). \tag{4}$$

Доведення.

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} H_k) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_k).$$

Події $A \cap H_k$ попарно несумісні.

$$\mathbf{P}(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_k)) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap H_k) =$$

за Т.добутку $P(A \cap H_k) = P(A|H_k)P(H_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{P}(A \cap H_k)}{\mathbf{P}(H_k)} \mathbf{P}(H_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k).$$

□

Приклад

Серед N екзаменаційних білетів є n "щасливих". За білетами студенти підходять один за одним. У кого більша ймовірність узяти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

$H_1 = \{$1-ий взяв щасливий білет$\}$, $H_2 = \{$1-ий взяв нещасливий біле

$\{H_1, H_2\}$— ПГП.

$$P(H_1) = \frac{n}{N}, \quad P(H_2) = \frac{N-n}{N}.$$

$$A = \{\text{2-ий взяв щасливий білет}\}.$$

Приклад

Серед N екзаменаційних білетів є n “щасливих”. За білетами студенти підходять один за одним. У кого більша ймовірність узяти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

$H_1 = \{$1-ий взяв щасливий білет$\}$, $\quad H_2 = \{$1-ий взяв нещасливий біле

$\{H_1, H_2\}$— ПГП.

$$P(H_1) = \frac{n}{N}, \quad P(H_2) = \frac{N-n}{N}.$$

$$A = \{\text{2-ий взяв щасливий білет}\}.$$

Приклад

Серед N екзаменаційних білетів є n "щасливих". За білетами студенти підходять один за одним. У кого більша ймовірність узяти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

$H_1 = \{$1-ий взяв щасливий білет$\}$, $H_2 = \{$1-ий взяв нещасливий біле

$\{H_1, H_2\}$— ПГП.

$$P(H_1) = \frac{n}{N}, \quad P(H_2) = \frac{N-n}{N}.$$

$$A = \{\text{2-ий взяв щасливий білет}\}.$$

$$P(A|H_1) = \frac{n-1}{N-1}, \quad P(A|H_2) = \frac{n}{N-1}.$$

За формулою повної ймов.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N}\frac{n}{N-1} =$$

$$= \frac{n}{N}$$

$$P(A|H_1)=\frac{n-1}{N-1},\quad P(A|H_2)=\frac{n}{N-1}.$$

За формулою повної ймов.

$$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)=\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}+\frac{N-n}{N}\frac{n}{N-1}=$$

$$=\frac{n}{N}$$

$$P(A|H_1) = \frac{n-1}{N-1}, \quad P(A|H_2) = \frac{n}{N-1}.$$

За формулою повної ймов.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N}\frac{n}{N-1} =$$

$$= \frac{n}{N}$$

Теорема (Формула Баєса)

Нехай A *– деяка подія, яка має додатну ймовірність,* $\mathbf{P}(A) > 0$*, а події* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *утворюють повну групу. Тоді має місце рівність*

$$\mathbf{P}(H_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)}{P(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}. \tag{5}$$

Доведення.

Безпосередньо застосовуючи визначення умовної ймовірності і теорему добутку

$$\mathbf{P}(H_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap H_k)}{\mathbf{P}(A)}, \quad \mathbf{P}(A \cap H_k) = \mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)$$

та формулу повної ймовірності (4), отримуємо твердження теореми. □

Значення $\mathbf{P}(H_k)$ називають апріорними ймовірностями, а умовні ймовірності $\mathbf{P}(H_k|A)$ називають апостеріорними ймовірностями. Формула Баєса дозволяє уточнити уявлення про ймовірність кожної з подій, що утворюють повну групу, враховуючи інформацію про здійснення події A.

Приклад

Авто експлуатується двома особами: чоловіком та жінкою по черзі. Ймовірність дорожньо-транспортної пригоди при керуванні авто чоловіком є 0,1, а ймовірність дорожньо-транспортної пригоди при керуванні авто жінкою є 0,03. Чоловік користується транспортним засобом удвічі більше ніж жінка.

а) Підрахувати ймовірність дорожньо-транспортної пригоди для даного авто;

б) Відомо, що сталася дорожня пригода. Підрахувати ймовірність того, що за кермом був чоловік.

Нехай A, H_1, H_2 є наступними подіями:
A — сталася дорожня пригода,
H_1 — за кермом був чоловік,
H_2 —- за кермом була жінка.
Використовуючи умову задачі, можемо записати, що

$$P(A|H_1) = 0,1, \quad P(A|H_2) = 0,03.$$

$$P(H_1) = \frac{2}{3}, \quad P(H_1) = \frac{1}{3}.$$

Отже, потрібно знайти $P(A)$, $P(H_1|A)$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 0,1 \cdot \frac{2}{3} + 0,03 \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{300}.$$

За формулою Байєса

$$P(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{P(A)} = \frac{0,1 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{23}{300}} = \frac{20}{23}.$$

Відсоток виробництва бракованої продукції

Приклад

На ринку представлено певну продукцію двох заводів. Перший виробляє 10 000 од. на рік, другий — 80 000 од. Перший завод має 2% бракованої продукції, другий — 0,5%. Навмання обраний товар виявився бракованим. Який з виробників є для нього більш ймовірним?

$A = \{\text{товар бракований}\}$, $H_i = \{\text{товар з i-ого заводу}\}$, $i = 1, 2$.
За умовою

$$P(H_1) = \frac{1}{9}, \quad P(H_2) = \frac{8}{9},$$

$$P(A|H_1) = 0,02, \quad P(A|H_2) = 0,005.$$

Відсоток виробництва бракованої продукції

Приклад

На ринку представлено певну продукцію двох заводів. Перший виробляє 10 000 од. на рік, другий — 80 000 од. Перший завод має 2% бракованої продукції, другий — 0,5%. Навмання обраний товар виявився бракованим. Який з виробників є для нього більш ймовірним?

$A = \{\text{товар бракований}\}$, $H_i = \{\text{товар з i-ого заводу}\}$, $i = 1, 2$.
За умовою

$$P(H_1) = \frac{1}{9}, \quad P(H_2) = \frac{8}{9},$$

$$P(A|H_1) = 0,02, \quad P(A|H_2) = 0,005.$$

Формула повної ймов.

$$P(A) = \frac{1}{9} \cdot 0,02 + \frac{8}{9} \cdot 0,005 = \frac{6}{900}.$$

За формулою Байєса

$$P(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{P(A)} = \frac{0,02 \cdot \frac{1}{9}}{\frac{6}{900}} = \frac{1}{3}.$$

$$P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A) = \frac{2}{3}$$

Приклад

10 % договорів із портфеля страхової компанії є договори з високим рівнем ризику,а 90%— з низьким рівнем ризику. Число страхових випадків за одним договором протягом року розподілено за законом Пуассона з середнім λ $(p_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ n \geq 0)$. Для договорів з високим рівнем ризику $\lambda = 0,6$, з низьким—$\lambda = 0,1$. Скільки в середньому можна очікувати страхових випадків за договором, який у минулому році привів до одного страхового випадку?

$$H_1 = \{\text{договір має високий рівень ризику}\},$$

$$H_2 = \{\text{договір має низький рівень ризику}\},$$

$$A = \{\text{договір привів до одного страхового випадку у минулому році.}\}$$

Приклад

10 % договорів із портфеля страхової компанії є договори з високим рівнем ризику,а 90%— з низьким рівнем ризику. Число страхових випадків за одним договором протягом року розподілено за законом Пуассона з середнім λ $(p_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \ n \geq 0)$. Для договорів з високим рівнем ризику $\lambda = 0,6$, з низьким—$\lambda = 0,1$. Скільки в середньому можна очікувати страхових випадків за договором, який у минулому році привів до одного страхового випадку?

$$H_1 = \{\text{договір має високий рівень ризику}\},$$

$$H_2 = \{\text{договір має низький рівень ризику}\},$$

$$A = \{\text{договір привів до одного страхового випадку у минулому році.}\}$$

Приклад

10 % договорів із портфеля страхової компанії є договори з високим рівнем ризику,а 90%— з низьким рівнем ризику. Число страхових випадків за одним договором протягом року розподілено за законом Пуассона з середнім λ ($p_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $n \geq 0$). Для договорів з високим рівнем ризику $\lambda = 0,6$, з низьким—$\lambda = 0,1$. Скільки в середньому можна очікувати страхових випадків за договором, який у минулому році привів до одного страхового випадку?

$$H_1 = \{\text{договір має високий рівень ризику}\},$$

$$H_2 = \{\text{договір має низький рівень ризику}\},$$

$$A = \{\text{договір привів до одного страхового випадку у минулому році.}\}$$

За умовою $P(H_1) = 0.1$, $P(H_2) = 0.9$.

$$P(A|H_1) = p_1(0.6) = 0.6e^{-0.6}, \quad P(A|H_2) = p_1(0.1) = 0.1e^{-0.1}.$$

Використовуючи формулу Байєса, обчислимо апостеріорну ймовірність того, що договір має високий ступінь ризику:

$$P(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} =$$

$$\frac{0.1e^{-0.6}0.6}{0.1e^{-0.6}0.6 + 0.9e^{-0.1}0.1} \approx 0.29.$$

За умови, що договір має високий рівень ризику, очікуване (середнє) число страхових випадків у наступному році дорівнює 0.6.

За умовою $P(H_1) = 0.1$, $P(H_2) = 0.9$.

$$P(A|H_1) = p_1(0.6) = 0.6e^{-0.6}, \quad P(A|H_2) = p_1(0.1) = 0.1e^{-0.1}.$$

Використовуючи формулу Байєса, обчислимо апостеріорну ймовірність того, що договір має високий ступінь ризику:

$$P(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} =$$

$$\frac{0.1e^{-0.6}0.6}{0.1e^{-0.6}0.6 + 0.9e^{-0.1}0.1} \approx 0.29.$$

За умови, що договір має високий рівень ризику, очікуване (середнє) число страхових випадків у наступному році дорівнює 0.6.

За умовою $P(H_1) = 0.1$, $P(H_2) = 0.9$.

$$P(A|H_1) = p_1(0.6) = 0.6e^{-0.6}, \quad P(A|H_2) = p_1(0.1) = 0.1e^{-0.1}.$$

Використовуючи формулу Байєса, обчислимо апостеріорну ймовірність того, що договір має високий ступінь ризику:

$$P(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} =$$

$$\frac{0.1e^{-0.6}0.6}{0.1e^{-0.6}0.6 + 0.9e^{-0.1}0.1} \approx 0.29.$$

За умови, що договір має високий рівень ризику, очікуване (середнє) число страхових випадків у наступному році дорівнює 0.6.

Відповідна апостеріорна ймовірність того, що договір має низький ризик:

$$P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A) \approx 1 - 0.29 = 0.71,$$

і тоді середнє число стр. випадків у наступному році дорівнює 0.1. Тому очікуване число страхових випадків за договором, який у минулому році привів до одного страхового випадку, становить

$$0.6 \cdot 0.29 + 0.1 \cdot 0.71 = 0.245.$$

ПИТАННЯ?