Числення висловлювань

Поняття формули

Тут розглядається аксіоматична логічна система, яка адекватна алгебрі висловлювань в тому розумінні, що дозволяє іншими (*синтаксичними*) методами розв’язувати проблему загальнозначимості логічних формул на відміну від так званих *семантичних* методів алгебри висловлювань.

Систему цю будемо називати *численням висловлювань* (ЧВ).

Визначення всякого числення містить:

1. Визначення символів числення.

2. Визначення формул числення, що є скінченими конфігураціями символів.

3. Визначення вивідних формул.

Символами ЧВ є символи наступних категорій:

а) Малі латинські букви з індексами і без них – a, b, …, x, y, z, a_1, … . f. Ці символи називаються *змінними висловлюваннями*.

b) Символи $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, які називаються *логічними зв'язками*.

c) Символи (,), які називаються *лівою і правою дужками*.

Формули ЧВ – це скінченні послідовності символів вищеописаних категорій.

Для позначення формул будемо використовувати великі латинські букви з індексами і без них A, B, C, ...

Зрозуміло, що не всяке слово є формулою.

Визначення *формули*.

a) Змінне висловлювання – формула.

b) Якщо A і B – формули, то слова

$$(A \wedge B),$$
$$(A \vee B),$$
$$(A \to B),$$
$$\neg A$$

теж є формулами.

Приклади. Змінні висловлювання a і b є формулами. Тоді $(a \to b)$, $\neg a$, $(\neg a \wedge (a \to b))$ – формули.

Наступні слова $(a \to b$, $a \neg b$, $\wedge a$, $a \to b$ не є формулами.

Визначення *вивідних* формул.

Для визначення *вивідних формул* спочатку визначаються *початкові вивідні формули*, а потім визначаються правила утворення нових формул із початкових. Ці правила називаються *правилами виведення*, а початкові вивідні формули – *аксіомами*.

Вивідні формули ЧВ визначають наступним чином:

(1) початкові вивідні формули (аксіоми) – вивідні формули;

(2) якщо A – вивідна формула і B – формула, одержана з A за допомогою операції підстановки, то B – вивідна;

(3) якщо A та A $\rightarrow$ B – вивідні формули, то формула B, одержана за правилом висновку є вивідною.

Аксіоми числення висловлювань

I

1. $a \to (b \to a)$.
2. $((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$.

II

1. $a \wedge b \to a$.
2. $a \wedge b \to b$.
3. $(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to b \wedge c))$.

III

1. $a \to a \lor b$.
2. $b \to a \lor b$.
3. $(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \lor b) \to c))$.

IV

1. $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$.
2. $a \to \neg\neg a$.
3. $\neg\neg a \to a$.

Аксіоми ЧВ спрощені шляхом домовленості про те, що символ $\wedge$ сильніший за всі останні, $\vee$ сильніший за $\rightarrow$.

В силу цих правил, наприклад, формула

$$(A \wedge B) \vee C$$

може бути записана у вигляді

$$A \wedge B \vee C.$$

Аксіоми ЧВ розділені на чотири групи в залежності від символів логічних зв'язок, що в них входять.

Правила виведення

1. *Правило підстановки*. Нехай A формула, що містить букву a. Тоді, якщо A – вивідна формула ЧВ, то замінюючи в ній входження букви a скрізь на формулу B, ми одержимо вивідну формулу.

2. *Правило висновку* (*modus ponens* (MP)). *Якщо* A і A → B – вивідні формули ЧВ, то B – вивідна формула.

Аксіоми і правила виведення повністю визначають поняття вивідної в ЧВ формули.

Приклади. Покажемо, що формула

$$(a \to b) \to (a \to a)$$

вивідна в ЧВ. Дійсно, виведення даної формули із аксіом має вигляд:

1. $((a \to (b \to a)) \to ((a \to b) \to (a \to a))$ (ПП, I.2).
2. $(a \to b) \to (a \to a)$ (MP 1, I.1).

Аналогічно для формули $\neg\neg\neg a \to \neg a$ маємо:

1. $(a \to \neg\neg a) \to (\neg\neg\neg a \to \neg a)$ (ПП, IV.1)
2. $\neg\neg\neg a \to \neg a$ (MP 1, I.2).

Виведення

Виведенням формули А називається послідовність формул, кожна з яких є вивідною або одержується із попередніх за допомогою правил виведення.

Останньою формулою послідовності є формула А, яка називається вивідною в ЧВ або *теоремою*.

Зрозуміло, що всі формули послідовності є вивідними.

Формули ЧВ можна інтерпретувати як формули АВ. Для цього змінні висловлювання будемо розглядати як змінні АВ, тобто змінні, що приймають значення 0 і 1. Символи логічних операцій визначимо як в АВ.

Теорема 3 (*про коректність* ЧВ). Всяка теорема ЧВ є тавтологією.

Доведення. Неважко перевірити, що всі аксіоми є тавтологіями. Якщо формули $A \to B$ і A є тавтологіями, то формула B також тавтологія. Таким чином всі теореми є тавтологіями.

Зворотнє твердження довести більш складно.

Деякі правила ЧВ

Далі через R будемо позначати довільну вивідну формулу.

Твердження. $b \to R$ вивідна формула.
Доведення.
1. R (вивідна);
2. $R \to (b \to R)$ (ПП, І.1);
3. $(b \to R)$ (MP 1, 2).

Твердження. $a \to a$ – вивідна.

Доведення.

1. $((a\to(b\to a)) \to ((a\to b) \to (a\to a))$ (ПП, I.2);
2. $(a\to b) \to (a\to a)$ (MP 1, I.1);
3. $(a\to R) \to (a\to a)$ (ПП 2);
4. $(a\to R)$
5. $(a\to a)$ (MP 3, 4).

Існують інші способи доведення цього твердження.

Наприклад,

1. $(d\to((d\to d)\to d)) \to ((d\to(d\to d)) \to (d\to d))$ (ПП I.2);
2. $d\to((d\to d)\to d)$ (ПП I.1);
3. $(d\to(d\to d)) \to (d\to d)$ (MP 1,2);
4. $(d\to(d\to d))$ (ПП I.1);
5. $(d\to d)$ (MP 3,4).

Нехай Г – деяка множина формул.

Вивідні з Г формули ЧВ визначають наступним чином:

(1) якщо A формула з Г, то A – вивідна з Г формула;

(2) якщо A вивідна формула, то A – вивідна з Г формула;

(3) якщо A та $A \to B$ – вивідні з Г формули, то формула B, одержана за правилом висновку є вивідною з Г формулою.

Df. *Виведенням* формули A із Г називається скінченна послідовність формул, кожна з яких є вивідною з Г формулою, або одержується із попередніх за допомогою правила МП. Останньою формулою послідовності є формула A, яка називається вивідною з Г.

Df. Якщо формула A *вивідна із* Г, то в цьому випадку пишуть $Г \vdash A$.

Якщо Г пуста, то пишуть $\vdash A$ і говорять, що A вивідна в ЧВ.

Теорема (*про дедукцію*). Нехай Γ – множина формул, A і B - формули. Якщо Γ, A $\vdash$ B, то $\Gamma \vdash A\to B$.

Доведення. Нам потрібно побудувати виведення формули $A\to B$ із Γ. Нехай C_1, C_2, ..., C_n – виведення формули $B = C_n$ із $\Gamma\cup\{A\}$. Перетворимо це виведення в наступну послідовність формул:

$$(A\to C_1),\ (A\to C_2),\ \ldots,\ (A\to C_n).$$

Ця послідовність закінчується формулою

$$(A\to B).$$

Перебудуємо цю послідовність (рухаючись зліва направо і додаючи деякі формули) у виведення формули ($A \to B$).

Нехай ми підійшли до формули ($A \to C_i$). За припущенням, формула C_i або співпадає з A, або належить Г, або є вивідною, або одержується із двох попередніх за правилом МР.
Розглянемо всі ці випадки по черзі.

(1) Якщо C_i є A, то формула має вигляд $A \to A$. Вона вивідна. Додамо перед нею її виведення.

(2) Нехай C_i належить Г. Тоді ми вставляємо формули C_i і $C_i \to (A \to C_i)$. Застосування правила МР до цих формул дає формулу $(A \to C_i)$.

(3) Ті ж формули можна додати, якщо C_i є вивідною формулою ЧВ.

(4) Зрозуміло, що формула C_1 або співпадає з А, або належить Г, або є вивідною. Тому, формула $A \to C_1$ є вивідною з Г. Теж саме стосується формули C_2. Нехай, нарешті, формула C_3 одержується із двох попередніх C_1 та C_2 за правилом МР. Це означає, що попередніми були формули C_1 і $C_2 = C_1 \to C_3$.

Тоді в новій послідовності (з формулою А) вже будуть формули

$(A \to C_1)$ і $(A \to (C_1 \to C_3))$.

Ці формули є вивідними із Г. Дійсно, маємо послідовності:

C_1, $C_1 \to (A \to C_1)$, $A \to C_1$;

$C_1 \to C_3$, $(C_1 \to C_3) \to (A \to (C_1 \to C_3))$, $A \to (C_1 \to C_3)$,

які є виведенням цих формул з Г.

Тому ми можемо дописати до послідовності

C_1, $C_1 \to (A \to C_1)$, $A \to C_1$, $C_1 \to C_3$, $(C_1 \to C_3) \to (A \to (C_1 \to C_3))$, $A \to (C_1 \to C_3)$,

формули

$((A \to (C_1 \to C_3)) \to ((A \to C_1) \to (A \to C_3))$ (ПП);

$((A \to C_1) \to (A \to C_3))$ (МР);

$(A \to C_3)$ (МР).

Отже, формула $A \to C_3$ є вивідною з Г. Продовжуючи так далі, одержимо, що формула $A \to C_n$ є вивідною з Г. Теорема доведена.

Деякі твердження і правила ЧВ

Твердження 1.

$$\vdash (a\to b)\to((b\to c)\to(a\to c)).$$

Доведення. Розглянемо формули $(a\to b)$, $(b\to c)$ і a. Із цих формул за допомогою правила МР можна вивести формулу c. Дійсно:

1. $(a\to b)$ (формула);
2. $(b\to c)$ (формула);
3. a (формула);
4. b (МР 1,3);
5. c (МР 2,4).

За теоремою дедукції формула

$$(a\to b)\to((b\to c)\to(a\to c))$$ - вивідна.

Правило силогізму (транзитивності)

Зробимо підстановку в останню формулу: замінюємо a формулою A, b – формулою B, c – формулою C. Одержимо вивідну формулу

$$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)).$$

Якщо формули $(A\to B)$ і $(B\to C)$ – вивідні, то за правилом MP формула $(A\to C)$ теж вивідна. Таким чином, одержуємо *правило силогізму*, яке записується так

$$\frac{A\to B, B\to C}{A\to C}$$

Твердження 2.

$$\vdash (a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c))$$

Доведення. Розглянемо формули $a \to (b \to c)$, b і a. Із цих формул за допомогою правила МР можна вивести формулу c.

За теоремою дедукції формула

$$(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) -$$

вивідна. Як і в попередньому випадку, одержуємо *правило перестановки посилань*.

$$\frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$$

Твердження 3.

$$\vdash \succ a \to (b \to a \wedge b).$$

Доведення. Покажемо, що

$$(R \to a) \to ((R \to b) \to (R \to a \wedge b)),\ a,\ b \succ a \wedge b,$$

де R, як і раніше, позначає довільну вивідну формулу. Далі першу формулу в послідовності посилань будемо позначати через U. Формула $a \to (R \to a)$ вивідна. Тому формула $R \to a$ вивідна із формули a, а тим більше із формул U, a, b. Таким чином будемо мати:

$$U,\ a,\ b \vdash R \to a.$$

Аналогічно одержимо

$$U, a, b \vdash R \to b.$$

Із U за допомогою правила MP можна вивести формулу $a \wedge b$. Тому

$$U, a, b \vdash a \wedge b.$$

Звідси за теоремою дедукції будемо мати

$$\vdash U \to (a \to (b \to a \wedge b)).$$

Але U – вивідна формула. Її можна одержати за допомогою ПП в аксіому II.3. За правилом MP одержуємо

$$\vdash a \to (b \to a \wedge b).$$

З цього твердження випливає правило:

$$\frac{A, B}{A \wedge B}$$

Обернене правило

$$\frac{A \wedge B}{A, B}$$

випливає із аксіом. Із цих двох правил випливає наступне правило:

$$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}$$

Твердження 4.

$$\text{a) } \vdash (a\to(b\to c))\to(a\wedge b\to c),$$

$$\text{b) } \vdash (a\wedge b\to c)\to(a\to(b\to c)).$$

Доведення. Доведемо пункт a). Маємо

$$a\to(b\to c),\ a\wedge b \succ c.$$

Дійсно, формули

$$a\wedge b\to a \text{ і } a\wedge b\to b$$

є аксіомами. Тому формули a і b виводяться із формул

$$a\to(b\to c) \text{ і } a\wedge b.$$

За правилом MP із формул a, b, $a \to (b \to c)$ одержуємо, що c виводиться із формул

$$a \to (b \to c) \text{ і } a \wedge b.$$

Звідси, за теоремою дедукції одержуємо доведення пункту a).

Для доведення пункту b) покажемо, що справедливе співвідношення

$$a \wedge b \to c,\ a,\ b \vdash c.$$

За теоремою 3 маємо

$$\vdash a \to (b \to a \wedge b).$$

Звідси випливає, що формула $a \wedge b$ виводиться з формул

$$a \wedge b \to c,\ a,\ b.$$

Тоді і c виводиться з цих формул. Далі, за теоремою дедукції одержуємо доведення пункту b).

З цієї теореми випливають два правила:

Перше називається правилом *з'єднання посилань*, друге – *роз'єднання посилань*.

$$\frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C} \qquad \frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)}$$

Тепер ми можемо довести

Теорема (*про повноту*). Всяка тавтологія вивідна в численні висловлювань.

Ідея доведення. Нехай A – довільна формула, що містить змінні p, q, r. Припустимо, що значення A рівне 1, коли всі три змінні приймають значення 1. Тоді, як покажемо далі, $p, q, r \vdash A$.

Взагалі кожному набору значень змінних для формули A відповідає твердження про виведення.

Наприклад, якщо значення A рівне 0 на наборі 0, 0, 1 значень змінних, то

$$\neg p, \neg q, r \vdash \neg A.$$

Якщо формула A є тавтологією, то тоді виявляється, що вона буде вивідною із всіх можливих інтерпретацій (поданих у вигляді множин атомів).

Якщо тепер $p, q, \neg r \vdash A$ і $p, q, r \vdash A$, то можна одержати $p, q, (r \vee \neg r) \vdash A$. Дійсно, $p, q \vdash \neg r \to A$ і $p, q \vdash r \to A$ за теоремою дедукції.

Із аксіоми III.3 одержуємо

$$\vdash (r \to A) \to ((\neg r \to A) \to (r \lor \neg r \to A)).$$

За правилом висновку

$$p, q \vdash r \lor \neg r \to A,$$

тобто,

$$p, q, r \lor \neg r \vdash A.$$

Оскільки $\vdash r \lor \neg r$, то $p, q \vdash A$.

Далі ми приведемо ці міркування більш детально. Але спочатку

Лема. Для довільних формул P і Q

$P, Q \vdash (P \wedge Q)$; $P, Q \vdash (P \vee Q)$;

$P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$; $P, \neg Q \vdash (P \vee Q)$;

$\neg P, Q \vdash \neg(P \wedge Q)$; $\neg P, Q \vdash (P \vee Q)$;

$\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$; $\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$;

$P, Q \vdash (P \rightarrow Q)$; $P \vdash \neg(\neg P)$;

$P, \neg Q \vdash \neg(P \rightarrow Q)$; $\neg P \vdash \neg P$.

$\neg P, Q \vdash (P \rightarrow Q)$;

$\neg P, \neg Q \vdash (P \rightarrow Q)$;

Доведення. Наприклад, для формули P,Q $\vdash$ $(P\wedge Q)$ доведення одержуємо за правилом

$$\frac{A, B}{A\wedge B}$$

Для формули $\neg P, Q \vdash \neg(P\wedge Q)$ із аксіоми IV.1 маємо

$$\vdash ((P\wedge Q) \to P) \to (\neg P\to\neg(P\wedge Q)).$$

Але $\vdash (P\wedge Q) \to P$ (аксіома II.1), отже за правилом висновку $\vdash (\neg P\to\neg(P\wedge Q))$. Тому,

$$\neg P \vdash \neg(P\wedge Q).$$

Для формули $P, \neg Q \vdash (P \vee Q)$ із III.1 одержуємо $\vdash P \rightarrow (P \vee Q)$. Отже, $P \vdash (P \vee Q)$, а значить, $P, \neg Q \vdash (P \vee Q)$.

Для формули $P, Q \vdash (P \rightarrow Q)$, що стосується імплікації маємо за аксіомою I.1

$$\vdash Q \rightarrow (P \rightarrow Q).$$

Отже, $Q \vdash (P \rightarrow Q)$.

Щодо формул із запереченням, то, наприклад, перша з них одержується з аксіоми IV.2, друга – з теореми $\succ A \rightarrow A$.

Лема. Якщо A – довільна формула із змінних $p_1, \ldots, p_n$, то для кожної інтерпретації I (множина атомів) справедливе твердження

$$p'_1, \ldots, p'_n \vdash A,$$

де $p'_i = p_i$ або $p'_i = \neg p_i$.

Лема доводиться індукцією за побудовою формули A і використанням попередньої леми.

Далі використовується правило виключення посилок, а саме:

Розглядаються інтерпретації, які відрізняються в позиції p_1 (в одній інтерпретації маємо p_1, в іншій $\neg p_1$). Ці два посилання міняємо на $(p_1 \vee \neg p_1)$, яку виключаємо.

Зробивши так для всіх пар, одержимо 2^{n-1} виведень, в лівих частинах яких нема p_1.

Повторюємо цей процес з посиланнями p_2 і $\neg p_2$ і т. д. В кінці кінців ми одержимо, що формула A є вивідною, як і стверджує теорема про повноту.

Несуперечливість ЧВ

Проблема *несуперечливості* є однією із найважливіших проблем математичної логіки.

Df. Логічне числення називається *несуперечливим*, якщо в ньому не виводяться ніякі дві формули, із яких одна є запереченням іншої.

Іншими словами, несуперечливе числення – це таке числення, що для довільної формули A, ніколи формули A і ¬A не можуть одночасно виводитись із аксіом числення.

Проблема несуперечливості полягає в наступному: є дане числення суперечливим чи ні?

Якщо в численні виводяться формули A і ¬A, то таке числення називається *суперечливим*.

В такому численні всі формули вивідні.
Дійсно, якщо, наприклад, формули A і $\neg$A вивідні, то вивідними будуть формули

$$\vdash T \to P \text{ і } \vdash A \wedge \neg A \to T,$$

де T така, що $\vdash \neg T$. Але тоді

$$\vdash A \wedge \neg A \to P.$$

Але якщо A і $\neg$A – вивідні, то в силу правила

$$\frac{A, B}{A \wedge B}$$

$A \wedge \neg A$ теж вивідна, а, отже P – виідна.

Теорема. Числення висловлювань несуперечливе.

Доведення. За теоремою про коректність, всі вивідні формули ЧВ є тавтологіями АВ. Звідси, якщо формула А вивідна в ЧВ, то формула $\neg$A не може бути вивідною, так як вона є тотожньо фальшивою формулою .

Незалежність аксіом ЧВ

Для всякого числення, в тому числі для ЧВ виникає питання про *незалежність* його аксіом. Питання ставиться наступним чином: *чи можна якусь аксіому вивести з останніх, застосовуючи правила виведення*?

Якщо це можна зробити, то її можна вилучити із списку аксіом, при цьому числення не зміниться.

Df. Аксіома, яка не виводиться з інших, називається *незалежною* від цих аксіом, а система аксіом, в якій жодна аксіома не виводиться з інших, називається *незалежною системою аксіом*.

Ясно, що залежна система аксіом в якомусь розумінні менш досконала, ніж незалежна, так як містить лишні аксіоми.

Теорема. Система аксіом ЧВ є незалежною.

Як показати, що система аксіом ЧВ незалежна?

Щодо питання про незалежність окремої аксіоми В ЧВ розглядаються інтерпретації, які приписують змінним висловлюванням значення із скінченної множини значень a, b, … , а символи логічних операцій $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ визначаються наступним чином:

1. Всі аксіоми, крім аксіоми В, при всіх значеннях змінних приймають значення а.

2. Кожна формула, вивідна із сукупності аксіом, відмінних від В, приймає значення а при всіх значеннях змінних висловлювань.

3. Аксіома В приймає значення відмінне від а при деяких значеннях змінних висловлювань.

Зрозуміло, що якщо така інтерпретація існує, то аксіома В є незалежною від інших аксіом, так як у випадку, коли В вивідна, то вона б мала значення а при всіх можливих інтерпретаціях.

Для прикладу, доведемо *незалежність* аксіоми II.1. Для цього змінним висловлюванням будемо приписувати два значення 0 і 1. Символи логічних операцій, крім кон’юнкції визначимо, як в АВ. Випишемо цю інтерпретацію детально:

$$1\to1=1,\ 0\to0=1,\ 0\to1=1,\ 1\to0=0,$$
$$1\vee1=1,\ 1\vee0=1,\ 0\vee1=1,\ 0\vee0=0,$$
$$\neg0=1,\ \neg1=0.$$

Операцію кон'юнкції визначимо умовою $A \wedge B = B$.

Покажемо, що тоді всі формули I-IV, крім II.1 приймають значення 1 при всіх значеннях змінних. В формули груп I, III, IV кон'юнкція не входить, а інші операції визначені як в АВ. Так як в АВ ці формули – тавтології, то в нашій інтерпретації вони приймають значення 1 при всіх значеннях змінних.

Щодо формул групи II, то формула II.2 завжди приймає значення 1, так як в нашій інтерпретації вона рівносильна формулі $B \rightarrow B$.

Формула II.3 рівносильна формулі

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

яка є тавтологією АВ, а, отже, приймає значення 1.

Але формула II.1 не є тавтологією. Справді, при $A=0$ і $B=1$ вона прийме вигляд $0 \wedge 1 \rightarrow 0$.

За визначенням операції $\wedge$, $0 \wedge 1 = 1$. Тому наша формула приймає вигляд $1 \to 0$. Значення цієї формули 0.

Тепер залишилось показати, що формула, яка одержується за допомогою правил виведення із тавтологій є тавтологією.

Для правила *підстановки* це очевидно.

Правило висновку. Якщо формули A і $A \to B$ тавтології, то $A \to B = 1 \to B$. Формула B не може приймати значення 0, так як при відповідній підстановці $1 \to B = 1 \to 0 = 0$.

Інші аксіоматичні системи

Аксіоматична система Россера

Df. *Алфавіт* - a, b, …, x, y, z, a_1, … . f.

Символи логічних операцій - $\wedge$, $\neg$.

(A$\to$B це скорочення формули $\neg$(A$\wedge\neg$B)).

Аксіоми:

R1) $a \to (a \wedge a)$;

R2) $(a \wedge b) \to a$;

R3) $(a \to b) \to (\neg(b \wedge c) \to \neg(c \wedge a))$.

Правила виведення. Правило *підстановки* і правило *висновку*.

Аксіоматична система Гільберта-Аккермана

Df. *Алфавіт* - a, b, …, x, y, z, a_1, … . f. .

Символи логічних операцій - $\vee$, $\neg$.

(A$\rightarrow$B це скорочення формули $\neg A \vee$ B).

Аксіоми:

HA1) $(a \vee a) \rightarrow a$;

HA2) $a \rightarrow (a \vee b)$;

HA3) $(a \vee a) \rightarrow (b \vee a)$;

HA4) $(b \rightarrow c) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow (a \vee c))$.

Правила виведення. Правило *підстановки* і правило *висновку*.

Інтуїционістська логіка

Для "формалізації" АВ, як уже говорилось, можна розглядати й інші системи аксіом. Наприклад, четверту групу аксіом можна замінити наступною:

IV.

1. $\neg a \to (a \to b)$.
2. $(a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a)$.
3. $a \lor \neg a$.

Одержана аксіоматична система буде “еквівалентна” приведеній на початку (суть еквівалентності – у справедливості теорем про коректність і повноту).

Обидві аксіоматичні системи називаються *класичними* системами аксіом ЧВ.

Якщо виключити із числа аксіом нової аксіоматичної системи аксіому IV.3, то одержане числення буде називатись *інтуіционістським численням висловлювань*.

Таке числення виникло як спроба формалізувати методи міркувань *інтуїционістської математики*. В такій математиці кожне математичне поняття або твердження мають певний інтуїтивний зміст (на відміну від класичної математики, де використовуються дуже абстрактні поняття, які існують тільки в нашій уяві, дуже часто суперечливій).

Наприклад, коли йдеться про твердження $A \vee B$, то його можна розуміти наступним чином:

1. “Твердження $A \vee B$ справедливе, якщо справедливе твердження A або твердження B”.

2. “Твердження $A \vee B$ справедливе, якщо *показано*, що справедливе твердження A, або *показано*, що справедливе твердження B”.

Перша інтерпретація характерна для *класичної логіки*, друга – для *інтуїционістської*.

Щоб пояснити відмінності цих логік більш наглядно, розглянемо наступну задачу.

Треба показати, що існують ірраціональні числа α і β, для яких α^{β} раціональне число.
Для цього розглядається число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Справедливе наступне твердження:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\textit{раціональне} \vee \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\textit{ірраціональне}.$$

Але це твердження не буде справедливим в інтуїционісткій логіці, оскільки його справедливість залежить від того, чи ми показали раціональність чи ірраціональність числа $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

Приведемо декілька вивідних формул в інтуїционістському численні.

Аксіома IV.1 гарантує, що якщо $\Gamma \vdash A$ і $\Gamma \vdash \neg A$, то $\Gamma \vdash B$ для будь-якого B.

Аксіома IV.2 дає можливість із тверджень $\Gamma, A \vdash B$ і $\Gamma, A \vdash \neg B$ вивести твердження $\Gamma \vdash \neg A$.

Ці аксіоми дозволяють вивести деякі логічні закони для заперечення. Доведемо, наприклад, що

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A).$$

За теоремою дедукції достатньо показати, що

$$(A \to B), \neg B \vdash \neg A.$$

Для цього достатньо вивести із посилань $(A \to B)$, $\neg B$, A яку-небудь формулу і її заперечення (що очевидно: це формули B і $\neg B$).

Щоб вивести формулу $(A \to \neg\neg A)$, треба показати, що з A виводиться $\neg\neg A$. Для цього достатньо із A і $\neg A$ вивести дві суперечливі формули (можна взяти самі формули A і $\neg A$).

З іншого боку, багато законів класичної логіки не можна вивести без закону виключення третього. Такі, наприклад, формули:

$\neg\neg p \to p$,

$p \vee \neg p$,

$\neg p \vee \neg\neg p$,

$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$,

$\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$.

Як це показати?

Теорема. Формула $p \vee \neg p$ не виводиться в інтуїционістській логіці.

Доведення. Розширимо множину істиносних значень для змінних новим значенням ½.

Треба показати, що вивідні формули інтуїционістської логіки завжди приймають значення 1, а формула $p \vee \neg p$ не така і тому не є вивідною.

Щоб визначити значення формул в трьох-значній логіці, необхідно задати таблиці істинності для логічних зв'язок.

Кон'юнкцію визначимо як мінімум із двох значень (наприклад, $0 \wedge ½ = 0$, $1 \wedge ½ = ½$). Диз'юнкцію – як максимум. Для заперечення: $\neg 1=0$, $\neg 0=1$, $\neg ½ = 0$. Для імплікації: $1 \rightarrow x=x$, $0 \rightarrow x=1$, $½ \rightarrow 0=0$, $½ \rightarrow ½=1$, $½ \rightarrow 1=1$.

Назвемо формулу 3-тавтологією, якщо вона приймає значення 1 при будь-яких значеннях змінних з множини $\{1,0, ½\}$.

Тепер треба перевірити, що всі аксіоми і вивідні формули інтуїционістської логіки є 3-тавтологіями. Друге випливає з визначення імплікації. Перше можна перевірити за допомогою істинностних таблиць.

Отже, всяка вивідна формула інтуїционістської логіки є 3-тавтологією.

Але формула $p \vee \neg p$ приймає значення ½ при $p = ½$, і тому не є 3-тавтологією, а, отже, не виводиться.