悬链线

A. 一条铁链

假设一根铁链长度为 L， 由 N 个小段刚杆组成，计算这根铁链在自由悬挂时的形状。

根据假设，

$$L = N\Delta$$

铁链悬挂在 A 点和 B 点，A 点坐标为(0, 0), B 点坐标为(a, 0), 0 < a < L. 于是铁链可以用 N+1 个点的坐标来描述。

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{Op_0} = \overrightarrow{OA} = (0,0)\\
&\overrightarrow{p_0p_1} = \Delta(\cos\theta_1, \sin\theta_1)\\
&\dots\\
&\overrightarrow{p_{i-1}p_i} = \Delta(\cos\theta_i, \sin\theta_i)\\
&\dots\\
&\overrightarrow{p_{N-1}p_N} = \Delta(\cos\theta_N, \sin\theta_N)\\
&\overrightarrow{Op_N} = \overrightarrow{OB} = (a,0)
\end{aligned}$$

于是可以得到第 i 个点的坐标为：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_0p_i} &= \overrightarrow{p_0p_1} + \overrightarrow{p_1p_2} + \dots + \overrightarrow{p_{i-1}p_i}\\
&= \sum_{j=1}^{i} \overrightarrow{p_{j-1}p_j}\\
&= \sum_{j=1}^{i} \Delta(\cos\theta_j, \sin\theta_j)\\
&= \Delta(\sum_{j=1}^{i}\cos\theta_j, \sum_{j=1}^{i}\sin\theta_j), i = 0, 1, \dots, N
\end{aligned}$$

因为第 N 个点的坐标限制为(a, 0), 所以得到两个限制条件：

$$\sum_{j=1}^{N}\cos\theta_j = \frac{a}{\Delta} < N$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sin\theta_j = 0$$

然后分别算出各个小段的势能。

$$\begin{aligned}E_i &= \lambda\Delta g\frac{1}{2}\left(y_{i-1}+y_i\right)\\ &= \lambda\Delta g\frac{1}{2}\left(\Delta\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j+\Delta\sum_{j=1}^{i}\sin\theta_j\right)\\ &= \lambda\Delta^2 g\left(\frac{1}{2}\sin\theta_i+\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\right), i=1,2,...,N\end{aligned}$$

铁链的总势能是各个小段的势能之和。于是得到总势能为：

$$\begin{aligned}E &= \sum_{i=1}^{N}E_i\\ &= \sum_{i=1}^{N}\lambda\Delta^2 g\left(\frac{1}{2}\sin\theta_i+\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\right)\\ &= \lambda\Delta^2 g\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\right)\end{aligned}$$

然后在两个约束条件下计算总能量的极小值。

$$E=\lambda\Delta^2 g\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\right)$$

$$+\epsilon_1\left(\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i-\frac{a}{\Delta}\right)+\epsilon_2\left(\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial\theta_k} &= \lambda\Delta^2 g\left(\frac{1}{2}\cos\theta_k+\sum_{i=k+1}^{N}\cos\theta_k\right)-\epsilon_1\sin\theta_k+\epsilon_2\cos\theta_k\\ &= \left(\left(\frac{1}{2}+N-k\right)\lambda\Delta^2 g+\epsilon_2\right)\cos\theta_k-\epsilon_1\sin\theta_k\\ &= 0, k=1,2,...,N\end{aligned}$$

所以平衡态下的角度应该为：

$$\begin{aligned}\tan\theta_k &= \frac{\left(\frac{1}{2}+N-k\right)\lambda\Delta^2 g+\epsilon_2}{\epsilon_1}\\ &= \left(\frac{1}{2}+N-k\right)\alpha+\beta, k=1,2,...,N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{where,}\\ &\alpha=\frac{\lambda\Delta^2 g}{\epsilon_1}\\ &\beta=\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\end{aligned}$$

代入到两个约束条件可以解出两个未知数 alpha 和 beta.

$$f(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{2}+N-k\right)\alpha+\beta\right)^2}}-\frac{a}{\Delta}=0$$

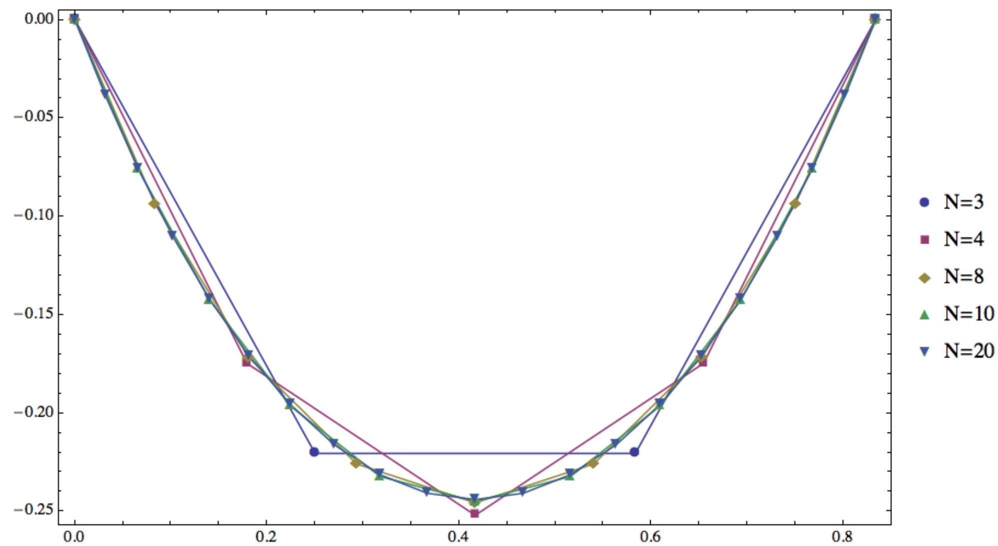
$$g(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(\frac{1}{2}+N-k\right)\alpha+\beta}{\sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{2}+N-k\right)\alpha+\beta\right)^2}}=0$$

目测这两个求和很难算出解析解，于是为了算出这两个方程的解，就要借助于二维情况下的牛顿求根公式。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

经过多次迭代（通常情况下十次足矣）可以算出这个方程组的两个根。知道了 alpha 和 beta 的值就可以算出所有的角度，进而求出所有点的坐标。

用 c++计算得到 L=1, a = 5/6 时对应不同 N 所得到的铁链构型。如图：



B. 一条重绳索

已知如果是一条柔软的重绳索，那么两端悬挂时候的平衡态曲线应该是一条双曲余弦。在铁链的情况下，如果令 N 趋近于无穷大，那么离散的铁链就可以变为一条重绳索，所以当 N 很大的时候 c++算出来的结果应该趋近于一条双曲余弦。

重绳索的总能量为：

$$\begin{aligned} E &= \lambda g \int_0^a y\sqrt{1+y'^2}dx + \epsilon\left(\frac{1}{L}\int_0^a \sqrt{1+y'^2}dx - 1\right) \\ &= \int_0^a \left(\lambda g y\sqrt{1+y'^2} + \frac{\epsilon}{L}\sqrt{1+y'^2} - \frac{\epsilon}{a}\right)dx \\ &= \int_0^a F(y,y')dx \end{aligned}$$

得到平衡态下的解析解为：

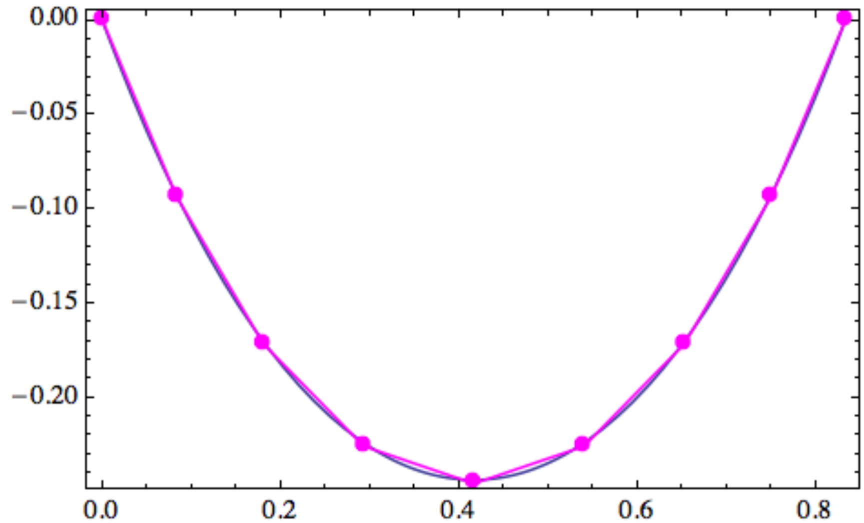
$$y = \frac{1}{2}c\left(\exp\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{c}\right) + \exp\left(-\frac{x-\frac{a}{2}}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}c\left(e^{-\frac{a}{2c}} + e^{\frac{a}{2c}}\right)$$

因为绳索的总长度不变，所以有限制条件：

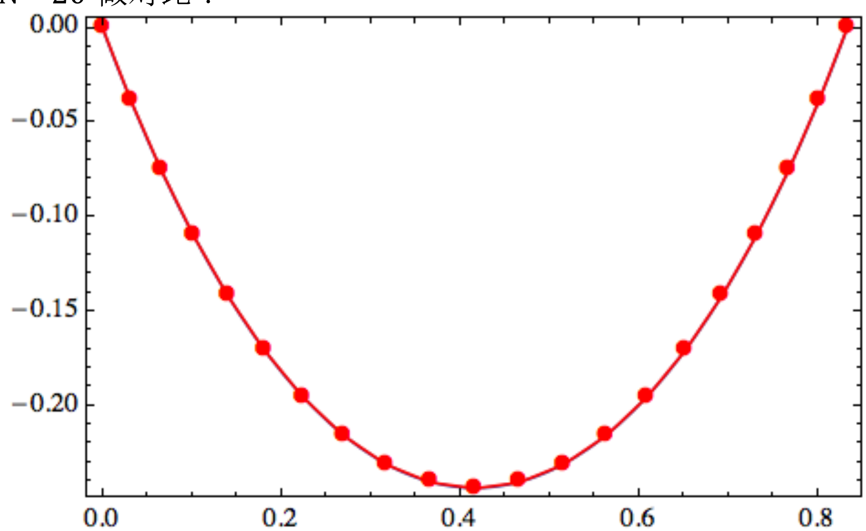
$$2c\sinh\left(\frac{a}{2c}\right) = L$$

令 L = 1, a = 5/6, 可以得到 c 的数值解为 c = 0.3913.

解析解与 N = 8 的情况做对比：



解析解与 N = 20 做对比：



由此可见，N = 20 的时候一根重绳索跟一根铁链已经非常接近了。