Cálculo diferencial e integral

Respostas dos exercícios

Thiago de Paula Oliveira

March 28, 2018

1 Pré-Cálculo: Funções e modelos

1.

(a) $h(x) = \dfrac{3x^3 + 5x^2 + 2x + 2}{x + 1}$, para $x \neq -1$

(b) $h(x) = \dfrac{x\,(3x + 2)}{x + 1}$, para $x \neq -1$

(c) $h(x) = \dfrac{2x + 5}{(x + 1)^2}$, para $x \neq -1$

(d) $h(x) = \dfrac{x\,(3x + 2)}{(x + 1)^2}$, para $x \neq -1$

(e) $h(x) = \dfrac{3x^2 + 3x + 2}{(x + 1)\,(3x^2 + 2x + 1)}$, para $x \neq -1$

(f) $h(x) = \dfrac{1}{x\,(3x + 2) + 1}$

2. Verificar pelo Wolfram|Alpha. Site: https://www.wolframalpha.com.

3.

(a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{CD}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(b) $\mathrm{D}(h) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$, $\mathrm{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 2\}$, $\mathrm{CD}(h) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(c) $\mathrm{D}(f) = \{u \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq x\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(d) $\mathrm{D}(f) = \{z \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

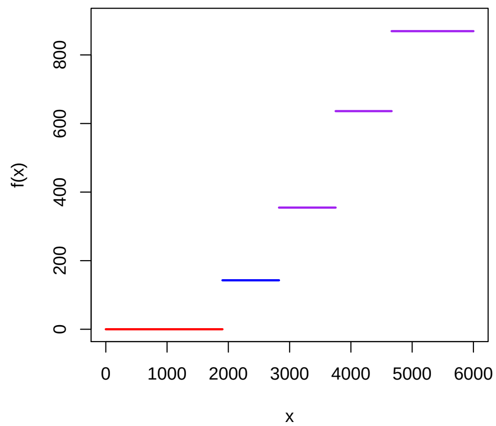
(e) $\mathrm{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} | y \geq \dfrac{8\sqrt{2}}{3^{3/4}} \right\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(f) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1 \cup y > 6\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(g) $\mathrm{D}(g) = \left\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \sqrt{2} \cup x > \sqrt{2}\right\}$, $\mathrm{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{CD}(g) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(h) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \leq \frac{13}{3} \cup y = 9\right\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

4. (a)



(b) A função é dada por $f(x) = 263.87x$ e em 2 anos, considerando a mesma alíquota, a pessoa pagará R$ 6.332,88 retido na fonte. O gráfico deve ser feito no Wolfram|Alpha.

(c) Incremento salarial no período de 1 ano será dado pela função $f(x) = 100x$, logo $f(12) = 100 \times 12 = 1.200$. Já a contribuição ao estado será dada pela função:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 72,5x.$$

Dessa forma, $h(12) = 72,5 \times 12 = 870,00$. Portanto, ela receberá 1.200 reais e pagará 870,00 reais de impostos no período de um ano.

5.

(a) Função par	(b) Função ímpar	(c) Função par
(d) Função par	(e) Função par	(f) Função ímpar

6. (a) Verificar pelo Wolfram|Alpha.
   (b) $m = \frac{5}{9}$ e intercepto $-\frac{160}{9}$

7. (a) $t \approx 9.57$
   (b) $f(5.3) \approx 101.21$
   (c) Verificar pelo Wolfram|Alpha.

8.

(a) $f \circ g(x) = (x+5)^5$ (b) $f \circ g(x) = \log(x+4)$ (c) $f \circ g(x) = |e^{x^3}|$

(d) $f \circ g(x) = \sqrt{x^2}$ (e) $f \circ g(x) = \cos\, 2x$ (f) $f \circ g(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$

9. (a) 37 (b) $\log 2 + 4$ (c) e^6 (d) 2 (e) $2\cos 2$ (f) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}$

10. (a) $\dfrac{x^2+2}{x^2}$ (b) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + 3$ (c) $\dfrac{2-\cos(2x)}{2\,\operatorname{sen} x + 1}$

11.

(a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$ (b) $\mathrm{D}(f) = \{v \in \mathbb{R} | v \neq 0\}$ (c) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

(d) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$ (e) $\mathrm{D}(f) = \{t \in \mathbb{R} | -1 \leq t \leq 1\}$ (f) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

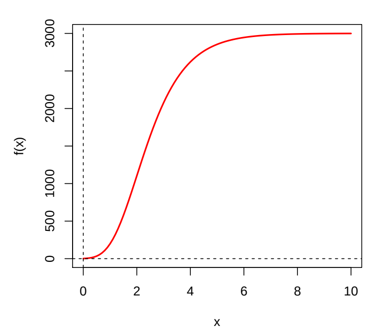
12.

(a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ (b) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

(c) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \cup x > 0\}$

13. (a) $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{|x|+1}$; (b) $f(x) = \log(x) + x$; ; (c) $f(x) = e^{x^2}$; (d) $f(x) = \sqrt{x}$

14. (a) Supondo $t \in [0, 10]$, temos que o gráfico de $f(t)$ é dado por:



(b) 1.13008 unidades de tempo.

15. $\mathrm{Dm}(f) = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq b \ \forall \ 0 < a < b\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq h\}$. A função é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{a}x, & \text{para} \quad 0 \leq x < a \\ \dfrac{h}{a-b}(x-b), & \text{para} \quad a \leq x \leq b \end{cases}$$

16.
(a) $f^{-1}(x) = \ln x$ (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(c) Para determinar a inversa dessa função deve-se restringir o domínio da mesma em duas partes, que são $x \in [-1, \infty)$ e $(-\infty, -1)$. Assim, temos que $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$, para $\forall \ x \geq -1$ ou $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 1$, para $\forall \ x \geq -1$.

(d) $f^{-1}(x) = x^2, \forall \ x \in \mathbb{R}_+$ (e) $f^{-1}(x) = \dfrac{bx - a}{x+1}$

(f) Para determinar a inversa dessa função deve-se restringir o domínio da mesma em $x \in [0, \pi]$. Assim, temos que $f^{-1}(x) = \arccos(x)$.

17. Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule e simplique o quociente $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

18. Prove que $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sec \alpha$.

19. Prove que $\dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{sen} 2\alpha$.

20. Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.

21. Determine as coordenadas do vértice da equação $x^2 - 3(x+y) = 1$

22. Determine o domínio e imagem da equação $y^2 = -x^2 + 4$

23. Determine a monotonicidade das seguintes funções
(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x + 3$
(d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (e) $f(x) = \log(2x)$ (f) $f(x) = e^{-x^2}$

24. Um veículo teve seu pneu calibrado para 35 libras e, em seguida, o motorista se deslocou do ponto A ao ponto B em 9h a uma velocidade média de 100 km por hora. Suponha que a temperatura do pneu aumenta quadraticamente em função da distância percorrida até aproximadamente 100 graus Celcius. Então a temperatura se mantêm constante até a distância percorrida em 8h (Figura **??**). Na última hora, suponha que a temperatura decai quadraticamente em função da distância. Determine uma função que descreva o aumento da temperatura em função da distância (em km).

25. Simplifique as funções a seguir

(a) $f(x) = 4\,\mathrm{sen}^2\,x + 4\cos^2 x$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x + 16}{8x + 32}$

(c)$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1 \forall\ x \in [-$

(d) $f(x) = \log(x^2 + 3x) - \log(x)$

(e) $f(x) = \dfrac{e^x e^\pi}{e^{2x}}$

(f) $f(x) = e^{-x^2} e^{x^2+2x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(2x)}{[\cos 2]^{-1}} - \dfrac{\mathrm{sen}\,2}{[\cos(2x)]^{-1}}$

(h) $f(x) = \mathrm{sen}^2\,x\,\mathrm{tg}^{-2}\,x$

(i) $f(x) = x^2 + 4x - 4$

26. Encontre as raízes das funções polinomiais a seguir

(a) $f(x) = x^3 + x^2$

(b) $f(x) = x^2 - 10x - 9$

(c) $f(x) = x^2 + 9$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

(e) $f(x) = cx^2 + 4cx + c^2$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x}$