Cálculo diferencial e integral

Derivadas: parte I

Thiago de Paula Oliveira

13 de Agosto de 2018

1. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(m, f(m))$.

2. Considere que o crescimento de uma cultivar de soja ao longo do tempo pode ser descrito pela função $f(t)$. Qual é o domínio e imagem da funçao? Escreva uma expressão para a velocidade instantânea de crescimento no instante $t = a$ considerando uma função linear. Explique porquê essa função linear não descerve bem o crescimento dessa cultivar. Dê exemplos de possíveis funções que possam ser utilizadas considerando seus conhecimentos de funções e limites.

3. (Stewart, 2010) De acordo com a Lei de Boyle, se a temperatura de um gás confinado for mantida constante, então o produto da pressão P pelo volume V é uma constante. Suponha que, para um certo gás, $PV = 4.000$, P é medido em pascals e V é medido em litros.
   (a) Determine a taxa de variação média de P quando V aumenta de 3 L para 4 L.

   (b) Expresse V como uma função de P e mostre que a taxa de variação instantânea de V em relação a P é inversamente proporcional ao quadrado de P.

4. Determine a derivada de primeira ordem da função $f(x) = x^3 - 2x$ por meio da definição de derivadas. Calcule $f'(2)$ e explique seu significado.

5. Considere que $f(x) = \sqrt{2x-5}$, use a definição de derivadas para determinar $f'(x)$. Além disso, determine o domínio e imagem de f e f'.

6. (Stewart, 2010) Determine a derivada das seguintes funções:

$(a)\ f(x) = 186,5$	$(b)\ f(x) = \sqrt{30}$	$(c)\ f(x) = 5x - 1$
$(d)\ f(x) = -4x^{10}$	$(e)\ f(x) = x^3 - 4x + 6$	$(f)\ f(x) = 1,4x - 2,5x^2 + 6,7$
$(g)\ f(x) = x^2(1-2x)$	$(h)\ f(x) = (x-2)(2x+3)$	$(i)\ h(x) = x^{-2/5}$
$(j)\ h(y) = cy^{-6}$	$(k)\ S(u) = -\dfrac{12}{u^5}$	$(l)\ f(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$
$(m)\ f(p) = \sqrt{p} - p$	$(n)\ f(x) = \sqrt{x}(x-1)$	$(o)\ f(x) = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$
$(p)\ f(R) = 4\pi R^2$	$(q)\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$	$(r)\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}$
$(s)\ f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$	$(t)\ f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{3x}$	$(u)\ f(x) = x^{2,4} + e^{2,4}$
$(v)\ f(x) = e^x + x^e$	$(x)\ f(x) = \left(x + x^{-1}\right)^3$	$(z)\ f(x) = ae^x + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$

7. Determine uma equação para a reta tangente à curva no ponto dado.

$(a)\ f(x) = x^3 + 2x - 2, \quad (1,2)$	$(b)\ f(x) = x^4 + e^x, \quad (0,2)$	$(c)\ f(x) = x^2 - x^4, \quad (1,0)$
$(d)\ f(x) = \operatorname{sen} x, \quad (1, \pi/2)$	$(e)\ f(x) = x - \sqrt{x}, \quad (1,0)$	$(f)\ f(x) = x^6 - x^5 - x + 1, \quad (3,1)$

8. (Stewart, 2010) A equação de movimento de uma partícula é $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, em que s está em metros e t, em segundos. Determine
   (a) a velocidade e a aceleração como funções de t
   (b) a aceleração depois de 2 s e
   (c) a aceleração quando a velocidade for 0.

9. (Stewart, 2010) Mostre que a curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ não tem reta tangente com inclinação 2.

10. (Stewart, 2010) Determine a n-ésima derivada de cada função calculando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

$$(a)\ f(x) = x^n \qquad (b)\ f(x) = \frac{1}{x}$$

11. Determine um polinômio de segundo grau P tal que $P(1) = 3$, $P'(1) = 2$ e $P''(1) = 1$.

12. Determine a parábola com equação $y = ax^2 + bx + c$ cuja reta tangente em (0, 0) tem equação $y = 2x + 1$.

13. (Stewart, 2010) Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, determine sua equação. Em caso negativo, explique por que não.

14. (Morettin, Hazzan & Bussab, 2014) Obtenha a derivada de cada função a seguir:

$(a)\ f(x) = 10$	$(b)\ f(x) = x^5$	$(c)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$
$(d)\ f(x) = x^2 + x^3$	$(e)\ f(x) = 10x^3 + 5x^2$	$(f)\ f(x) = 2x + 1$
$(g)\ f(x) = 3x^2 - 6x - 10$	$(h)\ f(u) = 5u^3 - 2u^2 + 6u + 7$	$(i)\ f(x) = 3\ln x + 5$
$(j)\ f(x) = 10\ln x - 3x + 6$	$(l)\ f(x) = x^3 - x^{-1} - 4$	$(k)\ f(x) = x\ln x$
$(m)\ f(x) = x^3 \ln x$	$(n)\ f(x) = \left(2x^2 - 3x + 5\right)(2x - 1)$	$(o)\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$
$(p)\ f(x) = \dfrac{x}{x-1}$	$(q)\ f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$	$(r)\ f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{5}{x^2}$
$(s)\ f(x) = x^{2/3}$	$(t)\ f(x) = x^{1/3} + x^{1/4}$	$(u)\ f(x) = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} + 10$

15. (Morettin, Hazzan & Bussab, 2014) Obtenha a derivada de cada função a seguir:

(a) $f(x) = (2x-1)^3$

(b) $f(x) = (2x-1)^4$

(c) $f(x) = \left(5x^2-3x+5\right)^6$

(d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1\right)^3$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2-3x-2\right)^3}$

(f) $f(x) = \ln\left(3x^2-2x\right)$

(g) $f(x) = \ln\left(x^2-3x-2\right)^5$

(h) $f(x) = \ln\left(x^2-3x\right)$

(i) $f(x) = 2^x$

(j) $f(x) = 5^x$

(k) $f(x) = e^x + 3^x$

(l) $f(x) = e^{x^2-2x+1}$

(m) $f(x) = 3^{x^2+4}$

(n) $f(x) = e^{x-\frac{1}{x}+1}$

(o) $f(x) = e^x - e^{-x}$

(p) $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(q) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

(r) $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

(s) $f(x) = \left(6x^2+2x+1\right)^{\frac{3}{2}}$

(t) $f(x) = \sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}$

(u) $f(x) = \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

(v) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{3x-2}}$

(x) $f(x) = \ln\sqrt{3x^2+1}$

(z) $f(x) = \dfrac{e}{\pi}e^{ax^2+bx+c}$

16. (Stewart, 2010) Calcule a derivada das seguintes funções

(a) $f(x) = \left(x^3+2x\right)e^x$

(b) $f(x) = \sqrt{x}e^x$

(c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x-1}$

(f) $f(x) = \dfrac{2t}{4+t^2}$

(g) $f(x) = (x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})$

(h) $f(x) = \left(x^3-2x\right)\left(x^{-4}+x^{-2}\right)$

(i) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}\right)\left(x+5x^3\right)$

(j) $f(x) = (1-e^x)(x+e^x)$

(k) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

(l) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+x-2}$

(m) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^4-3x^2+1}$

(n) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

(o) $f(x) = e^x\left(x+x\sqrt{x}\right)$

(p) $f(x) = \dfrac{1}{x+ke^x}$

(q) $f(x) = \dfrac{x^3-2x\sqrt{x}}{x}$

(r) $f(x) = x^{3/2}\left(x+ce^x\right)$

(s) $f(x) = \dfrac{2x}{2+\sqrt{x}}$

(t) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^{1/3}}$

(u) $f(x) = \dfrac{A}{B+Ce^x}$

(v) $f(x) = \dfrac{1-xe^x}{x+e^x}$

(x) $f(x) = \dfrac{x}{x+\frac{c}{x}}$

(z) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

17. Se $f(x) = \left(x^2-2x\right)^{10}$, determine $f'(x)$ e $f''(x)$.

18. Se $f(x) = \left(x^2-1\right)e^x$, determine $f'(x)$ e $f''(x)$.

19. Se $f(x) = \ln x - \dfrac{4}{x}$, determine $f'(1)$ e $f''(1)$.

20. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(1, e)$ para a função $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

21. (Stewart, 2010) Determine a derivada das seguintes funções:

$(a)\ f(x) = 3x^{-2}\cos x$	$(b)\ f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x$	$(c)\ f(x) = \mathrm{sen}\,x + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\,x$
$(d)\ f(x) = 2\sec x - \mathrm{cossec}\,x$	$(e)\ f(x) = x^3\cos x$	$(f)\ f(x) = 4\sec x + \mathrm{tg}\,x$
$(g)\ f(x) = \mathrm{cossec}\,x + e^x\,\mathrm{cotg}\,x$	$(h)\ f(x) = e^x\,(\cos x + cx)$	$(i)\ f(x) = \dfrac{x}{2 - \mathrm{tg}\,x}$
$(j)\ f(x) = \mathrm{sen}\,x\cos x$	$(k)\ f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \sec x}$	$(l)\ f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \mathrm{sen}\,x}$
$(m)\ f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1 + x}$	$(n)\ f(x) = \dfrac{1 - \sec x}{\mathrm{tg}\,x}$	$(o)\ f(x) = \dfrac{x\cos x}{1 - x}$
$(p)\ f(x) = x^2\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{tg}\,x$	$(q)\ f(x) = \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x$	$(r)\ f(x) = \mathrm{sen}\left(x^2 + 2x + 4\right)$
$(s)\ f(x) = \mathrm{tg}\left(x^2 - x^4\right)$	$(t)\ f(x) = \cos(ax + b)$	$(u)\ f(x) = \mathrm{tg}\,(ax + b) - \cos\left(bx^2 + cx + d\right)$

Referências

Morettin, P. A.; Hazzan, S.; Bussab, W. O. **Introdução ao cálculo para administração, economia e contabilidade**. Saraiva: São Paulo, Ed. 1, 2009.
Stewart, J. **Cálculo: volume 1**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 7, 2014.

Respostas de alguns exercícios

6.

(a) $f'(x) = 0$ (c) $f'(x) = 5$ (e) $f'(x) = 3x^2 - 4$

(g) $f'(x) = 2x - 6x^2$ (i) $f'(x) = -\frac{2}{5}x^{-7/5}$ (k) $f'(x) = \frac{60}{x^6}$

(m) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{p}} - 1$ (o) $f'(x) = 3e^x - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}$ (q) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

(s) $f'(x) = \frac{3x^2+4x-3}{2x^{3/2}}$ (u) $f'(x) = 2,4x^{1,4}$ (x) $f'(x) = \frac{3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2}{x^4}$

8. (a) $v(t) = 4t^3 - 6t^2 + 2t - 1$ e $a(t) = 12t^2 - 12t + 2$ (b) $a(2) = 26$ m/s^2 (c) $5,94$ m/s^2

14.

(a) $f'(x) = 0$ (b) $f'(x) = 5x^4$ (c) $f'(x) = x$

(d) $f'(x) = 2x + 3x^2$ (e) $f'(x) = 30x^2 + 10x$ (f) $f'(x) = 2$

(g) $f'(x) = 6x - 6$ (h) $f'(x) = 15u^2 - 4u + 6$ (i) $f'(x) = \frac{3}{x}$

(j) $f'(x) = \frac{10}{x} - 3$ (k) $f'(x) = 3x^2 + x^{-2}$ (l) $f'(x) = \ln x + 1$

(m) $f'(x) = x^2\,(3\ln x + 1)$ (n) $f'(x) = \frac{4x-3}{(2x-1)^{-1}} + 2\left(2x^2 - 3x + 3\right)$ (o) $f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$

(p) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ (q) $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ (r) $f'(x) = -6x^{-4} - 10x^{-3}$

(s) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ (t) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-1/2} + \frac{5}{3}x^{-2/3}$ (u) $f'(x) = \frac{9\sqrt[6]{x}+10}{6x^{2/3}}$

15.

(a) $f'(x) = 6\,(2x-1)^2$ (b) $f'(x) = 8\,(2x-1)^3$

(c) $f'(x) = 6\left(5x^2 - 3x + 5\right)^5 (10x - 3)$ (d) $f'(x) = 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)^2 \left(-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$

(e) $f'(x) = -5\left(x^2 - 3x - 2\right)^{-6} (2x - 3)$ (f) $f'(x) = \frac{6x-2}{3x^2-2x}$

(g) $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+6}$ (h) $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$

(i) $f'(x) = 2^x \ln 2$ (j) $f'(x) = 5^x \ln 5$

(k) $f'(x) = e^x + 3^x \ln 3$ (l) $f'(x) = (2x-2)\,e^{x^2-2x+1}$

(m) $f'(x) = 2x\;3^{x^2-4}\ln 3$ (n) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}e^{x-\frac{1}{x}+1}$

(o) $f'(x) = e^x - e^{-x}$ (p) $f'(x) = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

(q) $f'(x) = (2x+1)^{-1/2}$ (r) $f'(x) = \frac{2}{3}\,(2x+1)^{-2/3}$

(s) $f'(x) = \frac{3}{2}\left(6x^2 + 2x + 1\right)^{1/2} (12x + 2)$ (t) $f'(x) = \frac{1}{2}\,(x+1)^{-1/2} + \frac{\left(x^2-3x+1\right)^{-2/3}}{3(2x-3)^{-1}}$

(u) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}\,(x+1)^{-1/2}$ (v) $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{e^x}\right)^{-1/2} \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x}$

(x) $f'(x) = 3x\left(3x^2 + 1\right)^{-1}$ (z) $f'(x) = \frac{(2ax+b)e^{ax^2+bx+c+1}}{\pi}$

16. $(a)\ f'(x)=e^x\left(x^3+3x^2+2x+2\right)$ $(c)\ f'(x)=(x-2)\,\frac{e^x}{x^3}$

$(e)\ f'(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}$ $(g)\ f'(x)=2x-1$

$(i)\ f'(x)=5+\frac{14}{x^2}+\frac{9}{x^4}$ $(k)\ f'(x)=\frac{x^2\left(3-x^2\right)}{(1-x^2)^2}$

$(m)\ f'(x)=\frac{2x\left(-x^4-4x^2+7\right)}{(x^4-3x^2+1)^2}$ $(o)\ f'(x)=e^x\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{x}-x+x\sqrt{x}\right)$

$(q)\ f'(x)=2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(s)\ f'(x)=\frac{4+x^{1/2}}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}$

$(u)\ f'(x)=-\frac{ACe^x}{(B+Ce^x)^2}$ $(x)\ f'(x)=\frac{2cx}{(x^2+c)^2}$

17. $f'(x)=20\,(x-2)^9\,(x-1)\,x^9$ e $f''(x)=20\,(x-2)^8\,x^8\left(19x^2-38x+18\right)$

18. $f'(x)=e^x\left(x^2+2x-1\right)$ e $f''(x)=e^x\left(x^2+4x+1\right)$

21. $(a)\ f'(x)=-\frac{3(x\operatorname{sen}x)+2\cos x}{x^3}$ $(c)\ f'(x)=\cos x-\frac{\operatorname{cossec}^2 x}{2}$

$(e)\ f'(x)=x^2\,(3\cos x-x\operatorname{sen}x)$ $(g)\ f'(x)=\operatorname{cotg}x\,(e^x-\operatorname{cossec}x)-e^x\operatorname{cossec}^2 x$

$(i)\ f'(x)=\frac{2-\operatorname{tg}x+x\sec^2 x}{(2-\operatorname{tg}x)^2}$ $(k)\ f'(x)=\frac{\operatorname{tg}x\sec x}{(1+\sec x)^2}$

$(m)\ f'(x)=\frac{\operatorname{sen}x+x(1+x)\cos x}{(1+x)^2}$ $(o)\ f'(x)=\frac{(x-1)x\operatorname{sen}x+\cos x}{(1-x)^2}$

$(q)\ f'(x)=0$ $(s)\ f'(x)=\left(2x-4x^3\right)\sec^2\left(x^2-x^4\right)$

$(u)\ f'(x)=a\sec^2(ax+b)+(2bx+c)\operatorname{sen}\left(bx^2+cx+d\right)$