Cálculo diferencial e integral

Limites e continuidade: parte II

Thiago de Paula Oliveira

8 de Agosto de 2018

1. Prove que os seguintes limites não existem.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2+x} \qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{\sqrt{x}-1} \qquad c)\ \lim_{x\to 3}\frac{2x^3}{\sqrt{x+6}-3}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|} \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^3} \qquad f)\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

2. Calcule o valor dos limites das funções a seguir utilizando a definição de limites, a qual é dada por: $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x)-L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x-p| < \delta$.

$$a)\ \lim_{x\to 0} x+2 \qquad b)\ \lim_{x\to -2} x^2+x \qquad c)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to -1} x^3 \qquad e)\ \lim_{x\to 6} x^2-4x+4 \qquad f)\ \lim_{x\to 0} x^3+x^2$$

3. O modelo matemático de Henderson e Pabis é um dos modelos utilizados para predizer o fenômeno de secagem de alimentos, sendo dado por $f(t) = a.e^{-kt}$ em que os valores de $f(t)$ representam a umidade do produto, adimensional; t é tempo de secagem; k é o coeficiente de secagem e a é uma constante qualquer. Calcule o valor do limite dessa função para:

   a) $a = 1$, $k = 2$ e $t \to 5$ b) $a = 2$, $k = -1$ e $t \to 5$

   c) $a = 1$, $k = 2$ e $t \to 10$ d) $a = 2$, $k = -1$ e $t \to 10$

   e) $a = 1$, $k = 2$ e $t \to \infty$ f) $a = 2$, $k = -1$ e $t \to \infty$

   g) Para os casos de a a f quais são as conclusões? Na prática, essas conclusões fazem sentido?

4. Curvas de crescimento são muito utilizadas nas áreas de biologia e ciências agrárias para quantificar, por exemplo, a massa de animais e vegetais e o crescimento populacional de microorganismos. Assim, supondo que o crescimeto populacional de uma determinada bactéria em função do tempo (t) pode ser descrita pela função de Gompertz dada por

$$f(t) = ae^{-e^{(b-ct)}}$$

   (a) Assumindo que $a = 3$, $b = 2$ e $c = 1$. Calcule $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$, $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$

   (b) Qual é a interpretação dos valores desses limites?

5. Quais das seguintes funções são descontínuas? Prove utilizando limites laterais.

$a) f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad b) f(x) = \dfrac{x^2}{|x|-1}$ $\quad c) f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

$d) f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ $\quad e) f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f) f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}$

$g) f(x) = \sec x$ $\quad h) f(x) = \operatorname{cosec} x$ $\quad i) f(x) = \operatorname{tg} x$

$h) f(x) = e^{-x^2}$ $\quad j) f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad k) f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

$$l) f(r) = \begin{cases} \dfrac{x^3+3x}{x^2-2}, & \text{se } 0 < x < \sqrt{2} \cup \sqrt{2} < x < \infty \\ 1, & \text{se } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

6. Utilizando as propriedades de limites mostre que a função $h(x) = 3\sqrt{x-4}$ é contínua à direita no intervalo $x \in [4, \infty)$

7. A força gravitacional que a Terra exerce sobre uma unidade de massa a uma distância d de seu centro é dado por

$$f(d) = \begin{cases} \dfrac{gmd}{r^2}, & \text{se } d < r \\ \dfrac{gm}{d^2}, & \text{se } d \geq r \end{cases}$$

em que g é a constante gravitacional, m é a massa e r é raio da Terra. Pergunta-se: a função $f(d)$ é contínua em d?

8. Seja a função f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$, mostre que existe um valor c tal que $f(c) = 150$.

9. Calcule o valor de a tal que $f(x)$ seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x - 6, & \text{se } x < 4 \\ 2x^3 + ax, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

10. Calcule os valores de a e b tal que $f(x)$ seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x < 3 \\ ax^2 + bx + 3, & \text{se } 3 \leq x < 6 \\ 4x + a - b, & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

11. Prove que as função seno e cosseno são contínuas. Nota: para provar que essas funções são contínuas é preciso mostar que $\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ ou $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Se nós supormos que $h = x - a$, então $x = a + h$. Fazendo $h \to 0$, temos

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a+h)$$

e

$$\lim_{h\to 0} \cos(a+h)\,.$$

12. Calcule o valor dos limites das funções a seguir

$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2$ $\quad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{-x}}$

$d)\ \lim_{x\to-\infty} x^3 e^{\frac{1}{x}}$ $\quad e)\ \lim_{x\to\infty} x^2 - 4x + 4$ $\quad f)\ \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$

$g)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4}$ $\quad h)\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+ax}$ $\quad i)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

$j)\ \lim_{x\to\infty} \cos x e^{-2x}$ $\quad k)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad l)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}e^{x}}{e^{-3x}e^{4x}}$

$m)\ \lim_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$ $\quad n)\ \lim_{x\to 2\pi^-} x \operatorname{cosec} x$ $\quad o)\ \lim_{x\to -2^+} \frac{x-2}{x+2}$

13. Encontre as assíntotas verticais e horizontais, quando existirem, das funções abaixo. Cheque os resultados utilizando o Wolfram|alpha.

$a) f(x) = \frac{3e^x}{e^x - 4}$ $\quad b) f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad c) f(x) = e^{x^2} e^{-x^3}$

$d) f(x) = \log x$ $\quad e) f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ $\quad f) f(x) = \log(x) + \frac{1}{x}$

$g) f(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $\quad h) f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ $\quad i) f(x) = \frac{1}{\log|x|}$

$j) f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 4}$ $\quad k) f(x) = \frac{ax^5 + bx^4}{e^x}$ $\quad l) f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

14. Determine uma função tal que ela possua assíntotas verticais em $x = -2$ e $x = 2$ e assíntota horizontal em $y = 3$.

15. O modelo de crescimento Malthusiano ou modelo de crescimento exponencial simples pode ser utilizado para explicar o crescimento populacional de espécies baseado em uma taxa constante de crescimento (r) ao longo do tempo (t). O modelo de crescimento Malthusiano tem a seguinte forma

$$f(t) = P_0 e^{rt}$$

em que $f(0) = P_0$ é o tamanho populacional inicial, r é a taxa de crescimento e t é o tempo. Supondo que os valores dos parâmetros que determinam o crescimento populacional da cidade de Piracicaba a partir do ano 1990 seja dado por $P_0 = 200.000$ e $r = 0.025$. Pergunta-se:

(a) Qual será o tamanho da população de Piracicaba ao nos aproximarmos dos anos 2000 ($t = 10$), 2018 ($t = 28$) e 2040 ($t = 50$)?

(b) Em que situação o modelo Malthusiano não deve mais ser utilizado para explicar o crescimento dessa população?

16. Em um estudo observacional, McDonald (1985) contou a frequência de alelos no locus de manose-6-fosfato isomerase (Mpi) na espécie de crustáceo *Megalorchestia californiana* em diferentes latitudes (x). Essa espécie vive em praias arenosas da costa do Pacífico da América do Norte. Assim, o objetivo do pesquisador foi saber se diferentes locais levam a freqüências de alelos diferentes. Notou-se, então, que a frequência de alelos em função da latitude pode ser explicado pela função logística dada por:

$$f(x) = \frac{e^{a+bx}}{1 + e^{a+bx}}. \tag{1}$$

Supondo $a = -7.64$ e $b = 0.17$, responda:

(a) Qual é a frequência de alelos nas latitudes 48,1 ("Port Townsend"), 37,8 ("San Francisco") e 34,3 ("Santa barbara")? Quais são as possíveis conclusões?

(b) Qual é a frequência de alelos quando nos aproximamos das latitudes 30, 40 e 50?

(c) Existem assíntotas verticais e horizontais no gráfico de $f(x)$?

17. Considere a curva $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{Z}$, e os seguintes casos:

i) $n = 0$ *ii)* $n < 0$ e n par *iii)* $n < 0$ e n ímpar

iv) $n > 0$ e n par *v)* $n > 0$ e n ímpar

Para cada um desses casos calcule o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ *b)* $\lim_{x\to 0^-} x^n$ *c)* $\lim_{x\to -\infty} x^n$ *d)* $\lim_{x\to \infty} x^n$

18. Mostre que $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 - 2x}{3x^2 + 1} = 2$ e que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5x + 10}{2x^3 + x^2 + 5} = 0$.

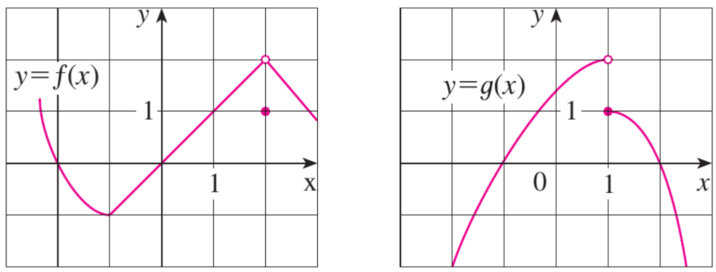
19. Considere que $\lim_{x\to 1} f(x) = -3$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} h(x) = 4$ e $\lim_{x\to 1} w(x) = -\infty$ determine, os limites abaixo, caso eles existam. Caso contrário justifique por quê o limite não existe.

(a) $\lim_{x\to 1} [f(x) - 3g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [4h(x) - w(x)]$ (c) $\lim_{x\to 1} \sqrt{f(x) + h(x)}$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{w(x)}$ (e) $\lim_{x\to 1} \frac{h(x)}{g(x)}$ (f) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)h(x)}{w(x)}$

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{h(x)w(x)}{f(x)}$ (h) $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$ (i) $\lim_{x\to 1} -h(x)w(x)$

20. (Stewart, 2010) Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.



$(a)\ \lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$ $(b)\ \lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$ $(c)\ \lim_{x\to 0} f(x)g(x)$

$(d)\ \lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(e)\ \lim_{x\to 2} x^3 f(x)$ $(f)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$

21. (Stewart, 2010) Avalie o seguinte problema:
    (a) O que há de errado com a equação a seguir? justifique sua resposta.
    $$\frac{x^2+x-6}{x-2}$$
    (b) Em vista de (a), explique por que a equação
    $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)$$
    está correta.

22. (Stewart, 2010) Calcule os seguintes limites:
    $$(a)\ \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \qquad (b)\ \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} \qquad (c)\ \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$$

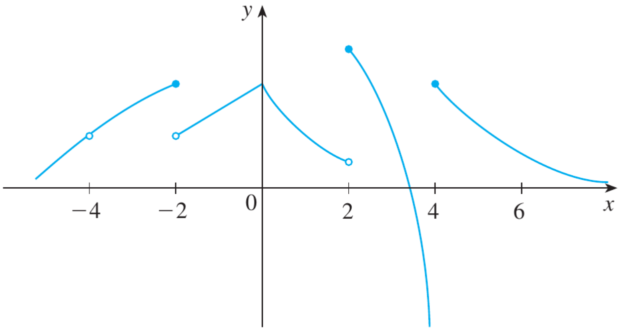
23. (Stewart, 2010) Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ pode existir mesmo que os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existam.

24. (Stewart, 2010) Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar os cristais utilizados em componentes eletrônicos para os veículos espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura deve ser controlada precisamente, ajustando-se a potência de entrada. Suponha que a relação seja dada por
    $$T(w)=0,1w^2+2,155w+20$$
    em que T é a temperatura em graus Celsius e w é a potência de entrada em watts.
    (a) Qual é a potência necessária para manter a temperatura em 200 °C?
    (b) Se for permitida uma variação de ±1 °C a partir dos 200 °C, qual será o intervalo de potência permitido para a entrada?

25. Responda as questões abaixo:

(a) Do gráfico de f, identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.

(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



26. Mostre que a função $f = \begin{cases} x^2/4, & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x-1}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ é contínua para $\forall\, x \in (-\infty, \infty)$.

27. (Stewart, 2010) Determine os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

$(a)\ f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x, & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$ $\qquad (b)\ f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 1/x, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

$(c)\ f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x < 0 \\ e^x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

28. Determine as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Verificar o resultado por meio do SageMath ou do Wolfram|Alpha.

$(a)\ f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ $\qquad (b)\ f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x^2-3x-2}$ $\qquad (c)\ f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$

$(d)\ f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2-6x+5}$ $\qquad (e)\ f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ $\qquad (f)\ f(x) = \dfrac{1+x^4}{x^2-x^4}$

29. Determine o limite ou demonstre que não existe.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x+3}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{x-4}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x-x^2}{2x^2-7}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-3x^2}{5x^2+4x}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+x^2}{2x-x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-x\sqrt{x}}{2x^{3/2}+3x-5}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(2x^2+1\right)^2}{(x-1)^2\left(x^2+x\right)}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

(j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

(n) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}$

(o) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$

(p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{-x}+2\cos(3x)\right)$

(q) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4+x^5\right)$

(r) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x^6}{x^4+1}$

(s) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan\left(e^x\right)$

(t) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$

(u) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-e^x}{1+2e^x}$

Referências

Morettin, P. A.; Hazzan, S.; Bussab, W. O. **Introdução ao cálculo para administração, economia e contabilidade**. Saraiva: São Paulo, Ed. 1, 2009.
Stewart, J. **Cálculo: volume 1**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 7, 2014.

Respostas de alguns exercícios

3. (a) $1/e^10$ (b) $2e^5$ (c) $1/e^{20}$ (d) $2e^{10}$ (e) 0 (f) ∞

4. (a) $3e^{-e^2}$; $3/e$; 3

5. As funções referente as letras (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (i), (j), (k) e (l) não são contínuas.

7. Não é contínua em d.

9. $a = 71/6$

12. (a) 2 (b) 1 (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) ∞ (f) oscila entre -1 e 1 (g) $1/2$ (h) ∞ (i) 0 (j) 0 (k) 0 (l) ∞ (m) ∞ (n) $-\infty$ (o) $-\infty$

13. Verificar pelo Wolfram|Alpha

16. (a) $0,6311$; $0,2290$; $0,1408$ (b) 0.073; 0.3015; 0.7026 (c) Verificar pelo Wolfram|Alpha.

19. (a) -3 (b) ∞ (c) 1 (d) 0^+ (e) Não necessariamente esse limite existe. (f) 0^+ (g) ∞ (h) 0 (i) ∞

22. (a) $3x^2$ (b) $-2/x^3$ (c) $-1/9$

27. (a) 0, esqueda (b) 0, direita; 1, esqueda

29. (a) 15 (c) $-1/2$ (e) -1 (g) 4 (2) 3 (k) $1/6$ (m) $\frac{1}{2}(a-b)$ (o) ∞ (q) $-\infty$ (s) $\pi/2$ (u) $-1/2$