Cálculo diferencial e integral

Curvas de Nível e Derivadas Parciais

Thiago de Paula Oliveira

June 6, 2018

1. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Esboce as curvas de nível das funções a seguir:

   (a) $f(x, y) = 3x + 4y$ nos níveis $c = 12$ e $c = 24$

   (b) $f(x, y) = x - y$ nos níveis $c = -1$, $c = 0$ e $c = 1$

   (c) $f(x, y) = 2x - 3y$ nos níveis $c = 6$, $c = 10$ e $c = 12$

   (d) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ nos níveis $c = 1$ e $c = 4$

   (e) $f(x, y) = y - x^2$ nos níveis $c = 0$ e $c = 1$

   (f) $f(x, y) = y - x^2 + 4$ nos níveis $c = 0$ e $c = 5$

   (g) $f(x, y) = y - x^3$ nos níveis $c = 0$ e $c = 1$

   (h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$ nos níveis $c = 0$ e $c = 1$

   (i) $f(x, y) = xy$ nos níveis $c = -2$, $c = -1$, $c = 1$ e $c = 2$

2. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Considere a função utilidade de um consumidor $U(x, y) = xy$, sendo que x é a quantidade consumida de um produto A e y é a quantidade consumida de um produto B. Esboce as curvas de nível $c = 2$ e $c = 4$ e explique seu significado econômico. Tais curvas recebem o nome de curvas de indiferença.

3. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Considere a função utilidade de um consumidor $U(x, y) = x^2y$, tal que x é a quantidade consumida de um produto A e y é a quantidade consumida de um produto B. Esboce as curvas de nível $c = 1$ e $c = 2$.

4. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Seja $R(x, y) = 2x + 3y$ a receita de vendas de dois produtos de quantidades x e y. Esboce o gráfico dos pontos (x, y) para os quais a receita vale R$ 120,00 (em Economia, tal curva recebe o nome de iso-receita).

5. Utilizando a definição formal de derivadas parciais, determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$ *b)* $f(x,y) = x^2 - 2x + y$ *c)* $f(x,w) = -2w^2 + x - 2$

6. (Stwart, 2010) Determinar as derivadas parciais de primeira ordem das funções a seguir

   a) $f(x,y) = 3x - 2y^4$ *b)* $f(x,y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$ *c)* $f(x,y) = x\ e^{3y}$

   d) $f(x,y) = \sqrt{x}\ln y$ *e)* $f(x,y) = (2x+3y)^{10}$ *f)* $f(x,y) = \operatorname{tg}(xy)$

   g) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ *h)* $f(x,y) = x^y$ *i)* $f(x,y) = \dfrac{e^x}{y+x^2}$

   j) $f(x,y) = x\ln\left(x^2+y^2\right)$ *l)* $f(x,y,t) = \dfrac{xy^2}{t+2x}$ *k)* $f(x,y,t) = xy\operatorname{sen}^{-1}(yt)$

7. Determinar as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das funções a seguir

   a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{1}{x^3+3y}$ *c)* $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2-y^2}$

   d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *e)* $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$ *f)* $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{5x+y}{x^2-8x+y^2}}$

   g) $f(x,y) = x^3 \times e^y + 3$ *h)* $f(x,y) = 5^{xy} + x - 4$ *i)* $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

   j) $f(x,y) = x^3\ln(y) - 5$ *l)* $f(x,y) = \dfrac{x}{y+7}$ *k)* $f(x,y) = \cos x \times \operatorname{sen} y$

8. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$, construa a matriz hessiana para o ponto $P(1,3)$ e calcule o seu determinante.

9. Considere a função $f(x,y) = \ln(x+y)$, construa a matriz hessiana para o ponto $P(1,1)$ e calcule o seu determinante.

10. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Considere a função $P(x,y) = 3x^{0,5}L^{0,5}$. Mostre que $x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y} = P(x,y)$

11. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Seja $q = 30 - 4x - 2y$ a equação de demanda de um produto A, x seu preço unitário e y o preço unitário de um produto B.

    (a) Calcule as demandas marginais parciais, $\dfrac{\partial q}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial q}{\partial y}$, explicando o seu significado.

    (b) O que aumenta mais a demanda do produto A: diminuir em uma unidade o seu preço unitário (mantendo o de B) ou diminuir em uma unidade o preço unitário de B (mantendo o de A)?

12. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Dada a função custo para a produção de dois bens de quantidades x e y, $C(x, y) = 100 + x^2 + 2y^2 + xy$, determine:

    (a) o custo marginal em relação a x

    (b) o custo marginal em relação a y

    (c) $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial C}{\partial y}$ avaliada no ponto de domínio $P(10, 20)$. Interprete esse resultado.

13. (Stwart, 2010) A temperatura T de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.

    (a) Qual é o signi?cado das derivadas parciais $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ e $\frac{\partial T}{\partial t}$?

    (b) Honolulu tem longitude de 158° W e latitude de 21° N. Suponha que às 9 horas em 1° de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $\frac{\partial T}{\partial x}(158, 21, 9)$, $\frac{\partial T}{\partial y}(158, 21, 9)$ e $\frac{\partial T}{\partial t}(158, 21, 9)$ fossem positivas ou negativas? Explique. Note que $(158, 21, 9)$ é um ponto do domínio $P(x, y, t)$.

14. (Stwart, 2010) Verifique que a função $z = f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

15. (Stwart, 2010) A lei dos gases para uma massa ?xa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, em que R é a constante do gás. Mostre que:

    (a) $\dfrac{\partial P}{\partial V} + \dfrac{\partial V}{\partial T} + \dfrac{\partial T}{\partial P} = -1$

    (b) $T \dfrac{\partial P}{\partial T} \dfrac{\partial V}{\partial T} = mR$

16. (Stwart, 2010) O índice sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965T\ v^{0,16}$$

em que T é a temperatura (°C) e v é a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15$ °C e $v = 30$ km/h, quanto você espera que a temperatura aparente caia se a temperatura real decrescer em 1 °C? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

Referências

Moretin, P. A.; Hazzan S.; Bussab W. O. Introdução ao cálculo para administração, economia e contabilidade. Saraiva: São Paulo, 2009.

Stwart, J. **Cálculo: volume 2**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 6, 2010

Nota: Algumas respostas dos exercícios podem ser obtidas a partir dos livros acima. Além disso, tais respostas também podem ser obtidas utilizando os softwares Wolfram|Alpha ou Sage.