

# Cálculo diferencial e integral

## Integral indefinida

Thiago de Paula Oliveira

Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

7 de março de 2018

- 1 Criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano
- 2 Método da exaustão (desenvolvido por matemáticos gregos);
- 3 O maior avanço ocorreu no século 17 com o teorema fundamental do calculo proposto desenvolvido por Newton e Leibniz
- 4 Tal teorema relaciona o cálculo diferencial e integral, mostrando que a diferenciação e a integração são inversos um do outro.

# Integral

Encontre todas as funções possíveis  $F(x)$  cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

Encontre todas as funções possíveis  $F(x)$  cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

①  $F(x) = x^2 + x + 10$

Encontre todas as funções possíveis  $F(x)$  cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

❶  $F(x) = x^2 + x + 10$

❷  $F(x) = x^2 + x - 100$

Encontre todas as funções possíveis  $F(x)$  cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

❶  $F(x) = x^2 + x + 10$

❷  $F(x) = x^2 + x - 100$

❸  $F(x) = x^2 + x + \pi$

Encontre todas as funções possíveis  $F(x)$  cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

①  $F(x) = x^2 + x + 10$

②  $F(x) = x^2 + x - 100$

③  $F(x) = x^2 + x + \pi$

④  $F(x) = x^2 + x - \log 10$

Encontre todas as funções possíveis  $F(x)$  cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

❶  $F(x) = x^2 + x + 10$

❷  $F(x) = x^2 + x - 100$

❸  $F(x) = x^2 + x + \pi$

❹  $F(x) = x^2 + x - \log 10$

❺  $F(x) = x^2 + x + c$ , em que  $c$  é uma constante real ( $c \in \mathbb{R}$ )



# Definição de integral indefinida ou antiderivada

## Definição

A função  $F$  é chamada uma antiderivada de uma função  $f$  em um intervalo  $I$  se

$$F'(x) = f(x)$$

para qualquer valor de  $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ .

Se  $F(x)$  é uma antiderivada de  $f(x)$  em  $I$ , então sua antiderivada mais geral é a família de funções definidas por  $F(x) + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ .

O processo de encontrar a antiderivada de uma função é chamado de anti-diferenciação ou integração.

# Definição de integral indefinida ou antiderivada

## Definição

A função  $F$  é chamada uma antiderivada de uma função  $f$  em um intervalo  $I$  se

$$F'(x) = f(x)$$

para qualquer valor de  $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ .

Se  $F(x)$  é uma antiderivada de  $f(x)$  em  $I$ , então sua antiderivada mais geral é a família de funções definidas por  $F(x) + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ .

O processo de encontrar a antiderivada de uma função é chamado de anti-diferenciação ou integração.

# Definição de integral indefinida ou antiderivada

## Definição

**Integral indefinida.** Se  $F(x)$  é uma antiderivada da função  $f(x)$ , então a família de funções  $F(x) + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , é denominada integral indefinida da função  $f(x)$  e é dada por

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

# Definição de integral indefinida ou antiderivada

## Definição

**Integral indefinida.** Se  $F(x)$  é uma antiderivada da função  $f(x)$ , então a família de funções  $F(x) + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , é denominada integral indefinida da função  $f(x)$  e é dada por

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

- ❶ O símbolo  $\int$  representa o operador da antiderivada;
- ❷  $f(x)$  é o integrando;
- ❸  $dx$  é o diferencial de  $x$ , que denota qual variável será integrada;
- ❹  $c$  é chamada constante de integração

# Regras de integração

- 1 Se a antiderivada de uma função existe num intervalo  $I \implies$  função é integrável nesse intervalo.

# Regras de integração

- 1 Se a antiderivada de uma função existe num intervalo  $I \implies$  função é integrável nesse intervalo.
- 2 **Regra da constante.** Se  $k$  é um número real qualquer, então a integral indefinida de  $k$  em relação a  $x$  é

$$\int k \, dx = kx + c$$

# Regras de integração

- 1 Se a antiderivada de uma função existe num intervalo  $I \implies$  função é integrável nesse intervalo.
- 2 **Regra da constante.** Se  $k$  é um número real qualquer, então a integral indefinida de  $k$  em relação a  $x$  é

$$\int k \, dx = kx + c$$

- 3 **Regra do coeficiente.** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e  $f$  uma função integrável em  $I$ , então

$$\int af(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$

- ❹ **Regra da soma e diferença.** Seja  $f$  e  $g$  duas funções integráveis nos intervalos  $I_f$  e  $I_g$ , respectivamente. Então,

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Este resultado se estende para um número finito de funções



- 4 **Regra da soma e diferença.** Seja  $f$  e  $g$  duas funções integráveis nos intervalos  $I_f$  e  $I_g$ , respectivamente. Então,

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Este resultado se estende para um número finito de funções

- 5 **Regra da potência.** Para qualquer número real  $n$ , em que  $n \neq -1$ , a integral indefinida  $x^n$  é dada por

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

# Regras de integração

## Exemplos

*Cálcule as integrais a seguir*

①  $\int (2x + 7) dx$

②  $\int (x^2 + x) dx$

③  $\int \left( \frac{1}{3}x^3 - \pi \right) dx$

④  $\int \left[ \frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \cos x \right] dx$

⑤  $\int \frac{5x^3 + 2}{x^{\frac{5}{3}}} dx$

⑥  $\int \operatorname{tg} \theta \operatorname{cosec} \theta \frac{1}{\cos \theta} d\theta$

# Integral por substituição

## Definição

Seja  $u = g(x)$  uma função diferenciável em  $x$ , então  $du = g'(x)dx$ . Agora suponha que  $f(u)$  também é uma função diferenciável em  $u$ . Então,

$$\int f(u) du = \int f(g(x))g'(x) dx$$

# Integral por substituição

## Definição

Seja  $u = g(x)$  uma função diferenciável em  $x$ , então  $du = g'(x)dx$ . Agora suponha que  $f(u)$  também é uma função diferenciável em  $u$ . Então,

$$\int f(u) du = \int f(g(x))g'(x) dx$$

## Exemplos

❶  $\int \sin(2x + 4) dx$

❷  $\int \frac{3 dx}{\sqrt{(x+2)^3}}$

❸  $\int x^{-1} \ln x dx$

❹  $\int x e^{2x^2-3} dx$

❺  $\int \operatorname{tg} x dx$

❻  $\int \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x - 4} dx$

❼  $\int x \cos(x^2) dx$

❽  $\int (x^2 - 4x + 4)^7 dx$

# Integrais de funções contendo trinômio

## 1 Primeiro caso. Integrais na forma

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

**Ideia:** completar o trinômio do denominador tornando-o quadrado perfeito (obter uma soma ou diferença de dois quadrados)

## Exemplos

*Calcular a integral*

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 17}$$

# Integrais de funções contendo trinômio

② **Segundo caso.** Integrais na forma

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{ou} \quad \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

## Exemplos

*Calcular a integral*

$$\int \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^2 + 8x + 6}}$$

## Definição

*Suponha que  $u(x)$  e  $v(x)$  são duas funções contínuas e diferenciáveis. A regra do produto (Teorema de Leibniz's) estabelece que*

$$\frac{d}{dx} (u(x)v(x)) = v(x) \frac{d}{dx} u(x) + u(x) \frac{d}{dx} v(x).$$

# Integrais por partes

## Definição

Suponha que  $u(x)$  e  $v(x)$  são duas funções contínuas e diferenciáveis. A regra do produto (Teorema de Leibniz's) estabelece que

$$\frac{d}{dx} (u(x)v(x)) = v(x) \frac{d}{dx} u(x) + u(x) \frac{d}{dx} v(x).$$

Integrando ambos os lados com respeito a  $x$

$$\int \frac{d}{dx} (u(x)v(x)) \, dx = \int u'(x)v(x) \, dx + \int u(x)v'(x) \, dx$$

Resolvendo e reescrevendo essa igualdade temos:

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x) \, dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx \\ \int u(x) \, dv &= u(x)v(x) - \int v(x) \, du \end{aligned}$$



## Exemplos

*Calcular as integrais*

1  $\int 5xe^x dx$

2  $\int x^3 \ln x dx$

3  $\int \operatorname{arctg} x dx$

4  $\int \frac{x^3}{e^{x^2}} dx$

5  $\int \ln x dx$

6  $\int x \cos x dx$

7  $\int e^x \sin x dx$

8  $\int \left[ \frac{x^2 + 2}{\ln x} + 2 \right] dx$

# Integrais de funções racionais

Integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

em que  $P(x)$  e  $Q(x)$  são funções polinomiais de graus  $m$  e  $n$ , respectivamente.

- Quando  $m < n$  a função racional é chamada de própria
- Quando  $m \geq n$  a função é chamada de imprópria

**Nota:** toda função imprópria pode ser decomposta na soma de uma função racional própria com um polinômio.

O resultado dessa divisão é

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

em que  $S$  (divisor) e  $R$  (resto) são polinômios.

# Integrais de funções racionais

Essa técnica é utilizada para escrever a função racional própria como uma soma de frações parciais cujas fórmulas são:

- ① Seja  $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$  o polinômio do denominador da função racional própria. A decomposição  $f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$  em frações simples é dada por:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

em que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são constantes que devem ser determinadas.

## Exemplos

*Faça a decomposição das funções:*

$$a) f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + x - 2} \quad b) f(x) = \frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)}$$

# Integrais de funções racionais

Essa técnica é utilizada para escrever a função racional própria como uma soma de frações parciais.

- ② Se a raiz ( $a$ ) do denominador da função racional própria tem multiplicidade  $k$ , então as frações parciais serão do tipo:

$$\frac{B_1}{(x-a)^k} + \frac{B_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{B_k}{(x-a)^1},$$

em que  $B_1, B_2, \dots, B_k$  são constantes que devem ser determinadas.

## Exemplos

*Faça a decomposição da função:*

$$a) f(x) = \frac{x+1}{x^3} \qquad b) f(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$$

# Integrais de funções racionais

- ③ Se os fatores de  $Q(x)$  são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem. A cada fator quadrático  $x^2 + bx + c$  de  $Q(x)$ , corresponderá uma fração parcial do tipo:

$$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c}$$

## Exemplos

- ① *Faça a decomposição das funções:*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$$

- ② *Para cada um dos exemplos anteriores, calcular a integral  $\int f(x) dx$*

# Integrais de funções racionais

- ❹ Os fatores de  $Q(x)$  são lineares e quadráticos irredutíveis sendo que alguns dos fatores quadráticos se repetem. Se um fator quadrático  $x^2 + bx + c$  de  $q(x)$  tem multiplicidade  $k$ , a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais do tipo:

$$\frac{C_1x + D_1}{(x^2 + bx + c)^k} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \dots + \frac{C_kx + D_k}{(x^2 + bx + c)^1}$$

## Exemplos

- ❶ *Calcular:*

$$\int \frac{x + 1}{x(x^2 + 2x + 3)^2} dx$$

# Integrais envolvendo expressões da forma $\sqrt{x^2 + bx + c}$

- Algumas integrais podem envolver a expressão  $\sqrt{x^2 + bx + c}$ ,  $a \neq 0$
- Podem ser resolvidas utilizando uma substituição conveniente
- As vezes deve-se utilizar uma substituição trigonométrica

## Exemplos

*Resolver a integral*

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{9 - 16x - 4x^2}} dx$$