

Limites e continuidade: parte II

Thiago de Paula Oliveira

26 de Setembro de 2018

© You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

1. Prove que os seguintes limites não existem.

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2 + x} & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{\sqrt{x} - 1} & c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3}{\sqrt{x + 6} - 3} \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^3} & f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x - 1)}{x - 1} \end{array}$$

2. Calcule o valor dos limites das funções a seguir utilizando a definição de limites, a qual é dada por: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} x + 2 & b) \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + x & c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \\ d) \lim_{x \rightarrow -1} x^3 & e) \lim_{x \rightarrow 6} x^2 - 4x + 4 & f) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 + x^2 \end{array}$$

3. O modelo matemático de Henderson e Pabis é um dos modelos utilizados para prever o fenômeno de secagem de alimentos, sendo dado por $f(t) = a \cdot e^{-kt}$ em que os valores de $f(t)$ representam a umidade do produto, adimensional; t é tempo de secagem; k é o coeficiente de secagem e a é uma constante qualquer. Calcule o valor do limite dessa função para:

$$a) a = 1, k = 2 \text{ e } t \rightarrow 5 \quad b) a = 2, k = -1 \text{ e } t \rightarrow 5$$

$$c) a = 1, k = 2 \text{ e } t \rightarrow 10 \quad d) a = 2, k = -1 \text{ e } t \rightarrow 10$$

$$e) a = 1, k = 2 \text{ e } t \rightarrow \infty \quad f) a = 2, k = -1 \text{ e } t \rightarrow \infty$$

g) Para os casos de a a f quais são as conclusões? Na prática, essas conclusões fazem sentido?

4. Curvas de crescimento são muito utilizadas nas áreas de biologia e ciências agrárias para quantificar, por exemplo, a massa de animais e vegetais e o crescimento populacional de microorganismos. Assim, supondo que o crescimento populacional de uma determinada bactéria em função do tempo (t) pode ser descrita pela função de Gompertz dada por

$$f(t) = a e^{-e^{(b-ct)}}$$

(a) Assumindo que $a = 3$, $b = 2$ e $c = 1$. Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow 2} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

(b) Qual é a interpretação dos valores desses limites?

5. Quais das seguintes funções são descontínuas? Prove utilizando limites laterais.

$$a)f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad b)f(x) = \frac{x^2}{|x|-1} \quad c)f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$d)f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \quad e)f(x) = \frac{1}{x^2} \quad f)f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2}}$$

$$g)f(x) = \sec x \quad h)f(x) = \operatorname{cosec} x \quad i)f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$h)f(x) = e^{-x^2} \quad j)f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad k)f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$$l)f(r) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2}, & \text{se } 0 < x < \sqrt{2} \cup \sqrt{2} < x < \infty \\ 1, & \text{se } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

6. Utilizando as propriedades de limites mostre que a função $h(x) = 3\sqrt{x-4}$ é contínua à direita no intervalo $x \in [4, \infty)$

7. A força gravitacional que a Terra exerce sobre uma unidade de massa a uma distância d de seu centro é dado por

$$f(d) = \begin{cases} \frac{gmd}{r^2}, & \text{se } d < r \\ \frac{gm}{d^2}, & \text{se } d \geq r \end{cases}$$

em que g é a constante gravitacional, m é a massa e r é raio da Terra. Pergunta-se: a função $f(d)$ é contínua em d ?

8. Seja a função f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$, mostre que existe um valor c tal que $f(c) = 150$.

9. Calcule o valor de a tal que $f(x)$ seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x - 6, & \text{se } x < 4 \\ 2x^3 + ax, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

10. Calcule os valores de a e b tal que $f(x)$ seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{se } x < 3 \\ ax^2 + bx + 3, & \text{se } 3 \leq x < 6 \\ 4x + a - b, & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

11. Prove que as função seno e cosseno são contínuas. Nota: para provar que essas funções são contínuas é preciso mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ ou $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Se nós supormos que $h = x - a$, então $x = a + h$. Fazendo $h \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(a + h).$$

12. Calcule o valor dos limites das funções a seguir

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{\frac{1}{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 4x + 4$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + ax}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x e^{-2x}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x} e^x}{e^{-3x} e^{4x}}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} x \operatorname{cosec} x$$

$$o) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x - 2}{x + 2}$$

13. Encontre as assíntotas verticais e horizontais, quando existirem, das funções abaixo. Cheque os resultados utilizando o Wolfram|alpha.

$$a) f(x) = \frac{3e^x}{e^x - 4}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$c) f(x) = e^{x^2} e^{-x^3}$$

$$d) f(x) = \log x$$

$$e) f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$f) f(x) = \log(x) + \frac{1}{x}$$

$$g) f(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$h) f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$$

$$i) f(x) = \frac{1}{\log|x|}$$

$$j) f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 4}$$

$$k) f(x) = \frac{ax^5 + bx^4}{e^x}$$

$$l) f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sin x}$$

14. Determine uma função tal que ela possua assíntotas verticais em $x = -2$ e $x = 2$ e assíntota horizontal em $y = 3$.

15. O modelo de crescimento Malthusiano ou modelo de crescimento exponencial simples pode ser utilizado para explicar o crescimento populacional de espécies baseado em uma taxa constante de crescimento (r) ao longo do tempo (t). O modelo de crescimento Malthusiano tem a seguinte forma

$$f(t) = P_0 e^{rt}$$

em que $f(0) = P_0$ é o tamanho populacional inicial, r é a taxa de crescimento e t é o tempo. Supondo que os valores dos parâmetros que determinam o crescimento populacional da cidade de Piracicaba a partir do ano 1990 seja dado por $P_0 = 200.000$ e $r = 0.025$. Pergunta-se:

- (a) Qual será o tamanho da população de Piracicaba ao nos aproximarmos dos anos 2000 ($t = 10$), 2018 ($t = 28$) e 2040 ($t = 50$)?
- (b) Em que situação o modelo Malthusiano não deve mais ser utilizado para explicar o crescimento dessa população?
16. Em um estudo observacional, McDonald (1985) contou a frequência de alelos no locus de manose-6-fosfato isomerase (Mpi) na espécie de crustáceo *Megalorchestia californiana* em diferentes latitudes (x). Essa espécie vive em praias arenosas da costa do Pacífico da América do Norte. Assim, o objetivo do pesquisador foi saber se diferentes locais levam a frequências de alelos diferentes. Notou-se, então, que a frequência de alelos em função da latitude pode ser explicado pela função logística dada por:

$$f(x) = \frac{e^{a+bx}}{1 + e^{a+bx}}. \quad (1)$$

Supondo $a = -7.64$ e $b = 0.17$, responda:

- (a) Qual é a frequência de alelos nas latitudes 48,1 (“Port Townsend”), 37,8 (“San Francisco”) e 34,3 (“Santa barbara”) ? Quais são as possíveis conclusões?
- (b) Qual é a frequência de alelos quando nos aproximamos das latitudes 30, 40 e 50?
- (c) Existem assíntotas verticais e horizontais no gráfico de $f(x)$?
17. Considere a curva $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{Z}$, e os seguintes casos:
- i) $n = 0$ ii) $n < 0$ e n par iii) $n < 0$ e n ímpar
- iv) $n > 0$ e n par v) $n > 0$ e n ímpar

Para cada um desses casos calcule o valor dos seguintes limites:

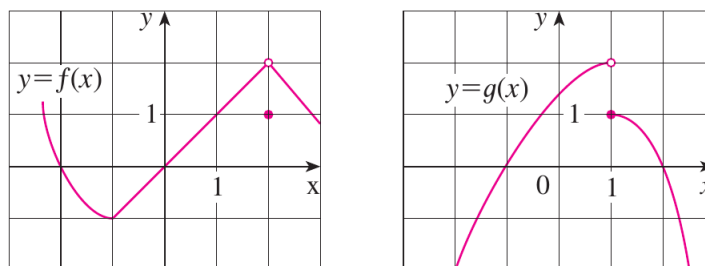
$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^-} x^n \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} x^n$$

18. Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 2x}{3x^2 + 1} = 2$ e que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 10}{2x^3 + x^2 + 5} = 0$.

19. Considere que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 1} w(x) = -\infty$ determine, os limites abaixo, caso eles existam. Caso contrário justifique por quê o limite não existe.

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 3g(x)] & (b) \lim_{x \rightarrow 1} [4h(x) - w(x)] & (c) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x) + h(x)} \\ (d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{w(x)} & (e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{g(x)} & (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)h(x)}{w(x)} \\ (g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)w(x)}{f(x)} & (h) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) & (i) \lim_{x \rightarrow 1} -h(x)w(x) \end{array}$$

20. (Stewart, 2010) Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.



$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)] \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 2} x^3 f(x) \quad (f) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)}$$

21. (Stewart, 2010) Avalie o seguinte problema:

(a) O que há de errado com a equação a seguir? justifique sua resposta.

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

está correta.

22. (Stewart, 2010) Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \quad (b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} \quad (c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$$

23. (Stewart, 2010) Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que os limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ não existam.

24. (Stewart, 2010) Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar os cristais utilizados em componentes eletrônicos para os veículos espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura deve ser controlada precisamente, ajustando-se a potência de entrada. Suponha que a relação seja dada por

$$T(w) = 0,1w^2 + 2,155w + 20$$

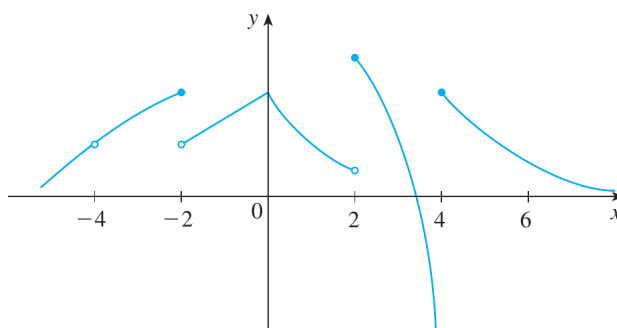
em que T é a temperatura em graus Celsius e w é a potência de entrada em watts.

(a) Qual é a potência necessária para manter a temperatura em 200°C ?

(b) Se for permitida uma variação de $\pm 1^\circ\text{C}$ a partir dos 200°C , qual será o intervalo de potência permitido para a entrada?

25. Responda as questões abaixo:

- (a) Do gráfico de f , identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.
- (b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



26. Mostre que a função $f = \begin{cases} x^2/4, & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x-1}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ é contínua para $\forall x \in (-\infty, \infty)$.
27. (Stewart, 2010) Determine os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f .

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x, & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 1/x, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x < 0 \\ e^x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

28. Determine as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Verificar o resultado por meio do SageMath ou do Wolfram|Alpha.

$$(a) f(x) = \frac{2x-3}{x-1} \quad (b) f(x) = \frac{x^2+2}{2x^2-3x-2} \quad (c) f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-6x+5} \quad (e) f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad (f) f(x) = \frac{1+x^4}{x^2-x^4}$$

29. Determine o limite ou demonstre que não existe.

$$\begin{array}{lll}
 (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+3} & (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{x-4} & (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x-x^2}{2x^2-7} \\
 (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x^2}{5x^2+4x} & (e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}+x^2}{2x-x^2} & (f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-x\sqrt{x}}{2x^{3/2}+3x-5} \\
 (g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2+1)^2}{(x-1)^2(x^2+x)} & (h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} & (i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1} \\
 (j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1} & (k) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2+x}-3x) & (l) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+\sqrt{x^2+2x}) \\
 (m) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}) & (n) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} & (o) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2} \\
 (p) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x}+2\cos(3x)) & (q) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4+x^5) & (r) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^6}{x^4+1} \\
 (s) \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(e^x) & (t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}} & (u) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-e^x}{1+2e^x}
 \end{array}$$

30. Use o Teorema do confronto para avaliar os seguintes limites:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2 & (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \sin x}{4x} & (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
 (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x} & (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} & (f) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 \\
 (g) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cosec} x & (h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} & (i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21}{x^3+4x^2}
 \end{array}$$

31. Determine $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ se $x^2+1 \leq f(x) \leq 4x+1$.

32. Determine $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ se $x^2-7 \leq f(x) \leq \sqrt{13-x^2}$.

33. Determine $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ se $x^2-6x+9 \leq g(x) \leq x-1$.

34. Determine $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ se $x^3 \leq f(x) \leq x^2$.

35. Determine $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ se $\frac{x^2-2x}{x^3+4} \leq h(x) \leq e^{-x}$.

36. Determine as assíntotas verticais, horizontais e oblíquas das funções a seguir:

$$(a) f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x^2} \quad (b) f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} \quad (c) f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (e) f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (f) f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$$

Referências

Morettin, P. A.; Hazzan, S.; Bussab, W. O. **Introdução ao cálculo para administração, economia e contabilidade**. Saraiva: São Paulo, Ed. 1, 2009.

Stewart, J. **Cálculo: volume 1**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 7, 2014.

Respostas de alguns exercícios

3. (a) $1/e^{10}$ (b) $2e^5$ (c) $1/e^{20}$ (d) $2e^{10}$ (e) 0 (f) ∞
4. (a) $3e^{-e^2}$; $3/e$; 3
5. As funções referente as letras (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (i), (j), (k) e (l) não são contínuas.
7. Não é contínua em d .
9. $a = 71/6$
12. (a) 2 (b) 1 (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) ∞ (f) oscila entre -1 e 1 (g) $1/2$ (h) ∞ (i) 0
 (j) 0 (k) 0 (l) ∞ (m) ∞ (n) $-\infty$ (o) $-\infty$
13. Verificar pelo Wolfram|Alpha
16. (a) 0,6311; 0,2290; 0,1408 (b) 0.073; 0.3015; 0.7026 (c) Verificar pelo Wolfram|Alpha.
19. (a) -3 (b) ∞ (c) 1 (d) 0^+ (e) Não necessariamente esse limite existe. (f) 0^+
 (g) ∞ (h) 0 (i) ∞
22. (a) $3x^2$ (b) $-2/x^3$ (c) $-1/9$
27. (a) 0, esquerda (b) 0, direita; 1, esquerda
29. (a) 15 (c) $-1/2$ (e) -1 (g) 4 (2) 3 (k) $1/6$ (m) $\frac{1}{2}(a-b)$ (o) ∞ (q) $-\infty$
 (s) $\pi/2$ (u) $-1/2$
30. (a) $-2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) - 2 \leq -2$ (b) $0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \operatorname{sen} x}{4x} \leq 0$ (c) $1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$
 (d) $0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x} \leq 0$ (e) $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \leq 0$ (f) $1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left(\frac{1}{x^2} \right) + 1 \leq 1$
 (g) $1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cosec} x \leq 1$ (h) $0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \leq 0$ (i) $0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21}{x^3 + 4x^2} \leq 0$
31. $17 \leq \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \leq 17$
32. $2 \leq \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \leq 2$
33. $4 \leq \lim_{x \rightarrow 5} g(x) \leq 4$

34. $\infty \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \infty$

35. $0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) \leq 0$

36. i) Assíntota vertical: (a) $x = 0$ (b) não (c) não (d) não (e) $x = 0$ (f) não

ii) Assíntota horizontal: (a) não (b) não (c) não (d) não (e) não (f) não

iii) Assíntota oblíqua: (a) $y = \frac{1}{2}x$ (b) $y = x + 1$ e $y = x - 1$ (c) $y = x$ (d) $y = -x$ e $y = x$
 (e) $y = x$ (f) $y = -x + 2$