

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

---

## Pré-Cálculo: Funções e modelos

---

Thiago de Paula Oliveira

February 2, 2018

② You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

1. Considere  $f(x) = 3x^2 + 2x$  e  $g(x) = \frac{x}{x^2 + x}$ , determine as funções e as simplifique:
- (a)  $h(x) = f(x) + 2g(x)$       (b)  $h(x) = f(x) \times g(x)$       (c)  $h(x) = f(g(x))$   
 (d)  $h(x) = f(x) \times g^2(x)$       (e)  $h(x) = \frac{1}{f(x) + 1} + g(x)$       (f)  $h(x) = g(f(x))$
2. O modelo matemático de Henderson e Pabis é um dos modelos utilizados para predizer o fenômeno de secagem de alimentos, sendo dado por  $RU = a \cdot e^{-kt}$  em que  $RU$  é a razão de umidade do produto, adimensional;  $t$  é tempo de secagem;  $k$  é o coeficiente de secagem e  $a$  é uma constante qualquer. Faça o gráfico da função  $RU$ , sabendo que  $a = 5$  e  $k = 7$ .
3. Determine o domínio, imagem e contra-domínio das seguintes funções:
- (a)  $f(x) = 2 - 1,5x$       (b)  $h(x) = \sqrt{(4 - x^2)}$   
 (c)  $f(u) = u^2 + 2x$ , com  $x \in \mathbb{R}$       (d)  $f(z) = |z + 2|$   
 (e)  $g(h) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{|x|}}$       (f)  $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{se } x > 2 \\ -x^2 + 2x, & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$   
 (g)  $g(h) = \frac{\log(x)}{2 - x^2}$       (h)  $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{se } x < -1 \\ -3x^2 + 2x + 4, & \text{se } -1 \leq x < 6 \\ 9, & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$
4. No Brasil a base de cálculo (em reais) para o pagamento do imposto de renda é baseado em uma tabela de alíquota dada na Tabela 1. Essas alíquotas são descontadas do salário do trabalhador mensalmente como forma de contribuição.

Table 1: Tabela anual do Imposto de Renda 2018

Base de cálculo (R\$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IR (R\$)
Até 1.903,98	-	Isento
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,8
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,8
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,69	27,5	869,36

- (a) Faça um gráfico da alíquota em função da base de cálculo e do tempo.  
 (b) Se uma pessoa ganha 4550, qual será a contribuição dela no período de um ano?

- (c) Se uma pessoa tem seu salário aumentado de 4.800,00 para 4.900,00 reais, qual será o incremento salarial e de contribuição ao estado no período de um ano?
5. Estude a paridade das seguintes funções:
- $f(x) = x^4 + x^2$
  - $f(x) = -x^3 - x$
  - $f(x) = |x^3|$
  - $f(x) = \sqrt{x^2}$
  - $f(x) = \cos x$
  - $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ , para  $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$
6. A relação entre as temperaturas medidas em gaus Celsius (C) e Fahrenheit (F) é dada pela função
- $$C = \frac{5(F - 32)}{9}.$$
- Apresente o gráfico da função
  - Calcule o coeficiente angular e o interprete. Faça o mesmo para o intercepto.
7. A tonalidade (h) pode ser definida como uma medida angular como ilustra a Figura 1, logo  $h \in [0, 360]$ .

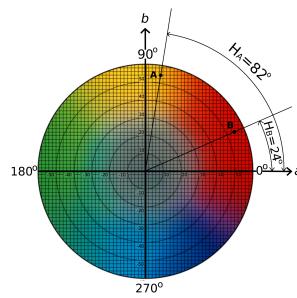


Figure 1: Região das cores pertencentes ao sistema de cores *CIELab* (ou *CIELCh*), com representação de duas cores: A, amarela, em  $h = 82^\circ$ ) e B, vermelha, em que  $h = 24^\circ$ )  
Fonte: Modificado a partir da ColorMetrix

Na área de pós-colheita, a tonalidade da cor é uma variável muito utilizada para descrever curvas de maturação de diversos frutos. Assim, considere que o a função definida por

$$f(t) = 111,09 - 1,65t + 0,0405t^2$$

④ You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

é utilizada para descrever a tonalidade do mamão papaya “Sunrise Solo” ao longo do tempo ( $t$ ).

- (a) Em quanto tempo o fruto mudará sua tonalidade de verde (120) para amarela (90)?
- (b) Após 5,3 dias qual deve ser a tonalidade do fruto?
- (c) Apresente o gráfico da função;

8. Expresse as funções na forma  $f \circ g$

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = (x + 5)^5 & (b) f(x) = \log(x + 4) & (c) f(x) = |e^{x^3}| \\ (d) f(x) = \sqrt{x^2} & (e) f(x) = \cos 2x & (f) f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \end{array}$$

9. Utilize as respostas obtidas para o exercício 8 e calcule  $g(f(2))$

10. Obtenha  $f \circ g \circ h$

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = 2x + 1, & g(x) = x^2, & h(x) = \frac{1}{x} \\ (b) f(x) = x^3 + 3, & g(x) = \sqrt{x}, & h(x) = \frac{x+1}{x} \\ (c) f(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x + 2}, & g(x) = x, & h(x) = \operatorname{sen} x \end{array}$$

11. Determine o domínio das seguintes funções

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = e^x & (b) f(v) = \frac{e^v}{1 - e^v} & (c) f(x) = \frac{1 + x}{1 - e^{2x}} \\ (d) f(x) = \frac{1}{e^{x^2+2x}} & (e) f(t) = \sqrt{1 - t^2} & (f) f(x) = \cos(e^{-x}) \end{array}$$

12. Determine o domínio e construa o gráfico das seguintes funções

$$(a) f(x) = \ln x \quad (b) f(x) = \ln \frac{x}{e} \quad (c) f(x) = \ln \frac{1+x}{x}$$

13. Relacione as funções a seguir  $f(x) = \log(x) + x$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{|x| + 1}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$ , e  $f(x) = \sqrt{x}$  com os gráficos da Figura 2.

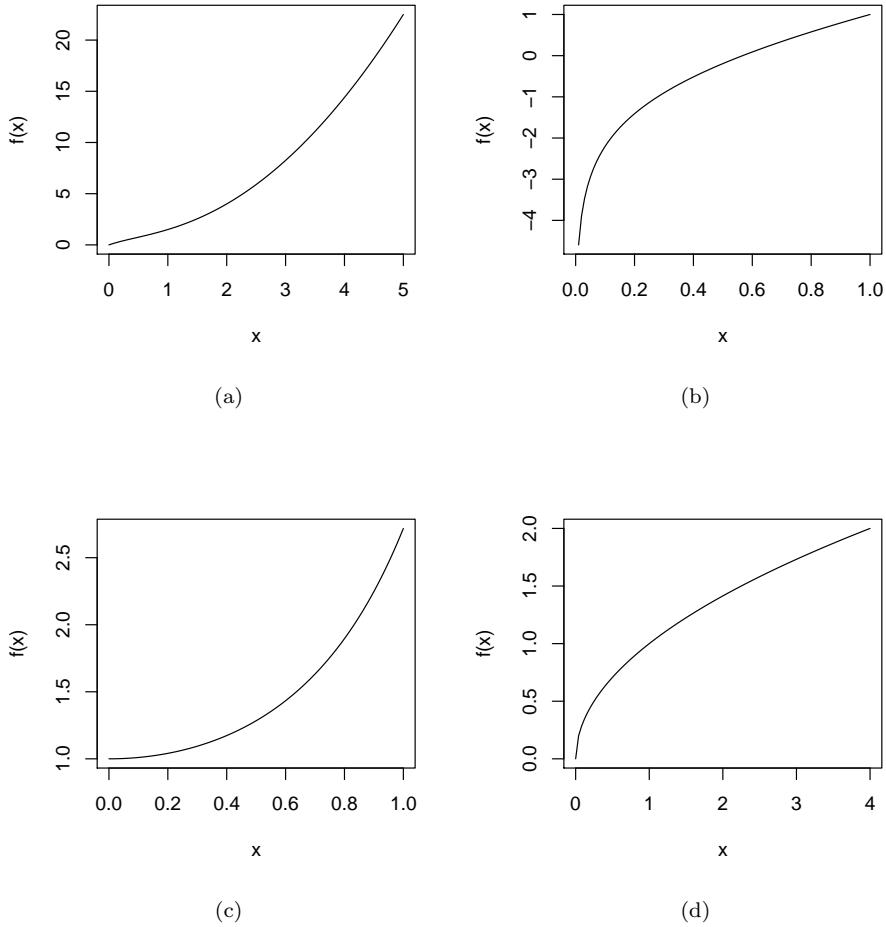


Figure 2: Figuras utilizadas para o exercício 11

14. Curvas de crescimento são muito utilizadas nas áreas de biologia e ciências agrárias para quantificar, por exemplo, a massa de animais e vegetais e o crescimento populacional de microorganismos. Assim, supondo que o crescimento populacional de uma determinada bactéria em função do tempo ( $t$ ) pode ser descrita pela função de Gompertz dada por

$$f(t) = a \exp [-\exp (b - ct)].$$

Assumindo que  $a = 3$ ,  $b = 2$  e  $c = 1$ .

- (a) Construa o gráfico da função

④ You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

- (b) Em quando tempo o tamanho da população de bactérias irá passar de 100 para 1000?
15. A partir da Figura 3 determine a função definida por partes utilizando conhecimentos de geometria e trigonometria. Além disso, determine o domínio e imagem dessa função.

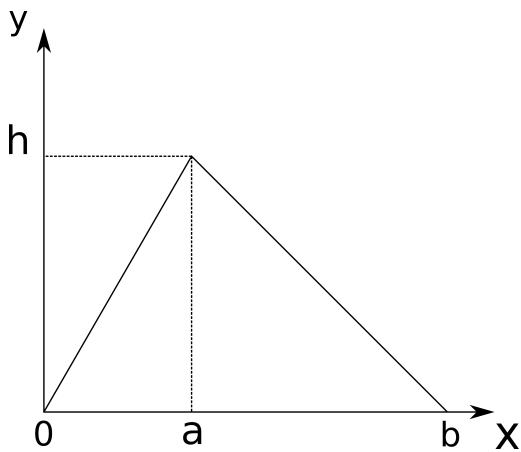


Figure 3: Figura para o exercício 15

16. Determine as funções inversas ( $f^{-1}(x)$ )
- (a)  $f(x) = e^x$       (b)  $f(x) = \frac{x}{1-x}$       (c)  $f(x) = x^2 + 2x$   
 (d)  $f(x) = \sqrt{x}$       (e)  $f(x) = \frac{a+x}{b-x}$       (f)  $f(x) = \cos(x)$