

Pré-cálculo: teoria dos conjuntos e funções

Thiago de Paula Oliveira

Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

9 de fevereiro de 2018

Diferença entre equação e função

- 1 Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;
- 2 Funções são apenas tipos específicos de equações
 - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x ;

Diferença entre equação e função

- ① Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;
- ② Funções são apenas tipos específicos de equações
 - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x ;
 - Ex. 1: $y = x + 3$,

Diferença entre equação e função

- ① Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;
- ② Funções são apenas tipos específicos de equações
 - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x ;
 - Ex. 1: $y = x + 3$, é uma função para $\forall x \in \mathbb{R}$;

Diferença entre equação e função

- ① Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;
- ② Funções são apenas tipos específicos de equações
 - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x ;
 - Ex. 1: $y = x + 3$, é uma função para $\forall x \in \mathbb{R}$;
 - Ex. 2: $y^2 + x^2 = 1$

Diferença entre equação e função

- ① Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;
- ② Funções são apenas tipos específicos de equações
 - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x ;
 - Ex. 1: $y = x + 3$, é uma função para $\forall x \in \mathbb{R}$;
 - Ex. 2: $y^2 + x^2 = 1$ não é uma função $\forall x \in (-1, 1)$, múltiplos valores para y ;

Diferença entre equação e função

- 1 Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;
- 2 Funções são apenas tipos específicos de equações
 - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x ;
 - Ex. 1: $y = x + 3$, é uma função para $\forall x \in \mathbb{R}$;
 - Ex. 2: $y^2 + x^2 = 1$ não é uma função $\forall x \in (-1, 1)$, múltiplos valores para y ;

Tabela: Diferença entre equação e função

Equação	Função
$y = x^2 + 1$	$f(x) = x^2 + 1$
(x, y)	$(x, f(x))$

Definição

Função: *Sejam A e B dois conjuntos não vazios, uma função definida em A e com valores em B é uma lei que associa a cada elementos $x \in A$ um único valor $y \in B$.*

Notação:

$$f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

- 1 Quando $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ a função é dita real de variável real.
- 2 O conjunto A é denominado domínio da função, enquanto que o conjunto B é o contradomínio

Teste da linha vertical

- 1 Muitas das equações estudadas em cálculo são funções. No entanto, nem todas as equações são funções.
- 2 Apenas funções podem passar no teste da linha vertical;
- 3 **Teste:** $f(x)$ só será uma função no intervalo $[a, b]$ se para qualquer reta perpendicular ao eixo x (vertical) exista apenas um ponto de intersecção com y .

Domínio, contra-domínio e imagem

Definição

Domínio: *O domínio de uma função é dado por todos os valores de $x \in A$ tal que $f(x)$ exista.*

Domínio, contra-domínio e imagem

Definição

Domínio: O domínio de uma função é dado por todos os valores de $x \in A$ tal que $f(x)$ exista.

Definição

Imagem: Seja $y = f(x)$ uma função definida em A com valores em B , o conjunto imagem da função é definido por $Im(f) = \{y \in B | y = f(x)\}$

Domínio, contra-domínio e imagem

Definição

Domínio: O domínio de uma função é dado por todos os valores de $x \in A$ tal que $f(x)$ exista.

Definição

Imagem: Seja $y = f(x)$ uma função definida em A com valores em B , o conjunto imagem da função é definido por $Im(f) = \{y \in B | y = f(x)\}$

Definição

Contra-domínio: É o conjunto que contém todas as imagens possíveis para a função.

Domínio, contra-domínio e imagem

Definição

Domínio: O domínio de uma função é dado por todos os valores de $x \in A$ tal que $f(x)$ exista.

Definição

Imagem: Seja $y = f(x)$ uma função definida em A com valores em B , o conjunto imagem da função é definido por $Im(f) = \{y \in B | y = f(x)\}$

Definição

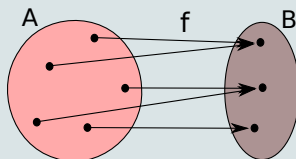
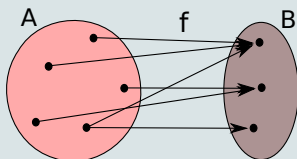
Contra-domínio: É o conjunto que contém todas as imagens possíveis para a função.

Exemplos: (a) $f(x) = x + 1$, (b) $f(x) = \frac{3}{x+1}$, (c) $y = \sqrt{x-3}$

Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

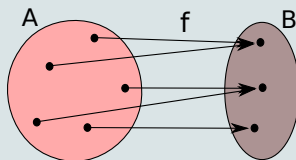
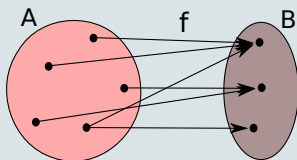
Sobrejetora: Seja uma função $f : A \rightarrow B$. A função f é sobrejetora, se e somente se, para todo elemento $x_1 \in A$ existir um elemento de $y_1 \in B$ tal que $f(x_1) = y_1$, ou seja, $CD(f) = Im(f)$.



Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

Sobrejetora: *Seja uma função $f : A \rightarrow B$. A função f é sobrejetora, se e somente se, para todo elemento $x_1 \in A$ existir um elemento de $y_1 \in B$ tal que $f(x_1) = y_1$, ou seja, $CD(f) = Im(f)$.*

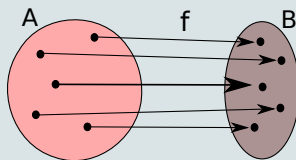
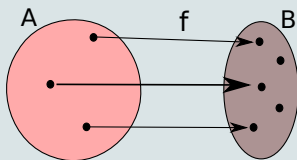


$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \text{ dada por } f(x) = x^2$$

Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

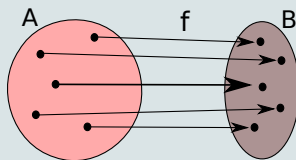
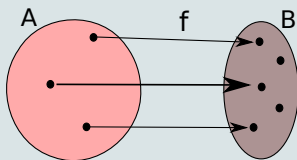
Injora: Seja uma função $f : A \rightarrow B$. A função f é injetora quando para quaisquer elementos $x_1 \neq x_2 \in A$ resulte em $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$.



Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

Injora: Seja uma função $f : A \rightarrow B$. A função f é injetora quando para quaisquer elementos $x_1 \neq x_2 \in A$ resulte em $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$.

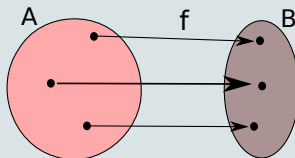


$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = x^2$$

Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

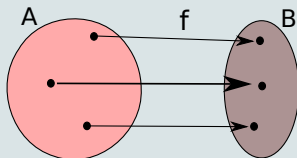
Bijetora: Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.



Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

Bijetora: Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.



$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \text{ dada por } f(x) = x^2$$

Exemplos

- 1 $f(x) = x$, para $\forall x \in \mathbb{R}$
- 2 $f(x) = x^2$, para $\forall x \in [-1, 2]$
- 3 $f(x) = x^3$, para $\forall x \in [-2, 2]$
- 4 $f(x) = |x|$, para $\forall x \in \mathbb{R}$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:

① $h(x) = f(x) + g(x) =$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:

① $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2};$

② $h(x) = f(x) \times g(x) =$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:

❶ $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2};$

❷ $h(x) = f(x) \times g(x) = 1 + x;$

❸ $h(x) = f(g(x)) =$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:

❶ $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2};$

❷ $h(x) = f(x) \times g(x) = 1 + x;$

❸ $h(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1+x}{x^2}\right)^2;$

❹ $h(x) = f(g(x)) =$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:

❶ $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2};$

❷ $h(x) = f(x) \times g(x) = 1 + x;$

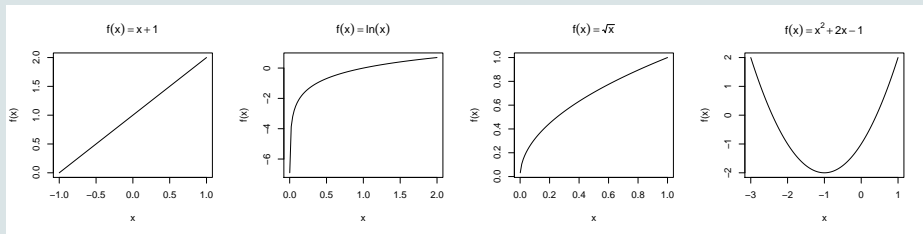
❸ $h(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1+x}{x^2}\right)^2;$

❹ $h(x) = f(g(x)) = [f(x)]^{g(x)} = x^{\frac{2+2x}{x^2}}$

Visualização de funções

A forma mais comum de visualizar uma função é por meio gráfico. Se f é uma função com domínio D , então seu gráfico é o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}$$

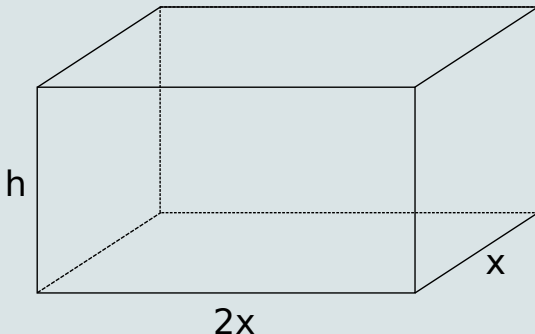


Exemplo

Exemplo: Um container retangular para estoque de alimentos tem o seu topo aberto e deve ter um volume de $10m^3$. O tamanho de seu comprimento deve ser duas vezes sua largura. O material para a base tem um custo de 30 reais por metro quadrado; o material para as laterais tem um custo de 20 reais por metro quadrado. Expresse o custo de materiais como uma função da largura de sua base.

Exemplo

Exemplo: Um container retangular para estoque de alimentos tem o seu topo aberto e deve ter um volume de $10m^3$. O tamanho de seu comprimento deve ser duas vezes sua largura. O material para a base tem um custo de 30 reais por metro quadrado; o material para as laterais tem um custo de 20 reais por metro quadrado. Expresse o custo de materiais como uma função da largura de sua base.



Definição

Monotonicidade: *seja $y = f(x)$ uma função real e (a, b) um subintervalo do domínio dessa função, se:*

- 1 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ se verifique $f(x_1) < f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente crescente em (a, b)
- 2 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 > x_2$ se verifique $f(x_1) > f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente decrescente em (a, b)
- 3 Quando a função é crescente ou decrescente em todo o seu domínio diz-se que ela é absolutamente monótona

Definição

Monotonicidade: *seja $y = f(x)$ uma função real e (a, b) um subintervalo do domínio dessa função, se:*

- 1 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ se verifique $f(x_1) < f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente crescente em (a, b)
- 2 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 > x_2$ se verifique $f(x_1) > f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente decrescente em (a, b)
- 3 Quando a função é crescente ou decrescente em todo o seu domínio diz-se que ela é absolutamente monótona

Ex.: (a) $f(x) = x + 2$ (b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Paridade de funções

- ❶ Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade de simetria em relação à origem:

$$x \in A \implies -x \in A$$

- ❶ Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **par** se $f(x) = f(-x)$;
- ❷ Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$;

Paridade de funções

❶ Propriedades:

- ❶ A única função que é par e ímpar ao mesmo tempo é a função nula ($f(x) = 0$);
- ❷ Há funções que não são pares e nem ímpares;
- ❸ Uma função ímpar definida na origem é nula na origem;
- ❹ A soma de duas funções de mesma paridade mantém essa paridade;
- ❺ O produto de duas funções com paridades distintas é uma função ímpar;
- ❻ A derivada de uma função par é uma função ímpar;
- ❼ A derivada de uma função ímpar é uma função par;

Paridade de funções

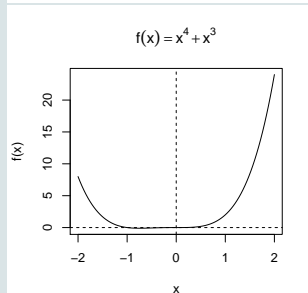
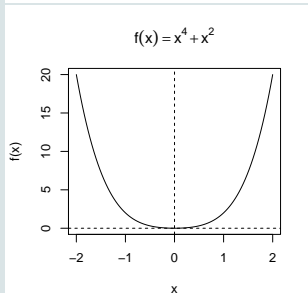
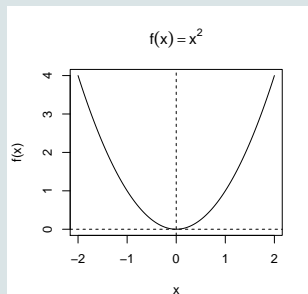
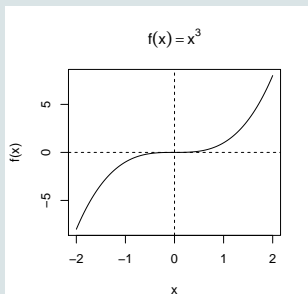
Exercício: Seja $f(x) = x^5$ e $g(x) = 1 - x^4$, verifique a paridade:

(a) $h(x) = f(x) + f(x)$ (b) $h(x) = f(x) \times f(x)$

(c) $h(x) = g(x) + f(x)$ (d) $h(x) = f(x) \times g(x)$

(e) $h(x) = x^3 + x^2$ (f) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

Gráfico: paridade



Definição

Função composta: considere três conjuntos não vazios, A , B e C e duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$, tais que:

$$g : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto g(x) \end{cases} \quad f : \begin{cases} B \rightarrow C \\ g(x) \mapsto f(g(x)) \end{cases} \quad (1)$$

- $f(g(x))$ é denominada função composta de f em $g \rightarrow f \circ g(x)$
- O domínio de $f \circ g(x)$ é determinado pelos valores reais de x para os quais $g(x)$ exista, sendo que todos os valores reais de $g(x)$ estarão no domínio de f .

Definição

Função composta: considere três conjuntos não vazios, A , B e C e duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$, tais que:

$$g : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto g(x) \end{cases} \quad f : \begin{cases} B \rightarrow C \\ g(x) \mapsto f(g(x)) \end{cases} \quad (1)$$

- $f(g(x))$ é denominada função composta de f em $g \rightarrow f \circ g(x)$
- O domínio de $f \circ g(x)$ é determinado pelos valores reais de x para os quais $g(x)$ exista, sendo que todos os valores reais de $g(x)$ estarão no domínio de f .

Funções compostas

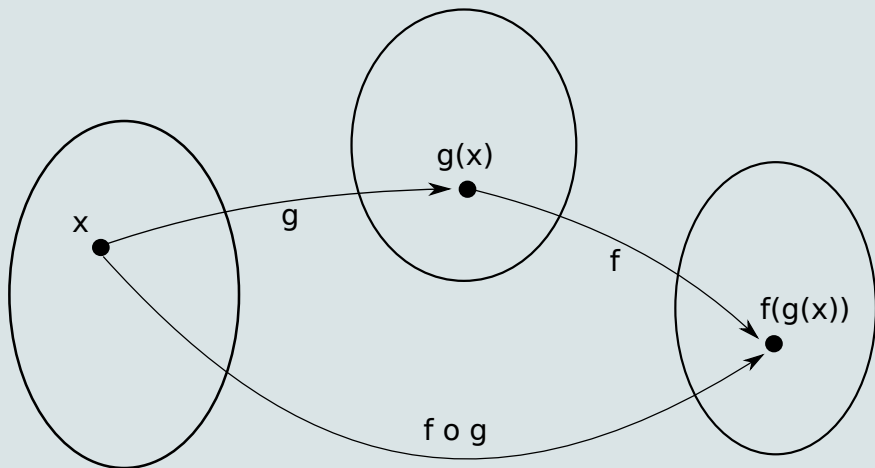


Figura: Ilustração da composição das funções $f(x)$ e $g(x)$

Exemplos

Seja $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcule

- 1 Encontre as leis e propriedades das funções $f \circ g(x)$ e $g \circ f(x)$.
 - i) Propriedades: domínio, imagem, se ela é sobrejetora, injetora ou bijetora e monotonicidade.
- 2 $f(g(2))$
- 3 $f(g(-1))$

Funções definidas por partes

- 1 Uma função pode ser definida por diferentes fórmulas em diferentes partes do seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Funções definidas por partes

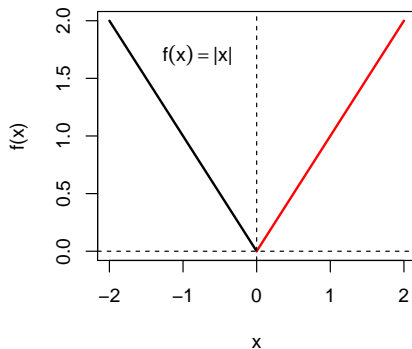
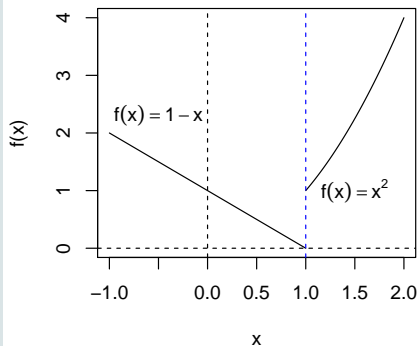
- 1 Uma função pode ser definida por diferentes fórmulas em diferentes partes do seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (2)$$

- 2 Outra função definida por partes é a função modular $|x| \geq 0$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Gráfico



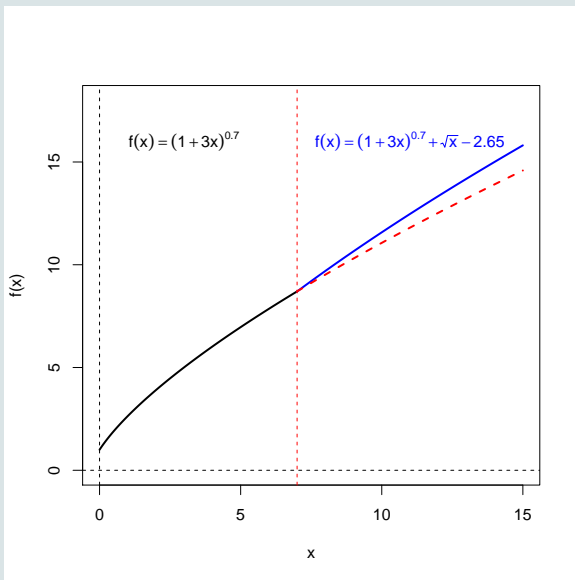
Exemplos

Em um experimento utilizando uma espécie de tesourinha (*Doru ssp.*) o pesquisador avalia o seu crescimento ao longo do tempo (dias). Suponha que o crescimento (mm) do inseto em função do tempo pode ser descrita pela função

$$f(x) = (a + b x)^c, \quad \forall a, b > 0 \text{ e } 0 < c < 1.$$

Agora, suponha que para o intervalo de dias $t \in [0, 7)$ o crescimento do inseto seja dado por $g(x) = f(x)$ enquanto que para o intervalo de dias $t \in (7, 15]$ seja dado por $g(x) = f(x) + h(x)$. Defina a função $g(x)$ para cada um dos intervalos sabendo que $h(x) = \sqrt{x} - 2.65$. Esboce o gráfico da função considerando $a = 1$, $b = 3$, $c = 0.7$.

Gráfico



Definição

Valor absoluto ou módulo. Para qualquer número real x , o valor absoluto ou módulo de x é denotado por $|x|$, o qual é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O valor absoluto de x é sempre um valor positivo ou nulo, porém nunca negativo, mesmo para $x < 0$.

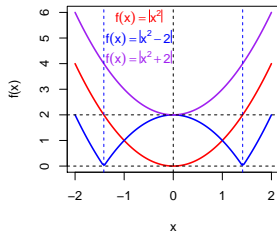
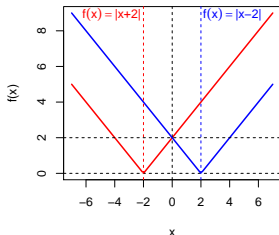
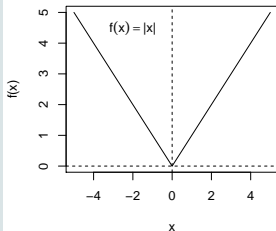
Função modular

Definição

Valor absoluto ou módulo. Para qualquer número real x , o valor absoluto ou módulo de x é denotado por $|x|$, o qual é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O valor absoluto de x é sempre um valor positivo ou nulo, porém nunca negativo, mesmo para $x < 0$.



Função modular: propriedades

Propriedades fundamentais:

① $|x| = \sqrt{x^2}$

② $|x| \geq 0 \implies$ não-negativo;

③ $|x| = 0 \iff x = 0$

④ $|xy| = |x||y| \implies$ multiplicatividade;

⑤ $|x + y| \leq |x| + |y| \implies$ subaditividade (desigualdade triangular)

⑥ $|-x| = |x| \implies$ simétrica em relação ao eixo Oy

⑦ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ para $y \neq 0 \implies$ preservação da divisão

Função modular: exemplo

Sejam as funções $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = |x|$. Esboce os gráficos especificando o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções a seguir:

❶ $g \circ f(x) = g(f(x))$

❷ $f \circ g(x) = f(g(x))$

Função exponencial

- 1 São funções da forma a^x , e que a é uma constante positiva
- 2 Caso especial: quando $a = e$, em que e é o número de Leonhard Euler (1727)
- 3 $e \approx 2.71828$
- 4 pode ser expresso como e^x ou $\exp(x)$

Exemplo I

A função de Shumacher (1939) foi a primeira tentativa de definir uma função para relacionar o crescimento florestal com o tempo. A função baseia-se na hipótese de que a taxa relativa de crescimento decresce de forma não linear ao longo do tempo e é dada por

$$f(t) = a \exp\left(-k\frac{1}{t}\right),$$

em que a é uma constante real.

Faça o gráfico da função assumindo $a = 10$ e $t = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Interprete.

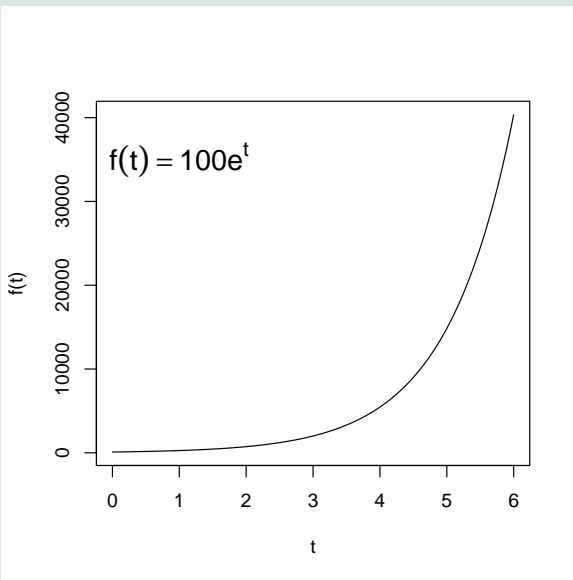
Exemplo II

Suponha um experimento em que uma cultura de bactéria contendo 100 indivíduos é colocada em um recipiente contendo um determinado conteúdo nutritivo. Então, pose-de quantificar o número de bactérias em função do tempo, ou seja, $N = f(t)$, em que N é o número de bactérias. Supondo $f(t) = 100 e^t$, a Tabela 1 apresenta o resultado desse experimento:

Tabela: N como uma função de t

Tempo (horas)	$N = f(t)$
0	100
1	272
2	739
3	2.009
4	5.460
5	14.841
6	40.343

Faça o esboço do gráfico da função.



Definição

Uma função f é chamada função um-para-um se quaisquer dois elementos de $x_1, x_2 \in A$ não tem a mesma imagem, ou seja,

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1 \neq x_2.$$

Portanto, a função inversa (f^{-1}) existirá, sem perda de generalidade, se e somente se f for uma função bijetora.

Função inversa

Definição

Uma função f é chamada função um-para-um se quaisquer dois elementos de $x_1, x_2 \in A$ não tem a mesma imagem, ou seja,

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1 \neq x_2.$$

Portanto, a função inversa (f^{-1}) existirá, sem perda de generalidade, se e somente se f for uma função bijetora.

Cuidado: O -1 de f não é um expoente.

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$$

Definição

Uma função f é chamada função um-para-um se quaisquer dois elementos de $x_1, x_2 \in A$ não tem a mesma imagem, ou seja,

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1 \neq x_2.$$

Portanto, a função inversa (f^{-1}) existirá, sem perda de generalidade, se e somente se f for uma função bijetora.

Cuidado: O -1 de f não é um expoente.

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$$

Exemplos:

① $g(x) = x^2$, para $x \in [-3, 3]$ e $g(x) = x^2$, para $x \in [0, 3]$

② $g(x) = x$, para $x \in [-3, 3]$

Definição

Seja f uma função um-para-um com domínio A e imagem B . Então, sua função inversa f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \quad \forall y \in B.$$

Passo a passo para encontrar uma função um-para-um

- 1 Escreva $y=f(x)$
- 2 Resolva essa equação para x em função de y , caso possível.
- 3 Expresse f^{-1} como uma função de x , trocando x e $y \iff y = f^{-1}(x)$

Função inversa

Definição

Seja f uma função um-para-um com domínio A e imagem B . Então, sua função inversa f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \quad \forall y \in B.$$

Passo a passo para encontrar uma função um-para-um

- 1 Escreva $y=f(x)$
- 2 Resolva essa equação para x em função de y , caso possível.
- 3 Expresse f^{-1} como uma função de x , trocando x e $y \iff y = f^{-1}(x)$

Exemplos: (a) $f(x) = x + 1$ (b) $f(x) = x^3 + 2$

Função inversa

Suponha um experimento em que uma cultura de bactéria contendo 100 indivíduos é colocada em um recipiente contendo um determinado conteúdo nutritivo. Então, pose-de quantificar o número de bactérias em função do tempo, ou seja, $N = f(t)$, em que N é o número de bactérias.

Supondo $f(t) = 100 e^t$ e $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, faça uma tabela para $N = f(t)$ e outra $t = f^{-1}(N)$.

Função inversa

Suponha um experimento em que uma cultura de bactéria contendo 100 indivíduos é colocada em um recipiente contendo um determinado conteúdo nutritivo. Então, pose-de quantificar o número de bactérias em função do tempo, ou seja, $N = f(t)$, em que N é o número de bactérias.

Supondo $f(t) = 100 e^t$ e $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, faça uma tabela para $N = f(t)$ e outra $t = f^{-1}(N)$.

Tabela: (a) número de bactérias em função do tempo e (b) tempo em função do número de bactérias

(a) $N = f(t)$	
t (horas)	$N = f(t)$
0	100
1	272
2	739
3	2.009

(b) $t = f^{-1}(N)$	
N	$t = f^{-1}(N)$
100	0
272	1
739	2
2.009	3

Função inversa: gráfico

Função logarítmica

Definição

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ pode ser crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$). Assim, sua função inversa f^{-1} é chamada função logarítmica com base a e é denotada por \log_a , ou seja,

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Função logarítmica

Definição

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ pode ser crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$). Assim, sua função inversa f^{-1} é chamada função logarítmica com base a e é denotada por \log_a , ou seja,

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Definição

Leis dos logaritmos. Se x e y são números positivos, então

- ① $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- ② $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- ③ $\log_a (x^b) = b \log_a x$, com $b \in \mathbb{R}$

Função logarítmica

Propriedades

① $\log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

② $a^{\log_a x} = x, \forall x > 0$

Função logarítmica

Propriedades

① $\log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

② $a^{\log_a x} = x, \forall x > 0$

Exemplos:

① Use as leis dos logaritmos para calcular

a) $\log_4 20 + \log_4 10$

b) $\log_2 10 - \log_2 2$

② Simplifique

① $\log_a b^3 - 3 \log_a c + 3^{\log_3 b}$

② $\log_a (2b^2 + 2) - \log_a [2(b^2 + 2bc + c^2)]$

Logaritmo natural

Definição

O logaritmo cuja base é o número e chama-se logaritmo natural e tem uma notação especial

$$\log_e x = \ln x.$$

Utilizando as definições e propriedades dos logaritmos temos que:

① $\ln x = y \iff e^y = x$

② $\ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

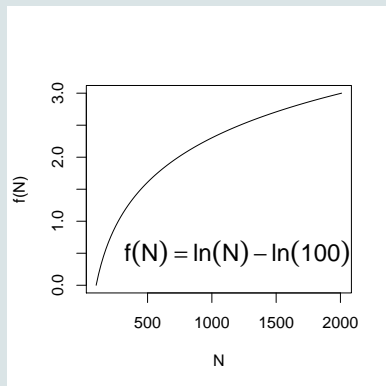
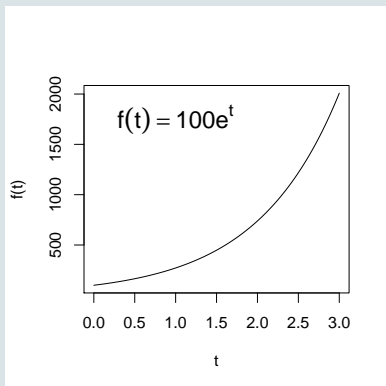
③ $e^{\ln x} = x, \forall x > 0$

Exemplo:

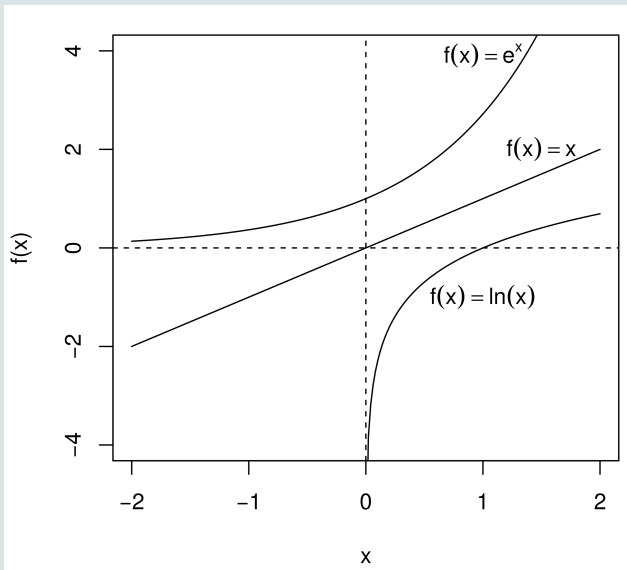
① Calcule a inversa de $f(t) = 100 e^x$

② Encontre o domínio e a imagem de $f(x) = 1 + e^{x^2}$ e de $f(x) = e^{-x}$

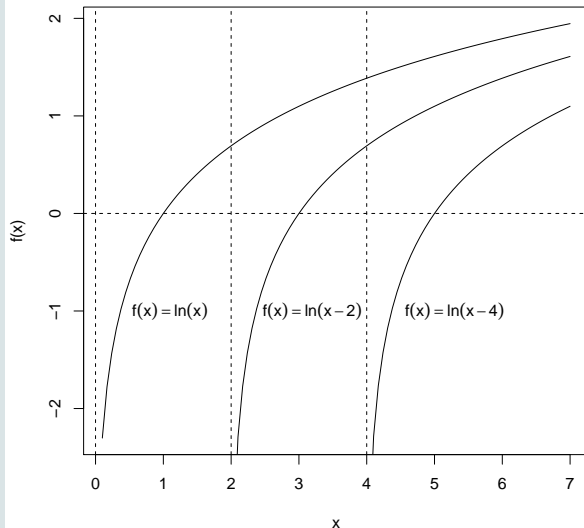
Gráfico: experimento bactéria



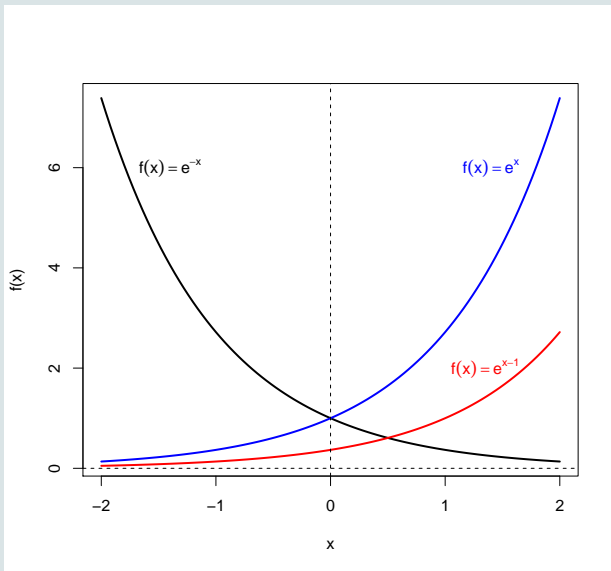
Gráfico



Gráfico

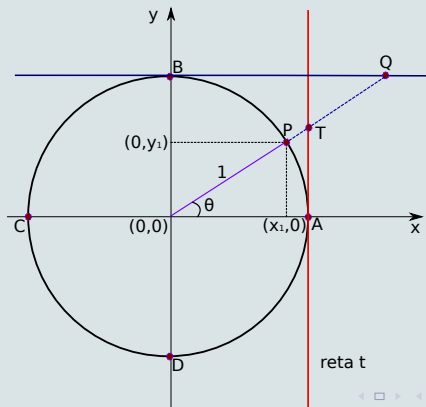


Gráfico



Funções trigonométricas: seno e cosseno

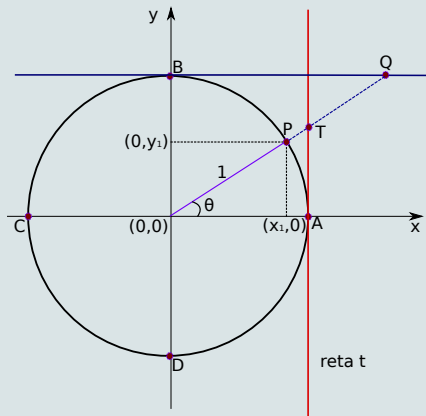
- 1 Funções trigonométricas são funções de um ângulo. Elas relacionam os ângulos de um triângulo com o comprimento de seus lados.
- 2 São utilizadas para modelar fenômenos periódicos como o som, direção do vôo de pássaros, variações na temperatura média



Funções trigonométricas: seno e cosseno

Considere, no primeiro quadrante, o ângulo θ que define o arco \widehat{AP} . Por definição:

$$\textcircled{1} \quad \sin \theta = \sin \widehat{AP} = y_1 \quad \text{e} \quad \cos \theta = \cos \widehat{AP} = x_1$$



Funções trigonométricas: seno e cosseno

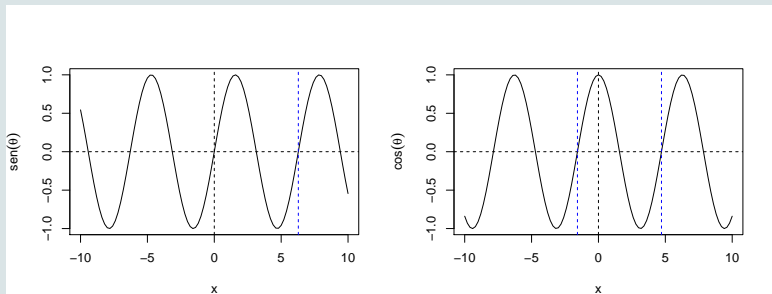
❶ Domínio: $D(f(\theta)) = \{\theta \in \mathbb{R}\}$

❷ Contra-domínio: $CD(f(\theta)) = \{y \in [-1, 1]\}$

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

❸ Uma propriedade importante: função periódica cujo período é 2π

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

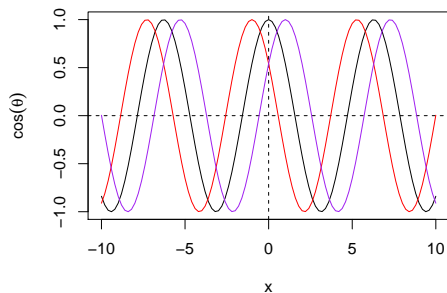
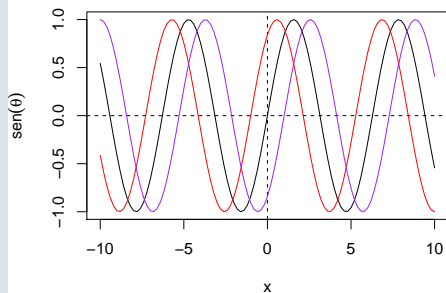


Funções trigonométricas: seno e cosseno

Preto: $\sin \theta$ e $\cos \theta$

Vermelho: $\sin(\theta + 1)$ e $\cos(\theta + 1)$

Roxo: $\sin(\theta - 1)$ e $\cos(\theta - 1)$



Funções trigonométricas: tangente

- ❶ Relaciona as funções seno e cosseno:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

- ❷ Ela não é definida quando $\cos \theta = 0$, ou seja,

$$\theta \neq \left\{ \dots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \right\} = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

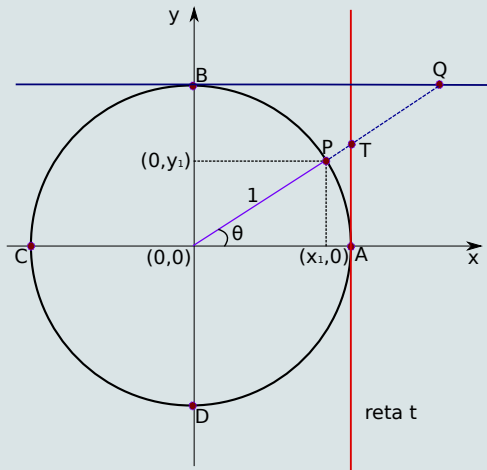
- ❸ Domínio: $D(f(\theta)) = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

- ❹ Contra-domínio: $CD(f(\theta)) = \{y \in [-\infty, \infty]\}$

Funções trigonométricas: tangente

Considere, no primeiro quadrante, o ângulo a que define o arco \widehat{AP} . Por definição:

$$\textcircled{1} \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \widehat{AP} = \overline{AT} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} \widehat{AP} = \overline{BQ}$$



Relações trigonométricas fundamentais

Definição

Seja θ um ângulo associado a um arco \widehat{AM} e $k \in \mathbb{Z}$. Podemos definir as seguintes identidades trigonométricas:

$$\textcircled{1} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \theta \neq k\pi$$

$$\textcircled{4} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\textcircled{5} \quad \operatorname{cotg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \theta \neq k\pi$$

$$\textcircled{6} \quad \sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta, \quad \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

Definição

Função trigonométrica: *é toda função definida por uma relação trigonométrica. Ao definir essa função deve-se observar:*

- 1 *as condições de sua existência (domínio)*
- 2 *o conjunto imagem*
- 3 *o **período** da função*

Função trigonométrica

Definição

Função trigonométrica: *é toda função definida por uma relação trigonométrica. Ao definir essa função deve-se observar:*

- 1 *as condições de sua existência (domínio)*
- 2 *o conjunto imagem*
- 3 *o período da função*

Definição

Função periódica: *uma função $y = f(x)$, com $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, é dita periódica se existe um número positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in D$. O menor valor de p para o qual se verifica essa relação é chamado de período da função.*

Função trigonométrica

Considere a função

$$f : \begin{cases} \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R} \\ \theta \mapsto y = \cos \theta \end{cases}$$

cujo gráfico é denifido na Figura 2. Determine o domínio, imagem e periodicidade (p).

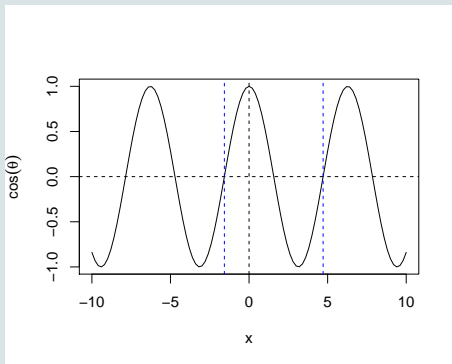


Figura: Função cosseno

Função trigonométrica

- 1 Domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $Im(f) = [-1, 1]$;
- 2 $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, o período da função é $p = 2\pi$.
- 3 A função cosseno da forma como está definida não admite inversa \implies

Função trigonométrica

- 1 Domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $Im(f) = [-1, 1]$;
- 2 $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, o período da função é $p = 2\pi$.
- 3 A função cosseno da forma como está definida não admite inversa \implies não é bijetora.
- 4 Considere $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a função $\cos \theta$ possui inversa? Justifique.

Função trigonométrica

- 1 Domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $Im(f) = [-1, 1]$;
- 2 $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, o período da função é $p = 2\pi$.
- 3 A função cosseno da forma como está definida não admite inversa \implies não é bijetora.
- 4 Considere $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a função $\cos \theta$ possui inversa? Justifique.

$$f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \\ \theta \mapsto y = \cos \theta \end{cases}$$

A função passa a ser bijetora e, portanto, existe f^{-1}

$$f^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ y \mapsto \arcsen y \end{cases}$$

Exercícios

- 1 Expresse a função $f(x) = (2x + x^2)^2$ na forma $f \circ g$.
- 2 Esboce o gráfico da função $f(x) = |x + 2|$
- 3 Uma companhia elétrica cobra uma taxa base de 10 reais por mês mais 6 centavos por kilowatt-hora (kWh) para os primeiros 1200 kWh. Ultrapassado esse limite, são cobrados 7 centavos por kWh adicional mais uma taxa de 100 reais. Expresse o custo mensal C como uma função da quantidade x , em kWh, de energia consumida. Em seguida, faça o gráfico da função C para $0 \leq x \leq 2.000$.
- 4 Encontre o domínio e a imagem das funções $f(x) = |x| - x$ e $f(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$.

Funções polinomiais: função do 1º grau

Definição

função do 1º grau: A função $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax + b \end{cases}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é uma função do primeiro grau.

- 1 Raiz da função: $x = -\frac{b}{a}$
- 2 O gráfico de f é uma reta, cujo coeficiente angular é dado por $a = \operatorname{tg} \theta$.
- 3 Taxa de crescimento ou decrescimento; constante;
- 4 Essa reta intercepta o eixo Oy no ponto $(0, b)$;
- 5 se $a = 0$ tem-se a função constante $f(x) = b$, cuja reta é constante ao eixo Ox ;

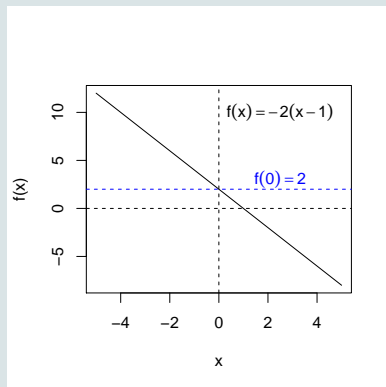
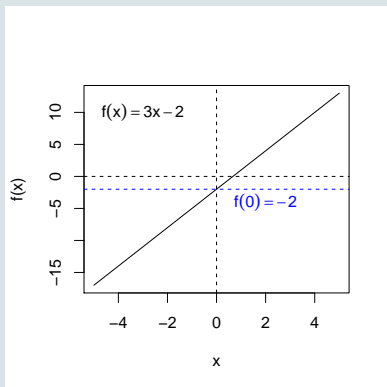
Funções polinomiais: função do 1º grau

- 1 Se $b = 0$ tem-se a função linear $f(x) = ax$, cuja reta passa pela origem;
- 2 Se $a, b \neq 0$ a função é denominada afim;
- 3 Se $a > 0$ a função é absolutamente crescente para $\forall x \in \mathbb{R}$;
- 4 Se $a < 0$ a função é absolutamente decrescente para $\forall x \in \mathbb{R}$;

Exemplo:

Esboce o gráfico das funções $f(x) = 3x - 2$ e $f(x) = -2(x - 1)$. Essas funções possuem inversa? Justifique.

Gráfico: função do 1º grau



Funções polinomiais: função do 2º grau

Definição

função do 2º grau. A função $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma função do segundo grau ou quadrática.

- ❶ Raízes da função (Báskara): $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$

Funções polinomiais: função do 2º grau

Definição

função do 2º grau. A função $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma função do segundo grau ou quadrática.

- 1 Raízes da função (Báskara): $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$
- 2 Se $\Delta < 0$, então a função não terá raízes reais;
- 3 Se $\Delta = 0$, a função terá duas raízes reais idênticas;

Funções polinomiais: função do 2º grau

Definição

função do 2º grau. A função $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma função do segundo grau ou quadrática.

- 1 Raízes da função (Báskara): $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$
- 2 Se $\Delta < 0$, então a função não terá raízes reais;
- 3 Se $\Delta = 0$, a função terá duas raízes reais idênticas;
- 4 O gráfico dessa função é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy

Funções polinomiais: função do 2º grau

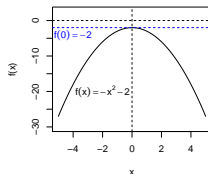
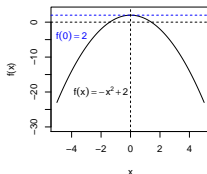
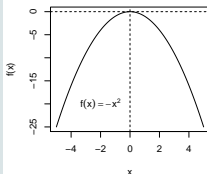
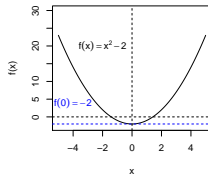
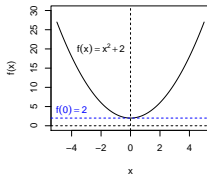
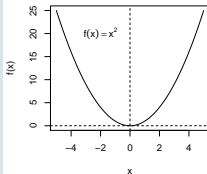
Definição

função do 2º grau. A função $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma função do segundo grau ou quadrática.

- 1 Raízes da função (Báskara): $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$
- 2 Se $\Delta < 0$, então a função não terá raízes reais;
- 3 Se $\Delta = 0$, a função terá duas raízes reais idênticas;
- 4 O gráfico dessa função é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy
- 5 Concavidade: $a > 0$ concava para cima ou $a < 0$ concava para baixo;

Funções polinomiais: função do 2º grau

- 1 As coordenadas do vértice da parábola são $\left(x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = -\frac{\Delta}{4a}\right)$;
- 2 Se $a > 0$, então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq y_v\}$ ou se $a < 0$, então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq y_v\}$;



Funções polinomiais: exemplos

Encontre o domínio, conjunto imagem e vértice da parábola, estude a monotonicidade e paridade e esboce o gráfico das seguintes funções:

- 1 $f(x) = -3x + 18$ para $\forall x \in \mathbb{R}$;
- 2 $f(x) = x^2 - 2x - 15$ para $\forall x \in \mathbb{R}$;
- 3 $f(x) = -x^2 + x + 5$ para $\forall x \in \mathbb{R}$;

Classificação de funções

- 1 Polinomial: Linear, Quadrática, Cúbica, ...
- 2 Potência: Raiz quadrada, recíproca ($y = 1/x$)
- 3 Racional: $\frac{x^3+2}{x^2+x}$
- 4 Funções transcendentes: logarítmica, exponencial, trigonométricas, inversa trigonométricas
- 5 Algébricas: combinação das demais funções;