Cálculo diferencial e integral

Limites e continuidade: parte II

Thiago de Paula Oliveira

February 14, 2018

1. Prove que os seguintes limites não existem.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2+x} \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} \qquad c)\ \lim_{x\to 3} \frac{2x^3}{\sqrt{x+6}-3}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \qquad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^3} \qquad f)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

2. Calcule o valor dos limites das funções a seguir utilizando a definição de limites, a qual é dada por: $\lim_{x\to p} f(x) = L$ se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

$$a)\ \lim_{x\to 0} x+2 \qquad b)\ \lim_{x\to -2} x^2+x \qquad c)\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to -1} x^3 \qquad e)\ \lim_{x\to 6} x^2-4x+4 \qquad f)\ \lim_{x\to 0} x^3+x^2$$

3. O modelo matemático de Henderson e Pabis é um dos modelos utilizados para predizer o fenômeno de secagem de alimentos, sendo dado por $f(t) = a.e^{-kt}$ em que os valores de $f(t)$ representa a umidade do produto, adimensional; t é tempo de secagem; k é o coeficiente de secagem e a é uma constante qualquer. Calcule o valor do limite dessa função para:

   a) $a = 1$, $k = 2$ e $t \to 5$ b) $a = 2$, $k = -1$ e $t \to 5$

   c) $a = 1$, $k = 2$ e $t \to 10$ d) $a = 2$, $k = -1$ e $t \to 10$

   e) $a = 1$, $k = 2$ e $t \to \infty$ f) $a = 2$, $k = -1$ e $t \to \infty$

   g) Para os casos de a a f quais são as conclusões? Na prática, essas conclusões fazem sentido?

4. Curvas de crescimento são muito utilizadas nas áreas de biologia e ciências agrárias para quantificar, por exemplo, a massa de animais e vegetais e o crescimento populacional de microorganismos. Assim, supondo que o crescimeto populacional de uma determinada bactéria em função do tempo (t) pode ser descrita pela função de Gompertz dada por

$$f(t) = ae^{-e^{(b-ct)}}$$

   (a) Assumindo que $a = 3$, $b = 2$ e $c = 1$. Calcule $\lim_{t\to 0} f(t)$, $\lim_{t\to 2} f(t)$, $\lim_{t\to\infty} f(t)$

(b) Qual é a interpretação dos valores desses limites?

5. Quais das seguintes funções são descontínuas? Prove utilizando limites laterais.

$a) f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad b) f(x) = \dfrac{x^2}{|x|-1}$ $\quad c) f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$d) f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ $\quad e) f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f) f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}$

$g) f(x) = \sec x$ $\quad h) f(x) = \operatorname{cosec} x$ $\quad i) f(x) = \operatorname{tg} x$

$h) f(x) = e^{-x^2}$ $\quad j) f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad k) f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

$$l) f(r) = \begin{cases} \dfrac{x^3+3x}{x^2-2}, & \text{se } 0 < x < \sqrt{2} \cup \sqrt{2} < x < \infty \\ 1, & \text{se } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

6. Utilizando as propriedades de limites mostre que a função $h(x) = 3\sqrt{x-4}$ é contínua no intervalo $x \in [4, \infty)$

7. A força gravitacional que a Terra exerce sobre uma unidade de massa a uma distância d de seu centro é dado por

$$f(d) = \begin{cases} \dfrac{gmd}{r^2}, & \text{se } d < r \\ \dfrac{gm}{d^2}, & \text{se } d \geq r \end{cases}$$

em que g é a constante gravitacional, m é a massa e r é raio da Terra. Pergunta-se: a função $f(d)$ é contínua em d?

8. Seja a função f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$, mostre que existe um valor c tal que $f(c) = 150$.

9. Calcule o valor de a tal que $f(x)$ seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x - 6, & \text{se } x < 4 \\ \\ 2x^3 + ax, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

10. Calcule os valores de a e b tal que $f(x)$ seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{se } x < 3 \\ \\ ax^2 + bx + 3, & \text{se } 3 \leq x < 6 \\ \\ 4x + a - b, & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

11. Prove que as função seno e cosseno são contínuas. Nota: para provar que essas funções são contínuas é preciso mostar que $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ ou $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Se nós supormos que $h = x - a$, então $x = a + h$. Fazendo $h \to 0$, temos

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h)$$

e

$$\lim_{h \to 0} \cos(a + h).$$

12. Calcule o valor dos limites das funções a seguir

$a)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} + 2$ $\quad$ $b)$ $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ $\quad$ $c)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{-x}}$

$d)$ $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^3 e^{\frac{1}{x}}$ $\quad$ $e)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^2 - 4x + 4$ $\quad$ $f)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$

$g)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$ $\quad$ $h)$ $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + ax}$ $\quad$ $i)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

$j)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \cos x e^{-2x}$ $\quad$ $l)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\quad$ $k)$ $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x} e^{x}}{e^{-3x} e^{4x}}$

$m)$ $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$ $\quad$ $n)$ $\displaystyle\lim_{x \to 2\pi^-} x \operatorname{cosec} x$ $\quad$ $o)$ $\displaystyle\lim_{x \to -2^+} \frac{x - 2}{x + 2}$

13. Encontre as assíntotas verticais e horizontais, quando existirem, das funções abaixo. Cheque os resultados utilizando o Wolfram|alpha.

$a) f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x - 4}$ $b) f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $c) f(x) = e^{x^2} e^{-x^3}$

$d) f(x) = \log x$ $e) f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ $f) f(x) = \log(x) + \frac{1}{x}$

$g) f(x) = \log\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ $h) f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ $i) f(x) = \dfrac{1}{\log|x|}$

$j) f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 4}$ $k) f(x) = \dfrac{ax^5 + bx^4}{e^x}$ $l) f(x) = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

14. Determine uma função tal que ela possua assíntotas verticais em $x = -2$ e $x = 2$ e assíntota horizontal em $y = 3$.

15. O modelo de crescimento Malthusiano ou modelo de crescimento exponencial simples pode ser utilizado para explicar o crescimento populacional de espécies baseado em uma taxa constante de crescimento (r) ao longo do tempo (t). O modelo de crescimento Malthusiano tem a seguinte forma

$$f(t) = P_0 e^{rt}$$

em que $f(0) = P_0$ é o tamanho populacional inicial, r é a taxa de crescimento e t é o tempo. Supondo que os valores dos parâmetros que determinam o crescimento populacional da cidade de Piracicaba a partir do ano 1990 seja dado por $P_0 = 200.000$ e $r = 0.025$. Pergunta-se:

(a) Qual será o tamanho da população de Piracicaba ao nos aproximarmos dos anos 2000 ($t = 10$), 2018 ($t = 28$) e 2040 ($t = 50$)?

(b) Em que situação o modelo Malthusiano não deve mais ser utilizado para explicar o crescimento dessa população?

16. Em um estudo observacional, McDonald (1985) contou a frequência de alelos no locus de manose-6-fosfato isomerase (Mpi) na espécie de crustáceo *Megalorchestia californiana* em diferentes latitudes (x). Essa espécie vive em praias arenosas da costa do Pacífico da América do Norte. Assim, o objetivo do pesquisador foi saber se diferentes locais levam a freqüências de alelos diferentes. Notou-se, então, que a frequência de alelos em função da latitude pode ser explicado pela função logística dada por:

$$f(x) = \frac{e^{a+bx}}{1 + e^{a+bx}}. \tag{1}$$

Supondo $a = -7.64$ e $b = 0.17$, responda:

(a) Qual é a frequência de alelos nas latitudes 48,1 ("Port Townsend"), 37,8 ("San Francisco") e 34,3 ("Santa barbara")? Quais são as possíveis conclusões?

(b) Qual é a frequência de alelos quando nos aproximamos das latitudes 30, 40 e 50?

(c) Existem assíntotas verticais e horizontais no gráfico de $f(x)$?

17. Considere a curva $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{Z}$, e os seguintes casos:

i) $n = 0$ *ii)* $n < 0$ e n par *iii)* $n < 0$ e n ímpar

iv) $n > 0$ e n par *v)* $n > 0$ e n ímpar

Para cada um desses casos calcule o valor dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0^-} x^n$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n$ *d)* $\lim\limits_{x\to \infty} x^n$

18. Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 - 2x}{3x^2 + 1} = 2$ e que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 10}{2x^3 + x^2 + 5} = 0$.