

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Pré-Cálculo: Funções e modelos

Thiago de Paula Oliveira

February 10, 2018

② You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

1. Considere $f(x) = 3x^2 + 2x$ e $g(x) = \frac{x}{x^2 + x}$, determine as funções e as simplifique:
- (a) $h(x) = f(x) + 2g(x)$ (b) $h(x) = f(x) \times g(x)$ (c) $h(x) = f(g(x))$
 (d) $h(x) = f(x) \times g^2(x)$ (e) $h(x) = \frac{1}{f(x) + 1} + g(x)$ (f) $h(x) = g(f(x))$
2. O modelo matemático de Henderson e Pabis é um dos modelos utilizados para predizer o fenômeno de secagem de alimentos, sendo dado por $RU = a \cdot e^{-kt}$ em que RU é a razão de umidade do produto, adimensional; t é tempo de secagem; k é o coeficiente de secagem e a é uma constante qualquer. Faça o gráfico da função RU , sabendo que $a = 5$ e $k = 7$.
3. Determine o domínio, imagem e contra-domínio das seguintes funções:
- (a) $f(x) = 2 - 1,5x$ (b) $h(x) = \sqrt{(4 - x^2)}$
 (c) $f(u) = u^2 + 2x$, com $x \in \mathbb{R}$ (d) $f(z) = |z + 2|$
 (e) $g(h) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{|x|}}$ (f) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{se } x > 2 \\ -x^2 + 2x, & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$
 (g) $g(h) = \frac{\log(x)}{2 - x^2}$ (h) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{se } x < -1 \\ -3x^2 + 2x + 4, & \text{se } -1 \leq x < 6 \\ 9, & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$
4. No Brasil a base de cálculo (em reais) para o pagamento do imposto de renda é baseado em uma tabela de alíquota dada na Tabela 1. Essas alíquotas são descontadas do salário do trabalhador mensalmente como forma de contribuição.

Table 1: Tabela anual do Imposto de Renda 2018

Base de cálculo (R\$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IR (R\$)
Até 1.903,98	-	Isento
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,8
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,8
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,69	27,5	869,36

- (a) Faça um gráfico da alíquota em função da base de cálculo e do tempo.
 (b) Se uma pessoa ganha 4550, qual será a contribuição dela no período de um ano?

- (c) Se uma pessoa tem seu salário aumentado de 4.600,00 para 4.700,00 reais, qual será o incremento salarial e de contribuição ao estado no período de um ano?
5. Estude a paridade das seguintes funções:
- $f(x) = x^4 + x^2$
 - $f(x) = -x^3 - x$
 - $f(x) = |x^3|$
 - $f(x) = \sqrt{x^2}$
 - $f(x) = \cos x$
 - $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, para $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$
6. A relação entre as temperaturas medidas em gaus Celsius (C) e Fahrenheit (F) é dada pela função
- $$C = \frac{5(F - 32)}{9}.$$
- Apresente o gráfico da função
 - Calcule o coeficiente angular e o interprete. Faça o mesmo para o intercepto.
7. A tonalidade (h) pode ser definida como uma medida angular como ilustra a Figura 1, logo $h \in [0, 360]$.

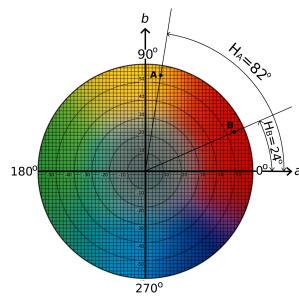


Figure 1: Região das cores pertencentes ao sistema de cores *CIELab* (ou *CIELCh*), com representação de duas cores: A, amarela, em $h = 82^\circ$) e B, vermelha, em que $h = 24^\circ$)
Fonte: Modificado a partir da ColorMetrix

Na área de pós-colheita, a tonalidade da cor é uma variável muito utilizada para descrever curvas de maturação de diversos frutos. Assim, considere que o a função definida por

$$f(t) = 111,09 - 1,65t + 0,0405t^2$$

④ You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

é utilizada para descrever a tonalidade do mamão papaya “Sunrise Solo” ao longo do tempo (t).

- (a) Em quanto tempo o fruto mudará sua tonalidade de verde (120) para amarela (90)?
- (b) Após 5,3 dias qual deve ser a tonalidade do fruto?
- (c) Apresente o gráfico da função;

8. Expresse as funções na forma $f \circ g$

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = (x + 5)^5 & (b) f(x) = \log(x + 4) & (c) f(x) = |e^{x^3}| \\ (d) f(x) = \sqrt{x^2} & (e) f(x) = \cos 2x & (f) f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \end{array}$$

9. Utilize as respostas obtidas para o exercício 8 e calcule $g(f(2))$

10. Obtenha $f \circ g \circ h$

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = 2x + 1, & g(x) = x^2, & h(x) = \frac{1}{x} \\ (b) f(x) = x^3 + 3, & g(x) = \sqrt{x}, & h(x) = \frac{x+1}{x} \\ (c) f(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x + 2}, & g(x) = x, & h(x) = \operatorname{sen} x \end{array}$$

11. Determine o domínio das seguintes funções

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = e^x & (b) f(v) = \frac{e^v}{1 - e^v} & (c) f(x) = \frac{1+x}{1 - e^{2x}} \\ (d) f(x) = \frac{1}{e^{x^2+2x}} & (e) f(t) = \sqrt{1 - t^2} & (f) f(x) = \cos(e^{-x}) \end{array}$$

12. Determine o domínio e construa o gráfico das seguintes funções

$$(a) f(x) = \ln x \quad (b) f(x) = \ln \frac{x}{e} \quad (c) f(x) = \ln \frac{1+x}{x}$$

13. Relacione as funções a seguir $f(x) = \log(x) + x$, $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{|x| + 1}$, $f(x) = e^{x^2}$, e $f(x) = \sqrt{x}$ com os gráficos da Figura 2.

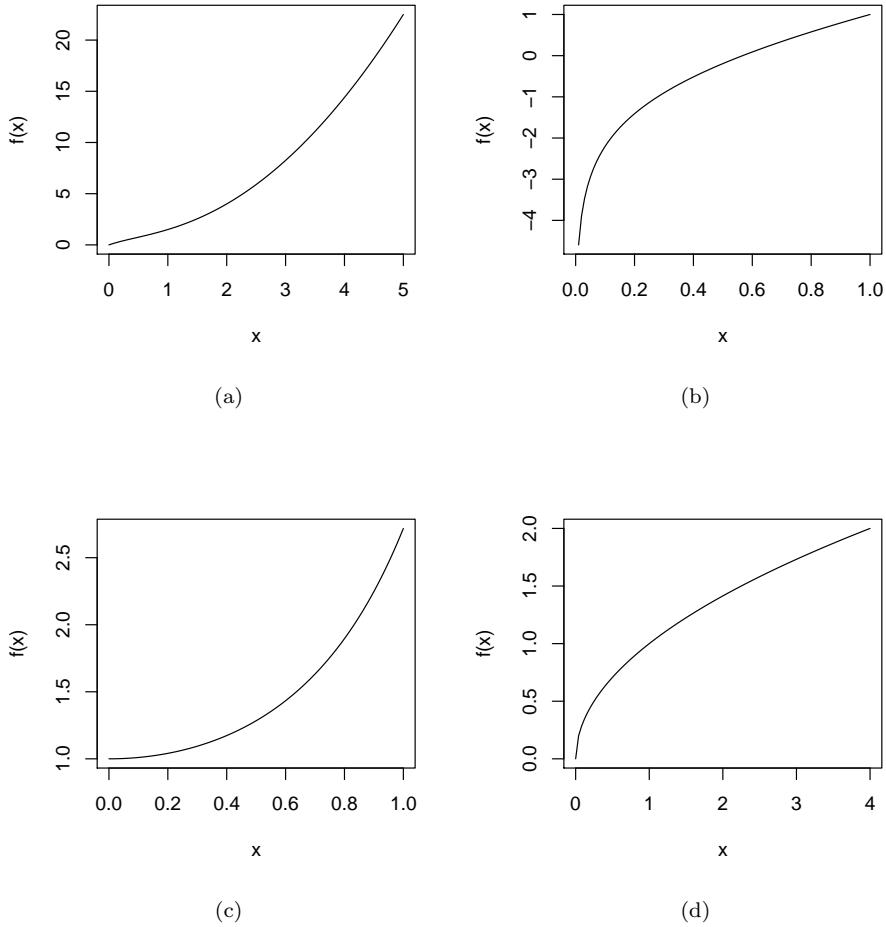


Figure 2: Figuras utilizadas para o exercício 11

14. Curvas de crescimento são muito utilizadas nas áreas de biologia e ciências agrárias para quantificar, por exemplo, a massa de animais e vegetais e o crescimento populacional de microorganismos. Assim, supondo que o crescimento populacional de uma determinada bactéria em função do tempo (t) pode ser descrita pela função de Gompertz dada por

$$f(t) = a \exp [-\exp (b - ct)].$$

Assumindo que $a = 3$, $b = 2$ e $c = 1$.

- (a) Construa o gráfico da função

④ You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

- (b) Em quando tempo o tamanho da população de bactérias irá passar de 100 para 1000?
15. A partir da Figura 3 determine a função definida por partes utilizando conhecimentos de geometria e trigonometria. Além disso, determine o domínio e imagem dessa função.

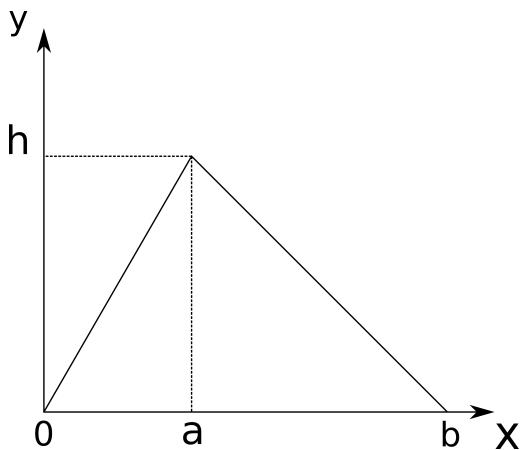


Figure 3: Figura para o exercício 15

16. Determine as funções inversas ($f^{-1}(x)$)
- (a) $f(x) = e^x$ (b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$ (c) $f(x) = x^2 + 2x$
 (d) $f(x) = \sqrt{x}$ (e) $f(x) = \frac{a+x}{b-x}$ (f) $f(x) = \cos(x)$
17. Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule e simplifique o quociente $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.
18. Prove que $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sec} \alpha$.
19. Prove que $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{sen} 2\alpha$.
20. Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.

④ You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

21. Determine as coordenadas do vértice da equação $x^2 - 3(x + y) = 1$

22. Determine o domínio e imagem da equação $y^2 = -x^2 + 4$

23. Determine a monotonicidade das seguintes funções

$$(a) f(x) = x^3 \quad (b) f(x) = x^2 \quad (c) f(x) = x + 3$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x + 2} \quad (e) f(x) = \log(2x) \quad (f) f(x) = e^{-x^2}$$

24. Um veículo teve seu pneu calibrado para 35 libras e, em seguida, o motorista se deslocou do ponto A ao ponto B em 9h a uma velocidade média de 100 km por hora. Sabe-se que a temperatura do pneu aumenta quadraticamente em função da distância percorrida até aproximadamente 100 graus Celcius. Então a temperatura se mantém constante até a distância percorrida em 8h (Figura 4). Na última hora, sabe-se que a temperatura decai quadraticamente em função da distância. Determine uma função que descreva o aumento da temperatura em função da distância (em km).

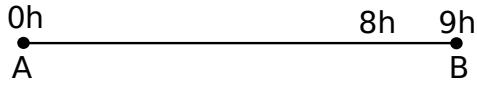


Figure 4: Exercício 24

25. Simplifique as funções a seguir

$$(a) f(x) = 4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x \quad (b) f(x) = \frac{x^2 + 8x + 16}{8x + 32} \quad (c) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$$(d) f(x) = \log(x^2 + 3x) - \log(x) \quad (e) f(x) = \frac{e^x e^\pi}{e^{2x}} \quad (f) f(x) = e^{-x^2} e^{x^2+2x}$$

$$(g) f(x) = \frac{\sin(2x)}{[\cos 2]^{-1}} - \frac{\sin 2}{[\cos(2x)]^{-1}} \quad (h) f(x) = \sin^2 x \operatorname{tg}^{-2} x \quad (i) f(x) = x^2 + 4x - 4$$

26. Encontre as raízes das funções polinomiais a seguir

$$(a) f(x) = x^3 + x^2 \quad (b) f(x) = x^2 - 10x - 9 \quad (c) f(x) = x^2 + 9$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{x^2 + 4} \quad (e) f(x) = cx^2 + 4cx + c^2 \quad (f) f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$$