

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Estudo completo de funções

Thiago de Paula Oliveira

24 de Outubro de 2018

© You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

Para fazer o estudo completo das funções devemos avaliar:

1. Domínio e Imagem
2. Continuidade
3. Assíntotas verticais e horizontais
4. Crescimento e decrescimento
5. Concavidade e pontos de inflexão

Exercícios:

1. Faça o estudo completo das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = x + 2 & b) f(x) = x^2 - x + 1 & c) f(x) = \frac{1}{x} \\ d) f(x) = \sqrt{x} & e) f(x) = 4x - 5 & f) f(x) = \frac{x+1}{x-1} \end{array}$$

2. Faça o estudo completo das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = x^2 + 2 & b) f(x) = x^2 - 4x + 4 & c) f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \\ d) f(x) = e^x & e) f(x) = e^{x^2+2} & f) f(x) = \ln(2x+5) \\ g) f(x) = \sqrt{x^2+4x+4} & h) f(x) = \cos 2x & i) f(x) = xe^{2x} \\ j) f(x) = \frac{1}{x^2} & k) f(x) = \frac{x+4}{x^2+2x+2} & l) f(x) = \frac{e^x}{x+1} \\ m) f(x) = \ln(2+4x^2) & n) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} & o) f(x) = \sqrt{x+2} \\ p) f(x) = \sin(2x-4) & q) f(x) = \operatorname{tg}(x) & r) f(x) = a + bx - cx^2 + dx^3 \end{array}$$

3. Considere que a função $f(t) = e^{-t}$, com $t \in \mathbb{R}_+$, descreve a secagem de água de um produto (em gramas) em função do tempo (segundos). Faça o estudo completo dessa função.
4. A soma da evaporação da água pela superfície do solo com a transpiração das plantas é denominada de evapotranspiração. A evapotranspiração acumulada em função do tempo (em horas) para uma determinada cultivar de soja pode ser representada pela função

$$E(x) = \begin{cases} 108 \times 0.4^x, & \text{se } 0 < t < 6 \\ -(x-6)(x-30), & \text{se } 6 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

- (a) Faça o estudo completo dessa função
- (b) Apresente o esboço do gráfico

- (c) Qual será a evapotranspiração nos tempos $t = 1$, $t = 6$ e $t = 10$? Qual é a interpretação prática desses resultados?
5. A tonalidade (h) pode ser definida como uma medida angular como ilustra a Figura 1, logo $h \in [0, 360]$.

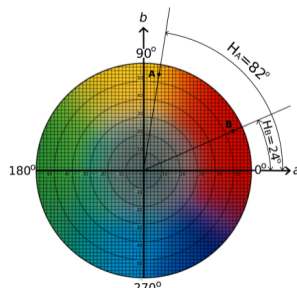


Figura 1: Região das cores pertencentes ao sistema de cores *CIE Lab* (ou *CIE LCh*), com representação de duas cores: A, amarela, em $h = 82^\circ$ e B, vermelha, em $h = 24^\circ$
 Fonte: Modificado a partir da ColorMetrix

Na área de pós-colheita, a tonalidade da cor é uma variável muito utilizada para descrever curvas de maturação de diversos frutos. Assim, considere que o a função definida por

$$f(t) = 111,09 - 1,65t - 0,0405t^2$$

é utilizada para descrever a tonalidade do mamão papaya “Sunrise Solo” ao longo do tempo (t).

- (a) Faça o estudo completo dessa função
- (b) Apresente o gráfico da função e o interprete.
6. Curvas de crescimento são muito utilizadas nas áreas de biologia e ciências agrárias para quantificar, por exemplo, a massa de animais e vegetais e o crescimento populacional de microorganismos. Assim, supondo que o crescimento populacional de uma determinada bactéria em função do tempo (t) pode ser descrita pela função de Gompertz dada por

$$f(t) = ae^{-e^{b-ct}}.$$

Assumindo que $a = 3000$, $b = 2$ e $c = 1$.

- (a) Faça o estudo completo dessa função
- (b) Construa o gráfico da função
- (c) Em quando tempo o tamanho da população de bactérias irá passar de 100 para 1000?
7. Quando o ar seco se movimenta para cima, ele se expande e esfria. Considere que a temperatura do solo num ponto A é de 20°C e a temperatura numa altitude de 1 km a partir do ponto A é de 10°C .
- (a) Expresse a temperatura T (em $^\circ\text{C}$) como uma função da altura h (em km), assumindo que uma função polinomial de primeiro grau é apropriada para descrever esse processo.

- (b) Faça o estudo completo dessa função.
 - (c) Faça um esboço do gráfico da função. O que o coeficiente angular dessa função representa?
 - (d) Qual é a temperatura numa altitude de 2,5 km?
8. A secagem de alimentos é a técnica mais conhecida e utilizada no mundo para assegurar a qualidade de produtos *in natura* e a estabilidade durante a vida de prateleira dos mesmos. O modelo de Midilli modificado pode ser utilizado para modelar o fenômeno de secagem e é dado por:

$$f(t) = a e^{-kt} + b, \quad (1)$$

em que a e b são constantes reais, k é a constante de secagem e t é o tempo (em segundos). Responda as questões abaixo considerando $a = 1$, $k = 2$ e $b = 3$:

- (a) Qual é o domínio e a imagem da função?
 - (b) Determine a função inversa de $f(t)$, bem como seu domínio e imagem.
 - (c) Determine se essa função possui assíntota vertical e/ou horizontal
 - (d) Quais são os intervalos de crescimento e decrescimento?
 - (e) Estude a concavidade e pontos de inflexão dessa função
 - (f) Faça um esboço do gráfico e interprete o que representa $a + b$ e b nessa função.
9. É comum para funções densidade de probabilidade serem parametrizadas, ou seja, serem caracterizadas por meio de parâmetros não especificados. Por exemplo, a distribuição normal é parametrizada em termos da média e da variância, denotada por μ e σ^2 respectivamente, dando à família de densidades
- $$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$
- (a) Qual é o domínio e a imagem da função?
 - (b) Determine se essa função possui assíntota vertical e/ou horizontal
 - (c) Quais são os intervalos de crescimento e decrescimento?
 - (d) Estude a concavidade e pontos de inflexão dessa função
 - (e) Faça um esboço do gráfico e interprete o que representa μ e σ^2 nessa função.
10. Seja X uma variável aleatória com distribuição densidade de probabilidade uniforme no intervalo $[a, b]$. Consequentemente, todos os valores dentro desse intervalo especificado possuem a mesma probabilidade de ser amostrado. Assim, a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- (a) Determine se essa função possui assíntota vertical e/ou horizontal
 - (b) Quais são os intervalos de crescimento e decrescimento?
 - (c) Estude a concavidade e pontos de inflexão dessa função
 - (d) Faça um esboço do gráfico dessa função.
11. Uma variável aleatória X tem distribuição exponencial se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Determine se essa função possui assíntota vertical e/ou horizontal
- (b) Quais são os intervalos de crescimento e decrescimento?
- (c) Estude a concavidade e pontos de inflexão dessa função
- (d) Faça um esboço do gráfico dessa função.