Cálculo diferencial e integral

Funções e Modelos

Thiago de Paula Oliveira

6 de Agosto de 2018

1 Aplicações de funções e modelos

1. (Stewart, 2010) Os registros de temperatura (T) (em °C) foram tomados de três em três horas a partir da meia-noite até às 15 horas em Montreal, em 13 de julho de 2004. O tempo foi medido em horas a partir da meia-noite.

t	0	3	6	9	12	15
T	21,5	19,8	20,0	22,2	24,8	25,8

   (a) Use os registros para esboçar um gráfico de T como uma função de t.

   (b) Use seu gráfico para estimar a temperatura às 11 horas da manhã.

2. (Stewart, 2010) Um avião decola de um aeroporto e aterrissa uma hora depois em outro aeroporto, a 400 km. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.

   (a) Esboce um possível gráfico de $x(t)$.

   (b) Esboce um possível gráfico de $y(t)$.

   (c) Esboce um possível gráfico da velocidade no solo.

   (d) Esboce um possível gráfico da velocidade vertical.

3. (Stewart, 2010) Uma estimativa anual do número N (em milhões) de assinantes de telefones celulares nos Estados Unidos é mostrada na tabela. (Estimativas dadas para meados do ano.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

   (a) Use os dados da tabela para esboçar o gráfico de N como uma função t.

   (b) Use seu gráfico para estimar o número de assinantes de telefones celulares nos anos de 2001 e 2005.

4. (Stewart, 2010) Se $f(x) = 3x^2 - x + 2$, ache $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ e $f(a+h)$.

5. (Stewart, 2010) Um balão esférico com raio de r centímetros tem o volume $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Encontre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar um balão de raio r até um raio $r+1$ centímetros.

6. (Stewart, 2010) Um plano de telefone celular tem uma taxa de R$ 35 mensais. O plano inclui 400 minutos gratuitos e taxa de 10 centavos para cada minuto adicional utilizado. Expresse o custo mensal C como uma função do número de minutos utilizados e esboce o gráfico C como uma função de x para $0 \leq x \leq 600$.

7. (Stewart, 2010) Em uma certa província a velocidade máxima permitida em estradas é de 100 km/h e a velocidade mínima é de 50 km/h. A multa por violar esses limites é de R$ 10 para cada quilômetro por hora acima da velocidade máxima ou abaixo da velocidade mínima. Expresse a quantidade de multa F como uma função de velocidade de condução x e esboce o gráfico $F(x)$ para $0 \leq x \leq 180$.

8. A soma da evaporação da água pela superfície do solo com a transpiração das plantas é denominada de evapotranspiração. A evapotranspiração acumulada em função do tempo (em horas) para uma determinada cultivar de soja pode ser representada pela função

$$E(x) = \begin{cases} 108 \times 0.4^x, & \text{se } 0 < t < 6 \\ -(x-6)(x-30), & \text{se } 6 \leq t \leq 24 \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Apresente o esboço do gráfico da função

   (b) Qual será a evapotranspiração nos tempos $t = 1$, $t = 6$ e $t = 10$? Qual é a interpretação prática desses resultados?

9. (Stewart, 2010) Uma empresa de eletricidade cobra de seus clientes uma taxa-base e R$ 10 mensais, mais 6 centavos por quilowatt-hora (kWh) ara os primeiros 1.200 kWh e 7 centavos para todo o uso acima e 1.200 kWh. Expresse o custo mensal E como uma função da quantidade utilizada x de eletricidade. Então, faça um gráfico da função E para $0 \leq x \leq 2000$.

10. (Stewart, 2010) Em um certo país, o imposto de renda é taxado da maneira a seguir: não existe nenhuma taxa para rendimentos de até US$ 10.000,00. Qualquer renda acima de US$ 10.000,00 e abaixo de US$ 20.000,00 tem uma taxa de 10%. Qualquer renda acima de US$ 20.000,00 é taxada a 15%.

    (a) Esboce o gráfico da taxa de impostos R como uma função da renda I.

    (b) Qual o imposto cobrado sobre um rendimento de US$14.000? E sobre US$ 26.000?

    (c) Esboce o gráfico do imposto total cobrado T como uma função da renda I.

11. (Stewart, 2010) Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois. Verifique visualmente sua resposta no Wolfram|Alpha.

$(a)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad (b)\ f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$ $\quad (c)\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$(d)\ f(x) = x|x|$ $\quad (e)\ f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$ $\quad (f)\ f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

12. (Stewart, 2010) Se f e t são funções pares, $f + t$ é par? Se f e t são funções ímpares, $f + t$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e t for ímpar? Justifique suas respostas.

13. (Stewart, 2010) Se f e t são funções pares, o produto $f \times t$ é par? Se f e t são funções ímpares, $f \times t$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e t for ímpar? Justifique suas respostas.

14. (Stewart, 2010) Uma caixa retangular aberta com volume de 2 m^3 tem uma base quadrada. Expresse a área da superfície da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.

15. O que todos os membros da família de funções lineares dada por $f(x) = 3 + \dfrac{m}{2}(x+3)$ têm em comum? Esboce os gráficos de quatro membros da família.

16. (Stewart, 2010) Estudos recentes indicam que a temperatura média da superfície da Terra vem aumentando continuamente. Alguns cientistas modelaram a temperatura pela função linear $T = 0,02t + 8,50$, em que T é a temperatura em °C e t representa o número de anos desde 1900.

    (a) O que a inclinação e a intersecção com o eixo T representam?

    (b) Use a equação para prever a temperatura média global em 2100.

17. (Stewart, 2010) Se a dose de uma medicação recomendada para um adulto é D (em mg), então, para determinar a dosagem apropriada c para uma criança com n anos de idade, os farmacêuticos usam a equação $c = 0.0417D(n+1)$. Suponha que a dosagem para um adulto seja 200 mg.

    (a) Encontre a inclinação do gráfico de c. O que ela representa?

    (b) Qual é a dosagem para um recém-nascido?

18. (Stewart, 2010) Biólogos notaram que a taxa de cricridos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser quase linear. Um grilo cricrila 112 vezes por minuto a 20 °C e 180 vezes por minuto a 29 $\circ$C.

    (a) Encontre uma equação linear que modele a temperatura T como uma função dos números de cricridos por minuto N.

    (b) Qual é a inclinação do gráfico? O que ela representa?

    (c) Se os grilos estiverem cricrilando 150 vezes por minuto, estime a temperatura.

19. (Stewart, 2010) Muitas quantidades físicas são conectadas pelas leis quadradas inversas, isto é, pelas funções potências da forma $f(x) = kx^{-2}$. Em particular, a iluminação de um objeto pela fonte de luz é inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Suponha que após escurecer, você está em um quarto com somente uma lâmpada e está tentando ler um livro. A iluminação é muito escura e então você precisa mover até um ponto P em direção a lâmpada. Qual é a intensidade desta luz?

20. (Stewart, 2010) Faz sentido que quanto maior a área, maior a quantidade de espécies que habitam a região. Muitos ecologistas modelaram a relação espécie-área com uma função potência e, em particular, a quantidade de espécies de morcegos vivendo em cavernas no México Central foi relatada à área de superfície A de cavernas pela equação $S = 0,7A^{0,3}$.

    (a) A caverna chamada Misión Imposible próxima de Puebla, México, tem uma área de superfície de $A = 60m^2$. Quantas espécies de morcegos se espera encontrar nesta caverna?

    (b) Suponha que você descobriu que quatro espécies de morcego vivem em uma caverna, estime a área dessa caverna.

2 Funções exponenciais e inversas

21. (Stewart, 2010) Utilize a Propriedade dos Exponentes para reescrever e simplificar a expressão.

$$(a)\ \frac{4^{-3}}{2^{-8}} \qquad (b)\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad (c)\ 8^{4/3} \qquad (d)\ x\left(3x^2\right)^3$$

$$(e)\ b^8\,(2b)^4 \qquad (f)\ \frac{\left(6y^3\right)^4}{2y^5} \qquad (g)\ \frac{x^{2n}x^{3n-1}}{x^{n+2}} \qquad (h)\ \frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$$

22. (Stewart, 2010) Se $f(x) = 5^x$, mostre que

$$\frac{f\,(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

23. (Stewart, 2010) Sob condições ideais sabe-se que uma certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias:
    (a) Qual o tamanho da população após 15 horas?
    (b) Qual o tamanho da população após t horas?
    (c) Qual o tamanho da população após 20 horas?
    (d) Trace o gráfico da função e estime o tempo para a população atingir 50.000 bactérias.

24. Quais são os três tipos de funções exponenciais? Determine, se houver, os intervalos de crescimento e decrescimento.

25. (Stewart, 2010) Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra de tamanho a cada meia hora.
    (a) Quantas bactérias existem após 3 horas?
    (b) Quantas bactérias existem após t horas?
    (c) Quantas bactérias existem após 40 minutos?
    (d) Trace o gráfico da função e estime o tempo para a população atingir 100.000 bactérias.

26. (Stewart, 2010) Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$.
    (a) Encontre f^{-1} Como está relacionada a f?
    (b) Esboçe o gráfico de f e explique a sua resposta para a parte (a).

27. Considere a função $f(x) = \log_a x$ e responda as seguintes perguntas:

(a) Qual o domínio dessa função?

(b) Qual a imagem dessa função?

(c) Esboce a forma geral do gráfico dessa função para $a > 1$.

28. (Stewart, 2010) Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

em que m_0 é a massa da partícula no repouso e c é a velocidade da luz no vácuo. Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

29. (Stewart, 2010) Determine uma função inversa para cada uma das seguintes funções

$(a)\ f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$ $\qquad (b)\ f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$ $\qquad (c)\ f(x) = e^{2x-1}$

$(d)\ f(x) = x^2 - x,\ x \geq \frac{1}{2}$ $\qquad (e)\ f(x) = \ln(x + 3)$ $\qquad (f)\ f(x) = \dfrac{e^x}{1 = 2e^x}$

30. (Stewart, 2010) A partir das funções $f(x) = \ln x + 2$ e $g(x) = \ln(x - 1) - 1$ responda as seguintes questões

(a) Quais são o domínio e a imagem de f e g?

(b) Qual é a intersecção com o eixo x do gráfico de f e de g?

(c) Esboce o gráfico de f e de g.

31. (Stewart, 2010) Resolva cada equação em x.

$(a)\ 2\ln x = 1$ $\qquad (b)\ e^{-x} = 5$ $\qquad (c)\ e^{2x+3} - 7 = 0$

$(d)\ \ln(5 - 2x) = -3$ $\qquad (e)\ 2^{x-5} = 3$ $\qquad (f)\ \ln x + \ln(x - 1) = 1$

$(g)\ \ln(\ln x) = 1$ $\qquad (h)\ e^{ax} = Ce^{bx},\ \text{para } a \neq b$ $\qquad (i)\ \ln_a(bx + c) = d$

32. (Stewart, 2010) Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $f(t) = 100 \times 2^{\frac{t}{3}}$

(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.

(b) Quando a população atingirá 50.000 bactérias?

33. (Stewart, 2010) Após acionado o flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, que armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)$$

. (A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medido em segundos.)

(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.

(b) Quanto tempo levará para recarregar o capacitor 90% da capacidade, se $a = 2$?

34. Demonstre que $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$.

35. (Stewart, 2010) Se $f(x) = 2x + \ln x$, determine $f^{-1}(2)$.

36. (Stewart, 2010) Determine a função inversa de $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

37. Determine se as funções são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras. Qual das funções possuem inversa?

$a) f(x) = 2x$ $\quad b) f(x) = \sqrt{x}$ $\quad c) f(x) = |x+4|$

$d) f(x) = log(x)$ $\quad e) f(x) = log(x+4)$ $\quad f) f(x) = e^x$

$g) f(x) = x^2$ $\quad h) f(x) = 2 - 3x$ $\quad i) f(x) = \frac{1}{x}$

Nota: Para ajudar na resolução dos exercícios é importante analisar o gráfico das funções.

38. Determine as funções inversas, bem como o domínio, a imagem e o contra-domínio dessas funções.

$a) f(x) = 3x - 2$ $\quad b) f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad c) f(x) = \sqrt{x+2}$

$d) f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ $\quad e) f(x) = \frac{1}{x^2},$ para $x > 0$ $\quad f) f(x) = \frac{x-2}{3}$

$g) f(x) = e^x$ $\quad h) f(x) = \log x$ $\quad i) f(x) = ln(x)$

$j) f(x) = 1 + x^2,$ para $x > 0$ $\quad l) f(x) = sen(x)$ $\quad m) f(x) = cos(x)$

39. (Stewart, 2010) A população de uma certa espécie em um ambiente limitado, com população inicial igual a 100 e capacidade para comportar 1.000 indivíduos, é

$$P(t) = \frac{100.000}{100 + 900e^{-t}}$$

em que t é medido em anos.

(a) Faça o gráfico dessa função e estime quanto tempo levará para a população atingir 900 indivíduos.

(b) Encontre a inversa dessa função e explique seu significado.

(c) Use a função inversa para encontrar o tempo necessário para a população atingir 900 indivíduos. Compare com os resultados da parte (a).

Referências

Stewart, J. **Cálculo: volume 1**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 7, 2014.

Respostas de alguns exercícios

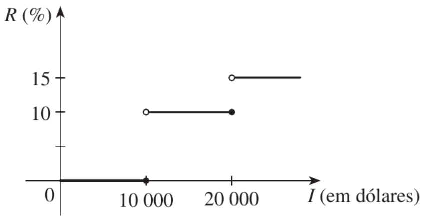
3. (b) 126 milhões; 207 milhões

4. 12; 16; $3a^2 - a + 2$; $3a^2 + a + 2$; $3a^2 + 5a + 4$; $6a^2 - 2a + 4$; $12a^2 - 2a + 2$; $3a^4 - a^2 + 2$; $9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4$; $3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

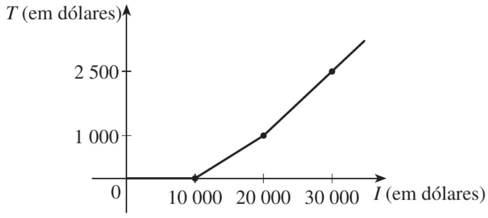
7. $F(x) = \begin{cases} 10\,(50 - x)\,, & \text{se } 0 \leq a < 50 \\ 0, & \text{se } 50 \leq a \leq 100 \\ 10\,(x - 100)\,, & \text{se } x > 100 \end{cases}$

10. (b) \$400, \$1.900

(a)



(c)



11. (a) ímpar; (c) nenhum; (e) par

12. Par; ímpar, nenhum (a menos que $f = 0$ ou $g = 0$)

14. $S(x) = x^2 + \frac{8}{x}, \quad x > 0$

17. (a) 8,34, variação em mg para cada ano de variação; (b) 8,34 mg

18. (a) $T = \frac{9}{68}N + \frac{88}{17}$; (b) $\frac{9}{68}$, variação em °C para cada variação de cricrido por minuto; (c) 25 °C

19. Quatro vezes mais brilhante.

21. (a) 4; (b) $x^{-\frac{4}{3}}$; (e) $16b^{12}$; (f) $648y^7$;

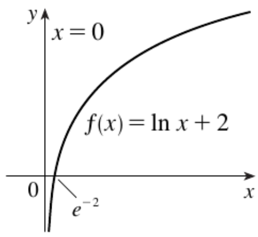
23. (a) 3.200; (b) $100 \times 2^{t/3}$; (c) $10,159$ e $t \approx 26,9$ h

26. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$; f^{-1} e f são a mesma função; (b) Um quarto de círculo no primeiro quadrante.

29. (a) $y = \frac{1}{3}\,(x - 1)^2 - \frac{2}{3}$, $x \geq 1$; (c) $y = \frac{1}{2}\,(1 + \ln x)$; (e) $y = e^x - 3$

30. Respostas para a função $f(x) = \ln x + 2$: (a) $(0, \infty)$; $(-\infty, \infty)$; (b) e^{-2}

(c)



31. (a) $\sqrt{e}$; (b) $-\ln 5$; (e) $5+\log_2 3$ ou $5+\frac{\ln 3}{\ln 2}$; (f) $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1=4e}\right)$

32. (a) $f^{-1}(n) = \frac{3}{\ln 2}\ln\left(\frac{n}{100}\right)$; o tempo decorrido quando há n bactérias; (b) Após cerca de 26,9 horas.

35. 1