Cálculo diferencial e integral

Máximo e Mínimo de Funções de Duas Variáveis

Thiago de Paula Oliveira

August 3, 2018

1. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Ache os pontos críticos de f nos seguintes casos:

   $a)\ f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y$ $\quad b)\ f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y - xy$ $\quad c)\ f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

   $d)\ f(x,y) = 6x + 4y - 7$ $\quad e) f(x,y) = x3 - y3$

2. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Ache os pontos críticos de cada função abaixo e classifique-os:

   $a)\ f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$ $\quad b)\ f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x - 4y$

   $c)\ f(x,y) = 3 + 4xy$ $\quad d)\ f(x,y) = e^{3x+4y}$

   $e)\ f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ $\quad f)\ f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

   $g)\ f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3}y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 3x + 5y + 40$ $\quad h)\ f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 - y^2 - 3y$

   $i)\ f(x,y) = e^{x^2+3y}$ $\quad j)\ f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 3x - 4y$

   $k)\ f(x,y) = -x^2 - 4xy - 4$ $\quad l)\ f(x,y) = x^2y^2$

   $m)\ f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{x-y}$ $\quad n)\ f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

3. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Considere a função $f(x,y) = 4xy^2$. Usando a definição de derivada parcial, calcule $f_x(-1,2)$ e $f_y(-1,2)$.

4. Seja $z = 2xy + 2^x$, obter dz.

5. Seja $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, obter dz.

6. Mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x}x + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$ se $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

7. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + xy$. Determine os pontos de máximo e mínimo da função.

8. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) O lucro que uma empresa obtém, vendendo dois produtos A e B é dado por

$$L = 600 - 2x^2 - 4y^2 - 3xy + 18x + 18y$$

sendo que, x e y são as quantidades vendidas. Obtenha os valores de x e y que maximizam o lucro.

9. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Uma empresa fabrica um produto que é vendido em dois países estrangeiros. Sejam x e y as quantidades vendidas nesses dois mercados. Sabe-se que as equações de demanda nos dois mercados são dadas por $p_1 = 6.000 - 2x$ e $p_2 = 9.000 - 4y$, sendo que p_1 e p_2 são os preços unitários em cada mercado. A função custo da firma é $C = 60.000 + 500(x + y)$.
   (a) Obtenha os valores de x e y que maximizam o lucro, e ache o valor desse lucro.

   (b) Nas condições do item anterior, quais os preços cobrados em cada país?

10. (Stwart, 2010) Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função
$$f(x, y) = -\left(x^2 - 1\right)^2 - \left(x^2 y - x - 1\right)^2$$
só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador para desenhar o grá?co com uma escolha cuidadosa de domínio e de ponto de vista para ver como isso é possível.

11. (Stwart, 2010) Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é
$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$
em que p, q e r são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

12. Determine a diferencial total de primeira ordem das seguintes funções:
$$a)\ z = \ln\left(x^3 + \cos y\right) \qquad b)\ z = 15y^2x^3$$
$$c)\ z = \frac{y}{x^2+y} \qquad d)\ z = e^{\left(2x+y^3\right)}$$

13.

Referências

Moretin, P. A.; Hazzan S.; Bussab W. O. Introdução ao cálculo para administração, economia e contabilidade. Saraiva: São Paulo, 2009.

Stwart, J. **Cálculo: volume 2**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 6, 2010

Respostas

1. *a*) $(3,2)$ *b*) $\left(\frac{16}{3},\frac{20}{3}\right)$ *c*) $(0,0)$ *d*) não existem *e*) $(0,0)$

2. *a*) $(1,-1)$, ponto de máximo.

   b) $(\frac{10}{3},\frac{11}{3})$, ponto de mínimo.

   c) $(0,0)$, ponto de sela.

   d) não tem ponto crítico.

   e) $(x,-x)$, $x\in\mathbb{R}$, pontos de mínimo

   f) $(0,0)$, ponto de mínimo

   g) $(1,1)$, ponto de máximo.
   $(1,5)$ e $(3,1)$ pontos de sela.
   $(3,5)$ ponto de mínimo.

   h) $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, ponto de máximo.

   i) $\left(10,-\frac{3}{2}\right)$, ponto de sela.

   j) $(1,1)$, ponto de mínimo.
   $(-1,1)$ ponto de sela.

   k) $(0,0)$ ponto de sela.

   l) $(x,0)$ ou $(0,y)$ $x,y\in\mathbb{R}$
   são pontos de mínimo.

3. $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ é um ponto de mínimo

4. $x=\frac{90}{23}$ e $y=\frac{18}{23}$

5. a) $x=1.375$, $y=1.062,50$ e $L=8.236.875$; b) $p_1=3.250$ e $p_2=4.750$