Cálculo diferencial e integral

Limites e continuidade

Thiago de Paula Oliveira

February 13, 2018

1. Calcule o valor do limite, caso ele exista, avaliando a função f nos valores fornecidos.

   a) $\lim_{x \to -1} \frac{x}{1-x}$ para $x = -2, -1,5, -1,1, -1,01, -1,001, -1,0001;$

   b) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^2+2}{x^2-2}$ para $x = 0, 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142$

   c) $\lim_{x \to 0} \log x$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

   d) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x^2+x}-1}{x}$ para $x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

2. Calcule, caso existam, o valor dos limites das funções a seguir:

   $a)$ $\lim_{x \to -1} (4x^2 - 7x + 5)$ $b)$ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ $c)$ $\lim_{x \to -2} \frac{4-x^2}{2+x}$ $d)$ $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3-4x^2}$

   $e)$ $\lim_{x \to 2} \frac{3x-4}{(x-2)^2}$ $f)$ $\lim_{x \to 3} \frac{1-2x}{x-3}$ $g)$ $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ $h)$ $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3-4}{115}$

   $i)$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+5x+2}{x}$ $j)$ $\lim_{x \to \infty} (\frac{3x^2-6x}{4x-8})$ $k)$ $\lim_{x \to -\infty} e^{5x+1}$ $l)$ $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{e^x}$

   $m)$ $\lim_{x \to \infty} (\frac{11x+2}{2x^3-1})$ $n)$ $\lim_{x \to -\infty} e^{5|x+1|}$ $o)$ $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{e^{x2+3x}}$ $p)$ $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

   $q)$ $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{2}}$ $r)$ $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x^2-4}$ (s) $\lim_{x \to 0} \cos x + \operatorname{sen} x$ (t) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

3. Mostre, utilizando a definição de limites laterais, se existe os limites das funções propostas no exercício anterior.

4. Seja a função f definida por $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$. Verifique se f é contínua nesse intervalo.

5. Utilize a Figura 1 e determine o valor de cada limite, se ele existir. Caso ele não exista, justifique o motivo de sua não existência.

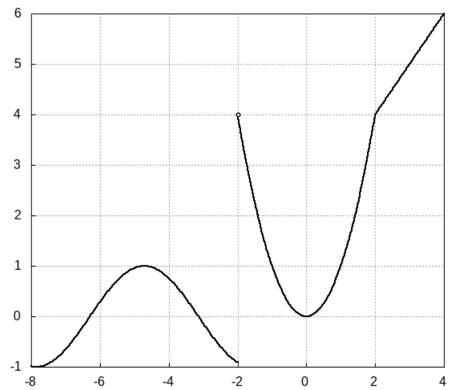

Figure 1: Gráfico da função $f(x)$

a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to -2} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x \to 2} f(x)$

6. Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{x^3 - 8x}, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \pm 2\sqrt{2} \\ 1 - m, & \text{se x=0} \end{cases}$$

Calcule m para que f seja contínua em 0.

7. Sabendo que f dada por $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - x}$, para $x \neq 0$ e $x \neq 1$, é uma função contínua em zero. Calcule $f(0)$.

8. A função f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ é contínua em 3?

Justifique.

9. Faça um esboço do gráfico de cada um dos exemplos de uma função f que satisfaça todas as condições dadas.

   a) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to -1^+} = 1, \quad f(-1) = 0$

   b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^+} = 0, \quad f(0) = 0$

   c) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 1^+} = 0, \quad f(-1) = 3$

   d) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -4, \quad \lim_{x\to 2^+} = 0, \quad f(-1) = -4$

10. Utilize a Figura 2 e determine o valor de cada limite, se ele existir. Caso ele não exista, justifique o motivo de sua não existência.

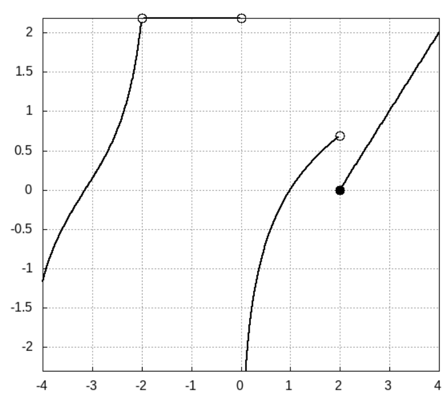

Figure 2: Gráfico da função $f(x)$

   a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ c) $\lim_{x\to -2} f(x)$

   d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to 2} f(x)$

   g) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ h) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ i) $\lim_{x\to 0} f(x)$

11. Calcule o valor dos limites. **Nota: não utilize a substituição direta dos valores**.

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *b)* $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$ *c)* $\lim_{x\to 9} \dfrac{x-6\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-3}$

d) $\lim_{x\to 0} \ln\left(x^2+x\right)-\ln x$ *e)* $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2+4x}{x^2-16}$ *f)* $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

12. Clcule os valores dos limites das funções a seguir utilizando as definições de limites lateriais. Determine quais desses limites existem.

a) $\lim_{x\to -6} \dfrac{x^2-6x+1}{x-6}$ *b)* $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2-\frac{1}{t-1}}{t-1}$ *c)* $\lim_{x\to -2} \log\left(x^2-3x+2\right)$

d) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2+x}\right)^2$ *e)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2^x-1}$ $\lim_{x\to 3} |x^2-3|\left(x^2-9\right)^{-1}$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$ *g)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{4-3x}-1}$ *h)* $\lim_{x\to 2} xe^{-x}$

h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{\cos(x)}$ *i)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ *j)* $\lim_{x\to 0} \operatorname{cosec} x$

13. Seja

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{se } x<-2 \\ x^2 & \text{se } x=-2 \\ 2-x^3 & \text{se } -2<x<2 \\ x-3 & \text{se } x>2 \end{cases}.$$

i) Avalie cada um dos limites a seguir:

a) $\lim_{x\to -6} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to -2} f(x)$ *c)* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *d)* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *e)* $\lim_{x\to 3} f(x)$

ii) Faça o gráfico da função