Cálculo diferencial e integral

# Máximo e Mínimo de Funções de Duas Variáveis

Thiago de Paula Oliveira

June 21, 2018

1. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Ache os pontos críticos de $f$ nos seguintes casos:

   $a)$ $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y$  $b)$ $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y - xy$  $c)$ $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

   $d)$ $f(x,y) = 6x + 4y - 7$  $e) f(x,y) = x3 - y3$

2. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Ache os pontos críticos de cada função abaixo e classifique-os:

   $a)$ $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$  $b)$ $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x - 4y$

   $c)$ $f(x,y) = 3 + 4xy$  $d)$ $f(x,y) = e^{3x+4y}$

   $e)$ $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$  $f)$ $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

   $g)$ $f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3}y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 3x + 5y + 40$  $h)$ $f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 - y^2 - 3y$

   $i)$ $f(x,y) = e^{x^2+3y}$  $j)$ $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 3x - 4y$

   $k)$ $f(x,y) = -x^2 - 4xy - 4$  $l)$ $f(x,y) = x^2y^2$

3. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + xy$. Determine os pontos de máximo e mínimo da função.

4. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) O lucro que uma empresa obtém, vendendo dois produtos A e B é dado por

   $$L = 600 - 2x^2 - 4y^2 - 3xy + 18x + 18y$$

   sendo que, x e y são as quantidades vendidas. Obtenha os valores de x e y que maximizam o lucro.

5. (Moretin, Hazzan e Bussab, 2009) Uma empresa fabrica um produto que é vendido em dois países estrangeiros. Sejam $x$ e $y$ as quantidades vendidas nesses dois mercados. Sabe-se que as equações de demanda nos dois mercados são dadas por $p_1 = 6.000 - 2x$ e $p_2 = 9.000 - 4y$, sendo que $p_1$ e $p_2$ são os preços unitários em cada mercado. A função custo da firma é $C = 60.000 + 500(x + y)$.

   (a) Obtenha os valores de $x$ e $y$ que maximizam o lucro, e ache o valor desse lucro.

(b) Nas condições do item anterior, quais os preços cobrados em cada país?

6. (Stwart, 2010) Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x,y) = -\left(x^2 - 1\right)^2 - \left(x^2 y - x - 1\right)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador para desenhar o grá?co com uma escolha cuidadosa de domínio e de ponto de vista para ver como isso é possível.

7. (Stwart, 2010) Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

em que $p$, $q$ e $r$ são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que $P$ é no máximo $\frac{2}{3}$.

**Referências**

Moretin, P. A.; Hazzan S.; Bussab W. O. Introdução ao cálculo para administração, economia e contabilidade. Saraiva: São Paulo, 2009.

Stwart, J. **Cálculo: volume 2**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 6, 2010

# Respostas

1. *a*) $(3,2)$ *b*) $\left(\frac{16}{3},\frac{20}{3}\right)$ *c*) $(0,0)$ *d*) não existem *e*) $(0,0)$

2. *a*) $(1,-1)$, ponto de máximo.

   *b*) $(\frac{10}{3},\frac{11}{3})$, ponto de mínimo.

   *c*) $(0,0)$, ponto de sela.

   *d*) não tem ponto crítico.

   *e*) $(x,-x)$, $x\in\mathbb{R}$, pontos de mínimo

   *f*) $(0,0)$, ponto de mínimo

   *g*) $(1,1)$, ponto de máximo.
   $(1,5)$ e $(3,1)$ pontos de sela.
   $(3,5)$ ponto de mínimo.

   *h*) $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, ponto de máximo.

   *i*) $\left(10,-\frac{3}{2}\right)$, ponto de sela.

   *j*) $(1,1)$, ponto de mínimo.
   $(-1,1)$ ponto de sela.

   *k*) $(0,0)$ ponto de sela.

   *l*) $(x,0)$ ou $(0,y)$ $x,y\in\mathbb{R}$
   são pontos de mínimo.

3. $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ é um ponto de mínimo

4. $x=\frac{90}{23}$ e $y=\frac{18}{23}$

5. a) $x=1.375$, $y=1.062,50$ e $L=8.236.875$; b) $p_1=3.250$ e $p_2=4.750$