Cálculo diferencial e integral

Limites e continuidade

Thiago de Paula Oliveira

10 de Setembro de 2018

You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

1. Calcule o valor do limite, caso ele exista, avaliando a função f nos valores fornecidos.

   a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{1-x}$ para $x = -2, -1,5, -1,1, -1,01, -1,001, -1,0001$;

   b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^2+2}{x^2-2}$ para $x = 0, 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142$

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \log x$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

   d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x^2+x}-1}{x}$ para $x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

2. Explique o significado da equação $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 5$. É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(4) = 10$? Justfique.

3. Calcule, caso existam, o valor dos limites das funções a seguir:

   a) $\lim\limits_{x \to -1} (4x^2 - 7x + 5)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *c)* $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4-x^2}{2+x}$ *d)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3-4x^2}$

   e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-4}{(x-2)^2}$ *f)* $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-2x}{x-3}$ *g)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ *h)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3-4}{115}$

   i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5x+2}{x}$ *j)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-6x}{4x-8}$ *k)* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{5x+1}$ *l)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{e^x}$

   m) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{11x+2}{2x^3-1}$ *n)* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{5|x+1|}$ *o)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{e^{x2+3x}}$ *p)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

   q) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{2}}$ *r)* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$ *(s)* $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)$ *(t)* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

4. Mostre, utilizando a definição de limites laterais, se existe os limites das funções propostas no exercício anterior.

5. Seja a função f definida por $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$. Verifique se f é contínua nesse intervalo.

6. Utilize a Figura 1 e determine o valor de cada limite, se ele existir. Caso ele não exista, justifique o motivo de sua não existência.

   a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

   d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

⊜ *You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.*

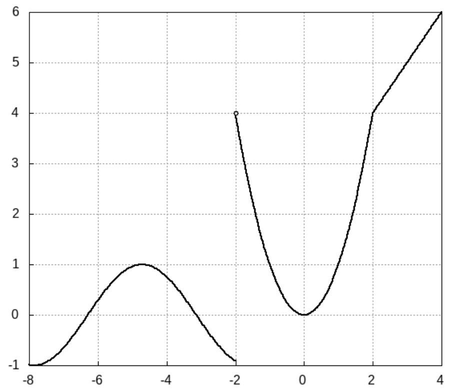


Figura 1: Gráfico da função $f(x)$

7. Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{x^3 - 8x}, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \pm 2\sqrt{2} \\ 1 - m, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   Calcule m de forma que f seja contínua em 0.

8. Sabendo que f dada por $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - x}$, para $x \neq 0$ e $x \neq 1$, é uma função contínua em zero. Calcule $f(0)$.

9. A função f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ é contínua em 3? Justifique.

10. Explique o que significa dizer que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 6$.

11. Faça um esboço do gráfico de cada um dos exemplos de uma função f que satisfaça todas as condições dadas.

    a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to -1^+} = 1, \quad f(-1) = 0$

    b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} = 0, \quad f(0) = 0$

    c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to 1^+} = 0, \quad f(-1) = 3$

    d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -4, \quad \lim\limits_{x \to 2^+} = 0, \quad f(-1) = -4$

12. Utilize a Figura 2 e determine o valor de cada limite, se ele existir. Caso ele não exista, justifique o motivo de sua não existência.

You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

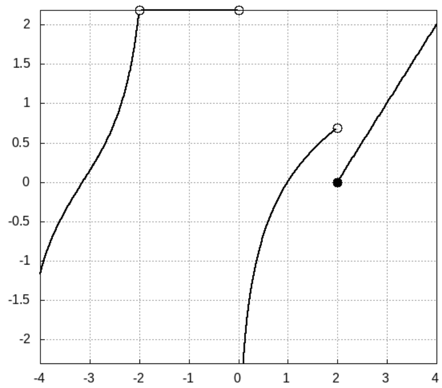


Figura 2: Gráfico da função $f(x)$

a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ c) $\lim_{x\to -2} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to 2} f(x)$

g) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ h) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ i) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. Explique o significado de cada um dos limites a seguir:

(a) $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ (b) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \infty$.

14. Calcule o valor dos limites. **Nota: não utilize a substituição direta dos valores**.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ *b)* $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-8x+16}{x-4}$ *c)* $\lim_{x\to 9} \frac{x-6\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-3}$

d) $\lim_{x\to 0} \ln\left(x^2+x\right) - \ln x$ *e)* $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+4x}{x^2-16}$ *f)* $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

15. Calcule, caso exista, o valor do limite das funções a seguir utilizando a definição de limites lateriais.

a) $\lim_{x\to -6} \frac{x^2-6x+1}{x-6}$ *b)* $\lim_{t\to 1} \frac{t^2-\frac{1}{t-1}}{t-1}$ *c)* $\lim_{x\to -2} \log\left(x^2-3x+2\right)$

d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+x}\right)^2$ *e)* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2^x-1}$ $\lim_{x\to 3} |x^2-3|\left(x^2-9\right)^{-1}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$ *g)* $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{4-3x}-1}$ *h)* $\lim_{x\to 2} xe^{-x}$

h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos(x)}$ *i)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ *j)* $\lim_{x\to 0} \operatorname{cosec} x$

16. (Morettin, Hazzan & Bussab, 2009) Para cada função abaixo $f(x)$ e para cada a, calcule (quando

🄯 *You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.*

existir): $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(a) $f(x) = x^3,\ a = 2$

(b) $f(x) = 2x + 1,\ a = 3$

(c) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3},\ a = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3},\ a = 2$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ se } x \neq 3 \\ 8, \text{ se } x = 3 \end{cases},\ a = 3$

(f) $f(x) = \sqrt{3x+4},\ a = 7$

(g) $f(x) = \dfrac{x-2}{x},\ a = 2$

(h) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x =< 0 \end{cases},\ a = 0$

(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1},\ a = 2$

(j) $f(x) = \log(1+x),\ a = 0$

(k) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \leq 2 \\ 7, \text{ se } x > 2 \end{cases},\ a = 2$

17. (Morettin, Hazzan & Bussab, 2009) Calule os limites abaixo

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{49-x^2}{7+x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5-x}{25-x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x^2-3x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{2x^2+x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$ (h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

(j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ (k) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ (l) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}$

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$ (n) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$

18. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < -2 \\ x^2 & \text{se } x = -2 \\ 2-x^3 & \text{se } -2 < x < 2 \\ x-3 & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

i) Avalie cada um dos limites a seguir:

$a)$ $\lim\limits_{x\to -6} f(x)$ $b)$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ $c)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $d)$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $e)$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ii) Faça o gráfico da função

19. (Stewart, 2010) Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4,9t^2$.

(a) Determine a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1,5$ s e dura

(i) 0,5 s (ii) 0,1 s (iii) 0,05 s (iv) 0,01 s

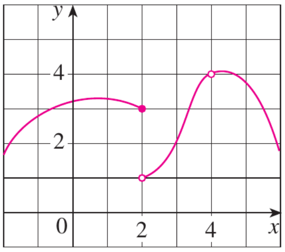
© *You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.*

20. (Modificado de Stewart, 2010) Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$ e $v \to c^+$? Justifique.

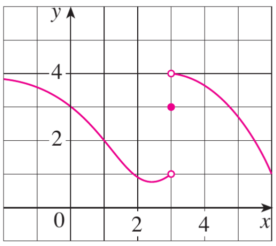
21. (Stewart, 2010) Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



$(a) \lim_{x\to 2^-} f(x)$ $\quad (b) \lim_{x\to 2^+} f(x)$ $\quad (c) \lim_{x\to 2} f(x)$

$(d) f(2)$ $\quad (e) \lim_{x\to 4} f(x)$ $\quad (f) f(4)$

22. (Stewart, 2010) Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



$(a) \lim_{x\to 1} f(x)$ $\quad (b) \lim_{x\to 3^-} f(x)$ $\quad (c) \lim_{x\to 3^+} f(x)$

$(d) \lim_{x\to 3} f(x)$ $\quad (e) f(3)$

23. (Stewart, 2010) Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

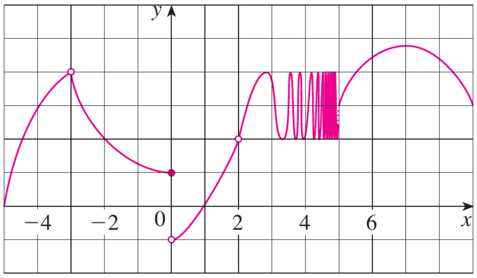
$(a) \lim_{x\to -3^-} h(x)$ $\quad (b) \lim_{x\to -3^+} h(x)$ $\quad (c) \lim_{x\to -3} h(x)$

$(d) h(-3)$ $\quad (e) \lim_{x\to 0^-} h(x)$ $\quad (f) \lim_{x\to 0^+} h(x)$

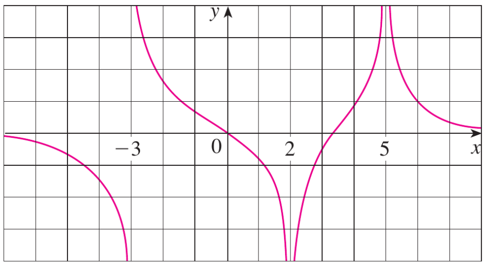
$(g) \lim_{x\to 0} h(x)$ $\quad (h) h(0)$ $\quad (i) \lim_{x\to 2} h(x)$

$(j) h(2)$ $\quad (k) \lim_{x\to 5^+} h(x)$ $\quad (l) \lim_{x\to 5^-} h(x)$

You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.



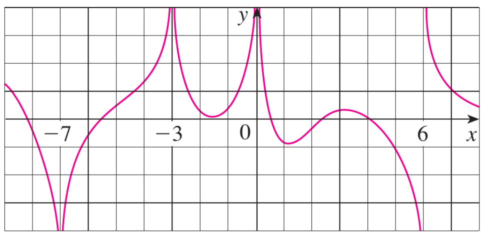
24. (Stewart, 2010) Para a função R, cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:



$(a)\ \lim_{x\to 2} R(x)$ $\quad (b)\ \lim_{x\to 5} R(x)$ $\quad (c)\ \lim_{x\to -3^-} R(x)$

$(d)\ \lim_{x\to -3^+} R(x)$ $\quad (e)$ As equações das assíntotas verticais.

25. (Stewart, 2010) Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:



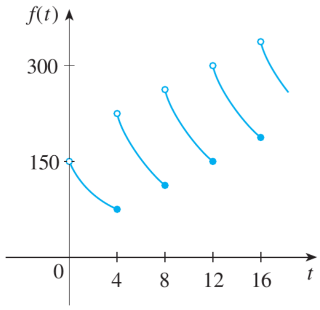
$(a)\ \lim_{x\to -7} f(x)$ $\quad (b)\ \lim_{x\to -3} f(x)$ $\quad (c)\ \lim_{x\to 0} f(x)$

$(d)\ \lim_{x\to 6^-} f(x)$ $\quad (e)\ \lim_{x\to 6^+} f(x)$

26. (Stewart, 2010) Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. Determine

$(a)\ \lim_{t\to 12^-} f(t)$ $\quad (b)\ \lim_{t\to 12^+} f(t)$

You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.



Teorema do valor intermediário

27. Suponha que a função $f(x)$ é contínua em um intervalo fechado I, tal que $I \in [3,9]$, e que $f(3) = -4$ e $f(9) = 8$. O teorema do valor intermediário garante que para algum valor c contido no intervalo I existe um $f(c)$ contido em qual intervalo?

28. Suponha que a função $f(x)$ seja contínua no intervalo fechado $[0,12]$, e que $f(0) = 12$ e $f(12) = 2$. Qual é o domínio em que o valor c está contido uma vez que o teorema do valor intermediário garante que $f(c) \subset [2,12]$?

29. Suponha que $f(x) = \frac{3}{2}(3x-2)(x-1)^2$. Assumindo que $c = -1$ satisfaz as condições do teorema do valor intermediário para a função $f(x)$ tal que $x \in [-2,2]$, determine o valor de $f(c)$.

30. Suponha a função $g(x) = 2x^2 - 11x + 4$ tal que $\mathrm{Dm}(g) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 8\}$. Demonstre que $c = 2$ não satisfaz as condições necessárias do teorema do valor intermediário.

31. Para qual valor de c podemos garantir pelo teorema do valor intermediário num intervalo fechado $[-3,3]$ que se $h(x) = 3(x+1)^3$ então $h(c) = 24$

32. Para qual valor de c podemos garantir pelo teorema do valor intermediário num intervalo fechado $[-5,6]$ que se $f(c) = -6$ então

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 10, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 + 3x - 10, & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ 3x - 6, & \text{se} x \geq 2 \end{cases}$$

33. Se o valor $c = 5$ satisfaz as condições do teorema do valor intermediário para a função g num intervalo fechado $[3,9]$, qual deve ser o valor $g(c)$ que satisfaça as condições desse teorema?

34. Para qual valor de c podemos garantir pelo teorema do valor intermediário num intervalo fechado $[3,6]$ se c é uma raiz da função $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 11x + 30}{x^2 - 4}$.

35. Use o teorema do valor intermediário para provar que a função $f(x) = 2e^x - 3\cos x$ tem pelo menos uma raíz real.

36. Use o teorema do valor intermediário para provar que a função $f(x) = 4e^{x-3} - 2(x^3 - 5x + 9)$ tem pelo menos uma raíz real.

🄯 *You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.*

37. Use o teorema do valor intermediário para provar que a função $f(x) = 6e^{-x} + \frac{1}{5}x^2 - 4x + 9$ tem pelo menos uma raíz real.

Referências

Morettin, P. A.; Hazzan, S.; Bussab, W. O. **Introdução ao cálculo para administração, economia e contabilidade**. Saraiva: São Paulo, Ed. 1, 2009.
Stewart, J. **Cálculo: volume 1**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 7, 2014.

You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

Respostas de alguns exercícios

3. $(a)16$ $(b)2$ $(c)4$ $(d)0$ $(e)\infty$ $(f)\nexists$ $(g)\nexists$ $(h)\infty$ $(i)-\infty$ $(j)\infty$ $(k)0$

   $(l)0$ $(m)0$ $(n)\infty$ $(o)0$ $(p)\nexists$ $(q)\nexists$ $(r)\nexists$ $(s)0$ $(t)\nexists$

5. Não é contínua nesse intervalo, porém é contínua para $\forall\ x \in (-3, 3)$.

7. 5/8

8. Não é contínua em zero, logo, $\nexists f(0)$.

9. Não é contínua pois os limites laterais são distintos. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$.

12. (a) $\approx 2,2$ (b) $\approx 2,2$ (c) $\approx 2,2$ (d) $\approx 0,7$ (e) ≈ 0 (f) $\nexists$ (g) $\approx 2,2$ (h) $-\infty$

    (i) $\nexists$

14. (a) 2 (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) $\nexists$ (f) 0

15. $(a)-73/12$ $(b)-\infty$ $(c)\ln 12$ $(d)\infty$ $(e)\nexists$ $(f)\nexists$ $(g)\nexists$ $(h)2/e^2$ $(i)\nexists$ $(j)\nexists$

    $(k)\nexists$

16. (a) $8;8;8$ (b) $7;7;7$ (c) $-\frac{5}{3};-\frac{5}{3};-\frac{5}{3}$ (d) $-7;-7;-7$ (e) $7;7;7$ (f) $5;5;5$

    (g) $0;0;0$ (h) $0;0;0$ (i) $1;1;1$ (j) $0;0;0$ (k) $7;4;$ não existe.

17. $(a)6$ $(b)14$ $(c)1/10$ $(d)-1/3$ $(e)0$ $(f)-2$ $(g)1$ $(h)-1$ $(i)0$ $(j)1/4$

    $(k)12$ $(l)27$ $(m)-2/3$ $(n)1$

22. (a) 2 (b) 1 (c) 4 (d) $\nexists$ (e) 3

25. (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) ∞

27. A função terá pelo menos uma raíz no intervalo $[-4, 8]$. Sob as condições do teorema do valor intermediário, o valor $c \subset [3, 9]$ e, consequentemente, a imagem $f(c) \subset [-4, 8]$.

28. Sob as condições do teorema do valor intermediário, o valor $c \subset [0, 12]$.

29. O teorema do valor intermediário estabelece que a função $y = f(x)$ deve ser contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e que $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$. Logo $y_0 = f(c)$ necessariamente está entre $f(-2) = -108$ e $f(2) = 6$. Dessa forma, substituindo $c = -1$ na função tem-se que $f(-1) = -30$. Portanto, o teorema do valor intermediário requer que $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$ e $-108 \leq -30 \leq 6$.

You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.

30. Temos que $g(a) = g(?2) = 34$ and $g(b) = g(8) = 44$. No entanto, $g(c) = g(2) = 2(2)^2 - 11(2) + 4 = -10$. Como o teorema do valor intermediário requer que $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$, tem-se que $g(2) = -10$ não pertence ao intervalo $[34, 44]$.

31. $3\,(c+1)^3 = 24 \rightarrow c = 1$.

32. $c = 1$.

33. $g(c) = 2$, logo $g(a) = g(a) = -3 \leq g(c) = 2 \leq g(b) = g(9) = 6$.

34. $c = 5$.

35. Seja $f(x) = 2e^x - 3\cos x$ e considere que $x \in [0, 1]$. Então temos que $f(0) = -1$ e que $f(1) = 2e - 1.62 > 0$. Portanto, uma vez que houve mudança de sinal da imagem da função e que a função é contínua nesse intervalo, podemos dizer que existe um valor $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

36. Seja $f(x) = 4e^{x-3} - 2(x^3 - 5x + 9)$ e considere que $x \in [-3, -2]$. Então temos que $f(-3) = 6.009 > 0$ e que $f(-2) = -21.97 < 0$. Portanto, uma vez que houve mudança de sinal da imagem da função e que a função é contínua nesse intervalo, podemos dizer que existe um valor $c \in [-3, -2]$ tal que $f(c) = 0$.

37. Seja $f(x) = 6e^{-x} + \frac{1}{5}x^2 - 4x + 9$ e considere que $x \in [2, 3]$. Então temos que $f(2) = 2.612 > 0$ e que $f(3) = -0.9013 < 0$. Portanto, uma vez que houve mudança de sinal da imagem da função e que a função é contínua nesse intervalo, podemos dizer que existe um valor $c \in [2, 3]$ tal que $f(c) = 0$.

You may copy, distribute and modify this list as long as you cite the author.