Cálculo diferencial e integral

Pré-Cálculo: Funções e modelos

Thiago de Paula Oliveira

March 22, 2018

1. Considere $f(x) = 3x^2 + 2x$ e $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + x}$, determine as funções e as simplifique:
   (a) $h(x) = f(x) + 2g(x)$ (b) $h(x) = f(x) \times g(x)$ (c) $h(x) = f(g(x))$

   (d) $h(x) = f(x) \times g^2(x)$ (e) $h(x) = \dfrac{1}{f(x) + 1} + g(x)$ (f) $h(x) = g(f(x))$

2. O modelo matemático de Henderson e Pabis é um dos modelos utilizados para predizer o fenômeno de secagem de alimentos, sendo dado por $RU = a.e^{-kt}$ em que RU é a razão de umidade do produto, adimensional; t é tempo de secagem; k é o coeficiente de secagem e a é uma constante qualquer. Faça o gráfico da função RU, sabendo que $a = 5$ e $k = 7$.

3. Determine o domínio, imagem e contra-domínio das seguintes funções:
   (a) $f(x) = 2 - 1,5x$ (b) $h(x) = \sqrt{(4 - x^2)}$

   (c) $f(u) = u^2 + 2x, \text{com } x \in \mathbb{R}$ (d) $f(z) = |z + 2|$

   (e) $g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt{|x|}}$ (f) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{se } x > 2 \\ -x^2 + 2x, & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$

   (g) $g(x) = \dfrac{\log(x)}{2 - x^2}$ (h) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{se } x < -1 \\ -3x^2 + 2x + 4, & \text{se } -1 \leq x < 6 \\ 9, & \text{se } x \leq 6 \end{cases}$

4. No Brasil a base de cálculo (em reais) para o pagamento do imposto de renda é baseado em uma tabela de alíquota dada na Tabela 1. Eessas alíquotas são descontadas do salário do trabalhador mensalmente como forma de contribuição.

Table 1: Tabela de incidência mensal atualizada em 2018

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IR (R$)
Até 1.903,98	-	Isento
De 1.903,99 até 2.826,65	7.5	142,8
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,8
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,69	27,5	869,36

   (a) Faça um gráfico da parcela a deduzir no IR em função da base de cálculo.

(b) Se uma pessoa ganha 4.000 reais por mês, qual será a contribuição acumulada no período de 2 anos? Expresse a função que deu origem a sua resposta. Faça um esboço do seu gráfico.

(c) Se uma pessoa tem seu salário aumentado de 4.800,00 para 4.900,00 reais, qual será o incremento salarial e de contribuição ao estado no período de um ano?

5. Estude a paridade das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^4 + x^2$ (b) $f(x) = -x^3 - x$ (c) $f(x) = |x^3|$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2}$ (e) $f(x) = \cos x$ (f) $f(x) = \text{tg}(x)$, para $\forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2]$

6. A relação entre as temperaturas medidas em gaus Celsius (C) e Fahrenheit (F) é dada pela função

$$C = \frac{5\,(F-32)}{9}.$$

(a) Apresente o gráfico da função

(b) Calcule o coeficiente angular e o interprete. Faça o mesmo para o intercepto.

7. A tonalidade (h) pode ser definida como uma medida angular como ilustra a Figura 1, logo $h \in [0, 360]$.

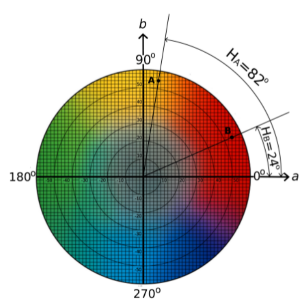


Figure 1: Região das cores pertencentes ao sistema de cores *CIELab* (ou *CIELCh*), com representação de duas cores: A, amarela, em $h = 82°$) e B, vermelha, em que $h = 24°$)
Fonte: Modificado a partir da ColorMetrix

Na área de pós-colheita, a tonalidade da cor é uma variável muito utilizada para descrever curvas de maturação de diversos frutos. Assim, considere que o a função definda por

$$f(t) = 111,09 - 1,65t - 0,0405t^2$$

é utilizada para descrever a tonalidade do mamão papaya "Sunrise Solo" ao longo do tempo (t).

(a) Em quanto tempo o fruto mudará sua tonalidade de verde (110) para amarela (90)?

(b) Após 5,3 dias qual deve ser a tonalidade do fruto?

(c) Apresente o gráfico da função;

8. Expresse as funções na forma $f \circ g$

   (a) $f(x) = x^5$ e $g(x) = x + 5$ (b) $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = x + 4$

   (c) $f(x) = |e^x|$ e $g(x) = x^3$ (d) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$

   (e) $f(x) = \cos\, x$ e $g(x) = 2x$ (f) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \mathrm{tg}(x)$

9. Utilize as respostas obtidas para o exercício 8 e calcule $g\,(f\,(2))$

10. Obtenha $f \circ g \circ h$

    (a) $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = \dfrac{1}{x}$

    (b) $f(x) = x^3 + 3, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \dfrac{x+1}{x}$

    (c) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x+2}, \quad g(x) = x, \quad h(x) = \mathrm{sen}\ x$

11. Determine o domínio das seguintes funções

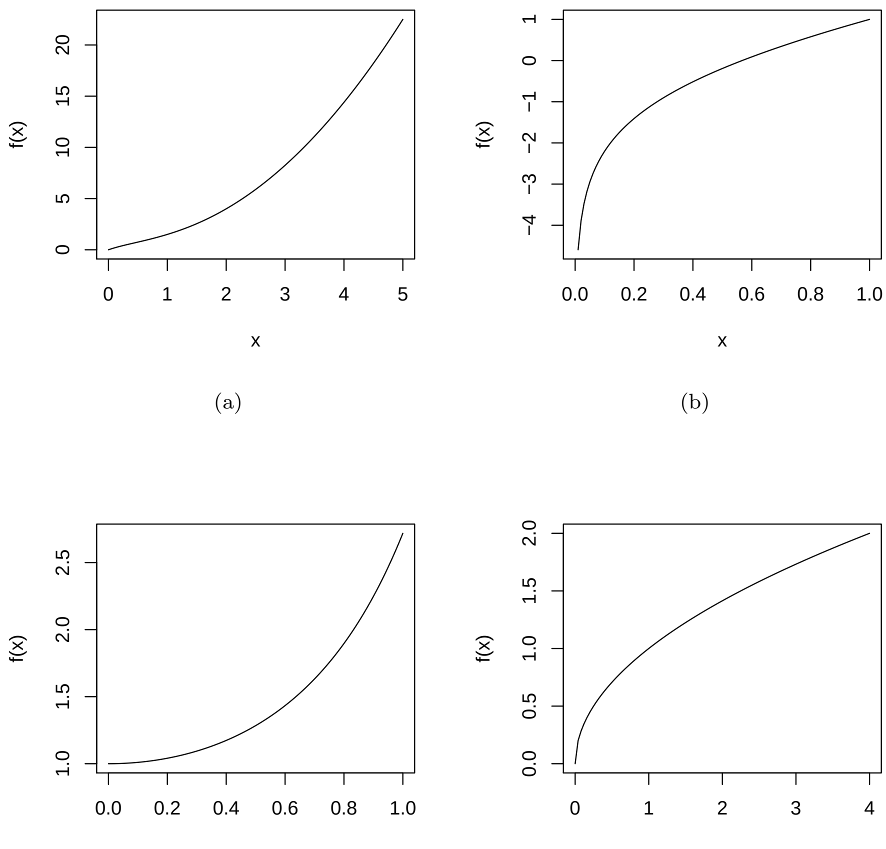
    (a) $f(x) = e^x$ (b) $f(v) = \dfrac{e^v}{1-e^v}$ (c) $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^{2x}}$

    (d) $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2+2x}}$ (e) $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ (f) $f(x) = \cos\left(e^{-x}\right)$

12. Determine o domínio e construa o gráfico das seguintes funções

    (a) $f(x) = \ln x$ (b) $f(x) = \ln \dfrac{x}{e}$ (c) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{x}$

13. Relacione as funções a seguir $f(x) = \log(x) + x$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{|x| + 1}$, $f(x) = e^{x^2}$, e $f(x) = \sqrt{x}$ com os gráficos da Figura 2.



(a) (b) (c) (d)

Figure 2: Figuras utilizadas para o exercício 11

14. Curvas de crescimento são muito utilizadas nas áreas de biologia e ciências agrárias para quantificar, por exemplo, a massa de animais e vegetais e o crescimento populacional de microorganismos. Assim, supondo que o crescimeto populacional de uma determinada bactéria em função do tempo (t) pode ser descrita pela função de Gompertz dada por

$$f(t) = a \exp\left[-\exp\left(b - ct\right)\right].$$

Assumindo que $a = 3000$, $b = 2$ e $c = 1$.

(a) Construa o gráfico da função

(b) Em quando tempo o tamanho da população de bactérias irá passar de 100 para 1000?

15. A partir da Figura 3 determine a função definida por partes utilizando conhecimentos de geometria e trigonometria. Além disso, determine o domínio e imagem dessa função.

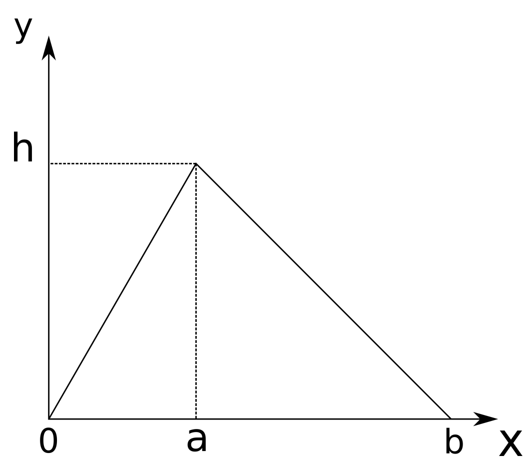


Figure 3: Figura para o exercício 15

16. Determine as funções inversas $\left(f^{-1}(x)\right)$

(a) $f(x) = e^x$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ (c) $f(x) = x^2 + 2x$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{a+x}{b-x}$ (f) $f(x) = \cos(x)$

17. Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule e simplique o quociente $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

18. Prove que $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \sec\alpha$.

19. Prove que $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{sen} 2\alpha$.

20. Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.

21. Determine as coordenadas do vértice da equação $x^2 - 3(x+y) = 1$

22. Determine o domínio e imagem da equação $y^2 = -x^2 + 4$

23. Determine a monotonicidade das seguintes funções

    (a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x + 3$

    (d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (e) $f(x) = \log(2x)$ (f) $f(x) = e^{-x^2}$

24. Um veículo teve seu pneu calibrado para 35 libras e, em seguida, o motorista se deslocou do ponto A ao ponto B em 9h a uma velocidade média de 100 km por hora. Suponha que a temperatura do pneu aumenta quadraticamente em função da distância percorrida até aproximadamente 100 graus Celcius. Então a temperatura se mantêm constante até a distância percorrida em 8h (Figura 4). Na última hora, suponha que a temperatura decai quadraticamente em função da distância. Determine uma função que descreva o aumento da temperatura em função da distância (em km).

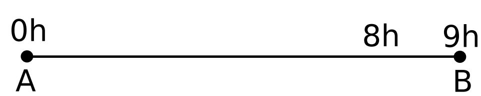


Figure 4: Exercício 24

25. Simplifique as funções a seguir

    (a) $f(x) = 4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+8x+16}{8x+32}$ (c)$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$

    (d) $f(x) = \log(x^2+3x) - \log(x)$ (e) $f(x) = \dfrac{e^x e^\pi}{e^{2x}}$ (f) $f(x) = e^{-x^2} e^{x^2+2x}$

    (g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{[\cos 2]^{-1}} - \dfrac{\operatorname{sen} 2}{[\cos(2x)]^{-1}}$ (h) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg}^{-2} x$ (i) $f(x) = x^2 + 4x - 4$

26. Encontre as raízes das funções polinomiais a seguir

(a) $f(x) = x^3 + x^2$ (b) $f(x) = x^2 - 10x - 9$ (c) $f(x) = x^2 + 9$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ (e) $f(x) = cx^2 + 4cx + c^2$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x}$