Cálculo diferencial e integral

Integral indefinida

Thiago de Paula Oliveira

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

7 de março de 2018

Integral

1. Criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano
2. Método da exaustão (desenvolvido por matemáticos gregos);
3. O maior avanço ocorreu no século 17 com o teorema fundamental do calculo proposto desenvolvido por Newton e Leibniz
4. Tal teorema relaciona o cálculo diferencial e integral, mostrando que a diferenciação e a integração são inversos um do outro.

Integral

Encontre todas as funções possíveis $F(x)$ cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

Integral

Encontre todas as funções possíveis $F(x)$ cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

1. $F(x) = x^2 + x + 10$

Integral

Encontre todas as funções possíveis $F(x)$ cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

1. $F(x) = x^2 + x + 10$
2. $F(x) = x^2 + x - 100$

Integral

Encontre todas as funções possíveis $F(x)$ cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

1. $F(x) = x^2 + x + 10$
2. $F(x) = x^2 + x - 100$
3. $F(x) = x^2 + x + \pi$

Integral

Encontre todas as funções possíveis $F(x)$ cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

1. $F(x) = x^2 + x + 10$
2. $F(x) = x^2 + x - 100$
3. $F(x) = x^2 + x + \pi$
4. $F(x) = x^2 + x - \log 10$

Integral

Encontre todas as funções possíveis $F(x)$ cuja derivada seja dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

1. $F(x) = x^2 + x + 10$
2. $F(x) = x^2 + x - 100$
3. $F(x) = x^2 + x + \pi$
4. $F(x) = x^2 + x - \log 10$
5. $F(x) = x^2 + x + c$, em que c é uma constante real ($c \in \mathbb{R}$)

Definição de integral indefinida ou antiderivada

Definição

A função F é chamada uma antiderivada de uma função f em um intervalo I se

$$F'(x) = f(x)$$

para qualquer valor de $x \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ em I, então sua antiderivada mais geral é a família de funções definidas por $F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$.

O processo de encontrar a antiderivada de uma função é chamado de anti-diferenciação ou integração.

Definição de integral indefinida ou antiderivada

Definição

A função F é chamada uma antiderivada de uma função f em um intervalo I se

$$F'(x) = f(x)$$

para qualquer valor de $x \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ em I, então sua antiderivada mais geral é a família de funções definidas por $F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$.

O processo de encontrar a antiderivada de uma função é chamado de anti-diferenciação ou integração.

Definição de integral indefinida ou antiderivada

Definição

Integral indefinida. *Se $F(x)$ é uma antiderivada da função $f(x)$, então a família de funções $F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$, é denominada integral indefinida da função $f(x)$ e é dada por*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

Definição de integral indefinida ou antiderivada

Definição

Integral indefinida. *Se $F(x)$ é uma antiderivada da função $f(x)$, então a família de funções $F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$, é denominada integral indefinida da função $f(x)$ e é dada por*

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c$$

1. O símbolo $\int$ representa o operador da antiderivada;
2. $f(x)$ é o integrando;
3. dx é o diferencial de x, que denota qual variável será integrada;
4. c é chamada constante de integração

Regras de integração

1. Se a antiderivada de uma função existe num intervalo $I \Longrightarrow$ função é integrável nesse intervalo.

Regras de integração

1. Se a antiderivada de uma função existe num intervalo $I \implies$ função é integrável nesse intervalo.

2. **Regra da constante.** Se k é um número real qualquer, então a integral indefinida de k em relação a x é

$$\int k \; dx = kx + c$$

Regras de integração

1. Se a antiderivada de uma função existe num intervalo $I \implies$ função é integrável nesse intervalo.

2. **Regra da constante.** Se k é um número real qualquer, então a integral indefinida de k em relação a x é

$$\int k\ dx = kx + c$$

3. **Regra do coeficiente.** Seja $a \in \mathbb{R}$ e f uma função integrável em I, então

$$\int af(x)\ dx = a \int f(x)\ dx$$

Regras de integração

4. **Regra da soma e diferença**. Seja f e g duas funções integráveis nos intervalos I_f e I_g, respectivamente. Então,

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

Este resultado se estende para um número finito de funções

Regras de integração

4. **Regra da soma e diferença**. Seja f e g duas funções integráveis nos intervalos I_f e I_g, respectivamente. Então,

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

Este resultado se estende para um número finito de funções

5. **Regra da potência**. Para qualquer número real n, em que $n \neq -1$, a integral indefinida x^n é dada por

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Regras de integração

Exemplos

Cálcule as integrais a seguir

1. $\int (2x + 7)\, dx$
2. $\int \left(x^2 + x\right) dx$
3. $\int \left(\frac{1}{3}x^3 - \pi\right) dx$
4. $\int \left[\frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \cos x\right] dx$
5. $\int \frac{5x^3 + 2}{x^{\frac{5}{3}}} dx$
6. $\int \operatorname{tg}\theta \operatorname{cosec}\theta \frac{1}{\cos\theta} d\theta$

Definição

Seja $u = g(x)$ *uma função diferenciável em* x, *então* $du = g'(x)dx$. *Agora suponha que* $f(u)$ *também é uma função diferenciável em* u. *Então,*

$$\int f(u)\ du = \int f(g(x))g'(x)\ dx$$

Integral por substituição

Definição

Seja $u = g(x)$ *uma função diferenciável em* x, *então* $du = g'(x)dx$. *Agora suponha que* $f(u)$ *também é uma função diferenciável em* u. *Então,*

$$\int f(u)\ du = \int f(g(x))g'(x)\ dx$$

Exemplos

1. $\int \operatorname{sen}(2x+4)\ dx$
2. $\int \frac{3\ dx}{\sqrt{(x+2)^3}}$
3. $\int x^{-1} \ln x\ dx$
4. $\int x\ e^{2x^2-3}\ dx$
5. $\int \operatorname{tg} x\ dx$
6. $\int \frac{2\,(x+1)}{x^2+2x-4}\ dx$
7. $\int x\ \cos\left(x^2\right)\ dx$
8. $\int \left(x^2-4x+4\right)^7$

1. **Primeiro caso**. Integrais na forma

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Ideia: completar o trinômio do denominador tornando-o quadrado perfeito (obter uma soma ou diferença de dois quadrados)

Exemplos

Calcular a integral

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 17}$$

2. **Segundo caso**. Integrais na forma

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}dx \quad \text{ou} \quad \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$$

Exemplos

Calcular a integral

$$\int \frac{2x + 4}{\sqrt{2x^2 + 8x + 6}}$$

Integrais por partes

Definição

Suponha que $u(x)$ e $v(x)$ são duas funções contínuas e diferenciáveis. A regra do produto (Teorema de Leibniz's) estabelece que

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) = v(x)\frac{d}{dx}u(x) + u(x)\frac{d}{dx}v(x).$$

Integrais por partes

Definição

Suponha que $u(x)$ e $v(x)$ são duas funções contínuas e diferenciáveis. A regra do produto (Teorema de Leibniz's) estabelece que

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) = v(x)\frac{d}{dx}u(x) + u(x)\frac{d}{dx}v(x).$$

Integrando ambos os lados com respeito a x

$$\int \frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right)\ dx = \int u'(x)v(x)\ dx + \int u(x)v'(x)\ dx$$

Resolvendo e reescrevendo essa igualdade temos:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\int u(x)\ dv = u(x)v(x) - \int v(x)\ du$$

Exemplos

Calcular as integrais

1. $\int 5xe^x \ dx$
2. $\int x^3 \ln x \ dx$
3. $\int \text{arctg} \ dx$
4. $\int \dfrac{x^3}{e^{x^2}} \ dx$
5. $\int \ln x \ dx$
6. $\int x \cos x \ dx$
7. $\int e^x \, \text{sen}\, x \ dx$
8. $\int \left[\dfrac{x^2+2}{\ln x} + 2 \right] \ dx$

Integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx,$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são funções polinomiais de graus m e n, respectivamente.

- Quando $m < n$ a função racional é chamada de própria
- Quando $m \geq n$ a função é chamada de imprópria

Nota: toda funçao imprópria pode ser decomposta na soma de uma função racional própria com um polinomio.

O resultado dessa divisão é

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

em que S (divisor) e R (resto) são polinômios.

Integrais de funções racionais

Essa técnica é utilizada para escrever a função racional própria como uma soma de frações parciais cujas fórmulas são:

1. Seja $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ o polinomio do denominador da função racional própria. A decomposição $f(x) = \frac{R(X)}{Q(x)}$ em frações simples é dada por:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

em que $A_1, A_2, \dots, A_n$ são constantes que devem ser determinadas.

Exemplos

Faça a decomposição das funções:

$$a)\ f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + x - 2} \qquad b)\ f(x) = \frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)}$$

Integrais de funções racionais

Essa técnica é utilizada para escrever a função racional própria como uma soma de frações parciais.

2. Se a raiz (a) do denominador da função racional própria tem multiplicidade k, então as frações parciais serão do tipo:

$$\frac{B_1}{(x-a)^k} + \frac{B_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{B_k}{(x-a)^1},$$

em que $B_1, B_2, \ldots, B_k$ são constantes que devem ser determinadas.

Exemplos

Faça a decomposição da função:

$$a)\ f(x) = \frac{x+1}{x^3} \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$$

3. Se os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem. A cada fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $Q(x)$, corresponderá uma fração parcial do tipo:

$$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c}$$

Exemplos

1. *Faça a decomposição das funções:*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$$

2. *Para cada um dos exemplos anteriores, calcular a integral* $\int f(x)\, dx$

Integrais de funções racionais

4. Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis sendo que alguns dos fatores quadráticos se repetem. Se um fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$ tem multiplicidade k, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais do tipo:

$$\frac{C_1x + D_1}{(x^2 + bx + c)^k} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \ldots + \frac{C_kx + D_k}{(x^2 + bx + c)^1}$$

Exemplos

1. *Calcular:*

$$\int \frac{x + 1}{x\,(x^2 + 2x + 3)^2}\, dx$$

Integrais envolvendo expressões da forma $\sqrt{x^2 + bx + c}$

- Algumas integrais podem envolver a expressão $\sqrt{x^2 + bx + c}$, $a \neq 0$
- Podem ser resolvidas utilizando uma substituição conveniente
- As vezes deve-se utilizar uma substituição trigonométrica

Exemplos

Resolver a integral

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{9 - 16x - 4x^2}}\, dx$$