Cálculo diferencial e integral

Equações diferenciais

Thiago de Paula Oliveira

5 de Agosto de 2018

1. (Larson & Edwards, 2014) Verificar a solução das equações diferenciais abaixo.

	Equação diferencial	**Solução**
(a)	$y' = 4y$	$y = Ce^{4x}$
(b)	$3y' + 5y = -e^{-2x}$	$y = e^{-2x}$
(c)	$y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 = Cy$
(d)	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{y^2 - 1}$	$y^2 - 2\ln y = x^2$
(e)	$y'' + y = 0$	$y = C_1 \operatorname{sen} x - C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$
(f)	$y'' + 2y' + 2y = 0$	$y = -\cos x \ln \lvert \sec x + \operatorname{tg} x \rvert$
(g)	$y'' + 4y' = 2e^x$	$y = \dfrac{2}{5}\left(e^{-4x} + e^x\right)$

2. A taxa de desintegração ou perda de massa de Polônio é proporcional à massa restante, ou seja, se $y(t)$ representa a massa existente num instante t, tem-se que $\dfrac{dy}{dt} = -ky$, em que k é uma constante positiva e que representa uma característica da substância. Determine a massa existente num instante t qualquer.

3. Determine a equação da curva cuja derivada segunda é $f''(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Considere que ela passa pelo ponto (1,4) e que a reta $2y = 3x + 2$ é tangente nesse ponto.

4. A função logística é muito utilizada para descrever o crescimento populacional, sendo que Pierre-François Verhulst (1938) foi o primeiro a estudá-la. Ele demonstrou naquela época que a taxa de reprodução é proporcional tanto a população existente quanto à quantidade de recursos disponíveis, considerando todas as demais variáveis constantes.

   Assim, a quantidade de recursos disponíveis diminui à medida que a população aumente. A equação logística na forma diferencial pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

   em que r e K são constantes e N é dado em função do tempo t. A partir dessa equação, determine o seguinte limite:

$$\lim_{t \to \infty} N(t)$$

   Qual é a alternativa correta?

   (a) K (b) $\frac{K}{r}$ (c) r (d) $e^{\frac{r}{K}}$ (e) $\frac{r}{K}$ (f) $e^{\frac{K}{r}}$

5. Um estudo demonstrou que a velocidade de disseminação em reboleira de uma determinada praga agrícola é proporcional ao número de plantas por metro linear. Então, sabendo-se que

$$v = \frac{dy}{dt} = ky, \quad y = y(t), \text{ para } k > 0,$$

em que v é a velocidade de disseminação, y é o número de plantas sadias no instante t (em dias) e k é uma constante que depende de fatores ambientais. Sabendo-se que no instante $t = 0$ o número de plantas atacadas pela praga é $y(0) = 1$ e que $k = 0,7$ para uma determinada condição ambiental. Então, qual será o número de plantas infectadas no instante $t = 10$ dias?

6. Determine se cada uma das funções a seguir é uma solução da equação diferencial $y'' - y = 0$.

   (a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = 4e^{-x}$ (c) $y = Ce^{x}$

7. Considere a equação diferencial $xy' - 3y = 0$. Verifique se $y = Cx^3$ é uma solução dessa equação. Em seguida, determine uma solução particular para essa equação considerando $y = 2$ quando $x = -3$.

8. (Stwart, 2010) Mostre que $y = x - x^{-1}$ é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 2x$.

9. (Stwart, 2010) Verifique que $y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x$ é uma solução do problema de valor inicial $y' + (\operatorname{tg} x)\, y = \cos^2 x$ com $y(0) = -1$ e $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

10. (Stwart, 2010) Responda:

    (a) Para quais valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação diferencial $2y'' + y' - y = 0$.

    (b) Se r_1 e r_2 são os valores que você encontrou na parte (a), mostre que todo membro da família de funções $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ também é uma solução.

11. (Stwart, 2010) Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial $y'' + 2y' + y = 0$?

    (a) $y = e^{t}$ (b) $y = e^{-t}$ (c) $y = te^{-t}$ (d)$y = t^2 e^{-t}$

12. (Stwart, 2010) Mostre que cada membro da família de funções $y = Cx^{\frac{x^2}{2}}$ é uma solução da equação diferencial $y' = xy$.

13. (Stwart, 2010) Uma população é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1,2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

    Pergunta-se:

    (a) Para quais valores de P a população está aumentando?

    (b) Para quais valores de P a população está diminuindo?

    (c) Quais são as soluções de equilíbrio?

14. (Stwart, 2010) A função $y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

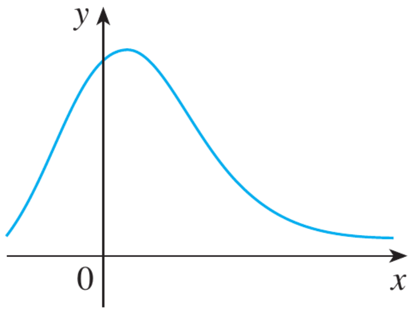
    Pergunta-se:

(a) Quais são as soluções constantes da equação?

(b) Para quais valores de y a função está aumentando?

(c) Para quais valores de y a função está diminuindo?

15. (Stwart, 2010) A função, cujo gráfico é dado a seguir, é uma solução de uma das seguintes equações diferenciais. Decida qual é a equação correta e justifique sua resposta.



(a) $y' = 1 + xy$ (b) $y' = -2xy$ (c) $y' = 1 - 2xy$

16. (Stwart, 2010) Suponha que você tenha acabado de servir uma xícara de café recém-coado com uma temperatura de 95 °C em uma sala onde a temperatura é de 20 °C.

(a) Em que momento você acha que o café esfria mais rapidamente? O que acontece com a taxa de resfriamento ao longo do tempo? Explique.

(b) A Lei de Resfriamento de Newton afirma que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua vizinhança, desde que essa diferença não seja muito grande. Escreva uma equação diferencial para expressar a Lei de Resfriamento de Newton nessa situação particular. Qual deve ser a condição inicial? Tendo em vista sua resposta na parte (a), você acha que essa equação diferencial é um modelo apropriado para o resfriamento?

(c) Faça um esboço para o gráfico da solução do problema de valor inicial dado na parte (b).

Referências

Larson, R.; Edwards, B. **Calculus**. Cengage Learning: Boston, Ed. 10, 2014.

Stwart, J. **Cálculo: volume 2**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 6, 2010.

Respostas de alguns exercícios

1. Demonstrações

2. $y = C_1 e^{-kt}$

3. $y = \dfrac{1}{2x} + 2x + \dfrac{3}{2}$

6. Temos que:
   (a) não é solução.
   (b) é solução
   (c) é solução para qualquer valor de C.

7. A solução particular é $y = -\dfrac{2x^3}{27}$

10. (a) $-\frac{1}{2}, -1$

11. (b) e (c)

13. (a) $0 < P < 4200$ (b) $P > 4200$ (c) $P = 0,\ P = 4200$