Pré-cálculo: teoria dos conjuntos e funções

Thiago de Paula Oliveira

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

5 de março de 2018

Diferença entre equação e função

1. Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;

2. Funções são apenas tipos específicos de equações
   - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x;

Diferença entre equação e função

1. Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;

2. Funções são apenas tipos específicos de equações
   - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x;
   - Ex. 1: $y = x + 3$,

Diferença entre equação e função

1. Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;

2. Funções são apenas tipos específicos de equações
   - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x;
   - Ex. 1: $y = x + 3, \quad$ é uma função para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

Diferença entre equação e função

1. Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;

2. Funções são apenas tipos específicos de equações
   - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x;
   - Ex. 1: $y = x + 3$, é uma função para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
   - Ex. 2: $y^2 + x^2 = 1$

Diferença entre equação e função

1. Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;

2. Funções são apenas tipos específicos de equações
   - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x;
   - Ex. 1: $y = x + 3$, é uma função para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
   - Ex. 2: $y^2 + x^2 = 1$ não é uma função $\forall\ x \in (-1, 1)$, pois há múltiplos valores para y;

Diferença entre equação e função

1. Equações podem ser elaboradas a partir de quaisquer duas expressões, as quais possuem uma relação de igualdade;

2. Funções são apenas tipos específicos de equações
   - Diferença: temos apenas um único valor de y para cada valor de x;
   - Ex. 1: $y = x + 3$, é uma função para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
   - Ex. 2: $y^2 + x^2 = 1$ não é uma função $\forall\ x \in (-1, 1)$, pois há múltiplos valores para y;

Tabela: Diferença entre equação e função

Equação	Função
$y = x^2 + 1$	$f(x) = x^2 + 1$
(x, y)	$(x, f(x))$

Função

Definição

Função: *Sejam A e B dois conjuntos não vazios, uma função definida em A e com valores em B é uma lei que associa a cada elementos $x \in A$ um único valor $y \in B$.*

Notação:

$$f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

1. Quando $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ a função é dita real de variável real.
2. O conjunto A é denominado domínio da função, enquanto que o conjunto B é o contradomínio

Teste da linha vertical

1. Muitas das equações estudadas em cálculo são funções. No entanto, nem todas as equações são funções.

2. Apenas funções podem passar no teste da linha vertical;

3. **Teste**: $f(x)$ só será uma função no intervalo $[a, b]$ se para qualquer reta perpendicular ao eixo x (vertical) exista apenas um ponto de intersecção com y.

Domínio, contra-domínio e imagem

Definição

Domínio: *O domínio de uma função é dado por todos os valores de* $x \in A$ *tal que* $f(x)$ *exista.*

Domínio, contra-domínio e imagem

Definição

Domínio: *O domínio de uma função é dado por todos os valores de* $x \in A$ *tal que* $f(x)$ *exista.*

Definição

Imagem: *Seja* $y = f(x)$ *uma função definida em* A *com valores em* B*, o conjunto imagem da função é definito por* $Im(f) = \{y \in B | y = f(x)\}$

Domínio, contra-domínio e imagem

Definição

Domínio: *O domínio de uma função é dado por todos os valores de* $x \in A$ *tal que* $f(x)$ *exista.*

Definição

Imagem: *Seja* $y = f(x)$ *uma função definida em* A *com valores em* B, *o conjunto imagem da função é definito por* $Im(f) = \{y \in B | y = f(x)\}$

Definição

Contra-domínio: *É o conjunto que contém todas as imagens possíveis para a função.*

Domínio, contra-domínio e imagem

Definição

Domínio: *O domínio de uma função é dado por todos os valores de* $x \in A$ *tal que* $f(x)$ *exista.*

Definição

Imagem: *Seja* $y = f(x)$ *uma função definida em* A *com valores em* B*, o conjunto imagem da função é definito por* $Im(f) = \{y \in B | y = f(x)\}$

Definição

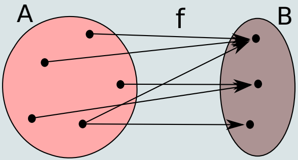
Contra-domínio: *É o conjunto que contém todas as imagens possíveis para a função.*

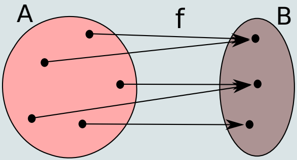
Exemplos: (a) $f(x) = x + 1$, $(b) f(x) = \frac{3}{x+1}$, $(c) y = \sqrt{x - 3}$

Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

Sobrejetora: *Seja uma função $f : A \to B$. A função f é sobrejetora, se e somente se, para todo elemento $x_1 \in A$ existir um elemento de $y_1 \in B$ tal que $f(x_1) = y_1$, ou seja, $CD(f) = Im(f)$.*

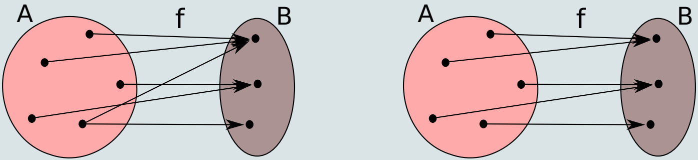




Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

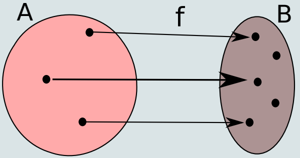
Sobrejetora: *Seja uma função $f : A \to B$. A função f é sobrejetora, se e somente se, para todo elemento $x_1 \in A$ existir um elemento de $y_1 \in B$ tal que $f(x_1) = y_1$, ou seja, $CD(f) = Im(f)$.*

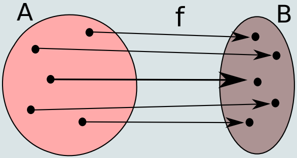


$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), \text{ dada por } f(x) = x^2$$

Definição

Injtora: *Seja uma função* $f : A \to B$. *A função* f *é injetora quando para quaisquer elementos* $x_1 \neq x_2 \in A$ *resulte em* $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$.

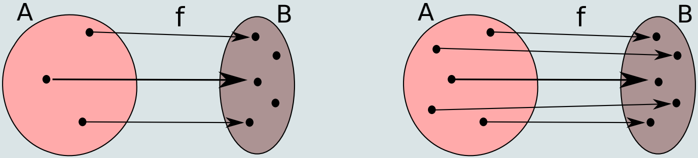




Função sobrejetora, injora e bijetora

Definição

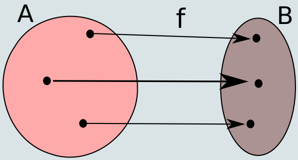
Injtora: *Seja uma função $f : A \to B$. A função f é injetora quando para quaisquer elementos $x_1 \neq x_2 \in A$ resulte em $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$.*



$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = x^2$$

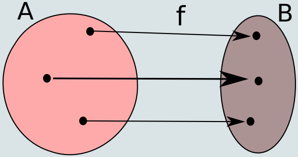
Definição

Bijetora: *Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.*



Definição

Bijetora: *Uma função $f : A \to B$ é bijetora quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.*



$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \text{ dada por } f(x) = x^2$$

Exemplos

1. $f(x) = x$, para $\forall\ x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^2$, para $\forall\ x \in [-1, 2]$
3. $f(x) = x^3$, para $\forall\ x \in [-2, 2]$
4. $f(x) = |x|$, para $\forall\ x \in \mathbb{R}$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:
  1. $h(x) = f(x) + g(x) =$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:
  1. $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2}$;
  2. $h(x) = f(x) \times g(x) =$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:
  1. $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2}$;
  2. $h(x) = f(x) \times g(x) = 1 + x$;
  3. $h(x) = f(g(x)) =$

Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:
  1. $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2}$;
  2. $h(x) = f(x) \times g(x) = 1 + x$;
  3. $h(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1+x}{x^2}\right)^2$;
  4. $h(x) = f(g(x)) =$

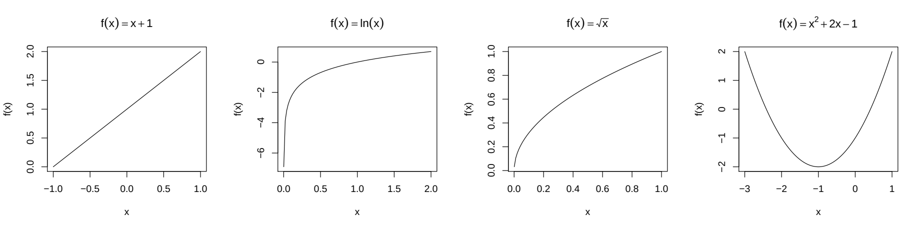
Composição de funções

- Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1+x}{x^2}$, determine as funções e as simplifique:
  1. $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2}$;
  2. $h(x) = f(x) \times g(x) = 1 + x$;
  3. $h(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1+x}{x^2}\right)^2$;
  4. $h(x) = f(g(x)) = [f(x)]^{g(x)} = x^{\frac{2+2x}{x^2}}$

Visualização de funções

A forma mais comum de visualizar uma função é por meio gráfico. Se f é uma função com domínio D, então seu gráfico é o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}$$

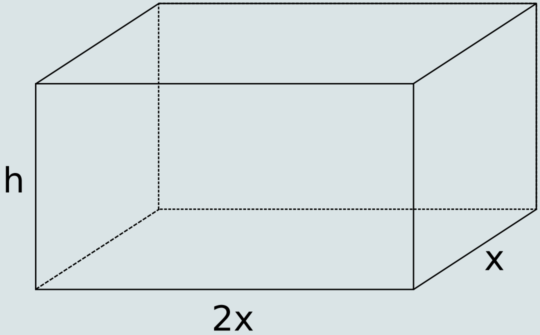


Exemplo

Exemplo: Um container retangular para estoque de alimentos tem o seu topo aberto e deve ter um volume de $10m^3$. O tamanho de seu comprimento deve ser duas vezes sua largura. O material para a base tem um custo de 30 reais por metro quadrado; o material para as laterais tem um custo de 20 reais por metro quadrado. Expresse o custo de materiais como uma função da largura de sua base.

Exemplo

Exemplo: Um container retangular para estoque de alimentos tem o seu topo aberto e deve ter um volume de $10m^3$. O tamanho de seu comprimento deve ser duas vezes sua largura. O material para a base tem um custo de 30 reais por metro quadrado; o material para as laterais tem um custo de 20 reais por metro quadrado. Expresse o custo de materiais como uma função da largura de sua base.



Monotonicidade

Definição

Monotonicidade: *seja* $y = f(x)$ *uma função real e* (a, b) *um subintervalo do domínio dessa função, se:*

1. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *com* $x_1 < x_2$ *se verifique* $f(x_1) < f(x_2)$, *então* $y = f(x)$ *é uma função estritamente crescente em* (a, b)
2. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *com* $x_1 < x_2$ *se verifique* $f(x_1) > f(x_2)$, *então* $y = f(x)$ *é uma função estritamente decrescente em* (a, b)
3. *Quando a função é crescente ou decrescente em todo o seu domínio diz-se que ela é absolutamente monótona*

Monotonicidade

Definição

Monotonicidade: *seja $y = f(x)$ uma função real e (a, b) um subintervalo do domínio dessa função, se:*

1. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *com* $x_1 < x_2$ *se verifique* $f(x_1) < f(x_2)$, *então* $y = f(x)$ *é uma função estritamente crescente em* (a, b)
2. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *com* $x_1 < x_2$ *se verifique* $f(x_1) > f(x_2)$, *então* $y = f(x)$ *é uma função estritamente decrescente em* (a, b)
3. *Quando a função é crescente ou decrescente em todo o seu domínio diz-se que ela é absolutamente monótona*

Ex.: (a) $f(x) = x + 2$ (b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Paridade de funções

1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade de simetria em relação à origem:

$$x \in A \Longrightarrow -x \in A$$

   1. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita **par** se $f(x) = f(-x)$;
   2. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$;

Paridade de funções

1. Propriedades:
    1. A única função que é par e ímpar ao mesmo tempo é a função nula ($f(x) = 0$);
    2. Há funções que não são pares e nem ímpares;
    3. Uma função ímpar definida na origem é nula na origem;
    4. A soma de duas funções de mesma paridade mantem essa paridade;
    5. O produto de duas funções com paridades distintas é uma função ímpar;
    6. A derivada de uma função par é uma função ímpar;
    7. A derivada de uma função ímpar é uma função par;

Paridade de funções

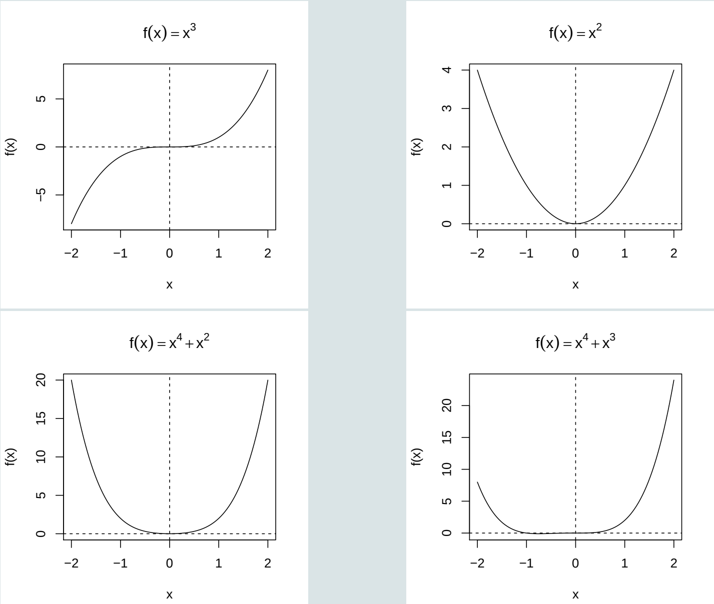
Exercício: Seja $f(x) = x^5$ e $g(x) = 1 - x^4$, verifique a paridade:

(a) $h(x) = f(x) + f(x)$ (b) $h(x) = f(x) \times f(x)$

(c) $h(x) = g(x) + f(x)$ (d) $h(x) = f(x) \times g(x)$

(e) $h(x) = x^3 + x^2$ (f) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

Gráfico: paridade



Funções compostas

Definição

Função composta: *considere três conjuntos não vazios, A, B e C e duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$, tais que:*

$$g : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto g(x) \end{cases} \qquad f : \begin{cases} B \to C \\ g(x) \mapsto f(g(x)) \end{cases} \tag{1}$$

- $f(g(x))$ é denominada função composta de f em $g \to f \circ g(x)$
- O domínio de $f \circ g(x)$ é determinado pelos valores reais de x para os quais $g(x)$ exista, sendo que todos os valores reais de $g(x)$ estarão no domínio de f.

Funções compostas

Definição

Função composta: *considere três conjuntos não vazios, A, B e C e duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$, tais que:*

$$g : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto g(x) \end{cases} \qquad f : \begin{cases} B \to C \\ g(x) \mapsto f(g(x)) \end{cases} \tag{1}$$

- $f(g(x))$ é denominada função composta de f em $g \to f \circ g(x)$
- O domínio de $f \circ g(x)$ é determinado pelos valores reais de x para os quais $g(x)$ exista, sendo que todos os valores reais de $g(x)$ estarão no domínio de f.

Funções compostas

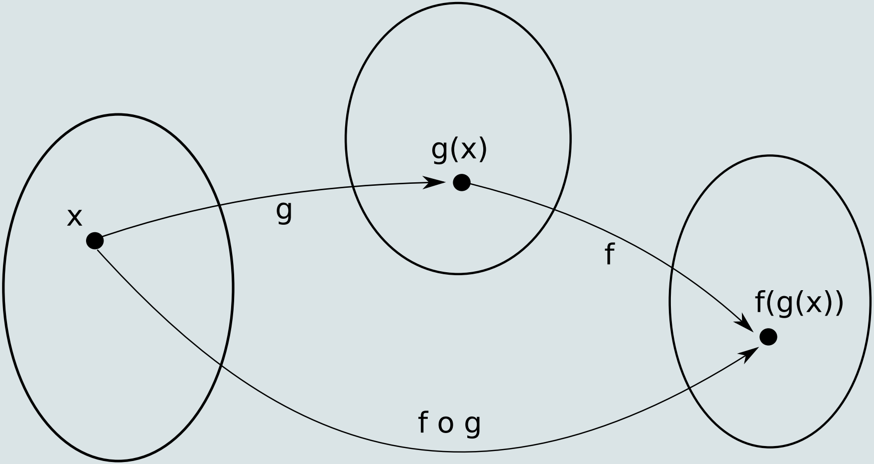


Figura: Ilustração da composição das funções $f(x)$ e $g(x)$

Exemplos

Seja $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcule

1. Encontre as leis e propriedades das funções $f \circ g(x)$ e $g \circ f(x)$.
   i) Propriedades: domínio, imagem, se ela é sobrejetora, injetora ou bijetora e monotonicidade.

2. $f(g(2))$

3. $f(g(-1))$

Funções definidas por partes

1. Uma função pode ser definida por diferentes fórmulas em diferentes partes do seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se} \quad x \leq 1 \\ x^2, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} \tag{2}$$

Funções definidas por partes

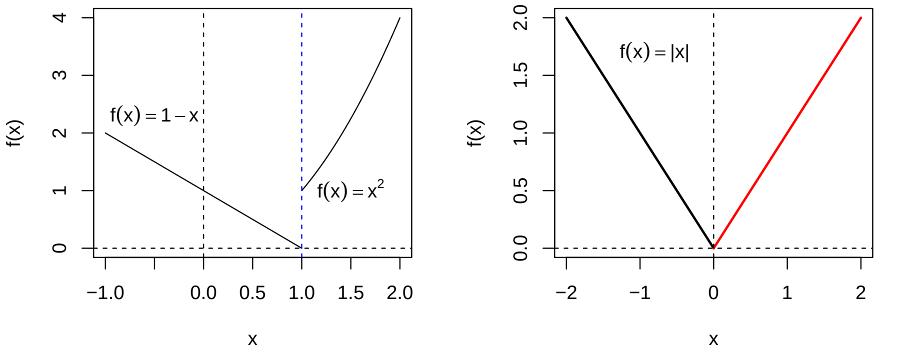
1. Uma função pode ser definida por diferentes fórmulas em diferentes partes do seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se} \quad x \leq 1 \\ x^2, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} \tag{2}$$

2. Outra função definida por partes é a função modular $|x| \geq 0$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Gráfico



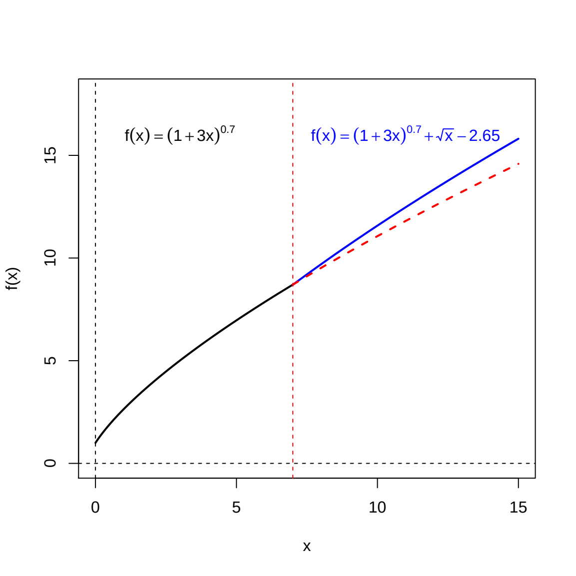
Exemplos

Em um experimento utilizando uma espécies de tesourinha (*Doru ssp.*) o pesquisador avalia o seu crescimento ao longo do tempo (dias). Suponha que o crescimento (mm) do inseto em função do tempo pode ser descrita pela função

$$f(x) = (a + b\ x)^c\,,\ \forall\ a, b > 0 \text{ e } 0 < c < 1.$$

Agora, suponha que para o intervalo de dias $t \in [0, 7)$ o crescimento do inseto seja dado por $g(x) = f(x)$ enquanto que para o intervalo de dias $t \in [7, 15]$ seja dado por $g(x) = f(x) + h(x)$. Defina a função $g(x)$ para cada um dos intervalos sabendo que $h(x) = \sqrt{x} - 2.645$. Esboce o gráfico da função considerando $a = 1,\ b = 3, c = 0.7$.

Gráfico



Função modular

Definição

Valor absoluto ou módulo. *Para qualquer número real x, o valor absoluto ou módulo de x é denotado por $|x|$, o qual é definido por:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

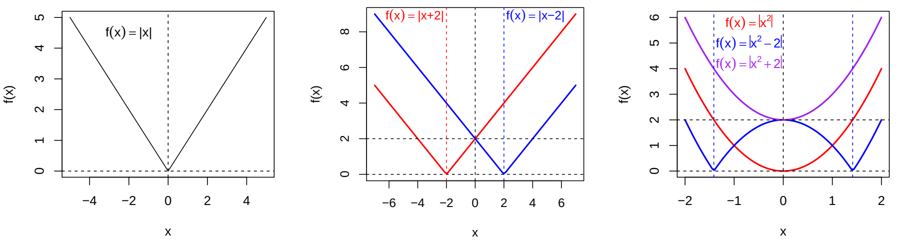
O valor absoluto de x é sempre um valor positivo ou nulo, porém nunca negativo, mesmo para $x < 0$.

Definição

Valor absoluto ou módulo. *Para qualquer número real x, o valor absoluto ou módulo de x é denotado por $|x|$, o qual é definido por:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

O valor absoluto de x é sempre um valor positivo ou nulo, porém nunca negativo, mesmo para $x < 0$.



Função modular: propriedades

Propriedades fundamentais:

1. $|x| = \sqrt{x^2}$
2. $|x| \geq 0 \implies$ não-negativo;
3. $|x| = 0 \iff x = 0$
4. $|xy| = |x||y| \implies$ multiplicatividade;
5. $|x + y| \leq |x| + |y| \implies$ subaditividade (desigualdade triangular)
6. $|-x| = |x| \implies$ simétrica em relação ao eixo Oy
7. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ para $y \neq 0 \implies$ preservação da divisão

Função modular: exemplo

Sejam as funções $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = |x|$. Esboce os gráficos especificando o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções a seguir:

1. $g \circ f(x) = g(f(x))$
2. $f \circ g(x) = f(g(x))$

Função exponencial

1. São funções da forma a^x, e que a é uma constante positiva
2. Caso especial: quando $a = e$, em que e é o número de Leonhard Euler (1727)
3. $e \approx 2,71828$
4. pode ser expresso como e^x ou $\exp(x)$

Exemplo I

A função de Shumacher (1939) foi a primeira tentativa de definir uma função para relacionar o crescimento florestal com o tempo. A função baseia-se na hipótese de que a taxa relativa de crescimento decresce de forma não linear ao longo do tempo e é dada por

$$f(t) = a \ \exp\left(-k\frac{1}{t}\right),$$

em que a é uma constante real.
Faça o gráfico da função assumindo $a = 10$ e $t = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Interprete.

Exemplo II

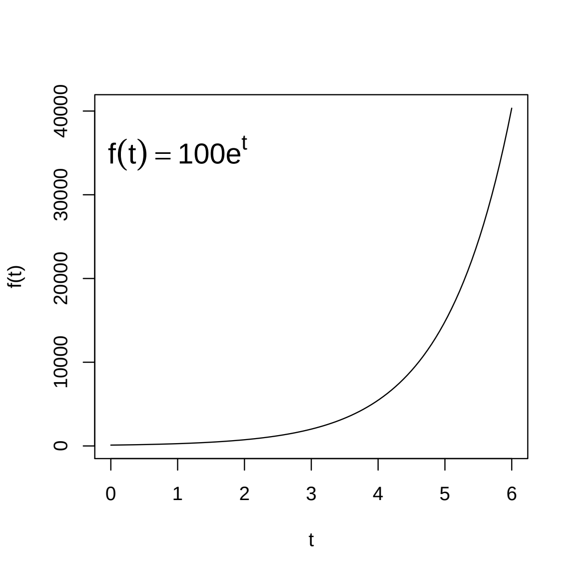
Suponha um experimento em que uma cultura de bactéria contendo 100 indivíduos é colocada em um recipiente contendo um determinado conteúdo nutritivo. Então, pose-de quantificar o número de bactérias em função do tempo, ou seja, $N = f(t)$, em que N é o número de bactérias. Supondo $f(t) = 100\ e^t$, a Tabela 1 apresenta o resultado desse experimento:

Tabela: N como uma função de t

Tempo (horas)	$N = f(t)$
0	100
1	272
2	739
3	2.009
4	5.460
5	14.841
6	40.343

Faça o esboço do gráfico da função.

Gráfico



Função inversa

Definição

Uma função f é chamada função um-para-um se quaisquer dois elementos de $x_1, x_2 \in A$ não tem a mesma imagem, ou seja,

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall\; x_1 \neq x_2.$$

Portanto, a função inversa (f^{-1}) existirá, sem perda de generalidade, se e somente se f for uma função bijetora.

Função inversa

Definição

Uma função f é chamada função um-para-um se quaisquer dois elementos de $x_1, x_2 \in A$ não tem a mesma imagem, ou seja,

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall\, x_1 \neq x_2.$$

Portanto, a função inversa (f^{-1}) existirá, sem perda de generalidade, se e somente se f for uma função bijetora.

Cuidado: O -1 de f não é um expoente.

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$$

Função inversa

Definição

Uma função f é chamada função um-para-um se quaisquer dois elementos de $x_1, x_2 \in A$ não tem a mesma imagem, ou seja,

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall\ x_1 \neq x_2.$$

Portanto, a função inversa (f^{-1}) existirá, sem perda de generalidade, se e somente se f for uma função bijetora.

Cuidado: O -1 de f não é um expoente.

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$$

Exemplos:

1. $g(x) = x^2,$ para $x \in [-3, 3]$ e $g(x) = x^2,$ para $x \in [0, 3]$
2. $g(x) = x,$ para $x \in [-3, 3]$

Função inversa

Definição

Seja f uma função um-para-um com domínio A e imagem B. Então, sua função inversa f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y, \quad \forall\ y \in B.$$

Passo a passo para encontrar uma função um-para-um

1. Escreva y=f(x)
2. Resolva essa equação para x em função de y, caso possível.
3. Expresse f^{-1} como uma função de x, trocando x e $y \Longleftrightarrow y = f^{-1}(x)$

Função inversa

Definição

Seja f uma função um-para-um com domínio A e imagem B. Então, sua função inversa f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \quad \forall\, y \in B.$$

Passo a passo para encontrar uma função um-para-um

1. Escreva y=f(x)
2. Resolva essa equação para x em função de y, caso possível.
3. Expresse f^{-1} como uma função de x, trocando x e $y \iff y = f^{-1}(x)$

Exemplos: (a) $f(x) = x + 1$ (b) $f(x) = x^3 + 2$

Função inversa

Suponha um experimento em que uma cultura de bactéria contendo 100 indivíduos é colocada em um recipiente contendo um determinado conteúdo nutritivo. Então, pose-de quantificar o número de bactérias em função do tempo, ou seja, $N = f(t)$, em que N é o número de bactérias.
Supondo $f(t) = 100\ e^t$ e $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, faça uma tabela para $N = f(t)$ e outra $t = f^{-1}(N)$.

Função inversa

Suponha um experimento em que uma cultura de bactéria contendo 100 indivíduos é colocada em um recipiente contendo um determinado conteúdo nutritivo. Então, pose-de quantificar o número de bactérias em função do tempo, ou seja, $N = f(t)$, em que N é o número de bactérias.
Supondo $f(t) = 100\ e^t$ e $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, faça uma tabela para $N = f(t)$ e outra $t = f^{-1}(N)$.

Tabela: (a) número de bactérias em função do tempo e (b) tempo em função do número de bactérias

(a) $N = f(t)$

t (horas)	$N = f(t)$
0	100
1	272
2	739
3	2.009

(b) $t = f^{-1}(N)$

N	$t = f^{-1}(N)$
100	0
272	1
739	2
2.009	3

Função inversa: gráfico

Função logarítmica

Definição

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ pode ser crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$). Assim, sua função inversa f^{-1} é chamada função logarítmica com base a e é denotada por $\log_a$, ou seja,

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$$

Função logarítmica

Definição

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ pode ser crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$). Assim, sua função inversa f^{-1} é chamada função logarítmica com base a e é denotada por $\log_a$, ou seja,

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Definição

Leis dos logaritmos. *Se x e y são números positivos, então*

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a\left(x^b\right) = b\log_a x$, *com* $b \in \mathbb{R}$

Função logarítmica

Propriedades

1. $\log_a (a^x) = x, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

2. $a^{\log_a x} = x, \ \forall \ x > 0$

Propriedades

1. $\log_a(a^x) = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

2. $a^{\log_a x} = x, \ \forall\, x > 0$

Exemplos:

1. Use as leis dos logaritmos para calcular

   a) $\log_4 20 + \log_4 10$

   b) $\log_2 10 - \log_2 2$

2. Simplifique

   1. $\log_a b^3 - 3\log_a c + 3^{\log_3 b}$

   2. $\log_a(2b^2 + 2) - \log_a\left[2\left(b^2 + 2bc + c^2\right)\right]$

Logaritmo natural

Definição

O logaritmo cuja base é o número e chama-se logaritmo natural e tem uma notação especial

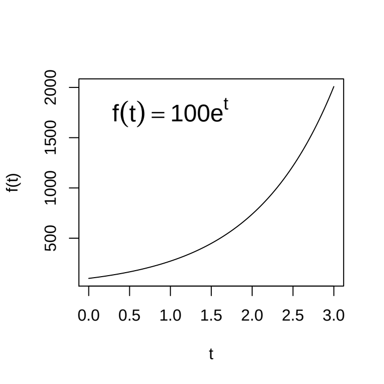
$$\log_e x = \ln x.$$

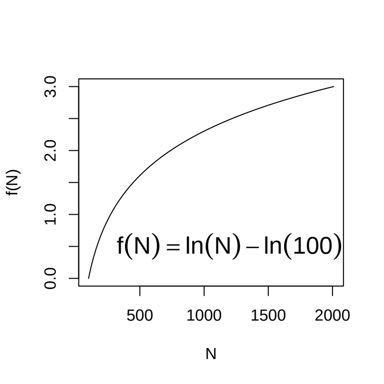
Utilizando as definições e propriedades dos logaritmos temos que:

1. $\ln x = y \iff e^y = x$
2. $\ln(e^x) = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$
3. $e^{\ln x} = x, \ \forall\, x > 0$

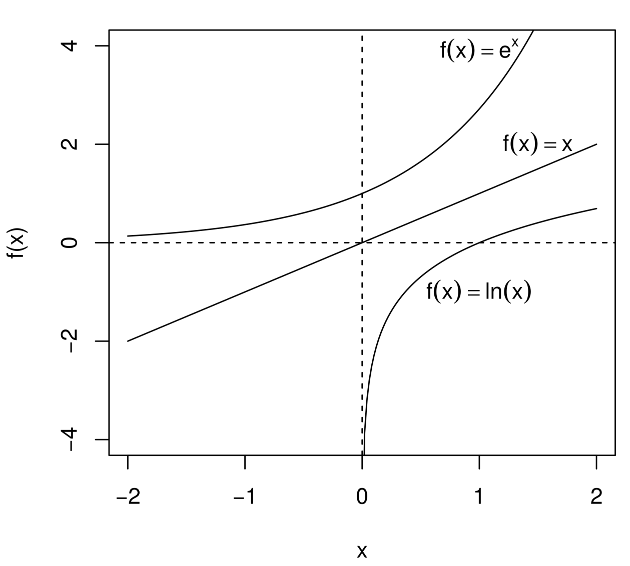
Exemplo:

1. Calcule a inversa de $f(t) = 100\ e^x$
2. Encontre o domínio e a imagem de $f(x) = 1 + e^{x^2}$ e de $f(x) = e^{-x}$

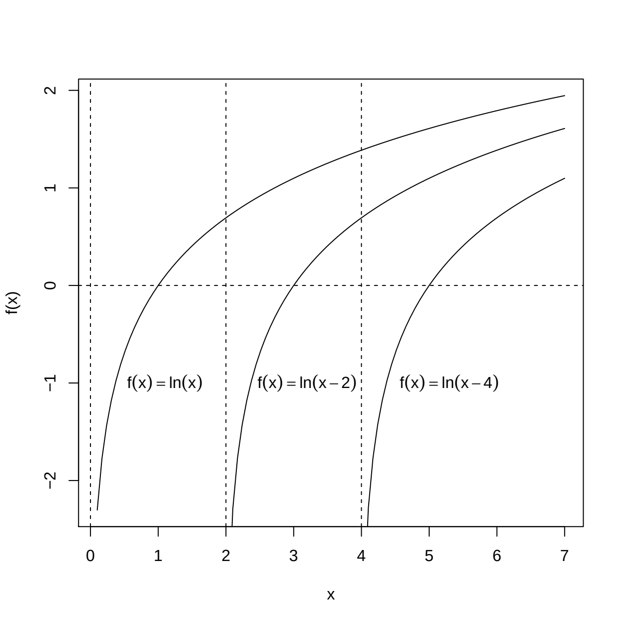

f(t) = 100e^t
f(t)
500
1000
1500
2000
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
t


f(N) = ln(N) − ln(100)
f(N)
0.0
1.0
2.0
3.0
500
1000
1500
2000
N

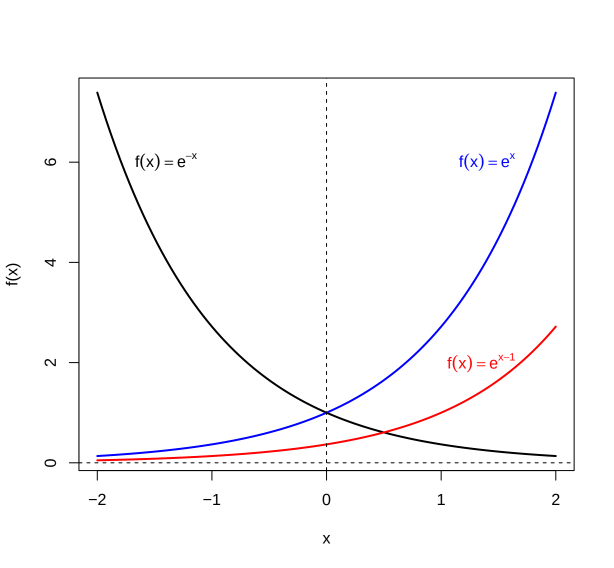
Gráfico



Gráfico



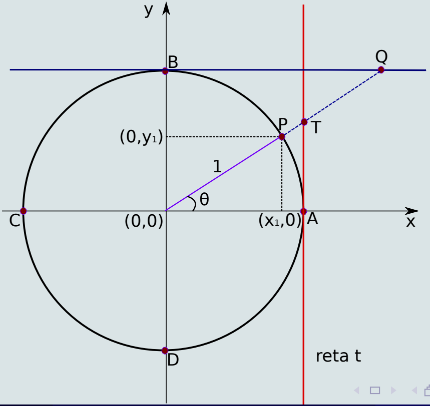
Gráfico



Funções trigonométricas: seno e cosseno

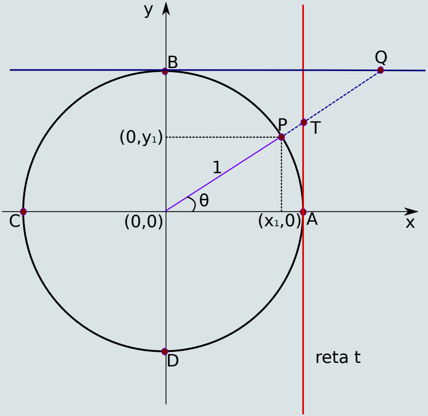
1. Funções trigonométricas são funções de um ângulo. Elas relacionam os ângulos de um triângulo com o comprimento de seus lados.

2. São utilizadas para modelar fenômenos periódicos como o som, direção do vôo de pássaros, variações na temperatura média



Considere, no primeiro quadrante, o ângulo θ que define o arco $\widehat{AP}$. Por definição:

1. sen $\theta =$ sen $\widehat{AP} = y_1$ e $\cos\theta = \cos\widehat{AP} = x_1$



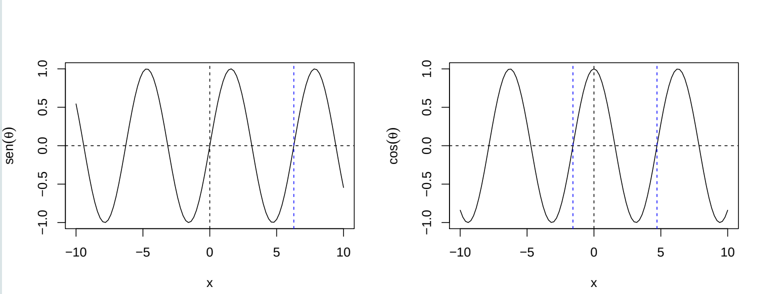
Funções trigonométricas: seno e cosseno

1. Domínio: $D(f(\theta)) = \{\theta \in \mathbb{R}\}$
2. Contra-domínio: $CD(f(\theta)) = \{y \in [-1, 1]\}$

$$-1 \leq \text{sen } \theta \leq 1 \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

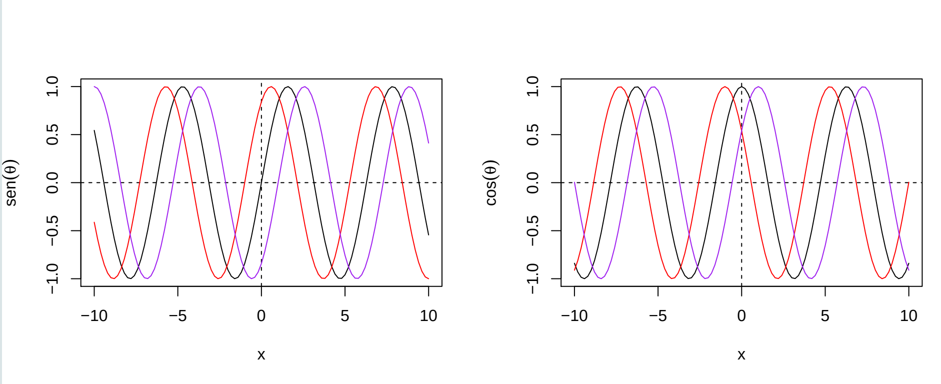
3. Uma propriedade importante: função periódica cujo período é 2π

$$\text{sen}\,(\theta + 2\pi) = \text{sen } \theta \quad \cos\,(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$



Funções trigonométricas: seno e cosseno

Preto: sen θ e $\cos\theta$
Vermelho: $\text{sen}\,(\theta+1)$ e $\cos(\theta+1)$
Roxo: $\text{sen}\,(\theta-1)$ e $\cos(\theta-1)$



1. Relaciona as funções seno e cosseno:

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

2. Ela não é definida quando $\cos \theta = 0$, ou seja,

$$\theta \neq \left\{\dots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\right\} = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

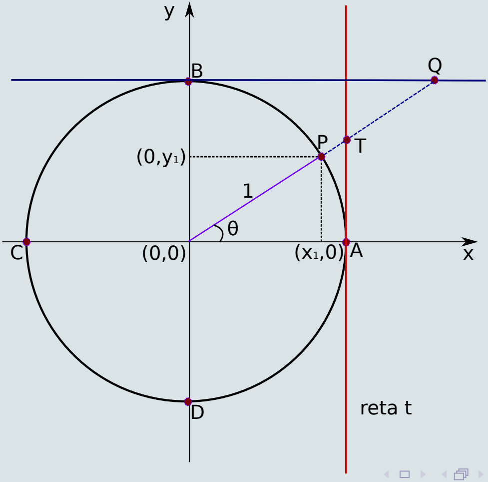
3. Domínio: $D(f(\theta)) = \left\{\theta \in \mathbb{R} | \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. Contra-domínio: $CD(f(\theta)) = \{y \in [-\infty, \infty]\}$

Funções trigonométricas: tangente

Considere, no primeiro quadrante, o ângulo a que define o arco $\widehat{AP}$. Por definição:

1. $\text{tg } \theta = \text{tg } \widehat{AP} = \overline{AT}$ e $\text{cotg } \theta = \text{cotg } \widehat{AP} = \overline{BQ}$



Relações trigonométricas fundamentais

Definição

Seja θ *um ângulo associado a um arco* $\widehat{AM}$ *e* $k \in \mathbb{Z}$*. Podemos definir as seguintes identidades trigonométricas:*

1. $\operatorname{sen}^2\theta + cos^2\theta = 1$
2. $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$
3. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \theta \neq k\pi$
4. $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$
5. $\operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \theta \neq k\pi$
6. $\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta, \quad \theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$

Função trigonométrica

Definição

Função trigonométrica: *é toda função definida por uma relação trigonométrica. Ao definir essa função deve-se observar:*

1. *as condições de sua existência (domínio)*
2. *o conjunto imagem*
3. *o* **período** *da função*

Função trigonométrica

Definição

Função trigonométrica: *é toda função definida por uma relação trigonométrica. Ao definir essa função deve-se observar:*

1. *as condições de sua existência (domínio)*
2. *o conjunto imagem*
3. *o* **período** *da função*

Definição

Função periódica*: uma função* $y = f(x)$*, com* $x \in D \subseteq \mathbb{R}$*, é dita periódica se existe um número positivo* p *tal que* $f(x + p) = f(x)$ *para todo* $x \in D$*. O menor valor de* p *para o qual se verifica essa relação é chamado de período da função.*

Função trigonométrica

Considere a função

$$f: \begin{cases} \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R} \\ \theta \mapsto y = \cos\theta \end{cases}$$

cujo gráfico é denifido na Figura 2. Determine o domínio, imagem e periodicidade (p).

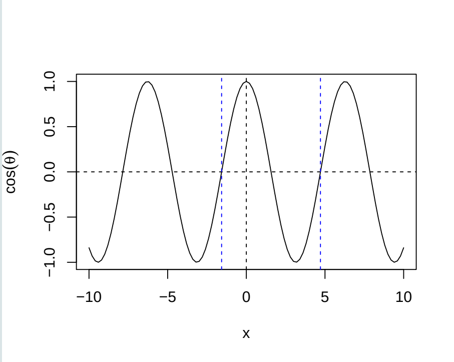


Figura: Função cosseno

Função trigonométrica

1. Domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $Im(f) = [-1, 1]$;
2. $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, ou seja, o período da função é $p = 2\pi$.
3. A função cosseno da forma como está definida não admite inversa $\Longrightarrow$

Função trigonométrica

1. Domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $Im(f) = [-1, 1]$;
2. $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, ou seja, o período da função é $p = 2\pi$.
3. A função cosseno da forma como está definida não admite inversa $\Longrightarrow$ não é bijetora.
4. Considere $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a função $\cos\theta$ possui inversa? Justifique.

1. Domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $Im(f) = [-1, 1]$;

2. $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, ou seja, o período da função é $p = 2\pi$.

3. A função cosseno da forma como está definida não admite inversa $\Longrightarrow$ não é bijetora.

4. Considere $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a função $\cos\theta$ possui inversa? Justifique.

$$f : \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \\ \theta \mapsto y = \cos\theta \end{cases}$$

A função passa a ser bijetora e, portanto, existe f^{-1}

$$f^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y \mapsto \operatorname{arcsen} y \end{cases}$$

Exercícios

1. Expresse a função $f(x) = (2x + x^2)^2$ na forma $f \circ g$.

2. Esboce o gráfico da função $f(x) = |x + 2|$

3. Uma companhia elétrica cobra uma taxa base de 10 reais por mês mais 6 centavos por kilowatt-hora (kWh) para os primeiros 1200 kWh. Ultrapassado esse limite, são cobrados 7 centavos por kWh adicional mais uma taxa de 100 reais. Expresse o custo mensal C como uma função da quantidade x, em kWh, de energia consumida. Em seguida, faça o gráfico da funçao C para $0 \leq x \leq 2.000$.

4. Encontre o domínio e a imagem das funções $f(x) = |x| - x$ e $f(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$.

Funções polinomiais: função do 1° grau

Definição

função do 1° **grau**: *A função* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax + b \end{cases}$ *com* $a, b \in \mathbb{R}$ *é uma função do primeiro grau.*

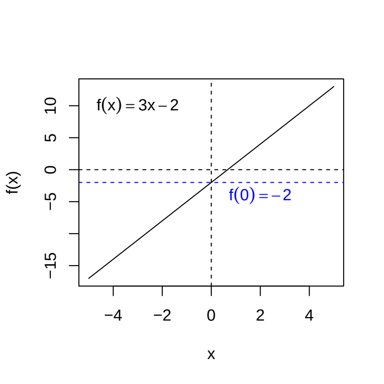
1. Raiz da função: $x = -\dfrac{b}{a}$
2. O gráfico de f é uma reta, cujo coeficiente angular é dado por $a = \operatorname{tg}\theta$.
3. Taxa de crescimento ou decrescimento; constante;
4. Essa reta intercepta o eixo Oy no ponto $(0, b)$;
5. se $a = 0$ tem-se a função constante $f(x) = b$, cuja reta é constante ao eixo Ox;

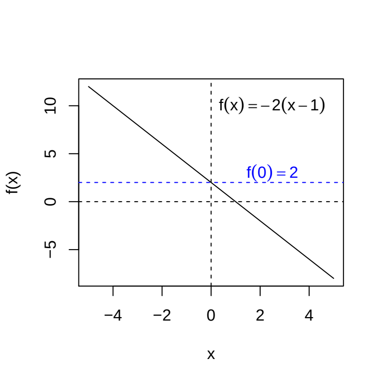
1. Se $b = 0$ tem-se a função linear $f(x) = ax$, cuja reta passa pela origem;
2. Se $a, b \neq 0$ a função é denominada afim;
3. Se $a > 0$ a função é absolutamente crescente para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
4. Se $a < 0$ a função é absolutamente decrescente para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

Exemplo:

Esboce o gráfico das funções $f(x) = 3x - 2$ e $f(x) = -2(x - 1)$. Essas funções possuem inversa? Justifique.

Gráfico: função do 1° grau





Funções polinomiais: função do 2° grau

Definição

função do 2° **grau**. *A função* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$ *é uma função do segundo grau ou quadrática.*

1. Raízes da função (Báskara): $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$

Funções polinomiais: função do 2° grau

Definição

função do 2° **grau**. *A função* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$ *é uma função do segundo grau ou quadrática.*

1. Raízes da função (Báskara): $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$
2. Se $\Delta < 0$, então a função não terá raízes reias;
3. Se $\Delta = 0$, a função terá duas raízes reais idênticas;

Funções polinomiais: função do 2° grau

Definição

função do 2° **grau**. *A função* $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$ *é uma função do segundo grau ou quadrática.*

1. Raízes da função (Báskara): $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$
2. Se $\Delta < 0$, então a função não terá raízes reias;
3. Se $\Delta = 0$, a função terá duas raízes reais idênticas;
4. O gráfico dessa função é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy

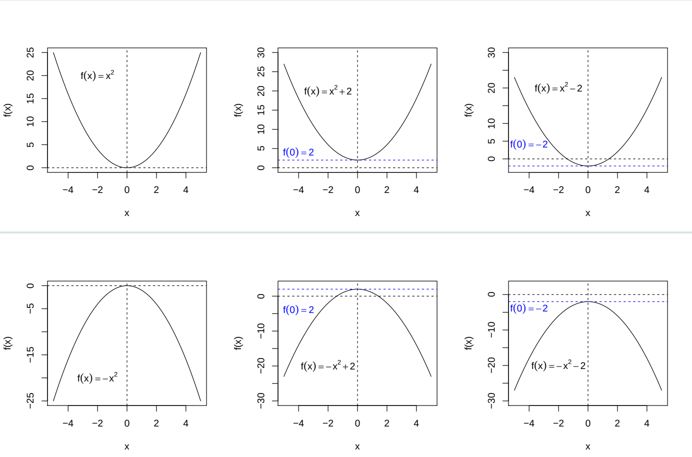
Funções polinomiais: função do 2° grau

Definição

função do 2° **grau**. *A função* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$ *é uma função do segundo grau ou quadrática.*

1. Raízes da função (Báskara): $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$
2. Se $\Delta < 0$, então a função não terá raízes reias;
3. Se $\Delta = 0$, a função terá duas raízes reais idênticas;
4. O gráfico dessa função é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy
5. Concavidade: $a > 0$ concava para cima ou $a < 0$ concava para baixo;

1. As coordenadas do vértice da parábola são $\left(x_v = -\dfrac{b}{2a}, y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$;
2. Se $a > 0$, então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq y_v\}$ ou se $a < 0$, então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq y_v\}$;



Funções polinomiais: exemplos

Encontre o domínio, conjunto imagem e vértice da parábola, estude a monotonicidade e paridade e esboçe o gráfico das seguintes funções:

1. $f(x) = -3x + 18$ para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = x^2 - 2x - 15$ para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
3. $f(x) = -x^2 + x + 5$ para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

Classificação de funções

1. Polinomial: Linear, Quadrática, Cúbica, ...
2. Potência: Raiz quadrada, recíproca ($y = 1/x$)
3. Racional: $\frac{x^3+2}{x^2+x}$
4. Funções transcedentais: logarítmica, exponencial, trigonométricas, inversa trigonométricas
5. Algébricas: combinação das demais funções;