Cálculo diferencial e integral

Equações, funções e inequações

Thiago de Paula Oliveira

6 de Agosto de 2018

1. Considere $f(x) = 3x^2 + 2x$ e $g\,(x) = \dfrac{x}{x^2 + x}$, determine as funções e as simplifique:
   (a) $h(x) = f(x) + 2g(x)$ (b) $h(x) = f(x) \times g(x)$ (c) $h(x) = f(g(x))$

   (d) $h(x) = f(x) \times g^2(x)$ (e) $h(x) = \dfrac{1}{f(x)+1} + g(x)$ (f) $h(x) = g(f(x))$

2. (Stewart, 2010) Se $f(x) = x^3$, calcule o quociente da diferença $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ e simplifique sua resposta.

3. O modelo matemático de Henderson e Pabis é um dos modelos utilizados para predizer o fenômeno de secagem de alimentos, sendo dado por $RU = a.e^{-kt}$ em que RU é a razão de umidade do produto, adimensional; t é tempo de secagem; k é o coeficiente de secagem e a é uma constante qualquer. Faça o gráfico da função RU, sabendo que $a = 5$ e $k = 7$.

4. Determine o domínio, imagem e contra-domínio das seguintes funções:
   (a) $f(x) = 2 - 1,5x$ (b) $h(x) = \sqrt{(4 - x^2)}$

   (c) $f(u) = u^2 + 2x$, com $x \in \mathbb{R}$ (d) $f(z) = |z + 2|$

   (e) $g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt{|x|}}$ (f) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{se } x > 2 \\ -x^2 + 2x, & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$

   (g) $g(x) = \dfrac{\log(x)}{2 - x^2}$ (h) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{se } x < -1 \\ -3x^2 + 2x + 4, & \text{se } -1 \leq x < 6 \\ 9, & \text{se } x \leq 6 \end{cases}$

   (i) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 2}$ (j) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$

   (l) $f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$ (k) $h(x) = \dfrac{e^{x-1}}{|x - 1|}$

5. Estude a paridade das seguintes funções:
   (a) $f(x) = x^4 + x^2$ (b) $f(x) = -x^3 - x$ (c) $f(x) = |x^3|$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2}$ (e) $f(x) = \cos x$ (f) $f(x) = \text{tg}(x)$, para $\forall\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$

6. A relação entre as temperaturas medidas em gaus Celsius (C) e Fahrenheit (F) é dada pela função

$$C = \frac{5\,(F - 32)}{9}.$$

   (a) Apresente o gráfico da função

   (b) Calcule o coeficiente angular e o interprete. Faça o mesmo para o intercepto.

7. (Stewart, 2010) Faça o esboço do gráfico das seguintes funções:

$(a)\ y = x^3$	$(b)\ y = (x+1)^3$	$(c)\ y = (x-2)^3 + 3$
$(d)\ y = 4 - x^2$	$(e)\ y = \sqrt{x}$	$(f)\ y = 2\sqrt{x}$
$(g)\ y = -2^x$	$(h)\ y = 1 + x^{-1}$	$(i)\ y = 1 + \operatorname{sen} 2x$

8. A tonalidade (h) pode ser definida como uma medida angular como ilustra a Figura 1, logo $h \in [0, 360]$.

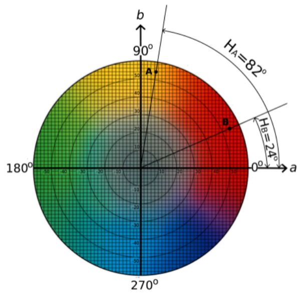


Figura 1: Região das cores pertencentes ao sistema de cores $CIELab$ (ou $CIELCh$), com representação de duas cores: A, amarela, em $h = 82°$) e B, vermelha, em que $h = 24°$)
Fonte: Modificado a partir da ColorMetrix

Na área de pós-colheita, a tonalidade da cor é uma variável muito utilizada para descrever curvas de maturação de diversos frutos. Assim, considere que o a função definda por

$$f(t) = 111,09 - 1,65t - 0,0405t^2$$

é utilizada para descrever a tonalidade do mamão papaya "Sunrise Solo" ao longo do tempo (t).

(a) Em quanto tempo o fruto mudará sua tonalidade de verde (110) para amarela (90)?

(b) Após 5,3 dias qual deve ser a tonalidade do fruto?

(c) Apresente o gráfico da função;

9. Expresse as funções na forma $f \circ g$

(a) $f(x) = x^5$ e $g(x) = x + 5$	(b) $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = x + 4$
(c) $f(x) = \lvert e^x \rvert$ e $g(x) = x^3$	(d) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$
(e) $f(x) = \cos\, x$ e $g(x) = 2x$	(f) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \operatorname{tg}(x)$

10. Utilize as respostas obtidas para o exercício 8 e calcule $g\left(f\left(2\right)\right)$

11. Obtenha $f \circ g \circ h$

(a) $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $f(x) = x^3 + 3, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \dfrac{x+1}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x+2}, \quad g(x) = x, \quad h(x) = \operatorname{sen} x$

12. Determine o domínio das seguintes funções

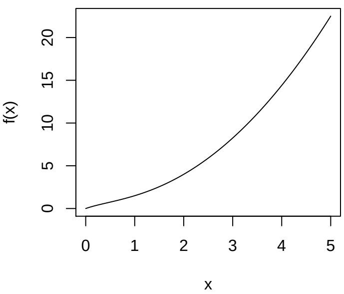
(a) $f(x) = e^x$ (b) $f(v) = \dfrac{e^v}{1-e^v}$ (c) $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^{2x}}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2+2x}}$ (e) $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ (f) $f(x) = \cos\left(e^{-x}\right)$

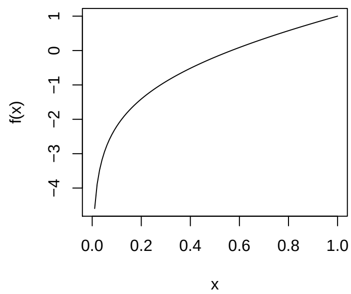
13. Determine o domínio e construa o gráfico das seguintes funções

(a) $f(x) = \ln x$ (b) $f(x) = \ln \dfrac{x}{e}$ (c) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{x}$

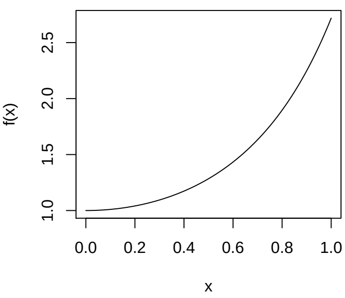
14. Relacione as funções a seguir $f(x) = \log(x) + x$, $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{|x|+1}$, $f(x) = e^{x^2}$, e $f(x) = \sqrt{x}$ com os gráficos da Figura 2.



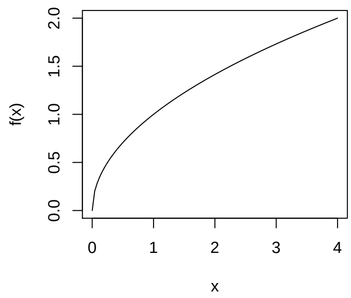
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2: Figuras utilizadas para o exercício 14

15. (Stewart, 2010) Se $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$, determine cada uma das seguintes funções:

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

16. Curvas de crescimento são muito utilizadas nas áreas de biologia e ciências agrárias para quantificar, por exemplo, a massa de animais e vegetais e o crescimento populacional de microorganismos. Assim, supondo que o crescimeto populacional de uma determinada bactéria em função do tempo (t) pode ser descrita pela função de Gompertz dada por

$$f(t) = a \exp\left[-\exp\left(b - ct\right)\right].$$

Assumindo que $a = 3000$, $b = 2$ e $c = 1$.

(a) Construa o gráfico da função

(b) Em quando tempo o tamanho da população de bactérias irá passar de 100 para 1000?

17. A partir da Figura 3 determine a função definida por partes utilizando conhecimentos de geometria e trigonometria. Além disso, determine o domínio e imagem dessa função.

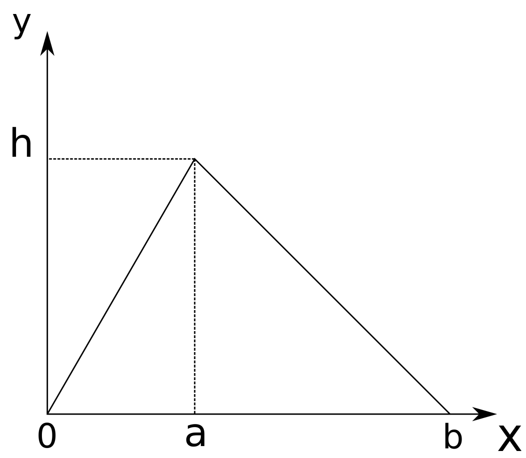


Figura 3: Figura para o exercício 17

18. Determine as funções inversas $(f^{-1}(x))$

(a) $f(x) = e^x$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ (c) $f(x) = x^2 + 2x$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{a+x}{b-x}$ (f) $f(x) = \cos(x)$

19. Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule e simplique o quociente $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

20. Prove que $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \sec\alpha$.

21. Prove que $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{sen} 2\alpha$.

22. Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.

23. Determine as coordenadas do vértice da equação $x^2 - 3(x+y) = 1$

24. Determine o domínio e imagem da equação $y^2 = -x^2 + 4$

25. Determine a monotonicidade das seguintes funções

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x + 3$

(d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (e) $f(x) = \log(2x)$ (f) $f(x) = e^{-x^2}$

26. Um veículo teve seu pneu calibrado para 35 libras e, em seguida, o motorista se deslocou do ponto A ao ponto B em 9h a uma velocidade média de 100 km por hora. Suponha que a temperatura do pneu aumenta quadraticamente em função da distância percorrida até aproximadamente 100 graus Celcius. Então a temperatura se mantêm constante até a distância percorrida em 8h (Figura 4). Na última hora, suponha que a temperatura decai quadraticamente em função da distância. Determine uma função que descreva o aumento da temperatura em função da distância (em km).

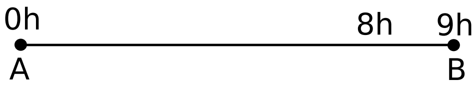


Figura 4: Exercício 24

27. Simplifique as funções a seguir

(a) $f(x) = 4\,\mathrm{sen}^2\,x + 4\cos^2 x$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+8x+16}{8x+32}$ (c)$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$

(d) $f(x) = \log(x^2+3x) - \log(x)$ (e) $f(x) = \dfrac{e^x e^\pi}{e^{2x}}$ (f) $f(x) = e^{-x^2} e^{x^2+2x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(2x)}{[\cos 2]^{-1}} - \dfrac{\mathrm{sen}\,2}{[\cos(2x)]^{-1}}$ (h) $f(x) = \mathrm{sen}^2\,x\,\mathrm{tg}^{-2}\,x$ (i) $f(x) = x^2 + 4x - 4$

28. Encontre as raízes das funções polinomiais a seguir

(a) $f(x) = x^3 + x^2$ (b) $f(x) = x^2 - 10x - 9$ (c) $f(x) = x^2 + 9$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ (e) $f(x) = cx^2 + 4cx + c^2$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$

29. (Stewart, 2010) Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e

(a) tem inclinação -3

(b) é paralela ao eixo x

(c) é paralela ao eixo y

(d) é paralela a reta $2x - 4y = 3$

30. (Stewart, 2010) Determine uma equação para o círculo que tem centro $(-1, 4)$ e passa pelo ponto $(3, -2)$.

31. (Stewart, 2010) Determine o centro e o raio do círculo com equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

32. (Stewart, 2010) Sejam A$(-7,4)$ e B$(5,-2)$ pontos no plano:
   (a) Determine a inclinação da reta que contém A e B.
   (b) Determine uma equação da reta que passa por A e B. Quais são as interseções com os eixos?
   (c) Determine o ponto médio do segmento AB.
   (d) Determine uma equação para o círculo considerando que AB é um diâmetro.

33. (Stewart, 2010) Esboce as regiões do plano xy definidas pelas equações ou inequações.

$(a)\ -1 \leq y \leq 3$ $\quad (b)\ |x| < 4$ e $|y| < 2$ $\quad (c)\ y < 1 - \dfrac{1}{2}x$

$(d)\ y \geq x^2 - 1$ $\quad (e)\ x^2 + y^2 < 4$ $\quad (f)\ 9x^2 + 16y^2 = 144$

34. (Flemming & Gonçalves, 2006) Determinar todos os intervalos de números que satisfaçam as desigualdades abaixo.

$(a)\ 3 - x < 5 + 3x$ $\quad (b)\ 2x - 5 < \dfrac{1}{3} + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1-x}{3}$ $\quad (c)\ 2 > -3 - 3x \geq -7$ $\quad (d)\ x^2 \leq 9$

$(e)\ x^2 - 3x + 2 > 0$ $\quad (f)\ 1 - x - 2x^2 \geq 0$ $\quad (g)\ \left(x^2 - 1\right)(x + 4) \leq 0$ $\quad (h)\ x^4 \leq x^2$

$(i)\ \dfrac{3}{x-5} \leq 2$ $\quad (j)\ 12x^3 - 20x^2 \geq -11x + 2$ $\quad (l)\ x^3 - x^2 - x - 2 > 0$ $\quad (m)\ \dfrac{x}{x-3} < 4$

35. (Flemming & Gonçalves, 2006) Resolver as equações considerando o conjunto $\mathbb{R}$

$(a)\ |5x - 3| = 12$ $\quad (b)\ |-4 + 12x| = 7$ $\quad (c)\ |2x - 3| = |7x - 5|$

$(d)\ \left|\dfrac{x+2}{x-2} = 5\right|$ $\quad (e)\ \left|\dfrac{3x+8}{2x-3} = 4\right|$ $\quad (f)\ |3x + 2| = 5 - x$

$(g)\ |9x| - 11 = x$ $\quad (h)\ 2x - 7 = |x| + 1$

36. (Flemming & Gonçalves, 2006) Resolver as inequações considerando o conjunto $\mathbb{R}$

$(a)\ |x + 12| < 7$ $\quad (b)\ |3x - 4| \leq 2$ $\quad (c)\ |5 - 6x| \geq 9$

$(d)\ |2x - 5| > 3$ $\quad (e)\ |6 + 2x| < |4 - x|$ $\quad (f)\ |x + 4| \leq |2x - 6|$

$(g)\ |3x| > |5 - 2x|$ $\quad (h)\ \left|\dfrac{7 - 2x}{5 + 3x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ $\quad (i)\ |x - 1| + |x + 2| \geq 4$

37. Seja $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = |x - 1|$ e $r(x) = x^3$. A partir dessas funções responda as seguintes perguntas:
   (a) Qual é a paridade da função $h(x) = \dfrac{f(x)r(x)}{10}$

(b) Quais são os intervalos de crescimento e de decrescimento da função dada por $h(x) = g \circ f\,(x)$

(c) Faça um esboço do gráfico da função $h(x) = g \circ f\,(x)$

Referências

Stwart, J. **Cálculo: volume 1**. Cengage Learning: São Paulo, Ed. 7, 2014.

Respostas de alguns exercícios

1.

(a) $h(x) = \dfrac{3x^3+5x^2+2x+2}{x+1}$, para $x \neq -1$

(b) $h(x) = \dfrac{x(3x+2)}{x+1}$, para $x \neq -1$

(c) $h(x) = \dfrac{2x+5}{(x+1)^2}$, para $x \neq -1$

(d) $h(x) = \dfrac{x(3x+2)}{(x+1)^2}$, para $x \neq -1$

(e) $h(x) = \dfrac{3x^2+3x+2}{(x+1)(3x^2+2x+1)}$, para $x \neq -1$

(f) $h(x) = \dfrac{1}{x(3x+2)+1}$

2. $12 + 6h + h^2$

3. Verificar pelo Wolfram|Alpha. Site: https://www.wolframalpha.com.

4.

(a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{CD}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(b) $\mathrm{D}(h) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$, $\mathrm{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 2\}$, $\mathrm{CD}(h) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(c) $\mathrm{D}(f) = \{u \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq x\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(d) $\mathrm{D}(f) = \{z \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(e) $\mathrm{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \geq \dfrac{8\sqrt{2}}{3^{3/4}}\right\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(f) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1 \cup y > 6\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(g) $\mathrm{D}(g) = \left\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \sqrt{2} \cup x > \sqrt{2}\right\}$, $\mathrm{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{CD}(g) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(h) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \leq \frac{13}{3} \cup y = 9\right\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

5.

(a) Função par (b) Função ímpar (c) Função par

(d) Função par (e) Função par (f) Função ímpar

6. (a) Verificar pelo Wolfram|Alpha.

(b) $m = \frac{5}{9}$ e intercepto $-\frac{160}{9}$

7. Verificar pelo Wolfram|Alpha.

8. (a) $t \approx 9.57$

(b) $f(5.3) \approx 101.21$

(c) Verificar pelo Wolfram|Alpha.

9.

(a) $f \circ g(x) = (x+5)^5$ (b) $f \circ g(x) = \log(x+4)$ (c) $f \circ g(x) = |e^{x^3}|$

(d) $f \circ g(x) = \sqrt{x^2}$ (e) $f \circ g(x) = \cos 2x$ (f) $f \circ g(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x)}$

10. (a) 37 (b) $\log 2 + 4$ (c) e^6 (d) 2 (e) $2\cos 2$ (f) $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}$

11. (a) $\dfrac{x^2+2}{x^2}$ (b) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + 3$ (c) $\dfrac{2-\cos(2x)}{2\,\mathrm{sen}\,x + 1}$

12.

(a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$ (b) $\mathrm{D}(f) = \{v \in \mathbb{R} | v \neq 0\}$ (c) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

(d) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$ (e) $\mathrm{D}(f) = \{t \in \mathbb{R} | -1 \leq t \leq 1\}$ (f) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

13.

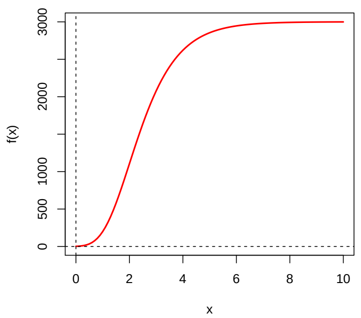
(a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ (b) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

(c) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \cup x > 0\}$

14. (a) $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{|x|+1}$; (b) $f(x) = \log(x) + x$; ; (c) $f(x) = e^{x^2}$; (d) $f(x) = \sqrt{x}$

15. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$ (b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$ (c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

16. (a) Supondo $t \in [0, 10]$, temos que o gráfico de $f(t)$ é dado por:



(b) 1.13008 unidades de tempo.

17. $\mathrm{Dm}(f) = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq b \;\forall\; 0 < a < b\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq h\}$. A função é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{a}x, & \text{para} \quad 0 \leq x < a \\ \dfrac{h}{a-b}(x-b), & \text{para} \quad a \leq x \leq b \end{cases}$$

18.

(a) $f^{-1}(x) = \ln x$ (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(c) Para determinar a inversa dessa função deve-se restringir o domínio da mesma em duas partes, que são $x \in [-1, \infty)$ e $(-\infty, -1)$. Assim, temos que $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$, para $\forall\ x \geq -1$ ou $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 1$, para $\forall\ x \geq -1$.

(d) $f^{-1}(x) = x^2, \forall\ x \in \mathbb{R}_+$ (e) $f^{-1}(x) = \dfrac{bx-a}{x+1}$

(f) Para determinar a inversa dessa função deve-se restringir o domínio da mesma em $x \in [0, \pi]$. Assim, temos que $f^{-1}(x) = \arccos{(x)}$.

23. A coordenada do vértice é $P = \left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{12}\right)$

27. Verificar pelo Wolfram|Alpha.

28. Verificar pelo Wolfram|Alpha

29. (a) $y = -3x + 1$ (b) $y = -5$ (c) $x = 2$ (d) $y = \frac{1}{2}x - 6$

30. $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 52$

31. Centro em $(3, -5)$ e raio 5.

32. (a) $-\frac{4}{3}$ (b) $4x + 3y + 16 = 0$, sendo que existe uma intersecção com o eixo x em -4 e com o eixo y em $-\frac{16}{3}$ (c) $(-1, -4)$ (d) 20 (e) $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 100$

33. Verificar pelo Wolfram|Alpha

34.

(a) $(-1/2, \infty)$	(b) $(-\infty, 68/19)$	(c) $(-5/3, 4/3)$
(d) $[-3, 3]$	(e) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$	(f) $[-1, 1/2]$
(g) $(-\infty, 4] \cup [-1, 1]$	(h) $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup [1, \infty)$	(i) $(-\infty, 5) \cup [13/2, \infty)$
(j) $[2/3, \infty) \cup \{1/2\}$	(l) $(2, \infty)$	(k) $(-\infty, 3) \cup (4, \infty)$

35.

(a) $\{-9/5, 3\}$	(b) $\{-1/4, 11/12\}$	(c) $\{2/5, 8/9\}$	(d) $\{4/3, 3\}$
(e) $\{4/11, 4\}$	(f) $\{-7/2, 3/4\}$	(g) $\{-11/10, 11/8\}$	(h) $\{8\}$

36.

(a) $(-19, -5)$	(b) $[2/3, 2]$	(c) $(-\infty, -2/3] \cup [7/3, \infty)$
(d) $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$	(e) $(-10, -2/3)$	(f) $(-\infty, -2/3] \cup [10, \infty)$
(g) $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$	(h) $[9/7, 19]$	(i) $(-\infty, -5/2] \cup [3/2, \infty)$