Cálculo diferencial e integral

Respostas dos exercícios

Thiago de Paula Oliveira

March 28, 2018

1 Pré-Cálculo: Funções e modelos

1.

(a) $h(x) = \dfrac{3x^3 + 5x^2 + 2x + 2}{x+1}$, para $x \neq -1$

(b) $h(x) = \dfrac{x\,(3x+2)}{x+1}$, para $x \neq -1$

(c) $h(x) = \dfrac{2x+5}{(x+1)^2}$, para $x \neq -1$

(d) $h(x) = \dfrac{x\,(3x+2)}{(x+1)^2}$, para $x \neq -1$

(e) $h(x) = \dfrac{3x^2 + 3x + 2}{(x+1)\,(3x^2+2x+1)}$, para $x \neq -1$

(f) $h(x) = \dfrac{1}{x\,(3x+2)+1}$

2. Verificar pelo Wolfram|Alpha. Site: https://www.wolframalpha.com.

3.

(a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{CD}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(b) $\mathrm{D}(h) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$, $\mathrm{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 2\}$, $\mathrm{CD}(h) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(c) $\mathrm{D}(f) = \{u \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq x\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(d) $\mathrm{D}(f) = \{z \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

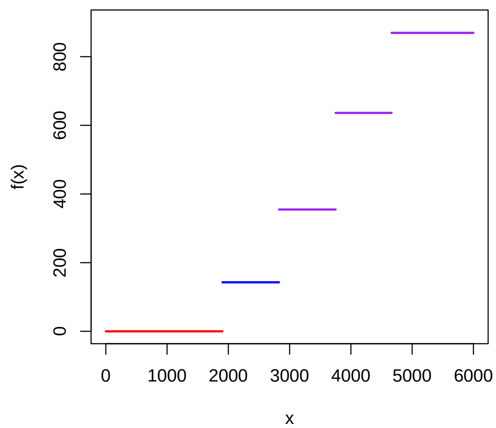
(e) $\mathrm{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \geq \dfrac{8\sqrt{2}}{3^{3/4}}\right\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(f) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1 \cup y > 6\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(g) $\mathrm{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \sqrt{2} \cup x > \sqrt{2}\}$, $\mathrm{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{CD}(g) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(h) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq \frac{13}{3} \cup y = 9\}$, $\mathrm{CD}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

4. (a)



(b) A função é dada por $f(x) = 263.87x$ e em 2 anos, considerando a mesma alíquota, a pessoa pagará R$ 6.332,88 retido na fonte. O gráfico deve ser feito no Wolfram|Alpha.

(c) Incremento salarial no período de 1 ano será dado pela função $f(x) = 100x$, logo $f(12) = 100 \times 12 = 1.200$. Já a contribuição ao estado será dada pela função:

$$h(x) = 27,5x.$$

Dessa forma, $h(12) = 27.5 \times 12 = 330,00$. Portanto, ela receberá um incremento de 1.200 reais e pagará um incremento de 330,00 reais de impostos retidos na fonte no período de um ano. Logo, a função que descreve o aumento da renda em função do tempo é $g(x) = f(x) - h(x) = 72.5x$, assim, no período de um ano sua renda aumentará $g(12) = 870,00$ reais.

5.

(a) Função par	(b) Função ímpar	(c) Função par
(d) Função par	(e) Função par	(f) Função ímpar

6. (a) Verificar pelo Wolfram|Alpha.
   (b) $m = \frac{5}{9}$ e intercepto $-\frac{160}{9}$

7. (a) $t \approx 9.57$
   (b) $f(5.3) \approx 101.21$
   (c) Verificar pelo Wolfram|Alpha.

8.
   (a) $f \circ g(x) = (x+5)^5$ (b) $f \circ g(x) = \log(x+4)$ (c) $f \circ g(x) = |e^{x^3}|$

   (d) $f \circ g(x) = \sqrt{x^2}$ (e) $f \circ g(x) = \cos 2x$ (f) $f \circ g(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$

9. (a) 37 (b) $\log 2 + 4$ (c) e^6 (d) 2 (e) $2\cos 2$ (f) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}$

10. (a) $\dfrac{x^2+2}{x^2}$ (b) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + 3$ (c) $\dfrac{2-\cos(2x)}{2\operatorname{sen} x + 1}$

11.
   (a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$ (b) $\mathrm{D}(f) = \{v \in \mathbb{R} | v \neq 0\}$ (c) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

   (d) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$ (e) $\mathrm{D}(f) = \{t \in \mathbb{R} | -1 \leq t \leq 1\}$ (f) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

12.
   (a) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ (b) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

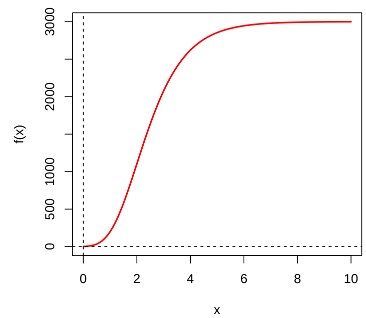
   (c) $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \cup x > 0\}$

13. (a) $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{|x|+1}$; (b) $f(x) = \log(x) + x$; ; (c) $f(x) = e^{x^2}$; (d) $f(x) = \sqrt{x}$

14. (a) Supondo $t \in [0, 10]$, temos que o gráfico de $f(t)$ é dado por:
   (b) 1.13008 unidades de tempo.

15. $\mathrm{Dm}(f) = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq b \ \forall\ 0 < a < b\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq h\}$. A função é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{a}x, & \text{para} \quad 0 \leq x < a \\ \dfrac{h}{a-b}(x-b), & \text{para} \quad a \leq x \leq b \end{cases}$$



16.

(a) $f^{-1}(x) = \ln x$ (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(c) Para determinar a inversa dessa função deve-se restringir o domínio da mesma em duas partes, que são $x \in [-1, \infty)$ e $(-\infty, -1)$. Assim, temos que $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$, para $\forall\ x \geq -1$ ou $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 1$, para $\forall\ x \geq -1$.

(d) $f^{-1}(x) = x^2, \forall\ x \in \mathbb{R}_+$ (e) $f^{-1}(x) = \dfrac{bx - a}{x+1}$

(f) Para determinar a inversa dessa função deve-se restringir o domínio da mesma em $x \in [0, \pi]$. Assim, temos que $f^{-1}(x) = \arccos(x)$.

17. Considere a função $f(x) = x^3$. Calcule e simplique o quociente $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

18. Prove que $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \sec\alpha$.

19. Prove que $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{sen} 2\alpha$.

20. Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.

21. Determine as coordenadas do vértice da equação $x^2 - 3(x+y) = 1$

22. Determine o domínio e imagem da equação $y^2 = -x^2 + 4$

23. Determine a monotonicidade das seguintes funções

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x + 3$

(d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (e) $f(x) = \log(2x)$ (f) $f(x) = e^{-x^2}$

24. Um veículo teve seu pneu calibrado para 35 libras e, em seguida, o motorista se deslocou do ponto A ao ponto B em 9h a uma velocidade média de 100 km por hora. Suponha que a temperatura do pneu aumenta quadraticamente em função da distância percorrida até aproximadamente 100 graus Celcius. Então a temperatura se mantêm constante até a distância percorrida em 8h (Figura **??**). Na última hora, suponha que a temperatura decai quadraticamente em função da distância. Determine uma função que descreva o aumento da temperatura em função da distância (em km).

25. Simplifique as funções a seguir

(a) $f(x) = 4\,\mathrm{sen}^2\, x + 4\cos^2 x$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x + 16}{8x + 32}$ (c)$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1 \forall\ x \in [-$

(d) $f(x) = \log(x^2 + 3x) - \log(x)$ (e) $f(x) = \dfrac{e^x e^\pi}{e^{2x}}$ (f) $f(x) = e^{-x^2} e^{x^2+2x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(2x)}{[\cos 2]^{-1}} - \dfrac{\mathrm{sen}\, 2}{[\cos{(2x)}]^{-1}}$ (h) $f(x) = \mathrm{sen}^2\, x\, \mathrm{tg}^{-2}\, x$ (i) $f(x) = x^2 + 4x - 4$

26. Encontre as raízes das funções polinomiais a seguir

(a) $f(x) = x^3 + x^2$ (b) $f(x) = x^2 - 10x - 9$ (c) $f(x) = x^2 + 9$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ (e) $f(x) = cx^2 + 4cx + c^2$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x}$