Matemática

Análise Combinatória e Probabilidade

André Gustavo Campos Pereira
Viviane Simioli Medeiros Campos

UFRN
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

Análise Combinatória e Probabilidade

André Gustavo Campos Pereira
Viviane Simioli Medeiros Campos

Matemática

Análise Combinatória e Probabilidade

2ª Edição

EDUFRN
Editora da UFRN

Natal – RN, 2012

Governo Federal

Presidenta da República
Dilma Vana Rousseff

Vice-Presidente da República
Michel Miguel Elias Temer Lulia

Ministro da Educação
Aloizio Mercadante Oliva

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Reitora
Ângela Maria Paiva Cruz

Vice-Reitora
Maria de Fátima Freire Melo Ximenes

Secretaria de Educação a Distância (SEDIS)

Secretária de Educação a Distância
Maria Carmem Freire Diógenes Rêgo

Secretária Adjunta de Educação a Distância
Ione Rodrigues Diniz Morais

FICHA TÉCNICA

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS
Marcos Aurélio Felipe

GESTÃO DE PRODUÇÃO DE MATERIAIS
Luciana Melo de Lacerda
Rosilene Alves de Paiva

PROJETO GRÁFICO
Ivana Lima

REVISÃO DE MATERIAIS
Revisão de Estrutura e Linguagem
Eugenio Tavares Borges
Janio Gustavo Barbosa
Jeremias Alves de Araújo
Kaline Sampaio de Araújo
Luciane Almeida Mascarenhas de Andrade
Thalyta Mabel Nobre Barbosa

Revisão de Língua Portuguesa
Camila Maria Gomes
Cristinara Ferreira dos Santos
Emanuelle Pereira de Lima Diniz
Janaina Tomaz Capistrano
Priscila Xavier de Macedo
Rhena Raize Peixoto de Lima

Revisão das Normas da ABNT
Verônica Pinheiro da Silva

EDITORAÇÃO DE MATERIAIS
Criação e edição de imagens
Adauto Harley
Anderson Gomes do Nascimento
Carolina Costa de Oliveira
Dickson de Oliveira Tavares
Leonardo dos Santos Feitoza
Roberto Luiz Batista de Lima
Rommel Figueiredo

Diagramação
Ana Paula Resende
Carolina Aires Mayer
Davi Jose di Giacomo Koshiyama
Elizabeth da Silva Ferreira
Ivana Lima
José Antonio Bezerra Junior
Rafael Marques Garcia

Módulo matemático
Thaisa Maria Simplício Lemos
Pedro Gustavo Dias Diógenes

IMAGENS UTILIZADAS
Acervo da UFRN
www.depositphotos.com
www.morguefile.com
www.sxc.hu
Encyclopædia Britannica, Inc.

Catalogação da publicação na fonte. Bibliotecária Verônica Pinheiro da Silva.

Pereira, André Gustavo Campos.

Análise combinatória e probabilidade / André Gustavo Campos Pereira e Viviane Simioli Medeiros Campos. – 2. ed. – Natal: EDUFRN, 2012.

270 p.: il.

ISBN 978-85-425-0037-0

Disciplina ofertada ao curso de Matemática a Distância da UFRN.

1. Análise combinatória. 2. Probabilidade. 3. Permutações. I. Campos, Viviane Simioli Medeiros. II. Título.

CDU 519.1
P436a

Sumário

Apresentação Institucional

A Secretaria de Educação a Distância – SEDIS da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, desde 2005, vem atuando como fomentadora, no âmbito local, das Políticas Nacionais de Educação a Distância em parceira com a Secretaria de Educação a Distância – SEED, o Ministério da Educação – MEC e a Universidade Aberta do Brasil – UAB/CAPES. Duas linhas de atuação têm caracterizado o esforço em EaD desta instituição: a primeira está voltada para a Formação Continuada de Professores do Ensino Básico, sendo implementados cursos de licenciatura e pós-graduação *lato* e *stricto sensu*; a segunda volta-se para a Formação de Gestores Públicos, através da oferta de bacharelados e especializações em Administração Pública e Administração Pública Municipal.

Para dar suporte à oferta dos cursos de EaD, a Sedis tem disponibilizado um conjunto de meios didáticos e pedagógicos, dentre os quais se destacam os materiais impressos que são elaborados por disciplinas, utilizando linguagem e projeto gráfico para atender às necessidades de um aluno que aprende a distância. O conteúdo é elaborado por profissionais qualificados e que têm experiência relevante na área, com o apoio de uma equipe multidisciplinar. O material impresso é a referência primária para o aluno, sendo indicadas outras mídias, como videoaulas, livros, textos, filmes, videoconferências, materiais digitais e interativos e webconferências, que possibilitam ampliar os conteúdos e a interação entre os sujeitos do processo de aprendizagem.

Assim, a UFRN através da SEDIS se integra o grupo de instituições que assumiram o desafio de contribuir com a formação desse "capital" humano e incorporou a EaD como modalidade capaz de superar as barreiras espaciais e políticas que tornaram cada vez mais seleto o acesso à graduação e à pós-graduação no Brasil. No Rio Grande do Norte, a UFRN está presente em polos presenciais de apoio localizados nas mais diferentes regiões, ofertando cursos de graduação, aperfeiçoamento, especialização e mestrado, interiorizando e tornando o Ensino Superior uma realidade que contribui para diminuir as diferenças regionais e o conhecimento uma possibilidade concreta para o desenvolvimento local.

Nesse sentido, este material que você recebe é resultado de um investimento intelectual e econômico assumido por diversas instituições que se comprometeram com a Educação e com a reversão da seletividade do espaço quanto ao acesso e ao consumo do saber E REFLETE O COMPROMISSO DA SEDIS/UFRN COM A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA como modalidade estratégica para a melhoria dos indicadores educacionais no RN e no Brasil.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
SEDIS/UFRN

Aprendendo a contar

Aula

1

Apresentação

Nesta aula, estudaremos os **Princípios da Adição e da Multiplicação**, que, embora bastante simples, constituem o alicerce para o entendimento da análise combinatória.

Mas o que é mesmo análise combinatória? Segundo Morgado (2001, p. 1),

> é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas e os dois tipos mais freqüentes de problemas resolvidos pela análise combinatória são:
>
> 1) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado;
>
> 2) contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

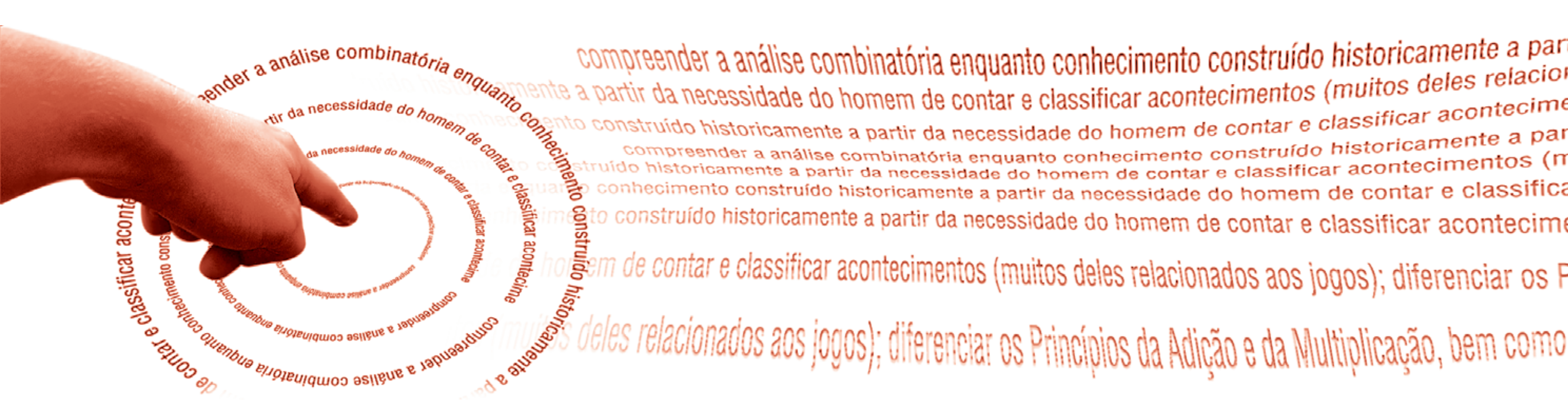
Na realidade, observando a história, veremos que essas idéias surgiram de maneira natural na mais remota antiguidade a partir do momento em que o homem começou a jogar.

Objetivos

Nesta aula, esperamos que você possa:

1. compreender a análise combinatória enquanto conhecimento construído historicamente a partir da necessidade do homem de contar e classificar acontecimentos (muitos deles relacionados aos jogos);

2. diferenciar os **Princípios da Adição** e **da Multiplicação**, bem como saber usá-los sem dificuldades.



Sobre as origens dos jogos

Segundo relatos de algumas escavações arqueológicas, foram encontrados, nas mais antigas civilizações, vestígios de jogos. O primeiro jogo de que se tem notícia é o dado. O antepassado do dado era chamado astragalus (plural: astragali), que era feito de osso ou de casco de animais, suas faces eram irregulares e em alguns havia letras, marcas ou desenhos entalhados.

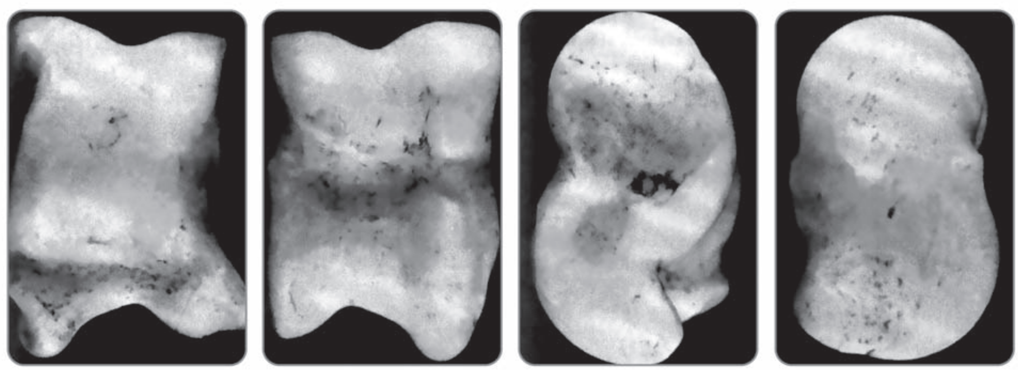


Figura 1 – Quatro visões do *astragalus*

Fonte: DAVID, 1962.

Levando-se em consideração que o *astragalus* não tinha as faces perfeitas, como os dados que conhecemos hoje, a estratégia utilizada nesse jogo deveria ser:

i) observar os *astragali* utilizados e assim saber quais as jogadas que poderiam ocorrer;

ii) verificar a jogada que saía com mais freqüência e apostar nesse resultado.

Note que, dentro das estratégias i) e ii), respectivamente, podemos observar os problemas 1) e 2) que, segundo Morgado (2001), são os objetos de estudo da análise combinatória.

O jogo de *astragalus* não foi utilizado apenas para a diversão, ganhou também um caráter sobrenatural e religioso. Pela observação de que ao se jogar um *astragalus* o resultado nem sempre era o mesmo, achou-se que isso poderia ser algum tipo de aviso ou mensagem das divindades. O par ou ímpar foi um dos primeiros jogos usados com propósitos divinatórios, a pergunta era feita ao adivinho cujas respostas eram sim ou não; em seguida, o par era associado ao sim e o ímpar ao não e, então, os dois jogavam.

Segundo David (1962), os jogos com *astragalus* foram tão difundidos no Império Romano que chegaram a ser proibidos, mas nem mesmo as autoridades da época, os Césares, respeitaram tal proibição. Em uma carta a Tibério, Augusto conta:

Eu jantei, caro Tibério, com as mesmas companhias. Nós jogamos feito homens velhos, tanto ontem quanto hoje, durante a refeição. Se na jogada de dois **Astragali** desse ou um cachorro ou um seis nós pagávamos um denário para cada acontecimento e quem tirasse um Vênus levava o pagamento (DAVID,1962, p.9).

Astragali

Cachorro, seis e Vênus eram nomes dados a algumas disposições particulares dos *astragali*. Como hoje temos em jogos de baralho a canastra real, a canastra suja etc.

A transição do *astragalus* para o dado levou milhares de anos. É possível que o primeiro dado tenha sido obtido pelo lixamento dos lados arredondados do *astragalus* até que eles ficassem aproximadamente planos. Os primeiros dados, da maneira que conhecemos hoje, foram descritos como sendo de barro. Datam de 3000 a.C. e tinham uma das seguintes marcações em suas faces:

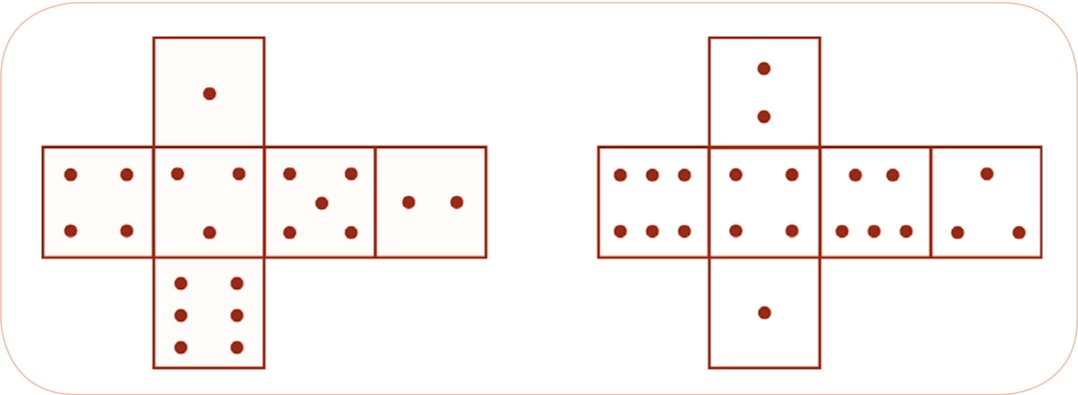


Figura 2 – Arranjos antigos dos pontos dos dados

Fonte: DAVID, 1962.

O jogo de cartas não tinha sido inventado até 1350 d.C., mas depois de sua criação começou a disputar espaço com o dado, tanto como instrumento de jogo quanto de previsão. Como instrumento de previsão, a pergunta feita pelo interessado tinha agora mais opções de respostas (52 possíveis respostas). Os primeiros baralhos eram caros e por esse motivo o jogo de cartas levou centenas de anos antes de finalmente desbancar o dado.

Ao entrarmos em um jogo, temos a preocupação natural de saber qual a possibilidade de ganharmos, o que nos motiva a criar uma nova maneira de contar. Das técnicas de contagem, as duas mais simples são: o **Princípio da Adição** e o **Princípio da Multiplicação**, discutidos a seguir.

Considere o seguinte jogo.

Joga-se dois dados simultaneamente e cada jogador diz um número. Ganha aquele que disser o número que representará a soma da face dos dois dados. Você seria capaz de dizer qual ou quais os números que têm maior chance de ocorrer?

Este jogo acima bem como modificações dele, utilizando-se de três ou mais dados, foram estudados profundamente nos séculos XIII e XIV. Nesta época, em 1526, Girolamo Cardano escreveu um livro onde ensinava como jogar vários jogos bem como técnicas em que você se precavia contra trapaceiros (TODHUNTER, 1865).

Princípio da Adição

Imaginemos que uma garota foi convidada para ir a uma festa. No seu guarda-roupa, ela conta com 5 pares de tênis, 4 pares de sapatos e 8 pares de sandálias. Ela escolhe a roupa e deixa para escolher o que calçar por último. Quantas são as maneiras de escolher o que calçar?

Ela pode escolher ou um par de tênis ou de sapatos ou de sandálias, ou seja, ela não pode escolher um par de tênis e um par de sandálias simultaneamente. Dessa forma, ela tem 5 escolhas se for escolher um par de tênis, 4 se for escolher um par de sapatos e 8 se for escolher um par de sandálias, totalizando 4 + 5 + 8 = 17 escolhas possíveis para o calçado com que irá para a festa.

O **Princípio da Adição** diz:

sejam A um conjunto contendo p elementos, B um conjunto contendo q elementos com A e B disjuntos, então, a união de A com B tem $p+q$ elementos.

Em linguagem matemática:

sejam A, B conjuntos finitos tais que $A \cap B = \phi$, então, $\#(A \cup B) = \#A + \#B$. Em que $\#C$ representa a quantidade de elementos de um dado conjunto finito C.

É importante notar que o **Princípio da Adição só vale quando os conjuntos são disjuntos.**

Exemplo 1

Consideremos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Temos: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Vamos contar o número de elementos de A, B e de $A \cup B$: $\#A = 4, \#B = 7$ e $9 = \#(A \cup B)$, mas temos: $\#A + \#B = 4 + 7 = 11$, como era de se esperar, já que $A \cap B = \{3, 4\} \neq \phi$.

Exemplo 2

Suponhamos que João seja muito organizado e divida suas roupas em dois guarda-roupas, A e B, da seguinte forma: no A, apenas as novas (as que foram usadas no máximo uma vez) e no B, as demais.

a) Considerando o guarda-roupa A como conjunto das roupas novas e o B como o conjunto das demais roupas, esses conjuntos são disjuntos?

b) Podemos garantir pelo **Princípio da Adição** que João tem $\#A + \#B$ peças de roupa?

Solução

a) Sim, pois ou uma roupa foi usada no máximo uma vez ou foi usada mais de uma vez. Se ela foi usada no máximo uma vez, ela pertence ao conjunto A e se foi usada mais de uma vez, ela pertence ao conjunto B.

b) O **Princípio da Adição** diz exatamente isso, se dois conjuntos são disjuntos, o número de elementos da união é a soma do número de elementos de cada conjunto.

Isoladamente, os exemplos do **Princípio da Adição** parecem muito artificiais, sendo que o grau de dificuldade exigido para sua aplicabilidade reside apenas em testar se dois conjuntos são disjuntos.

Princípio da Multiplicação

Um princípio mais completo é o chamado **Princípio da Multiplicação**, apresentado a seguir.

De quantas maneiras diferentes podemos formar um casal, se temos 3 homens e 2 mulheres?

Suponha que os homens sejam h_1, h_2, h_3 e as mulheres sejam m_1, m_2.

Escolhendo o homem 1, temos as possibilidades:

h_1 com a m_1 ou h_1 com a m_2. Isso nos dá 2 possibilidades.

Escolhendo o homem 2, temos as possibilidades:

h_2 com a m_1 ou h_2 com a m_2. Isso nos dá 2 possibilidades.

Escolhendo o homem 3, temos as possibilidades:

h_3 com a m_1 ou h_3 com a m_2. Isso nos dá 2 possibilidades.

Note que cada casal formado é diferente dos demais. Dessa forma, um total de 6 possibilidades de 3 homens e 2 mulheres formar um casal, a saber, é

$$h_1m_1,\ h_1m_2,\ h_2m_1,\ h_2m_2,\ h_3m_1,\ h_3m_2$$

Suponhamos que uma decisão d tenha que ser tomada e que tal decisão seja dividida em duas subdecisões d_1, d_2 que deverão ser tomadas uma após a outra em uma seqüência. Ou seja, para tomarmos a decisão d, primeiro uma decisão d_1 tem que ser tomada, depois de tomada a decisão d_1, a outra decisão d_2 é tomada. Suponhamos ainda que cada subdecisão possa ser tomada de uma certa quantidade de maneiras diferentes, por exemplo, que a decisão d_1 possa ser tomada de x_1 maneiras diferentes. Tomada a decisão d_1, suponhamos que a decisão d_2 possa ser tomada de x_2 maneiras diferentes. O **Princípio da Multiplicação** garante que existem $x_1 \times x_2$ maneiras diferentes de se tomar a decisão d.

Exemplo 1

De quantas maneiras diferentes podemos formar um casal, se temos 3 homens e 2 mulheres?

Solução

Decisão d: formar um casal

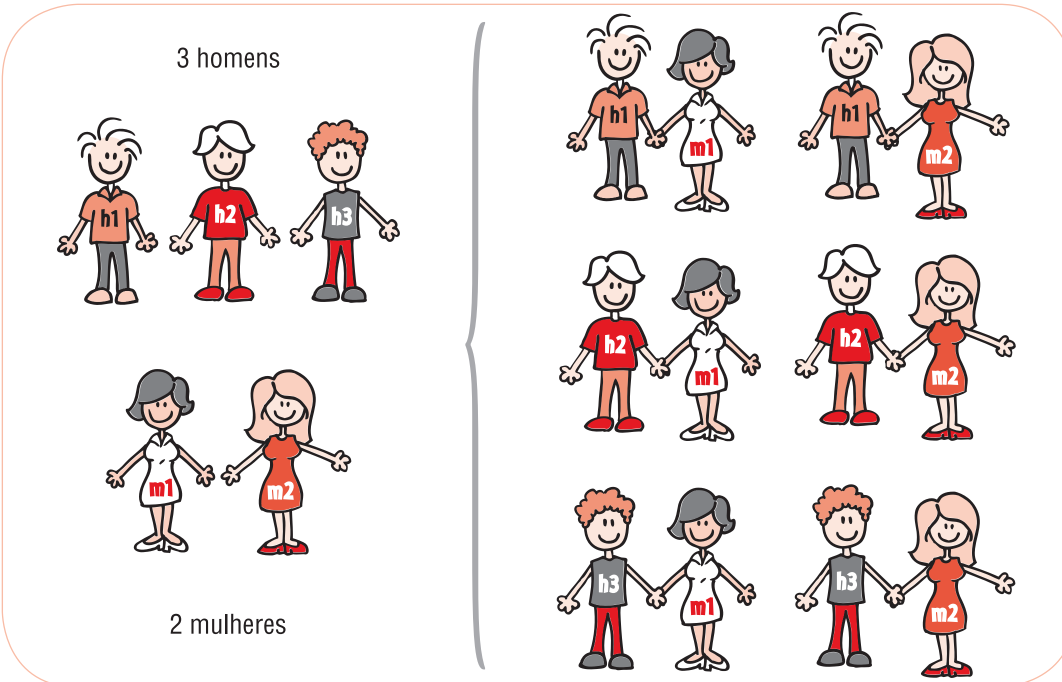
Decisão d_1: escolha do homem: h_1, h_2, h_3

Decisão d_2: escolha da mulher: m_1, m_2

Temos $x_1 = 3$ possíveis escolhas para o homem e $x_2 = 2$ possíveis escolhas para a mulher. Assim, pelo **Princípio da Multiplicação**, temos $x_1 \times x_2 = 2 \times 3 = 6$ possíveis escolhas para formar um casal.

Vamos verificar?

$$h_1m_1, h_1m_2, h_2m_1, h_2m_2, h_3m_1, h_3m_2$$



Exemplo 2

Suponha que você queira ir da cidade de Natal para Currais Novos no RN, mas tenha que parar em Santa Cruz para trocar de transporte. Sabendo que de Natal para Santa Cruz você pode ir de ônibus, transporte alternativo ou lotação (carro de passeio), mas que de Santa Cruz para Currais Novos só tem duas opções, ônibus ou transporte alternativo, de quantas maneiras você pode fazer essa viagem?

Solução

Decisão d: escolher os transportes para sair de Natal e chegar a Currais Novos.

Decisão d_1: escolher o transporte de Natal para Santa Cruz.

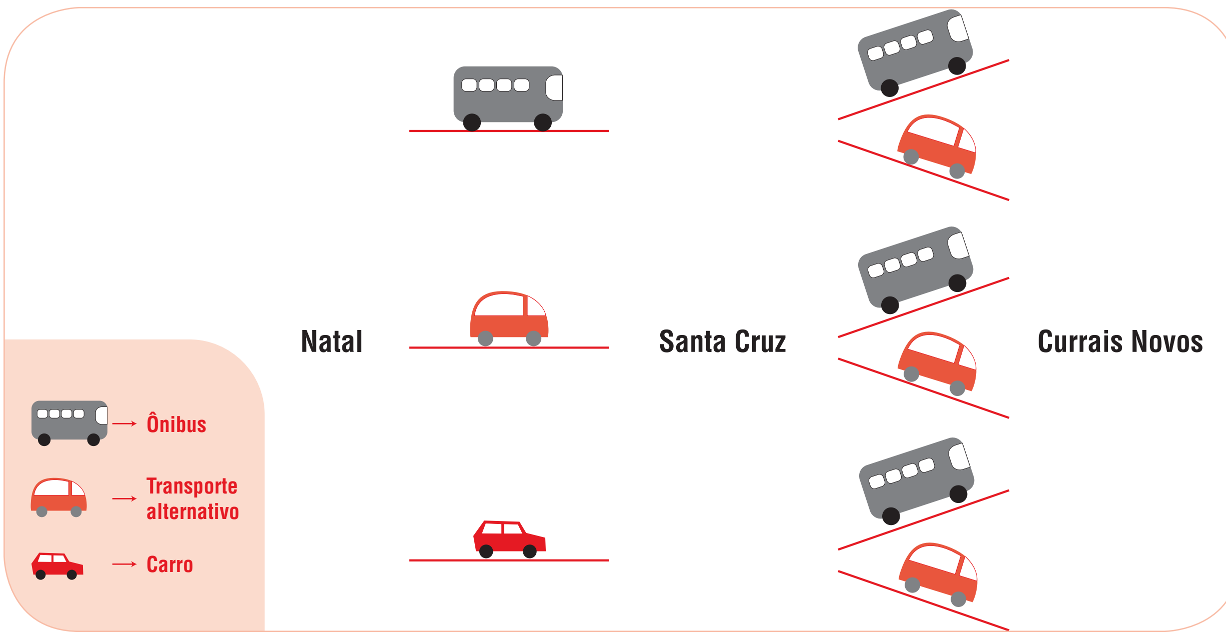
Decisão d_2: escolher o transporte de Santa Cruz para Currais Novos.

Temos que d_1 pode ser tomada de $x_1 = 3$ maneiras: ônibus, transporte alternativo, carro.

Temos que d_2 pode ser tomada de $x_2 = 2$ maneiras: ônibus, transporte alternativo.

Então, pelo **Princípio da Multiplicação**, existem $x_1 \times x_2 = 3 \times 2 = 6$ maneiras de sair de Natal e chegar a Currais Novos, trocando de transporte em Santa Cruz.

Vamos verificar?



Observação: o **Princípio da Multiplicação** pode ser utilizado também quando a decisão é dividida em mais que duas subdecisões. Por exemplo, suponha que a decisão tenha que ser tomada e que tal decisão seja dividida em três subdecisões d_1, d_2, d_3 que deverão ser tomadas uma após a outra em uma seqüência. Em outras palavras, para tomarmos a decisão d, primeiro uma decisão d_1 tem que ser tomada, depois de d_1 uma decisão d_2 tem que ser tomada, depois de tomadas as decisões d_1 e d_2, uma decisão d_3 tem que ser tomada.

Suponhamos ainda que cada subdecisão possa ser tomada de uma certa quantidade de maneiras diferentes, por exemplo, que a decisão d_1 possa ser tomada de x_1 maneiras diferentes. Tomada a decisão d_1, suponhamos que a d_2 possa ser tomada de x_2 maneiras diferentes. Tomadas as decisões d_1 e d_2, suponhamos que a d_3 possa ser tomada de x_3 maneiras diferentes.

O **Princípio da Multiplicação** garante que existam $x_1 \times x_2 \times x_3$ maneiras diferentes de se tomar a decisão d.

Exemplo 3

Num certo país, as placas dos automóveis constam de duas letras e quatro algarismos. Quantas placas podiam ser fabricadas com as letras H, S e R e os algarismos 0, 1, 7 e 8?

Solução

Decisão d: fabricar a placa.

Decisão d_1: escolher a primeira letra da placa, que poderá ser feita de $x_1 = 3$ maneiras.

Decisão d_2: escolher a segunda letra da placa, que também poderá ser feita de $x_2 = 3$ maneiras (note que as letras podem ser repetidas).

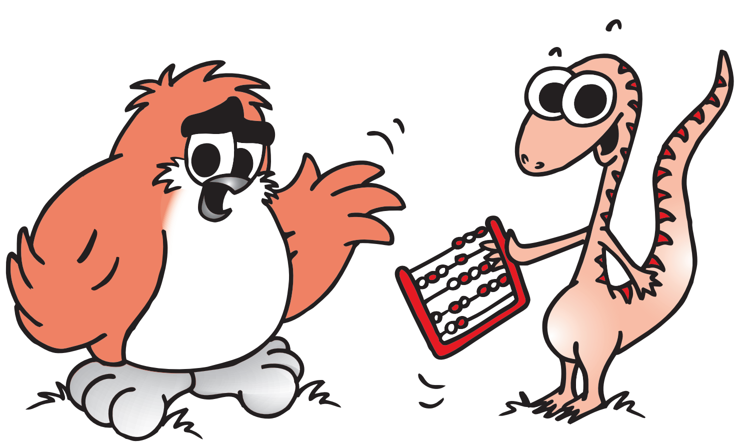
Decisão d_3: escolher o primeiro algarismo, que poderá ser feita de $x_3 = 4$ maneiras.

Decisão d_4: escolher o segundo algarismo, que também poderá ser feita de $x_4 = 4$ maneiras (note que os algarismos também podem ser repetidos).

Decisão d_5: escolher o terceiro algarismo, que também poderá ser feita de $x_5 = 4$ maneiras.

Decisão d_6: escolher o quarto algarismo, que também poderá ser feita de $x_6 = 4$ maneiras.

Pelo **Princípio Multiplicativo**, $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 = 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 576$ placas podiam ser fabricadas.



Exemplo 4

O "passeio forroviário" é uma viagem de trem entre Campina Grande e Ingá-PB, que acontece todos os anos na época do São João. Esse trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e de seis vagões distintos, sendo um deles um bar. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão bar não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, de quantos modos diferentes podemos montar essa composição?

Solução

Decisão d: montar o trem com uma locomotiva e seis vagões, temos, portanto, 7 decisões a tomar.

Decisão d_1: fixar a locomotiva na primeira posição da composição. Como temos uma única locomotiva, $x_1 = 1$.

Decisão d_2: escolher o primeiro vagão que deve vir imediatamente após a locomotiva. Temos $x_2 = 5$ opções, já que o vagão bar não pode ocupar essa posição.

Decisão d_3: escolher a terceira parte da composição, que poderá ser feita de $x_3 = 5$ maneiras (note que agora o vagão bar poderá ser escolhido).

Decisão d_4: escolher a quarta parte da composição, que poderá ser feita de $x_4 = 4$ maneiras.

Decisão d_5: escolher a quinta parte da composição, que poderá ser feita de $x_5 = 3$ maneiras.

Decisão d_6: escolher a sexta parte da composição, que poderá ser feita de $x_6 = 2$ maneiras.

Decisão d_7: escolher a sétima parte da composição, que poderá ser feita de apenas $x_7 = 1$ maneira, já que só restou um vagão.

Pelo **Princípio da Multiplicação**, existem $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 \times x_7 = 1 \times 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 600$ modos diferentes de montar essa composição.

Mostraremos, através de exemplos, como utilizar o **Princípio da Adição** junto com o **da Multiplicação** para resolver alguns problemas.

Suponha que no segundo exemplo desta seção você não queira repetir o transporte utilizado de Natal - Santa Cruz no percurso Santa Cruz - Currais Novos.

Situação A: fazer o trecho Natal – Santa Cruz de ônibus.

Situação B: não fazer o trecho Natal – Santa Cruz de ônibus.

Note que A e B são disjuntos e que o número de maneiras de fazer a viagem Natal – Santa Cruz é equivalente à união de A com B. Pelo **Princípio da Adição**, o número de elementos de A união B é o número de elementos em A mais o número de elementos em B.

Decisão d: escolher os transportes para sair de Natal e chegar a Currais Novos.

- Considerando a situação A

Decisão d_1: escolher o transporte de Natal para Santa Cruz, que só poderá ser feita de $x_1 = 1$ maneira. (ônibus)

Decisão d_2: escolher o transporte de Santa Cruz para Currais Novos, que também só poderá ser feito de $x_2 = 1$ maneira, uma vez que você não quer repetir o transporte (transporte alternativo).

Logo, o número de decisões em A é, pelo **Princípio da Multiplicação**, $x_1 \times x_2 = 1 \times 1 = 1$.

- Considerando a situação B

Note que a situação B pode ser dividida em duas outras:

situação C: fazer o trecho Natal – Santa Cruz de transporte alternativo;

situação D: não fazer o trecho Natal – Santa Cruz de transporte alternativo.

Observe que essas duas situações são disjuntas e pelo **Princípio da Adição** a quantidade de elementos em B será a soma dos elementos de C e D.

- Considerando a situação C

Decisão d_1: escolher o transporte de Natal para Santa Cruz, que só poderá ser feita de $x_1 = 1$ maneira (transporte alternativo).

Decisão d_2: escolher o transporte de Santa Cruz para Currais Novos, que também só poderá ser feita de $x_2 = 1$ maneira, uma vez que você não quer repetir o transporte (ônibus).

Logo, o número de decisões em C é, pelo **Princípio da Multiplicação**, $x_1 \times x_2 = 1 \times 1 = 1$.

- Considerando a situação D

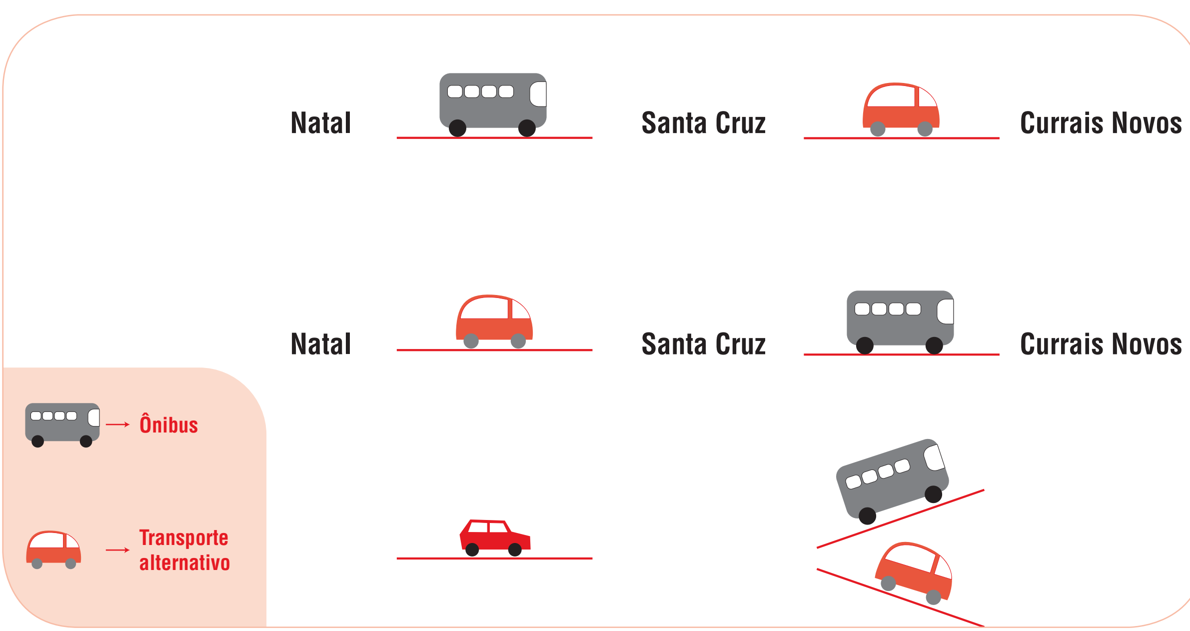
Decisão d_1: escolher o transporte de Natal para Santa Cruz, que só poderá ser feita de $x_1 = 1$ maneira (lotação).

Decisão d_2: escolher o transporte de Santa Cruz para Currais Novos, que poderá ser feita de $x_2 = 2$ maneiras, uma vez que você não quer repetir o transporte (ônibus, transporte alternativo).

Logo, o número de decisões em D é, pelo **Princípio da Multiplicação**, $x_1 \times x_2 = 1 \times 2 = 2$.

Pelo **Princípio da Adição**, temos que o número de decisões em B é 1 + 2 = 3.

Portanto, o número total de decisões d é, pelo **Princípio da Adição**, 1 + 3 = 4. Vamos verificar?



Assim, vemos que o raciocínio por análise combinatória é utilizado nas decisões mais simples do nosso cotidiano. Outras componentes podem ser inseridas para tornar o problema mais próximo da realidade, qual sejam, o preço da passagem em cada transporte, a quantidade de dinheiro que você tem no bolso etc. Mas, para uma primeira visão geral do problema, o uso da análise combinatória permite enumerar todas as possibilidades.

Nos exemplos seguintes, justifique cada decisão tomada e, quando possível, verifique o resultado obtido através de diagramas.

Exemplo 5

Uma concessionária de automóveis oferece aos seus clientes um modelo X de carro em 7 cores diferentes, podendo o comprador optar entre os motores 1600cc e 1800cc e ainda entre as versões S, L e SL. Quantas são as alternativas para o comprador?

Solução

Decisão d: escolher o carro.

Decisão d_1: escolher a cor do carro, que poderá ser feita de $x_1 = 7$ maneiras.

Decisão d_2: escolher o motor do carro, que poderá ser feita de $x_2 = 2$ maneiras.

Decisão d_3: escolher a versão S, L ou SL, ou seja, $x_3 = 3$.

Portanto, pelo **Princípio Multiplicativo**, o número de alternativas para o comprador é $x_1 \times x_2 \times x_3 = 7 \times 2 \times 3 = 42$.

Exemplo 6

Com os algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, são formados números com quatro dígitos distintos. Entre eles, quantos são divisíveis por 5?

Solução

Decisão d: formar números de quatro dígitos.

Decisão d_1: fixar o número 5 na última posição, ou seja, o representante das unidades (já que o número deve ser divisível por 5), temos apenas $x_1 = 1$ opção.

Decisão d_2: escolher o primeiro dígito, temos $x_2 = 5$ opções.

Decisão d_3: escolher o segundo dígito, temos $x_3 = 4$ opções.

Decisão d_4: escolher o terceiro dígito, temos $x_4 = 3$ opções.

Portanto, pelo **Princípio Multiplicativo**, temos $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$ números divisíveis por 5 entre todos os formados como especificado.

Exemplo 7

Os donos da discoteca FESTA decidiram pintar seu nome com tinta fluorescente e para isso compraram tintas de 4 cores diferentes entre si; todas elas deverão ser usadas para pintar as 5 letras, cada letra de uma só cor, e as vogais com a mesma cor. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Solução

Decisão d: pintar as cinco letras da palavra FESTA.

Decisão d_1: escolher a cor das vogais, temos então $x_1 = 4$.

Decisão d_2: escolher a cor da letra F, temos então $x_2 = 3$.

Decisão d_3: escolher a cor da letra S, temos então $x_3 = 2$.

Decisão d_4: escolher a cor da letra T, temos então $x_4 = 1$.

Portanto, pelo **Princípio Multiplicativo**, temos $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras de pintar tais letras.

Exemplo 8

Uma calçada é formada por 7 blocos de concreto que devem ser pintados de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que dois blocos adjacentes nunca estejam pintados da mesma cor?

Solução

Decisão d: pintar os 7 blocos de concreto da calçada.

Decisão d_1: escolher a cor do primeiro bloco, temos então $x_1 = 3$.

Decisão d_2: escolher a cor do segundo bloco, temos então $x_2 = 2$.

Decisão d_3: escolher a cor do terceiro bloco, temos então $x_3 = 2$.

Decisão d_4: escolher a cor do quarto bloco, temos então $x_4 = 2$.

Decisão d_5: escolher a cor do quinto bloco, temos então $x_5 = 2$.

Decisão d_6: escolher a cor do sexto bloco, temos então $x_6 = 2$.

Decisão d_7: escolher a cor do sétimo bloco, temos então $x_7 = 2$.

Portanto, pelo **Princípio Multiplicativo**, temos $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 \times x_7 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 192$ maneiras de pintar tais blocos.

Atividade 1

1 Uma lanchonete oferece a seguinte promoção: um salgado, um refrigerante e um doce por R$ 3,00. Sabendo que existem 4 opções de salgado, 5 de refrigerante e 2 de doce, de quantas formas diferentes podemos montar um lanche com esses três itens?

2 Vamos supor que a referida promoção fosse: um refrigerante mais um doce ou um salgado por R$ 3,00. De quantos modos diferentes poderíamos montar uma combinação para aproveitar tal promoção?

3 Antigamente, as placas dos automóveis constavam de duas letras e quatro algarismos. Quantas placas poderiam ser fabricadas com as letras P, Q e R e os algarismos 0, 1, 7 e 8, se o cliente pudesse escolher sua placa e determinasse que:

a) começaria com P ou Q e terminaria com 8?

b) começaria com P e terminaria com 8 ou 0?

c) começaria com P ou Q e terminaria com 8 ou 0?

4 Um garoto chega a uma sorveteria, que oferece 6 sabores, para comprar um sorvete de três bolas. De quantas maneiras ele pode fazer isso, caso deseje:

a) escolher os três sabores distintos;

b) escolher dois sabores distintos;

c) escolher de qualquer maneira.

5 Uma professora na hora do lanche pretende fazer uma fila com seus alunos para que eles saiam da sala sem correria, de forma bem tranqüila. Sabendo que possui 10 alunos, de quantos modos ela pode montar essa fila?

6 Que tal você montar seus próprios problemas e em seguida resolvê-los usando os e ?

Resumo

A análise combinatória tem sua origem nos jogos. Ela é usada para contar possibilidades, como, por exemplo, a quantidade de subconjuntos de um conjunto finito que satisfazem certas condições; mostrar a existência de subconjuntos de um conjunto finito dado, etc. Ela aparece naturalmente no dia-a-dia, desde a enumeração de trajetos que podemos fazer de casa para o trabalho até a quantidade de ligações que podemos fazer utilizando uma certa quantidade de átomos. Dois princípios nos ajudam a resolver algumas dessas situações: o **Princípio da Adição**, usado em situações em que dividimos o problema em conjuntos disjuntos; e o **Princípio da Multiplicação**, que é usado em situações nas quais dividimos o problema em uma seqüência de subdecisões que são tomadas uma após a outra.

Autoavaliação

1 Você é capaz de descrever exemplos, diferentes dos apresentados, que ilustrem o uso desses dois princípios?

2 Vamos montar um jogo de perguntas? De quantas perguntas, no mínimo, você precisa para montar o seguinte jogo?

O jogo consiste em 5 etapas. Você só segue para outra etapa se acertar a pergunta da etapa anterior.

Em cada etapa você escolhe uma carta dentre 5 oferecidas, cada carta dessa contém uma pergunta.

Quantas perguntas precisamos ter para, caso o jogador acerte todas as questões, não utilizarmos na etapa seguinte a questão que ele já respondeu corretamente na etapa anterior?

O que está com as cartas pode pegar novas perguntas que se encontram num banco de perguntas não utilizadas.

Referências

DAVID, F. N. **Games, gods and gambling:** a history of probability and statistical ideas. [s.l.]: Dover Publications, Inc. 1962.

MORGADO, A. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática).

Anotações

Anotações

Anotações

Permutações simples

Aula

2

Apresentação

Nesta aula, estudaremos permutações simples, mas, antes, apresentaremos a você o fatorial de um número inteiro positivo. O fatorial, de definição simples, aparece naturalmente no estudo da análise combinatória, o qual nos permite através de suas propriedades simplificar e tornar elegantes vários cálculos.

Objetivos

Ao final desta aula, esperamos que você possa:

1. detectar com clareza as situações caracterizadas por permutações simples;

2. trabalhar com expressões envolvendo fatorial, de forma natural.

Contextualização

Suponha que você esteja em casa, tranqüilo, lendo seu material de análise combinatória e sua mãe peça sua ajuda para a realização da seguinte lista de tarefas.

1. Lavar o carro.
2. Levar uma carta ao correio.
3. Devolver uns livros na biblioteca.
4. Comprar o jornal.
5. Levar o lixo para fora.
6. Arrumar seu quarto.

Você tentou argumentar, mas não teve jeito. Terá de cumprir toda a lista. E já que estava estudando análise combinatória, questiona-se:

"De quantas maneiras diferentes (ordens diferentes) posso realizar as seis tarefas?"

Ao montar uma ordem de execução das tarefas, você tem 6 decisões a tomar.

Decisão d_1: escolher a primeira tarefa, para a qual tem $x_1 = 6$ possibilidades.

Decisão d_2: escolher a segunda tarefa, para a qual resta $x_2 = 5$ possibilidades.

Decisão d_3: escolher a terceira tarefa, para a qual resta $x_3 = 4$ possibilidades.

Decisão d_4: escolher a quarta tarefa, para a qual resta $x_4 = 3$ possibilidades.

Decisão d_5: escolher a quinta tarefa, para a qual resta $x_5 = 2$ possibilidades.

Decisão d_6: escolher a sexta tarefa, para a qual resta $x_6 = 1$ possibilidade.

Usando o **Princípio da Multiplicação**, conclui-se que existem

$$x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

maneiras distintas de montar uma ordem de execução das tarefas.

Observe os próximos exemplos e vamos verificar qual a relação que têm com o problema que você acabou de resolver.

Exemplo 1

De quantas maneiras 5 pessoas podem ficar em fila indiana?

Solução

Temos 5 decisões a tomar.

Decisão d_1: escolha da pessoa que ocupará a 1ª posição da fila. Como temos 5 pessoas, temos $x_1 = 5$ opções.

Decisão d_2: escolha da pessoa que ocupará a 2ª posição da fila. Temos agora $x_2 = 4$ opções.

Decisão d_3: escolha da pessoa que ocupará a 3ª posição da fila. Temos agora $x_3 = 3$ opções.

Decisão d_4: escolha da pessoa que ocupará a 4ª posição da fila. Temos agora $x_4 = 2$ opções.

Decisão d_5: escolha da pessoa que ocupará a 5ª posição da fila. Temos agora $x_5 = 1$ opção.

Pelo **Princípio Multiplicativo**, o número de maneiras de formar essa fila é:

$$x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Exemplo 2

Considere a palavra NÚMERO.

a) Quantos são os **Anagramas**?

Solução

Temos 6 subdecisões a tomar.

Anagrama

Um anagrama nada mais é do que uma das possibilidades de ordenação das letras que compõem a palavra (mesmo que a palavra não tenha significado). Por exemplo, os anagramas da palavra SOL são: SOL, SLO, OSL, OLS, LOS, LSO.

Decisão d_1: escolha da letra que ocupará a 1ª posição do anagrama. Como temos 6 letras, temos $x_1 = 6$ opções de escolha.

Decisão d_2: escolha da letra que ocupará a 2ª posição do anagrama. Temos agora $x_2 = 5$ opções de escolha, já que a primeira letra foi escolhida.

Decisão d_3: escolha da letra que ocupará a 3ª posição do anagrama. Temos agora $x_3 = 4$ opções de escolha, já que a primeira e a segunda letras foram escolhidas.

Decisão d_4: escolha da letra que ocupará a 4ª posição do anagrama. Temos agora $x_4 = 3$ opções de escolha, já que a primeira, a segunda e a terceira letras foram escolhidas.

Decisão d_5: escolha da letra que ocupará a 5ª posição do anagrama. Temos agora $x_5 = 2$ opções de escolha, já que as quatro primeiras letras foram escolhidas.

Decisão d_6: escolha da letra que ocupará a 6ª posição do anagrama. Temos agora $x_6 = 1$ opção, já que a primeira, a segunda, a terceira, a quarta e a quinta letras foram escolhidas.

Assim, pelo **Princípio da Multiplicação**, o número de maneiras de formar anagramas é:

$$x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

b) Quantos são os anagramas que começam e terminam por consoante?

Solução

Primeiramente, temos que fixar consoantes na primeira e na última posição. Ou seja, temos que tomar duas decisões.

Decisão d_1: fixar uma consoante na 1ª posição. Como temos 3 consoantes, temos $x_1 = 3$ opções de escolha.

Decisão d_2: fixar outra consoante na 6ª posição. Temos agora $x_2 = 2$ opções.

Depois de fixadas as consoantes na primeira e na última posição, restam-nos 4 letras e 4 posições. Podemos assim decompor a decisão d_3: escolha das letras que ocuparão as outras quatro posições do anagrama, em quatro subdecisões.

Subdecisão $d_{3.1}$: escolha da letra que ocupará a 2ª posição do anagrama. Como temos agora 4 letras, temos $x_{3.1} = 4$ opções de escolha.

Subdecisão $d_{3.2}$: escolha da letra que ocupará a 3ª posição do anagrama. Como temos agora 3 letras, temos $x_{3.2} = 3$ opções de escolha.

Subdecisão $d_{3.3}$: escolha da letra que ocupará a 4ª posição do anagrama. Como temos agora 2 letras, temos $x_{3.3} = 2$ opções de escolha.

Subdecisão $d_{3.4}$: escolha da letra que ocupará a 5ª posição do anagrama. Como temos agora 1 letra, temos $x_{3.4} = 1$ opção de escolha, já que a primeira, a última, a segunda, a terceira e a quarta letras foram escolhidas.

Dessa forma, temos que a decisão d_3 pode ser tomada de

$$x_3 = x_{3.1} \times x_{3.2} \times x_{3.3} \times x_{3.4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

maneiras.

E, mais uma vez utilizando o **Princípio da Multiplicação**, a quantidade de anagramas da palavra NÚMERO que começam por consoante e terminam por consoante é:

$$x_1 \times x_2 \times x_3 = 3 \times 2 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 144.$$

c) Quantos são os anagramas que começam por consoante e terminam por vogal?

Solução

Decisão d_1: primeiramente, temos que fixar uma consoante na 1ª posição. Como temos 3 consoantes, temos $x_1 = 3$ opções de escolha.

Decisão d_2: fixar uma vogal na última posição. Como temos 3 vogais, temos $x_2 = 3$ opções de escolha.

Decisão d_3: depois de fixadas a 1ª e a última posição, restam-nos 4 letras (2 vogais e 2 consoantes) e 4 posições. Portanto, da mesma forma que fizemos anteriormente, temos $x_3 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades.

E, mais uma vez utilizando o **Princípio da Multiplicação**, a quantidade de anagramas da palavra NÚMERO que começam por consoante e terminam por vogal é:

$$x_1 \times x_2 \times x_3 = 3 \times 3 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 216.$$

Note que na resolução dos exemplos anteriores apareceu um produto de números naturais começando de 1 e indo até um certo número. No exemplo 1, esse número foi o 6 e nos exemplos seguintes foi o 4. Esses tipos de produtos aparecem com freqüência, não apenas no estudo da análise combinatória, mas em vários outros tópicos da Matemática. Uma notação especial foi criada para esses produtos com o objetivo de simplificar, pois imagine ter que escrever o produto de 1 até 1298! Assim, surgiu o fatorial de um número inteiro positivo, o qual estudaremos a seguir.

Fatorial de um número inteiro positivo

Dado um número inteiro positivo n, definimos o fatorial de n, que denotamos por $n!$, como o produto dos números naturais de 1 até n, ou seja,

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

É interessante observar como o fatorial de um número cresce vertiginosamente. Vejamos alguns exemplos:

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$

Com o auxílio do sinal de fatorial, podemos escrever expressões numéricas muito interessantes.Calculemos, por exemplo, o fatorial de 362880!. Sabendo que 362880 é o fatorial de 9, podemos então escrever: 362880! = (9!)!.

Segundo Malba Tahan (1997), esse número (9!)! no qual figura um único algarismo, o 9, se fosse calculado e escrito com algarismos de tamanho comum, teria cerca de 140 quilômetros de comprimento.

Vemos assim que o símbolo de fatorial nos permite simplificar expressões numéricas, já que é bem mais simples trabalhar com o símbolo (9!)! do que com um número com 140 Km de comprimento.

Exemplo 3

Vamos transformar as expressões seguintes em expressões que envolvam somente fatorial.

a) $7 \times 6 \times 5$

b) $\dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!}$

c) $\dfrac{9!}{5 \times 4}$

Solução

Sabendo que:

$1 \times m = m$ qualquer que seja o valor de $m \in \mathbb{R}$ e que

$1 = \dfrac{n}{n}$ qualquer que seja o valor de $n \in \mathbb{R} - \{0\}$,

podemos escrever:

a) $7 \times 6 \times 5 = 7 \times 6 \times 5 \times 1 = 7 \times 6 \times 5 \times \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} =$
$\dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{7!}{4!},$

b) $\dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} \times 1 = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} \times \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} =$
$\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3!7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{10!}{3!7!}$

c) $\dfrac{9!}{5 \times 4} = \dfrac{9!}{5 \times 4} \times 1 = \dfrac{9!}{5 \times 4} \times \dfrac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \dfrac{9!3!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{9!3!}{5!}$

Também será útil observar que:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 \times 5!$$

Da mesma forma,

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 \times 5 \times (4!) = 6 \times 5 \times 4!$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 6 \times 5 \times 4 \times (3!) = 6 \times 5 \times 4 \times 3!$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times (2 \times 1) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times (2!) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!.$$

Porém, muito cuidado: $6 \times 5 \times 4! \neq 120!$, ou seja, $6 \times 5 \times 4! \neq (6 \times 5 \times 4)!$. O que estamos tentando enfatizar é que o fatorial não é um símbolo que é colocado no final da expressão, como a exclamação em uma frase. O fatorial está ligado ao número que o precede. Dessa forma,

$$6 \times 5 \times 4! \neq 120!$$

$$6 \times 5! \times 4 \neq 120!$$

$$6! \times 5 \times 4 \neq 120!$$

Na verdade, o que eles significam são

$$6 \times 5 \times 4! = 6 \times 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$$

$$6 \times 5! \times 4 = 6 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 4 = 4 \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 4 \times (6!) = 4 \times 6! \neq 24!$$

$$6! \times 5 \times 4 = (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 5 \times 4 = 20 \times (6!) = 20 \times 6! \neq 120!$$

Esse erro é muito comum, mas lembrem-se de que o fatorial está apenas no 4, ou seja, $6 \times 5 \times 4! = 30 \times 4! = 30 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 30 \times 24 = 720.$

Podemos, então, resolver os exemplos anteriores de maneira mais direta:

a. $7 \times 6 \times 5 = 7 \times 6 \times 5 \times 1 = 7 \times 6 \times 5 \times \dfrac{4!}{4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = \dfrac{7!}{4!}$

b. $\dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \dfrac{10 \times 8 \times 7}{3!} \times 1 = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} \times \dfrac{7!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = \dfrac{10!}{3! \times 7!}$

c. $\dfrac{9!}{5 \times 4} = \dfrac{9!}{5 \times 4} \times 1 = \dfrac{9!}{5 \times 4} \times \dfrac{3!}{3!} = \dfrac{9!3!}{5 \times 4 \times 3!} = \dfrac{9!3!}{5!}$

Atividade 1

1 Transforme as expressões abaixo em expressões envolvendo apenas fatorial.

a. $9 \times 8 \times 7$

b. $\dfrac{13 \times 12 \times 11}{4!}$

c. $\dfrac{5!}{3 \times 4}$

2 O produto $20 \times 18 \times 16 \times \ldots \times 2$ é equivalente a:

a. $\dfrac{20!}{2}$ **b.** $2^{10} \times (10!)$ **c.** $\dfrac{20!}{2^{10}}$ **d.** $2 \times 20!$

3 Considere $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

Usando o exercício anterior, calcule o valor da soma

$S = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{k-1}{k!}$, em que $k \in \mathbb{N}$.

4 Que valor de n resolve a seguinte equação

$\dfrac{6 \times 12 \times 18 \times \cdots \times 300}{50!} = 216^n$?

a. $\dfrac{1}{3}$ **b.** $\dfrac{3}{2}$ **c.** $\dfrac{15}{2}$ **d.** $\dfrac{50}{3}$

Permutação simples

Suponha que você está com 3 objetos distintos A, B e C e deseja saber de quantas maneiras pode ordená-los em uma fila. Há, portanto, uma ordem a ser seguida: primeira, segunda e terceira posição. Listando todas as possibilidades, você encontrará 6 maneiras distintas:

ABC

ACB

BAC

BCA

CAB

CBA

Entretanto, se a quantidade de objetos aumentar muito, ficará quase impossível descrever ilustrativamente o número de possibilidades, além de aumentar a chance de se omitir algum termo. Cada uma dessas possibilidades é chamada de uma permutação dos elementos A, B e C. Como poderemos, então, fazer a ordenação sem precisar listar todas as permutações possíveis? Em outras palavras:

dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots a_n$, de quantas maneiras é possível ordená-los?

Solução

Decisão d_1: alocar um elemento na primeira posição – poderá ser qualquer um dos n objetos. Portanto, temos $x_1 = n$ opções de escolha.

Decisão d_2: alocar um elemento na segunda posição – poderá ser qualquer um dos n elementos, exceto o que já foi alocado na primeira posição. Portanto, temos $x_2 = n - 1$ opções de escolha.

Decisão d_3: alocar um elemento na terceira posição – poderá ser qualquer um dos n elementos, exceto aqueles alocados na primeira e segunda posições. Portanto, temos $x_3 = n - 2$ opções de escolha.

Continuando dessa maneira, depois de tomadas as $n-1$ primeiras decisões:

Decisão d_n: alocar um elemento na n-ésima posição – poderá ser qualquer elemento dos n elementos, exceto aqueles alocados nas $n-1$ primeiras posições. Portanto, temos $x_n = n-(n-1) = 1$ opção de escolha.

E, pelo **Princípio Multiplicativo**, temos $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$ maneiras de ordenar n objetos.

O importante aqui é que todos os elementos são utilizados, ou seja, temos n elementos e n lugares para alocá-los, ou ordená-los.

Podemos, agora, retornar aos primeiros exemplos da aula e colocá-los no contexto das permutações simples.

No exemplo dado na introdução desta aula, você tem 6 atividades para fazer e não poderá deixar de fazer nenhuma delas, ou seja, você tem 6 tarefas para colocar em ordem (todas elas), logo terá 6! maneiras de fazê-las.

No segundo exemplo, você tem que organizar uma fila com 5 pessoas e, obrigatoriamente, todas as cinco terão de ficar nela, ou seja, você tem 5 pessoas para 5 lugares, portanto, 5! modos de organização.

No exemplo 3, você tem a palavra NÚMERO e quer saber quantos anagramas são possíveis, ou seja, você tem 6 lugares para colocar as 6 letras, portanto, 6! possibilidades.

É como se você tivesse o mesmo número de pessoas e de lugares, em que esses lugares estão fixos e as pessoas devem ser aí alocadas de todas as maneiras possíveis. Mas, o importante, não esqueça, é que o número de pessoas e de lugares é sempre o mesmo.

Exemplo 4

Quantos números de 7 algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que em todos os números formados o algarismo "6" seja imediatamente seguido do algarismo "7"?

Solução

Temos 2 subdecisões a tomar.

Decisão d_1: escolher uma posição para o número 6 e assim, automaticamente, já alocar o número 7, já que o 7 estará imediatamente após o 6. Podemos escolher a posição para o número 6 de $x_1 = 6$ maneiras distintas, uma vez que o 6 não pode assumir a última posição (onde colocaríamos o 7?).

Decisão d_2: alocar os números restantes. Já que o número 6 está alocado (e, portanto, o 7), isso pode ser feito de $x_2 = 5!$ maneiras, uma vez que temos 5 "lugares" e 5 número.

Pelo **Princípio da Multiplicação**, podemos formar $x_1 \times x_2 = 6 \times 5! = 6!$ números de 7 algarismos distintos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que em todos os números formados o algarismo "6" seja imediatamente seguido do algarismo "7".

Exemplo 5

Em uma estante, há nove livros diferentes: quatro de Física e cinco de Matemática. De quantos modos é possível arrumá-los em uma prateleira?

a) Sem restrições.

Solução

Se formos arrumar os livros na prateleira sem que nenhuma restrição seja feita, ou seja, se pudermos colocá-los em qualquer ordem, o problema se reduz à seguinte situação: nove objetos distintos devem ser alocados em 9 lugares. A resposta: permutação simples, ou seja, 9! maneiras.

b) Ficando os livros de Física juntos e os de Matemática juntos?

Solução

Faça 2 blocos: o bloco dos livros de Física (F) e o bloco dos livros de Matemática (M). Então, temos duas subdecisões a tomar:

Decisão d_1: escolher a ordem dos blocos. Isso pode ser feito de $x_1 = 2$ maneiras: MF ou FM.

Decisão d_2: arrumar os livros dentro de seu respectivo bloco. Essa decisão pode ser subdividida em duas outras, a saber:

subdecisão $d_{2.1}$: arrumar os livros do bloco de Física. No bloco de Física, temos 4 livros e 4 lugares e, portanto, a arrumação desses livros pode ser feita de $x_{2.1} = 4!$ maneiras distintas;

subdecisão $d_{2.2}$: arrumar os livros do bloco de Matemática. No bloco de Matemática, temos 5 livros e 5 lugares e, portanto, a arrumação desses livros pode ser feita de $x_{2.2} = 5!$ maneiras distintas.

Logo, d_2 pode ser tomada de $x_2 = x_{2.1} \times x_{2.2} = 4! \times 5!$.

E, pelo **Princípio da Multiplicação**, a arrumação pode ser feita de $x_1 \times x_2 = 2! \times (4! \times 5!)$ maneiras diferentes.

Outra maneira de você ver essa ordenação é mostrada em Teixeira (2004, p.3, grifo nosso), quando ele diz:

> Observe que temos n objetos e queremos saber a quantidade de modos de poder embaralhá-los ou agrupá-los , sem que tenhamos esquecido de nenhum deles. Ou seja, é o mesmo que pensar que possuo n objetos e vou colocá-los em exatamente n caixas, cada caixa contendo somente um único objeto.

E conclui, dizendo: "O número de modos de arrumar ordenadamente n objetos distintos em caixas, que contenham exatamente um só objeto por caixa, é conhecido como o número de permutações simples destes n objetos distintos".

Esperamos que você tenha compreendido a idéia e a forma de chegar a esse número e tenha percebido que o mais importante nessa construção é que o número de objetos e o número de lugares em que você vai ordená-los, ou caixas em que você vai guardá-los, é o mesmo, ou seja, ninguém da coleção inicial fica de fora.

Veremos na aula 3 (Combinações e arranjos) o que acontece quando temos mais elementos do que lugares.

Vamos juntos resolver mais um problema?

Exemplo 6

Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito, se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos?

Solução

Temos três decisões a tomar.

Decisão d_1: quem colocar primeiro. Pode ser tomada de $x_1 = 2$ maneiras (Brasil ou Portugal).

Decisão d_2: onde colocar o primeiro. Pode ser tomada de $x_2 = 9$ maneiras (lembre-se que não podemos colocá-lo na última posição, já que depois dele deve vir outro!).

Decisão d_3: onde colocar os demais. Pode ser tomada de $x_3 = 8!$ maneiras (8 lugares e 8 pessoas para ocupá-los).

Pelo **Princípio da Multiplicação**, a quantidade de maneiras dos delegados se sentarem de modo que os delegados do Brasil e de Portugal sentarem juntos é

$$x_1 \times x_2 \times x_3 = 2 \times 9 \times 8! = 2 \times 9!$$

Exemplo 7

E se ao invés de termos os delegados do Brasil e de Portugal sentados juntos, eles tivessem que se sentar separados?

Solução

Analisemos por um instante a seguinte seqüência de pensamentos. Para isso, considere os seguintes conjuntos:

A = {todas as ordens possíveis dos 10 delegados};

B = {todas as ordens possíveis dos 10 delegados com os delegados do Brasil e de Portugal sentando juntos};

C = {todas as ordens possíveis dos 10 delegados com os delegados do Brasil e de Portugal sentando separados}.

Se considerarmos um elemento de A, esse elemento obrigatoriamente está em B ou C. Ou seja, se tomarmos qualquer configuração dos delegados, teremos os delegados do Brasil e de Portugal sentando juntos ou separados.

Os conjuntos B e C são disjuntos, já que em nenhuma configuração dos delegados pode acontecer de Brasil e Portugal estarem juntos e separados ao mesmo tempo.

Então, pelo **Princípio da Adição**, o número de elementos de A é igual ao número de elementos de B mais o número de elementos de C, ou seja,

$\#A = \#B + \#C$, o que nos leva a: $\#C = \#A - \#B$

O número de elementos de A é dado pela permutação simples, ou seja, 10!, uma vez que temos 10 delegados para 10 lugares. O número de elementos de B obtivemos no exemplo anterior: $2! \times 9!$. Sendo assim, o número de elementos de C é dado por $10! - 2 \times 9! = 10 \times 9! - 2 \times 9! = (10 - 2) \times 9! = 8 \times 9!$.

Agora, é sua vez de montar e resolver alguns problemas.

Atividade 2

1 Um *show* de música será constituído de 3 canções e 2 danças. De quantas maneiras distintas pode-se montar o programa, de forma que o *show* comece com uma canção, termine com uma canção e as duas danças não sejam uma imediatamente seguida da outra?

2 Na época de Lampião e Maria Bonita, muitas vezes, quando caminhavam pela caatinga fechada, seu bando tinha que andar em fila. Supondo que seu bando tivesse 45 pessoas (contando já com Lampião e Maria Bonita) e sabendo que quando o bando estava em fila, Lampião tinha que ir no primeiro lugar e Maria Bonita logo em seguida, quantas filas diferentes podiam ser formadas?

3 Numa boiada, sempre existe o líder (o animal dominante) e é ele quem encabeça a boiada. Se nessa boiada existem 403 animais para passar por uma porteira estreita, por onde só passa um animal por vez, de quantas formas diferentes podem esses animais atravessar?

4 Um sertanejo que se preza tem seus 3 cachorros, os quais têm sempre nomes de peixes; piaba, traíra, xaréu etc. João tem 3 cachorros e sempre que chega na porteira de casa, seus cachorros correm para lhe receber. Ele observou que nessa corrida de recepção nunca havia empate e que pela igualdade das condições físicas dos cachorros, eles sempre chegavam em uma formação diferente. Quantas maneiras de chegada podem existir?

5 Um sertanejo fez cinco leirões (canteiros) para plantar milho, feijão, alface, tomate e cenoura. De quantos modos diferentes ele pode organizar sua plantação, na qual plantará uma cultura em cada leirão?

6 Numa feira livre, um agricultor trouxe 10 produtos para vender. Ele quer organizar sua banca da seguinte maneira:

na qual em cada espaço ele pretende colocar um produto. De quantas maneiras diferentes ele pode montar sua banca?

7 No exemplo 7 desta aula, se além dos delegados do Brasil e de Portugal sempre sentarem juntos, os delegados do Iraque e dos Estados Unidos não puderem sentar juntos, de quantas maneiras diferentes podemos montar essa fila?

Resumo

O fatorial de um número inteiro positivo n é denotado por $n!$ e representa o produto de todos os inteiros de 1 até n. Ele aparece naturalmente em vários tópicos da Matemática e melhora a notação, pois evita escrever números de até 140 Km ou mais. A permutação simples é uma técnica de contagem aplicada a problemas que envolvam a organização de objetos numa mesma quantidade de gavetas sem que nenhuma delas fique vazia.

Autoavaliação

1. Tente escrever com suas palavras como explicar para alguém que a quantidade de maneiras distintas de organizar n objetos em n gavetas, em que cada uma tenha exatamente 1 objeto, é $n!$.

2. Calcule o fatorial de 10,11,12,13,14 e 15. Você acha melhor trabalhar com os números encontrados ou com as expressões 10!, 11!, 12!, 13!, 14! e 15!?

Referências

TAHAN, M. **Matemática divertida e curiosa**. 8. ed. São Paulo: Editora Record, 1997.

TEIXEIRA, Paulo Jorge M. Problemas de geometria em análise combinatória. IN: **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**: oficina. Salvador: SMB, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/of10.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2006.

Anotações

Combinações e arranjos

Aula

3

Apresentação

Na aula 2 (Permutações simples), aprendemos que permutações simples nada mais é do que uma técnica de contagem que, basicamente, resolve o problema: de quantas maneiras podemos alocar n objetos em n lugares? Nesta aula, aprenderemos duas novas técnicas de contagem: a combinação e o arranjo, que são utilizadas para resolver o seguinte problema: de quantas maneiras podemos alocar p objetos em n lugares, sendo $p<n$?

Objetivos

Ao final desta aula, esperamos que você possa:

1. identificar se um dado problema deve ser resolvido usando combinação ou se deve ser resolvido usando arranjo;
2. saber a diferença entre arranjo e permutação, e poder decidir se determinada questão está bem formulada ou não.

Contextualização

Você percebe alguma diferença entre as questões 1 e 2 a seguir? Será que o problema proposto nelas é o mesmo?

1. De quantas maneiras podemos formar dentre 4 pessoas um grupo de 3?

2. De quantas maneiras podemos formar dentre 4 pessoas um grupo de 3 para preencherem os cargos de presidente, de vice-presidente e de contador de uma empresa?

Antes de prosseguir a leitura, analise cada problema e tente formular uma defesa que exprima seu ponto de vista.

Suponhamos que os nomes das pessoas envolvidas sejam A, B, C e D.

Respondendo à primeira pergunta, podemos formar os seguintes grupos:

A, B, C	A, C, D
A, B, D	B, C, D

Ou seja, podemos formar 4 grupos com 3 pessoas.

Para respondermos à segunda pergunta, podemos imaginar que as pessoas de cada grupo formado na resposta da primeira pergunta irão disputar, entre elas, as posições de presidente, vice-presidente e contador da empresa. Ou seja, no caso da segunda, devemos tomar duas decisões, quais sejam:

Decisão d_1: escolher o grupo formado por 3 pessoas, para a qual, pela resposta da pergunta 1, temos $x_1 = 4$ possibilidades.

Decisão d_2: escolher qual o cargo que cada pessoa do grupo irá ocupar.

Dado, por exemplo, o grupo A, B, C, temos as seguintes possibilidades na distribuição dos cargos:

presidente	vice-presidente	contador
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

É importante observarmos que essas posições fazem diferença. A escolha B, A, C, por exemplo, é diferente da C, A, B.

Escolhido, então, o grupo, temos 3 pessoas para ocuparem 3 lugares (cargos), ou seja, um problema de permutação simples, portanto $x_2 = 3!$ possibilidades de escolha.

Assim, pelo **princípio multiplicativo**, existem $x_1 \times x_2 = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$ maneiras de escolhermos 3 pessoas para preencherem os cargos de presidente, vice-presidente e contador de uma empresa, dentre um grupo de 4 pessoas.

O que estamos tentando ilustrar é que em algumas situações, os mesmos elementos estando em ordens diferentes representam resultados diferentes, já em outras, representam o mesmo resultado. Vejamos o próximo exemplo.

Suponha que três pessoas estão jogando um dado e, por sua vez, estão interessadas na soma dos resultados. Então, os resultados das jogadas

1º jogador	2º jogador	3º jogador
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

expressam o mesmo valor e podem ser considerados como o mesmo resultado, ou seja, o de que um deles tirou 1, o outro 2 e o terceiro 3, independentemente de qual deles tirou qual. Entretanto, se eles estão disputando para ver quem tira o número maior em cada jogada, esses resultados, certamente, serão diferentes, uma vez que

3, 1, 2 – ganhou o 1º jogador	1, 3, 2 – ganhou o 2º jogador	1, 2, 3 – ganhou o 3º jogador
3, 2, 1 – ganhou o 1º jogador	2, 3, 1 – ganhou o 2º jogador	2, 1, 3 – ganhou o 3º jogador

Ou seja, os mesmos resultados têm interpretações diferentes dependendo do problema que queremos resolver.

Combinações simples

Queremos responder à seguinte questão: de quantos modos podemos escolher p objetos entre n objetos distintos dados?

Podemos ver essa questão de outra maneira: quantos subconjuntos distintos de p elementos podemos obter de um conjunto de n elementos distintos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$?

Cada subconjunto de p elementos é chamado de **combinação simples de classe** p dos n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Exemplo 1

Ache todas as combinações simples de classe 2 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4.

Seria natural pensarmos da seguinte maneira:

Decisão d_1: escolher o primeiro elemento, para a qual temos $x_1 = 4$ possibilidades.

Decisão d_2: escolher o segundo elemento, para a qual temos $x_2 = 4 - 1 = 3$ possibilidades (todos os elementos menos o escolhido na decisão 1).

Temos assim, pelo **princípio multiplicativo**, $x_1 \times x_2 = 4 \times 3 = 12$ possibilidades de tomarmos as decisões d_1 e d_2. No entanto, quando fazemos uso desse princípio, contamos os subconjuntos $\{a_1, a_2\}$ e $\{a_2, a_1\}$ como sendo conjuntos distintos, o que não é verdade, pois **não estamos interessados na ordem** (quem é o primeiro e quem é o segundo) em que esses elementos aparecem no conjunto.

Ilustremos o que calcula o **princípio multiplicativo**.

$$\{a_1, a_2\}\{a_1, a_3\}\{a_1, a_4\}$$
$$\{a_2, a_1\}\{a_2, a_3\}\{a_2, a_4\}$$
$$\{a_3, a_1\}\{a_3, a_2\}\{a_3, a_4\}$$
$$\{a_4, a_1\}\{a_4, a_2\}\{a_4, a_3\}$$

Ou seja, cada dupla de elementos foi contada 2 vezes (todas as possibilidades de ordenar 2 elementos), ao invés de apenas 1 vez.

Dessa forma, o número que encontramos é na verdade 2 vezes o número real de possibilidades. Assim, podemos chegar ao resultado correto dividindo o que encontramos por 2:

número de possibilidades $= \dfrac{x_1 \times x_2}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6.$

Exemplo 2

Ache todas as combinações simples de classe 3 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
Pensando em forma de decisões, temos:

Decisão d_1: escolher o primeiro elemento para o qual temos $x_1 = 5$ possibilidades.

Decisão d_2: escolher o segundo elemento para o qual temos $x_2 = 5 - 1 = 4$ possibilidades.

Decisão d_3: escolher o terceiro elemento para o qual temos $x_3 = 4 - 1 = 3$ possibilidades.

Temos, assim, pelo **princípio multiplicativo**, $x_1 \times x_2 \times x_3 = 5 \times 4 \times 3$ maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2 e d_3.

Ilustremos o que calcula o princípio multiplicativo.

$\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_2, a_5\}, \{a_1, a_3, a_2\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_5\}, \{a_1, a_4, a_2\},$
$\{a_1, a_4, a_3\}, \{a_1, a_4, a_5\}, \{a_1, a_5, a_2\}, \{a_1, a_5, a_3\}, \{a_1, a_5, a_4\}$
$\{a_2, a_1, a_3\}, \{a_2, a_1, a_4\}, \{a_2, a_1, a_5\}, \{a_2, a_3, a_1\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_5\}, \{a_2, a_4, a_1\},$
$\{a_2, a_4, a_3\}, \{a_2, a_4, a_5\}, \{a_2, a_5, a_1\}, \{a_2, a_5, a_3\}, \{a_2, a_5, a_4\}$
$\{a_3, a_1, a_2\}, \{a_3, a_1, a_4\}, \{a_3, a_1, a_5\}, \{a_3, a_2, a_1\}, \{a_3, a_2, a_4\}, \{a_3, a_2, a_5\}, \{a_3, a_4, a_1\},$
$\{a_3, a_4, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}, \{a_3, a_5, a_1\}, \{a_3, a_5, a_2\}, \{a_3, a_5, a_4\}$
$\{a_4, a_1, a_2\}, \{a_4, a_1, a_3\}, \{a_4, a_1, a_5\}, \{a_4, a_2, a_1\}, \{a_4, a_2, a_3\}, \{a_4, a_2, a_5\}, \{a_4, a_3, a_1\},$
$\{a_4, a_3, a_2\}, \{a_4, a_3, a_5\}, \{a_4, a_5, a_1\}, \{a_4, a_5, a_2\}, \{a_4, a_5, a_3\}$
$\{a_5, a_1, a_2\}, \{a_5, a_1, a_3\}, \{a_5, a_1, a_4\}, \{a_5, a_2, a_1\}, \{a_5, a_2, a_3\}, \{a_5, a_2, a_4\}, \{a_5, a_3, a_1\},$
$\{a_5, a_3, a_2\}, \{a_5, a_3, a_4\}, \{a_5, a_4, a_1\}, \{a_5, a_4, a_2\}, \{a_5, a_4, a_3\}$

Nele, os subconjuntos $\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_3, a_2\}, \{a_2, a_1, a_3\}, \{a_2, a_3, a_1\}, \{a_3, a_1, a_2\}$ $\{a_3, a_2, a_1\}$ foram contados como sendo conjuntos distintos.

Ou seja, para cada tripla de elementos, contamos 6 (=3!) vezes (todas as possibilidades de ordenar 3 elementos), ao invés de apenas 1 vez.

Dessa forma, o número que encontramos é na verdade 6 vezes o número real de possibilidades. Assim, podemos chegar ao resultado correto dividimos o que encontramos por 6 (ou 3!).

$$\text{Número de possibilidades} = \frac{x_1 \times x_2 \times x_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10.$$

Repetindo esse procedimento para conjuntos quaisquer com n elementos e contando as classes de ordem p, chegaremos a:

$$\begin{aligned} \text{Número de possibilidades} &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))}{p!} = \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}. \end{aligned}$$

Exemplo 3

No cardápio de uma festa, existem dez tipos diferentes de salgadinhos, dos quais apenas quatro são servidos quentes. O garçom deverá montar as bandejas com apenas dois tipos diferentes de salgadinhos frios e dois tipos diferentes de salgadinhos quentes. De quantos modos diferentes o garçom pode montar as bandejas?

Solução

Dos 10 salgadinhos, temos 4 quentes e 6 frios. Ou seja, o conjunto dos salgadinhos frios tem 6 elementos e o conjunto dos salgadinhos quentes tem 4 elementos e o garçom tem duas decisões a tomar:

Decisão d_1: selecionar 2 tipos de salgadinhos frios dentre os 6 possíveis.

Decisão d_2: selecionar 2 tipos de salgadinhos quentes dentre os 4 possíveis.

Descobrir de quantas maneiras ele pode tomar a decisão d_1 significa descobrir quantos subconjuntos distintos de 2 elementos podemos formar a partir de um conjunto com 6 elementos, ou seja,

$x_1 = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$ com $n = 6$ e $p = 2$, o que nos leva a

$$x_1 = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{6 \times (6-2+1)}{2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Já para a decisão d_2, significa descobrir quantos subconjuntos distintos de 2 elementos podemos formar a partir de um conjunto com 4 elementos, ou seja,

$x_2 = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$ agora com $n = 4$ e $p = 2$, o que nos leva a

$$x_2 = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{4 \times (4-2+1)}{2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Portanto, o garçom pode montar as bandejas de $x_1 \times x_2 = 15 \times 6 = 90$ maneiras diferentes.

Podemos reescrever a expressão $\dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))}{p!}$ usando apenas fatorial, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))}{p!} &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))}{p!} \times \frac{(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \end{aligned}$$

Como essa fórmula determina o número de subconjuntos de p elementos de um conjunto de n elementos, e como cada subconjunto é chamado de combinação simples de classe p dos n objetos, denotaremos essa fórmula por

$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, na qual devemos lembrar que $0 \leq p \leq n$, já que estamos tomando subconjuntos de p elementos de um conjunto de n elementos.

Observação: para $p = 0$, consideramos $C_n^p = 1$, pois existe o conjunto vazio! O que nos força a definir $0! = 1 \left(\dfrac{n!}{0!n!} = 1 \right)$.

Outras notações encontradas para C_n^p são $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ e $C_{n,p}$, as quais são lidas como **combinação de** n **tomada** p **a** p.

Exemplo 4

Num hospital, há 3 vagas para trabalhar no berçário, 5 vagas, no banco de sangue e 2 vagas, na radioterapia. Se 6 pessoas se candidatarem para o berçário, 8, para o banco de sangue e 5, para a radioterapia, de quantas formas distintas essas vagas poderão ser preenchidas?

Solução

Temos 3 decisões a tomar:

Decisão d_1: escolher 3 pessoas para trabalhar no berçário dentre os 6 candidatos.

Decisão d_2: escolher 5 pessoas para trabalhar no banco de sangue dentre os 8 candidatos.

Decisão d_3: escolher 2 pessoas para trabalhar na radioterapia dentre os 5 candidatos.

Descobrir de quantas maneiras podemos tomar a decisão d_1 significa encontrar o número de subconjuntos com 3 elementos que podemos obter dentre um conjunto de 6 elementos, ou seja,

$$x_1 = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20.$$

Para a decisão d_2, queremos saber quantos subconjuntos de 5 elementos podemos obter de um conjunto de 8 elementos, ou seja,

$$x_2 = C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!3!} = 56.$$

Finalmente, para a decisão d_3, queremos saber quantos subconjuntos de 2 elementos podemos obter de um conjunto de 5 elementos, ou seja,

$$x_3 = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = 10.$$

Portanto, pelo **princípio multiplicativo**, temos $x_1 \times x_2 \times x_3 = 20 \times 56 \times 10 = 11200$ formas distintas de preencher essas vagas.

Exemplo 5

Quantos subconjuntos de 5 cartas contendo exatamente 3 ases podem ser formados com um baralho de 52 cartas?

Solução

Em um baralho de 52 cartas, temos 4 ases. Como estamos interessados apenas nos subconjuntos que podemos obter com 3 ases, podemos então pensar que temos 2 decisões a tomar:

Decisão d_1: escolher 3 ases dentre os 4 existentes.

Decisão d_2: escolher 2 cartas dentre aquelas que não são ases, neste caso, nas 48 restantes.

Para escolhermos 3 ases entre os 4 possíveis, temos $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{4!}{3!} = \dfrac{4 \times 3!}{3!} = 4$ possibilidades.

Escolhidos os 3 ases, precisamos escolher as 2 outras cartas das 48 restantes. Assim, temos

$C_{48}^2 = \dfrac{48!}{2!(48-2)!} = \dfrac{48!}{2! \times 46!} = \dfrac{48 \times 47 \times 46!}{2! \times 46!} = 1128$ possibilidades.

Portanto, temos $4 \times 1128 = 4512$ subconjuntos de 5 cartas contendo exatamente 3 ases.

Às vezes, fica mais prático deixarmos o resultado em termos literais, nos utilizando da notação de combinação, ou seja, o resultado anterior ficaria bem conciso se tivéssemos escrito $C_4^3 \times C_{48}^2$.

Arranjo

Vamos agora analisar a seguinte situação.

Em uma corrida, estão competindo 10 pilotos, na qual apenas os três primeiros comparecem ao *podium*. Então, pergunta-se: de quantas maneiras diferentes o *podium* pode ser montado?

Note que temos 3 decisões a tomar:

Decisão d_1: escolher dentre os 10 competidores o que ocupará o primeiro lugar no *podium*.

Decisão d_2: escolher dentre os 9 competidores restantes, já que o primeiro lugar foi ocupado, aquele que ocupará o segundo lugar do *podium*.

Decisão d_3: escolher dentre os 8 competidores restantes, já que o primeiro e o segundo lugar foram ocupados, aquele que ocupará o terceiro lugar no *podium*.

Pelo **princípio multiplicativo**, temos que isso pode ser feito de $10 \times 9 \times 8 = 720$ maneiras distintas.

Suponhamos que os competidores sejam A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Note que, quando usamos o **princípio multiplicativo**, as composições

A, B, C

A, C, B

B, A, C

B, C, A

C, A, B

C, B, A

são consideradas respostas diferentes, pois estamos contando cada uma delas. E, nesse exemplo, isso deve ser feito, já que estamos interessados na ordem em que os elementos aparecem. Por exemplo, A chegar em primeiro, B em segundo e C em terceiro é diferente de A chegar em primeiro, C em segundo e B em terceiro.

Vimos que para encontrar todas as combinações simples de classe 2 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4, o **princípio multiplicativo** listou os seguintes conjuntos:

$$\begin{gathered}
\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\} \\
\{a_2, a_1\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\} \\
\{a_3, a_1\}, \{a_3, a_2\}, \{a_3, a_4\} \\
\{a_4, a_1\}, \{a_4, a_2\}, \{a_4, a_3\}
\end{gathered}$$

Porém, no caso da combinação, cada subconjunto se repetia 2 vezes, já que não estávamos interessados na ordem em que os elementos apareciam no conjunto, e assim dividimos o número total de subconjuntos por 2. Entretanto, se considerarmos que a resposta $\{a_1, a_2\}$ **é diferente** da resposta $\{a_2, a_1\}$, teremos, então, pelo princípio multiplicativo, $4 \times 3 = 12$ conjuntos.

Para encontrarmos todas as combinações simples de classe 3 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, listamos os subconjuntos:

$\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_2, a_5\}, \{a_1, a_3, a_2\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_5\}, \{a_1, a_4, a_2\}$, $\{a_1, a_4, a_3\}, \{a_1, a_4, a_5\}, \{a_1, a_5, a_2\}, \{a_1, a_5, a_3\}, \{a_1, a_5, a_4\}$

$\{a_2, a_1, a_3\}, \{a_2, a_1, a_4\}, \{a_2, a_1, a_5\}, \{a_2, a_3, a_1\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_5\}, \{a_2, a_4, a_1\}$, $\{a_2, a_4, a_3\}, \{a_2, a_4, a_5\}, \{a_2, a_5, a_1\}, \{a_2, a_5, a_3\}, \{a_2, a_5, a_4\}$

$\{a_3, a_1, a_2\}, \{a_3, a_1, a_4\}, \{a_3, a_1, a_5\}, \{a_3, a_2, a_1\}, \{a_3, a_2, a_4\}, \{a_3, a_2, a_5\}, \{a_3, a_4, a_1\}$, $\{a_3, a_4, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}, \{a_3, a_5, a_1\}, \{a_3, a_5, a_2\}, \{a_3, a_5, a_4\}$

$\{a_4, a_1, a_2\}, \{a_4, a_1, a_3\}, \{a_4, a_1, a_5\}, \{a_4, a_2, a_1\}, \{a_4, a_2, a_3\}, \{a_4, a_2, a_5\}, \{a_4, a_3, a_1\}$, $\{a_4, a_3, a_2\}, \{a_4, a_3, a_5\}, \{a_4, a_5, a_1\}, \{a_4, a_5, a_2\}, \{a_4, a_5, a_3\}$

$\{a_5, a_1, a_2\}, \{a_5, a_1, a_3\}, \{a_5, a_1, a_4\}, \{a_5, a_2, a_1\}, \{a_5, a_2, a_3\}, \{a_5, a_2, a_4\}, \{a_5, a_3, a_1\}$, $\{a_5, a_3, a_2\}, \{a_5, a_3, a_4\}, \{a_5, a_4, a_1\}, \{a_5, a_4, a_2\}, \{a_5, a_4, a_3\}$

e dividimos o número de subconjuntos encontrados por 3! (número de subconjuntos que possuem os mesmos 3 elementos), já que a ordem dos elementos em cada subconjunto não importava. Entretanto, agora cada subconjunto com os mesmos 3 elementos representa uma resposta diferente, pois estamos interessados na ordem em que os elementos aparecem, e portanto devem ser contados, ou seja, temos $5 \times 4 \times 3$ subconjuntos.

De forma geral, se temos n elementos e queremos considerar p desses elementos levando em consideração a ordem em que eles aparecem, teremos a mesma escolha inicial que a combinação, com a diferença de que não precisaremos dividir por $p!$, ou seja,
número de possibilidades $= n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1)) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.

E um exercício de fatorial transforma a fórmula $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))$ em uma expressão envolvendo apenas fatorial:

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1)) \times \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Essa fórmula determina o número de arranjos possíveis quando escolhemos de todas as formas possíveis p elementos de um conjunto de n elementos, levando em consideração que a alteração da ordem dos elementos implica um arranjo diferente do anterior. Muitos livros denotam essa fórmula por

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, na qual temos que lembrar que $0 \leq p \leq n$, já que estamos tomando subconjuntos de p elementos de um conjunto de n elementos.

Outra notação encontrada para A_n^p é $A_{n,p}$ e lemos: **arranjos de** n **tomado** p **a** p.

Exemplo 6

A senha de uma conta bancária é formada de 6 números ou de 4 números dentre os números de 0 a 9, dependendo do banco. Os gerentes sempre aconselham não utilizar todos os números iguais.

a) Quantas senhas podem ser formadas no banco que utiliza 6 números, se a pessoa segue o conselho do gerente e escolhe todos os algarismos diferentes?

Note que a senha 123456 é diferente da senha 123465, ou seja, embora constituída pelos mesmos algarismos, a ordem as torna diferentes. Dessa maneira, temos que a quantidade de senhas distintas que podemos formar utilizando 6 dígitos distintos é:

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200.$$

b) Quantas senhas podem ser formadas no banco que utiliza 4 números, se a pessoa segue o conselho do gerente e escolhe todos os algarismos diferentes?

Utilizando o mesmo procedimento anterior, verificamos que o número de senhas distintas que podemos formar utilizando 4 dígitos distintos é dado por:

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Exemplo 7

Na corrida de São Silvestre em São Paulo, largam na equipe de elite uma média de 100 corredores. Suponha que todos eles sejam iguais tecnicamente e que é impossível um corredor que não seja da equipe de elite passar por algum deles. Sabendo que o *podium* tem lugar para os 6 primeiros, de quantos maneiras diferentes podemos montar esse *podium*, caso

a) todos os 100 da equipe de elite terminem a prova.

b) apenas 50 dos corredores de elite terminem a prova.

c) apenas 20 dos corredores de elite terminem a prova.

Ora, sabendo que o *podium* só vai ser composto pelos corredores de elite, já que nenhum corredor do pelotão normal consegue passar por nenhum deles e que, alterando a ordem dos premiados, o *podium* muda, temos então

a) $A_{100}^{6} = \frac{100!}{(100-6)!} = \frac{100!}{94!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95 \times 94!}{94!} =$

$100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95 = 858377728000$ possibilidades.

b) $A_{50}^{6} = \frac{50!}{(50-6)!} = \frac{50!}{44!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44!}{44!} =$

$50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 = 11441304000$ possibilidades.

c) $A_{20}^{6} = \frac{20!}{(20-6)!} = \frac{20!}{14!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14!}{14!} =$

$20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 = 27902700$ possibilidades.

Atividade 1

1 Um sertanejo, com família grande, resolveu que a cada dia ele mataria 3 galinhas para o almoço. Se ele possui 200 galinhas, de quantas maneiras diferentes ele pode escolher 3 galinhas para o almoço do 1º dia? E do 2º? E do 10º?

2 O mesmo sertanejo da questão anterior possui 10 vacas, mas ele percebeu que o leite de 4 delas é o suficiente para o consumo do dia, incluindo o leite para o queijo, manteiga e consumo das crianças. De quantos modos ele pode fazer a escolha de quais vacas ordenhar a cada dia? E se no dia seguinte ele não quiser utilizar as vacas que foram ordenhadas no dia anterior a fim de oferecer-lhes um descanso?

3 Um partido político recém-criado possui 10 participantes de renome nacional. Deseja-se montar uma chapa com os cargos de presidente, vice-presidente, senador, deputado federal e deputado estadual. De quantas maneiras isso pode ser feito?

4 Na corrida de jegue de Campina Grande realizada no mês de junho, são premiados apenas os três primeiros lugares. A estimativa para o ano que vem é de 20 participantes. Admitindo que os jegues estão equilibrados em termos físicos, de quantos modos diferentes podem ser preenchidos os três primeiros lugares?

Resumo

Nesta aula, estudamos que, dado um conjunto de n elementos, o número de subconjuntos distintos com p elementos que podemos obter é o que chamamos de combinação de n tomado p a p. Num conjunto, a forma em que apresentamos seus termos não importa, ou seja, se mudarmos a ordem da apresentação dos elementos, o conjunto permanecerá o mesmo. Por isso, dizemos que na combinação a ordem não importa. Também estudamos que, dado um conjunto de n elementos, o número de filas com p elementos que podemos formar utilizando p elementos dos n possíveis é o que chamamos de arranjo de n tomado p a p. Agora, fica claro que com os p elementos que escolhemos podemos formar $p!$ filas com eles, ou seja, agora a ordem dos p elementos importa.

Autoavaliação

1 Você poderia dar dois exemplos que deixem clara a diferença entre combinação e arranjo?

2 Como podemos conseguir a fórmula do arranjo de n tomado p a p a partir da fórmula da combinação de n tomada p a p?

3 Explique, utilizando o princípio multiplicativo, que o arranjo de n tomado p a p pode ser visto como duas decisões, em que a primeira delas é uma combinação de n tomado p a p e a segunda é uma permutação de p.

Referências

MORGADO, A. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2001. (Coleção professor de matemática)

TEIXEIRA, P. J. M. Problemas de geometria em análise combinatória. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2, Salvador, 2004. **Anais...** Salvador, 2004.

Anotações

Anotações

Permutação de elementos nem todos distintos

Aula

4

Apresentação

No dia-a-dia, nem sempre trabalhamos com elementos distintos, por exemplo, no nosso estojo de lápis, provavelmente, temos duas ou mais canetas iguais, ou duas borrachas iguais, dentre outros. Em uma caixa temos 10 disquetes iguais, ou seja, se trocarmos a ordem de dois deles não perceberemos nenhuma diferença na coleção (a menos que sejam de cores distintas ou estejam etiquetados). Na Química, por exemplo, H_2O significa que temos a presença de dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio e muitos outros compostos apresentam vários elementos, dentre os quais, muitos são iguais. O que estamos querendo dizer é que nem sempre trabalhamos, organizamos ou agrupamos elementos distintos, na maioria das vezes, elementos repetidos se fazem presentes.

Nesta aula, vamos apresentar uma técnica de contagem que resolve esse tipo de problema: organizar objetos **nem todos distintos**, a chamada **Permutação com Repetição**.

Objetivo

Ao finalizar esta aula, esperamos que você possa identificar e resolver problemas envolvendo permutação de elementos nem todos distintos.

Permutação com repetição

Relembrando o que aprendemos na aula 2 (Permutações Simples), vamos encontrar a quantidade de anagramas da palavra PRÁTICO.

Temos 7 decisões a tomar, são elas: selecionar as letras P, R, A, T, I, C e O para cada uma das 7 posições da palavra composta de 7 letras.

Decisão d_1: escolher uma letra dentre as 7 dadas para ocupar o 1º lugar da palavra, ou seja, $x_1 = 7$.

Decisão d_2: escolher uma letra dentre as 6 restantes para ocupar o 2º lugar da palavra, ou seja, $x_2 = 6$.

Decisão d_3: escolher uma letra dentre as 5 restantes para ocupar o 3º lugar da palavra, ou seja, $x_3 = 5$.

Decisão d_4: escolher uma letra dentre as 4 restantes para ocupar o 4º lugar da palavra, ou seja, $x_4 = 4$.

Decisão d_5: escolher uma letra dentre as 3 restantes para ocupar o 5º lugar da palavra, ou seja, $x_5 = 3$.

Decisão d_6: escolher uma letra dentre as 2 restantes para ocupar o 6º lugar da palavra, ou seja, $x_6 = 2$.

Decisão d_7: colocar a letra restante no 7º e último lugar da palavra, ou seja, $x_7 = 1$.

Logo, pelo **Princípio da Multiplicação**, temos $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 \times x_7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$ anagramas distintos da palavra PRÁTICO.

Note que na palavra PRÁTICO todas as letras são distintas.

E quantos são os anagramas da palavra ANA?

Utilizando o **Princípio da Multiplicação**, como fizemos para o caso de PRÁTICO, temos três decisões a tomar.

Decisão d_1: escolha da primeira letra da formação do anagrama, ou seja, $x_1 = 3$.

Decisão d_2: escolha da segunda letra da formação do anagrama, ou seja, $x_2 = 2$.

Decisão d_3: escolha da terceira letra da formação do anagrama, ou seja, $x_3 = 1$.

Teríamos dessa forma $3! = 6$ anagramas, mas, construindo os anagramas, obtemos

AAN, ANA, NAA $= 3 \neq 3! = 6$.

O que foi que aconteceu? Por que não deu certo?

Lembremos que, quando fazemos as permutações, contamos toda e qualquer disponibilidade das letras. Ou seja, contamos ANA e ANA como sendo diferentes (a diferença do primeiro para o segundo é que trocamos os A de lugar). Mas, existe diferença entre essas duas palavras ANA? Não! Entretanto, para o **Princípio da Multiplicação**, elas são diferentes, já que a partir dele apenas se conta, não se olha nem se identifica os elementos.

E da palavra ARARA?

AAARR, AARAR, AARRA, ARARA, ARRAA, RARAA, RRAAA, ARAAR, RAARA, RAAAR

$$= 10 \neq 5! = 120.$$

Para explicar detalhadamente o que está acontecendo, enumeremos as letras da seguinte forma: como temos três A e dois R, escreveremos A_1, A_2, A_3 e R_1, R_2. Ao utilizarmos o **Princípio da Multiplicação**, contamos

$A_1A_2A_3R_1R_2$, $A_1A_3A_2R_1R_2$, $A_2A_1A_3R_1R_2$, $A_2A_3A_1R_1R_2$, $A_3A_1A_2R_1R_1$, $A_3A_2A_1R_1R_2$,

$A_1A_2A_3R_2R_1$, $A_1A_3A_2R_2R_1$, $A_2A_1A_3R_2R_1$, $A_2A_3A_1R_2R_1$, $A_3A_1A_2R_2R_1$ e $A_3A_2A_1R_2R_1$

como sendo respostas diferentes, enquanto, na verdade, são todas iguais ao anagrama AAARR. Ou seja, uma vez fixada uma ordem das letras iguais, fazendo-as permutarem entre seus lugares, não teremos mudança visual no anagrama (ele continua o mesmo), entretanto, o **Princípio da Multiplicação** conta como diferente cada permutação dessa.

No caso da ARARA, contamos $2! \times 3!$ vezes o mesmo anagrama levando em consideração a mudança de posição entre letras iguais, quando, na verdade, deveríamos ter contado apenas uma vez. O $3!$ diz respeito às permutações das 3 letras A e o $2!$ as permutações das 2 letras R. O produto decorre do **Princípio da Multiplicação**, ou seja, a primeira decisão seria de quantas formas podemos permutar os A após fixar suas posições e a segunda seria de quantas formas podemos permutar os R após também fixar suas posições. Dessa forma, para obtermos o número de anagramas que realmente podemos distinguir um do outro, devemos dividir o resultado obtido pela quantidade $2! \times 3!$. Logo, o total de anagramas da palavra ARARA é $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$, como já sabíamos.

Seguindo esse raciocínio para a palavra ANA, temos: $\frac{3!}{2!1!} = 3$ anagramas. De um modo geral, se temos uma palavra com n letras em que destas n temos p distintas nas quantidades $n_1, n_2, \ldots, n_p$, respectivamente, então, o número de anagramas diferentes com essas letras é $\frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_p!}$, e denotamos esse tipo quociente por $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_p}$.

Só relembrando, o $n!$ é o número obtido pelo **Princípio da Multiplicação**, considerando todas as permutações possíveis como diferentes. Então, fixada a posição das letras, é necessário observar quantas permutações podemos realizar entre as letras repetidas, de modo a não alterarmos o anagrama. Esse número é a quantidade de vezes que contamos cada anagrama, enquanto, na verdade, deveríamos ter contado apenas uma vez. Precisamos, então, dividir $n!$ por esse número para obtermos a quantidade de anagramas distintos quando utilizamos letras iguais.

Exemplo 1

Quantos números com seis algarismos podemos formar usando apenas os algarismos 1,1,1,1,2 e 3?

Note que, ao formarmos um número com esses algarismos, se alterarmos as posições dos 1 entre eles, não teremos diferença no número obtido, ou seja, estamos no mesmo caso de anagramas com letras repetidas em que $n_1 = 4, n_2 = 1$ e $n_3 = 1$, portanto, a quantidade de números distintos é

$$P_6^{4,1,1} = \frac{6!}{4! \times 1! \times 1!} = 30.$$

Exemplo 2

Quantos números com cinco algarismos podemos formar usando apenas os algarismos 1,1,1,1,2 e 3?

Com cinco algarismos, podemos ter quatro 1 ou três 1 em cada número. E como os números formados com três 1 são diferentes daqueles formados com quatro 1, o conjunto dos números de 5 algarismos formados com três 1 é disjunto do conjunto dos números de 5 algarismos formados com quatro 1.

Então, pelo **Princípio da Adição**, o número total é a soma da quantidade de elementos desses dois conjuntos.

Calculemos a quantidade de números formados com três 1.

Devemos formar um número de 5 algarismos, e já temos três 1, falta, então, mais dois outros algarismos diferentes do 1. Portanto, teremos obrigatoriamente o 3 e o 2 no conjunto desses algarismos, sendo a quantidade de números distintos formados com esses algarismos é

$$P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3! \times 1! \times 1!} = 20.$$

Calculemos agora a quantidade de números formados com quatro algarismos 1. Se temos quatro 1, então, para completar o total de cinco algarismos, devemos ter ou o 3 ou o 2 no conjunto desses algarismos. Note também que o conjunto de números com quatro 1 e um 3 é disjunto do conjunto de números formado com quatro 1 e um dois. Usando o 2, obtemos

$$P_5^{4,1} = \frac{5!}{4! \times 1!} = 5 \text{ números.}$$

De maneira análoga, usando o 3, obtemos

$$P_5^{4,1} = \frac{5!}{4! \times 1!} = 5 \text{ números.}$$

Assim, pelo **Princípio Aditivo**, a quantidade de números distintos formados com quatro algarismos 1 é

$$P_5^{4,1} + P_5^{4,1} = 5 + 5 = 10.$$

E concluímos, dessa forma, que a quantidade de números com cinco algarismos formados utilizando-se apenas 1, 1, 1, 1, 2 e 3 é: $20 + (5 + 5) = 30$.

Note que **coincidência**: a quantidade obtida (30) é a mesma obtida no exemplo anterior, no qual estávamos interessados em formar números com seis algarismos utilizando quatro 1, um 2 e um 3.

É hora de você praticar.

Atividade 1

1 Uma rendeira trabalha fazendo toalhas de mesa. Sua obra consiste em “rendar” 4 faixas e, em seguida, juntá-las por meio de costura. Ela dispõe de linhas de 4 cores distintas: azul, amarelo, verde e branco e utiliza apenas uma das cores para rendar cada faixa.

a) Fixadas duas cores, por exemplo, verde e amarelo, pergunta-se:

– quantos modelos diferentes de toalhas ela pode montar com 3 faixas verdes e 1 amarela?

– quantos modelos diferentes de toalhas ela pode montar com 2 faixas verdes e 2 amarelas?

– quantos modelos diferentes de toalhas ela pode montar com 1 faixa verde e 3 amarelas?

– quantos modelos diferentes de toalhas ela pode montar com 4 faixas verdes?

– quantos modelos diferentes de toalhas ela pode montar com 4 faixas amarelas?

– quantos modelos diferentes de toalhas ela pode montar com as cores verde e amarelo?

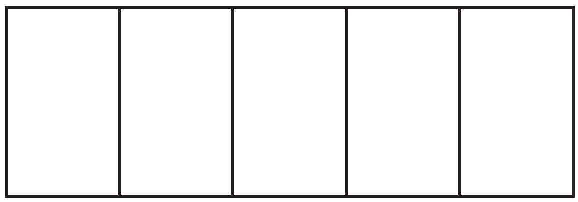
b) Quantos modelos diferentes de toalhas ela pode fazer utilizando 2 cores, em que de uma delas deve haver três faixas e da outra deve haver apenas uma faixa?

c) Quantos modelos de toalhas distintas ela pode fazer utilizando 3 cores, ou seja, duas faixas deve ter a mesma cor e as outras devem ser de cores distintas?

d) Quantos modelos de toalhas distintas podem ser feitos utilizando 2 cores em que de cada uma delas deve haver duas faixas?

e) Quantos modelos de toalhas distintas ela pode fazer utilizando uma faixa de cada cor?

2 O dono de um *self-service*, sabendo que sua freguesia tem preferência pelo seu prato especial, a famosa “fava temperada”, decidiu disponibilizá-la em dois lugares da sua mesa de pratos quentes. Tendo em vista que a mesa do seu restaurante é do formato abaixo e que existem 5 pratos quentes, sendo um deles a fava, pergunta-se:



a) de quantos modos ele pode arrumar sua mesa de pratos quentes com dois espaços para a fava e três para outros pratos distintos?

b) de quantas maneiras ele pode fazer essa arrumação se desejar colocar também dois espaços para o arroz?

3 Um grupo de 11 pessoas era composto de: quadrigêmeos europeus, trigêmeos africanos, um par de gêmeos asiáticos e um par de gêmeos americanos. E, para variar, os de mesma nacionalidade usavam roupas idênticas. Se fôssemos fotografá-los para mostrar a alguém que não conhece nenhuma dessas pessoas, quantas fotos poderiam ser consideradas diferentes?

Resumo

Quando trabalhamos com elementos em que existem elementos indistinguíveis, se mudamos sua posição, não percebemos diferença, por isso, não contamos tal mudança como uma forma diferente de apresentação. Para calcular a permutação de elementos nem todos distintos, devemos dividir o resultado de todas as permutações possíveis pela quantidade de permutações que podemos fazer sem alterar uma dada configuração.

Autoavaliação

1. Como você explicaria a um colega a diferença entre permutação e permutação com elementos nem todos distintos?

2. Dê três exemplos que diferencie o uso da permutação e o da permutação com elementos nem todos distintos.

Referência

MORGADO, A. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2001 (Coleção professor de matemática).

Princípio da Inclusão-Exclusão

Aula

5

Apresentação

Sabemos que, quando dois conjuntos são disjuntos, a quantidade de elementos da união é a soma das quantidades de elementos de cada um dos conjuntos. Uma questão que já foi respondida na aula 1 (Aprendendo a contar) é que, se os conjuntos não são disjuntos, então, a soma da quantidade de elementos de cada conjunto é maior que a quantidade de elementos presentes na união. Nesta aula, vamos mostrar como se relacionam os elementos presentes na união de uma coleção de conjuntos com os elementos presentes em cada um dos conjuntos da coleção considerada.

Objetivo

Ao final desta aula, esperamos que você seja capaz de contar a quantidade de elementos presentes na união, não necessariamente disjunta, de um número finito de conjuntos e modelar problemas que possam ser resolvidos pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

Princípio da Inclusão-Exclusão

Observe a seguinte figura.

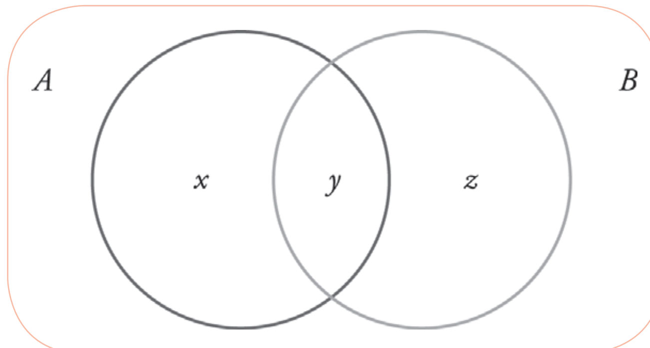


Figura 1

Na Figura 1, x, y e z representam a quantidade de elementos de cada parte dos conjuntos Sendo assim, a quantidade de elementos de A é $x + y$, a quantidade de elementos de B é $y + z$, a quantidade de elementos de $A \cap B$ é y e a quantidade de elementos de $A \cup B$ é $x + y + z$, ou seja,

$$\#(A \cup B) = x + y + z. \tag{1}$$

Suponha que pudéssemos recortar esses conjuntos com o objetivo de estudá-los separadamente, conforme a Figura 2.

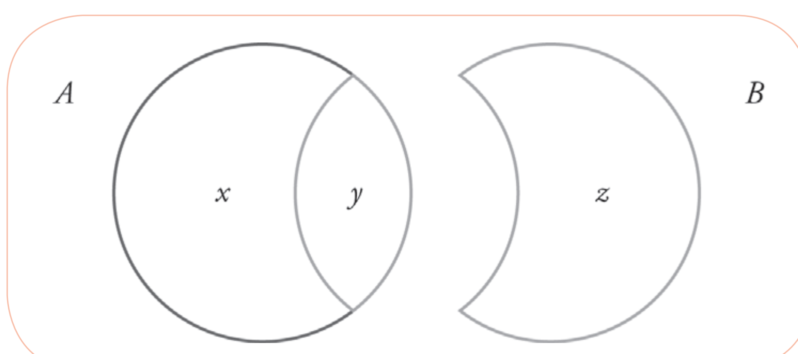


Figura 2

Note agora que o conjunto da direita não é mais B. Para obtermos o conjunto B, devemos acrescentar o pedaço com y elementos.

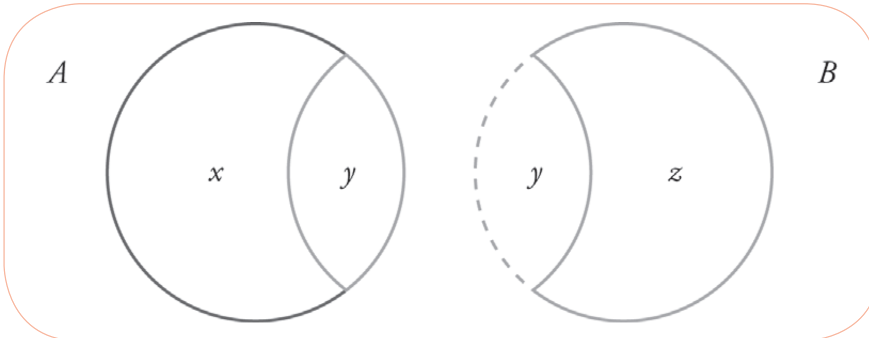


Figura 3

Para fazermos isso na expressão (1), devemos (já que estamos somando o valor positivo y a um dos lados da equação) retirar no mesmo instante a quantidade y, ou seja,

$$\#(A \cup B) = x + y + z + (+y - y),$$

da qual obtemos

$$\boldsymbol{\#(A \cup B) = (x + y) + (z + y) - y = \#A + \#B - \#(A \cap B)} \quad \textbf{(2)}$$

Observações

i) Quando os conjuntos A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, temos que $\#(A \cap B) = 0$ e a expressão (2) torna-se

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

ii) Agora, se os conjuntos A e B não são disjuntos, ou seja, $A \cap B \neq \varnothing$, temos que $\#(A \cap B) > 0$ e, a partir da expressão (2), obtemos

$$\#(A \cup B) < \#A + \#B.$$

Considere agora 3 conjuntos que se interceptam como mostra a Figura 4.

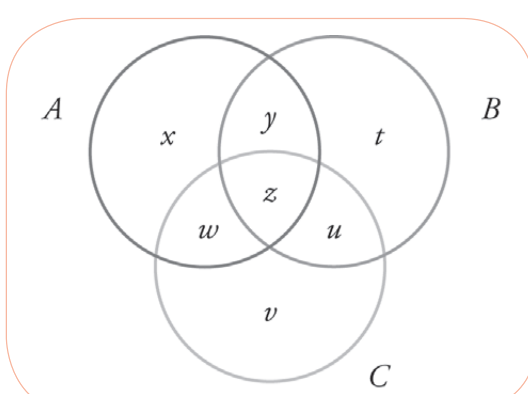


Figura 4

Temos, então, que o conjunto A possui $x+y+z+w$ elementos, B possui $y+z+t+u$ elementos, C possui $w+z+u+v$ elementos, $A\cap B$ possui $y+z$ elementos, $B\cap C$ possui $z+u$ elementos, $A\cap C$ possui $w+z$ elementos, $A\cap B\cap C$ possui z elementos e, finalmente, o conjunto $A\cup B\cup C$ possui $x+y+z+w+t+u+v$ elementos, ou seja,

$$\#(A\cup B\cup C) = x+y+z+w+t+u+v. \qquad \textbf{(3)}$$

Fazendo a mesma decomposição realizada quando tínhamos 2 conjuntos, obtemos

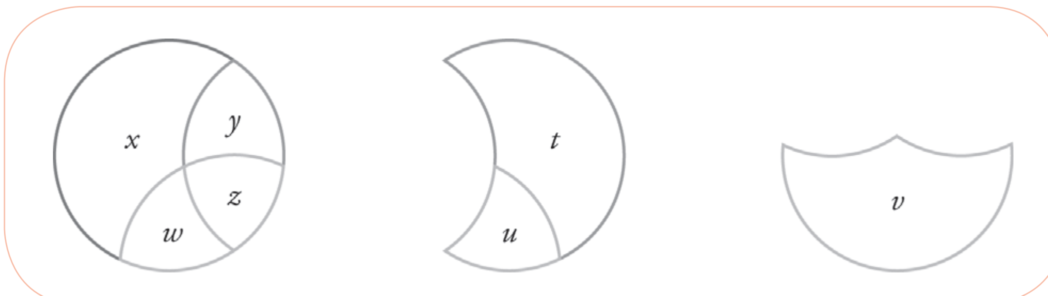


Figura 5

A partir dos conjuntos obtidos na Figura 5, reconstruímos, na Figura 6, o conjunto B:

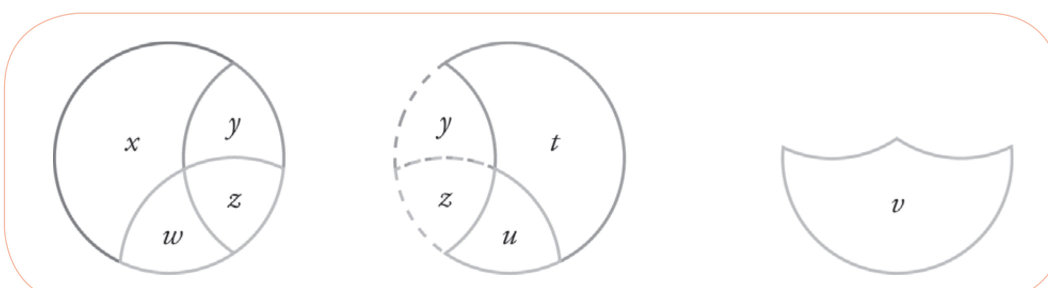


Figura 6

E, com o objetivo de não alterarmos a equação 3, somamos e subtraímos a mesma quantidade $y+z$, ou seja,

$$\#(A\cup B\cup C) = x+y+z+w+t+u+v+(y+z)-(y+z) \qquad \textbf{(4)}$$

E na Figura 7 reconstruímos o conjunto C:

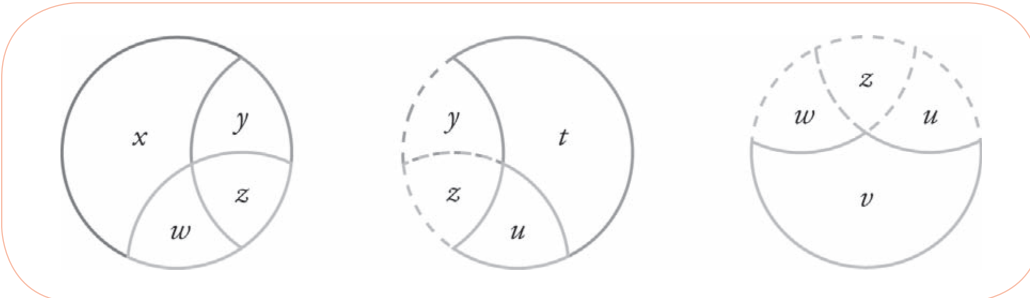


Figura 7

E a equação 4 torna-se

$$\begin{aligned}\#(A\cup B\cup C) = \;& x+y+z+w+t+u+v+(y+z)-(y+z)+\\ & (w+z+u)-(w+z+u)\end{aligned} \tag{5}$$

Com o objetivo de escrevermos a equação 5 apenas com números relacionados às interseções $A\cap B, B\cap C, A\cap C$ e $A\cap B\cap C$, escrevemos

$$\begin{aligned}\#(A\cup B\cup C) = \;& x+y+z+w+t+u+v+(y+z)-(y+z)+\\ & (w+z+u)-(w+z)-u\end{aligned} \tag{6}$$

Note, entretanto, que o número u não representa a quantidade de elementos de nenhuma das interseções conhecidas. Mas, acrescentando e retirando a quantidade z (número de elementos de $A\cap B\cap C$), podemos reescrever 6 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\#(A\cup B\cup C) = \;& x+y+z+w+t+u+v+(y+z)-(y+z)+\\ & (w+z+u)-(w+z)-(z+u)+z.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\#(A\cup B\cup C) = \;& \#A+\#B+\#C-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\\ & \#(B\cap C)+\#(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

Essa igualdade é conhecida como o **Princípio da Inclusão-Exclusão** para 3 conjuntos.

Espero que você tenha notado como está sendo construída essa seqüência do lado direito da igualdade anterior. Caso não tenha notado, volte à expressão do **Princípio da Inclusão-Exclusão** para 2 e 3 conjuntos. Observe atentamente: primeiro **somou-se** o número dos elementos dos conjuntos isoladamente ($\#A, \#B, \ldots$); depois **subtraiu-se** o número de elementos de todas as interseções envolvendo dois conjuntos $(\#(A \cap B), \#(A \cap C), \ldots)$ (no caso de dois conjuntos, paramos aqui); e, em seguida, **somou-se** o número de elementos de todas as interseções envolvendo três conjuntos $(\#(A \cap B \cap C), \ldots)$ (no caso de três conjuntos, encerramos aqui). Seguindo essa idéia, poderíamos pensar que para quatro o próximo passo seria **subtrair** o número de elementos de todas as interseções envolvendo quatro conjuntos, encerrando-se nesse ponto, não é? E você está certo, para quatro conjuntos temos

$$\begin{aligned}\#(A \cup B \cup C \cup D) = \;& \#A + \#B + \#C + \#D - \#(A \cap B) - \\ & \#(A \cap C) - \#(A \cap D) - \#(B \cap C) - \\ & \#(B \cap D) \quad - \#(C \cap D) + \#(A \cap B \cap C) + \\ & + \#(A \cap B \cap D) + \#(B \cap C \cap D) + \\ & - \#(A \cap B \cap C \cap D)\end{aligned}.$$

A idéia é exatamente essa, vai-se alternando o sinal e entrando na expressão o número de elementos de interseções, envolvendo cada vez mais conjuntos, até a interseção de todos os conjuntos.

O **Princípio da Inclusão-Exclusão** vale para uma quantidade finita qualquer de n conjuntos finitos, ou seja, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então, o número de elementos da união desses conjuntos é dado por:

$$\begin{gathered}\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \\ \#A_1 + \cdots + \#A_n - \#(A_1 \cap A_2) - \cdots - \#(A_{n-1} \cap A_n) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots \\ + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \cdots + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap \cdots \cap A_n)\end{gathered}$$

Para demonstrar tal fato, usamos uma técnica de demonstração chamada **Princípio da Indução Finita**. Para a aplicação do **Princípio da Inclusão-Exclusão**, não é necessário o estudo da demonstração dessa equação, entretanto, os que querem se aprofundar mais na teoria podem acompanhar a demonstração detalhada no Anexo desta aula.

Exemplo 1

Em uma sala de aula, existem 45 alunos e todos praticam pelo menos um destes esportes: vôlei e basquete. Foi feito um levantamento e descobriu-se que 30 alunos praticam vôlei e que 35 basquete. Pergunta-se: quantos alunos dessa sala praticam os dois esportes?

Solução

Se considerarmos os conjuntos $A = \{$alunos da sala que praticam vôlei$\}$ e $B = \{$alunos da sala que praticam basquete$\}$, teremos que:

$\#A = 30;$

$\#B = 35$;

$\#(A \cup B) = 45$, ou seja, o total de alunos da sala, uma vez que todos os alunos praticam pelo menos um dos esportes e que estamos procurando $\#(A \cap B)$.

Pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, temos que

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) \Rightarrow 45 = 30 + 35 - \#(A \cap B) \Rightarrow \#(A \cap B) = 20.$$

Portanto, 20 alunos dessa sala praticam os dois esportes.

Exemplo 2

Sabemos que existem 3 tipos de hepatite: A, B e C. Em um grupo de 120 pessoas, foi realizado o exame e verificou-se que todo indivíduo tinha pelo menos um tipo de hepatite; e que: 50 pessoas tinham hepatite do tipo A; 50 tinham hepatite do tipo B; e 50 do tipo C. Também verificou-se que a quantidade de pessoas que possuíam dois tipos de hepatite era igual a 10, ou seja, 10 pessoas possuíam os tipos A e B, 10 pessoas possuíam o B e o C, e 10 pessoas possuíam o A e o C. Pergunta-se: quantas pessoas possuíam os três tipos de hepatite?

Solução

Considere os conjuntos:

$$A = \{\text{indivíduos que têm hepatite A}\};$$
$$B = \{\text{indivíduos que têm hepatite B}\};$$
$$C = \{\text{indivíduos que têm hepatite C}\}.$$

A união desses três conjuntos nos dá a quantidade de indivíduos da amostra (120 pessoas), uma vez que nela cada indivíduo tem algum tipo de hepatite. Também sabemos que $\#A = \#B = \#C = 50$ e que $\#(A \cap B) = \#(A \cap C) = \#(B \cap C) = 10$. Pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, temos:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C),$$

ou seja,

$$120 = 50 + 50 + 50 - 10 - 10 - 10 + \#(A \cap B \cap C).$$

O que nos leva a concluir que nenhum dos indivíduos da amostra tem hepatite dos três tipos, pois

$$\#(A \cap B \cap C) = 0.$$

Exemplo 3

Um grupo de 10 rapazes conversavam sobre suas habilidades. Todos eles sabiam andar de bicicleta ou montar a cavalo. Perguntados sobre quem sabia andar de bicicleta, 7 levantaram a mão e, quando quem sabia montar a cavalo, 5 levantaram a mão. Pergunta: quantos desse grupo sabem andar tanto de bicicleta quanto montar a cavalo?

Solução

Se considerarmos:

$$A = \{\text{rapazes que sabem andar de bicicleta}\} \text{ e}$$
$$B = \{\text{rapazes que sabem montar a cavalo}\}$$

temos que o grupo todo de rapazes é representado por $A \cup B$, pois todos eles sabem andar de bicicleta ou montar a cavalo. Pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, temos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

O número procurado é representado por $\#(A \cap B)$, que é o número de rapazes com as duas habilidades. Preenchendo os valores na equação anterior, temos:

$$10 = 7 + 5 - \#(A \cap B) \Rightarrow \#(A \cap B) = 12 - 10 = 2.$$

Logo, 2 rapazes desse grupo sabem andar de bicicleta, como também montar a cavalo.

Exemplo 4

Numa escola, existem 3000 alunos e todos sabem jogar pelo menos um dos esportes: vôlei, basquete ou futsal. A diretora fez um levantamento dos alunos que sabiam jogar um e dois dos esportes, montando a seguinte tabela.

Esporte	Nº de alunos
Vôlei	1100
Basquete	1200
Futsal	1300
Vôlei e Basquete	200
Vôlei e Futsal	300
Basquete e Futsal	400

A escola foi convidada para participar de um torneio que envolvia os três esportes. Como a viagem e hospedagem custam caro e o colégio não quer gastar muito, decidiu-se montar os times apenas com atletas que sabiam jogar os três esportes. De quantos atletas nessa situação o colégio dispõe?

Solução

Considere os conjuntos:

$$V = \{\text{alunos que sabem jogar vôlei}\};$$
$$B = \{\text{alunos que sabem jogar basquete}\};$$
$$F = \{\text{alunos que sabem jogar futsal}\}.$$

A partir destes, podemos montar outros conjuntos, por exemplo,

$$V \cap B = \{\text{alunos que sabem jogar vôlei e basquete}\};$$
$$V \cap F = \{\text{alunos que sabem jogar vôlei e futsal}\};$$
$$B \cap F = \{\text{alunos que sabem jogar basquete e futsal}\}.$$

Pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, temos:

$$\#(V \cup B \cup F) = \#V + \#B + \#F - \#(V \cap B) - \#(V \cap F) - \#(B \cap V) + \#(V \cap B \cap F).$$

Preenchendo os valores na equação anterior, temos:

$$3000 = 1100 + 1200 + 1300 - 200 - 300 - 400 + \#(V \cap B \cap F) \Rightarrow \#(V \cap B \cap F) = 300.$$

Desse modo, temos que a escola conta com 300 alunos dos quais podem dispor para montar a equipe que representará a escola no torneio.

Exemplo 5

Numa comunidade rural, todos os 1000 cadastrados na cooperativa local tinham algum tipo de criação: galinha, bode ou gado. A cooperativa fez um levantamento dos criadores, mas, ao montar o questionário, conseguiu as seguintes informações.

Criação	Nº de cooperados
Galinha	300
Bode	620
Gado	100
Os três	100

E ainda que o número de criadores de galinha e bode era igual ao de galinha e gado e de bode e gado. Entretanto, esse número não foi registrado. Que número é esse?

Solução

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{\text{criadores de galinha}\};$$
$$B = \{\text{criadores de bode}\};$$
$$C = \{\text{criadores de gado}\}.$$

A partir das informações anteriores, temos que $\#A = 300$, $\#B = 620$ e $\#C = 200$. Pelo fato de que cada cooperado cria pelo menos um tipo de animal, temos que $\#(A \cup B \cup C) = 1000$, ou seja, cada cooperado está em A, B ou C. Temos também que $\#(A \cap B \cap C) = 100$ e que $\#(A \cap B) = \#(A \cap C) = \#(B \cap C) = x$, ou seja, que o número de criadores que têm dois tipos de produtos é o mesmo e não sabemos que número é esse.

Pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, temos:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Preenchendo os valores na equação anterior, temos

$$1000 = 300 + 620 + 100 - x - x - x + 100 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40.$$

Desse modo, temos 40 criadores que criam galinha e bode, 40 que criam galinha e gado e 40 que criam bode e gado.

Agora é sua vez!

Atividade 1

1 Lembra-se do Princípio Aditivo do qual falamos na primeira aula? Use o **Princípio da Inclusão-Exclusão** para verificar que, se A e B são conjuntos disjuntos, então, $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

2 Numa pesquisa feita com 500 pessoas, perguntava-se ao entrevistado se ele lia o jornal A ou o jornal B. O resultado foi

Resposta	Nº de pessoas
Jornal A	210
Jornal B	240
Não lia jornal	200

Pergunta-se: quantas pessoas lêem os dois jornais?

Dica: essa questão deve ser resolvida em duas etapas:

a) Encontrar o número de pessoas que lêem jornal (ou seja, o número de pessoas que lêem ou o jornal A ou o jornal B).

b) Feito isso, encontrar o número de pessoas que lêem os dois jornais.

3 Numa creche da rede pública, existem dois tipos de merendas: frutas ou biscoito com leite. Houve uma entrevista com os 320 alunos dessa creche e ficou claro que todos gostavam de pelo menos um tipo de lanche. Obteve-se ainda a informação de que o número de alunos que gostavam de biscoito com leite era o dobro do número dos que gostavam de frutas, e que 50 alunos gostavam dos dois tipos de lanche. Pergunta-se: quantos alunos gostavam de frutas? Quantos gostavam de biscoito com leite?

4 Quantos são os anagramas da palavra SECA que começam com A ou terminam com S?

5 Numa frente de trabalho, verificou-se que a marmita dos 100 trabalhadores era composta de carne assada, fava e pelo menos mais um complemento. Esses complementos variavam entre arroz, macaxeira ou milho cozido. A seguinte tabela foi montada.

Complementos	Nº de marmitas
Arroz	75
Macaxeira	47
Milho	39
Arroz e Macaxeira	30
Arroz e Milho	21
Macaxeira e Milho	15

Pergunta: quantos trabalhadores tinham na sua marmita todos os complementos (Arroz, Macaxeira e Milho)?

Resumo

Nesta aula, mostramos que o **Princípio da Inclusão-Exclusão** estende o **Princípio da Adição**, pois calcula o número de elementos de uma união de dois conjuntos sem exigir que os mesmos sejam disjuntos. O **Princípio da Inclusão-Exclusão** é utilizado também para calcular o número de elementos de uma união de uma quantidade finita qualquer de conjuntos, para calcular o número de elementos pertencentes à interseção de dois conjuntos etc.

Autoavaliação

1. Explique por que o **Princípio da Inclusão-Exclusão** estende o **Princípio da Adição**.

2. Ilustre através de cinco exemplos situações em que o **Princípio da Adição** não pode ser usado.

3. Você acha que o **Princípio da Inclusão-Exclusão** poderia ser apresentado na primeira aula? Caso você não concorde, explique o que dificultaria sua compreensão naquele momento.

Referência

MORGADO, A.C.O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção professor de matemática)

Anexo – Demonstração da Fórmula do Princípio da Inclusão-Exclusão

O **Princípio da Inclusão-Exclusão** vale para uma quantidade finita qualquer de n conjuntos finitos, ou seja, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então, o número de elementos da interseção desses conjuntos é dado por:

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \#A_1 + \cdots + \#A_n - \#(A_1 \cap A_2) - \cdots - \#(A_{n-1} \cap A_n) +$$
$$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \cdots + (-1)^{n-1}\#(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Antes de iniciarmos a demonstração, observamos que

para $n = 2$:

$\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)$

e para $n = 3$:

$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_2)$,

as equações já foram mostradas no início da aula com a ajuda das ilustrações dos conjuntos. A demonstração de que essa propriedade vale para uma quantidade arbitrária de n conjuntos finitos será feita pelo **Princípio da Indução Finita**. Relembremos rapidamente o que esse princípio nos diz.

Se queremos mostrar que uma propriedade ou equação vale para qualquer número natural n a partir de um certo número natural q, devemos proceder conforme descrito a seguir.

1. Mostrar que, para $n = q$, a equação é verdadeira.

2. Supondo que essa mesma propriedade é válida para $n = q + m$ (Hipótese de Indução), devemos mostrar que a equação é válida também para $n = q + m + 1$.

Satisfeitas as duas condições, temos, então, pelo **Princípio da Indução Finita** que a equação é verdadeira para todo natural maior ou igual a q.

Vamos relembrar o uso da técnica de demonstração através do seguinte exemplo: mostre que a igualdade abaixo vale para todo n natural.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

1. Devemos mostrar que a equação é verdadeira para $n = 1$, já que queremos mostrar que vale para todos os números naturais. Do lado esquerdo da equação, temos apenas 1, pois estamos somando de 1 até $n = 1$ e podemos escrever $1 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot \frac{2}{2} = \frac{1.(1+1)}{2}$, ou seja, chegamos à expressão do lado direito para $n = 1$, como queríamos.

2. Vamos supor que a propriedade é válida para $n = k$ (Hipótese de Indução), ou seja, que $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k.(k+1)}{2}$ e vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

Somando $k + 1$ do lado direito da equação anterior, obtemos $1 + \cdots + k + (k + 1)$. Usando a hipótese de indução nas primeiras k parcelas e, em seguida, efetuando a soma, obtemos

$$1 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k.(k+1) + 2(k+1)}{2} =$$
$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2},$$

ou seja, a fórmula também é válida para $n = k + 1$. Portanto, pelo **Princípio da Indução Finita**, temos que a equação é verdadeira para todo número natural.

Voltemos, então, para a propriedade de conjuntos que queremos demonstrar, ou seja, que a equação

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \#A_1 + \cdots + \#A_n - \#(A_1 \cap A_2) - \cdots - \#(A_{n-1} \cap A_n) +$$
$$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \cdots + (-1)^{n-1}\#(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

é verdadeira para qualquer valor de n natural e maior ou igual a 2.

1. Já mostramos, no início desta aula, que para $n = 2$ a equação é verdadeira.

2. Suponhamos que a equação seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \#A_1 + \cdots + \#A_k - \#(A_1 \cap A_2) - \cdots - \#(A_{k-1} \cap A_k)$$
$$+ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \#(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A)_k) - \cdots + (-1)^{k-1}\#(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$$

e vamos mostrar que vale também para $n = k + 1$. Calculemos $\#(A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1})$. Para efetuarmos este cálculo, pensaremos na união de $k + 1$ conjuntos como sendo a união dos conjuntos $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ e $B = A_{k+1}$. Mas, para dois conjuntos, já mostramos que vale a equação, portanto,

$$\#(A \cup B) = \#\ (A_1 \cup \cdots \cup A_k) + \#A_{k+1}\ - \#((A_1 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}).$$

Na última expressão, o primeiro conjunto é a união de k conjuntos, portanto, vale a hipótese de indução, ou seja,

$$\begin{array}{c}\#((A_1 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}) = \#A_1 + \cdots + \#A_k - \#(A_1 \cap A_2) - \ldots \\ -\#(A_{k-1} \cap A_k) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \#(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) - \ldots \\ +(-1)^{k-1}\#(A_1 \cap \cdots \cap A_k) + \ \#\ A_{k+1} - \#((A_1 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}).\end{array} \tag{6}$$

E podemos escrever a última parcela $(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1} = (A_1 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})$, ou seja, como uma união de k conjuntos e, mais uma vez, pela hipótese de indução:

$$\begin{array}{c}\#((A_1 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})) = \#(A_1 \cap A_{k+1}) + \ldots \\ +\#(A_k \cap A_{k+1}) - \#((A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1})) - \#((A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})) - \\ \#((A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})) + \#((A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})) + \\ \cdots + (-1)^{k-1}((A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap \cdots \cap (A_k \cap A_{k+1})).\end{array}$$

Mas, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{array}{c}\#((A_1 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})) = \#(A_1 \cap A_{k+1}) + \ldots \\ +\#(A_k \cap A_{k+1}) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}) - \\ +\#(A_1 \cap A_3 \cap A_{k+1}) - \#(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_{k+1}) \\ + \cdots + (-1)^{k-1}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}).\end{array} \tag{7}$$

Substituindo (7) na equação (6), obtemos

$$\begin{array}{rl}\#((A_1 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}) = & \#A_1 + \cdots + \#A_k - \#(A_1 \cap A_2) - \cdots - \\ & \#(A_{k-1} \cap A_k) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots \\ & +\#(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) - \cdots + \\ & (-1)^{k-1}\#(A_1 \cap \cdots \cap A_k) + \#A_{k+1} - \\ & \left[\begin{array}{l}\#(A_1 \cap A_{k+1}) + \cdots + \#(A_k \cap A_{k+1}) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}) + \\ \cdots + \#(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) - \cdots + (-1)^{k-1}\#(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1})\end{array}\right]\end{array}$$

Reorganizando essa expressão, obtemos

$$\begin{array}{c}\#(A_1 \cup \cdots \cup A_{k+1}) = \#A_1 \cdots + \#A_{k+1} - \#(A_1 \cap A_2) - \cdots - \#(A_k \cap A_{k+1}) + \\ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \#(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) - \cdots + (-1)^k\#(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1})\end{array}$$

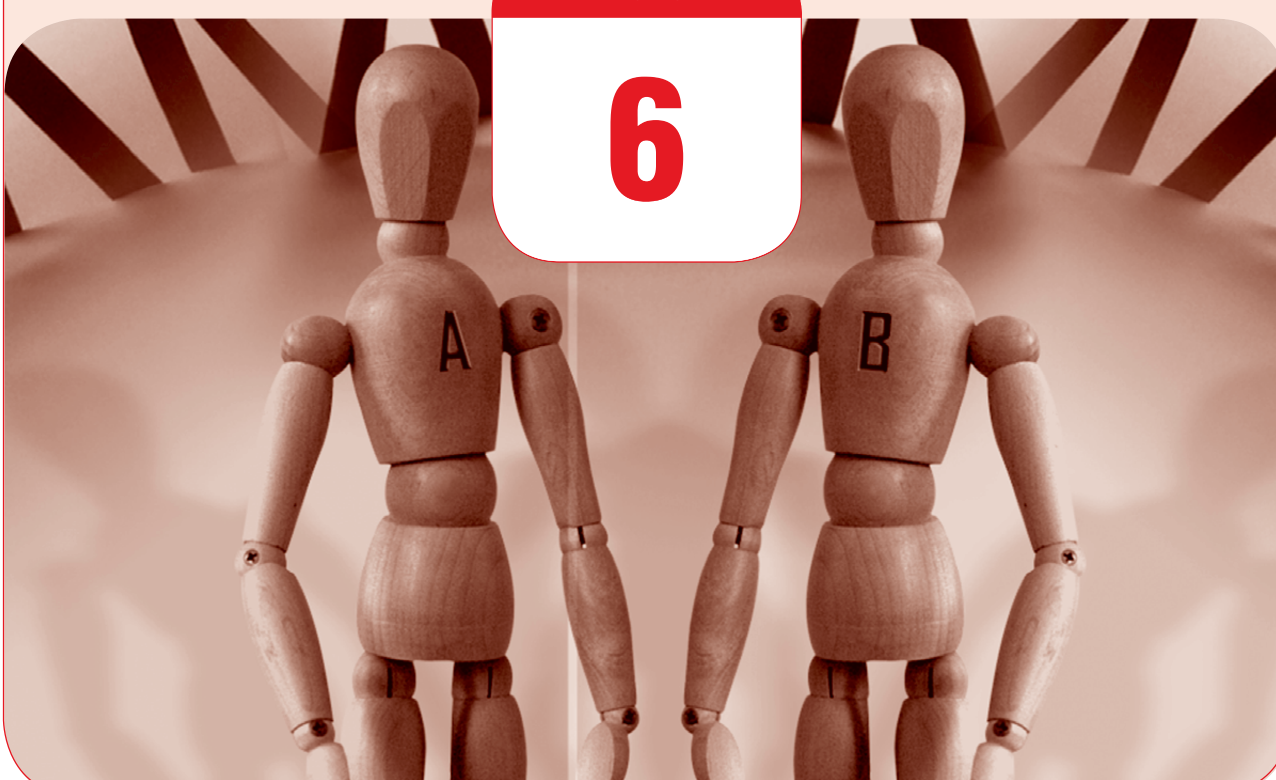
e mostramos dessa forma que a equação também é válida para $n = k+1$. Portanto, usando o **Princípio da Indução Finita**, mostramos que o **Princípio da Inclusão-Exclusão** vale para todo n natural, n maior ou igual a 2.

Anotações

Permutações circulares

Aula

6



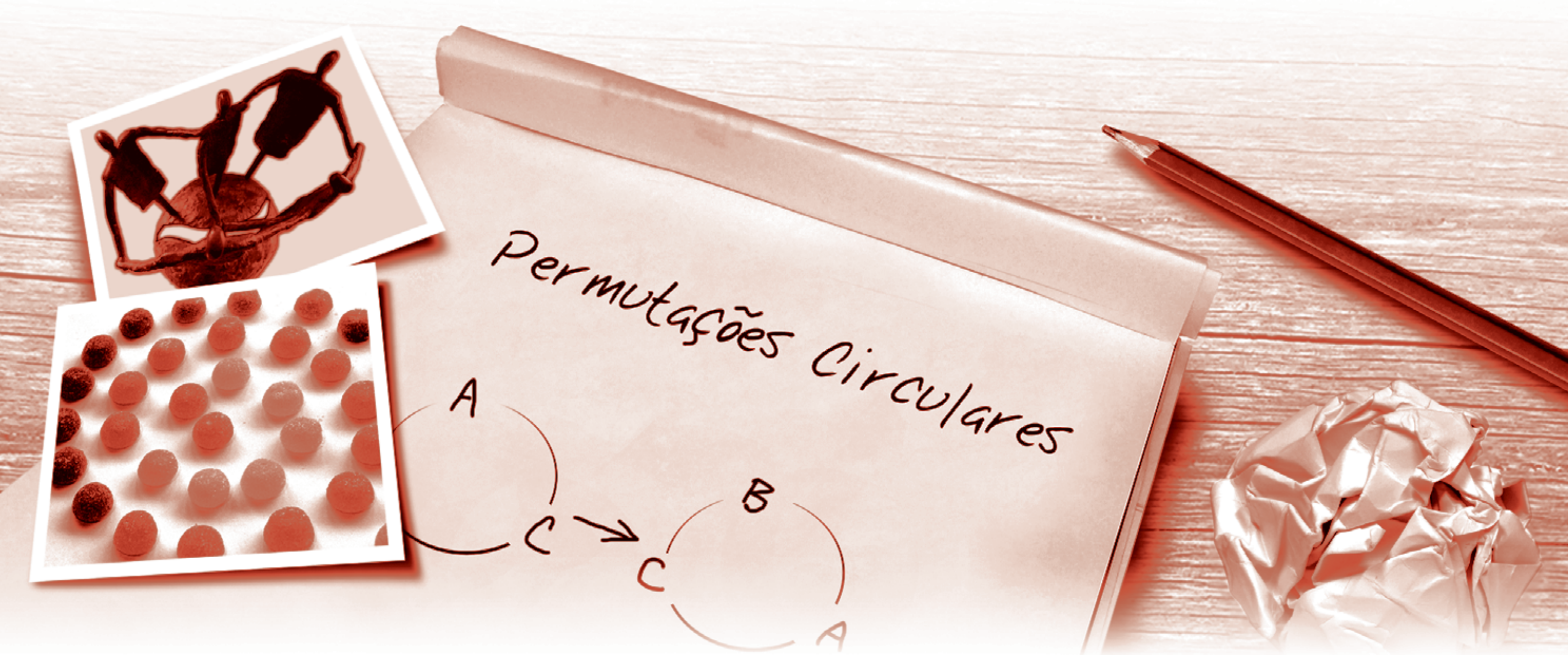
Apresentação

Até o momento, estudamos situações nas quais estávamos interessados em distribuir pessoas em uma fila, organizar objetos em gavetas, construir os anagramas de uma palavra, ou seja, situações que tinham em comum a mesma estrutura do tipo fila, em que a preocupação era: quem vem na frente de quem.

Muitas situações interessantes acontecem também em estruturas do tipo círculo, por exemplo, uma artesã que faz pulseiras de conchas e que dispõe de três tipos de conchas para trabalhar está interessada em saber quantas pulseiras diferentes ela pode fabricar utilizando os três tipos de conchas disponíveis. Ou ainda, de quantas maneiras diferentes uma pessoa pode pintar um gráfico tipo pizza, dividido em 7 pedaços, com 7 cores distintas?

Objetivo

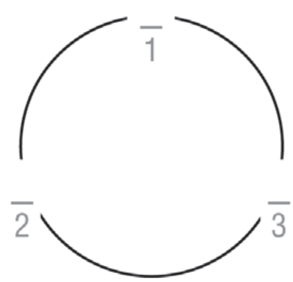
Nesta aula, apresentaremos situações relacionadas com agrupamentos de elementos distribuídos ao longo de um círculo. Esperamos que ao final você tenha percebido a diferença entre as configurações tipo fila e as configurações tipo círculo.



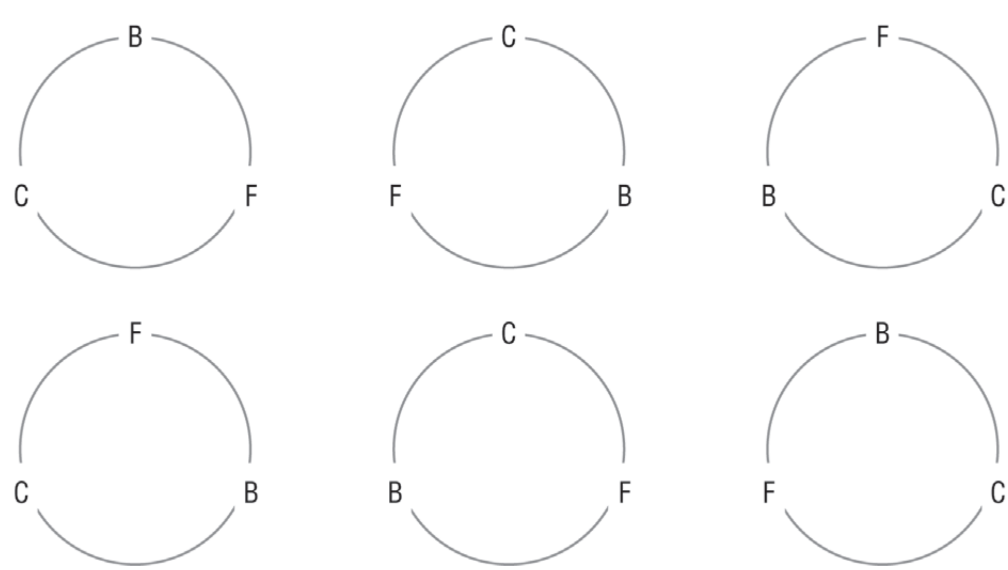
Permutações circulares

Quem não conhece a famosa música cantada nas cirandas de roda de Olinda-PE: "Esta ciranda quem me deu foi Lia que mora na ilha de Itamaracá ... ". A música pode ser bastante conhecida, mas o que não se discute muito, pelo menos nos livros do Ensino Médio, é de quantas maneiras distintas podemos formar uma ciranda, ou ainda, um círculo com um determinado número de objetos.

Comecemos com uma ciranda formada por três pessoas. Temos três posições, 1, 2 e 3, a serem preenchidas por três pessoas: Fulana (**F**), Beltrana (**B**) e Cicrana (**C**).



Ou seja, o número de lugares é igual ao número de pessoas que queremos alocar. Como vimos na aula 2 (Permutações Simples), quando isso acontece, temos um problema de permutação simples, o que nos leva a $3!$ maneiras de montarmos a ciranda. Quais sejam:



Considere a primeira ciranda (Figura 1), ao girá-la, obtemos outras duas configurações (Figuras 2 e 3),

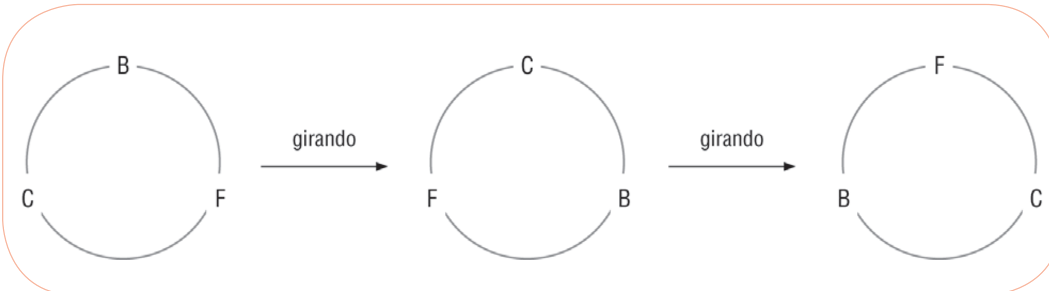


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

que, na verdade, representam a mesma ciranda inicial, pois em qualquer delas temos a mesma disposição posicional, a saber:

- **B** está entre **F** e **C**;
- **C** está entre **B** e **F**;
- **F** está entre **C** e **B**.

No entanto, foram contadas individualmente na permutação simples por representarem a combinação de 3 letras em três espaços dados: CBF, FCB e BFC.

Observamos então que, formada uma configuração circular inicial, qualquer outra que girando a partir dela consegue voltar à inicial é, na verdade, a mesma configuração inicial! As Figuras 4, 5 e 6 também ilustram tal fato:

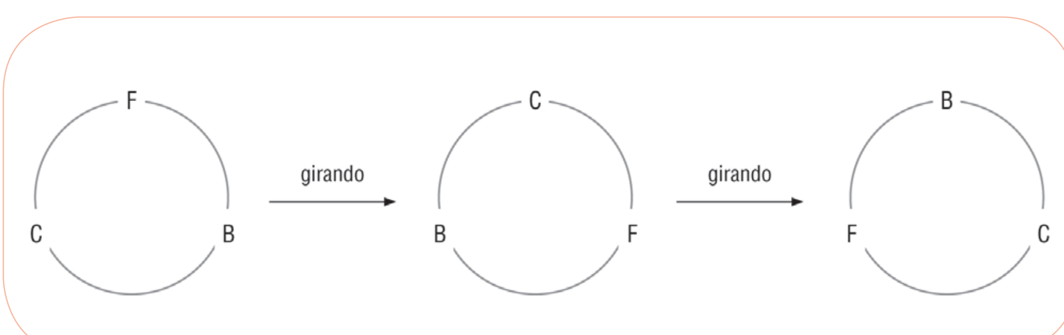


Figura 4 **Figura 5** **Figura 6**

Note que as configurações obtidas na Figura 1 são distintas das configurações obtidas na Figura 2, pois, partindo de qualquer uma das cirandas da Figura 1, por mais que giremos, nunca chegaremos a alguma das configurações da Figura 2.

Fazendo uma analogia com o problema de filas, podemos representar as cirandas na forma de blocos

$$(\text{BFC}) \rightarrow (\text{CBF}) \rightarrow (\text{FCB})$$

$$(\text{FBC}) \rightarrow (\text{CFB}) \rightarrow (\text{BCF}),$$

em que blocos de 3 letras são considerados iguais quando podemos, partindo de um, chegar aos outros pelo deslizamento das letras da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda) sendo que, nesse deslocamento, a letra que está no final volta ao início.

Então, recapitulando, por permutação simples, temos $3!$ possibilidades, entretanto, cada possibilidade real, no caso, cada ciranda, está sendo contada 3 vezes no cálculo das permutações. Ou seja,

$3!$ = número de configurações obtidas na permutação simples $= 3\times$ número de configurações distintas.

Por configurações distintas, entendemos que, dadas as configurações, não conseguimos obter uma a partir da outra simplesmente girando a ciranda.

Portanto, para esse caso, temos que a quantidade de cirandas distintas que podemos formar é

número de configurações distintas $= \frac{3!}{3} = \frac{3\times 2!}{3} = 2!$

As duas configurações distintas, no caso, as duas cirandas obtidas, são o que chamamos de **permutação circular de 3 elementos**.

Suponhamos agora que André (**A**) se junte a Fulana, Beltrana e Cicrana para brincar de roda. Assumindo a Figura 7, como sendo a roda inicial, obtemos, ao girar a Figura, quatro configurações equivalentes:

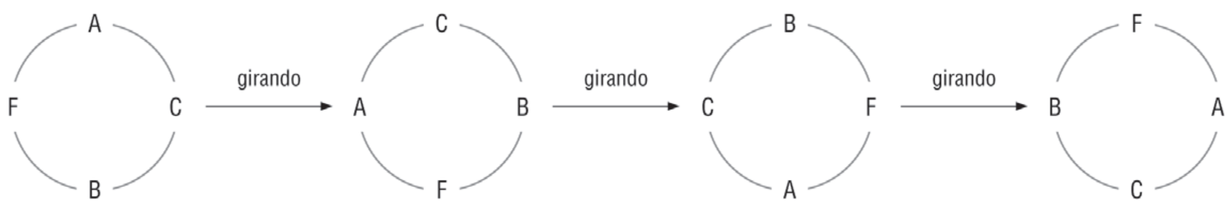


Figura 7

Por outro lado, usando permutação simples, obtemos um total de $4!$ configurações (4 letras a serem alocadas em 4 posições), e mais uma vez podemos encontrar o número de permutação circular através da igualdade:

$4!$ = número total de configurações obtidas por permutação simples $= 4\times$ número de permutações circulares.

É interessante observar que quando formamos uma roda com 3 pessoas, ao girá-la, obtemos 3 rodas iguais, já em uma roda com 4 pessoas, obtemos, girando, 4 rodas iguais. Continuando dessa forma, podemos afirmar que, para n pessoas brincando de roda, teremos a quantidade de n rodas iguais à inicial. Ou seja, ao computar o número de configurações distintas, cada n delas representa na verdade uma mesma roda. E podemos assim encontrar o número de configurações distintas ou, ainda, o número de permutações circulares com n elementos através da seguinte equação:

$n!$ = número total de configurações obtidas por permutação simples $= n\times$ número de permutações circulares.

Ou ainda, fazendo $x =$ número de permutações circulares, obtemos

$$x = \frac{n!}{n} = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}{n} = (n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1 = (n-1)!$$

Exemplo 1

Suponha que uma artesã trabalhe fazendo pulseiras de pedrinhas da seguinte maneira: em um elástico, ela coloca 7 pedrinhas de cores distintas e depois amarra as pontas. Pergunta-se: quantas pulseiras distintas ela pode fazer?

Solução

Ao final do trabalho, ela fecha a pulseira amarrando as pontas, formando assim uma roda composta por 7 pedrinhas de cores distintas. Ou seja, estamos com um problema de permutação circular com 7 elementos e, portanto,

$$(7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

Dessa forma, 720 modelos distintos de pulseiras podem ser criados.

Exemplo 2

Numa escolinha, com 10 crianças, há, na hora, do recreio uma brincadeira que não pode faltar: a roda. De quantas maneiras a professora pode montar uma roda?

Solução

Essa questão se encaixa exatamente com o número de cirandas que podem ser montadas com 10 pessoas, que é um problema de permutação circular com 10 elementos e, portanto, $(10-1)! = 9!$ rodas diferentes podem ser montadas.

Exemplo 3

E, se na escolinha, do exemplo 2, dois coleguinhas estiverem brigados e, para evitar problemas, a professora queira montar a roda sem que eles fiquem juntos. De quantas maneiras ela pode formar essa roda?

Solução

Consideremos os seguintes conjuntos:

$A = \{$todas as rodas$\}$

$B = \{$todas as rodas em que os dois coleguinhas estejam juntos$\}$

$C = \{$todas as rodas em que os dois coleguinhas estejam separados$\}$

A resposta da questão é o número de elementos do conjunto C. Note que $A = B \cup C$ e que B e C são disjuntos. Então, pelo **Princípio da Adição**, temos que

$$\#A = \#B + \#C$$

O $\#A$ é exatamente a permutação circular dos 10 alunos, ou seja, $\#A = 9!$.

Para encontrar $\#B$, vamos considerar cada elemento que irá compor a roda como um par de mãos, como os dois coleguinhas estarão obrigatoriamente juntos, ou seja, de mãos dadas, iremos considerá-los um par de mãos na formação da roda. Dessa forma, podemos pensar em montar rodas com esses coleguinhas juntos a partir de duas decisões:

d_1- juntar os dois coleguinhas a fim de serem vistos como um único par de mãos. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas, ou seja,

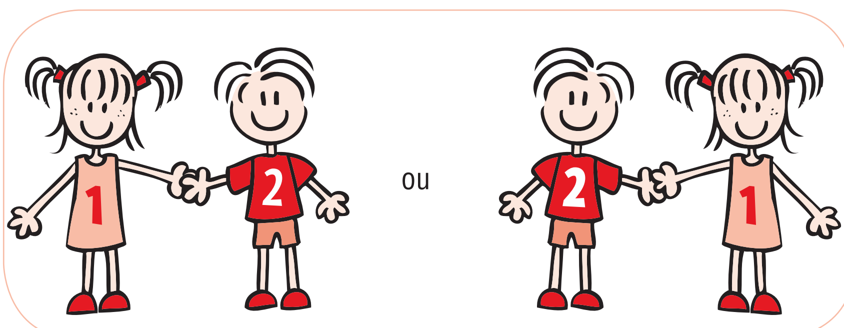


Figura 8

d_2- montar as rodas com os outros coleguinhas. Isto é, fazer uma permutação circular de 9 pessoas (já que estamos considerando os dois coleguinhas que estão juntos como um único elemento da roda), ou seja, $8!$

Pelo **Princípio da Multiplicação**, temos que o $\#B$ é $2 \times 8!$

E pelo **Princípio da Adição**, podemos calcular o $\#C$ da seguinte forma

$$\#C = \#A - \#B = 9! - 2 \times 8! = 9 \times 8! - 2 \times 8! = (9-2) \times 8! = 7 \times 8!$$

Outra forma de resolver essa questão é considerarmos todas as rodas que podemos formar sem os coleguinhas que brigaram, ou seja, com os 8 coleguinhas. Isso pode ser feito de $7!$ maneiras.

Agora, imaginemos os espaços em que os dois podem entrar na roda sem que fiquem juntos.

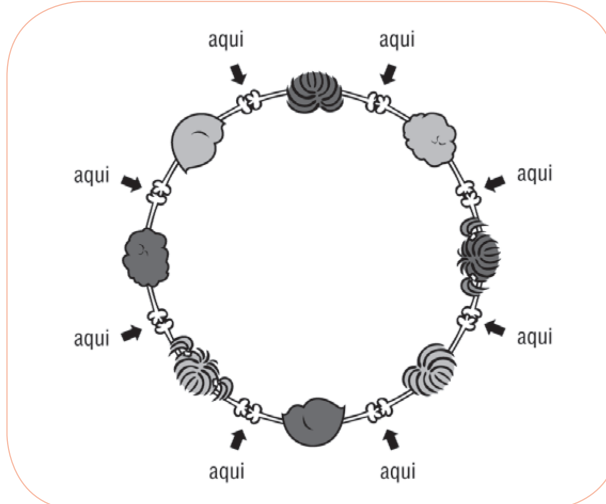


Figura 9

Temos, então, 8 lugares que podem ser ocupados pelos 2 alunos, entretanto, a ordem na qual eles ficaram importa na contagem final. Dessa forma, a quantidade de maneiras pelas quais eles podem ocupar esses lugares é

$$A_8{}^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!}.$$

Então, pelo **Princípio da Multiplicação**, temos

$$7!\frac{8!}{6!} = \frac{7 \times 6! \times 8!}{6!} = 7 \times 8!$$

Exemplo 4

Ainda falando de escolinha. Sabemos que existem aqueles coleguinhas que sempre estão juntos em qualquer brincadeira, então, se entre os 10 (do exemplo 2), 3 são inseparáveis, pergunta-se: sabendo que esses 3 estarão juntos na roda, quantas rodas poderemos formar?

Solução

Como os três alunos estarão juntos na roda, podemos considerá-los como um único e, com isso, temos duas etapas na construção dessa roda:

d_1- organizar os três amigos, o que pode ser feito de $3!$ maneiras;

d_2- montar as rodas considerando os amigos como um integrante da roda. Isso pode ser feito de $7!$ maneiras, já que haverá 8 pessoas na roda.

Pelo **Princípio da Multiplicação**, o número total de rodas é:

$$3! \times 7! = 6 \times 7!$$

Outra maneira de resolver a questão anterior é a seguinte.

d_1- Montar sem os três amigos. Isso é uma permutação circular de 7 pessoas, ou seja, $6!$.

d_2- Colocar os três amigos em um dos lugares possíveis. No desenho abaixo, vemos que isso pode ser feito de 7 maneiras

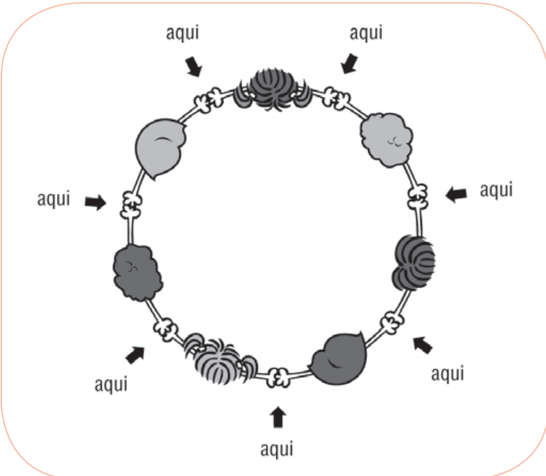


Figura 10

d_3- Fazer os três amigos variarem suas posições no lugar da fila em que se encontram. Há $3!$ maneiras de se fazer isso, já que temos 3 amigos e 3 lugares a serem ocupados.

Pelo **Princípio da Multiplicação**, o número total de rodas é

$$6! \times 7 \times 3! = 7! \times 3! = 6 \times 7!$$

Exemplo 5

Um cientista maluco estava fazendo o seguinte experimento: tomou 10 elementos químicos distintos, dos quais classificou 5 como sendo P, para representar positivo, e 5 como N, para negativo. Ele imaginou uma ligação circular entre esses elementos, preocupado apenas com o fato de não podermos ter 2 P nem 2 N juntos. Quantas ligações circulares são possíveis atendendo a essa restrição?

Solução

Relembrando como construímos a fórmula, primeiro calculávamos todas as formas possíveis de organizar os elementos e depois dividíamos pelo total de vezes que cada configuração se repetia.

Calculando o número de formas possíveis de organizar os elementos.

d_1- Escolha do primeiro elemento. Isso pode ser feito de 10 maneiras.

d_2- Escolha do segundo elemento. Isso pode ser feito de 5 maneiras, uma vez que, se foi escolhido P, só podemos escolher N e vice-versa.

d_3- Escolha do terceiro elemento. Isso pode ser feito de 4 maneiras, uma vez que já escolhemos um (primeira posição) elemento desse tipo.

d_4- Escolha do quarto elemento. Isso pode ser feito de 4 maneiras, uma vez que já escolhemos um (segunda posição) elemento desse tipo.

d_5- Escolha do quinto elemento. Isso pode ser feito de 3 maneiras, uma vez que já escolhemos dois (primeira e terceira posições) elementos desse tipo.

d_6- Escolha do sexto elemento. Isso pode ser feito de 3 maneiras, uma vez que já escolhemos dois (segunda e quarta posições) elementos desse tipo.

d_7- Escolha do sétimo elemento. Isso pode ser feito de 2 maneiras, uma vez que já escolhemos três (primeira, terceira e quinta posições) elementos desse tipo.

d_8- Escolha do oitavo elemento. Isso pode ser feito de 2 maneiras, uma vez que já escolhemos três (segunda, quarta e sexta posições) elementos desse tipo.

d_9- Escolha do nono elemento. Isso pode ser feito de 1 maneira, uma vez que já escolhemos quatro (primeira, terceira, quinta e sétima posições) elementos desse tipo.

$d_{10}-$ Escolha do décimo elemento. Isso pode ser feito de 1 maneira, uma vez que já escolhemos quatro (segunda, quarta, sexta e oitava posições) elementos desse tipo.

Pelo **Princípio da Multiplicação**, temos

$$10 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 10 \times 5! \times 4!$$

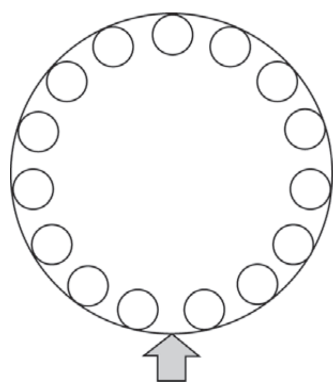
Por estarem em uma roda, temos que cada configuração se repete na contagem 10 vezes, portanto, o número real de rodas distintas é

$$\frac{10 \times 5! \times 4!}{10} = 5! \times 4!$$

Agora é sua vez!

Atividade 1

1 Nas festas das padroeiras das cidades do interior, sempre existem parques de diversão. Uma das brincadeiras mais conhecidas é a roleta, em que você aposta numa cor e ela é girada. Se a cor escolhida aparecer embaixo, você ganha o prêmio. O dono da roleta sabe que tem uma dada posição que aparece mais vezes e, para que as pessoas não fiquem associando com a cor, ele costuma mudar as cores de lugar periodicamente. Se sua roleta tem 15 posições, de quantos modos distintos ele pode pintá-la?



2 Na época de São João, particularmente no Nordeste do Brasil, a quadrilha é uma tradição. Num dado momento da quadrilha, faz-se o que se chama de grande roda, na qual os casais ficam de mãos dadas e homem não pega na mão de homem nem mulher na mão de mulher (a menos que tenham errado o passo). Quantas rodas distintas são possíveis formar dessa maneira, se na quadrilha estão dançando 32 casais?

3 Numa escola de jardim da infância, a diretora está querendo montar o presente do dia das mães. Ela quer fazer um colar utilizando macarrão colorido daquele redondinho. Nessa escola, temos 5000 alunos. A diretora quer que todo colar tenha a mesma quantidade de macarrão. Pergunta-se: sabendo que o colar é composto de macarrão de cores diferentes, quantas cores precisamos ter (e, conseqüentemente, quantos macarrões formarão o colar) para que nenhum colar fique igual a outro?

4 O vendedor de leite de uma cidade do interior decidiu pintar os pneus de seu carro (caminhonete, 86) para chamar mais atenção. Ele quer fazer tipo fatias de pizzas de cores diferentes, gastando menos tinta possível. Qual a quantidade de cores de que ele necessita para pintar os quatro pneus que, embora no mesmo formato (mesma quantidade de fatias) tenham cores dispostas diferentemente, de modo a originar pizzas distintas entre si?

5 Numa pizzaria, ficou determinado que as pizzas seriam cortadas em 6 fatias. Se a pizzaria oferece 10 sabores de recheio, quantos tipos de pizza diferentes podem ser criados sendo todas as suas fatias de um tipo diferente de recheio? Explicando melhor: uma pizza não tem duas fatias de mesmo sabor; uma pizza é considerada igual à outra, se, rodando uma delas, consigo uma configuração de sabores igual à da outra na mesma posição. (Dica: use o Princípio da Multiplicação com duas decisões: primeiro, escolher os recheios; segundo, montar a pizza.)

Resumo

A combinação circular calcula o número de cirandas distintas que podem ser formadas com um dado número de elementos. Duas dessas cirandas são consideradas iguais, se podemos obter uma a partir da outra apenas girando, em qualquer sentido, os elementos da ciranda. Toda situação envolvendo estruturas circulares em que duas delas são iguais, quando uma pode ser obtida a partir da outra ao girar toda a estrutura, se encaixa no caso de combinações circulares.

Autoavaliação

1 O que diferencia a permutação simples da permutação circular?

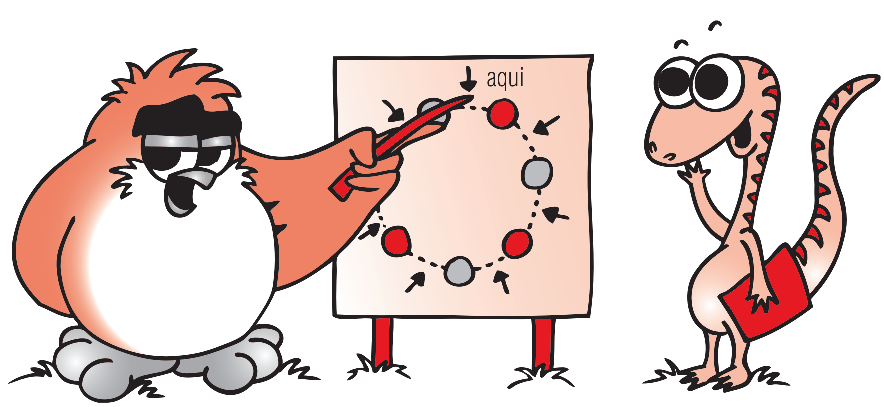
2 Note que em tudo que fizemos utilizamos elementos distintos, tente fazer o seguinte experimento: suponha que você tenha 3 bolinhas vermelhas e 3 bolinhas azuis. Quantas são as pulseiras distintas que você pode montar com essas bolinhas? (Se não conseguir, não desanime, é difícil visualizar as configurações quando estamos numa roda e com termos repetidos.)

3 O que diferencia a permutação circular da permutação simples ?

Referências

MORGADO, A. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção professor de matemática)

TEIXEIRA, P. J. M. Problemas de geometria em análise combinatória. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2, Salvador, 2004. **Anais...** Salvador, 2004.

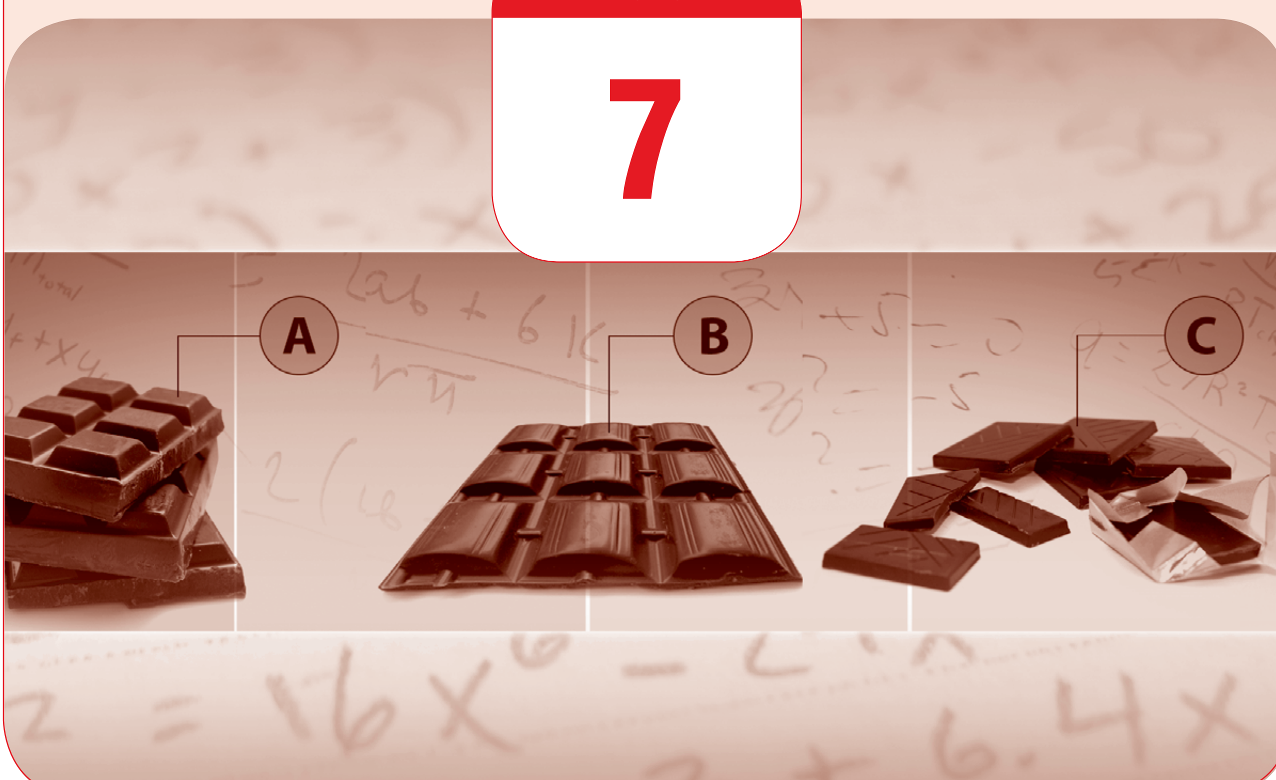


Anotações

Combinações completas

Aula

7



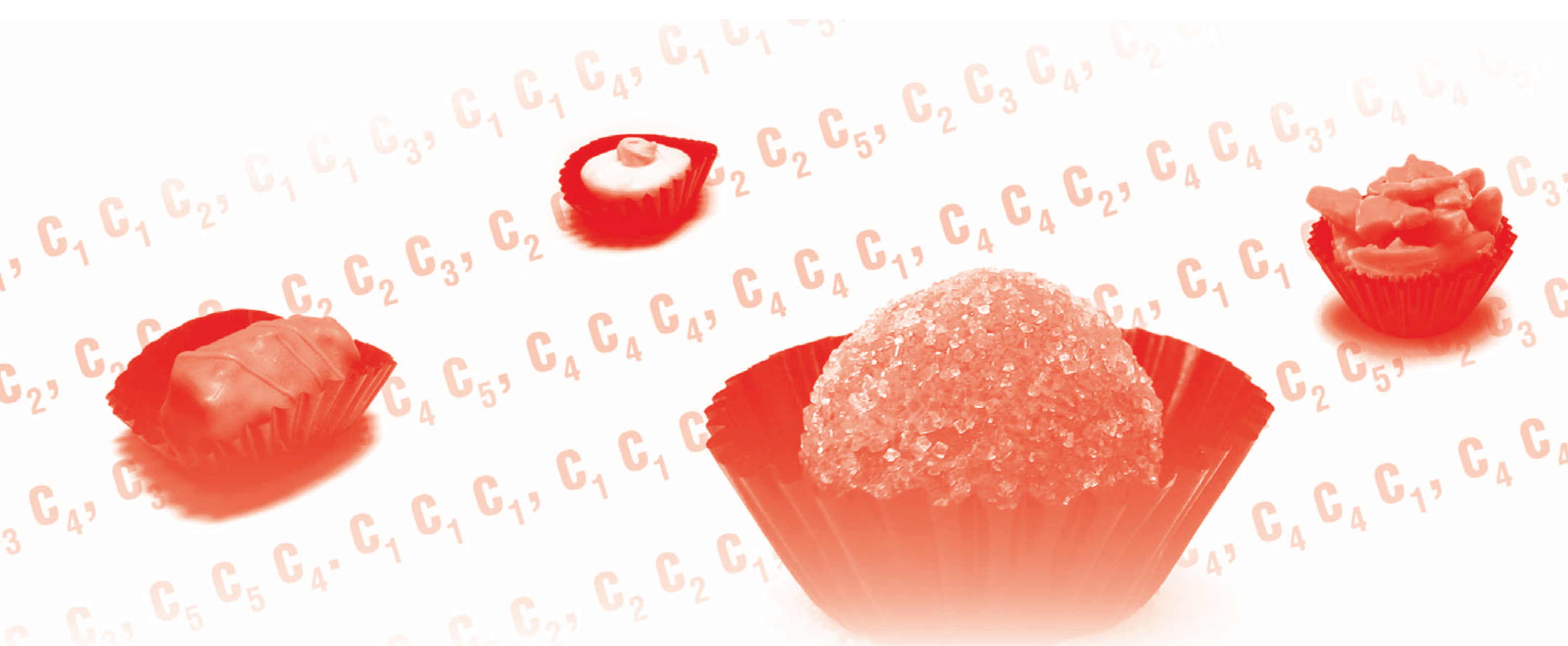
Apresentação

Aprendemos na aula 3 (Combinações e arranjos) a resolver a seguinte questão: de quantas maneiras distintas podemos escolher p elementos dentre n elementos distintos oferecidos? Foi o que chamamos de combinação n tomados p a p. Uma característica muito clara nesse tipo de questão é que, depois de escolhido um elemento, não existe mais a possibilidade de escolher outro do mesmo tipo, ou seja, só existe um elemento de cada tipo. É como se alguém chegasse com um chaveiro, um espelho, um tijolo e um relógio e pedisse para você escolher dois quaisquer objetos dentre os quatro dados.

Nesta aula, responderemos a situações como a seguinte: se um cliente chega a uma loja em que são oferecidas 5 marcas de chocolate e a unidade de qualquer marca tem o mesmo preço, de quantas maneiras distintas ele pode comprar 3 chocolates?

Objetivo

Ao final desta aula, esperamos que você possa diferenciar as combinações simples das combinações completas, bem como as situações-problema nas quais cada uma é utilizada.



Combinações completas

Voltemos à questão dos chocolates mencionada anteriormente. Ao tentar resolvê-la, você deve ter chegado à resposta C_5^3 . Pensemos um pouco: suponha que c_1 represente o chocolate da marca 1; c_2 o chocolate da marca 2; e assim sucessivamente. A resposta dada C_5^3 demonstra as seguintes situações

$$c_1c_2c_3, c_1c_2c_4, c_1c_2c_5, c_1c_3c_4, c_1c_3c_5, c_1c_4c_5, c_2c_3c_4, c_2c_3c_5, c_2c_4c_5, c_3c_4c_5$$

Contudo, o cliente pode ter preferência pelo chocolate da marca 1 e comprar todos dessa marca, ou seja, $c_1c_1c_1$. E, no entanto, essa possibilidade não está contemplada no número que calculamos. Se ele tem a possibilidade de escolher todos iguais ou dois iguais e um diferente ou, ainda, os três diferentes, ele terá no total as seguintes possibilidades:

$c_1c_1c_1$, $c_1c_1c_2$, $c_1c_1c_3$, $c_1c_1c_4$, $c_1c_1c_5$, $c_1c_2c_3$, $c_1c_2c_4$, $c_1c_2c_5$, $c_1c_3c_4$, $c_1c_3c_5$, $c_1c_4c_5$, $c_2c_2c_2$,
$c_2c_2c_1$, $c_2c_2c_3$, $c_2c_2c_4$, $c_2c_2c_5$, $c_2c_3c_4$, $c_2c_3c_5$, $c_2c_4c_5$, $c_3c_3c_3$, $c_3c_3c_1$, $c_3c_3c_2$, $c_3c_3c_4$, $c_3c_3c_5$,
$c_3c_4c_5$, $c_4c_4c_4$, $c_4c_4c_1$, $c_4c_4c_2$, $c_4c_4c_3$, $c_4c_4c_5$, $c_5c_5c_5$, $c_5c_5c_1$, $c_5c_5c_2$, $c_5c_5c_3$, $c_5c_5c_4$

Isto é, pela listagem anterior, ele tem 35 possibilidades de compra.

Note que a combinação simples está contida nas possibilidades listadas, ou seja, esse tipo de combinação é mais abrangente, a qual chamamos de **combinação completa**. Analisemos mais uma situação.

Exemplo 1

De quantas maneiras podemos montar uma refeição composta por 4 porções de comida em um restaurante do tipo *self-service* que oferece 7 opções (entre elas, arroz e feijão)?

Antes de começarmos a contar, vamos pensar um pouco...

- Podemos colocar todas as porções de um único tipo? Sim!

- Podemos colocar duas porções de um tipo e as outras duas porções de outro tipo? Sim!

Ou seja, podemos montar a refeição da maneira que acharmos melhor. É uma questão de gosto!

Ao contar, usando o **princípio da multiplicação**, obtemos

$$\frac{\qquad}{7}\quad\frac{\qquad}{7}\quad\frac{\qquad}{7}\quad\frac{\qquad}{7}\quad = \quad 7^4$$

Em que, por exemplo, a opção **arroz arroz arroz arroz** foi contada uma vez, a opção **arroz arroz feijão feijão** foi contada $P_4^{2,2}$ vezes e a opção **arroz arroz arroz feijão** foi contada $P_4^{3,1}$ vezes. Portanto, o **Princípio da Multiplicação** não se aplica nesse caso, uma vez que contamos várias vezes a mesma opção, ou seja, contamos mais opções do que as que verdadeiramente existem.

Então, que tal usarmos combinação simples? Também não podemos, pois quando utilizamos combinação simples estamos supondo que os 4 tipos de comida que iremos escolher são distintos, o que não é o caso. Usando combinação, contaríamos menos opções do que as que verdadeiramente existem.

Como resolveremos, então, esse problema?

Em casa, quando estamos organizando nosso quarto e queremos saber o que possuímos, costumamos montar um diagrama para nos auxiliar no trabalho, geralmente da seguinte forma

Tênis		Camisa		Calça		Livros		Meias
	|		|		|		|	

E, à medida que vamos encontrando os objetos em nosso guarda-roupa, vamos marcando no nosso esquema

Tênis		Camisa		Calça		Livros		Meias
•	|	••	|	•	|		|	•••

E, ao final da organização, temos um levantamento de tudo que possuímos em nosso ORGANIZADO quarto.

Vamos utilizar essa mesma idéia para representar as opções de escolha usando os símbolos • e | , da seguinte maneira:

Tipo de comida	1		2		3		4		5		6		7
Escolha	•	|	•	|	•	|	•	|		|		|	

Ou seja, nessa escolha montamos a refeição com uma porção tipo 1, uma porção do tipo 2, uma porção do tipo 3 e uma porção do tipo 4.

Perceba que o símbolo | está sendo usado para separar os espaços entre os 7 tipos de comida, existindo, assim, 6 deles; enquanto o símbolo • está sendo usado para representar o determinado tipo de comida que aparece na escolha feita e, portanto, irá sempre aparecer 4 deles.

Outra escolha possível seria

Tipo de comida	1		2		3		4		5		6		7
Escolha	••	|		|		|	••	|		|		|	

Nesse caso, escolhemos duas porções de comida do tipo 1 e duas porções de comida do tipo 4.

O interessante ao fazermos uso dessa simbologia é que se considerarmos • e | como letras, esse problema coincide com aquele no qual buscávamos saber quantos anagramas era possível formar utilizando letras repetidas. Sendo que, no caso anterior, teríamos 6 letras representadas pelo símbolo | e 4 letras representadas pelo símbolo •. Dessa forma, sabemos a resposta, a qual aprendemos na aula 4 (Permutação com repetição): existem

$$P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{6!4!} = 210$$

possibilidades distintas de montarmos a refeição.

Voltemos ao exemplo dos cinco tipos de chocolate.

Tipo de chocolate	C_1		C_2		C_3		C_4		C_5
Escolha	•	|		|	••	|		|	

Nesse caso, teríamos 7 letras das quais 4 são do tipo | e 3 são do tipo •. Portanto, a resposta à pergunta “de quantas maneiras o cliente pode escolher 3 chocolates dos 5 tipos oferecidos” é

$$P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 7 \times 5 = 35,$$

como já havíamos mostrado esquematicamente no início desta aula.

Exemplo 2

Qual a quantidade de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$, em que $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ são inteiros positivos?

Se pensarmos nesse problema da seguinte maneira:

Variáveis	x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		x_6		x_7
Solução	•	$\mid$	•	$\mid$	•	$\mid$	•	$\mid$		$\mid$		$\mid$	

No esquema anterior, estamos representando a seguinte solução particular do problema

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = x_6 = x_7 = 0.$$

Uma outra solução seria, por exemplo,

Variáveis	x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		x_6		x_7
Solução	••	$\mid$		$\mid$		$\mid$	•	$\mid$		$\mid$		$\mid$	•

Ou seja, $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = x_6 = 0, x_7 = 1$.

Podemos, então, calcular todas as soluções possíveis pela expressão

$$P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{6!4!} = 210.$$

Exemplo 3

Na feira de Caruaru, a carne de porco, de bode e de peba (um tipo de tatu) estão sendo vendidas pelo mesmo preço, entretanto, só podem ser compradas em pacotes de 1 Kg. Você deseja comprar 5 Kg de carne. De quantas maneiras você pode efetuar essa compra?

Solução

Observe que temos três tipos de carne. Representemos por x_1, x_2 e x_3 o número de pacotes de 1 Kg da carne de porco, de bode e de peba, respectivamente. A soma do número de pacotes que desejamos comprar deve totalizar 5, ou seja,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \tag{1}$$

Como é possível que você escolha apenas carne de bode, temos que x_1 ou x_2 ou x_3 podem assumir o valor zero. Então, o problema inicial pode ser traduzido como o número de soluções não negativas da equação (1). Se refizermos o esquema anteriormente explicado, ficamos com

Variáveis	x_1		x_2		x_3
Solução	••	|	•	|	••

No esquema anterior, estamos representando a seguinte solução particular do problema $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2.$ Isto é, 2 Kg de porco, 1 Kg de bode e 2 Kg de peba.

Uma outra solução seria, por exemplo,

Variáveis	x_1		x_2		x_3
Solução		|		|	•••••

Ou seja, 5 Kg de peba.

Podemos, assim, calcular todas as soluções possíveis pela expressão

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = 21.$$

Observe que podemos utilizar combinação completa quando queremos escolher uma certa quantidade de objetos distribuídos em alguns tipos. Por exemplo, escolher 5 anéis dentre as opções ouro, platina e ouro branco.

Tipos	Ouro		Platina		Ouro Branco
Solução	•••	|	••	|	

Já fizemos esse cálculo algumas vezes e temos $P_7^{5,2} = \dfrac{7!}{5!2!} = 21$ maneiras de fazer essa difícil escolha.

Exemplo 4

Um produtor rural produz pitomba, umbu, serigüela, cajá, acerola e pitanga e vende sua produção na feira. Ele vende seus produtos em saquinhos, cada um com 1 Kg do produto. O comprador quer comprar 2 Kg de frutas. De quantas maneiras ele pode realizar essa compra?

Solução

Consideremos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 a quantidade de quilos de pitomba, umbu, serigüela, cajá, acerola e pitanga, respectivamente. Sabemos que a quantidade de quilos que queremos comprar é 2, assim, podemos associar esse problema com o problema que visa encontrar todas as soluções inteiras não negativas da seguinte equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2,$$

que pode ser pensada da seguinte maneira:

Variáveis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Solução	$\bullet$ |	$\bullet$ |	|	|	|	

E que tem $P_7^{5,2} = \dfrac{7!}{5!2!} = 21$ maneiras de fazer essa difícil escolha.

Agora é sua vez!

Atividade 1

1 Sabendo que uma lanchonete oferece 4 tipos de doce, pergunta-se:

a) de quantas maneiras você pode escolher 2 doces?

b) de quantas maneiras você pode escolher 2 doces distintos?

2 Quantas soluções inteiras e não negativas existem para a inequação $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$? (Sugestão: considere os conjuntos $A_0 = \{$soluções da equação $x_1+x_2+x_3 = 0\}, \ldots, A_3 = \{$soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$. Mostre que esses conjuntos são disjuntos; a união deles é exatamente o conjunto procurado. Pelo princípio da adição, o número de elementos dessa união é a soma dos elementos de cada um destes conjuntos.)

3 Na sorveteria mais badalada da cidade, 37 sabores distintos de sorvetes são oferecidos. Quantas são suas opções para a escolha de um sorvete de 3 bolas?

4 Um sertanejo deseja comprar 5 bodes de um criador que dispõe de 3 raças distintas. De quantas maneiras ele pode proceder para a compra desses bodes?

Resumo

Nesta aula, vimos que as combinações completas contemplam, em seu cálculo, além das combinações simples, as combinações com elementos nem todos distintos que ocorrem quando tomamos mais de um elemento do mesmo tipo na coleção considerada. Vimos ainda que essas combinações são utilizadas quando fica claro no problema que a escolha de elementos repetidos na coleção considerada é permitida; também foi visto que a combinação completa é indicada para contar a quantidade de maneiras que podemos escolher uma certa quantidade de elementos distribuídos em alguns tipos diferentes.

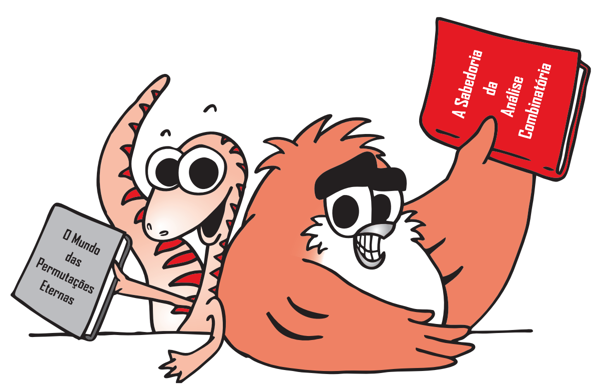
Autoavaliação

1 Dê exemplos de situações que podemos resolver usando combinações simples, mas que não podemos resolver usando combinações completas.

2 Dê exemplos de situações que podemos resolver usando combinações completas, mas que não podemos resolver usando combinações simples.

Referência

MORGADO, P. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática)



Permutações caóticas

Aula

8

Apresentação

Em muitas situações práticas, é comum nos perguntarmos: e se der tudo errado? E se nada ocorrer conforme prevíamos? O assunto desta aula trata de situações desse tipo, ou seja, de situações em que “acontece o caos”, em que tudo dá errado. Em análise combinatória, estudamos tais situações por meio das **permutações caóticas**.

Objetivo

Esperamos que, ao final desta aula, o aluno possa identificar permutações caóticas em situações do dia-a-dia e que possa calculá-las.

Permutações caóticas: aspectos teóricos

Imagine que você organizou as primeiras sete aulas de Análise Combinatória e Probabilidade em ordem na prateleira de seu quarto e foi jogar bola com os amigos para se distrair um pouco. Nesse meio tempo, sua irmãzinha caçula entrou no quarto e "não gostou da maneira" que você organizou as aulas e resolveu reorganizá-las. Depois do jantar, você decidiu revisar as aulas anteriores e percebeu que nenhuma delas estava no lugar inicialmente deixado por você. A pergunta é: de quantas maneiras sua irmãzinha poderia ter feito isso? Será que é muito difícil colocar uma coleção de livros em uma ordem na qual nenhum livro fique na sua posição inicial? Segundo Morgado et al (2004, p. 68), "uma permutação dos números $(1, 2, \ldots, n)$ é dita caótica (ou um desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo".

Assim, se considerarmos a posição inicial das suas aulas como sendo $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ temos que $(2, 1, 3, 5, 4, 7, 6)$ e $(3, 2, 1, 5, 4, 7, 6)$ não são caóticas, já que na primeira o 3 e na segunda o 2 estão nos seus lugares iniciais. Entretanto, $(4, 3, 2, 1, 7, 5, 6)$ e $(7, 3, 2, 1, 4, 5, 6)$ são permutações caóticas.

Com o objetivo de responder a nossa pergunta inicial, considere os seguintes conjuntos:

$A_1 =$ {todas as permutações em que o primeiro elemento esteja no seu lugar inicial}

$A_2 =$ {todas as permutações em que o segundo elemento esteja no seu lugar inicial}

$A_3 =$ {todas as permutações em que o terceiro elemento esteja no seu lugar inicial}

$A_4 =$ {todas as permutações em que o quarto elemento esteja no seu lugar inicial}

$A_5 =$ {todas as permutações em que o quinto elemento esteja no seu lugar inicial}

$A_6 =$ {todas as permutações em que o sexto elemento esteja no seu lugar inicial}

$A_7 =$ {todas as permutações em que o sétimo elemento esteja no seu lugar inicial}

Dessa forma, o conjunto das permutações que não preservam nenhum elemento em seu lugar inicial é dado por $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)^C$. Uma permutação que pertença a esse conjunto não tem nenhum elemento em sua posição original.

Por que?

Porque se uma permutação pertence a $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$, temos que pelo menos um dos 7 elementos da permutação está no seu lugar inicial. Portanto, se a permutação não está nesse conjunto, ou melhor, se ela está no complementar desse conjunto, implica que nenhum elemento está no seu lugar inicial, e, se a permutação está no complementar desse conjunto, implica que ela é uma permutação caótica.

Então, o que precisamos encontrar para resolver essa questão é o número de elementos que pertencem a $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)^C$. Como faremos isso?

Consideremos

$$S = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)^C.$$

O conjunto S representa todas as permutações dos 7 elementos, uma vez que representa todas as permutações caóticas e não caóticas. Se não está claro, basta observar que na primeira união temos as permutações em que algum objeto está no seu lugar original e na segunda união temos as que nenhum objeto está no seu lugar original.

Os conjuntos são disjuntos, logo, pelo **Princípio da Adição**, temos que

$$\#S = \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7) + \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)^C.$$

Mas, como encontrar a quantidade de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$ foi visto na aula 5 (Princípio da inclusão-exclusão).

Para tanto, começamos com uma coleção composta de 4 elementos e vamos aumentando a quantidade de elementos até chegarmos a uma quantidade qualquer de elementos, certo?

Suponhamos então que sua coleção seja formada por 4 aulas, organizadas da seguinte forma $(1, 2, 3, 4)$. Montemos os conjuntos

A_1 = {todas as permutações em que o primeiro elemento esteja no seu lugar inicial}

A_2 = {todas as permutações em que o segundo elemento esteja no seu lugar inicial}

A_3 = {todas as permutações em que o terceiro elemento esteja no seu lugar inicial}

A_4 = {todas as permutações em que o quarto elemento esteja no seu lugar inicial}

Sabemos que queremos encontrar o número de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, o qual, pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, é dado por

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \; & \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \\ & \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_4) - \#(A_3 \cap A_4) + \\ & \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \qquad (1) \\ & + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\end{aligned}$$

Olhemos mais detalhadamente para cada um desses conjuntos.

$A_1 \cap A_2 =$ {todas as permutações em que o primeiro e o segundo elementos estão nos seus lugares iniciais, simultaneamente}

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 =$ {todas as permutações em que o primeiro, o segundo e o terceiro elementos estão nos seus lugares iniciais, simultaneamente}

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 =$ {todas as permutações em que o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto elementos estão nos seus lugares iniciais, simultaneamente}

Por que insistimos nesse "simultaneamente" ao final de cada afirmativa?

Porque queremos que fique claro que:

$(3, 2, 1, 4)$ e $(1, 3, 2, 4)$ não pertencem a $A_1 \cap A_2$;
$(3, 2, 1, 4)$ e $(1, 3, 2, 4)$ não pertencem a $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;
$(3, 1, 2, 4)$ e $(4, 1, 3, 2)$ não pertencem a $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Enquanto

$(1, 2, 3, 4)$ e $(1, 2, 4, 3)$ pertencem a $A_1 \cap A_2$;
$(1, 2, 3, 4)$ pertence a $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;
$(1, 2, 3, 4)$ é o único elemento de $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Calculemos o número de elementos de cada conjunto envolvido na equação (1) para encontrarmos o valor que desejamos.

- Número de elementos de A_1

Os elementos deste conjunto são todas as permutações possíveis de quatro elementos que começam com 1. Então, podemos usar o **Princípio da Multiplicação** para calcular o número de elementos deste conjunto. Para calcular quantas permutações existem neste conjunto, basta tomarmos 3 decisões, que são:

d_1 – Escolher a segunda entrada, visto que a primeira já é 1. Isso pode ser feito de $x_1 = 3$ maneiras.

d_2 – Escolher a terceira entrada, visto que a primeira é 1 e que escolhemos a segunda. Isso pode ser feito de $x_2 = 2$ maneiras.

d_3 – Escolher a quarta entrada, visto que a primeira é 1 e que escolhemos a segunda e a terceira entradas. Isso pode ser feito de $x_3 = 1$ maneira.

Desse modo, teremos $x_1 \times x_2 \times x_3 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$ maneiras de fazer isso. Do mesmo modo, podemos calcular A_2, A_3 e A_4. Considerando que a entrada que já está ocupada no conjunto A_2 é a entrada 2, no conjunto A_3 é a entrada 3 e no conjunto A_4 é a entrada 4; então, temos que o número de elementos de cada um dos conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4 é $3!$.

- Número de elementos de $A_1 \cap A_2$

Os elementos deste conjunto são todas as permutações possíveis de quatro elementos que começam com 1 e que têm a segunda entrada igual a 2. Então, podemos usar o **Princípio da Multiplicação** para calcular o número de elementos deste conjunto. Para calcular quantas permutações existem neste conjunto, basta tomarmos 2 decisões, que são:

d_1 – Escolher a terceira entrada, visto que a primeira é 1 e a segunda é 2. Isso pode ser feito de $x_1 = 2$ maneiras.

d_2 – Escolher a quarta entrada, visto que a primeira é 1, a segunda é 2 e que já escolhemos a terceira entrada. Isso pode ser feito de $x_2 = 1$ maneira.

Desse modo, teremos $x_1 \times x_2 = 2 \times 1 = 2!$ maneiras de fazer isso.

Do mesmo modo, podemos calcular $A_1 \cap A_3, A_1 \cap A_4, A_2 \cap A_3, A_2 \cap A_4, A_3 \cap A_4$ com as mudanças pertinentes, como, por exemplo, em $A_1 \cap A_3$, temos que a primeira e a terceira entrada já estão ocupadas por 1 e 3, respectivamente, e precisamos preencher as outras entradas com os elementos restantes. Isso é feito tomando 2 decisões, a saber:

d_1 – Escolher a segunda entrada, visto que a primeira é 1 e a terceira é 3. Isso pode ser feito de $x_1 = 2$ maneiras.

d_2 – Escolher a quarta entrada, visto que a primeira é 1, a terceira é 3 e que já escolhemos a primeira entrada. Isso pode ser feito de $x_2 = 1$ maneira.

Desse modo, teremos $x_1 \times x_2 = 2 \times 1 = 2!$ maneiras de fazer isso.

Então, temos que o número de elementos de cada interseção a seguir, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3, A_1 \cap A_4, A_2 \cap A_3, A_2 \cap A_4$ e $A_3 \cap A_4$, é $2!$.

- Número de elementos de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Os elementos deste conjunto são todas as permutações possíveis de quatro elementos que começam com 1 e que tenham a segunda entrada igual a 2 e a terceira igual a 3. Então, podemos usar o **Princípio da Multiplicação** para calcular o número de elementos deste conjunto. Para calcular quantas permutações existem neste conjunto, basta tomarmos 1 decisão, que é:

d_1 – Escolher a quarta entrada, visto que a primeira é 1, a segunda é 2 e a terceira entrada é 3. Isso pode ser feito de $x_1 = 1$ maneira.

Desse modo, teremos $x_1 = 1$ maneira de fazer isso.

Do mesmo modo, podemos calcular o número de elementos de $A_1 \cap A_2 \cap A_4$, $A_1 \cap A_3 \cap A_4$ e $A_2 \cap A_3 \cap A_4$ encontrando a resposta 1 em cada caso.

Assim, com a substituição na equação (1), teremos

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= 3! + 3! + 3! + 3! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 \\
&= 4 \times 3! - 6 \times 2! + 4 \times 1! - 1
\end{aligned}$$

Observação – Perceba que cada grupo de interseções tem o mesmo número de elementos, ou seja, o número de elementos na interseção de quaisquer dois conjuntos distintos é o mesmo. O número de elementos na interseção de quaisquer três conjuntos distintos é o mesmo, e assim sucessivamente. Note também que o número de elementos na interseção de quaisquer dois conjuntos distintos pode ser (e, em geral, é) diferente do número de elementos na interseção de quaisquer três conjuntos distintos.

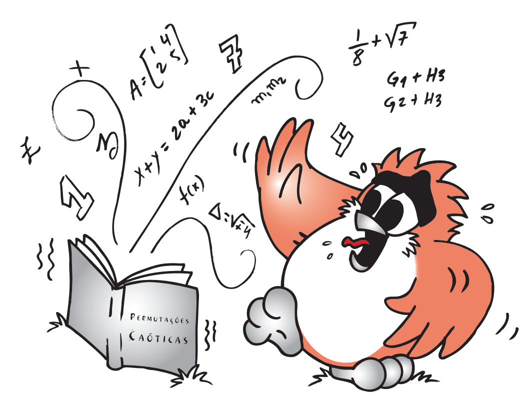
E que número é esse?

Observe que cada vez que interceptamos uma certa quantidade desses conjuntos, o que fixamos é a quantidade de entradas que serão preenchidas. Logo, o número de elementos dessa interseção será $(n-p)!$, em que n é o tamanho das permutações envolvidas e p, o número de conjuntos que estão se interceptando.

No nosso caso, quando fizemos a interseção de quaisquer dois conjuntos, mostramos que, pelo **Princípio da Multiplicação**, o número de elementos dessa interseção é $(4-2)!$ elementos, já que 2 elementos já estão fixados, restando-nos $4-2$ elementos que podem permutar livremente. E quantas vezes aparecerá esse número?

O número de interseções possíveis diferentes que podemos fazer com 2 dos 4 subconjuntos possíveis, ou seja, C_4^2 vezes. Dessa forma, podemos simplificar essa fórmula da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = {} & C_4^1 \times \#(\text{elementos em cada conjunto}) - C_4^2 \times \#(\text{elementos na interseção de 2 conjuntos}) + C_4^3 \times \#(\text{elementos na interseção de 3 conjuntos}) - C_4^4 \times \#(\text{elementos na interseção de 4 conjuntos}) \\
= {} & \frac{4!}{(4-1)! \times 1!} \times 3! - \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} \times 2! + \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} \times 1! - \frac{4!}{(4-4)! \times 4!} \times 0! \\
= {} & \frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!}
\end{aligned}
$$



Mas ainda não é isso o que queremos calcular!

Na verdade, queremos calcular $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)^C = \#S - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$, que resulta em

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)^C &= 4! - \left(\frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!}\right) \\
&= 4! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\
&= 4! \times \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)
\end{aligned}$$

Anote essa expressão em algum lugar.

Façamos agora o caso em que sua coleção seja formada por 5 aulas, organizadas da seguinte forma $(1, 2, 3, 4, 5)$. Montemos os conjuntos

A_1 = {todas as permutações em que o primeiro elemento esteja no seu lugar inicial}

A_2 = {todas as permutações em que o segundo elemento esteja no seu lugar inicial}

A_3 = {todas as permutações em que o terceiro elemento esteja no seu lugar inicial}

A_4 = {todas as permutações em que o quarto elemento esteja no seu lugar inicial}

A_5 = {todas as permutações em que o quinto elemento esteja no seu lugar inicial}

Sabemos que queremos encontrar o número de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, o qual, pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, é dado por (2)

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = \; & \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 + \#A_5 - \#(A_1 \cap A_2) + \\
& - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_5) - \#(A_2 \cap A_3) + \\
& - \#(A_2 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_5) - \#(A_3 \cap A_4) - \#(A_3 \cap A_5) + \\
& - \#(A_4 \cap A_5) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \\
& + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_5) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \\
& + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_5) + \#(A_1 \cap A_4 \cap A_5) + \\
& + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_5) + \qquad (2) \\
& + \#(A_2 \cap A_4 \cap A_5) + \#(A_3 \cap A_4 \cap A_5) + \\
& - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) + \\
& - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + \\
& - \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)
\end{aligned}$$

Olhe mais detalhadamente para cada um dos conjuntos anteriores.

$A_1 \cap A_2 = \{$todas as permutações de 5 elementos em que o primeiro e o segundo elementos estão nos seus lugares iniciais, simultaneamente$\}$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{$todas as permutações de 5 elementos em que o primeiro, o segundo e o terceiro elementos estão nos seus lugares iniciais, simultaneamente$\}$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{$todas as permutações de 5 elementos em que o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto elementos estão nos seus lugares iniciais, simultaneamente$\}$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{$todas as permutações de 5 elementos em que o primeiro, o segundo, o terceiro, o quarto e o quinto elementos estão nos seus lugares iniciais, simultaneamente$\}$

Se fizermos o mesmo procedimento anterior para a determinação do número de elementos dos conjuntos envolvidos na equação 2, atentando para o fato de que agora temos permutações de 5 elementos, obteremos:

- o número de elementos de A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 é igual a $4! = (5-1)!$ (em que 5 é o número de entradas e 1 é o número de entradas já escolhidas);
- o número de elementos de $(A_1 \cap A_2), (A_1 \cap A_3), (A_1 \cap A_4), (A_1 \cap A_5), (A_2 \cap A_3), (A_2 \cap A_4), (A_2 \cap A_5), (A_3 \cap A_4), (A_3 \cap A_5), (A_4 \cap A_5)$ é igual a $3! = (5-2)!$ (sendo 5 o número de entradas e 2 o número de entradas já escolhidas);
- o número de elementos de $(A_1 \cap A_2 \cap A_3), (A_1 \cap A_2 \cap A_4), (A_1 \cap A_2 \cap A_5), (A_1 \cap A_3 \cap A_4), (A_1 \cap A_3 \cap A_5), (A_1 \cap A_4 \cap A_5), (A_2 \cap A_3 \cap A_4), (A_2 \cap A_3 \cap A_5), (A_2 \cap A_4 \cap A_5), (A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ é igual a $2! = (5-3)!$ (sendo 5 o número de entradas e 3 o número de entradas já escolhidas);
- o número de elementos de $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4), (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5), (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5), (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5), (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ é igual a $1! = (5-4)!$ (sendo 5 o número de entradas e 4 o número de entradas já escolhidas);
- o número de elementos de $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ é igual a $1 = 0! = (5-5)!$ (sendo 5 o número de entradas e 5 o número de entradas já escolhidas).

Se temos conhecimento da quantidade de vezes que cada grupo de interseções aparece na equação (2), podemos simplificar a equação.

- Número de maneiras de tomar um conjunto dentre 5 possíveis é igual a C_5^1.
- Número de maneiras de fazer interseções com 2 conjuntos dentre 5 possíveis é igual a C_5^2.
- Número de maneiras de fazer interseções com 3 conjuntos dentre 5 possíveis é igual a C_5^3.
- Número de maneiras de fazer interseções com 4 conjuntos dentre 5 possíveis é igual a C_5^4.
- Número de maneiras de fazer interseções com 5 conjuntos dentre 5 possíveis é igual a C_5^5.

Dessa forma, a equação (2) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_{5t}) = \; & C_5^1 \times \#(\text{elementos em cada conjunto}) - \\
& C_5^2 \times \#(\text{elementos na interseção de 2 conjuntos}) + \\
& C_5^3 \times \#(\text{elementos na interseção de 3 conjuntos}) - \\
& C_5^4 \times \#(\text{elementos na interseção de 4 conjuntos}) + \\
& C_5^5 \times \#(\text{elementos na interseção de 5 conjuntos}) \\
= \; & \frac{5!}{(5-1)! \times 1!} \times 4! - \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} \times 3! + \\
& \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} \times 2! - \frac{5!}{(5-4)! \times 4!} \times 1! + \\
& \frac{5!}{(5-5)! \times 0!} \\
= \; & \frac{5!}{1!} - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{5!}
\end{aligned}$$

Calculemos o que desejamos

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^C = \#S - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5),$$

que resulta em

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^C &= 5! - \left(\frac{5!}{1!} - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{5!}\right) \\
&= 5! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \\
&= 5! \times \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)
\end{aligned}$$

Anote essa expressão abaixo da que tínhamos obtido para 4 conjuntos. Olhe para elas por um instante percebendo a diferença entre as duas.

Creio que agora tenha ficado claro como é o procedimento para obter a resposta da pergunta que fizemos no início desta aula – De quantas maneiras sua irmãzinha pode arrumar suas 7 aulas sem que nenhuma fique no seu lugar original? Antes, porém, vamos tentar obter a expressão para uma quantidade qualquer de elementos.

Vamos supor que tenhamos permutações de tamanho n, isto é, que nosso conjunto de todas as permutações de n elementos na forma inicial seja $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

Depois, precisamos definir os conjuntos

$A_1 = \{$todas as permutações em que o primeiro elemento esteja no seu lugar inicial$\}$

$A_2 = \{$todas as permutações em que o segundo elemento esteja no seu lugar inicial$\}$

.

.

.

$A_n = \{$todas as permutações em que o n-ésimo elemento esteja no seu lugar inicial$\}$

Estamos interessados agora em saber a quantidade de elementos do conjunto $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^C$. Para tanto, precisamos calcular o número de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Usando o **Princípio da Inclusão-Exclusão**, obtemos (3)

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \; & \#A_1 + \ldots + \#A_n - \#(A_1 \cap A_2) - \cdots - \#(A_{n-1} \cap A_n) + \\ & + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \\ & + \cdots + (-1)^{n-1}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)\end{aligned} \tag{3}$$

Podemos simplificar essa equação se soubermos o número de elementos de cada um desses conjuntos e quantas vezes cada grupo de interseções aparece na expressão anterior.

Observação – Verifique, usando o **Princípio da Multiplicação**, que

$\#A_1 = \#A_2 = \cdots = \#A_n = (n-1)!$, em que n é o número de entradas e 1, o número de entradas fixadas.

$\#(A_1 \cap A_2) = \#(A_1 \cap A_3) = \cdots = \#(A_{n-1} \cap A_n) = (n-2)!$, em que n é o número de entradas e 2, o número de entradas fixadas.

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \cdots = \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) = (n-3)!$, em que n é o número de entradas e 3, o número de entradas fixadas e assim sucessivamente.

Também precisamos do seguinte:

- o número de maneiras de tomar um conjunto dentre n possíveis é C_n^1;
- a quantidade de interseções com 2 conjuntos dentre n possíveis é C_n^2;

.

.

.

- a quantidade de interseções com $(n-1)$ conjuntos dentre n possíveis é C_n^{n-1};
- a quantidade de interseções com n conjuntos dentre n possíveis é C_n^n.

Agora, podemos simplificar a equação (3) da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \;& C_n^1 \times (n-1)! - C_n^2 \times (n-2)! + C_n^3 \times (n-3)! + \cdots + \\
& (-1)^{n-1} C_n^n 0! \\
= \;& \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} \times (n-1)! - \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} \times (n-2)! + \\
& + \frac{n!}{(n-3)! \times 3!} \times (n-3)! + \cdots + \\
& + (-1)^{n-1} \frac{n!}{(n-n)! \times n!} \times (n-n)! \\
= \;& \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!}
\end{aligned}
$$

Calculemos, finalmente, o número desejado:

$$
\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^C = \;& \#S - \#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\
= \;& n! - \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!} \right) \\
= \;& n! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \\
= \;& n! \times \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)
\end{aligned}
$$

Denotaremos $D_n = n! \times \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$ e o chamaremos do número de permutações caóticas de n elementos.

Podemos, então, responder à pergunta feita no início desta aula, a qual nos levou a essa dedução.

De acordo com o que foi desenvolvido, temos que a resposta é $D_7 = 7! \times \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) = 2520 - 840 + 210 - 42 + 7 - 1 = 1854.$

No início desta aula, mostramos que essa quantidade é dada, neste caso, por $7! - D_7$, que resulta em 3186 maneiras. Se ela fizer a organização sem perceber o que está fazendo, terá mais chances de deixar pelo menos uma aula no lugar original (questões envolvendo chances serão abordadas nas últimas aulas, quando falaremos de probabilidade).

Exemplo

No parque de exposições de uma cidade do interior, todos os 10 proprietários mais abastados da região chegavam a cavalo e amarravam seus animais na cocheira. Entretanto, na hora da explosão dos fogos de artifícios, houve um incêndio e uma correria daquelas. Naquele atropelo, cada proprietário pegou um cavalo sem prestar atenção se era mesmo o seu e saiu em disparada. De quantas maneiras pode ter acontecido de nenhum proprietário ter saído com seu próprio cavalo?

Solução

Esse tipo de questão é exatamente típica da permutação caótica, ou seja, você tem uma ordem $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ dos cavalos e quer saber o número de maneiras em que ninguém pegou seu cavalo original; é como se você tivesse ordenado sem que nenhum elemento ficasse no seu lugar original. Isso pode ser feito de D_{10} maneiras. E, em termos de número, temos:

$$D_{10} = 10! \times \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}\right) =$$
$$1814400 - 604800 + 151200 - 30240 + 5040 - 720 + 90 - 10 + 1 = 1334961$$

Chegou a sua vez!

Atividade 1

1 Num forró de pé-de-serra, 10 casais chegaram para se divertir. No meio da noite, os homens estavam conversando, quando acabou o querosene das lamparinas. Naquela escuridão, eles foram procurar suas mulheres pelo tato. De quantas maneiras essa procura pode resultar em casais sem que nenhum casal seja o que inicialmente chegou à festa?

2 Era de costume, antigamente, os homens andarem de chapéu, principalmente no interior. Num baile, havia 16 homens e, portanto, 16 chapéus pendurados no cabide. O baile estava animado, quando se soube que Lampião estava nas proximidades da região. Foi um alvoroço tamanho! Todo mundo saiu correndo. De quantas maneiras pode ter acontecido de nenhum dos 16 homens ter pegado seu chapéu original?

3 Numa festa familiar, quatro pessoas costumavam tomar um tipo especial de bebida. Todas as bebidas eram diferentes, mas tinham a mesma cor. O dono da casa, para fazer as honras, serviu uma dose de cada bebida. De quantas maneiras pode ter ocorrido de nenhum deles ter pegado a bebida que apreciava?

4 Três casais que se comunicavam pela *Internet* marcaram um encontro no mesmo local. Eles não se conheciam e apenas disseram a cor da roupa que iriam vestir. Por coincidência, os homens foram vestidos com roupas da mesma cor, assim como as mulheres. De quantas maneiras pode ocorrer que nenhum deles se encontre com a moça com quem conversavam pelo computador?

5 Numa determinada ala de um hospital, existiam 6 doentes, todos tomando medicação oral em forma de comprimidos. Na hora da medicação, a enfermeira chefe havia saído com os prontuários dos doentes e a enfermeira encarregada queria medicar os pacientes no horário correto. De quantas maneiras a enfermeira pode ter dado os remédios de modo que nenhum paciente tenha realmente tomado o SEU remédio?

Resumo

Nesta aula, você estudou as permutações caóticas, as quais são utilizadas em situações em que se deseja calcular o pior caso, ou seja, aquele em que temos várias opções, mas quando escolhemos não acertamos nenhuma delas.

Autoavaliação

1 Em que aspectos as permutações caóticas diferem dos tipos de permutações que estudamos em aulas anteriores?

2 Descreva situações do dia-a-dia em que as permutações caóticas podem ser utilizadas.

Referência

MORGADO, P. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática).

Anotações

Lemas de Kaplanski

Aula

9

Apresentação

Em muitas situações práticas, é necessário que saibamos contar subconjuntos que não possuam elementos consecutivos. Por exemplo, você já imaginou uma reunião em que os representantes inimigos sentassem lado a lado numa mesa redonda? Poderiam acontecer surpresas desagradáveis. Existem ligações químicas em que dois determinados elementos não podem ficar juntos, pois poderiam causar uma explosão. Pois bem, nesta aula estudaremos como contar esses casos.

Objetivo

Esperamos que ao final desta aula você consiga contar as situações nas quais não são permitidos elementos consecutivos tanto em configurações de filas como em círculos. Esperamos ainda que você possa identificar onde os lemas de Kaplanski se aplicam e também como aplicá-los corretamente.

Lemas de Kaplanski

Tentemos responder à seguinte pergunta: de quantas maneiras diferentes podemos formar subconjuntos do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ com p elementos (os quais chamaremos de p- subconjuntos), de modo que cada subconjunto não possua elementos consecutivos?

Exemplo 1

Encontremos os 2-subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}$$

E os 3-subconjuntos?

Não existem, pois se começarmos com 1, teremos $\{1, 3, ?\}$. Note que não dá para completar, já que temos somente até o número 4 e seria necessário o número 5. Se começarmos com 2, a situação é a mesma, e se começarmos com 3, a situação é ainda pior.

Exemplo 2

Encontremos os 2-subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$

$\{2,4\}$, $\{2,5\}$

$\{3,5\}$

E os 3-subconjuntos?

Apenas o $\{1, 3, 5\}$, pois se começarmos com 2, teremos $\{2, 4, ?\}$ e precisaríamos do 6 para que não tivéssemos elementos consecutivos. Começando com o 3, a situação é a mesma, e com o 4, a situação é ainda pior. Perceba que, a cada número escolhido para começar, você automaticamente desqualifica o próximo número a entrar na configuração.

Uma forma sistemática de achar tais subconjuntos é: primeiramente, você escolhe o menor e vai percorrendo em ordem crescente até encontrar todos os possíveis subconjuntos com aquele ponto inicial, em seguida, vai para o segundo menor, repetindo o procedimento anterior até chegar ao maior número em que se pode conseguir subconjunto com essa propriedade.

Então, vamos contar quantos subconjuntos podemos formar dessa maneira.

Inicialmente, suponhamos o conjunto de n elementos $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e vamos organizar subconjuntos de 2 elementos sem elementos consecutivos. Considere os conjuntos:

$A_1 = \{$conjuntos com 2 elementos começando com o elemento 1 e outro elemento não consecutivo maior que 1$\}$

$A_2 = \{$conjuntos com 2 elementos começando com o elemento 2 e outro elemento não consecutivo maior que 2$\}$

.

.

.

$A_{n-2} = \{$conjuntos com 2 elementos começando com o elemento $n-2$ e outro elemento não consecutivo maior que $n-2\}$

Por que só existem esses conjuntos?

Observe que ao começarmos com o elemento $n-1$ o próximo elemento maior e não consecutivo é o $n+1$, que não faz parte de nosso conjunto. Observe também que esses conjuntos são todos disjuntos, pois em A_1 temos todos os subconjuntos de 2 elementos, no qual depois de ordenados os seus elementos, o elemento 1 é o primeiro dos elementos de todos os subconjuntos. Ou seja, os subconjuntos de A_1 são

$$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \ldots, \{1, n\}.$$

Já no A_2, temos todos os subconjuntos de 2 elementos, em que depois de ordenado seus elementos, o elemento 2 é o primeiro dos elementos, isto é,

$\{2,4\},\{2,5\},\ldots,\{2,n\}$. E assim sucessivamente.

O elemento 1 não pertence a nenhum dos subconjuntos pertencentes a A_2, a A_3, ..., a A_{n-2}. Da mesma forma, o elemento 2 não pertence a nenhum dos subconjuntos pertencentes a A_1, a A_3, ..., a A_{n-2}. E assim por diante. Como qualquer subconjunto de 2 elementos (os 2-subconjuntos), depois de ordenado, só pode ter um elemento inicial j, esse subconjunto pertencerá unicamente a A_j. Então, pelo **Princípio da Adição**, o número de 2-subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$ sem elementos consecutivos é a soma do número de elementos de cada conjunto $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$, ou seja,

$\#A_1 + \#A_2 + \ldots \#A_{n-2}$.

Calculando o número de elementos de cada um desses conjuntos, obtemos:

$\boldsymbol{\#A_1}$

Perceba que nesse conjunto o primeiro elemento é o número 1. Logo, o segundo elemento não pode ser o número 2 (pois é um número consecutivo ao 1), restando, portanto, $n-2$ possibilidades para tomarmos o segundo elemento que, juntamente com o 1, formarão o conjunto. Assim, temos $n-2$ elementos no conjunto A_1.

$\boldsymbol{\#A_2}$

Note que nesse conjunto o primeiro elemento é o número 2. Logo, o segundo elemento não pode ser o número 3 (pois é um número consecutivo ao 2), restando, portanto, $n-3$ possibilidades para tomarmos o segundo elemento que, juntamente com o 2, formarão o conjunto. Assim, temos $n-3$ elementos no conjunto A_2.

Prosseguindo da mesma forma, obtemos:

$\boldsymbol{\#A_{n-3}}$

Observe que nesse conjunto o primeiro elemento é o número $n-3$. Logo, o segundo elemento não pode ser o número $n-2$ (pois é um número consecutivo ao $n-3$), restando, portanto, 2 possibilidades ($n-1$ e n) para tomarmos o segundo elemento que, juntamente com o $n-3$, formarão o conjunto. Assim, temos 2 elementos no conjunto A_{n-3}.

$\#A_{n-2}$

Veja que neste conjunto o primeiro elemento é $n-2$. Logo, o segundo elemento não pode ser o número $n-1$ (pois é um número consecutivo ao $n-2$), restando, portanto, 1 possibilidade (n) para tomarmos o segundo elemento que, juntamente com o $n-2$, formará o conjunto. Assim, temos 1 único elemento no conjunto A_{n-2}.

Somando essas quantidades, obtemos:

$$(n-2)+(n-3)+(n-4)+\ldots+2+1=\frac{(n-2)((n-2)+1)}{2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

> Lembrete: a igualdade anterior pode ser provada usamos indução finita, conceito visto na aula 5 (**Princípio da Inclusão-Exclusão**).

Tomemos a expressão final:

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!\times 2}=C^2_{n-2+1}=C^2_{n-1}$$

Suponhamos agora o conjunto de n elementos $\{1,2,3,\ldots,n\}$ e vamos organizar subconjuntos de 3 elementos, os 3-subconjuntos, sem elementos consecutivos.

Considere os conjuntos

$A_1 = \{$conjuntos com 3 elementos começando com o elemento 1 e os outros dois elementos maiores que 1 e não consecutivos$\}$

$A_2 = \{$conjuntos com 3 elementos começando com o elemento 2 e os outros dois elementos maiores que 2 e não consecutivos$\}$

.

.

.

$A_{n-4} = \{$conjuntos com 3 elementos começando com o elemento $n-4$ e os outros dois elementos maiores que $n-4$ e não consecutivos$\}$

Por que só existem esses conjuntos?

Perceba que, se começarmos com $n-3$, o próximo elemento maior que esse não consecutivo a ele é $n-1$ e que o próximo não consecutivo a esse seria $n+1$, que não faz parte do nosso conjunto. Observe também que esses conjuntos são todos disjuntos, pois qualquer elemento de A_1 é um subconjunto de 3 elementos cujo primeiro elemento, depois de ordenado o subconjunto, é o 1, enquanto no A_2, o primeiro elemento é 2 e assim sucessivamente. Então, pelo **Princípio da Adição**, o número de 3-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem elementos consecutivos é a soma do número de elementos de cada conjunto $A_1, A_2, \ldots, A_{n-4}$, ou seja,

$$\#A_1 + \#A_2 + \cdots + \#A_{n-4}.$$

Calculando o número de elementos de cada conjunto desses, temos

$\#A_1$

Veja que, nos subconjuntos que fazem parte desse conjunto, o primeiro elemento é 1 e temos que saber de quantas formas podemos agrupar os outros dois elementos sem que estes fiquem consecutivos, nem a eles mesmos nem ao 1. Portanto, considere os conjuntos

$A_1^3 = \{$conjuntos de 3 elementos não consecutivos em que o primeiro elemento é 1, o segundo é 3 e o terceiro é maior que $3\}$

$A_1^4 = \{$conjuntos de 3 elementos não consecutivos em que o primeiro elemento é 1, o segundo é 4 e o terceiro é maior que $4\}$

.

.

.

$A_1^{n-2} = \{$conjuntos de 3 elementos não consecutivos em que o primeiro elemento é 1, o segundo é $n-2$ e o terceiro é maior que $n-2\}$

Note que esses conjuntos são disjuntos e a união nos dá todos os conjuntos de 3 elementos não consecutivos em que o menor elemento é o 1, ou seja,

$$A_1^3 \cup A_1^4 \cup A_1^5 \cup A_1^6 \ldots \cup A_1^{n-2} = A_1.$$

Logo, teremos que

$$\#A_1^3 + \#A_1^4 + \#A_1^5 + \#A_1^6 + \ldots + \#A_1^{n-2} = \#A_1.$$

Encontremos o nº de elementos de cada conjunto do lado esquerdo da igualdade anterior.

$\#A_1^3$

Observe que nesse conjunto o primeiro elemento é 1 e o segundo é o 3. Logo, o número 4 não pode ser o terceiro elemento (pois é um número consecutivo ao 3), restando, portanto, $n-4$ possibilidades para tomarmos o terceiro elemento que, juntamente com os dois anteriores, formarão o conjunto. Assim, temos $n-4$ elementos no conjunto A_1^3.

$\#A_1^4$

Note que nesse conjunto o primeiro elemento é 1 e o segundo é o 4. Logo, o número 5 não pode ser o terceiro elemento (pois é um número consecutivo ao 4), restando, portanto, $n-5$ possibilidades para tomarmos o terceiro elemento que, juntamente com os dois anteriores, formarão o conjunto. Assim, temos $n-5$ elementos no conjunto A_1^4.

Prosseguindo da mesma forma, temos

$\#A_1^{n-3}$

Perceba que nesse conjunto o primeiro elemento é 1 e o segundo é o $n-3$. Logo, o número $n-2$ não pode ser o terceiro elemento (pois é um número consecutivo ao $n-3$), restando, portanto, 2 possibilidades ($n-1$ e n) para tomarmos o terceiro elemento que, juntamente com os dois anteriores, formarão o conjunto. Assim, temos 2 elementos no conjunto A_1^{n-3}.

Finalmente,

$\#A_1^{n-2}$

Veja que nesse conjunto o primeiro elemento é 1 e o segundo é o $n-2$. Logo, o número $n-1$ não pode ser o terceiro elemento (pois é um número consecutivo ao $n-2$), restando, portanto, 1 possibilidade (n) para tomarmos o terceiro elemento que, juntamente com os dois anteriores, formará o conjunto. Assim, temos 1 elemento no conjunto A_1^{n-2}.

Portanto, o conjunto A_1 terá

$$(n-4)+(n-5)+\ldots+2+1 = \frac{(n-4)((n-4)+1)}{2} = \frac{(n-4)(n-3)}{2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

elementos.

Outra forma de calcular o número de elementos de A_1

Como o conjunto A_1 é formado por todos os subconjuntos de 3 elementos não consecutivos que têm como menor elemento o número 1, então, podemos pensar que a primeira posição já está ocupada com o número 1. Assim, não podemos utilizar o número 2 que é consecutivo, restando apenas a possibilidade de escolher subconjuntos de 2 elementos não consecutivos do conjunto $\{3, 4, \ldots, n\}$ para completar a escolha dos três elementos desejados. Mas, essa quantidade foi calculada no início da aula, ou seja, para um conjunto de n elementos, o resultado foi C^2_{n-2+1}, então, para $n-2$ elementos, teremos $C^2_{(n-2)-2+1} = C^2_{n-3} = \dfrac{(n-3)!}{(n-5)! \times 2!} = \dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$, que foi exatamente o resultado encontrado anteriormente.

$\#\boldsymbol{A_2}$

Observe que, nos subconjuntos que fazem parte desse conjunto, o primeiro elemento é 2 e temos que saber de quantas formas podemos agrupar os outros dois elementos (maiores que 2) sem que estes fiquem consecutivos, nem a eles mesmos nem ao 2.

Considere os conjuntos

$A_2^4 = \{$conjuntos de 3 elementos não consecutivos em que o primeiro elemento é 2, o segundo é 4 e o terceiro é maior que 4$\}$

$A_2^5 = \{$conjuntos de 3 elementos não consecutivos em que o primeiro elemento é 2, o segundo é 5 e o terceiro é maior que 5$\}$

.

.

.

$A_2^{n-2} = \{$conjuntos de 3 elementos não consecutivos em que o primeiro elemento é 2, o segundo é $n-2$ e o terceiro é maior que $n-2\}$

Note que esses conjuntos são disjuntos e que a união nos dá todos os conjuntos de 3 elementos não consecutivos em que o menor elemento é o 2, ou seja,

$$A_2^4 \cup A_2^5 \cup \ldots \cup A_2^{n-2} = A_2.$$

Logo, teremos que

$$\#A_2^4 + \#A_2^5 + \ldots + \#A_2^{n-2} = \#A_2.$$

Encontremos o número de elementos de cada conjunto do lado esquerdo da igualdade anterior.

$\boldsymbol{\#A_2^4}$

Veja que nesse conjunto o primeiro elemento é 2 e o segundo é o 4. Logo, o número 5 não pode ser o terceiro elemento (pois é um número consecutivo ao 4), restando, portanto, $n-5$ possibilidades para tomarmos o terceiro elemento que, juntamente com os dois anteriores, formarão o conjunto. Assim, temos $n-5$ elementos no conjunto A_2^4.

$\boldsymbol{\#A_2^5}$

Perceba que nesse conjunto o primeiro elemento é 2 e o segundo é o 5. Logo, o número 6 não pode ser o terceiro elemento (pois é um número consecutivo ao 5), restando, portanto, $n-6$ possibilidades para tomarmos o terceiro elemento que, juntamente com os dois anteriores, formarão o conjunto. Assim, temos $n-6$ elementos no conjunto A_2^5.

Prosseguindo da mesma forma, temos

$\boldsymbol{\#A_2^{n-3}}$

Observe que nesse conjunto o primeiro elemento é 2 e o segundo é o $n-3$. Logo, o número $n-2$ não pode ser o terceiro elemento (pois é um número consecutivo ao $n-3$), restando, portanto, 2 possibilidades ($n-1$ e n) para tomarmos o terceiro elemento que, juntamente com os dois anteriores, formarão o conjunto. Assim, temos 2 elementos no conjunto A_2^{n-3}. Finalmente,

$\boldsymbol{\#A_2^{n-2}}$

Note que nesse conjunto o primeiro elemento é 2 e o segundo é o $n-2$. Logo, o número $n-1$ não pode ser o terceiro elemento (pois é um número consecutivo ao $n-2$), restando, portanto, 1 possibilidade (n) para tomarmos o terceiro elemento que, juntamente com os dois anteriores, formará o conjunto. Assim, temos 1 elemento no conjunto A_2^{n-2}.

Assim, temos que o conjunto A_2 terá

$$(n-5)+(n-6)+\ldots+2+1 = \frac{(n-5)((n-5)+1)}{2} = \frac{(n-5)(n-4)}{2} = \frac{(n-4)(n-5)}{2}$$

elementos.

Outra forma de calcular o nº de elementos de A_2

Como o conjunto A_2 é formado por todos os subconjuntos de 3 elementos que têm como menor elemento o número 2, então, podemos pensar que a primeira posição já está ocupada com o número 2. Assim, não podemos utilizar o número 3, que é consecutivo, restando apenas a possibilidade de escolher subconjuntos de 2 elementos não consecutivos do conjunto $\{4, 5, \ldots, n\}$ para completar a escolha dos três elementos desejados. Já vimos que para um conjunto de n elementos o resultado foi C^2_{n-2+1}, então, para $n-3$ elementos teremos $C^2_{(n-3)-2+1} = C^2_{n-4} = \dfrac{(n-4)!}{(n-6)! \times 2!} = \dfrac{(n-4)(n-5)}{2}$, que foi exatamente o resultado encontrado anteriormente.

Prosseguindo dessa forma, verificaremos que

$$\#A_3 = \frac{(n-5)(n-6)}{2}, \#A_4 = \frac{(n-6)(n-7)}{2}, \ldots, \#A_{n-4} = \frac{2 \times 1}{2}.$$

Agora, podemos calcular

$A_1 + A_2 + \ldots A_{n-4} = \dfrac{(n-3)(n-4)}{2} + \dfrac{(n-4)(n-5)}{2} + \dfrac{(n-5)(n-6)}{2} + \ldots + \dfrac{2 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}[(n-3)(n-4) + (n-4)(n-5) + \ldots 3 \times 2 + 2 \times 1]$.

Veja que a equação que queremos resolver é do tipo $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + k(k+1)$ para $k = n-4$.

1) $\quad 1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

2) $\quad 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Observe que:

$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + k(k+1) = 1 \times (1+1) + 2 \times (2+1) + \ldots + k(k+1) = 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \ldots + k^2 + k = 1 + 2 + \ldots + k + 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$

Utilizando as igualdades 1) e 2), podemos escrever:

$$1+2+\ldots+k+1^2+2^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

e, assim,

$$1\times 2+2\times 3+\ldots+k\times(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Fazendo então $k = n-4$, obtemos

$$\#A_1 + \#A_2 + \ldots \#A_{n-4} = \frac{1}{2}((n-3)(n-4) + (n-4)(n-5) + \ldots + 2 \times 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{3}\right) = \frac{(n-2)!}{3! \times (n-5)!} = C^3_{n-2}.$$

Paremos um minuto para observarmos os valores obtidos para o número de subconjuntos de 2 e 3 elementos sem elementos consecutivos, C^2_{n-1} e C^3_{n-2}, respectivamente. Analisando os números que compõem C^2_{n-1} e C^3_{n-2}, temos que: n é o número de elementos do conjunto inicial e 2 e 3 são os números de elementos dos subconjuntos que estamos tomando, respectivamente. Mas, qual a ligação entre o número 2 e o número $n-1$ que apareceu subscrito na expressão C^3_{n-1}? E qual a ligação entre o número 3 e o número $n-2$ que apareceu subscrito na expressão C^3_{n-2}? Perceba que o número que está sendo subtraído de n é sempre o número de elementos do subconjunto que estamos tomando menos 1. Será então que se quiséssemos encontrar a quantidade de subconjuntos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ com p elementos sem elementos consecutivos o resultado seria $C^p_{n-(p-1)}$? Exatamente! É isso que diz o

Primeiro lema de Kaplanski

O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é

$$f(n,p) = C^p_{n-p+1}$$

Observação – Perceba então que só teremos possibilidade de conseguir tais subconjuntos quando $p < n - p + 1$.

Aproveitemos para constatar o que fizemos no início da aula.

Exemplo 3

Encontremos a quantidade de 2-subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$.

$f(4,2) = C^2_{4-2+1} = C^2_3 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$

E os 3-subconjuntos?

Note que $n - p + 1 = 4 - 3 + 1 = 2 < 3 = p$, logo, não existem 3-subconjuntos para esse conjunto.

Exemplo 4

Encontremos a quantidade de 2-subconjuntos de {1, 2, 3, 4, 5}.

$f(5,2) = C^2_{5-2+1} = C^2_4 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$

E os 3 sub-conjuntos?

$f(5,3) = C^2_{5-3+1} = C^3_3 = \dfrac{3!}{3!0!} = 1$

Já os 4-subconjuntos não existem, pois $n - p + 1 = 5 - 4 + 1 = 2 < 4$.

Exemplo 5

As três provas do vestibular da UFRN devem ser realizadas nos primeiros 7 dias de dezembro. De quantas maneiras é possível escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos?

Solução

Temos 7 dias em que as provas devem ser marcadas e 3 provas para serem alocadas sem que fiquem em dias consecutivos, ou seja, temos que encontrar a quantidade de 3-subconjuntos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, problema que se encaixa perfeitamente no primeiro lema de Kaplanski e é resolvido por

$f(7,3) = C^3_{7-3+1} = C^3_5 = \dfrac{5!}{3!2!} = 10.$

Importante: note que o lema de Kaplanski apenas seleciona os dias não consecutivos, as provas ainda podem ser escolhidas de qualquer forma dentro dos dias pré-selecionados.

Assim, se a pergunta fosse a que está proposta no exemplo a seguir...

Exemplo 6

De quantas maneiras diferentes podemos aplicar as três provas do vestibular da UFRN nos primeiros 7 dias de dezembro sem que haja provas em dias consecutivos?

Solução

Nessa questão, temos duas decisões a tomar: escolher os dias não consecutivos e escolher a ordem da realização das provas nestes dias. O que o lema de Kaplanski diz, por exemplo, é que uma possibilidade seria o dia 01/12, o dia 03/12 e o dia 05/12.

Mas, uma vez escolhidos esses dias, podemos ter:

01/12	03/12	05/12
MATEMÁTICA	QUÍMICA	INGLÊS
MATEMÁTICA	INGLÊS	QUÍMICA
QUÍMICA	MATEMÁTICA	INGLÊS
QUÍMICA	INGLÊS	MATEMÁTICA
INGLÊS	MATEMÁTICA	QUÍMICA
INGLÊS	QUÍMICA	MATEMÁTICA

Dessa forma, temos que:

$d_1 -$ escolher os dias não consecutivos dentre os 7 dias possíveis;

$d_2 -$ escolher a ordem em que podemos aplicar as três provas nos 3 dias pré-determinados.

A decisão d_1 pode ser tomada de 10 maneiras, como vimos no exemplo anterior. Já a decisão d_2 pode ser tomada de $3!$ maneiras, pois trata da quantidade de maneiras que podemos alocar 3 objetos distintos em 3 lugares sem que nenhum fique de fora.

Pelo **Princípio Multiplicativo**, temos que a quantidade procurada é $10 \times 3! = 60$.

Exemplo 7

Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI que não possuem S consecutivos?

Solução

Observe que queremos separar os S sem nos preocuparmos com as demais letras. Se pensarmos em MISSISSIPI como sendo 10 espaços e acharmos dentre esses 10 espaços 4 lugares não consecutivos para alocarmos as letras S o restante poderá variar à vontade.

Então, temos duas decisões a tomar:

d_1- escolher 4 lugares não consecutivos dentre os 10 possíveis (para colocar as letras S);

d_2- escolher os lugares para alocar as outras letras.

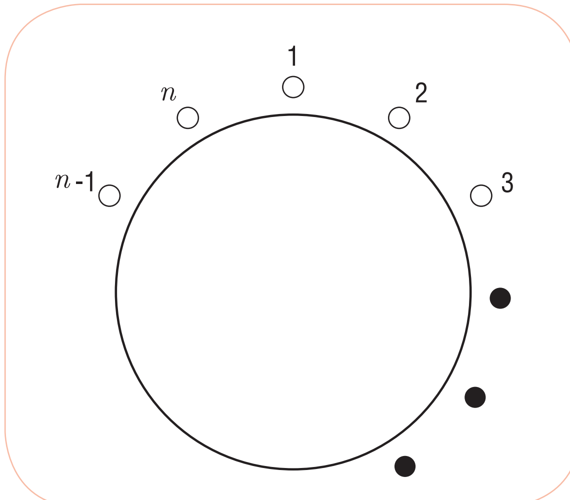
A decisão d_1 pode ser tomada, usando o lema de Kaplanski, de $f(10,4)$ maneiras. Já a decisão d_2 pode ser tomada de $P_6^{4,1,1}$ maneiras, pois trata de permutações sem que todos os elementos sejam distintos.

Pelo **Princípio Multiplicativo**, a quantidade procurada é

$f(10,4) \times P_6^{4,1,1} = 30 \times 35 = 1050.$

Analisemos agora a seguinte situação:

Suponha uma mesa com n cadeiras numeradas em volta.



De quantas maneiras podemos escolher p cadeiras sem que tenhamos 2 cadeiras consecutivas?

Perceba que agora o n está consecutivo ao 1.

Vamos proceder da mesma maneira que fizemos no caso da fila. Começaremos com todos os subconjuntos que tenham a propriedade desejada cujo primeiro elemento é o menor possível; em seguida, com todos os subconjuntos, começando do segundo menor e continuaremos até o último número possível, de modo que ainda consigamos construir o subconjunto com a propriedade desejada.

Vejamos como seria!

Comecemos com os subconjuntos cujo primeiro elemento é o número 1. Dentre os $p-1$ elementos restantes, não podemos escolher nem o 2 nem o n, logo temos $n-3$ chances para escolher $p-1$ elementos que não sejam consecutivos. Ou seja, queremos escolher no conjunto $\{3, 4, \ldots, n-1\}, p-1$ elementos não consecutivos. Pelo **primeiro lema de Kaplanski**,esse número é $f(n-3, p-1) = C^{p-1}_{n-3-(p-1)+1} = C^{p-1}_{n-p-1}$.

Agora, consideremos os p-subconjuntos que não começam por 1, logo, o 1 não fará parte desses p-subconjutos. Teremos então que escolher do conjunto $\{3, 4, \ldots, n-1\}$ (agora o último elemento não é consecutivo ao primeiro!) os p-subconjuntos que não tenham elementos consecutivos. Mas, isso o primeiro lema de Kaplanski resolve, e temos como resultado $f(n-1, p) = C^{p}_{n-1-p+1} = C^{p}_{n-p}$.

Ora, o número dos p-subconjuntos que não possuem elementos consecutivos é dado pela união dos p-subconjuntos que não possuem elementos consecutivos e contêm o 1 com os p-subconjuntos que não possuem elementos consecutivos e não contêm o 1. Como essa união é disjunta (já que um conjunto não pode, simultaneamente, ter e não ter o elemento 1), o **Princípio Aditivo** diz que o número de p-subconjuntos que não possuem elementos consecutivos é: $C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-p}^{p} = \dfrac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}$.

Vamos acompanhar essa conta?

$$C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-p}^{p} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)! \times (n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p! \times (n-2p)!} = \frac{p! \times (n-p-1)! + (p-1)! \times (n-p)!}{(p-1) \times p! \times (n-2p)!}$$

Fazendo a conta do numerador separadamente, temos:

$$p! \times (n-p-1)! + (p-1)! \times (n-p)! = p \times (p-1)! \times (n-p-1)! + (p-1)! \times (n-p) \times (n-p-1)!$$

Colocando $(p-1)! \times (n-p-1)!$ em evidência

$$(p-1)! \times (n-p-1)!(p+n-p) = n \times (p-1)! \times (n-p-1)!$$

Substituindo esse valor na expressão anterior, temos

$$\frac{p! \times (n-p-1)! + (p-1)! \times (n-p)!}{(p-1)! \times p! \times (n-2p)!} = \frac{n \times (p-1)! \times (n-p-1)!}{(p-1)! \times p! \times (n-2p)!} = \frac{n \times (n-p-1)!}{p! \times (n-2p)!}$$

Multiplicando e dividindo a equação anterior por $(n-p)$, obtemos finalmente,

$$\frac{n \times (n-p-1)!}{p! \times (n-2p)!} = \frac{n \times (n-p) \times (n-p-1)!}{(n-p) \times p! \times (n-2p)!} = \frac{n \times (n-p)!}{(n-p)p! \times (n-2p)!} = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}$$

como queríamos. O que acabamos de mostrar é exatamente o

Segundo lema de Kaplanski

O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a $g(n,p) = \dfrac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}$.

Exemplo 8

Em decorrência dos últimos acontecimentos de violência entre as torcidas organizadas do São Paulo e do Palmeiras, a Federação de Futebol do Estado de São Paulo resolveu convocar os chefes de torcida dos 8 maiores clubes do estado para uma reunião. A reunião acontecerá em uma mesa redonda com 10 cadeiras onde sentarão os chefes de torcida, o presidente da Federação e um secretário. Devido ao clima de inimizade entre as torcidas do São Paulo e do Palmeiras, resolveu-se distribuir as cadeiras de modo que esses líderes sentassem em cadeiras não consecutivas. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Solução

Temos posições fixas de modo que o último é consecutivo ao primeiro, logo temos uma situação típica de aplicação do segundo lema de Kaplanski, que nos dá como resposta:

$$g(10,2) = \frac{10}{10-2} C^2_{10-2} = \frac{10}{8} C^2_8 = \frac{10 \times 8 \times 7 \times 6!}{8 \times 2! \times 6!} = 35.$$

Importante: note que o segundo lema de Kaplanski apenas seleciona as cadeiras não consecutivas, os líderes das torcidas ainda podem sentar como quiserem, desde que os líderes das torcidas do São Paulo e do Palmeiras sentem nas cadeiras destinadas a eles.

Se a pergunta fosse formulada como a do Exemplo 9...

Exemplo 9

De quantas maneiras pode ser composta a mesa, desde que os líderes das torcidas do São Paulo e do Palmeiras sentem-se em cadeiras não consecutivas?

Temos aqui três decisões a tomar:

$d_1 -$ separar as duas cadeiras;

$d_2 -$ sentar os líderes das torcidas do São Paulo e do Palmeiras nessas cadeiras;

$d_3 -$ sentar os outros líderes, assim como o presidente e o secretário, nas cadeiras

Pelo segundo lema de Kaplanski, temos que a decisão d_1 pode ser tomada de $g(10,2) = 35$ maneiras. A decisão d_2, que é alocar duas pessoas, em duas cadeiras pode ser tomada de $2!$ maneiras (lembre: mesma quantidade de elementos e lugares). E a decisão d_3, que é alocar as 8 pessoas restantes em 8 cadeiras, é $8!$ (novamente temos mesma quantidade de elementos e lugares).

Pelo **Princípio Multiplicativo**, a composição da mesa pode ser feita de $g(10,2)\times 2!\times 8!$.

Exemplo 10

Sabemos que uma injeção não pode ser aplicada em qualquer ponto da nádega. Suponha que a região na qual se possa tomar injeção seja de forma circular e que ao longo desse círculo haja 7 pontos ideais para a aplicação. Uma pessoa está doente e o remédio é de 150 ml, injetável, dividido em 3 injeções. O médico recomendou ao enfermeiro que ao aplicar as injeções evitasse dois pontos ideais consecutivos. Portanto, de quantas maneiras o enfermeiro pode aplicar essas injeções atendendo ao pedido do médico?

Solução

Há 7 pontos fixos num círculo e queremos escolher 3 não consecutivos. Essa situação se encaixa perfeitamente nas hipóteses do segundo lema de Kaplanski, que nos dá como resposta $g(7,3)=\dfrac{7}{7-3}C^3_{7-3}=\dfrac{7}{4}C^3_4$.

Exemplo 11

Se as injeções do exemplo anterior forem de remédios diferentes, de quantas maneiras distintas o enfermeiro poderá aplicar essas injeções atendendo ao pedido do médico?

Solução

Perceba que agora existem duas decisões a serem tomadas:

d_1 – escolher os locais de aplicação, o que pode ser feito de $g(7,3)$ maneiras distintas;

d_2 – escolher a ordem de aplicar as injeções, que pode ser feita de $3!$ maneiras.

Então, pelo **Princípio Multiplicativo**, a quantidade de maneiras distintas de aplicar essas 3 injeções é $3!g(7,3)$.

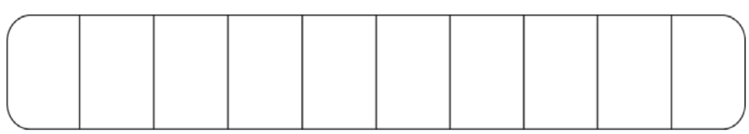
Vamos tentar?

Atividade 1

1 Num jardim zoológico de uma cidade, foi lançado o projeto “zoológico na rua”. Esse projeto consiste em levar, a cada final de semana, 4 jaulas e colocá-las uma ao lado da outra. Entretanto, existem dois animais que não podem ficar em jaulas adjacentes (vizinhas) de maneira alguma. Quantas possibilidades o pessoal do zoológico tem para escolher duas jaulas não adjacentes?

2 Um paciente estava muito doente e seu patrão lhe deu 7 dias de folga para o seu tratamento. Ele foi ao médico e este receitou um remédio composto por 3 comprimidos. Entretanto, a bula chamava atenção para o fato de que esses comprimidos, de modo algum, deveriam ser ingeridos em dias consecutivos. Quantas possibilidades o doente tem de nos 7 dias tomar toda a medicação atendendo precisamente ao que a bula adverte?

3 Em um grupo de 10 bodes, existem três que não conseguem ficar próximos sem haver briga. O dono desses animais vai levá-los à feira para vendê-los e o transporte será feito em um caminhão cuja carroceria é dividida conforme ilustrado a seguir.



De quantas maneiras o criador pode acomodar os animais sem que os três animais briguentos fiquem em jaulas adjacentes?

4 Suponha que no projeto “zoológico na rua”, referido na primeira questão, as jaulas sejam posicionadas em forma de círculo e que dentre os 7 animais levados 2 não pudessem ficar em jaulas adjacentes.

a) De quantas maneiras o pessoal do zoológico pode escolher duas jaulas não adjacentes?

b) E de quantos modos distintos os animais podem ser arrumados nas jaulas sem que os dois animais “problemas” fiquem em jaulas adjacentes? (Dica: notar que aqui temos 3 decisões a serem tomadas)

Resumo

Nesta aula, você estudou que os lemas de Kaplansky servem para contar subconjuntos que não possuam elementos adjacentes. O primeiro lema aplica-se a situações do tipo fila e o segundo às situações circulares, mas fixas, uma vez que não é permitido girar a configuração.

Autoavaliação

1. Os lemas de Kaplansky foram obtidos como uma aplicação de qual parte da teoria estudada anteriormente?

2. Fica mais simples utilizar Kaplansky ou tentar por meio do **Princípio Multiplicativo**?

3. Como podemos aplicar os lemas de Kaplansky na seguinte situação: quantos são os anagramas da palavra ROMA sem que tenhamos R e O em posições adjacentes?

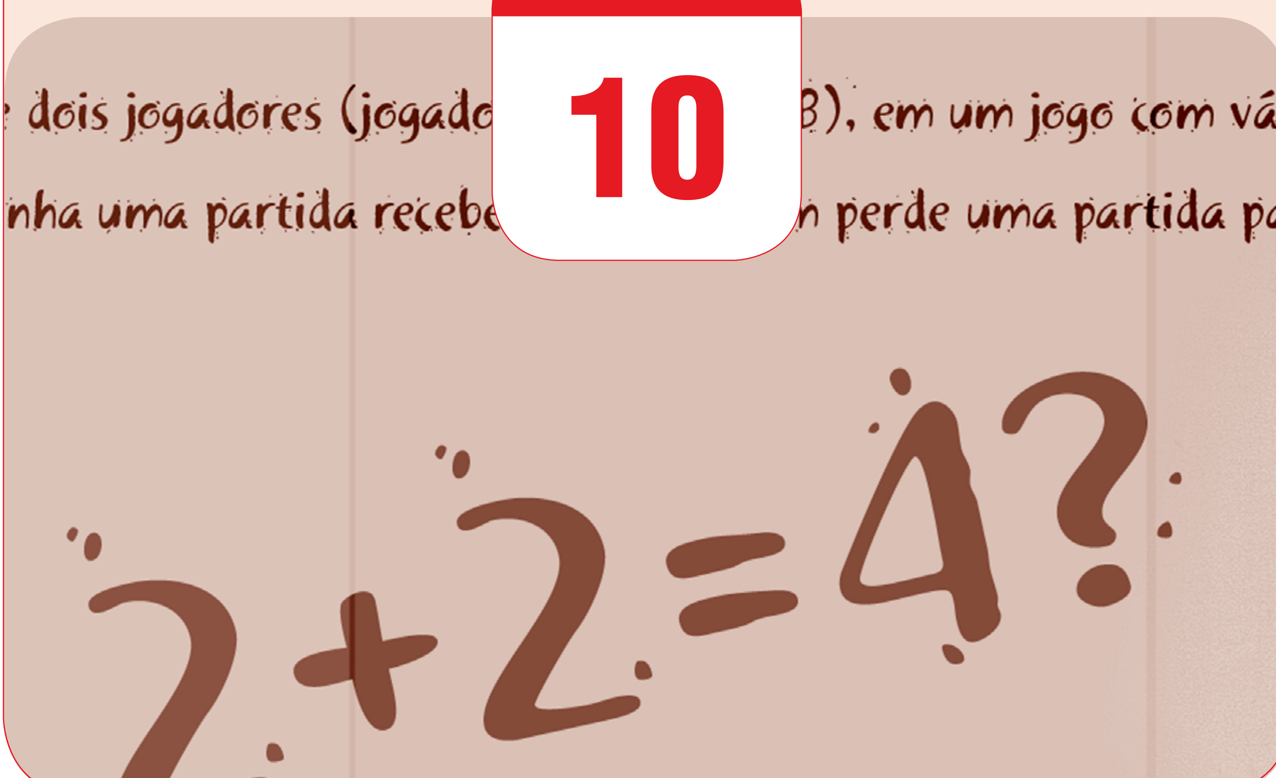
Referência

MORGADO, P. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática).

Princípio da Reflexão

Aula

10

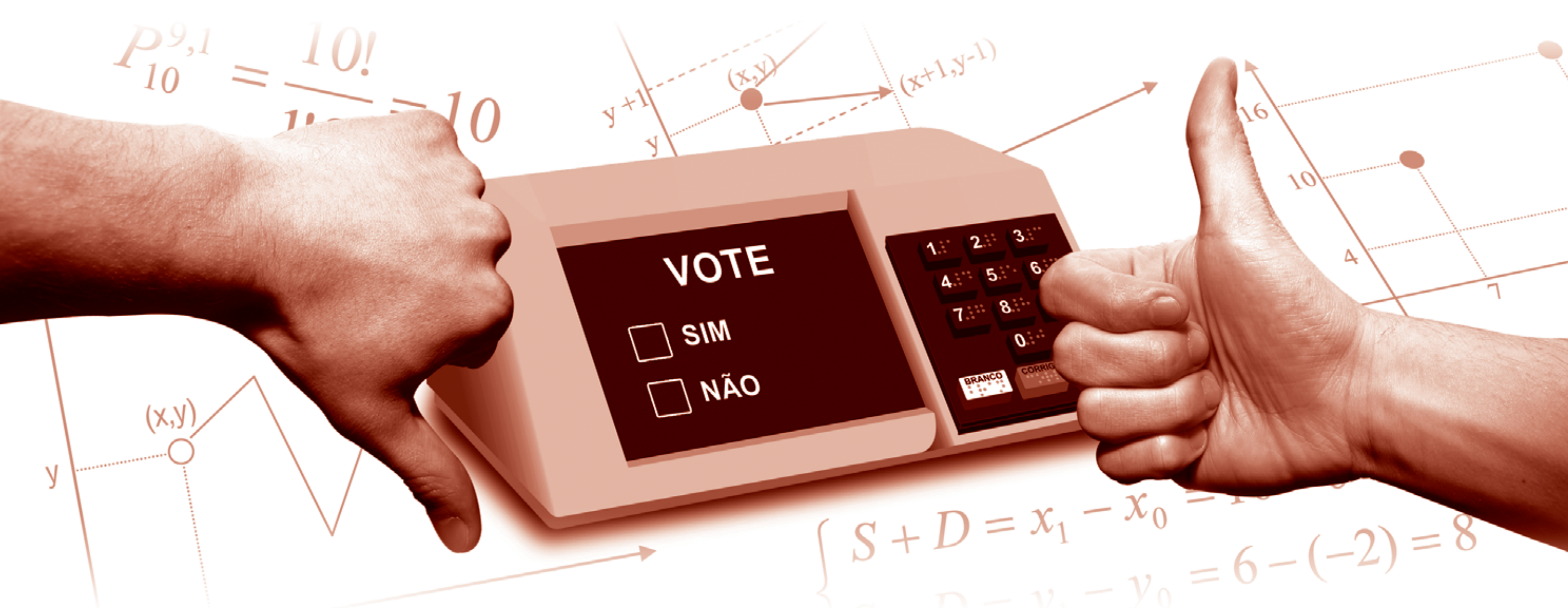


Apresentação

Em muitos momentos da nossa vida, presenciamos situações em que a cada instante elas melhoram ou pioram um pouco. Por exemplo, nesses últimos dias, quando ocorreu a cassação dos nossos “queridos” deputados federais envolvidos no esquema do mensalão, depois que todos votaram, a urna foi levada para a tribuna onde os votos foram contados, sendo anotadas as quantidades de SIM e de NÃO. A esse processo dá–se o nome de marcha de apuração dos votos. Você já parou para se perguntar quantas marchas de apuração diferentes poderiam ser feitas, de modo que se chegasse ao mesmo resultado, 232 x 127? Nesta aula, utilizaremos o **Princípio da Reflexão** para resolver questões envolvendo quantidade de marchas de apuração ou situações semelhantes.

Objetivo

Nesta aula, esperamos que você perceba que, mesmo sabendo o resultado final, pode haver momentos, durante o processo, que indiquem a possibilidade do resultado ser totalmente diferente e que seja capaz de calcular, usando o princípio da reflexão, quantos são esses casos.



Contextualizando...

Suponhamos um analista financeiro que acompanhe diuturnamente o preço das ações no mercado financeiro. Se fôssemos representar o preço da ação ao longo do tempo, poderíamos pensar no plano coordenado, em que no eixo x representaríamos o tempo e no eixo y representaríamos o preço da ação. Conforme representado na figura a seguir.

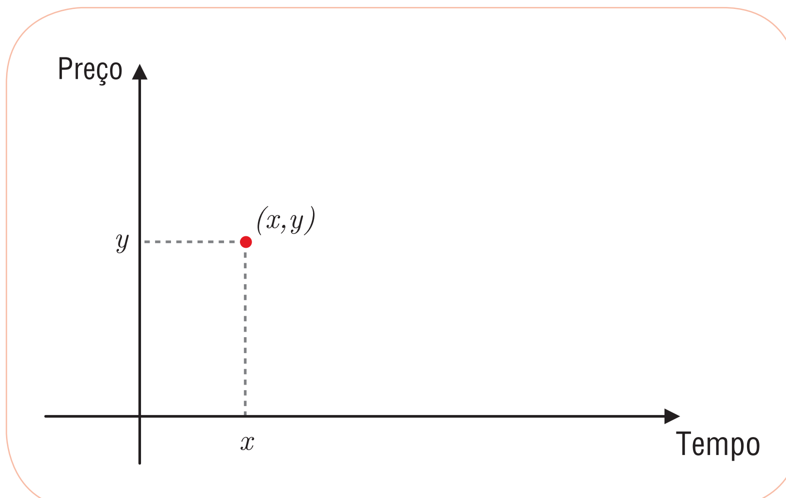


Figura 1 – Representação do preço de uma ação no tempo

Então, poderíamos imaginar que ao longo do tempo esse ponto (x, y) se deslocará para cima ou para baixo dependendo do aumento ou diminuição do preço da ação, conforme ilustrado na Figura 2.

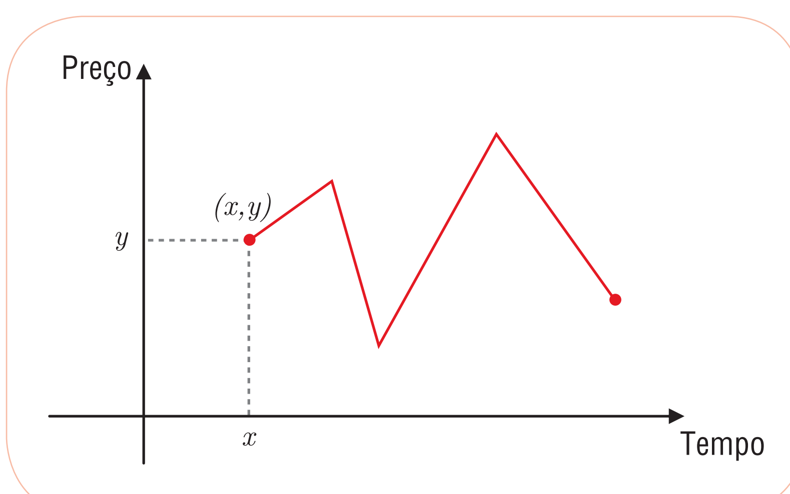


Figura 2 – Um possível comportamento da ação no tempo

Para simplificar nossa análise, suponhamos que você tenha decidido verificar o desempenho dessas ações apenas em uma unidade de tempo (por exemplo, de 10 em 10 minutos). E que nesse tempo só tenha possibilidade do preço da ação subir ou descer uma unidade monetária (por exemplo, 1 real), conforme ilustramos na Figura 3.

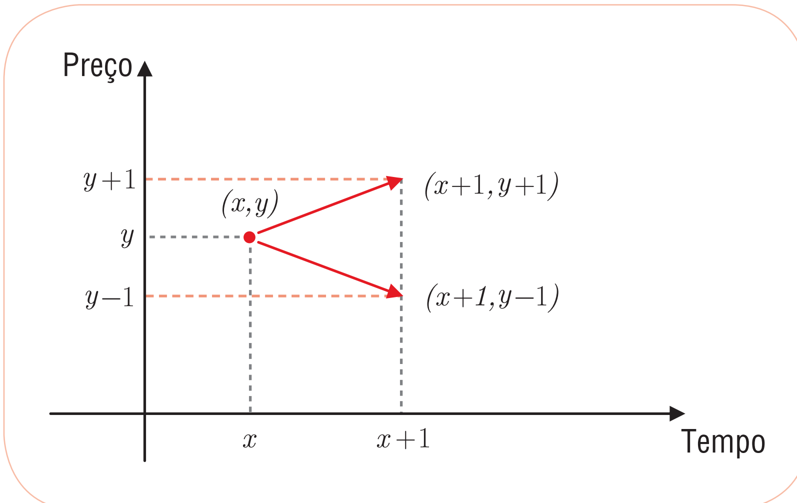


Figura 3 – Representação de como estudaremos o movimento do preço da ação

Mesmo sabendo que o desempenho do mercado financeiro envolve vários fatores, como economia, política e administração da empresa, o analista pode querer responder a algumas perguntas, por exemplo:

i) existe alguma chance de em uma hora a ação perder todo seu valor?

ii) existe alguma chance de em uma hora a ação dobrar de valor?

Essas perguntas são naturais e importantes para um analista financeiro, e serão respondidas por meio do **Princípio da Reflexão**, que estudaremos nesta aula.

Princípio da Reflexão

Em toda esta aula, imagine-se estudando uma partícula que se move no plano. Seu movimento é o seguinte: a cada unidade de tempo, ela desloca-se em uma unidade para a direita e em uma unidade para cima ou para baixo.

Podemos encaixar várias situações práticas neste estudo, por exemplo, a contagem de votos em uma eleição com dois candidatos (os dois preferidos segundo a pesquisa de boca de urna). Cada voto apurado em favor de um dos candidatos seria um passo para a direita e para cima; cada voto apurado em favor do oponente seria um passo para a direita e para baixo. Ao final da eleição, se o ponto estiver acima do eixo x, teremos vitória do primeiro candidato, abaixo, sua derrota e sobre o eixo x ocorreria um empate com seu adversário.

Suponhamos que dois jogadores (jogador A e jogador B), em um jogo com várias partidas, fazem a seguinte aposta: quem ganha uma partida recebe um real, quem perde uma partida paga um real. Podemos representar graficamente o resultado desse jogo assim: se o jogador A ganha uma partida,o deslocamento é para a direita e para cima e, se ele perde, o deslocamento é para a direita e para baixo. Ao final do jogo, se o ponto estiver acima do eixo x, o jogador A terá ganhado mais vezes do que perdido; se o ponto estiver abaixo do eixo x, terá perdido mais vezes do que ganhado; e, se o ponto estiver sobre o eixo x, terá ocorrido um empate.

Poderíamos criar vários exemplos em que esse tipo de situação ocorra. Entretanto, vamos agora estudar como responder a algumas questões referentes a essa situação.

De que forma podemos responder à questão: quantas são as trajetórias distintas em que uma partícula com o movimento descrito anteriormente sai da origem e atinge o ponto (8,6)?

A representação (0,0)→(8,6) significa que a partícula sai do ponto (0,0) e atinge o ponto (8,6).

Antes de respondermos, vamos tentar interpretar o que significa sair de (0,0) e chegar em (8,6).

Lembre-se de que o movimento se dá da seguinte maneira: um passo significa uma unidade para a direita e uma unidade para cima ou uma unidade para baixo. Então, percebemos que quando a partícula pára, a primeira coordenada do ponto representa a quantidade de passos executados como, em cada passo desses,a partícula se move para cima ou para baixo; essa diferença entre subidas e descidas nos dá exatamente a posição da segunda coordenada do par ordenado final. Ou seja, se representarmos por S uma subida e por D uma descida, podemos dizer que o número de subidas mais o número de descidas que a partícula realizou é a coordenada x do ponto final e que a diferença entre o número de subidas e o número de descidas nos dá a coordenada y do ponto final.

Para esse nosso problema, temos

$$\begin{cases} S + D = 8 \\ \\ S - D = 6 \end{cases} \Rightarrow S = 7, D = 1$$

O que significa isso?

Significa que para eu sair de (0,0) e chegar a (8,6), preciso realizar 7 subidas e 1 descida.

Constatemos isso graficamente observando algumas possíveis trajetórias começando no (0,0) e terminando em (8,6). Note que qualquer uma delas apresenta 7 subidas e 1 descida.

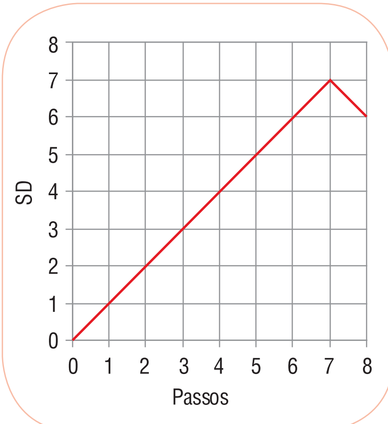


Figura 4 – Gráfico SSSSSSSD

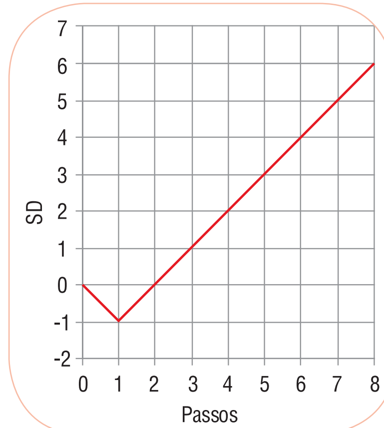


Figura 5 – Gráfico DSSSSSSS

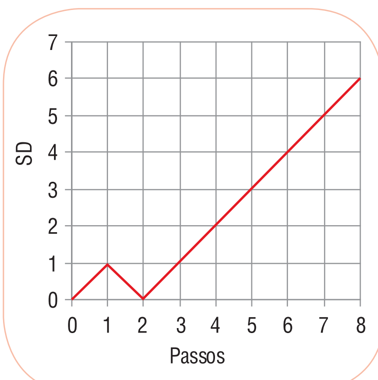


Figura 6 – Gráfico SDSSSSSS

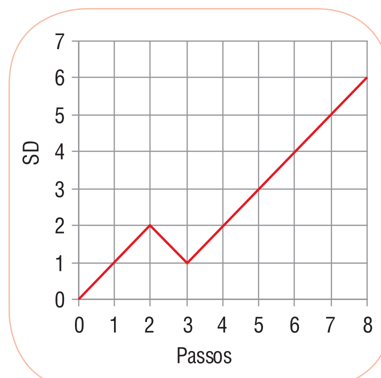


Figura 7 – Gráfico SSDSSSSS

Assim, se considerarmos esses trajetos formados por S e D teríamos que os trajetos anteriores poderiam ser representados assim: Figura 4 o gráfico SSSSSSSD, Figura 5 o gráfico DSSSSSSS, Figura 6 o gráfico SDSSSSSS, Figura 7 o gráfico SSDSSSSS.

A quantidade de S e de D que encontramos, ao resolvermos o sistema, foi exatamente a quantidade necessária de subidas e descidas que nos garantem que, começando do (0,0), conseguimos chegar ao ponto final desejado. Agora, a quantidade de caminhos distintos que podemos conseguir é o mesmo que a quantidade de anagramas diferentes que podemos formar com a quantidade de S e de D encontradas, que neste caso é:

$$P^{8}_{7,1} = \frac{8!}{7!1!} = 8$$

Assim, esse problema é resolvido em duas partes:

1) encontrar quantos S e quantos D são necessários para, partindo de (0,0), chegarmos ao ponto final desejado;

2) se foi possível encontrar essas quantidades, os caminhos possíveis são dados pela quantidade de anagramas distintos que podemos formar com essas duas letras nas quantidades encontradas.

Observação – Note que depois de encontradas as quantidades de S e D necessárias para sair de (0,0) e chegar ao ponto desejado, qualquer seqüência que venhamos a montar com tais quantidades nos dará caminhos saindo de (0,0) e chegando ao ponto desejado. Alterando as ordens dos S e D, continuaremos com um caminho saindo de (0,0) e chegando ao ponto desejado, contudo, diferente dos anteriores. Mas, trocando dois S ou dois D de lugar, não mudaremos o caminho. Isso fica claro se pensarmos que as quantidades de S e D, que é o que determina as coordenadas, não se alteram. A única coisa que muda é o trajeto, pois é a ordem dos S e D que o determina. (Observe os gráficos anteriores.)

Tudo o que fizemos até o momento só levou em consideração o ponto de saída (0,0) e o ponto de chegada (x, y), pois isso permitiu que o ponto (x, y) exprimisse em suas coordenadas:

$x = x - 0$ o número de passos dados: $S + D$;

$y = y - 0$ a diferença entre as subidas e descidas: $S - D$.

E se os pontos inicial e final fossem pontos quaisquer (x_0, y_0) e (x_1, y_1), respectivamente, quantos caminhos distintos existem para representar $(x_0, y_0) \to (x_1, y_1)$?

Perceba que a diferença das primeiras coordenadas continuará representando o número de passos que foram dados para sair do ponto inicial e chegar ao ponto final, ou seja,

$$S + D = x_1 - x_0.$$

E que a diferença das segundas coordenadas continuará representando a diferença entre o número de subidas e descidas, saindo do ponto inicial para chegar ao ponto final, ou seja,

$$S - D = y_1 - y_0.$$

Resolvido esse sistema, teremos encontrado o número de subidas e descidas que fazem com que a partícula saia de (x_0, y_0) e chegue a (x_1, y_1). Em seguida, basta saber quantos anagramas distintos existem com a quantidade de S e D encontrados.

Para ilustrar essa situação, voltemos à pergunta feita, no começo desta aula, pelo analista financeiro.

Exemplo 1

Suponhamos que o analista começa a observar o preço da ação no tempo 7 quando ela está valendo R$ 10,00.

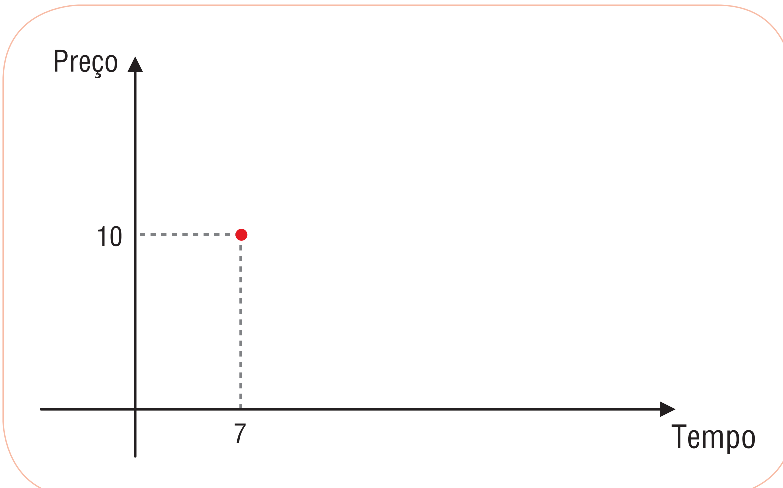


Figura 8 – Representação do preço da ação quando o analista começou a observação

Depois de uma hora (6 unidades de tempo, lembre-se de que o analista está considerando cada unidade de tempo como 10 minutos), a ação pode alcançar preço máximo de R$ 16,00, já que a cada unidade de tempo a ação só pode aumentar seu valor em R$ 1,00; logo, depois de 6 unidades de tempo, a ação poderá chegar ao valor máximo de R$ 16,00. Da mesma forma, seu valor mínimo será de R$ 4,00.

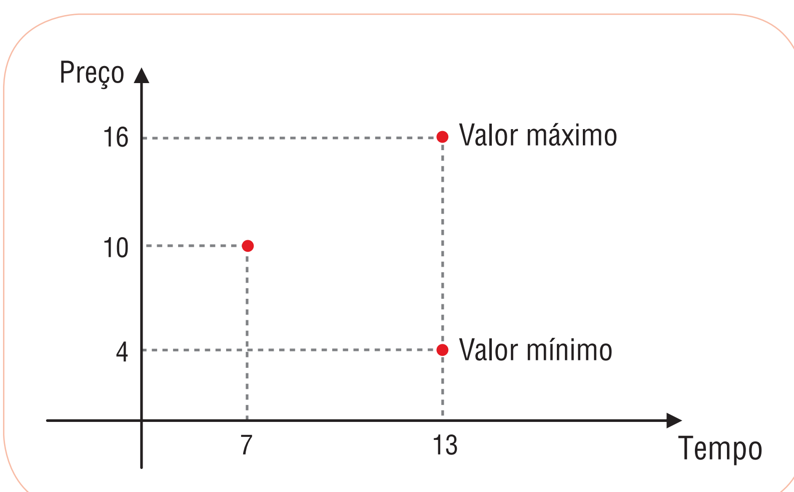


Figura 9 – Representação do valor máximo e mínimo que a ação pode assumir depois de 6 unidades de tempo

Observe que pode ocorrer da ação assumir um valor entre o mínimo e o máximo e ninguém conseguir prever.

Suponha que o analista queira estudar apenas o efeito aleatório do preço da ação. Assim, se em cada intervalo de tempo, a ação tem a mesma chance de subir ou descer, qual o valor mais provável que ela poderá assumir?

Nesse caso, pode-se analisar cada ponto final que a ação pode atingir e contar quantos caminhos existem do ponto inicial ao ponto final. Aquele ponto que proporcionar o maior número de caminhos, será o valor mais provável que a ação assumirá, se considerarmos apenas o fator aleatório.

Comecemos com o menor valor e, a cada cálculo, aumentemos o valor final da ação até atingirmos o ponto de valor máximo.

Para o valor mínimo, queremos calcular quantos caminhos existem ligando (7,10)→(13,4). Como já foi explicado, temos que resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} S + D = x_1 - x_0 = 13 - 7 = 6 \\ S - D = y_1 - y_0 = 4 - 10 = -6 \end{cases}$$

do qual obtemos $S = 0$ e $D = 6$. Calculando o número de anagramas distintos formados por 6 letras, sendo 0 S e 6 D, temos

$$P_6^{6,0} = \frac{6!}{0!6!} = 1,$$

ou seja, existe apenas um caminho ligando (7,10)→(13,4). Esse é exatamente o caminho no qual, em cada passo, vamos para a direita e para baixo.

Analisemos agora quantos caminhos existem saindo de $(7, 10)$ e chagando em$(13, 5)$.

$$\begin{cases} S + D = x_1 - x_0 = 13 - 7 = 6 \\ S - D = y_1 - y_0 = 5 - 10 = -5 \end{cases}$$

Desse sistema, obtemos $S = \dfrac{1}{2}$ e $D = \dfrac{11}{2}$.

Note que não podemos ter meia subida, pois ficou acordado que a partícula se moveria um passo para a direita e um passo para cima ou um para baixo. Logo, essa situação não pode ocorrer, ou seja, da maneira como o movimento se dá é impossível encontrar um caminho ligando (7,10)→(13,5). Resumindo, após uma hora, o preço da ação não poderá atingir o valor de R$ 5,00.

Calculemos agora quantos caminhos existem ligando (7,10)→(13,6):

$$\begin{cases} S + D = x_1 - x_0 = 13 - 7 = 6 \\ S - D = y_1 - y_0 = 6 - 10 = -4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $S = 1$ e $D = 5$. Calculando o número de anagramas distintos formados por 6 letras, sendo 1 S e 5 D, obtemos:

$$P_6^{5,1} = \frac{6!}{1!5!} = 6.$$

Isso significa que existem 6 maneiras distintas da ação atingir o valor de R$ 6,00 , depois de 6 passos. Calcule os demais caminhos e compare com os resultados seguintes:

- é impossível encontrar um caminho ligando (7,10)→(13,7). Resumindo, após uma hora, o preço da ação não poderá atingir o valor de R$ 7,00;
- existem 15 maneiras distintas da ação atingir o valor de R$ 8,00;
- é impossível encontrar um caminho ligando (7,10)→(13,9). Resumindo, após uma hora, o preço da ação não poderá atingir o valor de R$ 9,00;
- existem 20 maneiras distintas da ação atingir o valor de R$ 10,00;
- é impossível encontrar um caminho ligando (7,10)→(13,11). Resumindo, após uma hora, o preço da ação não poderá atingir o valor de R$ 11,00;
- existem 15 maneiras distintas da ação atingir o valor de R$ 12,00;
- é impossível encontrar um caminho ligando (7,10)→(13,13). Resumindo, após uma hora, o preço da ação não poderá atingir o valor de R$ 13,00;
- existem 6 maneiras distintas da ação atingir o valor de R$ 14,00;
- é impossível encontrar um caminho ligando (7,10)→(13,15). Resumindo, após uma hora, o preço da ação não poderá atingir o valor de R$ 15,00;
- existe apenas 1 maneira distinta da ação atingir o valor de R$ 16,00. Essa é exatamente a maneira pela qual a cada passo se vai para a direita e para cima.

Analisando, então, os resultados obtidos, podemos dizer que, dependendo apenas da aleatoriedade do processo, o valor mais provável que a ação atingirá são os mesmos R$ 10,00, já que existem mais maneiras que nos levam a esse valor. Diminuindo as possibilidades, temos os valores R$ 12,00 e R$ 8,00 com as mesmas chances; seguidos por R$ 14,00 e R$ 6,00; e, finalmente, R$ 16,00 e R$ 4,00.

Os valores R$ 5,00, R$ 7,00, R$ 9,00, R$ 11,00, R$ 13,00 e R$ 15,00 não são atingidos depois de 1 hora de observação.

Exemplo 2

Suponha que dois candidatos A e B disputaram uma eleição para síndico de um condomínio com um total de 10 votantes e que, ao final da apuração, o candidato A ganhou por uma diferença de 6 votos. De quantas formas pode ser feita a apuração? Ou seja, de quantos modos diferentes pode ocorrer a marcha da apuração?

Solução

Se houve 10 votos e o candidato A ganhou por uma diferença de 6 votos, então, o placar final foi 8 a 2 para ele. Suponha que, para cada voto de A, o gráfico da apuração ande uma casa para a direita e uma casa para cima e, para cada voto de B, o gráfico da apuração ande uma casa para a direita e uma casa para baixo. O que a questão pede é quantos gráficos diferentes podem ser montados, se o gráfico inicia em (0,0) e termina em (10,6).

Como foi explicado anteriormente, temos que resolver este problema em duas etapas. A primeira é achar as quantidades de subidas e descidas que fazem o gráfico começar em (0,0) e terminar em (10,6). Feito isso, calculamos o número de anagramas distintos formados por duas letras nas quantidades encontradas.

Temos, então, o seguinte sistema.

A primeira equação representa o número de passos dados. Neste caso, o número de votos, que é igual à primeira coordenada do ponto final:

$S + D = 10$

A segunda equação representa a diferença entre o número de subidas e o número de descidas e é igual à segunda coordenada do ponto final:

$S - D = 6$

Resolvendo esse sistema, obtemos $S = 8$ e $D = 2$. Calculemos, agora, o número de anagramas distintos que podemos formar com 10 letras, sendo 8 iguais a S e 2 iguais a D, que neste caso nos dá

$$P_1^{8,2}0 = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

Isso significa que a apuração pode ser feita de 45 formas distintas. Dentre estas, pode ocorrer, em algum momento da apuração, que o candidato B apareça na frente. Esse fato explica por que antigamente (quando não existia a urna eletrônica e os votos ainda eram contados manualmente), em muitas parciais, o candidato perdedor aparecia à frente na contagem dos votos.

Se quiséssemos saber em quantas dessas 45 possíveis formas de contagem de votos pode figurar o perdedor à frente no placar, como faríamos?

Primeiro, temos que entender graficamente o que significa “o perdedor estar à frente no placar”. Em seguida, temos que traduzir essa situação para o tipo de problema que sabemos resolver, que é contar a quantidade de caminhos que saem de um ponto e chegam a outro numa quantidade de passos pré-determinada.

Já vimos que, se considerarmos o ganhador como S e o perdedor como D, no ponto final, o gráfico estará acima do eixo x. Então, se numa dada contagem, o perdedor fica em algum momento à frente do ganhador, isso significa que o gráfico toca pelo menos uma vez a reta $y = -1$, já que naquele ponto o perdedor está um ponto à frente do ganhador.

No exemplo referente ao número de caminhos que saem de (0,0) e chegam a (8,6), podemos fazer um paralelo com uma votação envolvendo 8 eleitores, em que o resultado final foi 7 a 1. E o gráfico a seguir representa que nessa apuração em particular o perdedor ficou à frente do ganhador.

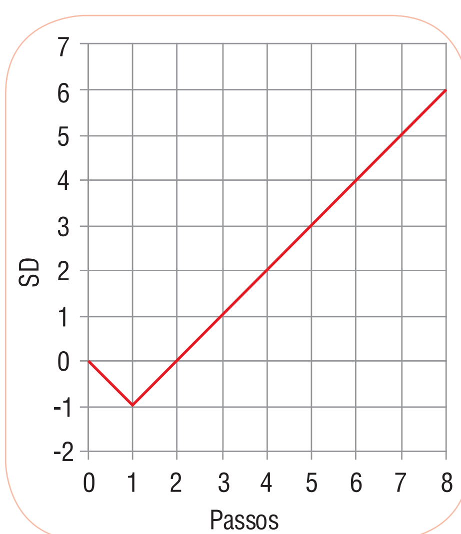


Figura 10 – Gráfico que representa uma das possíveis marchas de apuração em que o candidato perdedor aparece à frente do vencedor em uma parcial

A pergunta é: de todas as formas possíveis de fazer a apuração, em quantas delas o perdedor esteve à frente do ganhador alguma vez? Ou, ainda, em quantas delas o gráfico ficou negativo pelo menos uma vez?

Como transformar esse problema em um que envolva contar os caminhos existentes saindo de um dado ponto e chegando a outro ponto do plano (x, y)?

Para respondermos a essa pergunta, precisaremos fazer a reflexão de gráficos (ou de parte deles) em torno da reta $y = -1$. Refletir um gráfico em torno da reta $y = -1$ significa refletir cada ponto dele, ou seja, trocar o ponto P de coordenadas (a, b) pelo ponto P' de coordenadas $(a, -1 - (b + 1)) = (a, -b - 2)$ (veja a Figura 11).

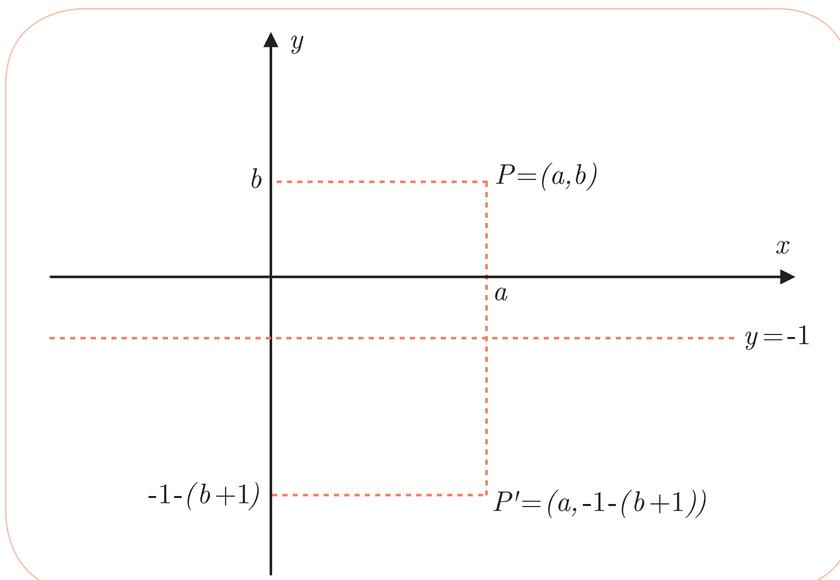


Figura 11 – Reflexão do ponto P em torno da reta $y = -1$

Vejamos alguns exemplos nos quais apresentamos o gráfico com linha cheia e o gráfico refletido com linha tracejada.

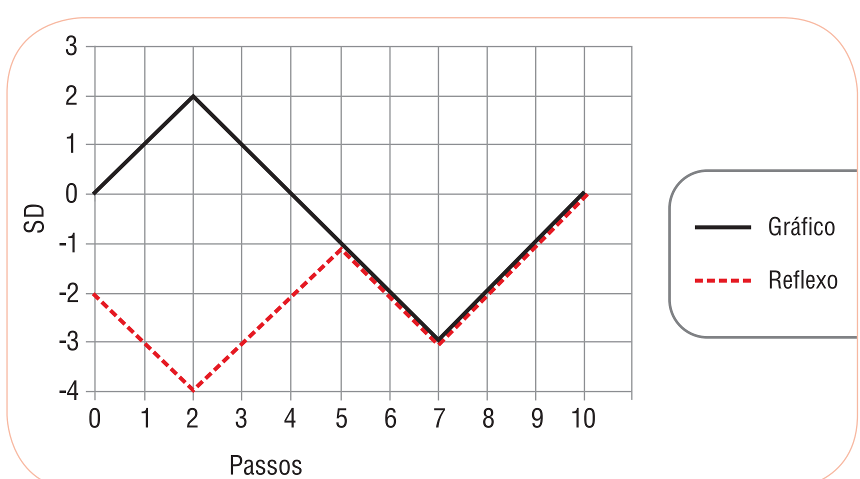


Figura 12 – O Gráfico SSDDDDDSSS e seu reflexo

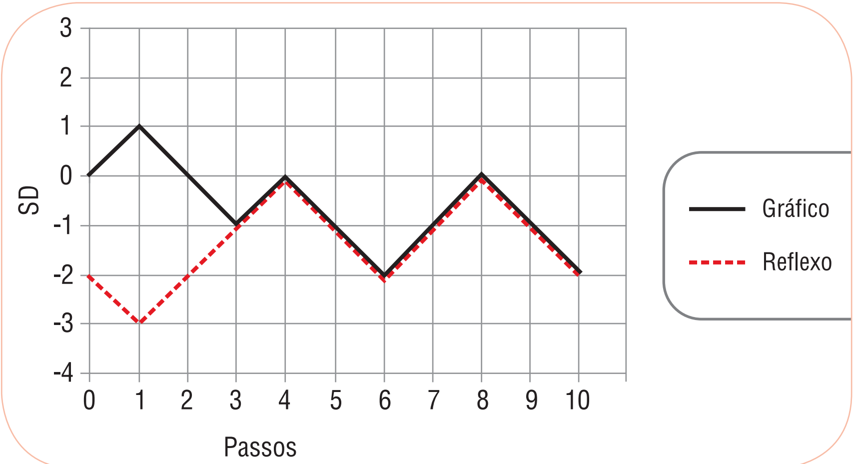


Figura 13 – O Gráfico SDDSDDSSDD e seu reflexo

Com o objetivo de respondermos à pergunta, nos caminhos que tocam a reta $y = -1$, impomos a seguinte modificação: acompanhemos o gráfico até o ponto em que acontecer o primeiro contato com essa reta e façamos a reflexão da parte do gráfico antes desse ponto em torno da reta $y = -1$. O gráfico da Figura 10 transforma-se, dessa forma, no seguinte gráfico:

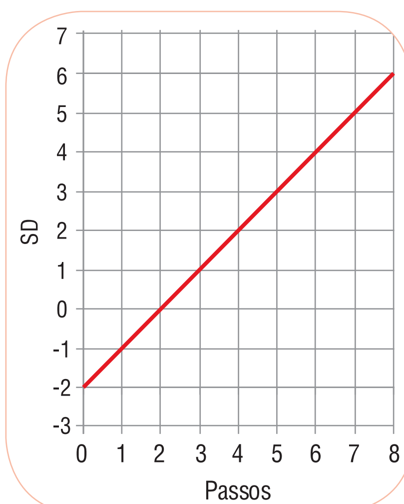


Figura 14 – Reflexo do gráfico da Figura 10

A pergunta que fazemos a seguir é: será que a quantidade de caminhos saindo de $(0, 0)$ e chegando a um ponto qualquer (x, y) que toca a reta $y = -1$ é igual ao número de caminhos que saem de $(0, -2)$ e chegam ao mesmo ponto (x, y)? Para garantir essa igualdade, vamos mostrar no apêndice desta aula que podemos associar, através da reflexão descrita anteriormente, a cada caminho $(0, 0) \rightarrow (x, y)$ que toca a reta $y = -1$ um caminho $(0, -2) \rightarrow (x, y)$ e, mais ainda, que essa associação é uma bijeção. Em resumo, para sabermos o número de caminhos que tocam uma dada reta, basta sabermos o número de caminhos refletidos. Esse é o chamado **Princípio da Reflexão**.

Voltemos ao exemplo da votação. O resultado final foi 8×2 e a quantidade de caminhos $(0,0) \to (10,6)$ foi 45. Desejamos, então, saber em quantos desses 45 caminhos o perdedor esteve à frente do vencedor alguma vez. Ou seja, quantos desses caminhos tocaram a reta $y = -1$ alguma vez? Pelo **Princípio da Reflexão**, basta calcularmos a quantidade de caminhos $(0,-2) \to (10,6)$.

$$\begin{cases} S + D = x_1 - x_0 = 10 - 0 = 10 \\ S - D = y_1 - y_0 = 6 - (-2) = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $S = 9$ e $D = 1$ e, portanto, o número de caminhos é

$$P_{10}^{9,1} = \frac{10!}{1!9!} = 10.$$

Isto é, dos 45 caminhos possíveis, em 10 deles o perdedor apareceu à frente do ganhador alguma vez.

Atividade 1

1 Ao final dos 15 *rounds* (assaltos) de uma luta de boxe, os juízes decidiram adotar o seguinte procedimento para dar o resultado. A cada assalto, entravam em acordo e a contagem era de 1 ponto para o lutador que eles achavam que havia ganhado o assalto e 0 para o que havia perdido. Ao final da luta, o placar estava 8 x 7.

a) De quantas formas pode ter ocorrido a contagem de pontos?

b) Em quantas delas o perdedor aparece à frente alguma vez?

c) Em quantas delas o perdedor fica sempre atrás no placar?

2 Numa guerra, os correspondentes internacionais contabilizavam as mortes em tempo real e, ao final da contenda, o resultado foi o seguinte: país A com 800 mortes e país B com 1200 mortes. Pergunta-se:

a) de quantos modos distintos pode ter sido feita essa contabilidade?

b) em quantas delas o país A aparece em algum momento com 10 mortos de "vantagem"?

c) em quantas delas o país B aparece em algum momento com 100 mortos de "vantagem"?

3 No clássico carioca Vasco x Flamengo, o resultado final foi: Vasco 5 x 3 Flamengo (se você for flamenguista, troque a ordem dos times). Uma pessoa que não acompanhou o jogo ficou imaginando como poderia ter ocorrido a seqüência de gols na partida.

a) de quantas maneiras ela pode imaginar que os gols aconteceram?

b) de quantas maneiras ela pode imaginar que em algum momento o Flamengo perdia por uma diferença de dois gols?

c) de quantas maneiras ela pode imaginar que em algum momento o Flamengo ganhava por uma diferença de dois gols?

4 Num parque de diversões, a entrada custava R$ 5,00 e você tinha direito a se divertir em todos os brinquedos o número de vezes que quisesse. Na fila, tinham 100 pessoas das quais 30 iam pagar com notas de R$ 10,00 e 70 com notas de R$ 5,00. Quantas filas terão problemas de troco, se:

a) o caixa começar sem troco?

b) o caixa começar com 5 notas de R$ 5,00?

c) o caixa começar com 10 notas de R$ 5,00?

Observação – Estamos entendendo por problema de troco a situação em que uma pessoa pague 1 entrada com uma nota de R$ 10,00 e o caixa não tenha uma nota de R$ 5,00 para dar de troco.

5 Imagine que você vá jogar dominó com um amigo e que, para animar a partida, vocês decidam apostar: quem ganha recebe um caroço de feijão e quem perde dá um caroço de feijão. Suponha que cada jogador comece com 5 caroços de feijão. Depois de 5 rodadas, quais as quantidades de caroços de feijão que se pode ter?

Apêndice A – Explicação da bijeção

Observando as Figuras 12 e 13, vemos que podemos relacionar, pela reflexão, a cada caminho $(0,0) \to (x,y)$ que toca a reta $y=-1$ um único caminho $(0,-2) \to (x,y)$ e, dessa forma, construímos uma função.

Para verificarmos que essa função é uma bijeção, precisamos mostrar que ela é injetiva e sobrejetiva. Mostremos primeiro a injetividade.

Lembrete: dizemos que uma função f é injetiva quando pontos distintos do domínio são levados em pontos distintos na imagem, ou seja, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Sejam c_1 e c_2 dois caminhos distintos $(0,0) \to (x,y)$ que tocam a reta $y=-1$. Devemos, então, mostrar que quando refletirmos esses caminhos em torno da reta $y=-1$, os caminhos obtidos serão também distintos.

Como os caminhos c_1 e c_2 são distintos, temos 3 possibilidades para eles:

1. eles tocam a reta $y=-1$ em passos diferentes;

2. eles tocam a reta $y=-1$ no mesmo passo e seus gráficos antes desse ponto de interseção são diferentes;

3. eles tocam a reta $y=-1$ no mesmo passo e seus gráficos depois desse ponto de interseção são diferentes.

No caso 1, suponha que o encontro com a reta $y = -1$ aconteça primeiro com o caminho c_1 e seja $P_1 = (a, -1)$ tal ponto de encontro. Vamos denotar por $P_2 = (a, b)$ o ponto pertencente ao caminho c_2 que tem a mesma abscissa de P_1. Ao fazermos a reflexão da parte do gráfico c_1 anterior à interseção em torno da reta $y = -1$, temos que a imagem do ponto P_1 é o próprio ponto P_1, no entanto, ao fazermos a reflexão da parte do gráfico c_2 anterior à interseção em torno da reta $y = -1$, temos que a imagem do ponto P_2 é o P_2', ponto de coordenadas $(a, -1-(b+1))$, diferente, portanto, do ponto P_1, já que $b > -1$, sendo, dessa forma, os gráficos refletidos distintos (ver Figura 15).

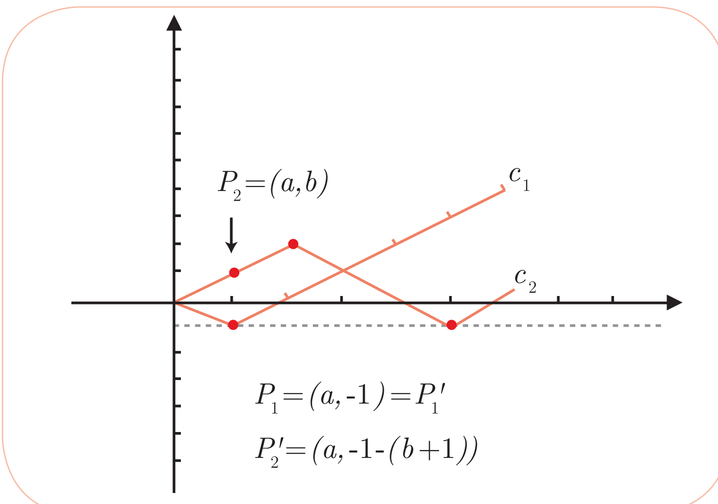


Figura 15

No caso 2, temos que em algum momento antes do encontro com a reta $y = -1$ os gráficos são diferentes. Considere P_1 o ponto do caminho c_1 de ordenada b_1 e P_2 o ponto do caminho c_2 de ordenada b_2, com b_1 diferente de b_2. Assim, o refletido do ponto P_1 terá ordenada $-b_1 - 2$ e o refletido do ponto P_2 terá ordenada $-b_2 - 2$, como b_1 é diferente de b_2, temos que os gráficos refletidos são distintos. Tente se convencer disso fazendo uma figura!

No caso 3, temos que em algum ponto depois do encontro com a reta $y = -1$ os gráficos são distintos. Mas, da maneira como montamos a reflexão, as imagens dos pontos dos gráficos que estão depois da interseção não mudam, ou seja, os gráficos permanecem distintos.

Dessa forma, mostramos a injetividade. Mostremos agora a sobrejetividade.

Lembrete: dizemos que uma função f é sobrejetiva quando o seu conjunto imagem coincide com o contra-domínio, ou seja, para todo elemento y do contra-domínio, devemos mostrar que existe um elemento x pertencente ao domínio tal que $f(x) = y$.

Para obtermos a sobrejetividade, devemos mostrar então que para cada caminho $(0, -2) \to (x, y)$ existe um caminho $(0, 0) \to (x, y)$ que toca a reta $y = -1$, do qual ele é o refletido. Basta fazermos o caminho inverso, ou seja, refletir a parte do caminho $(0, -2) \to (x, y)$ anterior ao ponto de encontro com a reta $y = -1$ para cima.

Veja a ilustração nos gráficos a seguir.

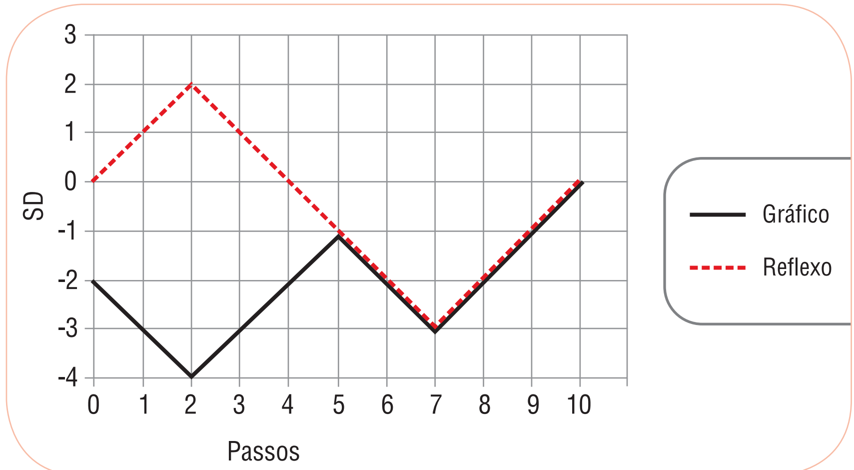


Figura 16

Outro exemplo:

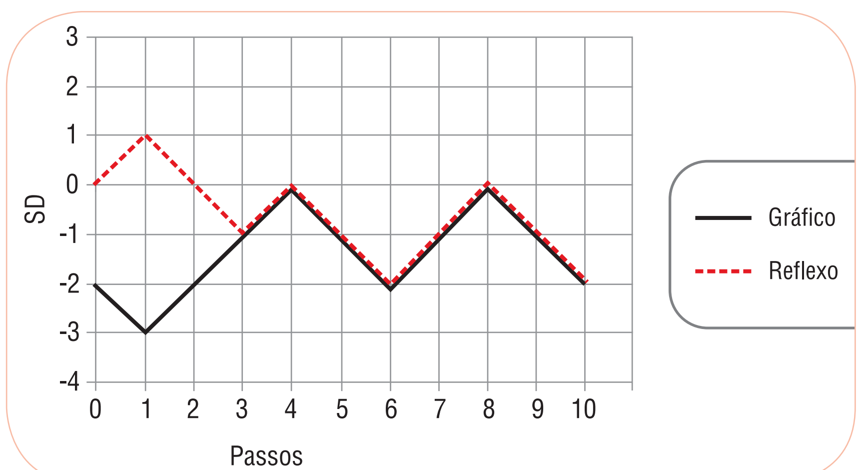


Figura 17

Dessa forma, garantimos a sobrejetividade, provando assim a bijetividade.

Resumo

Nesta aula, você compreendeu que o **Princípio da Reflexão** é utilizado para dar informações adicionais sobre um resultado final, já conhecido, de uma disputa entre dois concorrentes, como a quantidade de formas diferentes pelas quais esse resultado pode ser conseguido, o número de possibilidades que o perdedor tem de aparecer à frente do vencedor em algum momento da disputa, entre outras.

Autoavaliação

1 Em que situações diferentes das que aparecem nesta aula pode ser aplicado o Princípio da Reflexão?

2 Que assunto já estudado em aulas anteriores utilizamos para entender o Princípio da Reflexão?

3 Por que a bijeção entre dois conjuntos finitos garante que eles possuam a mesma quantidade de elementos?

Referência

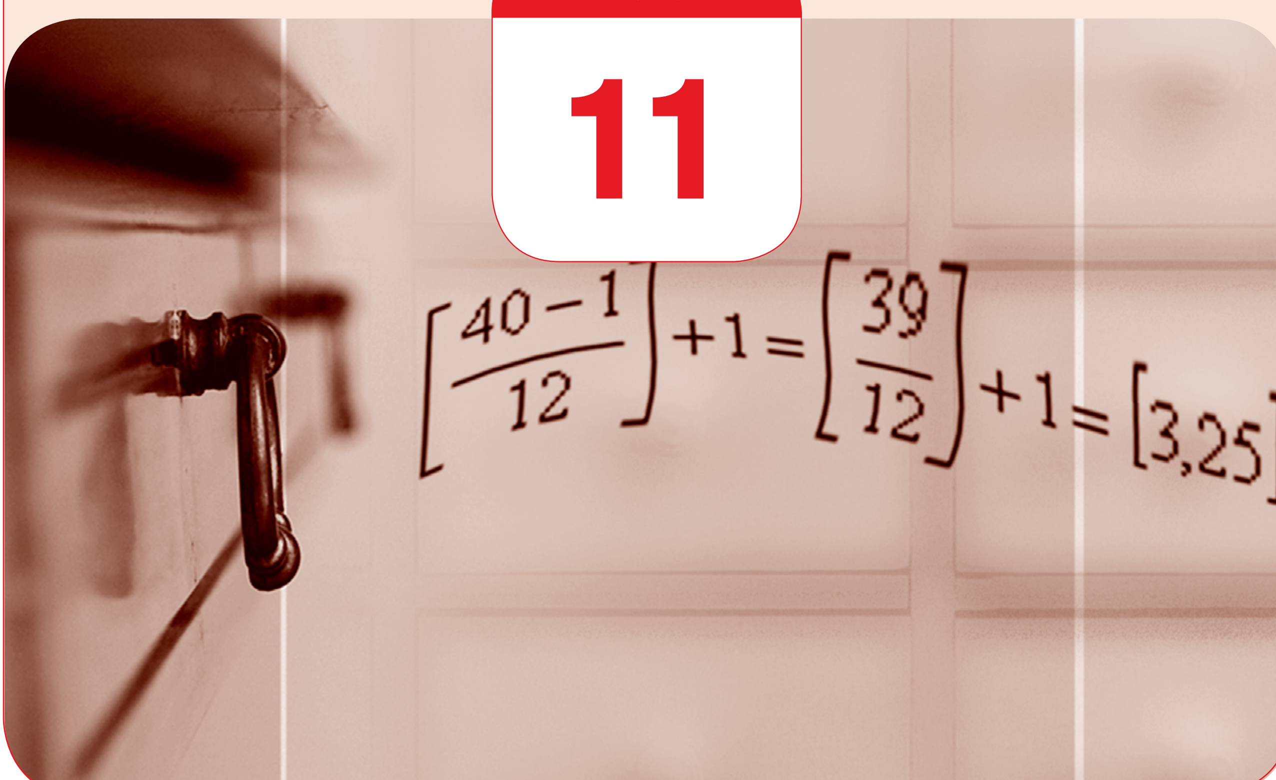
MORGADO, P. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática).

Anotações

Princípio das gavetas de Dirichlet

Aula

11

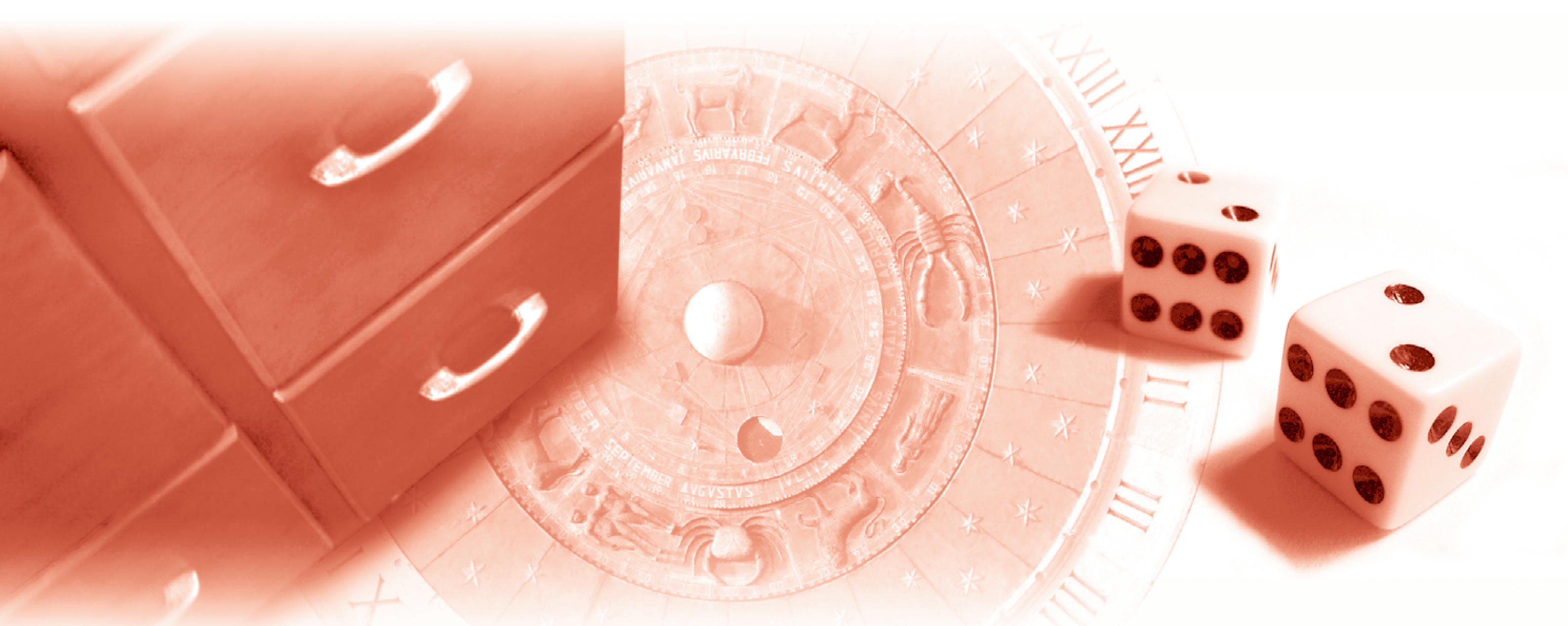


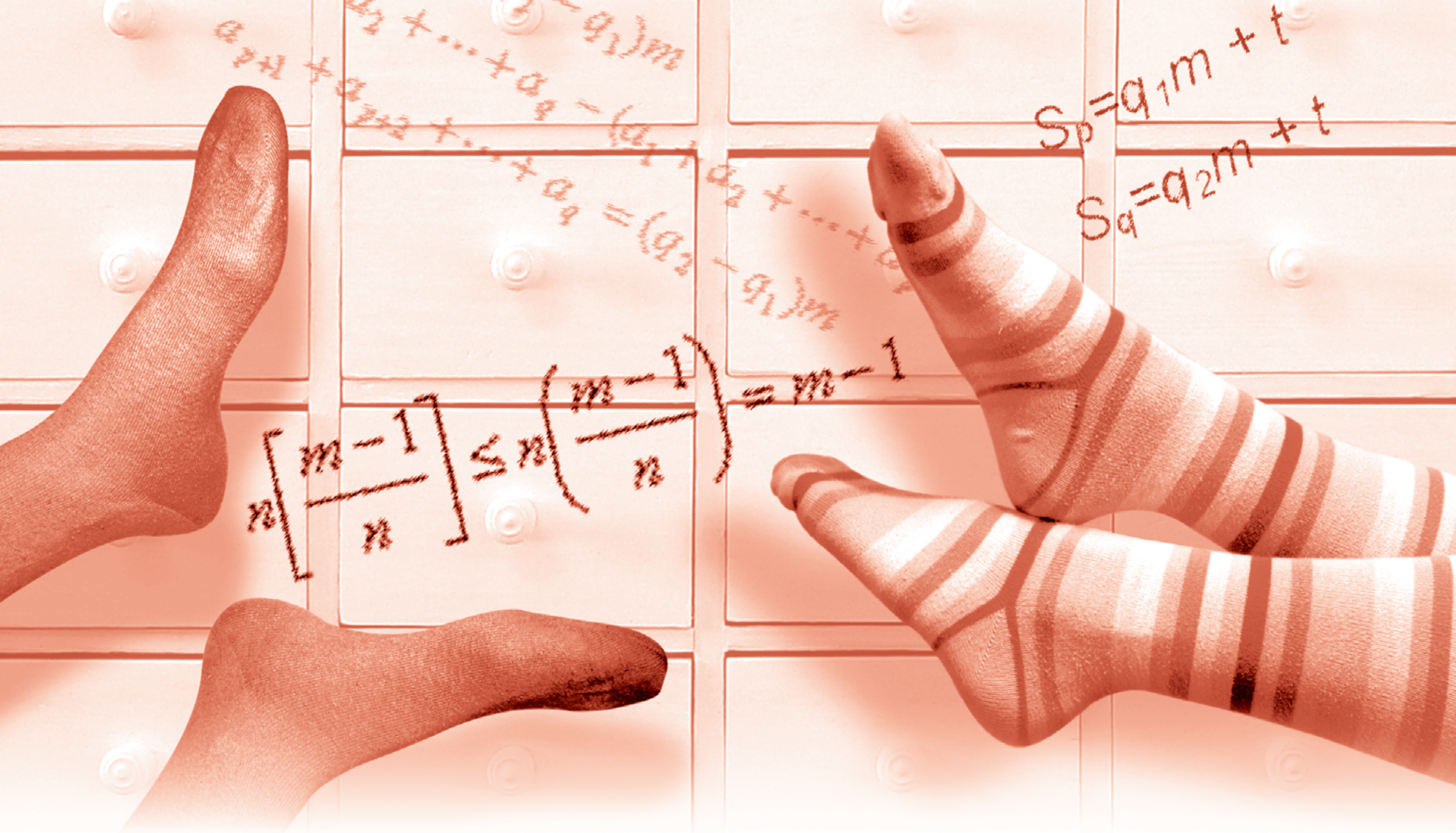
Apresentação

Nesse nosso dia-a-dia tão corrido e agitado, nos achamos muitas vezes em situações vexaminosas. Por exemplo: você está atrasado, vestindo-se rápido para não chegar mais atrasado ainda ao trabalho e, enquanto você veste a camisa, já procura por uma meia na gaveta. Na gaveta, existem 10 pares de meias diferentes jogados de qualquer maneira, ou seja, as meias que formam os pares não estão juntinhas. Sem olhar para dentro da gaveta, você pega uma meia e, em seguida, outra, que não forma o par com a primeira. Se você não parar de fazer o que está fazendo e olhar para a gaveta de meias, sabe quantas chances tem de não conseguir montar nenhum par correto? Esse tipo de situação aplica-se para resolver vários problemas em Matemática, mas nesta aula nos limitaremos a apresentar situações que envolvam Análise Combinatória, que é nosso objeto de estudo. A teoria que utilizaremos para resolver tais situações é chamada de **Princípio das Gavetas de Dirichlet**, conhecido também como **Princípio da Casa dos Pombos**.

Objetivo

Esperamos que ao final desta aula o aluno seja capaz de identificar e responder a questões que envolvam o **Princípio das Gavetas de Dirichlet**.





As três versões do princípio das gavetas de Dirichlet

Princípio das Gavetas de Dirichlet parece tão óbvio que é até difícil falar alguma coisa introdutória sobre ele. Vejamos, a seguir, as três versões que são apresentadas em relação a ele.

Princípio das Gavetas de Dirichlet – Primeira versão

Se n objetos forem colocados em no máximo $n-1$ gavetas, então, pelo menos uma delas conterá 2 ou mais elementos.

Demonstração – Para demonstrar esse resultado, iremos utilizar a técnica de **demonstração por absurdo** (você aprendeu a essência na aula 1 – Introdução à linguagem matemática, da disciplina Pré-Cálculo), ou seja, vamos negar a tese de que pelo menos uma gaveta contém 2 ou mais elementos, para chegar a uma contradição na hipótese, que é n objetos forem colocados em no máximo $n-1$ gavetas. Em resumo, nega-se a tese para chegar a uma contradição na hipótese.

Negação da tese – Suponhamos, então, que cada gaveta contenha, no máximo, 1 objeto.

Isso implica, então, que o número total de objetos será, no máximo (se cada gaveta contiver exatamente 1 elemento), $n - 1$ objetos. Isso é um absurdo, já que estamos supondo que temos n objetos e não $n - 1$.

O absurdo surgiu da nossa suposição de que cada gaveta contém no máximo 1 objeto. Logo, alguma gaveta possuirá mais de 1 objeto.

Exemplo 1

Em um conjunto de 13 pessoas, pelo menos 2 delas aniversariam no mesmo mês.

Solução

De fato, temos 12 gavetas, que são os meses do ano, e 13 objetos, que são os meses dos aniversários das pessoas, para colocar nas gavetas. Pelo **Princípio das Gavetas de Dirichlet**, uma gaveta conterá pelo menos 2 objetos, ou seja, em um dado mês teremos pelo menos 2 pessoas aniversariando.

Exemplo 2

Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, em que $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_+$, ou seja, são inteiros positivos, mostre que existem números naturais r, l com $1 \leq r \leq l \leq m$ tais que $a_r + a_{r+1} + \cdots + a_l$ é múltiplo de m.

Solução

Considere as somas

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
&S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m
\end{aligned}
$$

Se alguma dessas somas, digamos $a_1 + a_2 + ... + a_k$ for múltiplo de m, acabou nossa procura, já que $r = 1$ e $l = k$ são os índices cuja soma resulta em múltiplo de m.

Suponha, então, que nenhuma das somas anteriores dê múltiplo de m. Logo, os possíveis restos da divisão das somas por m serão 1, 2, ..., $m - 1$. Temos, então, $m - 1$ gavetas que guardarão os restos das divisões das somas por m. Como temos m somas, teremos m restos e temos $m - 1$ gavetas. Pelo **Princípio das Gavetas de Dirichlet**, uma das gavetas possui mais que um objeto. O que isso está dizendo é que existem p e q ($p < q$) tais que a divisão de S_p e de S_q por m produz o mesmo resto t, ou seja,

$S_p/q_1\ m\ +\ t$

$S_q/q_2\ m\ +\ t$

Subtraindo S_q de S_p, temos

$$S_q - S_p = (q_2 - q_1)m$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q - (a_1 + a_2 + \ldots + a_p) = (q_2 - q_1)m$$

$$a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q = (q_2 - q_1)m$$

Tomando $r = p + 1$ e $l = q$, teremos que existem r e l tais que $a_r + \triangleright\triangleright\triangleright + a_l$ é múltiplo de m.

Atividade 1

Mostre que, num grupo com 13 pessoas, pelo menos 2 possuem o mesmo signo.

Podemos reformular o **Princípio das Gavetas de Dirichlet** da forma que segue.

Princípio das Gavetas de Dirichlet – Segunda versão

Se m objetos são colocados em n gavetas $(m > n)$, então, pelo menos uma gaveta contém no mínimo $\left[\frac{m-1}{n}\right] + 1$ objetos.

Vamos fazer uma pausa para explicar o que significam esses colchetes que apareceram nessa **segunda versão**. Eles chamam-se **função maior inteiro**, a qual é definida do seguinte modo:

$[\ x\ ]$ representa o maior inteiro menor ou igual a x.

Alguns exemplo são:

$$[1{,}003] = 1; \qquad [1{,}4] = 1; \qquad [1{,}9] = 1; \qquad [1{,}9999] = 1; \qquad [2] = 2.$$

Atividade 2

1 Vamos ver se ficou clara a idéia da função maior inteiro. Calcule:

$[1{,}25] =$ $[-0{,}2]=$ $[-2{,}3]=$ $[3{,}8]=$ $[-1]=$

2 Escreva uma explicação para o fato de: se $x > 0$, então, $[\ x\ ] \leq x$.

Explicado o que significam os colchetes, demonstremos agora a **segunda versão do Princípio das Gavetas de Dirichlet**.

Demonstração – Novamente, a demonstração será feita por absurdo. A prova é bem parecida com a anterior.

Negação da tese – Suponhamos que cada gaveta contém no máximo $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ elementos, assim o número total máximo de elementos das gavetas é $n\left[\frac{m-1}{n}\right]$. Pela definição da função maior inteiro, teremos

$$n\left[\frac{m-1}{n}\right] \leq n\left(\frac{m-1}{n}\right) = m-1.$$

Isso significa que teremos uma quantidade de objetos menor ou igual a $m-1$, o que é um absurdo, já que estamos supondo que temos m objetos e não no máximo $m-1$.

O absurdo surge da nossa suposição de que cada gaveta contém no máximo $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ elementos. Logo, alguma gaveta possuirá mais de $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ elementos, ou seja, pelo menos $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ elementos.

Exemplo 3

Num grupo de 40 pessoas, podemos garantir que pelo menos 4 delas têm o mesmo signo.

Solução

Existem 12 signos, ou seja, existem 12 gavetas (n) nas quais devemos colocar 40 objetos (m), que são os signos das pessoas do grupo. Pela segunda versão do princípio estudado, temos que pelo menos uma gaveta terá

$\left[\frac{40-1}{12}\right]+1=\left[\frac{39}{12}\right]+1=[3,25]+1=3+1=4$ objetos, ou seja, pelo menos 4 pessoas têm o mesmo signo.

Atividade 3

Explique utilizando a **segunda versão do Princípio das Gavetas de Dirichlet** que se alguém jogar 49 vezes um dado de seis faces, uma das faces aparecerá no mínimo 9 vezes.

Ainda há uma terceira formulação possível para o **Princípio das Gavetas de Dirichlet**, a qual veremos a seguir.

Princípio das Gavetas de Dirichlet – Terceira versão

Seja n o número de gavetas e seja μ um número inteiro positivo dado, coloquemos a_1 objetos na gaveta 1, a_2 objetos na gaveta 2, ... , a_n objetos na gaveta n. Se a média aritmética $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ for maior que μ, então, uma das gavetas conterá pelo menos $\mu+1$ objetos.

Demonstração – A demonstração mais uma vez será por absurdo.

Negação da tese – Suponhamos que todas as gavetas tenham no máximo μ elementos, ou seja, $a_i \leq \mu$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, ou seja,

$$a_1 \leq \mu$$

$$a_2 \leq \mu$$

$$\vdots$$

$$a_n \leq \mu$$

Somando, membro a membro, essas desigualdades, temos que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \underbrace{\mu + \mu + \ldots + \mu}_{n \text{ parcelas}}$$

ou seja,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq n\mu \Longrightarrow \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leq \mu.$$

Ora, isso é um absurdo, já que a média aritmética anterior é, por hipótese, maior que μ. Então, o absurdo originou-se de supormos que cada gaveta tem no máximo μ elementos, ou seja, que $a_i \leq \mu$ para todo i, logo, existe algum i tal que $a_i > \mu$, o que significa que uma gaveta tem mais que μ elementos, ou seja, pelo menos $\mu + 1$ elementos.

Exemplo 4

A companhia de trânsito de uma dada cidade determinou que os transportes designados por **alternativos** deveriam sair do terminal com o número máximo de passageiros não ultrapassando 15 pessoas. Após um dia, o fiscal foi até o representante da companhia e pediu para ver a lista com a quantidade de passageiros embarcados. O representante disse que saíram 10 veículos e que a média do número de passageiros embarcados foi 16. O fiscal deve multar a empresa ou não?

Solução

O fiscal multará a empresa se tiver saído algum alternativo com mais de 15 pessoas. O representante da companhia não informou a quantidade embarcada em cada transporte, logo, o fiscal não pode multar diretamente a empresa. Entretanto, o fiscal tinha ouvido falar da **terceira versão do Princípio das Gavetas de Dirichlet** e construiu o seguinte raciocínio.

Vou fazer $\mu = 15$, os alternativos serão as gavetas e os passageiros os objetos que vão ser postos nas gavetas. Se a média aritmética do número de objetos de cada gaveta for maior que μ, então, pelo menos uma gaveta (alternativo) conterá pelo menos $\mu + 1$ objetos (passageiros). Como a média foi 16, isso implica que pelo menos uma gaveta conterá pelo menos $\mu + 1 = 15 + 1 = 16$ elementos, o que vai significar que pelo menos um alternativo saiu com mais do que a capacidade máxima permitida e, portanto, posso multar a empresa com a consciência tranqüila.

Exemplo 5

63127 candidatos compareceram a uma prova do vestibular (25 questões de múltipla escolha com 5 alternativas por questão). Considere a afirmação: “Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico k questões da prova” (MORGADO et al, 2004, p. 85). Qual é o maior valor de k para o qual podemos garantir que essa afirmação é verdadeira?

Solução

O interessante dessa questão é que ela é resolvida de trás para frente. Vamos ver.

Qual o número de alunos necessários para que possamos garantir que pelo menos 2 deles marcaram a mesma resposta de uma questão de múltipla escolha com 5 alternativas?

Vamos pensar as alternativas de cada questão como sendo as gavetas, e os alunos como sendo os elementos que vamos colocar nas gavetas, já que cada um marcará uma alternativa. Dessa forma, para uma das gavetas ter 2 elementos precisamos, **pela segunda versão do Princípio das Gavetas de Dirichlet**, de $m = ?$, $n = 5$ e $\left[\frac{m-1}{n}\right] + 1 = 2$. Resolvendo, então, essa equação, teremos

$$\left[\frac{m-1}{5}\right] + 1 = 2 \Longrightarrow \left[\frac{m-1}{5}\right] = 1 \Longrightarrow m - 1 = 5 \Longrightarrow m = 6$$

Mas, o que esse resultado quer dizer? Quer dizer que se 6 alunos responderem uma questão de múltipla escolha com 5 alternativas, pelo menos 2 deles marcarão a mesma alternativa.

Se queremos ter certeza de que os alunos responderão igualmente a 2 questões de múltipla escolha com 5 alternativas, como fazer?

Primeiro: eles terão que ter marcado uma primeira questão da mesma forma.

Segundo: quantos alunos deve ter o grupo que já marcou uma questão de forma idêntica, para garantirmos que pelo menos dois deles marcarão mais uma questão de forma idêntica?

Já vimos que para 2 alunos terem marcado uma questão de forma igual, precisamos de 6 alunos. Então, 6 alunos precisam ter marcado a mesma alternativa em uma questão, por exemplo, na questão 2, desses 6, garantem que 2 marcam mais uma questão de forma idêntica. Dessa maneira, precisamos descobrir quantos alunos são necessários para que 6 deles marquem a mesma resposta na questão 2. Ou seja, precisamos achar m tal que

$\left[\frac{m-1}{5}\right] + 1 = 6$. Mas, $\left[\frac{m-1}{5}\right] + 1 = 6 \Longrightarrow \left[\frac{m-1}{5}\right] = 5 \Longrightarrow m - 1 = 25 \Longrightarrow m = 26.$

O que isso significa?

Significa que com 26 alunos, marcando a questão 2 de múltipla escolha com 5 alternativas, 6 deles marcarão uma mesma alternativa. E, desses 6, com certeza 2 marcarão a questão 1 também de modo idêntico.

De modo geral, se temos 26 alunos fazendo a prova, podemos garantir que: desses 26, pelo menos 6 marcam uma mesma questão de forma idêntica e desses 6, pelo menos 2 marcam mais uma questão de forma idêntica.

Então, quantos alunos são necessários para que 26 marquem uma questão de forma idêntica? Para isso, resolvemos

$$\left[\frac{m-1}{5}\right] + 1 = 26 \Longrightarrow \left[\frac{m-1}{5}\right] = 25 \Longrightarrow m - 1 = 125 \Longrightarrow m = 126.$$

Ou seja, se 126 fizerem a prova, 26 marcarão a primeira questão de forma idêntica. Desses 26, com certeza, 6 marcarão mais uma questão de modo idêntico e desses 6, com certeza, 2 marcarão uma terceira questão de modo idêntico.

Percebeu por que no início dissemos que a questão era resolvida de trás para frente?

Dando continuidade, quantos alunos são necessários para que 126 marquem uma questão de modo idêntico? Para isso, resolvemos

$$\left[\frac{m-1}{5}\right] + 1 = 126 \Longrightarrow \left[\frac{m-1}{5}\right] = 125 \Longrightarrow m - 1 = 625 \Longrightarrow m = 626.$$

E, quantos alunos são necessários para que 626 marquem a mesma alternativa em uma questão? Para isso, resolvemos

$$\left[\frac{m-1}{5}\right] + 1 = 626 \Longrightarrow \left[\frac{m-1}{5}\right] = 625 \Longrightarrow m - 1 = 3125 \Longrightarrow m = 3126.$$

E, ainda, quantos alunos são necessários para que 3126 marquem a mesma alternativa em uma questão? Para isso, resolvemos

$$\left[\frac{m-1}{5}\right] + 1 = 3126 \Longrightarrow \left[\frac{m-1}{5}\right] = 3125 \Longrightarrow m - 1 = 15625 \Longrightarrow m = 15626.$$

Por fim, quantos alunos são necessários para que 15626 marquem a mesma alternativa em uma questão? Para isso, resolvemos

$$\left[\frac{m-1}{5}\right] + 1 = 15626 \Longrightarrow \left[\frac{m-1}{5}\right] = 15625 \Longrightarrow m - 1 = 78125 \Longrightarrow m = 78625.$$

Mas, isso já passa do número de inscritos, que é 63127. Logo, concluímos que:

- dos 63127, pelo menos 3126 marcam a mesma alternativa em uma primeira questão. Temos, portanto, 1 questão respondida de forma idêntica;
- desses 3126, pelo menos 626 marcam mais uma alternativa de forma igual. Temos, portanto, 2 questões respondidas de forma idêntica;
- desses 626, pelo menos 126 marcam mais uma alternativa de forma igual. Temos, portanto, 3 questões respondidas de forma idêntica;
- Desses 126, pelo menos 26 marcam mais uma alternativa igual, temos portanto: 4 questões respondidas de forma idêntica.
- desses 26, pelo menos 6 marcam mais uma alternativa de forma igual. Temos, portanto, 5 questões respondidas de forma idêntica;
- desses 6, pelo menos 2 marcam mais uma alternativa de forma igual. Temos, portanto, 6 questões respondidas de forma idêntica.

Dessa forma, podemos garantir que entre 63127 candidatos, pelo menos 2 deles marcarão 6 questões de forma idêntica, donde $k = 6$ é, como vimos, o maior valor procurado para k.

Outra forma de solução para o exemplo 5

Poderíamos tentar resolver de forma direta. Supondo mais uma vez que cada alternativa seja uma gaveta, dos 63127 inscritos, temos que pelo menos

$$\left[\frac{63127-1}{5}\right] + 1 = n \Longrightarrow n = 12626,$$

ou seja, 12626 responderam a uma primeira questão de forma idêntica.

Desses 12626 que responderam a primeira questão de forma idêntica,

$$\left[\frac{12626-1}{5}\right] + 1 = n \Longrightarrow n = 2526,$$

ou seja, 2526 responderam a uma segunda questão de forma idêntica.

Desses 2526 que responderam a uma segunda questão de forma idêntica,

$$\left[\frac{2526-1}{5}\right] + 1 = n \Longrightarrow n = 506,$$

ou seja, 506 responderam a uma terceira questão de forma idêntica.

Desses 506 que responderam a uma terceira questão de forma idêntica,

$$\left[\frac{506-1}{5}\right] + 1 = n \Longrightarrow n = 102,$$

ou seja, 102 responderam a uma quarta questão de forma idêntica.

Desses 102 que responderam a uma quarta questão de forma idêntica,

$$\left[\frac{102-1}{5}\right] + 1 = n \Longrightarrow n = 21,$$

ou seja, 21 responderam uma quinta questão de forma idêntica.

Desses 21 que responderam a uma quinta questão de forma idêntica,

$$\left[\frac{21-1}{5}\right] + 1 = n \Longrightarrow n = 5,$$

ou seja, 5 responderam a uma sexta questão de forma idêntica.

Com 5 elementos apenas não posso garantir que 2 deles responderão a mais uma questão de forma idêntica. Como temos 5 alternativas, cada um pode escolher uma diferente. Isto é, podemos garantir que com essa quantidade de candidatos (63127), pelo menos 2 (na verdade, garanto que 5 deles responderão a 6 questões de forma idêntica) deles responderão a 6 questões de maneira idêntica.

Atividade 4

1 Uma roleta de cassino possui 50 casas numeradas. A brincadeira é: rodar a roleta e soltar uma bolinha que irá parar em uma das casas. Quantas jogadas são necessárias a fim de garantir que a bolinha cairá mais de uma vez em alguma das casas?

2 A palavra média é utilizada de forma muito diversificada hoje em dia. Sabendo que existem leis que regulamentam o peso máximo dos caminhões de carga, digamos, em x toneladas, se numa entrevista o dono de uma dessas empresas de transporte diz que seus caminhões transportam **em média** $x + 1$ toneladas, podemos garantir que essa empresa infringiu a lei alguma vez?

3 Num campo de golfe (por ser muito grande), ficou combinado de só retirar as bolas dos buracos quando pelo menos um deles contivesse mais de 5 bolinhas. Sabendo que existem 10 buracos num campo de golfe e que cada bolinha morre quando cai num deles, pergunta-se: depois de quantas bolinhas mortas, os boleiros (meninos que coletam as bolinhas) devem sair para esvaziar os buracos?

4 Num torneio de tiro ao alvo, cada espingarda é carregada com 3 chumbinhos. Um alvo com dez discos concêntricos e as respectivas pontuações é instalado. Supondo que em cada tiro todos os chumbinhos toquem o alvo e que um atirador irá atirar até que, pelo menos, um dos discos do alvo tenha sido atingido por 7 chumbinhos, quantos tiros no máximo um atirador pode precisar disparar?

Resumo

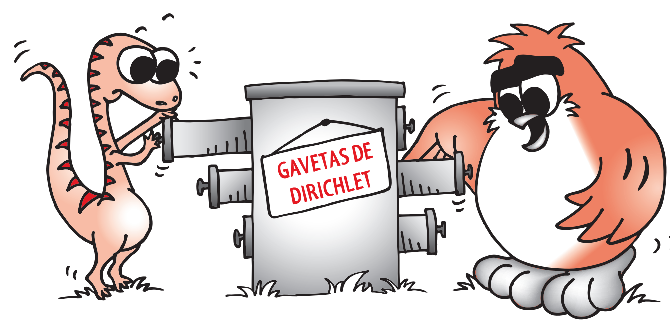
Nesta aula, estudamos três versões para o **Princípio das Gavetas de Dirichlet**, o qual se aplica em situações do tipo: se temos n escolhas e a cada dia escolhemos uma, quantos dias, no máximo, podemos passar sem repetir escolhas? Isso tudo baseado no seguinte princípio lógico: se temos mais anéis que dedos para colocar tais anéis, então, pelo menos um dedo ficará com mais de um anel.

Autoavaliação

1 Se uma senhora lavradora diz que em média vai pegar água na cacimba (poço cavado artesanalmente e a céu aberto) 3 vezes ao dia, eu posso garantir que algum dia ela foi mais de 2 vezes?

2 Um pecuarista cria ovelhas, gado e bode. Quando chega o dia de levá-los para o abatedouro, o caminhão deve ser carregado cada vez com apenas um tipo de animal. O caminhão já fez quatro viagens, podemos garantir que ele já levou pelo menos duas vezes alguma carga do mesmo animal?

3 Ilustre alguma situação prática em que o princípio de Dirichlet pode ser aplicado.



Referência

MORGADO, A. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática).

Anotações

Triângulo de Pascal

Aula

12

Apresentação

Cálculos envolvendo combinações não são fáceis de ser desenvolvidos. Entretanto, alguns deles podem ser resolvidos facilmente se os termos envolvidos nos cálculos estiverem apresentados de maneiras especiais. Essas maneiras especiais são configurações associadas com o triângulo de Pascal, que é uma estrutura, em forma de triângulo, formada de linhas, colunas, diagonais e cujos elementos são combinações.

Objetivo

Esperamos que ao final desta aula o aluno saiba uma das teorias de como surgiu o triângulo de Pascal, seja capaz de construir um triângulo com qualquer número de linhas e conheça suas propriedades.

Triângulo de Pascal – um pouco da história

Segundo Stillwell (1989, p. 135), alguns resultados importantes de uma área da Matemática, chamada teoria dos números, foram descobertos na Idade Média, mas não conseguiram firmar raízes até serem redescobertos a partir do século XVII. Dentre esses resultados está o triângulo de Pascal, redescoberto por matemáticos chineses e utilizado como meio de gerar coeficientes binomiais, isto é, os coeficientes que aparecem nas fórmulas

$(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, e assim por diante. Outros resultados importantes descobertos na Idade Média e redescobertos posteriormente por Levi ben Gershon (1321) foram as fórmulas para permutações e combinações.

O triângulo de Pascal começou a florescer no século XVII depois de uma longa dormência, isso faz com que seja interessante saber o que era conhecido desse triângulo nos tempos medievais e o que Pascal fez para revivê-lo.

Os chineses usavam o triângulo de Pascal como meio de gerar coeficientes binomiais, isto é, os coeficientes que aparecem nas fórmulas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

e assim por diante, e o tabelavam como segue:

							1								Coeficientes de $(a+b)^0$
						1		1							Coeficientes de $(a+b)^1$
					1		2		1						Coeficientes de $(a+b)^2$
				1		3		3		1					Coeficientes de $(a+b)^3$
			1		4		6		4		1				Coeficientes de $(a+b)^4$
		1		5		10		10		5		1			Coeficientes de $(a+b)^5$
	1		6		15		20		15		6		1		Coeficientes de $(a+b)^6$
1		7		21		35		35		21		7		1	Coeficientes de $(a+b)^7$

Figura 1 – Coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$, $n = 0,1,2,...,7$.

Nessa figura, as duas linhas extras adicionadas no topo correspondem aos coeficientes das potências 0 e 1 de $(a+b)$. O triângulo aparece com seis linhas em Yáng Hui (1261) e com oito em Zhú Shìjié (1303). Yáng Hui atribui o triângulo a Jia Xiàn, que viveu no século XI.

Baseados nesses resultados, por que chamamos a tabela dos coeficientes binomiais de triângulo de Pascal? Claro que não é o único exemplo de um conceito matemático que foi nomeado depois da redescoberta ao invés de depois da descoberta, mas de qualquer forma Pascal merece mais crédito do que apenas por ter redescoberto tal conceito. No seu *Traité du triangle arithmétique* (1654), Pascal unificou as teorias Aritmética e Combinatória mostrando que os elementos do triângulo aritmético podiam ser interpretados de duas maneiras: como os coeficientes de $a^{n-k}b^k$ em $(a+b)^n$ e como o número de combinações de n coisas tomadas k a cada vez. De fato, ele mostrou que $(a+b)^n$ é a função geradora para o número de combinações. É também atribuída a Pascal, juntamente com Fermat, a resolução correta do problema das apostas que é considerado o início do ramo da Matemática, chamado Probabilidade, teoria que estudaremos nas últimas aulas desta disciplina.

Nosso objetivo agora é apresentar a você uma das teorias de como surgiu o triângulo de Pascal.

Na época em que Pitágoras viveu, eram investidas aos números e às figuras qualidades, por exemplo, o número 1 era considerado a fonte de todos os outros números e a esfera era considerada a figura mais perfeita. Em particular, o triângulo retângulo possuía toda uma mística em torno dele. Existiam até os números chamados triangulares, que são formados, iniciando-se pelo gerador de todos os números e acrescentando-se a um número todos os seus precedentes. Por exemplo, o 1, o 3 $(2+1)$, o 6 $(3+2+1)$, o 10 $(4+3+2+1)$ etc.

Já que existia uma adoração, digamos até religiosa, aos números triangulares e ao triângulo na sociedade pitagórica secreta, é natural que se tentasse conseguir um símbolo que representasse toda a essência de sua crença. A idéia é começar com um triângulo formado apenas com o número fonte de todos os números e ir montando triângulos formados a partir dos resultados obtidos das somas das linhas dos triângulos já conseguidos. Ilustramos esse procedimento a seguir.

Triângulo inicial:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & = & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 & = & 2 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & = & 3 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 4 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 5 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 6 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 7
\end{array}$$

A partir desse triângulo, montaremos outro, cujas colunas sejam iguais aos resultados das somas obtidas anteriormente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & = & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & = & 3 \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & = & 6 \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & = & 10 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & = & 15 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & = & 21 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & = & 28
\end{array}$$

Observemos o que está acontecendo: com o primeiro triângulo, conseguimos os números naturais, com o segundo, os números triangulares. Isso pode ter sido considerado um aviso para que eles continuassem e, assim, conseguissem o que foi chamado de números triangulares de segunda, terceira, quarta, ... ordens. Números triangulares de segunda ordem:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & = & 1 \\
 & & & & & 1 & 3 & = & 4 \\
 & & & & 1 & 3 & 6 & = & 10 \\
 & & & 1 & 3 & 6 & 10 & = & 20 \\
 & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & = & 35 \\
 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & = & 56 \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & = & 84
\end{array}$$

Números triangulares de terceira ordem:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & = & 1 \\
 & & & & & 1 & 4 & = & 5 \\
 & & & & 1 & 4 & 10 & = & 15 \\
 & & & 1 & 4 & 10 & 20 & = & 35 \\
 & & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & = & 70 \\
 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & = & 126 \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & = & 210
\end{array}$$

Números triangulares de quarta ordem:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & = & 1 \\ & & & 1 & 5 & = & 6 \\ & & 1 & 5 & 15 & = & 21 \\ & 1 & 5 & 15 & 35 & = & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & = & 126 \end{array}$$

Continuando dessa forma, eles estariam com a coleção dos números triangulares de qualquer ordem e, para finalizar, se montarmos um triângulo com esses números tão preciosos, obteremos:

$$\begin{array}{lllllllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{array}$$

que é o nosso famoso triângulo de Pascal (Figura 1), apenas numa forma diferente, mas suas linhas são as mesmas. Se observarmos mais detalhadamente, poderemos reescrever o triângulo anterior na forma como ele é mais conhecido:

$$\begin{array}{lllllllll} C_0^0 \\ C_1^0 & C_1^1 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\ C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \\ C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 & C_6^3 & C_6^4 & C_6^5 & C_6^6 \\ C_7^0 & C_7^1 & C_7^2 & C_7^3 & C_7^4 & C_7^5 & C_7^6 & C_7^7 \\ C_8^0 & C_8^1 & C_8^2 & C_8^3 & C_8^4 & C_8^5 & C_8^6 & C_8^7 & C_8^8 \end{array}$$

Nesse caso, $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$ é a combinação de n elementos tomados p a p, estudada na aula 3 (Combinações e arranjos).

Deixemos esse aspecto místico do triângulo de Pascal de lado e estudemos suas interessantes propriedades.

Atividade 1

Monte as quinze primeiras linhas do triângulo de Pascal. (Utilizaremos esse triângulo nas próximas atividades).

Propriedade 1 – Relação de Stiefel

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha do triângulo de Pascal, obtemos o elemento situado abaixo da última parcela (parcela mais à direita).

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_0^0 & & & & & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & & & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & & & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & & & \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 & & & \\
C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 & C_6^3 & C_6^4 & C_6^5 & C_6^6 & & \\
C_7^0 & C_7^1 & C_7^2 & C_7^3 & C_7^4 & C_7^5 & C_7^6 & C_7^7 & \\
C_8^0 & C_8^1 & C_8^2 & C_8^3 & C_8^4 & C_8^5 & C_8^6 & C_8^7 & C_8^8
\end{array}$$

Figura 2 – Relação de Stiefel

Embora a Relação de Stiefel seja obtida da própria construção do triângulo de Pascal, iremos demonstrá-la para um caso bem particular, no qual n e p são números naturais com $n > p$.

Demonstração – Para naturais fixos n e p com $n > p$, temos

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!}{(n-p)!\times p!} + \frac{n!}{(n-(p+1))!\times(p+1)!} = \frac{(p+1)}{(p+1)}\frac{n!}{(n-p)!\times p!} + \frac{(n-p)}{(n-p)}\frac{n!}{(n-p-1)!\times(p+1)!}$$

$$= (p+1)\frac{n!}{(n-p)!\times(p+1)!} + (n-p)\frac{n!}{(n-p)!\times(p+1)!} = ((p+1)+(n-p))\frac{n!}{(n-p)!\times(p+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(n-p)!\times(p+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-p)!\times(p+1)!} = C_{n+1}^{p+1}$$

Exemplo 1

Utilize a relação de Stiefel para mostrar que $C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$ vale para $n > p + 1$.

Solução

Vamos desenvolver o lado esquerdo da equação dada para tentarmos obter o lado direito.

$$C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_n^p + C_n^{p+1} + C_n^{p+1} + C_n^{p+2}$$

Aplicando a relação de Stiefel, obtemos $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ e $C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+1}^{p+2}$

Lembre-se de que a **Relação de Stiefel** diz que, somando duas posições consecutivas de uma mesma linha do triângulo de Pascal (representado pelo coeficiente de baixo), o resultado nos dá o elemento da linha de baixo que está localizado abaixo do elemento mais à direita da linha de cima (o que tiver maior índice superior).

Voltando à equação inicial, temos:

$$C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_n^p + C_n^{p+1} + C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2}$$

Aplicando mais uma vez a relação de Stiefel, que encontra-se ao lado direito da equação anterior, obtemos

$$C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$$, ou seja, $$C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+2}^{p+2},$$

como queríamos demonstrar.

Atividade 2

Utilizando o resultado do exemplo anterior, calcule $C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2} + C_{n+2}^{p+3}$

Propriedade 2 – Relação das combinações complementares

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos eqüidistantes dos extremos são iguais.

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_0^0 \\
C_1^0 & C_1^1 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \\
C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 & C_6^3 & C_6^4 & C_6^5 & C_6^6 \\
C_7^0 & C_7^1 & C_7^2 & C_7^3 & C_7^4 & C_7^5 & C_7^6 & C_7^7 \\
C_8^0 & C_8^1 & C_8^2 & C_8^3 & C_8^4 & C_8^5 & C_8^6 & C_8^7 & C_8^8
\end{array}$$

Figura 3 – Relação das combinações complementares

Demonstração – Consideremos $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geq p$. Então,

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-(n-p))! \times (n-p)!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} = C_n^p$$

o que demonstra essa propriedade.

Atividade 3

Quais são os elementos eqüidistantes das extremidades da sétima linha do triângulo de Pascal?

Propriedade 3 – Teorema das linhas

A soma dos elementos da linha n do triângulo de Pascal vale 2^n, ou seja, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

C_0^0

$C_1^0 + C_1^1 = 2^1$

$C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 2^2$

$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4$

$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$

$C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6$

$C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7$

$C_8^0 \quad C_8^1 \quad C_8^2 \quad C_8^3 \quad C_8^4 \quad C_8^5 \quad C_8^6 \quad C_8^7 \quad C_8^8$

Figura 4 – Relação das combinações complementares

Demonstração – Como temos uma equação envolvendo números naturais, temos que utilizar o **Princípio da Indução Finita** para demonstrar sua validade.

Para $n = 0$, temos que o lado esquerdo se resume a $C_0^0 = 1$ e o lado direito, $2^0 = 1$. Logo, a igualdade é verdadeira.

Hipótese de indução: suponha que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^{k-1} + C_k^k = 2^k.$$

Mostremos agora, utilizando a hipótese de indução, que a equação continua válida quando temos $n = k + 1$, ou seja, $C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$. Vamos começar com o lado esquerdo da equação:

$$C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 + \ldots + C_{k+1}^{k-1} + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1}$$

Aplicando a relação de Stiefel, podemos reescrever:

$$C_{k+1}^1 \text{ como } C_k^0 + C_k^1$$

$$C_{k+1}^2 \text{ como } C_k^1 + C_k^2$$

Continuando dessa maneira até o penúltimo elemento, temos $C_{k+1}^k = C_k^{k-1} + C_k^k$.

Substituindo esses valores na equação inicial:

$$C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 + \ldots + C_{k+1}^{k-1} + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = C_{k+1}^0 + C_k^0 + C_k^1 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^{k-3} + C_k^{k-2} + C_k^{k-1} + C_k^{k-1} + C_k^k + C_{k+1}^{k+1}$$

Reorganizando o lado direito, temos:

$$\underbrace{C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^{k-1} + C_k^k}_{2^k} + C_{k+1}^0 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k+1}.$$

Usando a hipótese de indução nos primeiros termos da expressão anterior e observando que $C_{k+1}^0 = 1 = C_k^0$ e $C_{k+1}^{k+1} = 1 = C_k^k$, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte maneira:

$$2^k + \underbrace{C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^{k-1} + C_k^k}_{2^k}.$$

Aplicando novamente a hipótese de indução nos últimos termos da expressão anterior, obtemos $2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$.

Dessa forma, mostramos que

$$C_{k+1}^{0}+C_{k+1}^{1}+C_{k+1}^{2}+\ldots+C_{k+1}^{k-1}+C_{k+1}^{k}+C_{k+1}^{k+1}=2^{k+1},$$

ou seja, a equação continua válida para $n = k + 1$. Portanto, pelo **Princípio da Indução Finita**, temos que a fórmula é válida para qualquer n natural, o que demonstra o teorema.

Atividade 4

Calcule a soma de todos os elementos da linha 10 do triângulo de Pascal.

Propriedade 4 – Teorema das colunas

A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal (começando do primeiro elemento da coluna) é igual ao elemento situado uma linha e uma coluna após o último elemento da soma, ou seja, $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$.

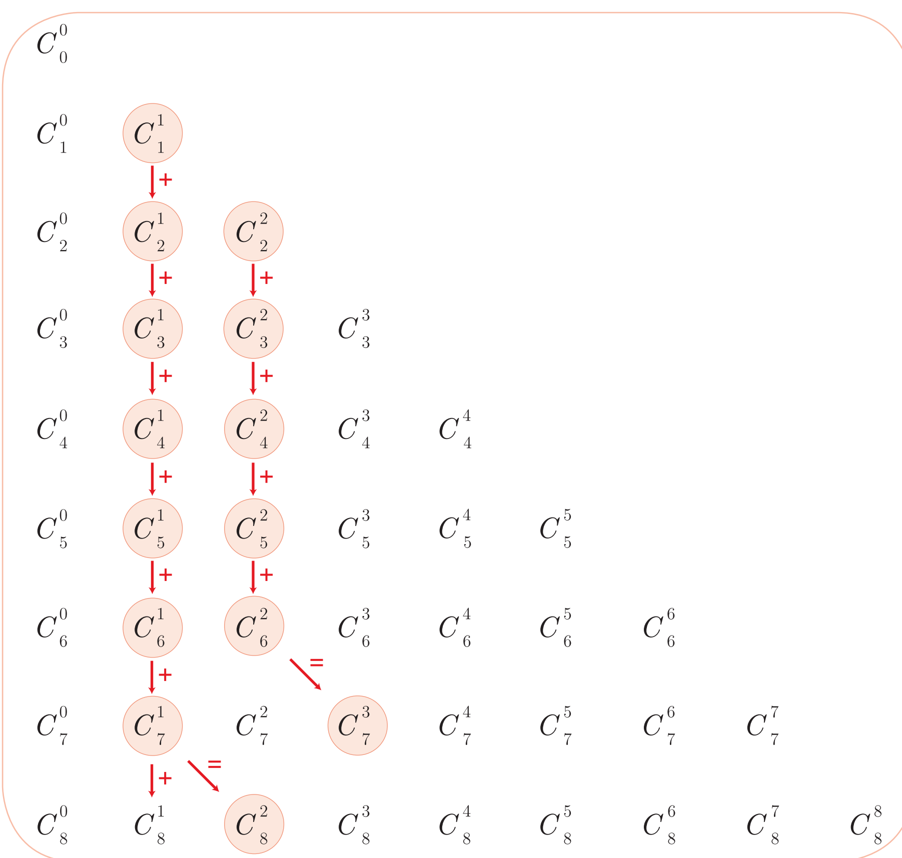


Figura 5 – Teorema das colunas

Demonstração – Mais uma vez temos uma equação envolvendo números naturais. Temos que utilizar o **Princípio da Indução Finita** para demonstrar sua validade.

Para $n = 0$, temos que o lado esquerdo se resume a $C_p^p = 1$e o lado direito, $C_{p+1}^{p+1} = 1$. Logo, a igualdade é verdadeira.

Hipótese de indução – suponha que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, ou seja, $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+k}^p = C_{p+k+1}^{p+1}$

Vamos mostrar, utilizando a hipótese de indução, que a equação continua válida quando temos $n = k + 1$, ou seja,

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+k}^p = C_{p+k+1}^p = C_{p+(k+1)+1}^{p+1} = C_{p+k+2}^{p+1}.$$

Comecemos com o lado esquerdo da equação anterior:

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+k}^p + C_{p+k+1}^p.$$

Utilizando a hipótese de indução nos primeiros k termos da soma, temos

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+k}^p = C_{p+k+1}^{p+1}.$$

Substituindo esse valor na expressão anterior e em seguida usando a **relação de Stiefel**, obtemos

$$C_{p+k+1}^{p+1} + C_{p+k+1}^p = C_{p+k+1}^p + C_{p+k+1}^{p+1} = C_{(p+k+1)+1}^{p+1} = C_{p+k+2}^{p+1}.$$

Dessa forma, mostramos que

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+k}^p + C_{p+k+1}^p = C_{p+k+2}^{p+1}.$$

ou seja, a equação continua válida para $n = k + 1$. Portanto, pelo **Princípio da Indução Finita**, temos que a fórmula é válida para qualquer n natural, o que demonstra o teorema.

Atividade 5

Calcule a soma dos 10 primeiros elementos da coluna 5 do triângulo de Pascal.

Propriedade 5 – Teorema das diagonais

A soma dos elementos de uma diagonal (paralela à hipotenusa) do triângulo de Pascal (começando com o elemento do topo da diagonal) é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela dessa soma, ou seja, $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+p}^p = C_{n+p+1}^p$.

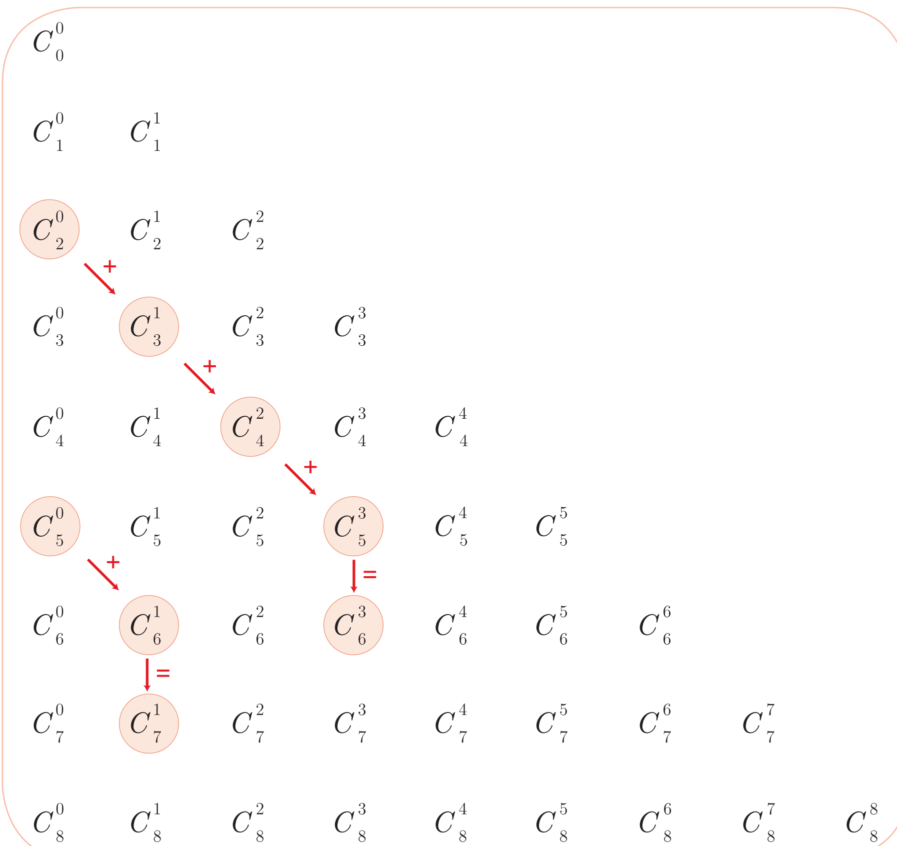


Figura 6 – Teorema das diagonais

Demonstração – Mais uma vez temos uma equação envolvendo números naturais. Temos que utilizar o **Princípio da Indução Finita** para demonstrar sua validade.

Note, porém, que quem varia nesse caso é o p. O n, uma vez escolhida a diagonal que estamos trabalhando (a linha que começará a diagonal C_n^0), estará fixo até o final da soma. Logo, devemos fazer a indução sobre p. Vamos lá!

Para $p = 0$, temos que o lado esquerdo se resume a $C_n^0 = 1$ e o lado direito a $C_{n+1}^0 = 1$. Logo, a igualdade é verdadeira.

Hipótese de indução – suponha que a igualdade seja verdadeira para $p = k$, ou seja, $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$.

Mostremos agora, utilizando a hipótese de indução, que a equação continua válida quando temos $p = k + 1$, ou seja, $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_{n+k+1}^{k+1} = C_{n+k+2}^{k+1}$. Comecemos com o lado esquerdo da equação

$$\underbrace{C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k}_{C_{n+k+1}^k} + C_{n+k+1}^{k+1} = C_{n+k+1}^k + C_{n+k+1}^{k+1} = C_{(n+k+1)+1}^{k+1} = C_{n+k+2}^{k+1}$$

Utilizamos primeiro, na equação anterior, a hipótese de indução e depois a **relação de Stiefel** e mostramos que a equação é verdadeira para $p = k + 1$. Portanto, pelo **Princípio da Indução Finita**, temos que a fórmula é válida para qualquer p natural, o que demonstra o teorema.

Perceba como a compreensão dessas propriedades pode ser útil!

Exemplo 2

Calcule:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$$

Solução

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = 1 \times \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} + 2 \times \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} + 3 \times \frac{n!}{(n-3)! \times 3!} + \ldots + n \times \frac{n!}{(n-n)! \times n!}$$

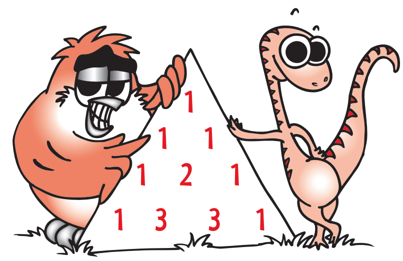
$$= \frac{n!}{(n-1)! \times (1-1)!} + \frac{n!}{(n-2)! \times (2-1)!} + \frac{n!}{(n-3)! \times (3-1)!} + \ldots + \frac{n!}{(n-n)! \times (n-1)!}$$

$$= \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)! \times 0!} + \frac{n \times (n-1)!}{(n-2)! \times 1!} + \frac{n \times (n-1)!}{(n-3)! \times 2!} + \ldots + \frac{n \times (n-1)!}{(n-n)! \times (n-1)!}$$

$$= n \left[\frac{(n-1)!}{((n-1)-0)! \times 0!} + \frac{(n-1)!}{((n-1)-1)! \times 1!} + \frac{(n-1)!}{((n-1)-2)! \times 2!} + \ldots + \frac{(n-1)!}{((n-1)-(n-1))! \times (n-1)!} \right]$$

$$= n \left[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} \right] = n \times 2^{n-}$$

Observe que a última igualdade foi resultado da utilização da propriedade 2, ou seja, a soma dos elementos da linha $n - 1$ vale 2^{n-1}.



Atividade 6

Calcule $C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3$

Atividade 7

1 Se A possui 1024 subconjuntos, qual é o número de elementos de A? (Dica: Lembre-se de que C_n^p representa o número de subconjuntos de A com p elementos).

2 Quantos coquetéis (mistura de duas ou mais bebidas) podem ser feitos a partir de 7 ingredientes distintos?

3 Resolva a equação $C_{41}^{p} = C_{41}^{2p-1}$. (Sugestão: utilize a Relação das Combinações Complementares)

4 Resolva a equação $C_{15-p}^{2p} = C_{15-p}^{9-p}$. (Sugestão: utilize a Relação das Combinações Complementares)

5 Encontre o valor da soma $C_{10}^1 + C_{11}^2 + C_{12}^3 + \ldots + C_{20}^{11}$. (Sugestão: use o Teorema das Diagonais).

6 Encontre o valor da soma $C_{10}^{10} + C_{11}^{10} + C_{12}^{10} + \ldots + C_{20}^{10}$. (Sugestão: use o Teorema das Colunas)

Resumo

Nesta aula, vimos que o triângulo de Pascal recebeu seu nome por ter sido ele a unificar as teorias Aritmética e Combinatória, mostrando que os elementos do triângulo aritmético podiam ser interpretados de duas maneiras: como os coeficientes da expansão da soma de duas variáveis e como a combinação de n elementos tomados k a k. Vimos também que as propriedades do triângulo (Relação de Stiefel, Relação das Combinações Complementares, Teoremas das Linhas, Colunas e Diagonais) ajudam nos cálculos envolvendo soma de combinações.

Autoavaliação

1. Pesquise nos livros didáticos outra forma de construir o triângulo de Pascal. Você conhece alguma outra teoria sobre a construção do triângulo de Pascal?

2. Você lembra o que diz o Princípio da Indução Finita?

Referências

HOGBEN, Lancelot, **Maravilhas da matemática:** influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

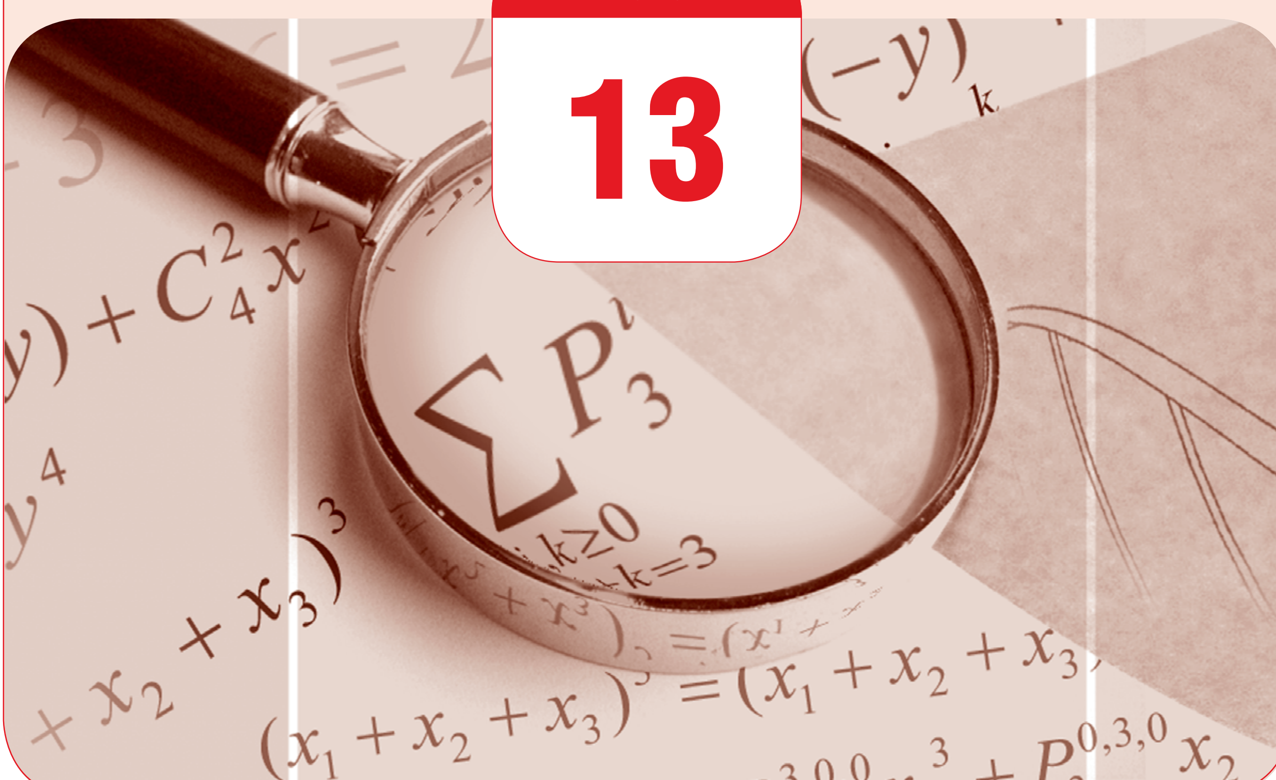
MORGADO, A. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. (Coleção Professor de Matemática).

STILLWELL, John. **Mathematics and its history.** New York: Springer-Verlag, 1989.

Binômio de Newton e polinômio de Leibniz

Aula

13



Apresentação

O binômio de Newton e o polinômio de Leibniz são duas ferramentas que, a princípio, foram desenvolvidas para encontrar todos os termos de expansões da forma $(x+y)^n$, $(x+y+z)^n$, $(x+y+z+w)^n$, $\ldots$. Essas ferramentas, no entanto, mostraram-se úteis para resolver situações do tipo: dados 3 elementos x, y e z queremos montar, utilizando apenas esses três elementos, seqüências de n elementos e organizá-los em fila com n_1 elementos x, n_2 elementos y e n_3 elementos z, de modo que $n_1+n_2+n_3=n$. Você pode se perguntar qual seria a importância desse problema. Lembre-se de que atualmente o grande desafio da medicina molecular é encontrar as seqüências do código genético das pessoas, as quais são formadas por 4 elementos (adenina, tinina, citosina e guanina) e são analisadas por máquinas. Logo, saber o número de possibilidades de se formar uma seqüência de elementos, utilizando-se apenas de uma quantidade finita de letras (no caso, as letras iniciais de cada elemento), é uma questão pertinente. Nesta aula, estudaremos o binômio de Newton e o polinômio de Leibniz que nos darão subsídios para resolver tais questões.

Objetivo

Espera-se que ao final desta aula você possa desenvolver a potência de uma soma de dois (binômio de Newton) ou mais termos (polinômio de Leibniz) sem dificuldade, e seja capaz de aplicá-la na resolução de problemas.

Binômio de Newton

Como calcular $(x+y)^n$?

Etapa 1

Vamos começar com a potência 2 e, em seguida, generalizemos para uma potência qualquer. Sabemos que:

$$(x+y)^2 = (x+y) \times (x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Observe que a soma das potências de cada parcela é 2, de fato:

- a potência da primeira parcela x^2 é 2;
- a potência da segunda parcela xy é 2;
- a potência da terceira parcela yx é 2;
- a potência da quarta parcela y^2 é 2.

E coincidem com a potência do termo $(x+y)^2$.

Etapa 2

$(x+y)^3 = (x+y) \times (x+y) \times (x+y)$

De modo análogo, os termos que aparecerão depois que escrevermos o produto anterior terão a soma dos expoentes igual a 3. Logo, os possíveis termos são x^3, x^2y, xy^2, y^3. Quaisquer outros números que coloquemos nos expoentes irão somar um número maior ou então um número menor que 3, portanto, não figurarão na expressão final do desenvolvimento da potência. Sabendo que o resultado será uma soma de uma certa quantidade de cada um desses termos, pergunta-se: quantos termos x^3, x^2y, xy^2, y^3 aparecerão no desenvolvimento?

Podemos pensar em cada termo dos produtos xxx, xxy, xyy, yyy como sendo o resultado da retirada de bolas de 3 gavetas, cada gaveta possui uma bola x e uma bola y. Sendo assim, xyx significa que da primeira gaveta retiramos a bola x, da segunda gaveta retiramos a bola y e da terceira gaveta retiramos a bola x. Do mesmo modo, yxx significa que da primeira gaveta retiramos a bola y, da segunda gaveta retiramos a bola x e da terceira gaveta retiramos a bola x. Perceba que ao efetuarmos o produto, obtemos, em ambos, x^2y. A pergunta, então, é: quantas são as possibilidades de retirarmos duas bolas x e uma bola y?

Ora, esse número é a quantidade de anagramas conseguidos com duas letras x e uma letra y, que aprendemos a encontrar na aula 4 (Permutação de elementos nem todos distintos):

$P_3^{2,1} = \dfrac{3!}{2! \times 1!}$ que, neste caso, coincide com C_3^2.

Do mesmo modo, fazendo para os outros termos que aparecem em $(x+y)^3$, obtemos:

x^3: aparece $P_3^{3,0} = \dfrac{3!}{3! \times 0!} = 1$ vez que, neste caso, coincide com C_3^3.

x^2y: como já vimos, aparece $P_3^{2,1} = \dfrac{3!}{2! \times 1!}$ vezes, coincidindo com C_3^2.

xy^2: aparece $P_3^{1,2} = \dfrac{3!}{1! \times 2!}$ vezes que, neste caso, coincide com C_3^1.

y^3: aparece $P_3^{0,3} = \dfrac{3!}{0! \times 3!}$ vezes que, neste caso, coincide com C_3^0.

Assim, somados os termos em que cada um está multiplicado pelo seu respectivo número de aparições, temos:

$$(x+y)^3 = C_3^3 x^3 + C_3^2 x^2 y + C_3^1 x y^2 + C_3^0 y^3.$$

Ou, de uma maneira mais compacta:

$$(x+y)^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^{3-i} x^{3-i} y^i$$

Observação 1 – Lembre que apenas para números y diferentes de zero, temos $y^0 = 1$, portanto, $x^3 y^0 = x^3$ só vale quando y é diferente de zero.

Observação 2 – Pelo teorema das linhas que estudamos na aula passada, a soma dos coeficientes dos termos que aparecem no somatório vale 2^3. Ou, ainda, por uma verificação direta:

$$C_3^3 + C_3^2 + C_3^1 + C_3^0 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

Fazendo essa mesma análise para um produto com potência n qualquer, obtemos:

Etapa n

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} x^{n-i} y^i$$

Note que a soma das potências de x e y é $(n-i)+i=n$, que é a potência de $(x+y)$.

Essa fórmula é conhecida como a fórmula do **binômio de Newton** e a soma dos coeficientes é 2^n pelo **teorema das linhas**.

Exemplo 1

Calcule $(x-y)^2$.

Solução

$$(x-y)^2 = (x+(-y))^2 = C_2^2 x^2 + C_2^1 x(-y) + C_2^0 (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Exemplo 2

Calcule $(x-y)^4$.

Solução

$$\begin{aligned}(x-y)^4 &= (x+(-y))^4 = C_4^4 x^4 + C_4^3 x^3(-y) + C_4^2 x^2 (-y)^2 + C_4^1 x(-y)^3 + C_4^0 (-y)^4 \\ &= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Agora que o cálculo de potências de somas de dois elementos não tem mais mistério, verifiquemos mais alguns exemplos.

Exemplo 3

Encontre o coeficiente do termo x^8y^7 da expansão $(x+y)^{15}$.

Solução

Pela fórmula geral do binômio de Newton,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} x^{n-i} y^i,$$

temos que o termo x^8y^7 é referente ao $i=7$, pois $x^{15-7}y^7 = x^8y^7$. Para esse valor de i, temos que o coeficiente é:

$$C_{15}^{8} = \frac{15!}{(15-8)! \times 8!} = \frac{15!}{7! \times 8!} = 6435.$$

Exemplo 4

Em uma experiência teórica, dois elementos químicos x e y foram representados por bolas, uma vermelha e uma azul, respectivamente. A experiência foi a seguinte: cada aluno pegava uma quantidade de 15 bolas, as quais podiam ou não ser todas da mesma cor e as dispunha em uma fila. Cada fila diferente era fotografada por uma câmera digital e, ao final da aula, o disco contendo as fotos era entregue ao professor.

Pergunta-se: (1) quantas fotos contendo 8 bolas vermelhas e 7 azuis foram entregues? (2) e quantas fotos continham todas as bolinhas da mesma cor? (3) qual quantidade de cada bola fornecerá a maior quantidade possível de fotos?

Solução

Note que, pelo modo que construímos a fórmula do binômio de Newton, a primeira pergunta equivale a encontrar o coeficiente do termo x^8y^7, ou seja,

$$C_{15}^{8} = \frac{15!}{(15-8)! \times 8!} = \frac{15!}{7! \times 8!} = 6435 = C_{15}^{8}.$$

A segunda pergunta equivale a encontrar o coeficiente do termo x^{15} ou y^{15}, dependendo se sua escolha foi por todas as bolas vermelhas ou todas azuis. Pela fórmula geral do binômio de Newton, temos que esses coeficientes são dados por:

$$C_{15}^{0} = \frac{15!}{(15-0)! \times 0!} = \frac{15!}{0! \times 15!} = 1 = C_{15}^{15}.$$

Para responder à terceira pergunta, precisamos calcular todos os coeficientes até o C_{15}^{7}, pois vimos na aula anterior sobre o triângulo de Pascal, mais precisamente, pela relação das combinações complementares, que os números a uma mesma distância as extremidades possuem o mesmo valor, ou seja, $C_{15}^{0} = C_{15}^{15}, C_{15}^{1} = C_{15}^{14}, C_{15}^{2} = C_{15}^{13}, C_{15}^{3} = C_{15}^{12}, \dots, C_{15}^{7} = C_{15}^{8}$.

Calculando, então, teremos:

C_{15}^{0}	C_{15}^{1}	C_{15}^{2}	C_{15}^{3}	C_{15}^{4}	C_{15}^{5}	C_{15}^{6}	C_{15}^{7}
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435

Dessa forma, podemos concluir que as configurações contendo 7 bolas de uma cor e 8 de outra foram as que mais apareceram, 6435 vezes, e que, possivelmente, essa experiência deve ter demorado muito mais que uma aula.

Atividade 1

1 Encontre a expansão de $(x+y)^5$.

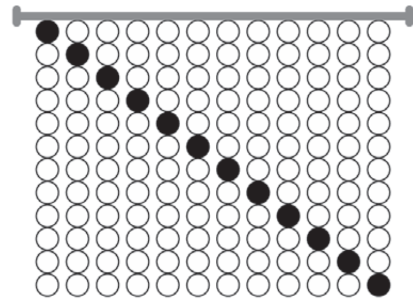
2 Encontre a expansão de $(x-y)^5$.

3 Numa festa de São João, o locutor propôs o seguinte desafio: temos bolinhas de 2 cores, branca e preta. A pessoa escolherá 12 bolinhas e formará a maior quantidade possível de fileiras distintas a fim de construir uma cortina. Por exemplo,

se a pessoa escolher todas as bolas brancas:

se a pessoa escolher 1 bola preta e 11 bolas brancas:

1 tira



12 tiras

Quem construir a cortina mais larga ganhará um prêmio. Que quantidade de bolinhas de cada cor você escolherá para poder ganhar o prêmio? Pode haver mais de um ganhador com escolhas de quantidades diferentes de bolinhas?

4 Se o número de bolinhas da questão anterior fosse 13, poderia haver mais de um ganhador mesmo escolhendo quantidades diferentes de bolinhas?

5 Analise as questões 3 e 4 anteriores e explique se existe diferença entre as duas. Se houver, explique qual foi o ponto chave dessa diferença.

Polinômio de Leibniz

E se quisermos calcular expressões do tipo $(x_1 + x_2 + x_3)^3$?

A idéia é a mesma que usamos na seção sobre binômio de Newton. Sabemos que

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = (x_1 + x_2 + x_3) \times (x_1 + x_2 + x_3) \times (x_1 + x_2 + x_3).$$

Fazendo o produto, obteremos somas dos termos

$x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3,\ x_1^2x_2,\ x_1^2x_3,\ x_2^2x_3,\ x_1x_2^2,\ x_1x_3^2,\ x_2x_3^2,\ x_1x_2x_3.$

A pergunta é:

quantos, de cada um desses termos, devem aparecer na expressão final?

Se pensarmos em cada termo desse produto como uma gaveta contendo uma bola x_1, uma bola x_2 e uma bola x_3; temos que cada termo do produto é, na verdade, o resultado da retirada de uma bola de cada gaveta, ou seja, $x_1x_2x_1$ significa que a bola x_1 foi retirada da primeira gaveta, a bola x_2, da segunda e outra bola x_1, da terceira. Do mesmo modo, $x_2x_1x_1$ significa que a bola x_2 foi retirada da primeira gaveta, a bola x_1, da segunda e outra bola x_1, da terceira. Note, porém, que, ao efetuarmos o produto, ambos darão $x_1^2x_2$.

A pergunta, então, é:

quantas são as possibilidades de tirarmos duas bolas x_1 e uma bola x_2?

Ora, esse número é o mesmo que a quantidade de anagramas conseguidos com duas letras x_1 e uma letra x_2, ou seja,

$$P_3^{2,1,0} = \frac{3!}{2! \times 1! \times 0!},$$

em que os números no índice superior de P representam, respectivamente, o número de x_1, x_2 e x_3 que aparecem na palavra da qual estamos calculando a quantidade de anagramas.

Procedendo da mesma maneira, obtemos que:

x_1^3, x_2^3 e x_3^3 aparecem, respectivamente, $P_3^{3,0,0} = \dfrac{3!}{3! \times 0! \times 0!} = P_3^{0,3,0} = P_3^{0,0,3}$ vezes.

$x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_2^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2$ e $x_2x_3^2$ aparecem, respectivamente, $P_3^{2,1,0} = \dfrac{3!}{2! \times 1! \times 0!} = P_3^{2,0,1} = P_3^{0,2,1} = P_3^{1,2,0} = P_3^{1,0,2} = P_3^{0,1,2}$ vezes.

Assim, somados os termos em que cada qual está multiplicado pelo seu respectivo número de aparições, temos:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^3 &= (x_1+x_2+x_3).(x_1+x_2+x_3).(x_1+x_2+x_3) = \\ &= P_3^{3,0,0}x_1^3 + P_3^{0,3,0}x_2^3 + P_3^{0,0,3}x_3^3 + P_3^{2,1,0}x_1^2x_2 + P_3^{1,2,0}x_1x_2^2 + \\ &\quad P_3^{2,0,1}x_1^2x_3 + P_3^{1,0,2}x_1x_3^2 + P_3^{0,2,1}x_2^2x_1 + P_3^{0,1,2}x_2x_3^2 + P_3^{1,1,1}x_1x_2x_3\end{aligned}$$

Ou, numa forma mais compacta,

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=3}} P_3^{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k,$$

na qual os índices que aparecem no somatório significam que procuramos todos os inteiros não negativos i, j, k tais que sua soma resulte em 3.

Observação 1 – Para qualquer número x diferente de zero, temos $x^0 = 1$.Logo, supondo x, y e z diferentes de zero, temos $x^3 y^0 z^0 = x^3$.

Observação 2 – Note que a soma dos coeficientes das parcelas do somatório é, pelo **Princípio Multiplicativo**, $3 \times 3 \times 3 = 27$, já que temos 3 chances para a primeira posição do produto, 3 para a segunda e 3 para a terceira.

Verificando

$P_3^{3,0,0} + P_3^{0,3,0} + P_3^{0,0,3} + P_3^{2,1,0} + P_3^{1,2,0} + P_3^{2,0,1} + P_3^{1,0,2} + P_3^{0,2,1} + P_3^{0,1,2} + P_3^{1,1,1} =$
$1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 6 = 27$

Fazendo essa mesma análise para um produto com uma potência qualquer n, teremos que $(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_n^{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k,$.

Essa fórmula é conhecida como o **Polinômio de Leibniz** e a soma dos coeficientes das parcelas do somatório é $n \times n \times n = n^3$

Exemplo 5

Encontre o coeficiente do termo $x^8 y^7$ da expansão $(x + y + z)^{15}$.

Solução

Pela fórmula geral do polinômio de Leibniz,

$$(x + y + z)^n = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_n^{i,j,k} x^i x^j x^k$$

temos que isso acontece para $i = 8$, $j = 7$ e $k = 0$, já que $x^8 y^7 z^0 = x^8 y^7$. Para esses valores de i, j e k, o coeficiente é: $P_{15}^{8,7,0} = \dfrac{15!}{8! \times 7! \times 0!} = \dfrac{15!}{(15-7)! \times 7!} = C_{15}^7 =$ 6435.

Exemplo 6

Numa experiência teórica, 3 elementos químicos x, y e z foram representados por uma bola vermelha, uma bola azul e uma bola verde, respectivamente. A experiência era a seguinte: cada aluno pegava uma quantidade de 15 bolas, as quais podiam ou não ser todas da mesma cor, e as dispunha em uma fila. Cada fila diferente era fotografada por uma câmera digital e, ao final da aula, o disco contendo as fotos era entregue ao professor.

Pergunta-se: (1) quantas fotos contendo 8 bolas vermelhas, 7 bolas azuis e nenhuma verde foram entregues? (2) e quantas contendo todas as bolinhas da mesma cor? (3) e quantas com 5 bolinhas de cada cor? (4) qual a quantidade de cada bola que fornecerá a maior quantidade possível de fotos?

Solução

Observe que, pelo modo que construímos a fórmula do polinômio de Leibniz, a primeira pergunta equivale a encontrar o coeficiente do termo x^8y^7, dependendo se x é a bola vermelha ou azul, respectivamente. Esse valor é

$$P_{15}^{8,7,0} = \frac{15!}{8! \times 7! \times 0!} = \frac{15!}{(15-7)! \times 7!} = C_{15}^{7} = 6435.$$

A segunda pergunta equivale a encontrar o coeficiente do termo x^{15}, y^{15} ou z^{15}, dependendo se você escolheu todas as bolas vermelhas, azuis ou verdes, respectivamente. Pela fórmula geral do polinômio de Leibniz, temos que esses coeficientes são dados por

$$P_{15}^{15,0,0} = \frac{15!}{15! \times 0! \times 0!} = \frac{15!}{0! \times 15! \times 0!} = P_{15}^{0,15,0} = \frac{15!}{0! \times 0! \times 15!} = P_{15}^{0,0,15} = 1.$$

A terceira pergunta equivale a encontrar o coeficiente do termo $x^5y^5z^5$. Pela fórmula geral do polinômio de Leibniz, temos que esses coeficientes são dados por

$$P_{15}^{5,5,5} = \frac{15!}{5! \times 5! \times 5!} = 756756.$$

Para responder à quarta pergunta, precisamos calcular todos os coeficientes, lembrando que $P_{15}^{a,b,c} = P_{15}^{a,c,b} = P_{15}^{b,a,c} = P_{15}^{b,c,a} = P_{15}^{c,a,b} = P_{15}^{c,b,a}$ com $a+b+c = 15$.

Calculando, então, teremos:

$P_{15}^{15,0,0} = P_{15}^{0,15,0} = P_{15}^{0,0,15}$	1
$P_{15}^{14,1,0} = P_{15}^{14,0,1} = P_{15}^{1,14,0} = P_{15}^{1,0,14} = P_{15}^{0,14,1} = P_{15}^{0,1,14}$	15
$P_{15}^{13,2,0} = P_{15}^{13,0,2} = P_{15}^{2,13,0} = P_{15}^{2,0,13} = P_{15}^{0,13,2} = P_{15}^{0,2,13}$	105
$P_{15}^{12,3,0} = P_{15}^{12,0,3} = P_{15}^{3,12,0} = P_{15}^{3,0,12} = P_{15}^{0,12,3} = P_{15}^{0,3,12}$	455
$P_{15}^{11,4,0} = P_{15}^{11,0,4} = P_{15}^{4,11,0} = P_{15}^{4,0,11} = P_{15}^{0,11,4} = P_{15}^{0,4,11}$	1365
$P_{15}^{10,5,0} = P_{15}^{10,0,5} = P_{15}^{5,10,0} = P_{15}^{5,0,10} = P_{15}^{0,10,5} = P_{15}^{0,5,10}$	3003
$P_{15}^{9,6,0} = P_{15}^{9,0,6} = P_{15}^{6,9,0} = P_{15}^{6,0,9} = P_{15}^{0,9,6} = P_{15}^{0,6,9}$	5005
$P_{15}^{8,7,0} = P_{15}^{8,0,7} = P_{15}^{7,8,0} = P_{15}^{7,0,8} = P_{15}^{0,8,7} = P_{15}^{0,7,8}$	6435

Até o momento, fizemos apenas os cálculos para o caso de termos escolhido apenas 2 das 3 bolas, que basicamente nos dão os valores da experiência utilizando apenas 2 bolas. Continuemos nossos cálculos.

$P_{15}^{1,1,13} = P_{15}^{1,13,1} = P_{15}^{13,1,1}$	210
$P_{15}^{1,2,12} = P_{15}^{2,1,12} = P_{15}^{1,12,2} = P_{15}^{2,12,1} = P_{15}^{12,1,2} = P_{15}^{12,2,1}$	1365
$P_{15}^{1,3,11} = P_{15}^{3,1,11} = P_{15}^{1,11,3} = P_{15}^{3,11,1} = P_{15}^{11,1,3} = P_{15}^{11,3,1}$	5460
$P_{15}^{2,2,11} = P_{15}^{2,11,2} = P_{15}^{11,2,2}$	8190
$P_{15}^{1,4,10} = P_{15}^{4,1,10} = P_{15}^{1,10,4} = P_{15}^{4,10,1} = P_{15}^{10,1,4} = P_{15}^{10,4,1}$	15015
$P_{15}^{2,3,10} = P_{15}^{3,2,10} = P_{15}^{2,10,3} = P_{15}^{3,10,2} = P_{15}^{10,2,3} = P_{15}^{10,3,2}$	30030
$P_{15}^{1,5,9} = P_{15}^{5,1,9} = P_{15}^{1,9,5} = P_{15}^{5,9,1} = P_{15}^{9,1,5} = P_{15}^{9,5,1}$	30030
$P_{15}^{2,4,9} = P_{15}^{4,2,9} = P_{15}^{2,9,4} = P_{15}^{9,4,2} = P_{15}^{4,2,9} = P_{15}^{9,2,4}$	75075
$P_{15}^{3,3,9} = P_{15}^{9,3,3} = P_{15}^{3,9,3}$	100100
$P_{15}^{1,6,8} = P_{15}^{6,1,8} = P_{15}^{1,8,6} = P_{15}^{6,8,1} = P_{15}^{8,1,6} = P_{15}^{8,6,1}$	45045
$P_{15}^{2,5,8} = P_{15}^{5,2,8} = P_{15}^{2,8,5} = P_{15}^{5,8,2} = P_{15}^{8,2,5} = P_{15}^{8,5,2}$	135135
$P_{15}^{3,4,8} = P_{15}^{4,3,8} = P_{15}^{3,8,4} = P_{15}^{4,8,3} = P_{15}^{8,3,4} = P_{15}^{8,4,3}$	225225
$P_{15}^{1,7,7} = P_{15}^{7,1,7} = P_{15}^{7,7,1}$	51480
$P_{15}^{2,6,7} = P_{15}^{6,2,7} = P_{15}^{2,7,6} = P_{15}^{6,7,2} = P_{15}^{7,2,6} = P_{15}^{7,6,2}$	180180
$P_{15}^{3,5,7} = P_{15}^{5,3,7} = P_{15}^{3,7,5} = P_{15}^{5,7,3} = P_{15}^{7,3,5} = P_{15}^{7,5,3}$	360360
$P_{15}^{4,4,7} = P_{15}^{4,7,4} = P_{15}^{7,4,4}$	450450
$P_{15}^{3,6,6} = P_{15}^{6,3,6} = P_{15}^{6,6,3}$	420420
$P_{15}^{4,5,6} = P_{15}^{5,4,6} = P_{15}^{4,6,5} = P_{15}^{5,6,4} = P_{15}^{6,4,5} = P_{15}^{6,5,4}$	630630
$P_{15}^{5,5,5}$	756756

Dessa forma, podemos concluir que as configurações que contêm 5 bolas de cada cor foram as que mais apareceram, 756756 vezes, e que possivelmente essa experiência deve ter demorado muito mais que uma aula.

Atividade 2

1 Encontre a expansão de $(x+y+z)^5$.

2 Encontre a expansão de $(x-y+z)^3$.

3 Numa dada festa de São João, o locutor propôs o seguinte desafio: temos bolinhas de 3 cores, brancas, pretas e vermelhas; a pessoa escolherá 12 bolinhas e construirá fileiras com elas a fim de montar uma cortina; cada fileira de bolinhas deve ser diferente da outra; a cortina mais larga ganhará um prêmio. Que quantidade de bolinhas de cada cor você escolherá a fim de ganhar esse prêmio? Pode haver mais de um ganhador com escolhas de quantidades diferentes de bolinhas?

4 Se o número de bolinhas da questão anterior fosse 13, poderia haver mais de um ganhador mesmo escolhendo quantidades diferentes de bolinhas?

5 Analise as questões 3 e 4 e explique se existe diferença entre elas. Se houver, explique o ponto chave dessa diferença.

Resumo

Nesta aula, você estudou que o binômio de Newton é usado para encontrar a expressão quando desenvolvemos a potência n-ésima de uma soma de dois termos. Também observou que o polinômio de Leibniz é usado para encontrar a expressão quando desenvolvemos a potência n-ésima de uma soma de mais de dois termos. Finalizamos, constatando que o binômio de Newton é um caso particular do polinômio de Leibniz.

Autoavaliação

1 Por que o binômio de Newton pode ser considerado um caso particular do polinômio de Leibniz? (Sugestão: desenvolva o polinômio de Leibniz $(x+y+z)^n$ e depois considere apenas os termos em que nenhuma bola z tenha sido retirada, ou seja, os termos cujos coeficientes sejam da forma $P_n^{i,j,0}$ com $i+j=n$).

2 Crie um jogo utilizando a idéia das questões 3 da atividade 1 e 3 da atividade 2, de modo que em cada um deles exista um único ganhador.

3 Crie um jogo utilizando a idéia dessas questões de modo que em cada um deles exista mais de um ganhador.

Referência

MORGADO, P. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática).

Anotações

Anotações

Probabilidade

Aula

14

Apresentação

Nesta aula, veremos que o conceito de **probabilidade** está intimamente ligado ao conceito de função e entenderemos por que a palavra probabilidade é usada no cotidiano como sinônimo de chance de ocorrência. Para definirmos uma função, precisamos, entre outras coisas, estabelecer seu domínio, e nesse ponto está o porquê de estudarmos **espaço amostral** e **evento**. Finalmente, mostraremos algumas propriedades dessa função chamada probabilidade.

Objetivo

Ao final desta aula, esperamos que você perceba a diferença entre problemas que envolvem probabilidade e outros que não precisam de probabilidade para sua resolução; e que possa construir o espaço amostral e calcular as probabilidades dos eventos de interesse em diversas situações problema.

Sobre a origem da probabilidade

Existem duas correntes de pensamento que tentam explicar a origem da probabilidade. A primeira defende que a probabilidade tem sua origem nos jogos e a segunda que ela surgiu da Estatística.

Você deve ter ficado um tanto inquieto com a segunda corrente de pensamento, não é? Afinal, probabilidade e estatística são a mesma coisa?

Não queremos entrar nesse mérito, pois teríamos que nos estender além do necessário para esclarecer esse problema, mas podemos afirmar que probabilidade e estatística são coisas distintas, embora a ligação entre elas seja inegavelmente muito forte. Tão forte que até hoje confundimos uma com a outra. Se você quiser ler ou se aprofundar em relação aos argumentos das correntes de pensamento que tratam da origem da probabilidade, recomendamos Todhunter (1949) e David (1962).

Eventos aleatórios e eventos determinísticos

Observamos que na natureza existem dois tipos de fenômenos: aqueles que repetidos sob as mesmas condições conduzem ao mesmo resultado; e aqueles que mesmo realizados sob as mesmas condições não conduzem necessariamente ao mesmo resultado. Chamamos os experimentos do primeiro tipo de **determinísticos** e os do segundo tipo de **aleatórios** ou **estocásticos**.

Exemplo 1 (determinístico)

A temperatura de ebulição da água – Se o experimento for feito sob as mesmas condições físicas, resultará sempre no mesmo valor, que é de 100 graus Celsius.

Exemplo 2 (aleatório)

O resultado do lançamento de um dado – Mesmo realizado sob as mesmas condições, não temos a garantia de obter o mesmo resultado.

Exemplo 3

O experimento de soltar uma pena de uma certa altura – Neste exemplo, o evento determinístico é que a pena atingirá o chão; e o evento aleatório é a posição que ela assumirá quando atingir o solo.

Quando estudamos um **experimento estocástico**, mesmo não sabendo inicialmente qual será o resultado, temos desde o início o conjunto de todos os possíveis resultados deste experimento.

Exemplo 4

Quando jogamos um dado, embora não saibamos previamente o resultado, sabemos que existem seis possibilidades de ocorrência: 1, 2, 3, ..., 6.

Ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, chamamos de **espaço amostral** e denotamos esse conjunto por Ω (lê-se: ômega). Os subconjuntos desse espaço são chamados **eventos** e os eventos formados por um único elemento são chamados **eventos elementares**.

Exemplo 5

Considere o experimento "jogar um dado".

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Cada **evento** (subconjunto) formado por apenas um elemento $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{6\}$ é um **evento elementar**.

O evento (subconjunto) $A = \{2, 4, 6\}$ é um evento que acontece se o número obtido for par.

Exemplo 6

"Um cartão é retirado aleatoriamente de um conjunto de 50 cartões numerados de 1 até 50".

Neste caso, temos como **espaço amostral** o conjunto formado pelos números inteiros positivos até o 50, inclusive o 50. Cada subconjunto unitário formado pelo número de um cartão é um **evento elementar**. O subconjunto $B = \{5, 10, 15, 20, \dots, 50\}$ é o **evento** que ocorre se o cartão retirado for múltiplo de 5.

Antes de prosseguirmos, você já deve ter notado que em Matemática existem funções cujos domínios e imagens são conjuntos de naturezas bem diferentes. Vejamos o Exemplo 7.

Exemplo 7

A função determinante e a função traço – Seus domínios são as matrizes quadradas M_n de dimensão n e suas imagens são os números reais, ou seja, associam números reais às matrizes.

$$\begin{array}{rl} det: & M_n \to R \\ & A \mapsto det(A) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} tr: M_n \to R \\ A \mapsto tr(A) \end{array}$$

Calculemos alguns exemplos:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2 \qquad \text{e} \qquad tr\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad tr\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

Exemplo 8

As funções que modelam problemas interessantes na Matemática, geralmente, são da forma $f : R^n \to R$, o que significa que a cada n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é associado um valor real.

Supondo que o custo de fabricação de uma peça dependa apenas do custo de mão-de-obra (x) e do preço do material empregado (y), podemos ter como exemplos de funções custo:

$$C(x, y) = x + y \qquad \text{e} \qquad C(x, y) = x^2 + y^4.$$

Exemplo 9

A função comprimento de intervalo $l : A \rightarrow [0, \infty]$ associa a cada intervalo da reta um número real, que represente o seu comprimento. Assim,

$l((a,b)) = b - a$

$l((a,b]) = b - a$

$l([a,b)) = b - a$

$l([a,b]) = b - a$

Veremos a seguir que probabilidade é também uma função que associa determinados conjuntos a um número real.

Probabilidade

A área da Matemática que estuda os experimentos aleatórios é a **probabilidade**. Com o objetivo de medir a chance de um determinado evento ocorrer, definiremos uma função especial, tão especial que tem o mesmo nome da própria área de estudo, a função **probabilidade**.

> Lembre-se de que: para definirmos uma função, precisamos estabelecer seu domínio, seu contra-domínio e sua lei de formação.

Começamos, então, com o espaço amostral Ω (conjunto de todos os resultados possíveis) e construímos o conjunto $\mathcal{A}$ formado por todos os subconjuntos de Ω (eventos), inclusive o **evento impossível** ϕ e o **evento certo** Ω.

Exemplo 10

Se $\Omega = \{1, 2, 3\}$ é o espaço amostral de um determinado experimento aleatório, então,

$$\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \phi\}$$

é o conjunto de todos os eventos.

Definição – Probabilidade é uma função que a cada evento associa um número (chamado de probabilidade do evento) no intervalo [0,1], isto é,

$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

e tem as seguintes propriedades:

1) $P(\Omega) = 1$;

2) se $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ são dois a dois disjuntos, então, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Importante – O domínio da função probabilidade é o conjunto $\mathcal{A}$ e não apenas o conjunto Ω, o que significa dizer que a probabilidade mede todos os possíveis eventos e não apenas os resultados do experimento. Por exemplo, ao jogarmos um dado, podemos não estar interessados na chance de ocorrer um determinado resultado, por exemplo, "sair o número 6" : $\{6\}$, mas sim na chance de ocorrer o evento "sair um número par" e aí teremos que medir o evento $\{2, 4, 6\}$.

O trio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ chamamos de **Espaço de Probabilidade**.

Exemplo 11

Suponha que no lançamento de um dado, qualquer face tenha a mesma chance de ocorrer, ou seja, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = p$.

a) Qual o valor de p?

Sabemos que {1}, {2}, ... , {6} são disjuntos, então:

$$1 = P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) =$$
$$P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\}) = p+p+p+p+p+p = 6p.$$

Portanto:

$$p = \frac{1}{6}.$$

b) Qual a probabilidade do resultado ser um número par? Ou seja, qual o valor de $P(\{2,4,6\}$

$$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Observação – As contas feitas no Exemplo 11 valem no caso geral, isto é, se Ω for finito, basta sabermos as probabilidades dos eventos elementares para obtermos a probabilidade de qualquer evento. É só escrever o evento como um conjunto de eventos elementares e usar o item 2 da definição de probabilidade.

Vamos exercitar mais.

Exemplo 12

Numa urna contendo 10 bolas numeradas, considere o evento "retirar uma bola da urna" e suponha que cada bola tenha a mesma chance p de ser retirada. Calcule:

a) o valor de p.

Temos que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e, usando a definição de probabilidade, podemos escrever:

$$1 = P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}) = P(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}\cup\{6\}\cup \{7\}\cup\{8\}\cup\{9\}\cup\{10\}) = P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})+ P(\{7\})+P(\{8\})+P(\{9\})+P(\{10\}) = p+p+p+p+p+p+p+p+p+p = 10p.$$

Portanto, $p = \dfrac{1}{10}$.

b) $P(\{1,2,3,4,5\})$, ou seja, a chance da bola retirada ter numeração inferior a 6.

$$P(\{1,2,3,4,5\}) = P(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}) = P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+ P(\{4\})+P(\{5\}) = \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

A partir da definição de função probabilidade, iremos demonstrar algumas de suas mais importantes propriedades, as quais nos ajudarão a resolver os exemplos seguintes.

Propriedades da probabilidade

1. $P(\phi) = 0$.

Demonstração – Sabemos que $\phi\cap\Omega = \phi$, isto é, Ω e ϕ são disjuntos. Portanto:

$$P(\phi \cup \Omega) = P(\phi) + P(\Omega)$$

Por outro lado, $\phi \cup \Omega = \Omega$, o que nos leva a:

$P(\phi \cup \Omega) = P(\Omega)$.

E podemos escrever:

$P(\phi) + P(\Omega) = P(\Omega)$, de que obtemos:

$P(\phi) = 0$,

já que $P(\Omega) = 1$.

2. Se $A \subset B$, então, $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração – Se $A \subset B$, sabemos pela teoria de conjuntos que $B = A \cup (B - A)$, em que $B - A$ representa o conjunto dos elementos que estão em B, mas não estão em A. Logo, A e $B - A$ são disjuntos e, assim, podemos escrever:

$P(B) = P(A) + P(B - A)$.

Como a imagem de qualquer conjunto pela função P pertence ao intervalo $[0, 1]$, temos $P(B - A) \geq 0$. Assim,

$P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A) + 0 \geq P(A)$, ou seja,

$P(B) \geq P(A)$.

3. $P(A^C) = 1 - P(A)$, em que A^C denota o complementar do conjunto A, isto é, o conjunto formado por todos os elementos de Ω que não pertencem ao conjunto A.

Demonstração – Podemos escrever $\Omega = A \cup A^C$ e pela definição de conjunto complementar temos A e A^C são disjuntos, logo, pelo item 2 da definição de probabilidade, temos:

$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$.

Donde concluímos:

$P(A^C) = 1 - P(A)$.

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração – Podemos escrever $A \cup B = A \cup (B - A)$. Note que esses conjuntos são disjuntos, já que no segundo conjunto dessa união estão apenas os pontos que pertencem ao conjunto B e que não pertencem ao conjunto A. Assim, usando a propriedade 2 da probabilidade, temos

$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A).$

Somando e subtraindo $P(A \cap B)$ ao segundo lado da igualdade anterior, temos

$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) + P(A \cap B) - P(A \cap B).(*)$

Podemos escrever $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ e, usando o fato de $B - A$ e $A \cap B$ serem conjuntos disjuntos, obtemos:

$P(B - A) + P(A \cap B) = P((B - A) \cup (A \cap B)) = P(B).$

Substituindo esse valor em $(*)$, concluímos que:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Você notou alguma semelhança entre essa fórmula e a fórmula do **Princípio da Inclusão-Exclusão** (visto na aula 5), que estabelece

$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B).$

Será que tal analogia se mantém quando tomamos n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$?

Podemos mostrar por indução que sim, ou seja,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) -$$
$$\cdots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \cdots + (-1)P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Exemplo 13

Suponha que o dono de um cassino conseguiu produzir um dado falso. Esse dado tem a seguinte propriedade: os números pares e os números ímpares têm a mesma chance de ocorrer, entretanto, a chance de aparecer um número par é o dobro da chance de aparecer um número ímpar. A partir dessas informações, encontre:

a) a probabilidade de ocorrer um número par e a probabilidade de ocorrer um número ímpar.

Vamos considerar:

$A = \{$os números pares do dado$\} = \{2, 4, 6\}$ e

$B = \{$os números ímpares do dado$\} = \{1, 3, 5\}$.

Temos por hipótese que $P(A) = 2P(B)$ e podemos escrever:

$1 = P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6\}) = P(\{1,3,5\} \cup \{2,4,6\}) = P(\{1,3,5\}) +$
$P(\{2,4,6\}) = P(A) + P(B) = 2P(B) + P(B) = 3P(B).$

De que obtemos:

$P(B) = \frac{1}{3}.$

Como $A^C = B$, temos pela propriedade 3 que:

$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3}$, ou melhor, $P(A) = \frac{2}{3}$.

b) a probabilidade dos eventos elementares.

Considerando $P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = p$, e usando o resultado encontrados no item a), temos:

$$\frac{2}{3} = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3p.$$

Ou seja, $p = \frac{2}{9}$.

Considerando $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = q$ e usando o mesmo raciocínio para os eventos elementares formados pelos números ímpares, obtemos:

$$\frac{1}{3} = P(\{1,3,5\}) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 3q$$

Ou seja, $q = \frac{1}{9}$.

c) a probabilidade do resultado ser um número menor ou igual a 4.

Temos também por hipótese a chance de sair qualquer nímero par é a mesma, ou seja,

$P(\{1,2,3,4\}) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) =$
$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9}.$

Mas, o que aconteceu com o que aprendemos no Ensino Médio em que a probabilidade para nós era o número de casos favoráveis sobre o número de casos totais? Por que isso não apareceu até agora? Boa pergunta!

A resposta também é direta: aquilo só vale em casos muito particulares, bem específicos. Ou seja, o que aprendemos no passado não se aplica sempre.

Exemplo 14

No exemplo 13, se fôssemos utilizar o que aprendemos no passado, considerando

Isso contraria fortemente o que diz o exemplo 13, já que a chance de ocorrência de um número par é duas vezes maior que a chance de ocorrência de um número ímpar.

ou seja, número de casos favoráveis sobre o número de casos totais.

$A = \{\text{os números pares do dado}\} = \{2, 4, 6\}$ e

$B = \{\text{os números ímpares do dado}\} = \{1, 3, 5\}$, teríamos que:

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = P(B)$.

Vamos praticar?

Uma pergunta natural seria: mas, em que tipos de problemas podemos usar a probabilidade como o número de casos favoráveis sobre o número de casos totais? Quando o espaço amostral tiver uma quantidade finita de elementos, por exemplo, $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, e, além disso, todo evento elementar tiver a mesma chance de ocorrência, isto é, $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \cdots = P(\{a_n\})$.

A demonstração dessa afirmação é simples, pois já fizemos contas semelhantes nos exemplos anteriores. Como estamos supondo que todo evento elementar tem a mesma probabilidade, q, temos que a probabilidade de um evento elementar será

$1 = P(\Omega) = P(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_n\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \cdots + P(\{a_n\}) = nq.$

Logo, $q = \frac{1}{n}$.

Considere um evento qualquer A. Como um evento é um subconjunto de $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, suponhamos que A tenha $p \leq n$ elementos. Sem perda de generalidade, consideremos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ (veremos que só irá importar a quantidade de elementos, e não os elementos). Então, temos

$$P(A) = P(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_p\})$$

Essa união é disjunta, já que $a_i \neq a_j$, para $i \neq j$. Logo, pelo item 2 da definição de probabilidade, podemos escrever $P(A) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_p\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \cdots + P(\{a_p\})$

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{p \text{ vezes}} = \frac{p}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

ou seja, número de casos favoráveis sobre número de casos totais.

Vamos praticar?

Atividade 1

1 Em cada uma das seguintes situações, construa o espaço amostral e verifique se é natural que os eventos elementares tenham a mesma chance de ocorrência ou não.

a) Lançar uma moeda e anotar o resultado.

b) Lançar um dado e anotar o resultado.

c) Lançar dois dados e anotar o resultado da soma das faces.

d) Puxar uma carta de um baralho que possui 52 cartas distintas.

2 Na questão anterior, calcule a probabilidade de cada evento elementar dos itens em que os eventos elementares possuem a mesma chance de acontecer.

3 Considere o seguinte experimento aleatório: jogar dois dados, dado 1 e dado 2, e anotar os resultados na forma de pares ordenados; na primeira entrada, está o resultado do dado 1, e na segunda entrada, o resultado do dado 2. Dessa forma, temos que cada par ordenado tem a mesma chance de ocorrência. Calcule a probabilidade de cada evento elementar. Utilize essas probabilidades para calcular as probabilidades dos eventos elementares do item **c** da questão 1. (Sugestão: junte todos os pares cuja soma resulta em um determinado valor, verifique se esses pares vistos como eventos elementares são disjuntos e some as probabilidades desses eventos).

4 Suponha que a senha de um determinado cofre é composta de 4 dígitos distintos e que o seu dono lembra apenas dos números que a compõem (por exemplo: 1,2,3 e 4), mas esqueceu a ordem correta. Monte o espaço amostral das senhas possíveis, verifique se cada evento elementar tem a mesma chance de ocorrência e calcule a probabilidade do dono acertar a senha em uma tentativa e em 10 tentativas.

5 Sabe-se que a probabilidade de um jogador perder um pênalti é $\frac{1}{3}$. Qual a probabilidade desse jogador converter o pênalti?

6 Uma turma de amigos quer se encontrar em uma determinada semana, entretanto, a chance disso ocorrer na terça-feira é duas vezes maior do que na segunda. Na quarta-feira, é três vezes maior que na segunda. Na quinta-feira, é quatro vezes maior que na segunda e, a partir da sexta, a chance é a mesma e cinco vezes maior que na segunda. Qual a probabilidade deles se encontrarem no final de semana (sexta, sábado ou domingo)?

7 Um garoto chega a uma sorveteria na qual se oferece 4 sabores para compor um sorvete de três bolas. O garoto quer fazer um experimento: ele fecha os olhos e aponta um sabor, depois outro e finalmente o terceiro. Monte o espaço amostral deste evento, analise se é natural que cada evento elementar tenha a mesma chance de ocorrência e calcule a probabilidade do garoto escolher as três bolas de sabores iguais.

Resumo

Você observou nesta aula que a probabilidade estuda experimentos estocásticos, ou seja, aqueles que mesmo repetidos sob as mesmas condições não resultam necessariamente no mesmo resultado. Os resultados possíveis desse experimento são coletados num conjunto chamado espaço amostral e os subconjuntos do espaço amostral são chamados eventos, os quais com apenas um elemento, são chamados eventos elementares. Estudou também que a probabilidade é uma função cujo domínio é o conjunto formado por todos os eventos do espaço amostral, cuja imagem é o intervalo [0,1], e que satisfaz mais duas propriedades: a probabilidade do espaço amostral é 1 e a probabilidade da união de eventos disjuntos é a soma das probabilidades de cada evento. Viu, por fim, que a probabilidade em geral não é o número de casos favoráveis sobre o número de casos totais, isso acontece apenas quando o espaço amostral tem uma quantidade finita de elementos e cada evento elementar tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Autoavaliação

1 Descreva exemplos, diferentes dos apresentados nesta aula, que expliquem a diferença entre um experimento determinístico e um estocástico.

2 Monte dois experimentos estocásticos explicitando seus espaços amostrais, sendo que em um dos experimentos a probabilidade dos eventos elementares é a mesma e no outro não.

3 Mostre através de um exemplo por que não podemos considerar sempre que a probabilidade de um evento é o número de casos favoráveis sobre o número de casos totais.

Referências

DAVID, F. N. **Games, gods and gambling:** a history of probability and statistical ideas. Londres: Dover Publications, Inc. 1962.

MORGADO, A. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática).

TODHUNTER, M. A. **A history of the mathematical theory of probability:** from de time of Pascal to that of Laplace. New York: Chelsea Publishing Company, 1949.

Probabilidade condicional

Aula

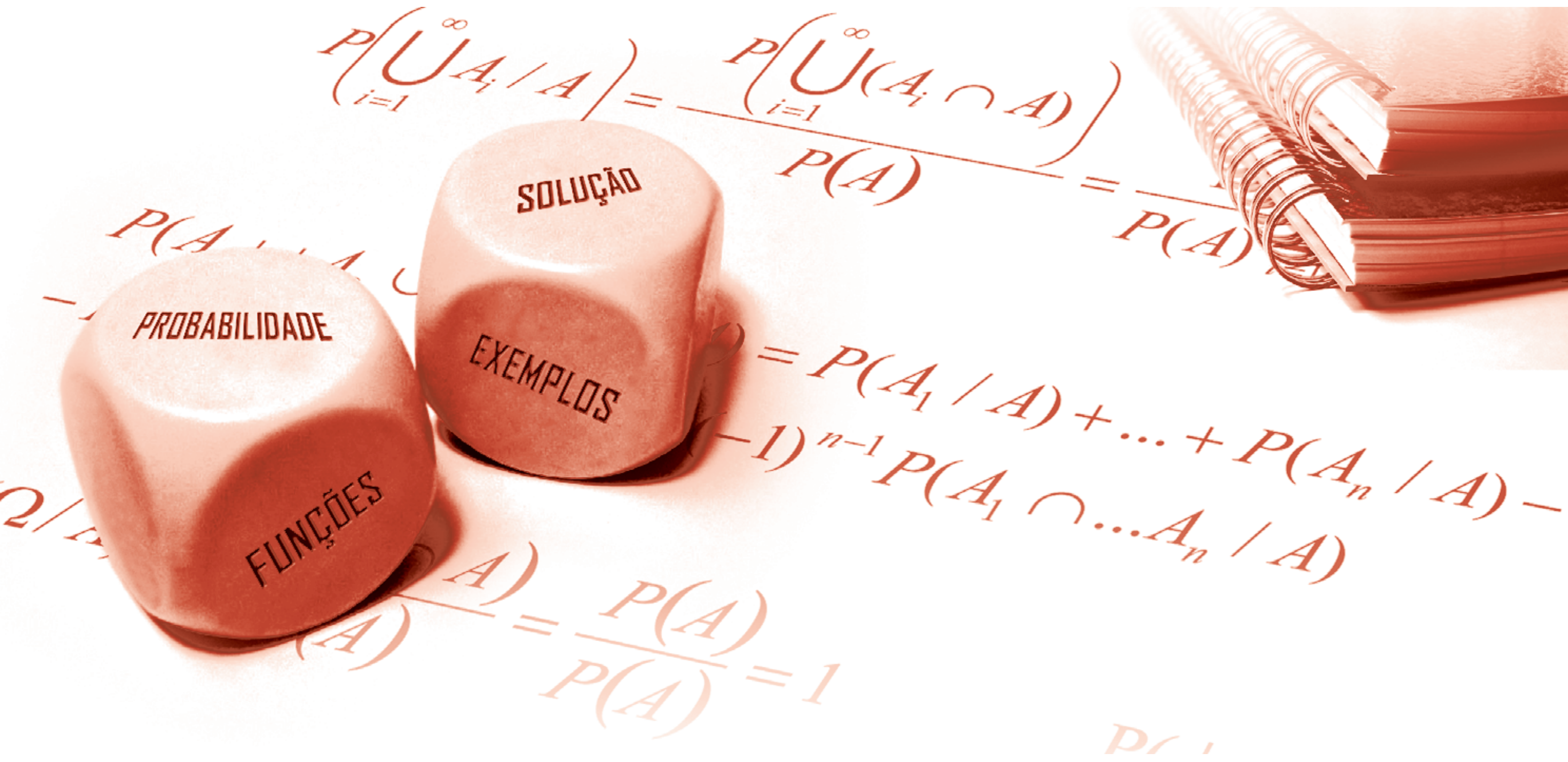
15

Apresentação

Nesta aula, estudaremos a **probabilidade condicional**. Vamos mostrar que uma informação adicional sobre o experimento que estivermos realizando pode alterar a probabilidade inicial que tínhamos sobre um determinado evento em estudo. Muitas vezes não é possível realizarmos um experimento até o fim, sendo necessária a colaboração de outra pessoa, a qual pode não saber a informação específica que desejamos e nos informar apenas sobre o resultado. Com essa informação adicional, o resultado desejado sofre alteração na sua chance de ter acontecido. É nesse contexto que estudaremos probabilidade condicional, a qual nos ajudará nessa filtragem de informação.

Objetivo

Ao final desta aula, esperamos que você perceba a diferença entre probabilidade e probabilidade condicional e que possa utilizá-las corretamente na resolução de problemas.



Contextualização

Imagine que você está brincando com alguns colegas de adivinhar o resultado do lançamento de um dado. Então, aposta que o resultado será ímpar, ou seja, que o evento $B = \{1, 3, 5\}$ irá ocorrer. Vimos na aula passada que se considerarmos que cada face do dado (**evento elementar**) tem a mesma chance de ocorrer, sua probabilidade de acertar é:

$$P(B) = P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Você, então, lança o dado, mas nesse exato momento o telefone toca e você vai atendê-lo antes de ver o resultado do lançamento. Dentre as muitas situações prováveis, destacamos as que seguem:

Situação 1

Depois de algum tempo, seus colegas gritam que o resultado foi maior que 3. Qual a probabilidade de você ainda acertar, ou seja, de o resultado ser um número ímpar?

Você deve estar deduzindo: eu tinha seis casos possíveis e três favoráveis, então, minha chance era $1/2$; agora, tenho três casos possíveis (já que alguém falou que o resultado foi maior que 3 ({4,5,6})) e, dentre estes, só me restou um favorável, o 5. Portanto, 3 casos possíveis e um caso favorável, então, minha chance é $1/3$.

Situação 2

Depois de algum tempo, seus colegas gritam que o resultado foi 5. Qual a probabilidade de você ainda acertar, ou seja, do resultado ser um número ímpar?

Desenvolvendo o mesmo raciocínio usado na situação 1, você chega à conclusão de que sua probabilidade de ganhar será 1.

Situação 3

Após algum tempo, seus colegas gritam que o resultado foi 4. Usando o mesmo raciocínio das situações anteriores, conclui-se que a probabilidade de você ainda acertar, ou seja, de o resultado ser um número ímpar será 0.

O que está acontecendo afinal? Uma informação adicional pode mudar tanto assim nossa probabilidade de ganhar? O resultado está condicionado a essa informação adicional?

Na interpretação das três situações estudadas, aconteceram alguns fatos que merecem um olhar mais atento.

Primeiro, quando modelamos um problema, precisamos ter bem definidos um espaço amostral Ω, o conjunto $\mathcal{A}$ formado por todos os eventos possíveis e uma função que meça esses eventos, a função probabilidade P. Quando calculamos a probabilidade, observamos que os possíveis resultados se transformaram em $\{4,5,6\}$ na situação 1, $\{5\}$ na situação 2 e $\{4\}$ na situação 3. Isso está indicando que o espaço amostral está mudando? Isso não pode acontecer! Então, como estudar esse tipo de situação?

Probabilidade condicional

Para estudar este tópico, precisamos definir uma probabilidade que leve em consideração a informação adicional dada sem alterar o espaço de probabilidade que construímos ao modelar o problema original. Vamos a ela.

Definição – Sejam dois eventos A e B tais que $P(A) > 0$. Define-se a probabilidade condicional de B dado A, representada por $P(B|A)$, como sendo

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Se $P(A) = 0$, decretamos $P(B|A) = 0$.

Vamos aplicar essa definição às situações anteriores 1, 2 e 3 e verificar se a probabilidade condicional responde a nossas questões. O conjunto B em todas as situações é o mesmo, ou seja, $B = \{1,3,5\}$.

Situação 1

$A = \{4,5,6\}$ cuja probabilidade é $P(A) = \frac{1}{2} > 0$.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{1,3,5\} \cap \{4,5,6\})}{P(\{4,5,6\})} = \frac{P(\{5\})}{1/2} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Situação 2

$A = \{5\}$ cuja probabilidade é $P(A) = \frac{1}{6} > 0$.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{1,3,5\} \cap \{5\})}{P(\{5\})} = \frac{P(\{5\})}{1/6} = \frac{1/6}{1/6} = 1.$$

Situação 3

$A = \{4\}$ cuja probabilidade é $P(A) = \frac{1}{6} > 0$.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{1,3,5\} \cap \{4\})}{P(\{4\})} = \frac{P(\phi)}{1/6} = \frac{0}{1/6} = 0.$$

Mas, quem mede a chance de um dado evento ocorrer, ou não, não é a probabilidade?

Exatamente! Vimos na aula 14 (**Probabilidade**) que quem mede a chance de um evento ocorrer ou não é a **função probabilidade**. Então, devemos mostrar que a probabilidade condicional, dado um evento de probabilidade positiva, é também uma função probabilidade. Em outras palavras, dado um evento A tal que $P(A) > 0$, a função

$$P(\cdot|A) : \mathcal{A} \to [0,1]$$

é uma probabilidade, na qual $\mathcal{A}$ é um conjunto cujos elementos são os eventos de Ω.

Se você lembra da aula passada, devemos mostrar que:

i) $P(\Omega|A) = 1$.

ii) se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ disjuntos, então, $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|A)$.

Demonstração

i) $P(\Omega|A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1.$

ii) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|A\right) = \dfrac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap A\right)}{P(A)} = \dfrac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A)\right)}{P(A)}.$

Ora, se $A_1, A_2, \ldots$ são disjuntos, então, $A_1 \cap A, A_2 \cap A, \ldots$ também são disjuntos e pela condição 2 da definição de probabilidade (veja a aula 14), temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|A\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A)\right)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)}\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|A).$$

Logo, a função $P(\cdot|A) : \mathcal{A} \to [0,1]$ é uma probabilidade.

Observação – Note que o evento A que condicionou a probabilidade permaneceu o mesmo todo o tempo. Estamos querendo chamar a atenção para o fato de que se pensarmos nessa probabilidade como uma função de duas variáveis, a segunda variável (a que fica depois do |) permaneceu fixa o tempo todo. Por ser probabilidade, temos que todas as propriedades que mostramos na aula passada se verificam, a saber: fixado o evento A com $P(A) > 0$, temos:

1. $P(\phi|A) = 0$;
2. se $C \subset B$, então, $P(C|A) \leq P(B|A)$.
3. qualquer que seja o evento B, temos $0 \leq P(B|A) \leq 1$;
4. $P(B^C|A) = 1 - P(B|A)$;
5. $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$;
6. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|A) = P(A_1|A) + \ldots + P(A_n|A) - P(A_1 \cap A_2|A) - \ldots$
   $-P(A_{n-1} \cap A_n|A) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n|A).$

Exemplo 1

Numa sala de aula, foi realizada uma pesquisa e constatou-se que a probabilidade de se escolher aleatoriamente uma pessoa e ela ser homem era de 70% e ser fumante era de 60%. E ainda, que, dentre os homens, a probabilidade de escolher um fumante era de 80%. Qual a probabilidade de escolher uma pessoa aleatoriamente, dentre os fumantes, e ela ser mulher?

Solução

Parece meio complicado, não é? Vamos primeiramente ler as informações que seguem.

Quem é nosso espaço amostral?

Resposta: todos os alunos da sala de aula em questão.

Escolher uma pessoa ao acaso significa, por exemplo, apontar para um nome qualquer do diário de classe. A chance de escolher uma determinada pessoa é maior do que a chance de escolher outra qualquer? Cremos que não, ou seja, os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrência.

Perceba que podemos dividir os alunos da sala em vários conjuntos disjuntos distintos, como na união dos homens e mulheres, dos fumantes e não-fumantes etc.

Para uma melhor compreensão, vamos definir os conjuntos seguintes.

$H = \{\text{homens da sala}\}$

$M = \{\text{mulheres da sala}\}$

$F = \{\text{fumantes da sala}\}$

$NF = \{\text{não-fumantes da sala}\}$

Que relação existe entre esses conjuntos?

$$\Omega = H \cup M = F \cup NF$$

Usando um pouco da teoria de conjuntos, podemos encontrar outras relações, como

$$H = H \cap \Omega = H \cap (F \cup NF) = (H \cap F) \cup (H \cap NF).$$

O que significa essa relação?

Significa que o conjunto dos homens pode ser visto como união (disjunta) dos homens fumantes com os homens não-fumantes.

O que a questão pede? Pede para calcularmos a chance de, dentre os fumantes, escolhermos uma pessoa ao acaso e ela ser mulher. Em outras palavras: qual a probabilidade de se escolher uma mulher, tendo em vista que a estamos procurando no grupo de fumantes.

Observe que não queremos saber a probabilidade de escolher uma mulher dentro da sala de aula, mas apenas dentro do grupo dos fumantes, isto é, queremos calcular $P(M|F)$.

Antes de efetuarmos esse cálculo, verifiquemos o que nos foi informado na questão.

Escolhendo uma pessoa ao acaso, a probabilidade dela ser homem é 70%, ou seja, $P(H) = 0,7$.

Escolhendo uma pessoa ao acaso, a probabilidade dela ser fumante é 60%, ou seja, $P(F) = 0,6$.

Escolhendo dentre os homens, a probabilidade de encontrar um que fume é 80%, ou seja, $P(F|H) = 0,8$.

A partir dessas informações, podemos obter outras utilizando as propriedades da probabilidade, por exemplo,

$P(M) = 1 - P(H) = 1 - 0,7 = 0,3$,

$P(NF) = 1 - P(F) = 1 - 0,6 = 0,4$ e

$0,8 = P(F|H) = \dfrac{P(F \cap H)}{P(H)}$, ou seja, $P(F \cap H) = 0,8 \times P(H) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$.

Vamos agora calcular o que a questão pede:

$$P(M|F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)}.$$

Precisamos encontrar $P(M \cap F)$ para resolver essa questão, já que $P(F)$ foi dado.

Usando a relação de conjuntos, vemos que

$$P(F) = P(F\cap\Omega) = P(F\cap(H\cup M)) = P((H\cap F)\cup(M\cap F)) = P(H\cap F)+P(M\cap F),$$

Logo,

$P(M \cap F) = P(F) - P(H \cap F) = 0,6 - 0,56 = 0,04$. Portanto,

$$P(M|F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0,04}{0,6} \approx 0,067,$$

o que significa que as chances de escolhermos um fumante e este ser mulher são de aproximadamente 0,067 ou 6,7%.

Claro que não precisamos calcular isso tudo para resolver a questão, podemos tentar chegar mais diretamente ao que nos foi pedido. Faremos isso a partir de agora.

Exemplo 2

Um exame de laboratório tem "eficiência" de 95% para detectar uma doença quando esta existe de fato. Entretanto, o teste aponta um resultado "falso positivo" para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença considerando que o seu exame foi positivo?

Solução

Antes de resolvermos a questão, precisamos esclarecer alguns termos que aparecem em seu enunciado, por exemplo, o que significa **resultado "falso positivo"** e **"eficiência"**?

Eficiência diz respeito à detecção da doença quando a pessoa está doente de fato, ou seja, é a probabilidade do exame dar positivo quando a pessoa está doente.

Falso negativo significa que o exame dá resultado positivo quando a pessoa não está doente.

Para a resolução consideremos os seguintes conjuntos

$B = \{\text{Pessoas doentes}\}$

$A_1 = \{\text{Pessoas cujo teste deu positivo}\}$

$A_2 = \{\text{Pessoas cujo teste deu negativo}\}$

Então, a partir da definição desses termos, a questão informa que: $P(B) = 0,005, P(A_1|B) = 0,95$ e $P(A_1|B^C) = 0,01$, em que B^C representa o complementar de B, sendo assim, o conjunto das pessoas sadias.

Com essas informações, podemos calcular

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = 0,95, \text{ ou seja, } P(A_1 \cap B) = 0,005 \times 0,95 = 0,0475 \text{ e}$$

$$P(A_1|B^C) = \frac{P(A_1 \cap B^C)}{P(B^C)} = 0,01, \text{ ou seja, } P(A_1 \cap B^C) = 0,01 \times 0,995 = 0,00995$$

A questão pede que calculemos $P(B|A_1)$, isto é, a probabilidade da pessoa estar doente visto que seu exame deu positivo.

Mas, como $P(B|A_1) = \dfrac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)}$ e o numerador já foi calculado anteriormente, falta então calcularmos apenas o denominador.

Para tanto, perceba que só existem duas possibilidades: ou a pessoa está doente ou ela não está. Assim, temos que B e B^C são disjuntos e podemos verificar que $B \cup B^C = \Omega$. Portanto, temos

$$A_1 = A_1 \cap \Omega = A_1 \cap (B \cup B^C) = (A_1 \cap B) \cup (A_1 \cap B^C).$$

Note que $(A_1 \cap B)$ e $(A_1 \cap B^C)$ são disjuntos, logo,

$$P(A_1) = P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap B^C) = 0,0475 + 0,00995 = 0,05745.$$

A partir do que foi visto, a probabilidade é, portanto,

$$P(B|A_1) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{0,0475}{0,05745} \cong 0,8268.$$

Verifiquemos agora alguns resultados que nos auxiliarão na resolução de exercícios envolvendo probabilidade e probabilidade condicional.

Teorema (Produto) – Se $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$ (ou, equivalentemente $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$), então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Demonstração – Como em várias outras oportunidades que tivemos, quando desejamos mostrar que uma certa equação, a qual envolve um número natural n, é verdade para qualquer valor desse número natural, procedemos a demonstração pelo **Princípio da Indução Finita** (apêndice da aula 5 – **Princípio da Inclusão-Exclusão**).

Mostremos que a fórmula é verdade para $n = 2$. Para esse valor, a equação se reduz a

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

Como, por hipótese, $P(A_1 \cap A_2) > 0$, então, tanto $P(A_1) > 0$ quanto $P(A_2) > 0$. De fato, como $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ então $P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2) > 0$, o que implica $P(A_1) > 0$. De modo análogo, confimamos a afirmação para A_2.

Como temos $P(A_1) > 0$, então, pela definição de probabilidade condicional, temos

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_!)P(A_2|A_1),$$

ou seja, a equação é verdadeira para $n = 2$.

Hipótese de Indução – Suponhamos que a equação seja verdadeira para $n = k$, isto é, se $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \neq 0$, então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_1) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}).$$

Mostremos que a equação também é verdade para $n = k + 1$. Queremos mostrar, na verdade, que, se $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1}) \neq 0$, então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k).$$

Se consideramos $A = A_1 \cap \cdots \cap A_k$ e $B = A_{k+1}$, temos que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1}) \neq 0.$ implica $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$ e, como o resultado vale para $n = 2$, obtemos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)P(A_{k+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_k).$$

Mas, $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \neq 0$, então pela hipótese de indução, podemos substituir o primeiro elemento do produto anterior por

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1}) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots \\ &P(A_k|A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1})P(A_{k+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_k). \end{aligned}$$

O que demonstra que a equação vale para $n = k + 1$ e, portanto, pelo **Princípio da Indução Finita**, vale para qualquer n natural.

Exemplo 3

Numa escola, verificou-se que a probabilidade de escolher um aluno do sexo masculino que jogue futebol, vôlei e basquete é diferente de zero. Sabendo que 70% jogam futebol e, destes, 90% jogam vôlei e, daqueles que jogam futebol e vôlei, 20% jogam basquete, qual a probabilidade de escolher um aluno do sexo masculino que jogue os três esportes?

Solução

Nosso espaço amostral é $\Omega = \{$Todos os meninos da escola$\}$. Consideremos também os seguintes conjuntos:

$A_1 = \{$meninos que jogam futebol$\}$

$A_2 = \{$meninos que jogam vôlei$\}$

$A_3 = \{$meninos que jogam basquete$\}$

Escrevamos em forma de probabilidades as informações fornecidas pela questão.

70% jogam futebol, ou seja, $P(A_1) = 0,7$.

Dos que jogam futebol, 90% jogam vôlei, ou seja, $P(A_2|A_1) = 0,9$.

Dos que jogam futebol e vôlei, 20% jogam basquete, ou seja, $P(A_3|A_1 \cap A_2) = 0,2$.

A probabilidade de escolher um aluno (menino) que jogue os três esportes é dada, então, por $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, que pode ser calculado pelo **teorema do produto**, resultando em

$$P(A_1 \cap A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = 0,7 \times 0,9 \times 0,2 = 0,126 = 12,6\%.$$

Outro teorema muito útil é o seguinte.

Teorema da Probabilidade Total – Se $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, em que A_1, $A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos e $P(A_1) > 0$, $P(A_2) > 0 \ldots$,$P(A_n) > 0$, então,

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n).$$

Demonstração – Como $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, então, $B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = B$ ou, ainda,

$$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n).$$

Observe que essa união é disjunta, já que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos. Portanto, pela condição 2 da definição de probabilidade (ver aula 14),

$$P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

Como $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \ldots, P(A_n) > 0$, podemos ainda escrever o lado direito da equação anterior, usando o teorema do produto, da seguinte maneira

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n),$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 4

Um estudo realizado sobre um piloto de Fórmula 1 aposentado mostrou que a probabilidade com que ele vencia uma corrida, quando a corrida acontecia sob a chuva, era de 50%. E quando a corrida era realizada sob o sol, a probabilidade de vitória passava para 70%. Num determinado país do circuito internacional de Fórmula 1, sabe-se que a probabilidade de chover qualquer dia sempre foi 25%. Qual a probabilidade desse piloto ter vencido uma corrida nesse país?

Solução

Nosso espaço amostral é $\Omega = \{$todas as corridas realizadas pelo piloto no país em questão$\}$. Consideremos os seguintes conjuntos

$B = \{$corridas vencidas pelo piloto no país em questão$\}$

$A_1 = \{$corridas realizadas com chuva no país em questão$\}$

$A_2 = \{$corridas realizadas com sol no país em questão$\}$

Note que as corridas vencidas pelo piloto nesse país estão contidas nas corridas lá realizadas com chuva ou com sol, ou seja, $B \subset A_1 \cup A_2$. A questão diz também que $P(A_1) = 0,25$, já que a probabilidade de chover no dia da corrida é de 25%. Também podemos perceber que $A_2 = A_1^C$ e assim: $P(A_2) = 1 - P(A_1) = 0,75$.

A questão também informa que a probabilidade dele vencer uma corrida, considerando que ela é realizada sob chuva, é de 50%, ou seja, $P(B|A_1) = 0,5$; e vencer uma corrida, considerando que é realizada sob o sol, é de 70%, ou seja, $P(B|A_2) = 0,7$. Logo, a probabilidade do piloto ter vencido uma corrida nesse país é:

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = 0,25 \times 0,5 + 0,75 \times 0,70 = 0,125 + 0,525 = 0,65 = 65\%$.

Apresentamos agora o último resultado.

Teorema (Bayes) – Se $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, em que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos e $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \ldots, P(A_n) > 0$ e $P(B) > 0$, então,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)},$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

Demonstração – Como $P(B) > 0$, podemos calcular a probabilidade condicional de qualquer evento, dado B. Para A_i, temos $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$.

Como B satisfaz todas as hipóteses do teorema da probabilidade total, temos que $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$ e por $P(A_i) > 0$ e que $P(B|A_i) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$, ou seja, $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$.

Substituíndo essas informações na equação

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)}.$$

Como o i foi qualquer, temos que essa equação vale para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo 5

Numa prova de múltipla escolha, cada questão tem 5 alternativas para o aluno escolher e apenas uma dentre estas é a correta. Se o aluno sabe a resposta correta, ele acerta a questão com probabilidade 1, se ele não sabe a resposta e "chuta", ele tem probabilidade 1/5 de acertar. Um aluno sabe responder 40% das questões da prova. Se ele respondeu corretamente a uma das perguntas, qual é a probabilidade de que tenha "chutado"?

Solução

Consideremos os seguintes conjuntos:

$B = \{$Questões respondidas corretamente$\}$;

$A_1 = \{$Questões que o aluno "chutou"$\}$;

$A_2 = \{$Questões que o aluno sabia resolver$\}$.

Note que o conjunto formado pelas questões respondidas corretamente está contido na união do conjunto das questões que o aluno sabia responder e das que ele "chutou" (a união dos dois conjuntos representa todas as questões da prova), ou seja, $B \subset A_1 \cup A_2$. A questão diz também que $P(A_2) = 40\%$.

A questão pede para calcularmos a probabilidade de ele ter "chutado" uma questão, considerando que a questão foi respondida corretamente, devemos calcular $P(A_1|B)$. Pelo **Teorema de Bayes**, temos

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}.$$

Pelo que foi visto, se ele não sabe responder à questão ele a "chuta", ou seja, $A_1 = A_2^C$ e, portanto, $P(A_1) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,4 = 0,6$. Também $P(B|A_1) = \frac{1}{5}$ e $P(B|A_2) = 1$ representam, respectivamente, a probabilidade de acertar uma questão já que "chutou" e de acertar uma questão já que soube resolvê-la. Substituindo os valores de $P(A_1), P(A_2), P(B|A_1)$ e $P(B|A_2)$ na equação anterior, temos

$$P(A_1|B) = \frac{0,6 \times \frac{1}{5}}{0,4 \times 1 + 0,6 \times \frac{1}{5}} = \frac{0,12}{0,52} \cong 23,07\%.$$

O que acontece com essa probabilidade se o aluno soubesse responder a mais questões?

Suponhamos que o aluno saiba responder a 80% das questões. Calculando a probabilidade anterior, temos

$$P(A_1|B) = \frac{0,2 \times \frac{1}{5}}{0,8 \times 1 + 0,2 \times \frac{1}{5}} = \frac{0,04}{0,84} \cong 4,76\%.$$

O que esses números estão mostrando? Que quanto mais o aluno sabe, é menos provável que ele tenha acertado questões no "chute". Perceba que, se o aluno só sabe responder a 40% das questões, existe 23% de chances de uma questão correta ter sido "chutada". Já a pessoa que sabe, por exemplo, 80% das questões, então, existem apenas 4,75% de chance de uma questão certa ter sido respondida no "chute".

Atividade 1

1 Imagine uma roleta de cassino com 100 casas numeradas de 1 a 100, em que 50 casas são vermelhas e 50 pretas. Das 50 vermelhas (assim como das pretas), 25 são números pares e 25 ímpares. Suponha que você jogou um número ímpar vermelho.

a) Qual a probabilidade de você acertar o resultado antes da roleta ser rodada?

b) Qual a probabilidade de você acertar se alguém disser que o resultado é um número que está numa casa vermelha?

c) E se alguém disser que o resultado é ímpar e vermelho?

2 Dois dados (um verde e outro amarelo) são lançados e o resultado é anotado.

a) Qual a probabilidade do resultado da soma ser 7?

b) Qual a probabilidade do resultado da soma ser 7, se a face do dado verde apresenta o resultado 5?

c) Qual a probabilidade do resultado da soma ser 7, se a face do dado verde apresenta o resultado 5 e as do amarelo, 2?

d) Qual a probabilidade da face amarela ser 3 se a soma das faces resulta em 7?

e) Qual a probabilidade da face verde ser 4 se a soma das faces resulta em 7?

3 Os garotos do sertão, antigamente, gostavam muito de caçar com suas atiradeiras (balinheiras, baladeiras, estilingues etc.). Um desses garotos, que era bom de mira, acertava o alvo com probabilidade de 2/3, e com probabilidade de 1/10 acertava outro alvo após ter errado o alvo em que tinha mirado. Um peba (pequeno tatu) foi abatido pela sua arma. Qual a probabilidade de que ele tenha mirado o animal, ou seja, qual a probabilidade de que ele tenha matado intencionalmente esse peba?

4 Numa fazenda de aperfeiçoamento de gado, especialistas estavam desenvolvendo uma ração para que o gado crescesse mais rapidamente. Assim, desejavam aumentar a quantidade de carne nos animais e não apenas a quantidade de gordura. Notaram que 30% dos animais aumentavam tanto a quantidade de carne quanto a de gordura. Dos que ganhavam gordura, 40% aumentavam a quantidade de carne e dos que aumentavam a quantidade de carne 80% ganhavam gordura. Escolhendo de forma aleatória um animal, qual a probabilidade de que este tenha:

a) aumentado a quantidade de carne;

b) ganhado mais gordura.

5 Nos caixas eletrônicos, se você errar três vezes sua senha, seu cartão é bloqueado e, para desbloqueá-lo, você deve se dirigir a sua agência. Sabendo que as chances de uma pessoa errar a senha a primeira vez que tenta são de 40% e, tendo errado, as chances de erro na segunda vez são de 10% e, depois de dois erros consecutivos, as chances de um terceiro erro caem para 2%, pergunta-se: qual a probabilidade de uma pessoa errar três vezes consecutivas sua senha em um caixa eletrônico?

Resumo

Nesta aula, você estudou que a **probabilidade condicional** é usada quando uma informação adicional é apresentada ao problema e que não existe redução do espaço amostral, pois na verdade ele continua o mesmo durante todo o problema. Observou também algumas ferramentas que auxiliam na resolução de problemas envolvendo probabilidade condicional, são elas: o **Teorema do Produto**, o **Teorema da Probabilidade Total** e o **Teorema de Bayes**.

Autoavaliação

1 Descreva exemplos, diferentes dos apresentados, que expliquem a diferença entre probabilidade e probabilidade condicional.

2 Monte um exemplo que se resolva facilmente utilizando o fato de que $P(\cdot|A)$ é uma probabilidade quando fixamos o A, no qual temos que ter $P(A) > 0$.

3 Monte exemplos e escreva o significado de $P(A|B), P(A|B^C), P(A^C|B)$ e $P(A^C|B^C)$.

Referência

MORGADO, P. C. O., et al. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção Professor de Matemática).

Anotações

Esta edição foi produzida em mês de 2012 no Rio Grande do Norte, pela Secretaria de Educação a Distância da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (SEDIS/UFRN). Utilizando-se Helvetica Lt Std Condensed para corpo do texto e Helvetica Lt Std Condensed Black títulos e subtítulos sobre papel offset 90 g/m$^{2.}$

Impresso na nome da gráfica

Foram impressos 1.000 exemplares desta edição.

SEDIS Secretaria de Educação a Distância – UFRN | Campus Universitário
Praça Cívica | Natal/RN | CEP 59.078-970 | sedis@sedis.ufrn.br | www.sedis.ufrn.br

ISBN 978-85-425-0037-0
9 788542 500370 >

SEDIS
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

UFRN
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA