

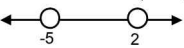
# Pertidaksamaan

## A. Sifat Pertidaksamaan

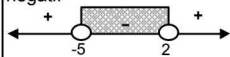
<b>Sifat 1:</b> $a < b, c \in \mathbb{R} \rightarrow a + c < b + c$ <b>Contoh:</b> $1 < 2, c = 3 \rightarrow 1 + 3 < 2 + 3 \rightarrow 4 < 5$	<b>Sifat 2:</b> $a < b, c > 0 \rightarrow ac < bc$ $a < b, c < 0 \rightarrow ac > bc$ <b>Contoh:</b> $1 < 2, c = 3 \rightarrow 1 \cdot 3 < 2 \cdot 3 \rightarrow 3 < 6$ $1 < 2, c = -3 \rightarrow 1 \cdot (-3) < 2 \cdot (-3) \rightarrow -3 > -6$
<b>Sifat 3:</b> $0 < a < b \rightarrow a^n < b^n$ $a < b \rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$ $n$ bilangan bulat positif <b>Contoh:</b> Jika $a = 1, b = 2$ dan $n = 3$ $\rightarrow 0 < 1 < 2 \rightarrow 1^3 < 2^3 \rightarrow 1 < 8$ Jika $a = 1, b = 2$ dan $n = 3$ $\rightarrow 1 < 2 \rightarrow 1^{2 \cdot 3 + 1} < 2^{2 \cdot 3 + 1} \rightarrow 1 < 128$	<b>Sifat 4:</b> $a < b$ dan $b < c \rightarrow a < c$ <b>Contoh:</b> $1 < 2$ dan $2 < 3 \rightarrow 1 < 3$ <b>Sifat 5:</b> $a < b$ dan $c < d \rightarrow a + c < b + d$ $1 < 2$ dan $3 < 4 \rightarrow 1 + 3 < 2 + 4 \rightarrow 4 < 6$ <b>Sifat 6:</b> $a < b$ dan $ab > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ $1 < 2$ dan $1 \cdot 2 > 0 \rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{2}$
<b>Sifat 7:</b> $\frac{a}{b} < 0 \rightarrow ab < 0, b \neq 0$ Jika $a = -1, b = 2$ $\rightarrow \frac{-1}{2} < 0 \rightarrow -1 \cdot 2 < 0 \rightarrow -2 < 0$	<b>Sifat 8:</b> $\frac{a}{b} > 0 \rightarrow ab > 0, b \neq 0$ Jika $a = 1, b = 2 \rightarrow \frac{1}{2} > 0 \rightarrow 1 \cdot 2 > 0$

## B. Penyelesaian Pertidaksamaan

### 1. Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Kuadrat

<b>Contoh:</b> Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + 3x < 10$ Nolkan ruas kanan: $x^2 + 3x < 10 \rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0$ Cari pembuat nol: $x^2 + 3x - 10 < 0 \rightarrow (x + 5)(x - 2) < 0 \rightarrow x = -5$ atau $x = 2$  Buat garis bilangan: Beri tanda pada garis bilangan dan menentukan daerah penyelesaian: Tanda koefisien pangkat tertinggi adalah $x^2$ (positif), maka tanda paling kanan
---

adalah positif. Karena diminta kurang dari nol ( $< 0$ ), maka pilih daerah yang negatif



Himpunan penyelesaian adalah  $-5 < x < 2$

## 2. Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Pecahan

### Contoh:

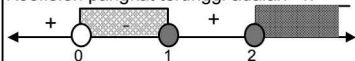
Tentukan himpunan penyelesaian  $\frac{3x-2}{x} \leq x$

Pecahan bentuk seperti ini dilarang dikali silang karena penyebut belum jelas positif atau negatif.

$$\frac{3x-2}{x} \leq x \rightarrow \frac{3x-2}{x} - x \leq 0 \rightarrow \frac{3x-2}{x} - \frac{x^2}{x} \leq 0 \rightarrow \frac{-x^2+3x-2}{x} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{(-x+1)(x-2)}{x} \leq 0 \text{ dan } x \neq 0$$

Koefisien pangkat tertinggi adalah  $-x^2$



Himpunan penyelesaian adalah  $0 < x \leq 1$  atau  $x \geq 2$

Perhatian!

- Tanda  $<$  diberikan warna putih pada bulatan
- Tanda  $\leq$  diberikan warna gelap pada bulatan

## 3. Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Akar

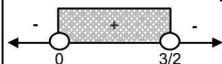
Langkah-langkah:

- Kuadratkan kedua ruas
- Syarat akar tidak boleh bernilai negatif

### Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari  $\sqrt{\frac{2}{x}+1} > \sqrt{3-\frac{1}{x}}$

$$\text{Kuadratkan kedua ruas: } \sqrt{\frac{2}{x}+1} > \sqrt{3-\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{2}{x}+1 > 3-\frac{1}{x} \rightarrow \frac{3-2x}{x} > 0$$

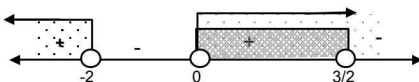


Daerah paling kanan negatif karena pangkat tertinggi  $-2x$

Nilai  $x$  yang memenuhi penyelesaian pertama adalah  $0 < x < \frac{3}{2}$

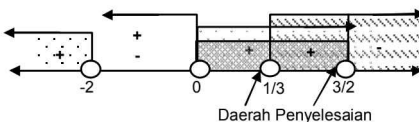
Syarat berikutnya adalah akar tidak boleh bernilai negatif

Ruas kiri  $\frac{2}{x} + 1 > 0 \rightarrow \frac{2+x}{x} > 0$



Nilai  $x$  yang memenuhi penyelesaian kedua adalah  $x < -2$  atau  $x > 0$

Ruas kanan  $3 - \frac{1}{x} > 0 \rightarrow \frac{3x-1}{x} > 0$



Nilai  $x$  yang memenuhi penyelesaian kedua adalah  $x < 0$  atau  $x > \frac{1}{3}$

Pilih daerah yang paling banyak ditiban arsiran. Maka himpunan

penyelesaiannya adalah  $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$

#### 4. Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Nilai Mutlak

Sifat-sifat pertidaksamaan nilai mutlak:

$ x  \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$	$ x  \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ atau } x \geq a$
$ f(x)  \leq  g(x)  \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \leq 0$	
$\left  \frac{f(x)}{g(x)} \right  \leq k \Leftrightarrow (f(x) - k \cdot g(x))(f(x) + k \cdot g(x)) \leq 0$	

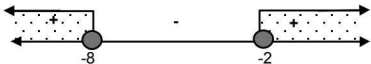
**Contoh:**

Tentukan himpunan penyelesaian  $\left| \frac{2x+7}{x-1} \right| \geq 1$

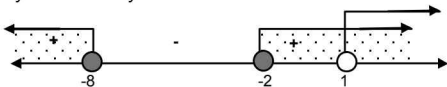
$\left| \frac{2x+7}{x-1} \right| \geq 1 \rightarrow |2x+7| \geq |x-1| \rightarrow \text{kedua ruas dikuadratkan}$

$$(2x+7)^2 \geq (x-1)^2 \rightarrow 4x^2 + 28x + 49 \geq x^2 - 2x + 1 \rightarrow 4x^2 + 28x + 49 - x^2 + 2x - 1 \geq 0$$

$$\rightarrow 3x^2 + 30x + 48 \geq 0 \rightarrow (x+8)(3x+6) \geq 0 \rightarrow x = -8 \text{ atau } x = -2$$



Syarat berikutnya adalah  $x \neq 1$  maka harus ditambah gambar



Maka himpunan penyelesaiannya adalah:

$$x \leq -8 \text{ atau } -2 \leq x < 1 \text{ atau } x > 1$$

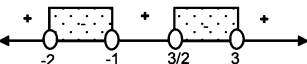
## CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

### Soal 1

Penyelesaian pertidaksamaan  $\frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - x - 6} < 0$  adalah ....

- a.  $x < 1$  atau  $x > 1\frac{1}{2}$  d.  $-2 < x < -1$  atau  $1\frac{1}{2} < x < 3$   
 b.  $-1 < x < 1\frac{1}{2}$  atau  $-2 < x < -1\frac{1}{2}$  e.  $-3 < x < -\frac{1}{2}$  atau  $2 < x < 2\frac{1}{2}$   
 c.  $-1\frac{1}{2} < x < -1$  atau  $2 < x < 3$

 **Jawab:**

$$\frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - x - 6} < 0 \rightarrow \frac{(2x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} < 0$$


Himpunan penyelesaian adalah  $-2 < x < -1$  atau  $1\frac{1}{2} < x < 3$

(Jawaban: D)

### Soal 2

Pertaksamaan  $\sqrt{\frac{2}{x}-1} > \sqrt{3-\frac{1}{x}}$  dipenuhi oleh

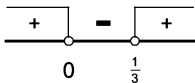
- a.  $x < -2$  b.  $x < 0$  c.  $0 < x < \frac{1}{3}$  d.  $0 < x < \frac{3}{2}$  e.  $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$

 **Jawab:**

$$\sqrt{\frac{2}{x}-1} > \sqrt{3-\frac{1}{x}}$$


Syarat :

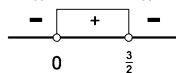
a)  $\frac{2}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2+x}{x} > 0$



b)  $3 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x} > 0$

c) Kedua ruas dikuadratkan, diperoleh :

$$\frac{2}{x} + 1 > 3 - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{1}{x} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{3-2x}{x} > 0$$



Dari irisan a), b), dan c) diperoleh :  $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$

(Jawaban: E)

### Soal 3

Nilai x yang memenuhi  $\frac{3x-2}{x} < x$  adalah...

a.  $x < 0$  atau  $1 < x < 2$

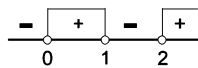
c.  $x < 0$  atau  $2 < x < 3$  e.  $x < -1$  atau  $x > 0$

b.  $x < -2$  atau  $x > 2$

d.  $0 < x < 1$  atau  $x > 2$

**Jawab:**

$$\frac{3x-2}{x} < x \Rightarrow x - \frac{3x-2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x} > 0$$



$0 < x < 1$  atau  $x > 2$

(Jawaban: D)

### Soal 6

Nilai yang memenuhi pertidaksamaan  $|-x^2 + 2x - 2| < 2$  adalah

a.  $x < 2$

b.  $0 > x$

c.  $-2 < x < 0$

d.  $-2 < x < 2$

e.  $0 < x < 2$

**Jawab:**

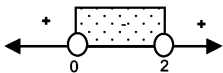
$$|-x^2 + 2x - 2| < 2 \Rightarrow -2 < -x^2 + 2x - 2 < 2$$

Untuk  $< 2$  :  $-x^2 + 2x - 2 < 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 > 0 \rightarrow$  tidak bisa difaktorkan

Persamaan tidak bisa difaktorkan karena  $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = -12 < 0$

Lihat nilai a:  $a = 1$  ( $a$  = positif) sehingga  $x \in \text{Real}$

Untuk  $> -2 \rightarrow -2 < -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x-2) < 0$



Himpunan penyelesaian adalah  $0 < x < 2$

(Jawaban: E)

### Soal 7

Nilai-nilai  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $|x-3|^2 > 4|x-3| + 12$  adalah

- a.  $-2 < x < 9$       c.  $x > 9$  atau  $x < -2$       e.  $x > 9$  atau  $x < -1$   
 b.  $-3 < x < 9$       d.  $x > 9$  atau  $x < -3$

Jawab:

Misalkan  $p = |x-3|$ :

$$|x-3|^2 > 4|x-3| + 12 \rightarrow p^2 > 4p + 12 \rightarrow p^2 - 4p + 12 > 0 \rightarrow (p-6)(p+2) > 0$$

$$\rightarrow P < -2 \text{ atau } P > 6$$

$|x-3| < -2$  maka  $x =$  himpunan kosong

$$|x-3| > 6 \text{ maka } x-3 > 6 \text{ atau } x-3 < -6 \rightarrow x > 9 \text{ atau } x < -3$$

(Jawaban: D)

### Soal 8

Solusi pertaksamaan  $2 \sin x \cos x - \sin x + 2 \cos x - 1 < 0$ ,  
 $-\pi \leq x \leq \pi$ , adalah

- a.  $-\pi \leq x \leq \pi$       c.  $-\pi \leq x < \frac{\pi}{6}$  atau  $\frac{\pi}{6} < x \leq \pi$       e.  $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$   
 b.  $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$       d.  $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{3}$  atau  $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$

Jawab:

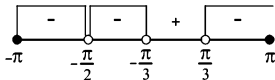
Untuk  $-\pi \leq x \leq \pi$ :

$$2 \sin x \cos x - \sin x + 2 \cos x - 1 < 0 \rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) + (2 \cos x - 1) < 0$$

$$\rightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x + 1) < 0$$

Karena  $(\sin x + 1) > 0$  untuk  $x \neq -\frac{\pi}{2}$

$$\text{Maka diperoleh } 2 \cos x - 1 < 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$



$$-\pi \leq x < -\frac{\pi}{3} \text{ atau } \frac{\pi}{3} < x \leq \pi, x \neq -\frac{\pi}{2}$$

(Jawaban: D)

### Soal 9

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan  $||x| + x| \leq 2$  adalah...

- a.  $0 \leq x \leq 1$       b.  $x \leq 1$       c.  $x \leq 2$       d.  $x \leq 0$       e.  $x \geq 0$

 **Jawab:**

$$||x| + x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq |x| + x \leq 2$$

- $||x| + x| \leq 2 \rightarrow |x| \leq 2 - x \rightarrow (x)^2 \leq (2-x)^2 \rightarrow x^2 \leq 4 - 4x + x^2 \rightarrow 4x \leq 4 \rightarrow x \leq 1$
- $-2 \leq |x| + x \rightarrow -(2+x) \leq |x| \rightarrow x$  harus bilangan real  $\rightarrow$  HP:  $x \leq 1$

(Jawaban: B)

### Soal 10

Himpunan penyelesaian  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - |2x + 3| \geq 0$  adalah...

- a.  $-3 \leq x \leq -\frac{1}{5}$       b.  $-5 \leq x \leq -\frac{1}{3}$       c.  $x \geq -\frac{1}{3}$       d.  $x \geq -\frac{1}{5}$       e.  $x \geq -5$

 **Jawab:**

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - |2x + 3| \geq 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq |2x + 3|, \text{ kuadratkan semua ruas:}$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 4x^2 + 12x + 9 \rightarrow 3x^2 + 16x + 5 \leq 0 \rightarrow (3x + 1)(x + 5) \leq 0$$

- Himpunan penyelesaian adalah  $-5 \leq x \leq -\frac{1}{3}$
- Syarat berikutnya adalah  $x^2 - 4x + 4 \geq 0 \rightarrow (x-2)^2 \geq 0 \rightarrow$  penyelesaian harus bilangan real

$$\text{Himpunan penyelesaian: } -5 \leq x \leq -\frac{1}{3}$$

(Jawaban: B)

### Soal 11

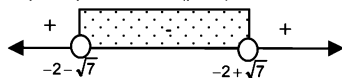
Himpunan penyelesaian  $3^{p^2-p+3} > (9^p)^p 27^p$  adalah...

- a.  $-2 - \sqrt{7} < x < -2 + \sqrt{7}$       c.  $1 < p < 3$       e.  $p > -2 - \sqrt{7}$  atau  $p < -2 + \sqrt{7}$
- b.  $p < 1$  atau  $p > 3$       d.  $-3 < p < -1$

 **Jawab: A**

$$3^{p^2-p+3} > (9^p)^p 27^p \rightarrow 3^{p^2-p+3} > 3^{2p^2+3p} \rightarrow p^2 - p + 3 > 2p^2 + 3p$$

$$\rightarrow p^2 + 4p - 3 < 0 \rightarrow (p+2)^2 - 7 < 0$$



$$\text{HP: } -2 - \sqrt{7} < x < -2 + \sqrt{7}$$

**Soal 12**

N Jika  $2(x - 1) < (x + 2)$ , maka nilai  $x$  yang memenuhi adalah ...

- (A)  $0 < x < 2$
- (B)  $-2 < x < 2$
- (C)  $x > 1$
- (D)  $0 < x < 4$
- (E)  $x > 2$  atau  $x < -4$

**Jawab:D**

$$(2|x - 1|)^2 < |x + 2|^2$$

$$4(x^2 - 2x + 1) < x^2 + 4x + 4$$

$$3x^2 - 12x < 0$$

$$3x(x - 4) < 0$$

**Soal 13**

Nilai dari  $\left| \frac{2x+7}{x-1} \right| \geq 1$  dipenuhi oleh

- (A)  $-2 \leq x \leq 8$
- (B)  $x \leq -8$  atau  $x \geq -2$
- (C)  $-8 \leq x < 1$  atau  $x > 1$
- (D)  $-2 \leq x < 1$  atau  $1 < x \leq 8$
- (E)  $x \leq -8$  atau  $-2 \leq x < 1$  atau  $x > 1$

**Jawab:E**

$$\left| \frac{2x+7}{x-1} \right| \geq 1: x \neq 1$$

$$|2x + 7| \geq (x - 1) \text{ dikuadratkan}$$

$$\Rightarrow (2x + 7)^2 \geq (x - 1)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 28x + 49 - x^2 + 2x - 1 \geq 0$$

$$(x + 8)(3x + 6) \geq 0$$

$$3x^2 + 30x - 48 \geq 0$$