Chapter- 3.2 Part-2

1. De-morgans theorem proof
2. Logic gates
3. Logic circuits

৩.২.৩ ডি-মরগ্যানের (De-Morgan) উপপাদ্য

ফরাসী গণিতবিদ ডি-মরগ্যান (De-Morgan) নিম্নলিখিত দুটি বিশেষ প্রয়োজনীয় উপপাদ্য আবিষ্কার করেন।

প্রথম উপপাদ্য: $\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$

দ্বিতীয় উপপাদ্য: $\overline{A.B} = \bar{A}+\bar{B}$

সত্যক সারণীর সহায়তায় অতি সহজে উপপাদ্য দুটি প্রমাণ করা সম্ভব। বড় বড় লজিক রাশিমালা সরলীকরণের জন্য উপপাদ্য দুটি বিশেষ সহায়ক।

ডি-মরগ্যানের উপপাদ্যের প্রমাণ

ট্রুথ টেবিলের সহায়তায় যে কোন বুলিয়ান উপপাদ্য সহজে প্রমাণ করা সম্ভব। এই পদ্ধতিতে প্রমাণের জন্য সূত্রের বাম দিক ও ডান দিকের চলকসমূহের সম্ভাব্য মান ট্রুথ টেবিলে লেখা হয়। চলকসমূহের সকল মানের জন্য সূত্রের বাম দিক ও ডান দিকের মান একরূপ হলে সূত্রটি প্রমাণিত হয়। নিম্নে দু'টি চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের সূত্র প্রমাণ করা হল।

সত্যক সারণী বা ট্রুথ টেবিল

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	A + B	$\overline{A+B}$	$\bar{A}+\bar{B}$	AB	$\overline{A.B}$	$\bar{A}.\bar{B}$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

উপরের ট্রুথ টেবিল হতে সহজে দেখা যায় যে, A ও B এর সকল মানের জন্য-

$$\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$$

$$\overline{A.B} = \bar{A}+\bar{B}$$

সুতরাং ডি-মরগ্যানের সূত্র দুটি প্রমাণিত হল।

দুই বা দুইয়ের অধিক যে কোন সংখ্যক লজিক্যাল ভ্যারিয়েবলের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য ব্যবহার করা যায়। তিনটি চলকের জন্য উপপাদ্য দুইটি নিম্নে দেয়া হল।

$$\overline{A+B+C} = \bar{A} . \bar{B} . \bar{C}$$
$$\overline{A . B . C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

সত্যক সারণীর সহায়তায় অতি সহজে উপপাদ্য দুটি প্রমাণ করা সম্ভব। তিনটি চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের সূত্রদ্বয় প্রমাণ করার জন্য নিম্নে একটি সত্যক সারণী তৈরি করা হল।

সত্যক সারণী বা ট্রুথ টেবিল

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	A+ B+C	$\overline{A+B+C}$	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$	ABC	$\overline{ABC}$	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0

উপরের ট্রুথ টেবিল হতে সহজে দেখা যায় যে, A, B ও C এর সকল মানের জন্য -

$$\overline{A+B+C} = \bar{A} . \bar{B} . \bar{C}$$
$$\overline{A . B . C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

সুতরাং তিনটি বুলিয়ান চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের সূত্র দুটি প্রমাণিত হল।

n সংখ্যক বুলিয়ান চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য

n সংখ্যক বুলিয়ান চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য দুইটি নিম্নরূপ-

$$\overline{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots\ldots A_n} = \bar{A}_1 . \bar{A}_2 . \bar{A}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{A}_n$$

$$\overline{A_1 . A_2 . A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + \bar{A}_n$$

৩. যদি $F = \overline{X}Y + XY\overline{Z}$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে,

(1) $F.\overline{F} = 0$

(2) $F + \overline{F} = 1$

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$F = \overline{X}Y + XY\overline{Z}$

$= Y(\overline{X} + X\overline{Z})$

$= Y(\overline{X} + X)(\overline{X} + \overline{Z})$ $[\because A+BC = (A+B)(A+C)]$

$= Y(\overline{X} + X)(\overline{X} + \overline{Z})$

$= Y.1.(\overline{X} + \overline{Z})$ $[\because A + \overline{A} = 1]$

$= Y(\overline{X} + \overline{Z})$

$= Y(\overline{XZ})$ [ডি-মরগ্যানের সূত্রানুসারে]

$\therefore \overline{F} = \overline{Y(\overline{XZ})}$

$= \overline{Y} + \overline{(\overline{XZ})}$

$= \overline{Y} + XZ$

এখন, $F.\overline{F} = Y(\overline{XZ}).(\overline{Y} + XZ)$

$= Y(\overline{XZ}).\overline{Y} + Y(\overline{XZ}).XZ$

$= 0 + 0$ $[\because A.\overline{A} = 0]$

$= 0$

আবার, $F + \overline{F} = Y(\overline{XZ}) + (\overline{Y} + XZ)$

$= Y(\overline{XZ}) + XZ + \overline{Y}$

$= [(\overline{XZ}) + XZ].[Y + XZ] + \overline{Y}$ $[\because A+BC = (A+B)(A+C)]$

$= 1.[Y + XZ] + \overline{Y}$

$= Y + XZ + \overline{Y}$

$= 1$ $[\because Y + \overline{Y} = 1]$

৪। ডি-মরগ্যানের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

(1) $\overline{(A+B)}\overline{(\overline{A}+\overline{B})} = 0$

(2) $A + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} = 1$

উঃ (১) বামপক্ষ-

$\overline{(A+B)}\overline{(\overline{A}+\overline{B})} = (\overline{A}.\overline{B})(\overline{\overline{A}.\overline{B}})$

$= (\overline{A}.\overline{B})(\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}})$

$= (\overline{A}.\overline{B})(A.B)$

$= (A.\overline{A})(B.\overline{B})$

$= 0$ $[\because A.\overline{A} = 0]$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

(২) বামপক্ষ-

$A + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B} = A + \overline{A}(B + \overline{B})$

$= A + \overline{A}.1$

$= A + \overline{A}$

$= 1$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

৫। ডি-মরগ্যানের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

(ক) $\overline{A \oplus B} = AB + \overline{A}.\overline{B}$

(খ) $(X+Y)(\overline{X}+Z)(Y+Z) = (X+Y)(\overline{X}+Z)$

সমাধানঃ (ক) আমরা জানি,

$A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$

এখন বামপক্ষ, $\overline{A \oplus B} = \overline{\overline{A}B + A\overline{B}}$

$= (\overline{\overline{A}B}).(\overline{A\overline{B}})$ [ডি-মরগ্যানের সূত্রানুসারে]

$= (\overline{\overline{A}} + \overline{B}).(\overline{A} + \overline{\overline{B}})$

$= (A + \overline{B}).(\overline{A} + B)$

$= A.\overline{A} + A.B + \overline{B}.\overline{A} + \overline{B}.B)$

$= 0 + AB + \overline{A}\,\overline{B} + 0$

$= AB + \overline{A}.\overline{B}$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

(খ) বামপক্ষ,

$(X+Y)(\overline{X}+Z)(Y+Z) = (X+Y)(\overline{X}Y + \overline{X}Z + YZ + ZZ)$

$= (X+Y)(\overline{X}Y + \overline{X}Z + YZ + Z)$

$= (X+Y)[\overline{X}Y + (\overline{X} + Y + 1)Z]$

$= (X+Y)[\overline{X}Y + Z]$ $[\because \overline{X} + Y + 1 = 1]$

$= X.\overline{X}Y + XZ + \overline{X}Y.Y + YZ$

$= 0 + XZ + \overline{X}Y + YZ$

$= XZ + \overline{X}Y + YZ$

এবার ডানপক্ষ,

$(X+Y)(\overline{X}+Z) = X.\overline{X} + XZ + \overline{X}Y + YZ$

$= 0 + XZ + \overline{X}Y + YZ$

$= XZ + \overline{X}Y + YZ$

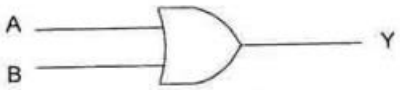
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

অর (OR) গেইট

অর গেইটে দুই বা দুয়ের অধিক ইনপুট এবং একটি আউটপুট থাকে। অর গেইটের যে কোন একটি ইনপুট ১ হলে আউটপুট ১ হবে। প্রথমে দুটি ইনপুট বিশিষ্ট একটি অর গেইট নিয়ে আলোচনা করা হল। অন্ততঃ একটি ইনপুট ১ হলেই গেইটটির আউটপুট ১ হয়। অর্থাৎ A = 0, B = ১ অথবা A = ১, B = 0 অথবা A = ১, B = ১ অবস্থাগুলোর জন্য আউটপুট ১ হয়। অন্যথায়, অর্থাৎ A = 0, B = 0 অবস্থার জন্য, Y = 0 হয়।

অর গেইটের সত্যক সারণী

A	B	Y
০	০	০
০	১	১
১	০	১
১	১	১



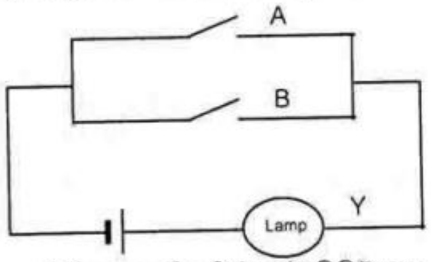
চিত্র ঃ ২ ইনপুট অর গেইট

সত্যক সারণীতে অর গেইটের ইনপুটের সাথে আউটপুটের সম্পর্ক দেখানো হল। বুলিয়ান অ্যালজেবরা অনুযায়ী,

Y = A অর B

= A OR B

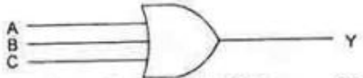
= A + B



চিত্রে অর গেইটের সমকক্ষ একটি সমান্তরাল সুইচ বর্তনী দেখানো হয়েছে। এই সমান্তরাল সুইচ বর্তনীর যে কোন একটি সুইচ অন করলে বাতিটি জ্বলবে।

তাত্ত্বিক বিবেচনায় দুই বা দুয়ের অধিক যে কোন সংখ্যক ইনপুট বিশিষ্ট অর গেইট সম্ভব। তিনটি ইনপুট বিশিষ্ট অর গেইটের ক্ষেত্রে A, B এবং C গেইটটির ইনপুট এবং Y আউটপুট হলে,

Y = A + B + C



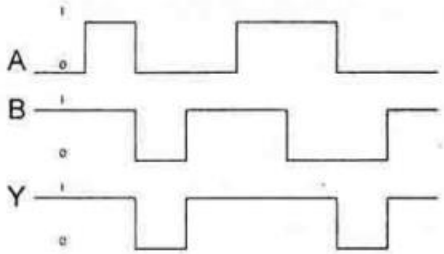
চিত্র : তিনটি ইনপুট বিশিষ্ট অর গেইট

উদাহরণঃ

চিত্রে অর(OR) গেইটের দুটি ইনপুট A এবং B এর তরঙ্গাকৃতি হতে গেইটটির আউটপুট Y এর তরঙ্গাকৃতি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধানঃ

অর গেইটের সত্যক সারণী হতে অতি সহজে Y এর তরঙ্গাকৃতি নির্ণয় করা যায়।



অ্যান্ড (AND) গেইট

অ্যান্ড গেইটে দুই বা দুয়ের অধিক ইনপুট এবং একটি আউটপুট থাকে। অ্যান্ড গেইটের সকল ইনপুট ১ হলেই কেবলমাত্র আউটপুট ১ হবে অন্যথায় আউটপুট ০ হবে।

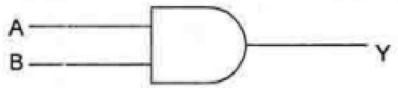
প্রথমে আমরা দুটি ইনপুট সংকেতবিশিষ্ট অ্যান্ড গেইট নিয়ে আলোচনা করব। সবগুলো ইনপুট ১ হলে গেইটটির আউটপুট ১ হয়, অর্থাৎ A = ১ এবং B = ১ অবস্থার জন্য Y = ১ হয়।

অন্যথায়, অর্থাৎ A = ০, B = ০ অথবা A = ১, B = ০ অথবা A = ১, B = ০ অথবা A = ০, B = ১ অবস্থানগুলোর জন্য Y = ০ হয়।

চিত্রে এই গেইটের সত্যক সারণী দেয়া হল।

অ্যান্ড গেইটের সত্যক সারণী

A	B	Y
০	০	০
০	১	০
১	০	০
১	১	১



২ ইনপুট অ্যান্ড গেইট

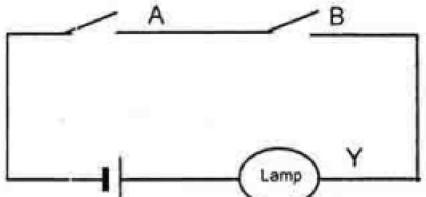
বুলিয়ান অ্যালজেবরা অনুযায়ী,

Y = A অ্যান্ড A

= A AND B

= A . B

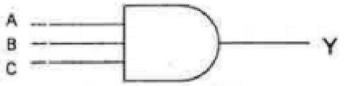
= AB



চিত্রে অ্যান্ড গেইটের সমকক্ষ একটি শ্রেণী সমবায়ে দুইটি সূইচ সার্কিট দেখানো হয়েছে। এই স্যাইচ দুইটির যে কোন একটি স্যাইচ অন করলে বাতিটি জ্বলবে না। কেবলমাত্র দুইটি সূইচ অন করলেই বাতিটি জ্বলবে।

তাত্ত্বিকভাবে দুই বা দুয়ের অধিক ইনপুট বিশিষ্ট অ্যান্ড গেইট সম্ভব। তিনটি ইনপুট বিশিষ্ট অ্যান্ড গেইটের ক্ষেত্রে A, B এবং C গেইটটির ইনপুট এবং Y আউটপুট হলে,

Y = ABC



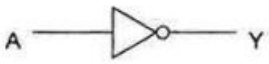
নট (NOT) গেইট

নট গেইটে একটি ইনপুট ও একটি আউটপুট থাকে। নট গেইটের ইনপুট ১ হলে আউটপুট ০ এবং ইনপুট ০ হলে আউটপুট ১ হয়।

বুলিয়ান অ্যালজেবরা অনুযায়ী নট গেইটের আউটপুট সংকেত,

Y = নট(A) = NOT(A) = $\bar{A}$ (অর্থাৎ $\bar{A}$ এর মান A এর উল্টো)

চিত্রে এই গেইটের সত্যক সারণী এবং ইনপুট সংকেতের সাথে আউটপুট সংকেতের সম্পর্ক দেখানো হয়েছে।



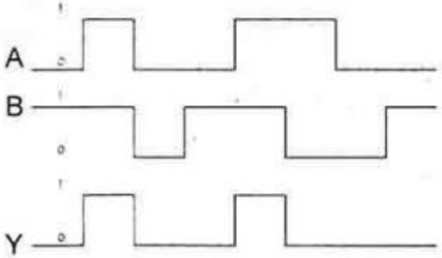
নট গেইট

নট গেইটের সত্যক সারণী

A	Y = $\bar{A}$
০	১
১	০

উদাহরণঃ
চিত্রে অ্যান্ড গেইটের দুটি ইনপুট A এবং B এর তরঙ্গাকৃতি হতে গেইটটির আউটপুট Y এর তরঙ্গাকৃতি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধানঃ
অ্যান্ড গেইটের সত্যক সারণী হতে অতি সহজে Y এর তরঙ্গাকৃতি নির্ণয় করা যায়।



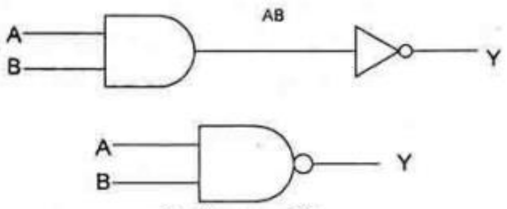
৩.২.৬ সার্বজনীন গেইট (Universal gate)

ডিজিটাল ইলেক্ট্রনিক্সে উপরোক্ত মৌলিক তিনটি লজিক গেইট ছাড়া আরও কিছু গেইট ব্যবহার করা হয়। যথা- ন্যান্ড গেইট, নর গেইট। এই গেইটগুলো মৌলিক গেইট দ্বারা তৈরি করা যায়। ন্যান্ড গেইট, নর গেইট দ্বারা সকল ধরনের গেইট বাস্তবায়ন করা যায় বলে এদেরকে সার্বজনীন গেইট বলা হয়। সার্বজনীন গেইট তৈরি করার খরচ কম বিধায় ডিজিটাল সার্কিটে সার্বজনীন গেইট বেশি ব্যবহার করা হয়।

ন্যান্ড (NAND) গেইট

অ্যান্ড গেইট হতে নির্গত সংকেতটি নট গেইটের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত করলে ন্যান্ড (NAND) গেইটের কাজ হয়। অর্থাৎ অ্যান্ডের পর নট যুক্ত করে ন্যান্ড গেইট বাস্তবায়ন করা হয়। লজিক সার্কিট তৈরির জন্য ন্যান্ড গেইটের বহুল প্রচলন রয়েছে। চিত্রে দুটি ইনপুট বিশিষ্ট ন্যান্ড গেইটের চিহ্ন ও সত্যক সারণী দেয়া হল। এখানে আউটপুট Y হলে,

Y = NOT(A.B) = $\overline{A.B}$



২ ইনপুট ন্যান্ড গেইট

ন্যান্ড গেইটের সত্যক সারণী

A	B	AB	Y= $\overline{AB}$
০	০	০	১
০	১	০	১
১	০	০	১
১	১	১	০

তাত্ত্বিকভাবে দুই বা দুয়ের অধিক ইনপুট বিশিষ্ট ন্যান্ড গেইট হতে পারে। তিনটি ইনপুট বিশিষ্ট (A,B,C) ন্যান্ড গেইটের আউটপুট Y এর সমীকরণ,

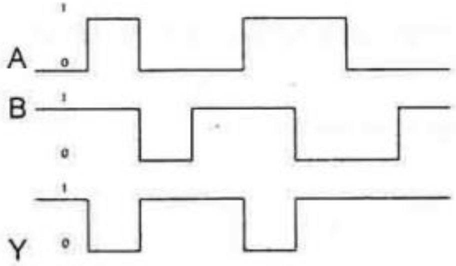
Y = NOT(A.B.C)

= $\overline{A.B.C}$

৩ ইনপুট ন্যান্ড গেইট

উদাহরণঃ
চিত্রে A ও B এর তরঙ্গাকৃতির জন্য ন্যান্ড গেইটের আউটপুট X এর তরঙ্গাকৃতি নির্ণয় কর।

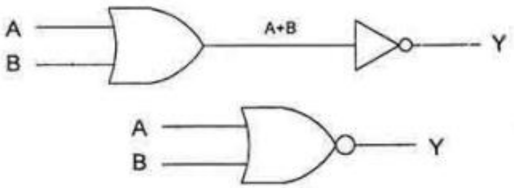
সমাধানঃ
ন্যান্ড গেইটের সত্যক সারণী হতে অতি সহজে Y এর তরঙ্গাকৃতি নির্ণয় করা সম্ভব।



নর (NOR) গেইট

অর গেইটের পর নট গেইট থাকলে তাদের সংযুক্ত ফল নর (NOR) গেইটের কাজ। চিত্রে বুলিয়ান সমীকরণসহ দুটি ইনপুট বিশিষ্ট নর গেইটের চিহ্ন ও সত্যক সারণী দেখানো হল। এখানে আউটপুট Y -এর সমীকরণ হল

$Y = NOT(A + B) = \overline{A + B}$



নর গেইট

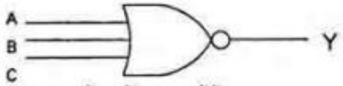
নর গেইটের সত্যক সারণী

A	B	A+B	$Y = \overline{A+B}$
০	০	০	১
০	১	১	০
১	০	১	০
১	১	১	০

তাত্ত্বিকভাবে দুই বা দুয়ের অধিক ইনপুট বিশিষ্ট নর গেইট সম্ভব। তিনটি ইনপুট বিশিষ্ট (A,B,C) নর গেইটের আউটপুট Y -এর সমীকরণ হল,

$Y = NOT(A + B + C)$

$= \overline{A + B + C}$



৩ ইনপুট নর গেইট

৩.২.৭ বিশেষ গেইট (Special gate)

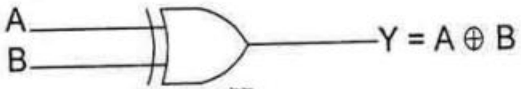
এক্স-অর (X-OR) এবং এক্স-নর (X-NOR) নামে দুটি লজিক গেইট রয়েছে যা বিশেষ গেইট নামে পরিচিত।

এক্স-অর (XOR) গেইট

এক্স-অর একটি বহুল ব্যবহৃত লজিক সার্কিট। মৌলিক গেইট দিয়ে এই সার্কিট তৈরি করা গেলেও অ্যান্ড, অর, নট, ন্যান্ড ও নর গেইটের ন্যায় এটি একীভূত সার্কিট আকারে পাওয়া যায়। এক্স-অর গেইটের ইনপুটে বেজোড় সংখ্যক ১ হলে আউটপুট ১ হয়। দুটি বিটের অবস্থা তুলনা করার জন্য এই গেইট ব্যবহার করা হয়। ২ ইনপুট এক্স-অর গেইটের ক্ষেত্রে ইনপুট যদি অসমান হয় তাহলে আউটপুট ১ হয়। চিত্রে এক্স-অর (X-OR) গেইটের চিহ্ন ও সত্যক সারণী দেয়া হল। বুলিয়ান অ্যালজেবরা অনুযায়ী এই সম্পর্ক হল-

$Y = A \oplus B$ এখানে "⊕" দ্বারা এক্স-অর ক্রিয়া বোঝানো হয়েছে।

$= \bar{A}B + A\bar{B}$



এক্স-অর গেইট

এক্স-অর গেইটের সত্যক সারণী

A	B	$Y = A \oplus B$
০	০	০
০	১	১
১	০	১
১	১	০

এক্স-নর (X-NOR) গেইট

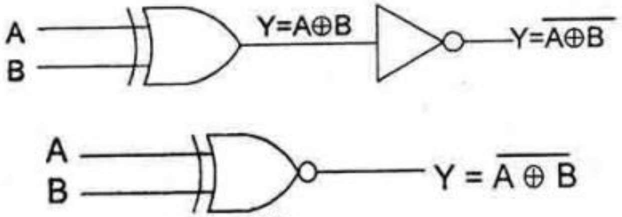
এক্স-অর গেইটের আউটপুটকে নট গেইট দিয়ে প্রবাহিত করলে এক্স-নর গেইট পাওয়া যায়। ২ ইনপুট এক্স-নর গেইটের ক্ষেত্রে ইনপুট দুটি সমান হলে আউটপুট ১ হয়। এক্স-নর (X-NOR) গেইটের চিত্র ও সত্যক সারণী দেয়া হল।

বুলিয়ান অ্যালজেবরা অনুযায়ী,

$Y = \overline{A \oplus B}$

$= \overline{\bar{A}B + A\bar{B}}$

$= AB + \bar{A}\bar{B}$



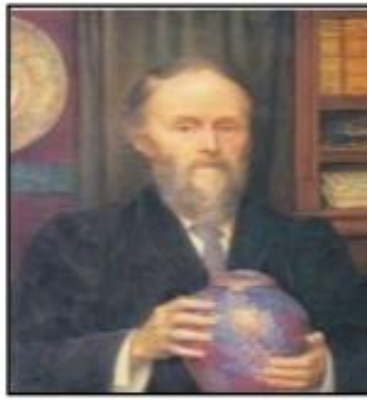
এক্স-নর গেইট

এক্স-নর গেইটের সত্যক সারণী

A	B	$Y = A \oplus B$
০	০	১
০	১	০
১	০	০
১	১	১

৩.৭.২ ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য (De-Morgan's Theorems)

ডি-মরগ্যান ছিলেন একজন নামকরা ফরাসি গণিতবিদ। তিনি বুলিয়ান অ্যালজেবরার ক্ষেত্রে দুটি বিশেষ সূত্র উদ্ভাবন করেন। তাঁর নামানুসারে এ বিশেষ সূত্র দুটি ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য নামে পরিচিত।



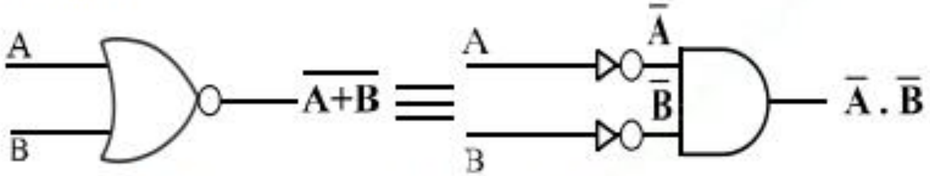
চিত্র: ডি-মরগ্যান

A ও B দুটি চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য দুটি নিম্নরূপ–

প্রথম উপপাদ্য: $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$

দ্বিতীয় উপপাদ্য: $\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$

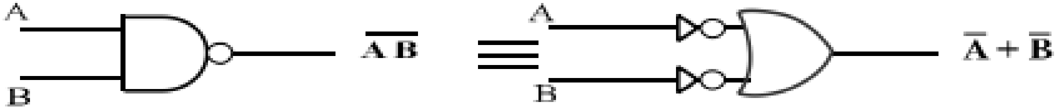
প্রথম উপপাদ্য: $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$



চিত্র: ডি-মরগ্যানের প্রথম উপপাদ্যের লজিক চিত্র।

প্রথম উপপাদ্য অনুসারে, A ও B গ্রহণ সংকেতের জন্য একটি নর গেইটের আউটপুট সংকেত যা হয়, তাহলো $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ গ্রহণ সংকেতের জন্য একটি অ্যান্ড গেইটের আউটপুট সংকেতের সমান।

দ্বিতীয় উপপাদ্য: $\overline{A\,.\,B} = \overline{A} + \overline{B}$



চিত্র: ডি-মরগ্যানের দ্বিতীয় উপপাদ্যের লজিক চিত্র।

উপরিউক্ত সত্যক সারণি হতে প্রতীয়মান হয় যে, A ও B এর সকল মানের জন্য–

১ম উপপাদ্য: $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$

২য় উপপাদ্য: $\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$

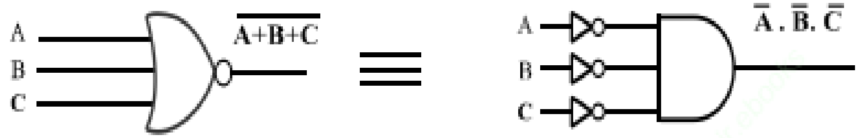
সুতরাং দুই চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য দুটি প্রমাণিত হলো।

তিনটি চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য:

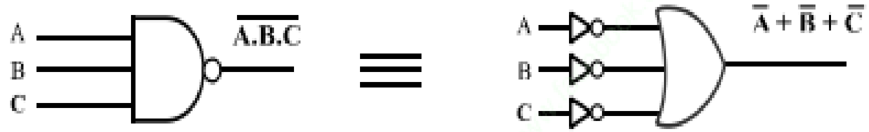
প্রথম উপপাদ্য: $\overline{A+B+C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$

দ্বিতীয় উপপাদ্য: $\overline{A.B.C} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

(১) $\overline{A+B+C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$



(২) $\overline{A.B.C} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$



চিত্র: ডি-মরগ্যান উপপাদ্যের লজিক চিত্র।

উদাহরণ–২ :

$$F = \overline{(A + B + \overline{C})}\,\overline{B}C$$

$$= \overline{A}\,.\,\overline{B}\,.\,\overline{\overline{C}}\,.\,\overline{B}C \quad [\because \overline{x + y + z} = \overline{x}\,.\,\overline{y}\,.\,\overline{z}]$$

$$= \overline{A}\,.\,\overline{B}\,.\,C\,.\,\overline{B}C \quad [\because \overline{\overline{x}} = x]$$

$$= \overline{A}\,(\overline{B}\,.\,\overline{B})\,.\,(C\,.\,C)$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}C \quad [\because x.x = x]$$

উদাহরণ–৩ :

$$F = \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

$$= \overline{A}\,(B + \overline{B}) + AB$$

$$= \overline{A}\,.\,1 + AB \quad [\because x + \overline{x} = 1]$$

$$= \overline{A} + AB$$

$$= \overline{A} + B \quad [\because x + \overline{x}y = x + y]$$

উদাহরণ–৪ :

$$F = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C$$

$$= BC(A + \overline{A}) + \overline{B}C\,(A + \overline{A})$$

$= BC + \overline{B}C$ | যেহেতু A+A=1 |

$$= C\,(B + \overline{B})$$

$$= C.1 = C$$

উদাহরণ–৫ :

$$F = AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + AB$$

$$= A\overline{C}\,(B + \overline{B}) + AB$$

$= A\overline{C}.1 + AB$ [যেহেতু $\overline{x} + x = 1$]

$$= A\overline{C} + AB \quad [\because x.1 = x]$$

উদাহরণ–৬ :

$$V = \overline{x + \overline{y}(z + \overline{x})}$$

$= \overline{x}\,.\,\overline{\overline{y}\,(z + \overline{x})}$ [∵ ডি মরগ্যানের সূত্রানুসারে]

$= \overline{x}\,.\,(\overline{\overline{y}} + \overline{(z + \overline{x})})$ [∵ ডি মরগ্যানের সূত্রানুসারে]

$= \overline{x}\,.\,(y + (\overline{z}\,.\,\overline{\overline{x}}))$ [$\because \overline{\overline{A}} = A$]

$$= \overline{x}\,.\,(y + (\overline{z}\,.x))$$

$$= \overline{x}y + \overline{x}\,.\,\overline{z}\,.\,x = \overline{x}y + \overline{z}\,.\,x.\overline{x}$$

$$= \overline{x}y + \overline{z}\,.0 \quad [\because A\overline{A} = 0]$$

$$= \overline{x}y + 0$$

গাণিতিক সমস্যার সমাধান

নিচের বুলিয়ান এক্সপ্রেশনগুলো সরলীকরণ করো।

I. $(B\overline{C} + \overline{A}D)(A\overline{B} + C\overline{D})$

$= B\overline{C}A\overline{B} + B\overline{C}C\overline{D} + \overline{A}DA\overline{B} + \overline{A}DC\overline{D}$

$= B\overline{B}\,\overline{C}A + C\overline{C}\,B\overline{D} + A\overline{A}\,D\overline{B} + D\overline{D}\,\overline{A}C$

$= 0.\,\overline{C}A + 0.\,B\overline{D} + 0.\,D\overline{B} + 0.\,\overline{A}C$

$= 0.$

II. $\overline{(A+\overline{C})(\overline{B}+D)}$

$= \overline{(A+\overline{C})} + \overline{(\overline{B}+D)}$

$= \overline{A}.\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{B}}.\overline{D}$

$= \overline{A}C + B\overline{D}$

III. $XY + XZ + \overline{X}Z + ZX$

$= XY + Z(X+\overline{X}) + ZX$

$= XY + Z. + ZX$

$= XY + Z(1+X)$

$= XY + Z$

IV. $AB + \overline{A}B + A\overline{B}$

$= B(A + \overline{A}) + A\overline{B}$

$= B + A\overline{B}$

$= B + \overline{B}A$

$= B + A$

V. $\overline{\overline{A}\,\overline{B}.\overline{C}\,\overline{D}}$

$= \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{D}}$

$= \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} + \overline{\overline{D}}$

$= A + B + C + D$

VI. $ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

$= AC(B+\overline{B}) + AB\overline{C}$

$= AC + AB\overline{C}$

$= A(C + B\overline{C})$

$= A(C + \overline{C}B)$

$= A(C+B)$ $[\because A + \overline{A}B = A + B]$

VII. $(\overline{A+B} + \overline{C+D})A$

$= (\overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D})A$

$= \overline{A}A\overline{B} + A\overline{C}\,\overline{D}$

$= 0.\,\overline{B} + A\overline{C}\,\overline{D}$

$= A\overline{C}\,\overline{D}$

বুলিয়ান অ্যালজেবরার সহায়তায় প্রমাণ করো যে,

i. $(M + \overline{N})(\overline{M} + N) = \overline{M}N + M\overline{N}$

বামপক্ষ= $(M + \overline{N})(\overline{M} + N)$

$= \left(\overline{M+\overline{N}}\right)\left(\overline{\overline{M}+N}\right)$

$= \overline{M}.\overline{\overline{N}} + \overline{\overline{M}}\,\overline{N}$

$= \overline{M}N + M\overline{N}$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii. $\overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + ABC = A \oplus B \oplus C$

বামপক্ষ $= \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + ABC$

$= C(\overline{A}\,\overline{B} + AB) + \overline{C}(\overline{A}B + A\overline{B})$

$= C\left(\overline{A \oplus B}\right) + \overline{C}(A \oplus B)$

$= C\overline{Y} + \overline{C}Y$ (ধরি $A \oplus B = Y$)

$= Y \oplus C$

$= A \oplus B \oplus C$ [Y এর মান বসিয়ে]

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iii. $ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C = C$

বামপক্ষ $= ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C$

$= BC(A + \overline{A}) + \overline{B}C(A + \overline{A})$

$= BC + \overline{B}C$

$= C(B + \overline{B})$

$= C$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iv. $(A + ABC + AB\overline{C})(\overline{A}C + BC)$

$= A.\overline{A}C + ABC.\,\overline{A}C + AB\overline{C}.\,\overline{A}C + A.BC$

$+ ABC.BC + AB\overline{C}.BC$

$= A\overline{A}C + A\overline{A}.B.CC + A\overline{A}.B.C\overline{C} + ABC$

$+ ABC + AB.\overline{C}$

$= 0 + 0 + 0 + ABC + ABC + 0$

$= ABC$

$\therefore (A + ABC + AB\overline{C})(\overline{A}C + BC) = ABC$ (প্রমাণিত)

v. $(\overline{A+B})\left(\overline{\overline{A}+\overline{B}}\right) = 0$

বামপক্ষ $= (\overline{A+B})\left(\overline{\overline{A}+\overline{B}}\right)$

$= (\overline{A}.\overline{B})(\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}})$

$= (\overline{A}\,\overline{B})(AB)$

= 0 = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

vi. $A + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B} = 1$

বামপক্ষ $= A + \overline{A}(B + \overline{B})$

$= (A + \overline{A}).1$

= 1 = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

vii. $\overline{A \oplus B} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$

বামপক্ষ $= \overline{A \oplus B}$

$= \overline{A\overline{B} + \overline{A}B}$

$= \left(\overline{A\overline{B}}\right).\left(\overline{\overline{A}B}\right)$

$= \left(\overline{A}+\overline{\overline{B}}\right)\left(\overline{\overline{A}}+\overline{B}\right)$

$= (\overline{A}+B)(A+\overline{B})$

$= A\overline{A} + \overline{A}\,\overline{B} + AB + B\overline{B}$

$= 0 + AB + \overline{A}\,\overline{B} + 0$

$= AB + \overline{A}\,\overline{B}$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

viii. $(A + B)(A + C) = A + BC$

বামপক্ষ $= (A + B)(A + C)$

$= A.A + AB + AB + BC$

$= A + AB + AB + BC$

$= A + AB + BC$

$= A(1 + B) + BC$ $[\because 1 + B = 1]$

$= A.1 + BC$ $[\because A.1 = A]$

$= A + BC$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)