

Diseño de simulador de membrana para determinación de materiales en el modelo.

Guanajuato, Gto. 11 de Junio de 2019

Miembros del equipo: Fuentes Lara Jose Ramiro, Casillas Hernandez Andrea Isabel, Ramírez Jaime Leonardo Darío, Perez Méndez José Luis.

1. Resumen

Con el presente proyecto se buscó desarrollar una herramienta basada en el lenguaje de programación MATLAB en el cual se pudiera realizar una simulación sencilla de una membrana para apreciar su comportamiento en situaciones de estrés y variaciones en la misma modificando parámetros en nuestro modelo.

Gracias a la ecuación de onda bidimensional sabemos que el valor de nuestra C cuadrada está directamente relacionada con la tensión que presenta nuestro modelo, aprovechamos esto para poder conocer y delimitar puntos máximos y mínimos de elasticidad determinados empíricamente. Así también simulación podemos conocer donde habrá un punto de quiebre en nuestra membrana.

El caso de estudio en el que nos basamos fue el de membranas de grafeno para la purificación de agua salada, las membranas de grafeno son perfectas para la separación de sólidos en el agua por su estructura y maleabilidad.

Nanomateriales es el nombre con que se designa a las partículas de una dimensión igual o menor a una millonésima de milímetro. Pueden ser obtenidas a partir de diferentes elementos o compuestos químicos. un gran ejemplo de ellos es el grafeno.

Los lápices están formados por grafito, una estructura de carbono formada por láminas apiladas una encima de otra, a una sola lámina la llamamos grafeno. En el año 2004, André Geim y Konstantin Novoselov, investigadores de la Universidad de Manchester consiguieron aislar una única capa de grafeno, experimento que muchos científicos habían tratado de conseguir sin éxito alguno. Gracias a su gran logro ganaron el Nobel de Física en el año 2010.

El grafeno es un material sumamente delgado, de color transparente y es muy resistente; en estado puro es capaz de conducir los electrones a temperatura ambiente mucho mejor que cualquier otra sustancia. Actualmente el estudio del grafeno está en su mayor auge ya que con él se podrán construir compuestos de gran resistencia, pantallas inteligentes, base de ordenadores más eficientes, etc.

2. Palabras Clave

«Membrana, Grafeno, Separación, MATLAB, Simulación, Renderizado, Programación, Agua, Ecuación de Onda, Presión, Materiales, Ecuaciones Diferenciales Parciales »

3. Introducción

Correspondiendo a los conocimientos obtenidos en la clase de Ecuaciones Diferenciales Parciales nos hemos propuesto el poder visualizar gráficamente nuestro modelo, facilitando su estudio y comprensión. Motivados con lo realizado hasta el momento propusimos la aplicación de nuestro modelo en la simulación de una membrana de grafeno expuesta a condiciones de estrés las cuales se originan gracias a caudales de agua que pasan a través de ella, esto con el fin de conocer si las fuerzas que se originan pueden o no perforar nuestra membrana basándose en la tensión y densidad de la misma. Todo esto usando la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Gracias al proyecto realizado aquí se podrán seleccionar materiales para la elaboración de membranas correspondientes al valor de la densidad y la tensión (C Cuadrada) que puedan ofrecer los mismos abaratando costos y pruebas ya que solo será necesario realizar la simulación para la selección de un material.

4. Objetivos

- Realizar un software en MATLAB para la simulación básica de membranas con diferentes valores de C y opciones de visualización.
- Proponer aplicaciones acerca de la ecuación de onda bisimensional para exponerlas delante del grupo y profesor.
- Mostrar los beneficios de los diferentes usos de la programación disminuir costos.

5. Aplicación del Proyecto

Podemos combatir con este trabajo tres puntos bastante importantes:

5.1. Apreciación Didáctica

EL programa desarrollado permite apreciar de mejor manera el comportamiento de una membrana a la cual se somete un caudal, dicho caudal genera fuerzas que provocan una alteración al estado de equilibrio y se ven reflejados en la simulación.

5.2. Determinación de Materiales

Conforme a los parámetros que se incluyen en el programa es posible encontrar puntos de quiebre de la misma, siempre y cuando tengamos claros los coeficientes característicos de nuestra membrana, podremos desarrollar la simulación de la misma y proponer materiales que puedan ser utilizados según los obtenidos.

5.3. Reducción de Costos

Al tener realizados los tres puntos anteriores se requieren menos pruebas para determinar el uso correcto de la membrana, con una reducción de pruebas se reduce el tiempo en seleccionar un material y la cantidad de muestras que serían necesarias por lo que la cantidad de inversión es menor y se vuelve un proceso mas rentable.

6. Metodología

6.1. Hablemos de Materiales

Uno de ellos es el carbono (C), elemento químico con número atómico 6, no metal y tetravalente, el cual dispone de 4 electrones para formar enlaces químicos covalentes. Este elemento tiene varias formas alotrópicas, las cuáles se deben a la capacidad de los átomos de carbono para formar numerosas estructuras y redes muy complejas.

La Alotropía es la existencia, especialmente en el estado sólido, de dos o más formas estructurales moleculares o cristalinas de un elemento. Los alótropos del carbono pueden ser:

- Tridimensionales – diamante, grafito
- Bidimensionales – grafeno
- Monodimensionales – nanotubos
- Cero dimensionales –fullerenos

La nanotecnología está ligada al estudio del grafeno, ya que algunos nanotubos de carbono son láminas de grafeno enrolladas sobre sí mismas. Gracias a las diversas investigaciones de este material es posible purificar agua, el cual describiremos más a detalle.

El grafeno se define como una fina lámina plana de átomos de carbono con un grosor de un átomo de carbono (0.1 nm) y con hibridación sp^2 en dos dimensiones (2D) formando una estructura similar a un panel hexagonal.

Fue aislado por 1ª vez en el 2004, por los físicos Andre K. Geim y Konstantin S. Novoselov, al pegar un trozo de celo sobre la superficie de un grafito, pero no fue hasta el 2010 cuando el grafeno comenzó a generar interés en el resto de los científicos, al ganar sus descubridores el Premio Nobel de Física.

6.2. Propiedades

El interés por este material se debe por sus características como la amplia superficie, dureza, excelente conductividad eléctrica y su gran conductividad térmica, además de que, al proceder de una sustancia natural como el grafito, tiene menor riesgo ambiental que los materiales inorgánicos.

La fuerza mecánica le permite soportar presiones mayores a 1 060 GPa y su conductividad térmica es de aproximadamente 3 000 W/mK mK (lo que le permite disipar el calor con facilidad). El grafeno tiene una alta área superficial específica (2 630 m²/g) comparada con la de los nanotubos de carbono (1 315 m²/g), lo que lo convierte en un material atractivo para aplicaciones de almacenamiento de energía. Su movilidad electrónica promedio, a la temperatura ambiente, puede llegar a 15000 cm²/Vs y su fuerza de ruptura es de 1770 nM, medición que permitió calcular la fuerza intrínseca (máxima fuerza que puede soportar un material original libre de defectos antes de fallar) de una hoja de grafeno libre de defectos (siendo ésta de 42 N/m).

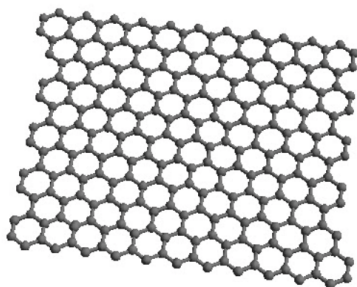


Figura 1: Vista animada de una lamina de Grafeno

Cuadro 1: Propiedades del Grafeno

PROPIEDAD	CARACTERÍSTICAS
ELECTRÓNICA	Tiene un arreglo hexagonal de átomos de carbono con una hibridación tipo sp ²
ELÉCTRICA	La estructura de las bandas de valencia y conducción se tocan en seis puntos llamados los puntos de 6 Dirac correspondientes a las esquinas de la primera zona de Brioulli. Puesto que cada átomo cede un electrón del orbital 2p a las bandas, se tendrá la banda de valencia totalmente llena y la de conducción totalmente vacía. El nivel de fermi cuando el material es neutro se sitúa en esos puntos. Por lo tanto con excitaciones a bajas energías los electrones se pueden pasar a la banda de conducción
MECÁNICA	El grafeno exhibe un módulo de Young elástico de 1 TPa, lo que lo revela como un material altamente rígido, es decir, admite tensiones muy elevadas antes de romperse y sin embargo simultáneamente presenta elevada flexibilidad que se evidencia en la formación de pliegues y dobleces en sus hojas
TÉRMICA	El valor de conductividad obtenido del grafeno en 2008 fue de 5000 W/mK a temperatura ambiente, el cual corresponde al límite superior de los valores más altos reportados para envoltorios de nanotubos de carbono de pared simple

6.3. Obtención

Desde el 2004 se han realizado diversas investigaciones y se han probado diversos métodos de obtención del grafeno. Entre ellos, la exfoliación micromecánica (método de “scotch-tape”), a través de la cual el grafeno en estado libre fue obtenido por primera vez y actualmente el método más eficaz y fiable para producir láminas de grafeno de alta calidad. La exfoliación es la separación de las capas más externas de un sólido en laminillas, hojuelas o escamas. La técnica de exfoliación micro- mecánica consiste en un raspado fino, o bien, en el descascaramiento de las placas superpuestas. En el caso del grafito, las capas de grafeno débilmente son separadas utilizando cinta adhesiva con el propósito de extraer hojuelas extremadamente delgadas.

6.4. Obtención del código base

Mediante el uso de las herramientas y conocimientos obtenidos en clase se obtuvo un problema el cual planeaba determinar la deflexion que ocurría en un tambor/membrana:

```
% Ecuaciones diferenciales parciales
% Jose Ramiro Fuentes Lara
% Leonardo Dario Ramirez Jaime
% Andrea Isabel Casillas Hernandez
% Jose Luis Perez Mendez
clc;clear;close all;

% valores de nuestras constantes

a = 2;
b = 4;
c = sqrt(5);

x = 0:.1:a;
y = 0:.1:b;
t = 0:0.2:1;

% Definimos el ciclo

for k=1:length(t)
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
            u(i,j) = 0;
            for m=1:100
                for n = 1:100
                    lambda= c*pi*sqrt((m/a)^2+((n/b)^2));
                    A=(102.4*(1-cos(m*pi))*(1-cos(n*pi)))/((pi^6)*((m*n)^3));
                    u(i,j)=u(i,j)+A*cos(lambda*t(k))*sin((m*pi*x(i))/a)*sin((n*pi*y(j))/b)
                ;
            end
        end
    end
end

% Se grafica nuestra funcion y se le da formato

subplot(2,3,k),surf(u), title(t(k))
set(gcf, 'Name', 'Ecuacion_de_onda_bidimensional(Membrana)')

xlabel('Eje_X')
```

```

ylabel('Eje_Y')
xlabel('Eje_Z')
end

```

Básicamente en el programa se realiza la determinación de longitudes para nuestra membrana, la relación entre la Tensión y Densidad y nuestro intervalo de tiempo. Inicializamos nuestros arreglos x-ancho,y-largo y t-tiempo las cuales gracias a los ciclos anidados for permiten crear una maya para la visualización de la membrana en los tiempos propuestos en el arreglo T.

El programa crea un arreglo bidimensional el cual es nuestra maya que visualizaremos en la gráfica que mas adelante se realiza dando formato a la visualización de los mismos.

6.5. Estudio profundo del caso propuesto

se replanteo totalmente la forma en la que el codigo funciona y es capaz de mostrar los datos proporcionados quedando de la siguiente forma:

Primer caso de estudio:

```

%Ecuaciones diferenciales parciales
%Jose Ramiro Fuentes Lara
%Leonardo Dario Ramirez Jaime
%Andrea Isabel Casillas Hernandez
%Jose Luis Perez Mendez
clc;clear;close all;

%valores de nuestras constantes

a = 4;
b = 4;
c = sqrt(5);

x = 0:.3:a;
y = 0:.3:b;
t = 0:0.1:100;

%% Este ciclo nos sirve para determinar los valores de nuestra u los cuales pueden ser tan grandes como deseemos

% variable para guardar las mesh
for k=1:length(t)
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
            u(i,j,k) = 0;
            for m=1:100
                for n = 1:100
                    lambda= c*pi*sqrt((m/a)^2)+((n/b)^2));
                    A=(102.4*(1-cos(m*pi))*(1-cos(n*pi)))/((pi^6)*((m*n)^3));
                    u(i,j,k)=u(i,j,k)+A*cos(lambda*t(k))*sin((m*pi*x(i))/a)*sin((n*pi*y(j))/b);
                end
            end
        end
    end
clc;
fprintf('Renderizando...')

```

```

end
clc;
fprintf('Listo!');

save Membrane_Data_Long u t

```

Segundo caso de estudio:

```

% Ecuaciones diferenciales parciales
% Jose Ramiro Fuentes Lara
% Leonardo Dario Ramirez Jaime
% Andrea Isabel Casillas Hernandez
% Jose Luis Perez Mendez
% Ejercicio 03
clc;clear;close all;

%% valores de nuestras constantes

a = 8;
b = 4;
c = sqrt(4);

x = 0:.1:a;
y = 0:.1:b;
t = [0:.02:3];

%% Definimos el ciclo

for k=1:length(t)
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
            u(i,j,k) = 0;
            m = 3;
            n = 4;
            lambda= c*pi*sqrt(((m/a)^2)+((n/b)^2));
            A = 1;
            u(i,j,k)=u(i,j,k)+A*cos(lambda*t(k))*sin((m*pi*x(i))/a)*sin((n*pi*y(j))/b);
        end
    end
end

save Membrane_Data_01 u t

```

Planteando una maya de dimensiones cuadradas correspondiendo a las longitudes presentes en nuestra membrana, siendo el parámetro mas importante el de nuestra c cuadrada. siendo para el grafeno:

$$m = 0,77mg$$

$$T = 1TPa$$

$$\rho = 1TPa$$

Para una lamina de grafeno:

$$0,77 \frac{mg}{m^2} \left(\frac{1m^2}{10000cm^2} \right) \left(\frac{1g}{1000mg} \right)$$

Procediendo a su determinación de C cuadrada:

$$C^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{1 * 10^{12} Pa}{0,77 * 10^{-7} \frac{g}{cm^2}}$$

Dicho valor será sustituido en versiones posteriores del programa.

La forma de guardar la maya es un arreglo tridimensional en el cual nuestra variable k cambia su tamaño respecto a la longitud de t y su transcurso con el tiempo, todo este ciclo realiza en proceso de renderizado el cual guarda toda la data en un fichero con el comando save seguido del nombre y las variables deseadas del fichero.

6.6. Creación de la funcion cinema

La función cinema permite obtener una animación fluida de una matriz de datos tridimensional como la mostrada en el renderizado de nuestra membrana. La función debe ser alimentada con nuestra matriz de U y t, las fronteras empíricas de máxima deflexion de nuestra membrana y el tipo de shading que se busca para la visualización de la animación.

```
function [] = cinema(Matrix,t,fronteras ,tipo)
%Funcion para visualizar graficas 3D de forma dinamica
for k = 1:length(t)
    %Se grafica nuestra funcion y se le da formato
    hold off;
    surf(Matrix(:, :, k));

    c = colorbar;
    c.Label.String = 'Rango_de_Membrana';

    switch tipo
        case 1
            shading interp;
        case 2
            shading flat;
        case 3
            shading faceted;
    end

    title ([ 'Tiempo_(s):_' num2str(t(k)) ]);
    xlabel( 'Eje_X' )
    ylabel( 'Eje_Y' )
    zlabel( 'Eje_Z' )
    zlim([-fronteras fronteras])

    caxis([-fronteras fronteras])

    pause(0.01);

    set(gcf, 'Name', 'Ecuacion_de_onda_bidimensional(Membrana)')

end
end
```

Con todas estas herramientas fue posible obtener dos casos de estudio muy interesantes en el comportamiento de las membranas y su relación con los parámetros que se utilizan en la ecuación de onda. Para

entregarlo de una forma mas comoda todos los datos generaron sus archivos después del renderizado de las imágenes los cuales son llamados con una interfaz grafica para volverlo mas cómodo para el usuario destacando solo las funciones útiles en el programa:

La función iniciar toma los valores de las bases de datos creadas por el renderizado y obtiene la información necesaria para darle formato en conjunto con la funcion cinema la cual se encarga de colocar frame por frame en nuestra GUI.

```
function Iniciar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to Iniciar (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
set(handles.status, 'String', '*_Espere_a_que_termine_la_simuacion_*');

Sh1 = get(handles.shadingInterp, 'Value');
Sh2 = get(handles.shadingFlat, 'Value');
Sh3 = get(handles.shadingFaceted, 'Value');

if (Sh1 == 1)
    Shading = 1;
elseif (Sh2 == 1)
    Shading = 2;
elseif (Sh3 == 1)
    Shading = 3;
end

a = get(handles.popupmenu1, 'Value');
lim = str2double(get(handles.limite, 'String'));

switch a

    case 1 %Varias ondas
        load Membrane_Data_01
        cinema(u,t,lim,Shading);
        set(handles.status, 'String', '_');

    case 2 %Membrana sencilla
        load Membrane_Data
        cinema(u,t,lim,Shading);
        set(handles.status, 'String', '_');

end

function Salir_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to Salir (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
clc;clear;close all;
close(gcbf);
```

7. Resultados

Ecuación de onda bidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Figura 2: Ejemplificación de Membrana



En todos los bordes $u=0$ por lo que la membrana está fija en todos los extremos:

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$$

La aceleración en el $t=0$ es de:

$$5,85 \times 10^8 \frac{m}{s^2}$$

y la velocidad en el $t=0$ es:

$$3,35 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$$

La velocidad es la primera derivada en función del tiempo y la aceleración es la segunda derivada en función del tiempo por lo que se consideran como condiciones de frontera.

$$u_t(x, y, 0) = 3,35 \times 10^{-3}$$

$$u_{tt}(x, y, 0) = 5,85 \times 10^8$$

$$u(x, y, t) = F(x) G(y) H(t) = F(x, y) G(t)$$

Método de separación de variables/del producto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \ddot{G}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_{xx} G$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F_{yy} G$$

$$F \ddot{G} = c^2 (F_{xx} G + F_{yy} G)$$

$$F \ddot{G} = c^2 G (F_{xx} + F_{yy})$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F_{xx} + F_{yy}}{F} = -\nu^2$$

$$\ddot{G} + c^2 \nu^2 G = 0$$

Ecuación de Helmholtz:

$$\begin{aligned}
F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F &= 0 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \nu^2 F &= 0 \\
F(x, y) &= H(x) Q(y) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = H''Q \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = H\ddot{Q} \\
H''Q + H\ddot{Q} + \nu^2 HQ &= 0 \\
\frac{H''Q}{HQ} + \frac{H\ddot{Q}}{HQ} + \frac{\nu^2 HQ}{HQ} &= \frac{0}{HQ} \\
\frac{H''}{H} + \frac{\ddot{Q}}{Q} + \nu^2 &= 0 \\
\frac{H''}{H} = -\frac{1}{Q} (\ddot{Q} + Q\nu^2) &= -\kappa^2 \\
H'' + \kappa^2 H &= 0 \\
\ddot{Q} + Q\nu^2 &= \kappa^2 Q \\
\ddot{Q} + Q(\nu^2 - \kappa^2) &= 0
\end{aligned}$$

considerando que:

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \nu^2 - \kappa^2 \\
\ddot{Q} + \rho Q &= 0
\end{aligned}$$

$$H'' + \kappa^2 H = 0 \quad \ddot{Q} + \rho Q = 0$$

$$H(x) = A \cos(\kappa x) + B \sin(\kappa x) \quad Q(y) = C \cos(\rho y) + D \sin(\rho y)$$

$$\begin{aligned}
u(0, y, t) = u(a, y, t) &= 0 \\
H(0) = 0 = A \cos(\kappa(0)) + B \sin(\kappa(0)) \\
A &= 0
\end{aligned}$$

Haciendo uso de las primeras dos condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}
u(0, y, t) = u(a, y, t) &= 0 \\
H(0) = 0 = A \cos(\kappa(0)) + B \sin(\kappa(0)) \\
A &= 0 \\
H(a) = 0 = B \sin(\kappa a) \rightarrow \kappa &= \frac{m\pi}{a} \quad \text{donde } m = 1, 2, 3, 4, \dots
\end{aligned}$$

$$H(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad (1)$$

Usando la 3ª y 4ª condición:

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= u(x, b, t) = 0 \\ Q(0) = 0 &= C \cos(\rho(0)) + B \text{sen}(\rho(0)) \\ C &= 0 \end{aligned}$$

$$Q(b) = 0 = D \text{sen}(\rho b) \rightarrow \rho = \frac{n\pi}{b} \quad \text{donde } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$Q(y) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (2)$$

Al tener los valores de ρ , λ y ν se hacen las relaciones: $\ddot{G} + c^2\nu^2 G = 0$, $\lambda = c\nu\rho^2 = \nu^2 - \kappa^2$

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0$$

$$\lambda = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{(6,64 \times 10^5 \frac{m}{s})\pi}{0,4m} \sqrt{(n)^2 + (m)^2}$$

$$\lambda = 5,21 \times 10^6 s^{-1} \sqrt{n^2 + m^2}$$

$$G(t) = A_n \cos(\lambda t) + B_n \text{sen}(\lambda t) \quad (4)$$

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \cos(\lambda t) + B_{mn} \sin(\lambda t)] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (5)$$

Usando la 5ª condición de frontera:

$$u_t(x, y, 0) = 3,35 \times 10^{-3}$$

Se debe derivar en función del tiempo y evaluar.

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda A_{mn} \sin(\lambda t) + \lambda B_{mn} \cos(\lambda t)] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$u_t(x, y, 0) = 3,35 \times 10^{-3} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda B_{mn}] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$B_{mn} = \frac{4(3,35 \times 10^{-3} \frac{m}{s})}{\lambda ab} \int_0^b \int_0^a \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy$$

$$a = b = 0,4m$$

$$c^2 = \frac{T}{\rho} = 4,41x10^{11} \frac{m^2}{s^2}$$

$$c = 6,64x10^5 \frac{m}{s}$$

$$B_{mn} = \frac{4 \left(3,35x10^{-3} \frac{m}{s} \right)}{\left(6,64x10^5 \frac{m}{s} \pi \sqrt{\left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{m}{a} \right)^2} \right)} \int_0^{0,4} \int_0^{0,4} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{0,4}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{0,4}y\right) dx dy$$

$$B_{mn} = \frac{1,605x10^{-8} \frac{1}{m}}{\left(\sqrt{(n)^2 + (m)^2} \right)} \int_0^{0,4} \int_0^{0,4} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{0,4}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{0,4}y\right) dx dy$$

$$B_{mn} = \frac{2,601x10^{-10}m}{mn \left(\sqrt{(n)^2 + (m)^2} \right)} (\cos(n\pi) \cos(m\pi) - \cos(n\pi) - \cos(m\pi) + 1) \quad (6)$$

Usando la última condición para encontrar la última constante:

$$u_{tt}(x, y, 0) = 5,85x10^8 \frac{m}{s^2}$$

$$u_t(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \lambda \text{sen}(\lambda t) + B_n \lambda \cos(\lambda t)] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$u_{tt}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \lambda^2 \cos(\lambda t) - B_n \lambda^2 \sin(\lambda t)] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$u_t(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \lambda^2 \cos(\lambda t) - B_n \lambda^2 \sin(\lambda t)] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$-A_n \lambda^2 = A_n'$$

$$5,85x10^8 \frac{m}{s^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$A_{mn} = -\frac{4 \left(5,85x10^8 \frac{m}{s^2} \right)}{ab \left(c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2} \right)^2} \int_0^b \int_0^a \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy$$

$$A_{mn} = -\frac{8,705x10^{-6}m}{mn(m^2 + n^2)} (\cos(n\pi) \cos(m\pi) - \cos(n\pi) - \cos(m\pi) + 1)$$

Figura 3: Ecuacion de Membrana Obtenida

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{8.705 \times 10^{-6}}{mn(m^2 + n^2)} (\cos(n\pi) \cos(m\pi) - \cos(n\pi) - \cos(m\pi) + 1) \right) \cos \left((5.21 \times 10^6 \sqrt{n^2 + m^2}) t \right) + \left(\frac{2.601 \times 10^{-10}}{mn(\sqrt{(n)^2 + (m)^2})} (\cos(n\pi) \cos(m\pi) - \cos(n\pi) - \cos(m\pi) + 1) \right) \sin \left((5.21 \times 10^6 \sqrt{n^2 + m^2}) t \right) \right] \sin \left(\frac{m\pi}{0.4} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{0.4} y \right)$$

El siguiente programa explica totalmente a detalle el comportamiento de la membrana de grafeno a las condiciones expuestas en el problema:

```
% Ecuaciones diferenciales parciales
% Jose Ramiro Fuentes Lara
% Leonardo Dario Ramirez Jaime
% Andrea Isabel Casillas Hernandez
% Jose Luis Perez Mendez
clc;clear;close all;

% valores de nuestras constantes

a = .4; %longitud
b = .4; % Valores de C
c = sqrt((1e+12)/0.77e-7);

x = 0:.05:a;
y = 0:.05:b;
t = 0:.01:10;

%% Este ciclo nos sirve para determinar los valores de nuestra u los cuales pueden ser tan
    grandes como deseemos
% El calculo suele ser algo lento as? que no recomiendo graficar aqui crear
% variable para guardar las mesh
for k=1:length(t)
    clc;
    fprintf('Renderizando... ')
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
            u(i,j,k) = 0;
            for m=1:100
                for n = 1:100
                    lambda = c*pi*sqrt((m/a)^2+((n/b)^2));
                    A = sin(m*pi*x(i)/0.4)*sin(n*pi*y(j)/0.4);
                    u(i,j,k) = u(i,j,k)+A* -((m*8.705*10^-6)/(m*n*(m^2+n^2)))*((cos(n*pi)*
                        cos(m*pi))-cos(n*pi)-cos(m*pi)+1)*cos(t(k)*(5.21*10^6*sqrt(n^2+m
```

```

^2))) + ((m*2.601*10^-10)/(m*n*sqrt(n^2+m^2)))*((cos(n*pi)*cos(m*
pi))-cos(n*pi)-cos(m*pi)+1)*sin(t(k)*(5.21*10^6*sqrt(n^2+m^2)));
end
end
end
end
end
clc;
fprintf('Listo!');
save Membrane_Data_Obtendida_Long u t

```

8. Tablas y figuras

Cuadro 2: Tipos de filtraciones en Membranas

Proceso	Tamaño o Masa de las Partículas que Retiene	Ejemplo de Partículas Retenidas	Presión Requerida
MICRO FILTRACIÓN (MF)	0.1 μm o mayores	Microorganismos, coloides, glóbulos de grasa	0.1-5 Bar
ULTRA FILTRACIÓN (UF)	0.001 μm o mayores	Proteínas y macromoléculas	1-10 Bar
NANO FILTRACIÓN (NF)	1nm o mayores (250 Dalton)	Azúcares y sales polivalentes	5-20 Bar
OSMOSIS INVERSA (OI)	0.1 nm o mayores (50 Dalton)	Sales mono y divalentes Casi todas las partículas y iones (solo atraviesa el agua)	10-100 Bar

Cuadro 3: Aplicaciones de Membrana

	Presión bar	Salinidad ppm	Aplicaciones
Muy baja	5 a 10	500 a 1500	Agua ultrapura
Baja	10 a 20	1500 a 4000	Eliminación de nitratos y sustancias orgánicas
Media	20 a 40	4000 a 10000	Procesos de separación y concentración
Alta	50 a 80	>10000	Desalación de agua del mar

Figura 4: Simulación de Onda Múltiples crestas y valles Ejemplo

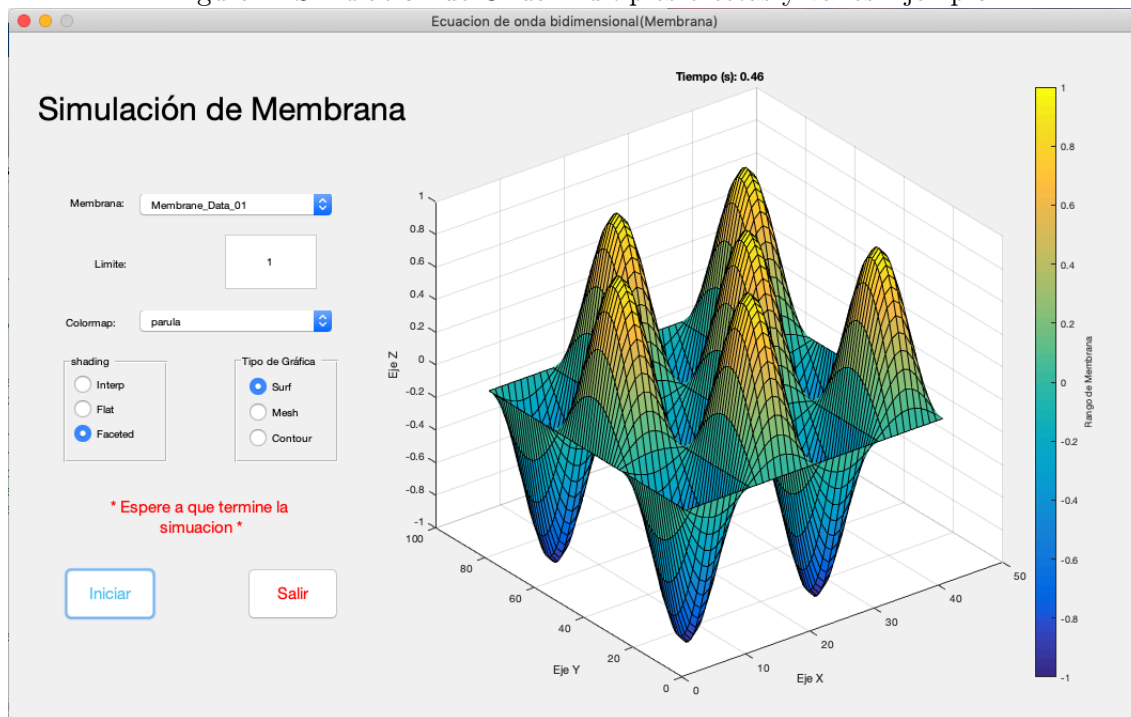


Figura 5: Simulación de Membrana sencilla

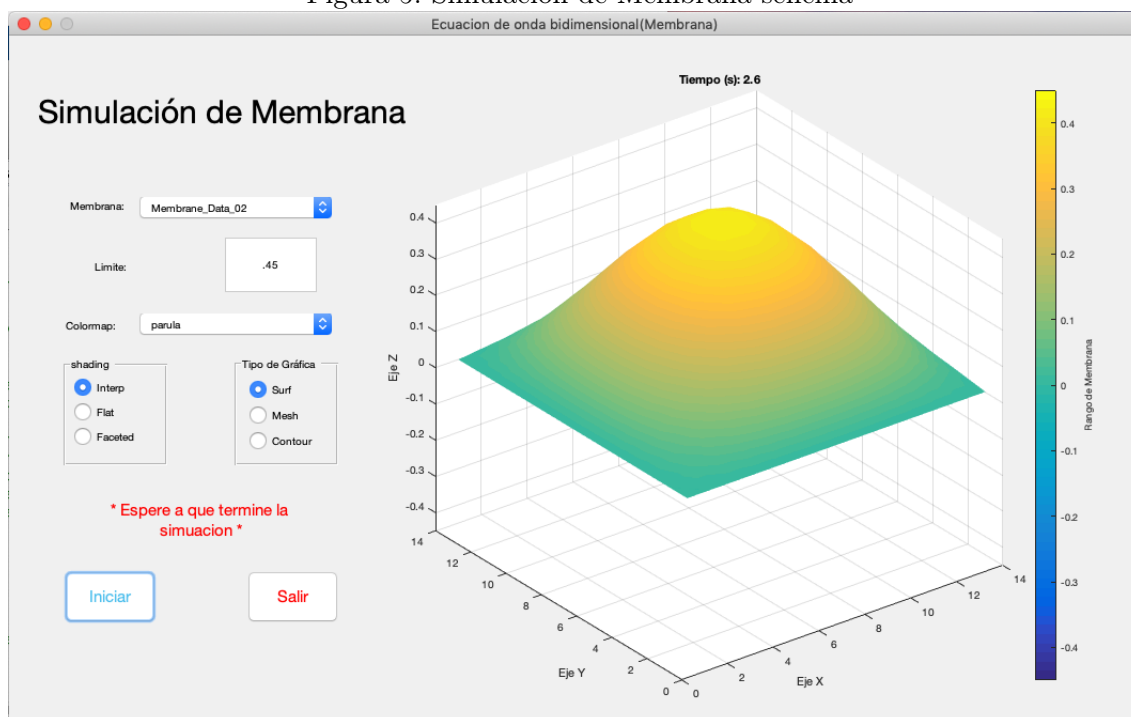


Figura 6: Simulación de Membrana caso Obtenido

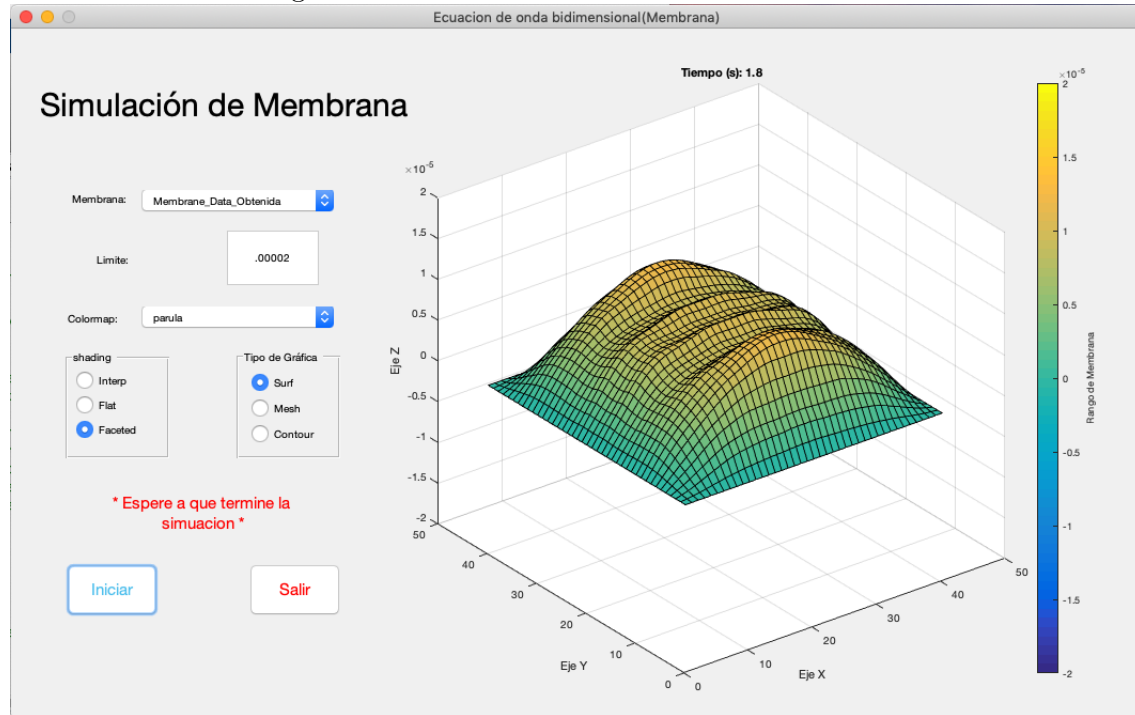


Figura 7: Simulación de Membrana caso Obtenido tiempo 3.4s

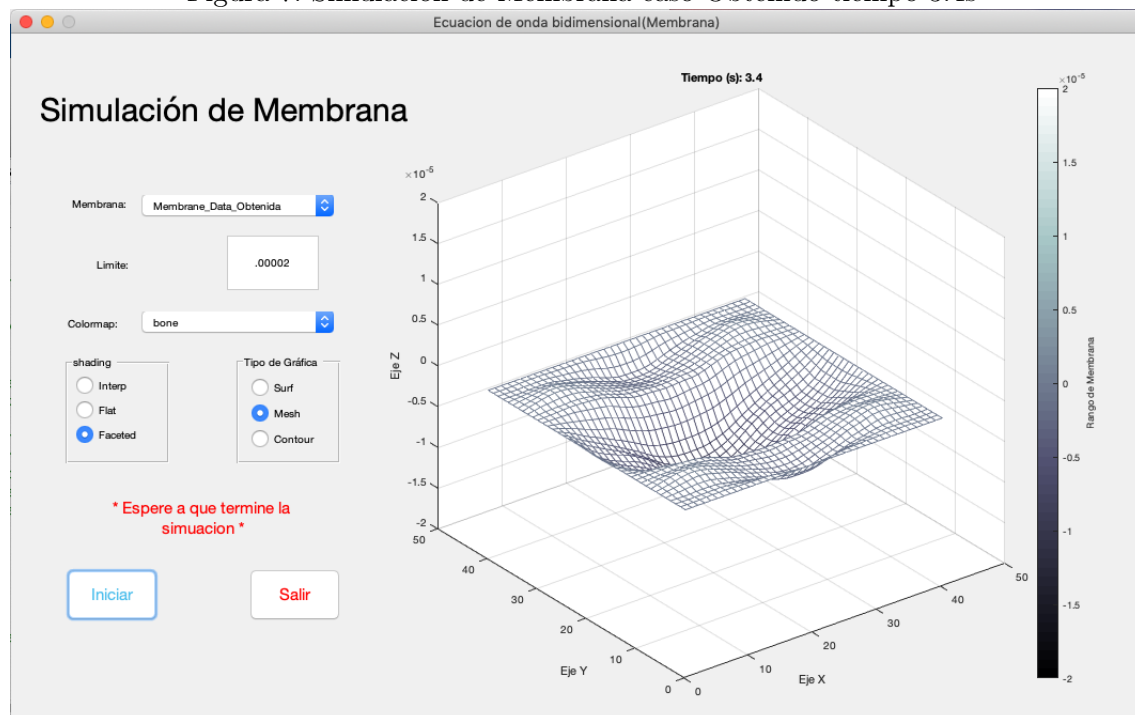
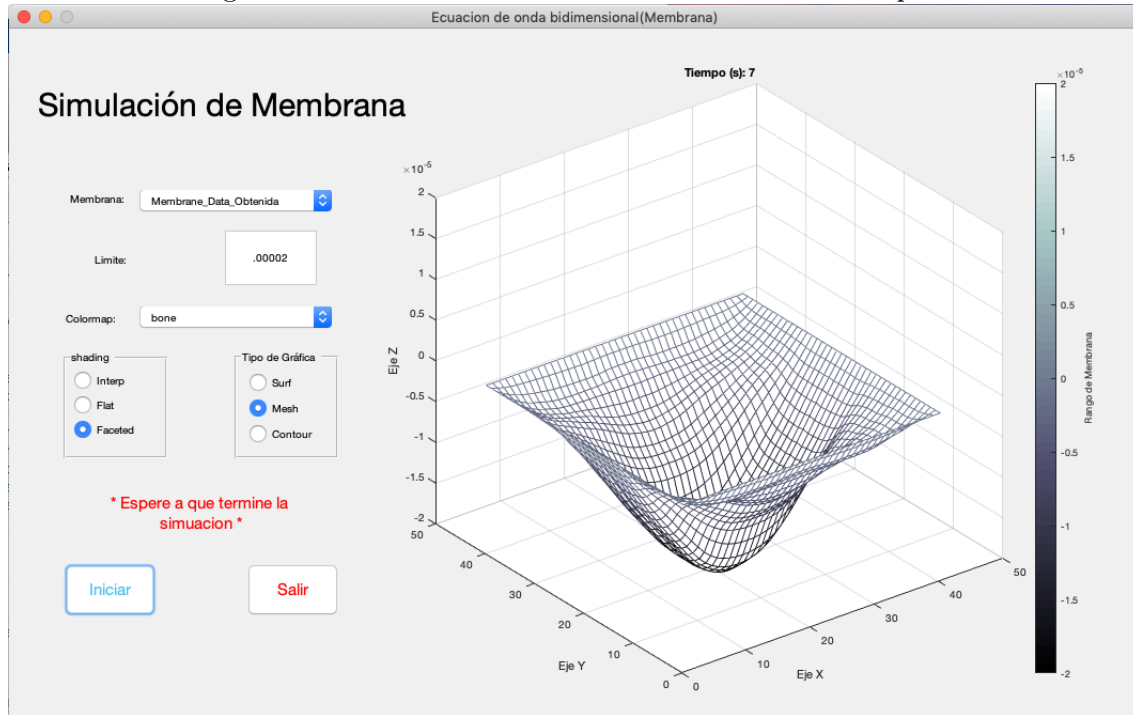


Figura 8: Simulación de Membrana caso Obtenido tiempo 7s



9. Discusión

Como se muestra en la simulación del programa, la membrana tiene un comportamiento de onda que se mueve demasiado rápido, esto se debe a que el flujo volumétrico y la aceleración son muy grandes para las dimensiones tan pequeñas de la membrana. Por lo que a las presiones que fue sometido el líquido para que alcance a purificarse también son muy altas.

El motivo por el cual se tomaron dichos valores de presión es debido a que existen varios métodos de separación, ósmosis inversa es el método que se usa para purificar agua, de manera que las presiones van en un rango desde 10-100 bar.

Al poner las condiciones de frontera, evaluar y resolver, nos tornó una ecuación demasiado diferente a las que habíamos visto con anterioridad, por lo que se llegó a la conclusión de que todo depende de las condiciones de frontera que se coloquen es la ecuación que resulta en la Figura 3.

Para el diseño del programa y la simulación el comportamiento de la membrana resultó de acuerdo con lo esperado por lo que se puede determinar que el simulador fue realizado con éxito y se lograron completar los objetivos del desarrollo del proyecto.

El programa es capaz de demostrar de forma gráfica y didáctica el comportamiento de una membrana de un material en particular, además de solo depender de su ecuación de onda bidimensional característica, se presentan simulaciones de alta calidad y gran valor para el apareamiento del curso.

A la hora de llevar esta herramienta a la industria se pueden reducir la cantidad de costos que se generarían comparándola con métodos experimentales que son mucho más costosos.

Cabe mencionar que el paso siguiente en el desarrollo de este proyecto abre un gran nicho para seguir indagando con diferentes tipos de ecuaciones de membrana para condiciones específicas sin importar el material, la tensión, la densidad o cualquier otro parámetro siempre y cuando este pueda ser incluido en nuestra ecuación de onda

10. Bibliografía

Referencias

- [1] Matthew Luckie. CScamper: a scalable, extensible packet prober for active measurement of the internet, 2010.
- [2] Dong, L. and Chen, Z. (2018). A non-dispersion strategy for large-scale production of ultra-high concentration graphene slurries in water. Nature communications. [online] Available at: <https://www.nature.com/articles/s41467-017-02580-3> [Accessed 9 Jun. 2019].
- [3] Mendez Velázquez, A. (2017). Historia del futuro: tecnologías que cambiarán nuestras vidas. 1st ed. España: Ediciones Nobel, S.A., p.58.
- [4] BBC News Mundo. (2019). El revolucionario filtro de grafeno que puede convertir agua de mar en agua potable. [online] Available at: <https://www.bbc.com/mundo/noticias-39481793> [Accessed 9 Jun. 2019].
- [5] Hernández Gervacio, C. and Quiroz Ceballos, D. (2015). Grafeno: Estado del arte.. 1st ed. [ebook] Nezahualcóyotl, Estado de México: CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATERIALES AVANZADOS, S. C., pp.17-23. Available at: <https://cimav.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1004/178/3/Tesis%20Claudia%20Hern%C3%A1ndez%20Gervacio%20Dalia%20Quiroz%20Ceballos.pdf> [Accessed 9 Jun. 2019].
- [6] Méndez, Ma. Guadalupe, Rosu, H. C & Torres, L. A. (2012). Grafeno: el alótropo más prometedor del carbono. Junio 2019, de Acta Universitaria Sitio web: <https://www.redalyc.org/html/416/41622592003/>
- [7] Rodríguez, Alba & Izquierdo, Isabel. (2016). GRAFENO: SÍNTESIS, PROPIEDADES Y APLICACIONES BIOMÉDICAS. Junio 2019, de Universidad Complutense Sitio web: <https://eprints.ucm.es/50453/1/ALBA>