O Método Simplex

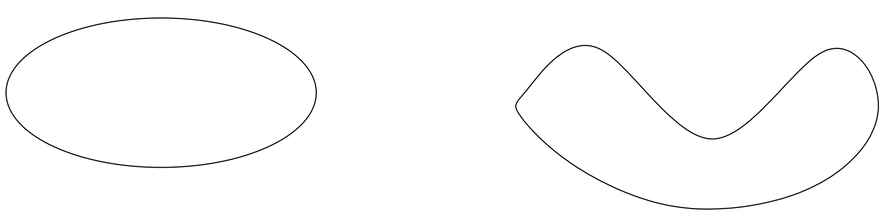
Cid C. de Souza

cid@ic.unicamp.br

Instituto de Computação – UNICAMP

Definições e Resultados Básicos

- $S \subseteq \mathbb{R}$ é convexo se e somente se todo ponto $\overline{x}$ que é uma combinação linear convexa de um par de pontos qualquer (x^1, x^2) de S também pertencer a S.



CONVEXO

NÃO CONVEXO

- Proposição: $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ é convexo.

Definições e Resultados Básicos

- Definição (geométrica):

  $\overline{x}$ é um ponto extremo de S se e somente se não existem pontos distintos x^1 e x^2 de S tal que $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 = x$ com $0 < \alpha < 1$.

- Definição (algébrica):

  Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ $\overline{x}$ não vazio, $A : m \times n$, $m \leq n$ e $\rho(A) = m$. Se $\overline{x}$ é ponto extremo de S então $\overline{x}$ satisfaz n desigualdades *linearmente independentes* de S na igualdade.

Definições e Resultados Básicos

- (algébrica $\Longrightarrow$ geométrica)
  Seja $Gx \leq g$ o subsistema linear de S com n desigualdades *LI* satisfeitas na igualdade, ou seja,

$$G\overline{x} = g, G : n \times n, \rho(G) = n.$$

Supor por contradição que $\overline{x} = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$, $x^1 \neq x^2 \in S$.

Isso implica que $G\overline{x} = \alpha Gx^1 + (1-\alpha)Gx^2 = g$.

Como $\alpha > 0$, $1-\alpha > 0$, $Gx^1 \leq g$ e $Gx^2 \leq g$, $Gx^1 = Gx^2 = g$.

Uma vez que G é inversível, isso obriga que $\overline{x} = x^1 = x^2$.

Logo, $\overline{x}$ deve ser extremo. $\square$

Definições e Resultados Básicos

- (geométrica $\Longrightarrow$ algébrica)
  Supor que $\overline{x}$ satisfaz a apenas $r < n$ desigualdades de S na igualdade. Sejam estas r desigualdades dadas por:

  $$G\overline{x} = g, G : r \times n, \rho(G) = r < n.$$

  Afirmação: Existe $d \neq 0$ tal que $Gd = 0$
  (as colunas de G são *LD*)

  Portanto, existe um escalar $\epsilon > 0$ tal que $(\overline{x} - \epsilon d)$ e $(\overline{x} + \epsilon d)$ estão ambos em S.
  Como $\overline{x} = \frac{1}{2}(\overline{x} - \epsilon d) + \frac{1}{2}(\overline{x} + \epsilon d)$, $\overline{x}$ não é extremo. $\square$

Representação de Poliedros

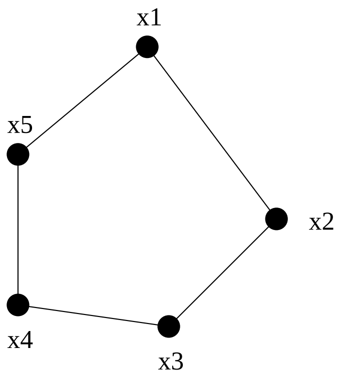
Teorema de Caratheodory:

O poliedro não vazio $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ também pode ser representado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} S = \{x \in \mathbb{R} : \quad & x = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j d^j, \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, p \\ & \mu_j \geq 0 \text{ para todo } j = 1, \ldots, q\}, \end{aligned}$$

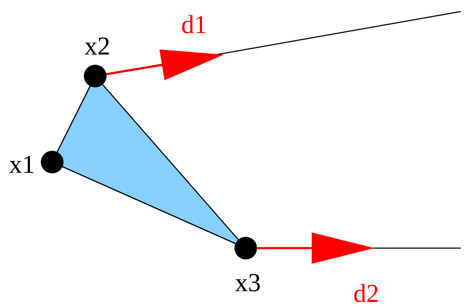
onde $\{x^1, \ldots, x^p\}$ são os pontos extremos de S e $\{d^1, \ldots, d^q\}$ são os raios extremos de S.

Representação de Poliedros



POLIEDRO LIMITADO
(POLITOPO)

POLIEDRO ILIMITADO



Soluções básicas

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

- Se $y \in S$ então y é uma solução viável.
- Supor que $A : m \times n$, $\rho(A) = m$ e $n \geq m$.

  Então, x é uma solução básica se $x_i = 0$ para todo $i = m+1, \ldots, n$ e a matriz $B = [A_{\bullet 1}\ A_{\bullet 2}\ \ldots\ A_{\bullet m}]$ é inversível.

  (assume-se que as colunas de A e as componentes de x tenham sido rearranjadas apropriadamente).

Soluções básicas

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \dots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix},$$

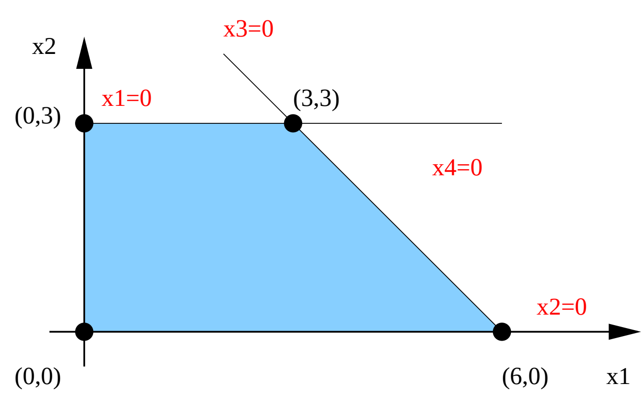
onde x_B são as variáveis básicas e x_N são as variáveis não básicas.

$$Ax = [B\ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = Bx_B + Nx_N = b \implies x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Soluções básicas (exemplos)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Soluções básicas (exemplos)

1. $B = [A_{\bullet 1} \;\; A_{\bullet 2}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é inversível.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. $B = [A_{\bullet 2} \;\; A_{\bullet 3}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é inversível.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluções básicas (exemplos)

3. $B = [A_{\bullet 2} \;\; A_{\bullet 4}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é inversível.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução inviável !

4. $B = [A_{\bullet 1} \;\; A_{\bullet 3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não é inversível.

Número de soluções básicas: $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ (exponencial !)

Soluções Básicas e Pontos Extremos

Teorema: Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Então, $\overline{x}$ é um ponto extremo de S se e somente se $\overline{x}$ é uma solução básica viável.

- (básica $\Longrightarrow$ extremo)
  Seja $\overline{x}$ uma solução básica e assuma por contradição que $\overline{x} = \alpha y + (1-\alpha)z$, $y, z \in S - \{\overline{x}\}$ e $\alpha \in (0,1)$.

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}^B \\ \cdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} y^B \\ \cdots \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} z^B \\ \cdots \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Soluções Básicas e Pontos Extremos

Como $y_{m+j} \geq 0$, $z_{m+j} \geq 0$ e $0 < \alpha < 1$, tem-se que, $y_{m+j} = z_{m+j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n-m$.
Além disso,

$$\left.\begin{array}{l} Ay = [B \;\; N][y^B \;\; 0] = By^B = b \\ Az = [B \;\; N][z^B \;\; 0] = Bz^B = b \end{array}\right\} \Longrightarrow y^B = z^B = x_B = B^{-1}b.$$

Conclui-se que $\overline{x}$ não pode ser escrita como combinação convexa estrita de dois pontos distintos de S. Logo, $\overline{x}$ é ponto extremo. $\square$

Soluções Básicas e Pontos Extremos

- (extremo $\Longrightarrow$ básica)

  Como $\overline{x}$ é extremo, existem n restrições *LI* em S que são satisfeitas na igualdade. Logo existem $n-m$ equações da forma $x_i = 0$ que são satisfeitas para $i \in N \subseteq \{1, \dots, n\}$.

  Assim, tem-se o sistema linear da forma $\overline{A}x = b, x_N = 0$ que é satisfeito por $\overline{x}$ que, na forma matricial, é dado por:

$$\overline{A}x = \begin{bmatrix} B & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Este sistema tem solução única pois as linhas de $\overline{A}$ são *LI*. Logo $\mathtt{det}(B) = \mathtt{det}(\overline{A})$ e, portanto, B é inversível e a solução do sistema acima é básica. $\square$

Pontos extremos e otimalidade

Teorema: $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ tem solução viável se e somente se S tem um ponto extremo.

Teorema: Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Considere o problema dado por $z = \min\{cx \ : \ x \in S\}$. Se z tem valor finito então existe um ponto extremo ótimo.

Além disso, se existir mais de um ponto extremo ótimo, toda combinação convexa destes pontos será uma solução ótima também.

Prova: Teorema de Caratheodory. $\square$.

Idéia do algoritmo Simplex

- Encontrar um ponto extremo ($\equiv$ solução básica).
- Sair do ponto extremo corrente e ir para um ponto extremo vizinho onde o valor da função objetivo é melhor.
- Repetir o passo anterior enquanto for possível.
- Retornar o ponto extremo corrente (solução ótima !)

$$\begin{array}{ll} \min & z = cx \\ \text{s.a.} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Solução básica:

$$Ax = b \quad \equiv \quad Bx_B + Nx_N = b \Longrightarrow$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, \quad x_N = 0$$

$$x_B = \bar{b} - \sum_{j \in N} \underbrace{B^{-1}a_{\bullet j}}_{y_j} x_j$$

Algoritmo do Simplex

- Escrever a função objetivo e as variáveis básicas em função das variáveis não básicas:

$$\begin{cases} z = cx = c_B x_B \ + \ c_N x_N = (c_B B^{-1}b - c_B B^{-1}Nx_N) \ + \ c_N x_N \\ z = \underbrace{c_B B^{-1}b}_{z_0} \ + \ \underbrace{(c_N - c_B B^{-1}N)x_N}_{\sum_{j \in N}(c_j - c_B B^{-1}a_{\bullet j})x_j} \end{cases}$$

- Reescrevendo o PL: (custos reduzidos)

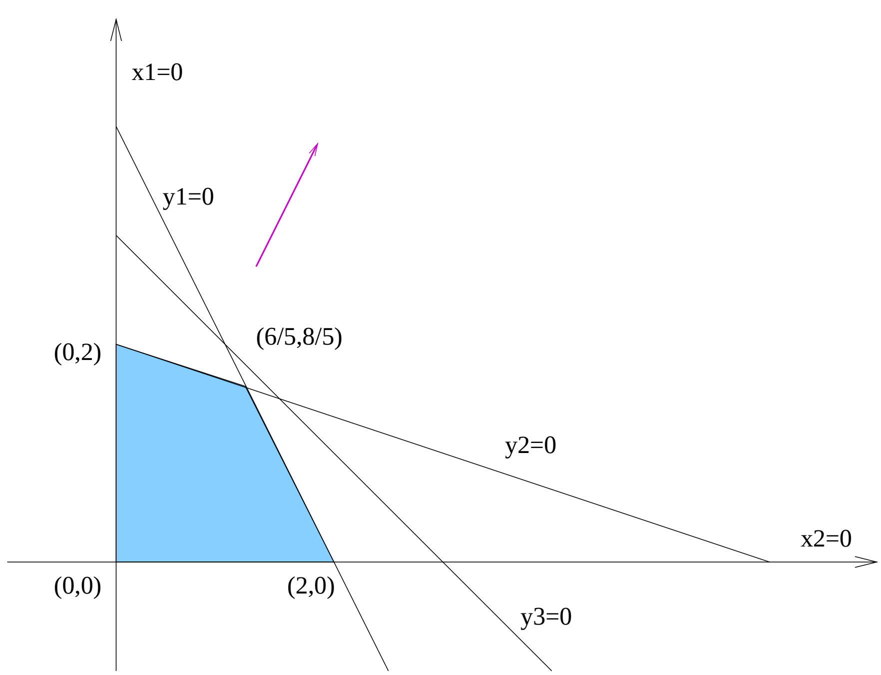
$$\begin{array}{lll} \min & z = z_0 + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) x_j & \\ \text{s.a.} & \sum_{j \in N} y_j x_j + x_B = \bar{b} & \equiv \quad \sum_{j \in N} y_j x_j \leq \bar{b} \\ & x_j \geq 0 \text{ para } j \in N, x_B \geq 0 & \quad\;\; x_j \geq 0 \text{ para } j \in N \end{array}$$

Simplex: exemplo

$$
\begin{array}{rrcrcl}
z = \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
z = \max & x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & y_1 & + & & + & & = & 4 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & & & + & y_2 & + & & = & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & y_3 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Simplex: exemplo



Simplex: exemplo

Primeira iteração: $x_1 = x_2 = 0$

variáveis básicas: y_1, y_2 e y_3:

$$\left.\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 \\ y_1 &= 4 - 2x_1 - x_2 \\ y_2 &= 6 - x_1 - 3x_2 \\ y_3 &= 3 - x_1 - x_2 \end{aligned}\right\}$$

x_2 entra na base e y_2 sai da base

Segunda iteração: $x_1 = 0, x_2 = 2$

variáveis básicas: y_1, x_2 e y_3:

$$\left.\begin{aligned} z &= 4 + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}y_2 \\ y_1 &= 2 - \tfrac{5}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}y_2 \\ x_2 &= 2 - \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}y_2 \\ y_3 &= 1 - \tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}y_2 \end{aligned}\right\}$$

x_1 entra na base e y_1 sai da base

Simplex: exemplo

Terceira iteração: $x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{8}{5}$

variáveis básicas: x_1, x_2 e y_3:

$$\left.\begin{aligned} z &= \tfrac{66}{15} - \tfrac{1}{5}y_1 - \tfrac{9}{5}y_2 \\ &\dots \end{aligned}\right\}$$

solução ótima ! $\quad (\bar{c}_j < 0, \ \forall j \in N)$

Simplex: tableau

Segunda iteração:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	RHS
z	-$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	4
y_1	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	2
y_3	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	1

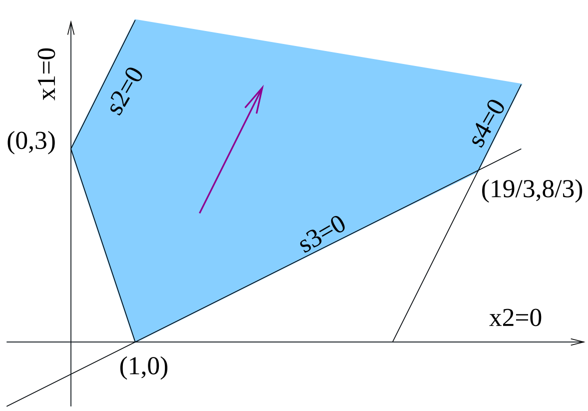
Terceira iteração:
tableau ótimo !

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	RHS
z	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{15}$	0	$\frac{66}{15}$
x_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{15}$	0	$\frac{24}{15}$
y_3	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$

Pivoteamento, operações elementares e a inversa da base.

Simplex: caso ilimitado

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
z = \min & -x_1 & - & 2x_2 & & & & & & & & & & & \\
& 3x_1 & + & x_2 & - & y_1 & & & & & & & = & 3 \\
& -2x_1 & + & x_2 & & & + & y_2 & + & & & & = & 3 \\
& x_1 & - & 2x_2 & & & & & + & y_3 & & & = & 1 \\
& 2x_1 & - & x_2 & & & & & & & + & y_4 & = & 10 \\
& x_1, & & x_2, & & y_1, & & y_2, & & y_3 & & y_4 & \geq & 0
\end{array}
$$



Simplex: caso ilimitado (cont.)

penúltima iteração:
vértice degenerado (1,0)

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	RHS
z	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	-1
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	1
y_2	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	5
y_3	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0
y_4	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	8

última iteração:
vértice degenerado (0,3)
problema ilimitado !

direção extrema: $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	RHS
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	-6
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{15}$	0	0	0
x_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	3
y_3	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{15}$	1	0	7
y_4	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0	1	13

Dualidade

Primal:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & z^* = cx \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \min & w^* = ub \\ \text{s.a} & uA \geq c \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Exemplo:

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcrcl} \max \ z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{s.a} & x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ & x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\ & & & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\ \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Dualidade (cont.)

$$
(D) \quad \begin{array}{lrcrcrcc}
\min\ w = & 6u_1 & + & 3u_2 & - & 4u_3 & & \\
\text{s.a} & u_1 & + & u_2 & & & \geq & 1 \\
& -3u_1 & - & u_2 & - & 2u_3 & \geq & 1 \\
& 4u_1 & & & + & u_3 & = & 1 \\
& u_1 \in \mathbb{R} & , & u_2 \geq 0 & , & u_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Existe uma variável dual para cada restrição do primal e vice-versa.

Proposição: O dual do dual é o primal

Dualidade (cont.)

Proposição: (Dualidade Fraca)
Se $\overline{x}$ é uma solução primal viável e $\overline{u}$ é uma solução dual viável então $c\overline{x} \leq z^* \leq w^* \leq \overline{u}b$.

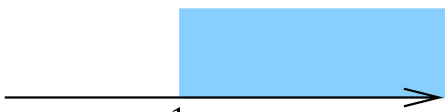
Relação entre os valores ótimos primal e dual:

1. se $z^* \to \infty$ (P ilimitado) então D é inviável.
2. se $w^* \to -\infty$ (D ilimitado) então P é inviável.
3. se P e D são ambos limitados então $z^* = w^*$ (Dualidade Forte).
4. P e D são ambos inviáveis.

Relações entre o primal e o dual

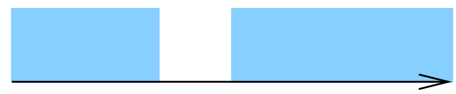
Primal: Ilimitado

$$\begin{array}{ll} \max & z = x \\ \text{s.a} & x \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



Dual: Inviável

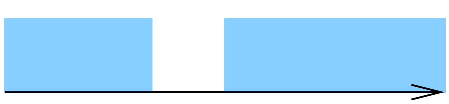
$$\begin{array}{ll} \min & w = -u \\ \text{s.a} & u \leq -1 \\ & u \geq 0 \end{array}$$



Relações entre o primal e o dual

Primal: Inviável

$$\begin{array}{ll} \max & z = x \\ \text{s.a} & x \leq -3 \\ & x \geq 0 \end{array}$$



Dual: Ilimitado

$$\begin{array}{ll} \min & w = -3u \\ \text{s.a} & u \geq 1 \\ & u \geq 0 \end{array}$$

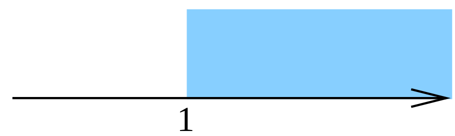
Relações entre o primal e o dual

Primal: Limitado

$$\begin{array}{ll} \max & z = x \\ \text{s.a} & x \leq 5 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual: Limitado

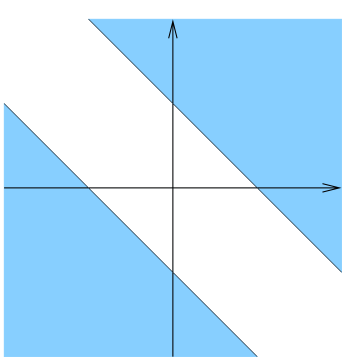
$$\begin{array}{ll} \min & w = 5u \\ \text{s.a} & u \geq 1 \\ & u \geq 0 \end{array}$$



Relações entre o primal e o dual

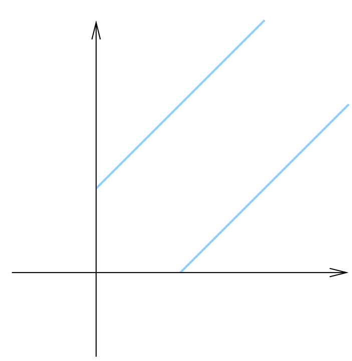
Primal: Inviável

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 - x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$



Dual: Inviável

$$\begin{array}{ll} \min & w = -u_1 - u_2 \\ \text{s.a} & u_1 - u_2 = 1 \\ & u_1 - u_2 = -1 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$



Complementaridade de Folgas

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} \max & z^* = cx \\ \text{s.a} & Ax + s = b \\ & x \geq 0, s \geq 0 \end{array}
\qquad\qquad
(D) \quad \begin{array}{ll} \min & w^* = ub \\ \text{s.a} & uA - t = c \\ & u \geq 0, t \geq 0 \end{array}
$$

Teorema das Folgas Complementares: (x^*, s^*) é uma solução ótima de P e (u^*, t^*) uma solução ótima de D se e somente se, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x_j^* t_j^* = 0$ e, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $u_i^* s_i^* = 0$.

Prova: ($\Rightarrow$) u^* é viável para D, logo $u^*A - t^* = c$.
Como $x^* \geq 0$, $(u^*A - t^*)x^* = cx^*$.
Reescrevendo chega-se a: $u^*Ax^* - t^*x^* = cx^*$.
Como x^* é viável para P, tem-se: $u^*(b - s^*) - t^*x^* = cx^*$.
Pela dualidade forte, conclui-se que: $u^*s^* + t^*x^* = 0$.
Como $x^*, s^*, u^*, t^* \geq 0$ o resultado fica mostrado. $\square$

Complementaridade de Folgas (cont.)

Prova: ($\Leftarrow$) Como (x^*, s^*) e (u^*, t^*) são viáveis para P e D respectivamente, tem-se:

$$cx^* = (u^*A - t^*)x^* = u^*Ax^* - t^*x^* = u^*Ax^*$$

ou ainda

$$cx^* = u^*(b - s^*) = u^*b - u^*s^* = u^*b.$$

Pela dualidade fraca, (x^*, s^*) deve ser uma solução ótima de P e (u^*, t^*) deve ser uma solução ótima de D. $\square$

Bases duais viáveis

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & z^* = cx \\ \text{s.a} & Ax = b, x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \min & w^* = ub \\ \text{s.a} & uA \geq c \end{array}$$

Solução básica primal: $Ax = Bx_B + Nx_N = b$

$$z = cx = c_B x_B + c_N x_N = c_B B^{-1} b + \underbrace{(c_N - c_B B^{-1} N)}_{\text{custos reduzidos}} x_N.$$

Definir: $u = c_B B^{-1}$ e $t = uA - c$ (folgas duais).

Proposição: u é complementar a $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, i.e., $xt = 0$.

Prova: $x(uA - c) = (x_B \mid x_N)(uB - c_B \mid uN - c_N) =$
$(x_B \mid x_N)(c_B B^{-1} B - c_B \mid c_B B^{-1} N - c_N) = 0$ $\square$

Bases duais viáveis

Definição: Se $c_B B^{-1} N \geq c_N$ então B é uma base dual viável.

Nota 1: $c_B B^{-1} N \geq c_N \;\equiv\;$ custos reduzidos negativos.

Nota 2: Uma base pode ser só primal viável, só dual viável, nem primal e nem dual viável ou simultaneamente primal e dual viável.

Proposição: Se B é uma base primal e dual viável então $(x_B \mid x_N) = (B^{-1}b \mid 0)$ é ótima para P e $u = c_B B^{-1}$ é ótima para D.

Prova: $z^* \geq cx = c_B B^{-1} b$ e $w^* \leq ub = c_B B^{-1} b$
Pela dualidade fraca, $z^* \leq w^*$, logo $z^* = w^*$ $\square$

Primal-Simplex formalizado

Definição: as bases B e B' são adjacentes se $|B \setminus B'| = |B' \setminus B| = 1$.

Movendo de uma base para outra: aumenta uma variável não básica mantendo-se as outras em zero.

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \implies x_B + B^{-1}a_{\bullet r}x_r = \bar{b} \implies \boxed{x_B + y_r x_r = \bar{b}}$$

1. Se para todo $i = 1, \ldots, m$, $(y_r)_i \leq 0$, x_r cresce indefinidamente e a base não muda.

2. Se para algum $j \in \{1, \ldots, m\}$, $(y_r)_j > 0$, escolher

   $s \in \{1, \ldots, m\}$ tal que: $$\frac{\bar{b}_s}{(y_r)_s} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{(y_r)_i} \ : \ (y_r)_i > 0 \right\}$$

Primal-Simplex (cont.)

x_r entra na base com valor $\frac{\bar{b}_s}{(y_r)_s}$ e $(x_B)_s$ sai da base.

Definição: uma soluçao primal viável é degenerada se $x_B = \bar{b}$ e $\bar{b}_i = 0$ para algum $i = 1, \ldots, m$.

Observação: se não existir nenhuma base degenerada então, definida uma variável não-básica para entrar na base, só haverá uma variável básica candidata a sair da base.

Primal-Simplex (cont.)

Corolário: Seja B uma base não degenerada primal viável mas dual inviável, i.e., existe x_r não básica com custo reduzido $\overline{c}_r = c_r - c_B B^{-1} a_{\bullet r} = c_r - c_B y_r > 0$.

1. Se $y_r \leq 0$ então $z^* \to \infty$ (primal ilimitado).
2. Se $\exists s$ tal que $(y_r)_s > 0$ então é possível mover para uma <u>única</u> base $B^{(r)}$ de melhor custo.

Prova:

1. $x_B = \overline{b} - y_r x_r$, logo $z = z_0 + \overline{c}_r x_r > z_0$ e, portanto, $z \to \infty$ quando $x_r \to \infty$.

2. Na base $B^{(r)}$, o custo será $c_{B^{(r)}} x_{B^{(r)}} = z_0 + \overline{c}_r x_r > z_0 = c_B x_B$. $\square$

Primal Simplex: Fase 2

Passo 1: encontrar base primal viável B (FASE 1).

Passo 2: se $(c_N - c_B B^{-1} N) \leq 0$, PARE !
Retorne a solução ótima $x_B = B^{-1} b, x_N = 0$.
Se não (pricing) escolher r tal que $\overline{c}_r = c_r - c_B B^{-1} a_{\bullet r} > 0$.
Se $y_r = B^{-1} a_{\bullet r} \leq 0$, PARE ! Retorne "problema ilimitado".
Se não, escolher s tal que $(y_r)_s > 0$ e $\frac{\overline{b}_s}{(y_r)_s} = \min_{(y_r)_i > 0} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{(y_r)_i} \right\}$.
($\star$ s sai da base e r entra na base $\star$)
Executar troca de base (pivoteamento): $B \leftarrow B \setminus \{B_{\bullet s}\} \cup \{a_{\bullet r}\}$.
Voltar ao Passo 1.

Proposição: Não havendo soluções básicas degeneradas, o algoritmo primal simplex temina em um número finito de passos.

Primal Simplex: Fase 1

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & z = cx \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(supor $b \geq 0$)

$$(P_a) \quad \begin{array}{ll} \max & z_a = (-\mathbb{1})x^a \\ \text{s.a} & Ax + Ix^a = b \\ & x \geq 0, x^a \geq 0 \end{array}$$

(x^a: variáveis artificiais)

Observações:

- P_a é viável pois tem solução básica dada por $x^a = b$ e $x = 0$. Pode ser resolvido pela Fase 2 !
- P_a é limitado ($z_a \leq 0$), portanto tem solução ótima em um vértice.
- (x, x^a) é viável para P_a e x viável para P se e somente se $x^a = 0$. Se $z_a < 0$, P_a não tem solução viável com $x_a = 0$ e P é inviável.

Primal Simplex: Fase 1 (cont.)

Observações:

- Se $z_a = 0$, toda solução ótima (x, x^a) de P_a satisfaz $x^a = 0$ com x viável para P.
- No caso anterior, se todas as variáveis artificiais são não básicas, a base ótima de P_a é uma base viável para P. Pode-se remover as variáveis artificiais do problema !
- Mas, é possível que algumas variáveis artificiais fiquem na base com o valor zero (base degenerada). Neste caso, se elas não forem removidas por pivoteamento, existem restrições redundantes no sistema $Ax = b$.

Algoritmo Dual Simplex

Comparativo entre os algoritmos Primal e Dual Simplex:

- Primal Simplex: visita bases primais viáveis até que a base corrente se torne dual viável (custos reduzidos ≤ 0).
- Dual Simplex: visita bases duais viáveis até que a base corrente se torne primal viável (variáveis básicas ≥ 0).

Proposição: Se B uma base dual viável e $\bar{b}_s < 0$ para algum s, então

1. Se $(y_s)_j \geq 0$ para todo $j \in N$ (não básica) então o problema é primal inviável.
2. Se não, existe uma base dual viável $B^{(r)}$ adjacente à base B corrente dada por $B^{(r)} = B \cup \{a_{\bullet r}\} \setminus \{B_{\bullet s}\}$ satisfazendo $r \in N$, $(y_s)_r < 0$ e $r = \arg\min_{j \in N} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{(y_s)_j} \; : \; (y_s)_j < 0 \right\}$.

Algoritmo Dual Simplex (cont.)

Prova:

1. $x_B + B^{-1}N x_N = \bar{b} \Longrightarrow (x_B)_s = \bar{b}_s - \sum_{j \in N} (y_s)_j x_j = \bar{b}_s < 0$
Se $(y_s)_j \geq 0$ para todo $j \in N$, toda solução com $x_j \geq 0$ para todo $j \in N$ satisfaz $(x_B)_s < 0$. $\square$

2. Se x_r entra na base e $(x_B)_s$ sai, então

$$z = z_0 + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \underbrace{- \lambda[(x_B)_s + \sum_{j \in N} (y_s)_j x_j] + \lambda \bar{b}_s}_{= 0 \text{ (linha do tableau !)}}$$

$$z = z_0 + \lambda \bar{b}_s + \sum_{j \in N} [\bar{c}_j - \lambda (y_j)_s] x_j - \lambda (x_B)_s, \qquad \text{onde } \lambda = \frac{\bar{c}_r}{(y_s)_r} \geq 0.$$

A base $B^{(r)}$ é dual viável pois: $\lambda \geq 0$ (custo reduzido de $(x_B)_s$),
$\bar{c}_j - \lambda (y_s)_j \leq \bar{c}_j \leq 0$ para todo j tal que $(y_j)_s \geq 0$ e, pela escolha de r,
$\bar{c}_j - \lambda (y_s)_j \leq 0$ para todo j satisfazendo $(y_s)_j < 0$. $\square$

Algoritmo Dual Simplex

Passo 1: encontrar base dual viável B (FASE 1).

Passo 2: se B é primal viável, i.e., se $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$, PARE !
Retorne a solução ótima (primal) $x_B = B^{-1}b, x_N = 0$.
Se não (pricing) escolher s tal que $(x_B)_s < 0$.
Se $(y_s)_j \geq 0$ para todo $j \in N$, PARE !
Retorne “problema inviável”.
Se não, escolher r tal que $r = \arg\min_{j \in N} \left\{ \frac{\overline{c}_j}{(y_s)_j} : (y_s)_j < 0 \right\}$
($\star$ s sai da base e r entra na base $\star$)
Executar troca de base (pivoteamento): $B \leftarrow B \setminus \{B_{\bullet s}\} \cup \{a_{\bullet r}\}$.
Voltar ao Passo 1.

Dual Simplex: (cont.)

Observações:

- A função objetivo do problema primal é monotonamente decrescente ao contrário do primal simplex.
- O valor do decréscimo ao mudar a base é de $\left| \frac{\overline{c}_r \overline{b}_s}{(y_s)_r} \right|$.
- Não havendo degenerescência no problema dual, $\overline{c}_r < 0$ e o decréscimo é estrito.
  Logo o algoritmo termina em tempo finito !

Dual Simplex: exemplo

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
z = \max & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & & & & & \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & = & 3 \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & - \; x_5 & = & 4 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	2	3	4	0	0	0
x_4	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	-2	1	-3	0	1	-4

Dual Simplex: exemplo (cont.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	4	1	0	1	-4
x_4	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{28}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$

solução ótima !

Tableau e variáveis duais

$$z = c_B x_B + c_N x_N = z_0 + \sum_{j \in N} (c_j - \underbrace{c_B B^{-1}}_{u} a_{\bullet j}) x_j$$

Se existirem colunas na matriz original A que formam uma matriz identidade e que correspondam a variáveis de folga (custos nulos), no tableau ótimo teremos nestas colunas que:

$$\bar{c}_j = -u_j^*,$$

ou seja, na linha correspondente à função objetivo e nas colunas correspondentes à identidade teremos as variáveis duais ótimas.

Primal ou Dual Simplex ?

- se $\bar{c}_j \leq 0$ para todo $j \in N$ e $\bar{b}_i \geq 0$ para todo $i \in B$ então a solução é ótima. Nada há a fazer !
- se $\bar{c}_j \leq 0$ para todo $j \in N$ e $\exists i \in B$ tal que $\bar{b}_i < 0$ então Primal Simplex tem Fase 1 mas o Dual Simplex passa direto à Fase 2 !
- se $\exists j \in N$ tal que $\bar{c}_j > 0$ e $\bar{b}_i \geq 0$ para todo $i \in B$ então Dual Simplex tem Fase 1 mas o Primal Simplex passa direto à Fase 2 !
- se $\exists j \in N$ tal que $\bar{c}_j > 0$ e $\exists i \in B$ tal que $\bar{b}_i < 0$ então Primal e Dual Simplex tem Fase 1.

Adição de nova restrição após otimização

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \max & z = cx \\ \text{s.a} & Ax = b \quad (A : m \times n) \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (2) \quad \begin{array}{ll} \max & z' = cx \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & dx \leq d_0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Base ótima para (1): $A = (B \mid N), x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N = 0.$
- Folga da nova restrição: $dx + x_{n+1} = d_0$, $x_{n+1} \geq 0$.
- Uma base para (2): $B' = B \cup \{a_{\bullet,n+1}\}$, onde $a_{\bullet,n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_{m+1}$.

Adição de nova restrição (cont.)

- Usando a antiga base B podemos escrever x_{n+1} como função de x_N:

$$\begin{aligned} dx + x_{n+1} &= (d_B|d_N) \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} + x_{n+1} = d_B x_B + d_N x_N + x_{n+1} \\ &= d_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + d_N x_N + x_{n+1} = d_0. \end{aligned}$$

- Linha do novo tableau: $x_{n+1} + (d_N - d_B B^{-1} N)x_N = d_0 - d_B\bar{b}$.
- Novo tableau: ($x_B, x_N, x_{n+1} \geq 0$ e c'_N = novos custos reduzidos)

$$\begin{array}{ccccccccc} z' & + & 0x_B & + & 0x_{n+1} & + & c'_N x_N & = & c_B\bar{b} \\ & & x_B & & & + & B^{-1}Nx_N & = & \bar{b} \\ & & & & x_{n+1} & + & (d_N - d_B B^{-1}N)x_N & = & d_0 - d_B\bar{b} \end{array}$$

- Essa solução é primal viável ?

Adição de nova restrição (cont.)

Proposição: A nova base B' é dual viável.

Prova:

$$B' = \begin{bmatrix} & 0 \\ B & \vdots \\ & 0 \\ d_B & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (B')^{-1} = \begin{bmatrix} & 0 \\ B^{-1} & \vdots \\ & 0 \\ -d_B B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

custos reduzidos:

$c'_N = c_N - c_{B'}(B')^{-1}N'$, onde $N' = \begin{bmatrix} N \\ d_N \end{bmatrix}$ e $c_{B'} = [c_B \mid 0]$.

Adição de nova restrição (cont.)

Prova: (cont.)

$$c_{B'}(B')^{-1} = [c_B \mid 0] \begin{bmatrix} & 0 \\ B^{-1} & \vdots \\ & 0 \\ -d_B B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = [c_B B^{-1} \mid 0].$$

Logo, $c_{B'}(B')^{-1}N' = c_B B^{-1} N$, ou seja, os custos reduzidos das variáveis não básicas permanecem inalterados !

Portanto, a nova base ainda é dual viável. $\square$

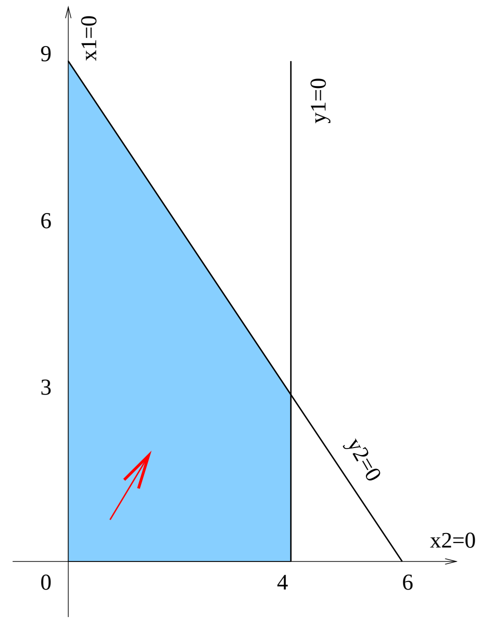
Conclusão: após adicionar uma nova restrição, deve-se dar preferência ao uso do algoritmo dual simplex !

Adição de nova restrição: exemplo

$$
\begin{array}{rrcrcr}
z = \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
 & x_1 & & & \geq & 4 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Folga da primeira restrição: y_1.

Folga da segunda restrição: y_2.



Adição de nova restrição: exemplo

Tableau ótimo !

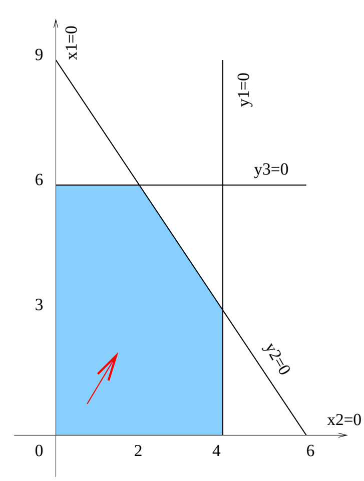
Inversa da base: B^{-1}

	x_1	x_2	y_1	y_2	RHS
z	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	45
y_1	1	0	1	0	4
x_2	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	9

Nova restrição:

$x_2 \leq 6 \quad \equiv \quad x_2 + y_3 = 6,$

com $y_3 \geq 0$.



Adição de nova restrição: exemplo

Novo Tableau:

Escrever y_3 em função das variáveis não-básicas.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	RHS
z	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	45
y_1	1	0	1	0	0	4
x_2	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	9
y_3	0	1	0	0	1	6

Base não é primal viável mas é dual viável.

Usar o dual simplex !

$(B')^{-1}$: colunas y_1, y_2, y_3.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	RHS
z	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	45
y_1	1	0	1	0	0	4
x_2	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	9
y_3	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	-3

Adição de nova restrição: exemplo

Base é primal viável e é dual viável.

Tableau ótimo !

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	RHS
z	0	0	0	1	3	36
y_1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
x_2	0	1	0	0	1	6
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2

Simplex para variáveis limitadas

$$(P)\quad \begin{array}{lll} \max & z = cx & \\ \text{s.a} & Ax = b & (u) \\ & x \geq 0 & \\ & x \leq h & (v) \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \min & w = ub + vh \\ \text{s.a} & uA + v \geq c \\ & v \geq 0 \end{array}$$

$$\text{Folgas: } \begin{cases} \text{Primal:} & s = h - x, \qquad s \geq 0 \\ \text{Dual:} & t = uA + v - c, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Definição: Uma partição das colunas de A tal que $A = [B \mid N_1 \mid N_2]$ corresponde a uma solução básica $[x_B \mid x_{N_1} \mid x_{N_2}]$ se B é inversível, $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} = h_{N_2}$ e $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_2 x_{N_2} - B^{-1}N_1 x_{N_1}$.

A solução básica será viável se $0 \leq B^{-1}(b - N_2 h_{N_2}) \leq h_B$.

Simplex para variáveis limitadas (cont.)

- Existem dois tipos de variáveis não básicas: as que estão no seu limite inferior (x_{N_1}) e as que estão no seu limite superior (x_{N_2}).
- Escrevendo a F.O. em função das variáveis não-básicas (VNB):

$$z = cx = [c_B \mid c_{N_1} \mid c_{N_2}] \begin{bmatrix} x_B \\ x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{bmatrix} = c_B x_B + c_{N_1} x_{N_1} + c_{N_2} x_{N_2}$$

ou ainda

$$z = c_B B^{-1} b + \underbrace{(c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2) x_{N_2}}_{\substack{\text{custos reduzidos das} \\ \text{VNB no limite superior}}} + \underbrace{(c_{N_1} - c_B B^{-1} N_1) x_{N_1}}_{\substack{\text{custos reduzidos das} \\ \text{VNB no limite inferior}}}$$

Simplex para variáveis limitadas (cont.)

Para uma solução básica temos as seguintes folgas:

- Dual: $t = [t_B \mid t_{N_1} \mid t_{N_2}]$.
- Primal: $s = [s_B \mid s_{N_1} \mid s_{N_2}]$ com $s_{N_1} = h_{N_1}$ e $s_{N_2} = 0$.

Proposição: Seja B uma base e $u = c_B B^{-1}$. Se $v_B = 0$, $v_{N_1} = 0$ e $v_{N_2} = c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2$ então (u, v) é complementar a x, ou seja, $xt = 0$ e $vs = 0$.

Prova:

$$t_B = uB + v_B - c_B = c_B B^{-1} B + v_B - c_B = 0$$
$$t_{N_1} = uN_1 + v_{N_1} - c_{N_1} = c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1}$$
$$t_{N_2} = uN_2 + v_{N_2} - c_{N_2} = c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2} + c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2 = 0$$

Logo, $xt = [x_B \mid 0 \mid x_{N_2}][0 \mid c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1} \mid 0]^t = 0$.
Por outro lado, $vs = [0 \mid 0 \mid c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2][s_B \mid s_{N_1} \mid 0]^t = 0$.

$\square$

Simplex para variáveis limitadas (cont.)

Proposição: As variáveis duais u e v com os valores definidos tais como na proposição anterior formam uma solução dual viável se e somente se $c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2 \geq 0$ e $c_{N_1} - c_B B^{-1} N_1 \leq 0$.

Observação: (u, v) é dual viável se e somente se o custo reduzido das variáveis no limite inferior é ≤ 0 e o custo reduzido das variáveis no limite superior é ≥ 0.

Bases adjacentes:

1. $B' = (B \setminus a_{\bullet s}) \cup a_{\bullet r}$ onde x_r é uma VNB e $r \in N_1 \cup N_2$.
2. $B' = B$ (a base não muda) mas $|N_1' \setminus N_1| + |N_2' \setminus N_2| = 1$, ou seja, alguma VNB passa do seu limite superior para o seu limite inferior ou vice-versa !

Simplex para variáveis limitadas (cont.)

Observações finais:

- Os algoritmos primal e dual simplex necessitam de pequenas modificações para passarem a tratar o caso de variáveis limitadas.
- A vantagem de usar esta versão modificada dos algoritmos é que pode-se tabalhar com uma base de dimensão menor ($m \times m$ em vez de $(m + n) \times (m + n)$. Menos memória !
- As formulações de Programação Linear Inteira de problemas de otimização combinatória usualmente trabalham com variáveis binárias.

  Os algoritmos de PLI resolvem vários PLs onde estas variáveis são limitadas inferiormente por *ZERO* e superiormente por *UM !* Logo vale a pena usar o algoritmo modificado !