Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Computação - IC
MO824 - Tópicos em Otimização Combinatória

Combinatória Poliédrica – Parte III
O Problema do Caixeiro Viajante (TSP)

Cid Carvalho de Souza

2º semestre de 2006

O problema simétrico do caixeiro viajante (STSP)

Formulação:

Dado o grafo $G = (V, E)$, com $n = |V|$ e custo c_e para cada $e \in E$ temos:

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = \sum_{e \in E} c_e x_e & \\
s.a. & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 & \forall\, i \in V \qquad (\star) \\
 & \sum_{e \in E(U)} \leq |U| - 1 & \forall\, U \subset V, \\
 & & 3 \leq |U| \leq \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor \\
 & x \in \mathbb{B}^{|E|} &
\end{array}
$$

Observações:

- o número de desigualdade de eliminação de subciclos é $O(2^n)$.
- para resolver o TSP, começa-se com uma formulação que use apenas as desigualdades de grau e a relaxação linear de $x \in \mathbb{B}^{|E|}$.
- aplica-se então um algoritmo de *planos de corte* onde são separadas as desigualdades de subciclos.

O problema simétrico do caixeiro viajante (STSP)

Como separar desigualdades de subciclo eficientemente ?

Proposição:

Seja x^* um ponto do poliedro descrito por $\{x \in \mathbb{R}^{|E|} : x \text{ satisfaz } (\star) \text{ e } 0 \leq x \leq \mathbb{1}\}$. Se $W \subseteq V$ então

$$\sum_{e \in E(W)} x_e^* = |W| - 1 + \epsilon \iff \sum_{e \in \delta(W)} x_e^* = 2 - 2\epsilon.$$

Logo, se x^* viola a desigualdade de subciclo do conjunto W, x^* viola a desigualdade $\sum_{e \in \delta(W)} x_e \geq 2$. Assim, para determinar se existe uma desigualdade de subciclo violada, deve-se resolver o seguinte problema:

$$\xi = \min\{ \sum_{e \in \delta(U)} x_e^* : U \subset V, 3 \leq |U| \leq \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor \}. \quad (1)$$

O problema simétrico do caixeiro viajante (STSP)

Haverá uma desigualdade de subciclo violada por x^* *se e somente se* $\xi < 2$ em (1) ! Assim, para determinar se existe ou não uma desigualdade violada, poderíamos resolver $O(n^2)$ problemas de corte mínimo – fluxo máximo. *Isto pode ser feito em tempo polinomial !*
Poderíamos diminuir ainda o número de problemas a resolver se notarmos que (1) equivale a:

$$\xi = \min\{ \sum_{e \in \delta(U)} x_e^* : 1 \in U, U \subset V, 3 \leq |U| \leq |V| - 3\}. \quad (2)$$

Por outro lado, podemos notar ainda que resolver (2) equivale a resolver:

$$\xi = \min\{ \sum_{e \in \delta(U)} x_e^* : \{1, 2, \ldots, j-1\} \subset U, j \in \overline{U}, 3 \leq |U| \leq |V| - 3 \rfloor\}, \quad (3)$$

para $j = 2, \ldots, |V| - 2$. Ou seja, resolve-se $|V| - 3$ problemas de fluxo !

O problema simétrico do caixeiro viajante (STSP)

Equivalência entre Separação e Otimização (linhas gerais)

Grötschel, Lovàsz e Schrijver provaram que a complexidade computacional de resolver o problema de otimização para um determinado poliedro P é equivalente àquela de se resolver o problema de separação para o mesmo poliedro.

Então, para o caso do STSP, isso significa que se P é o poliedro formado por todas as restrições de grau, todas desigualdades triviais e todas desigualdades de eliminação de subciclos, **mesmo o número de restrições sendo exponencial em n**, o ótimo da relaxação (P) **pode ser obtido em tempo polinomial** usando um algoritmo de planos de corte !

Separação de subciclos para o STSP

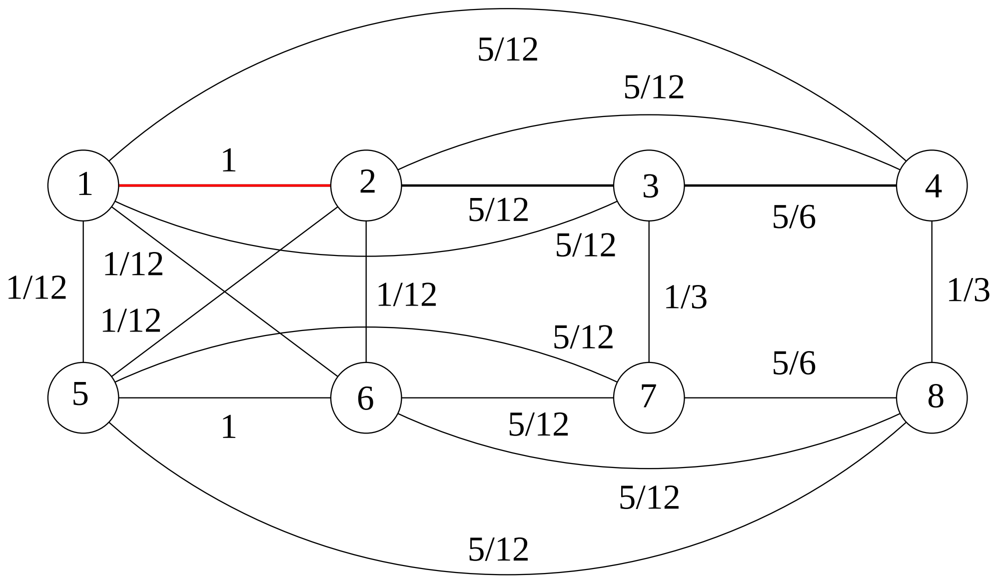
Reduzindo o tamanho da instância para a separação:

Para uma solução ótima x^* da relaxação, construir o grafo $G(x^*) = (V, E(x^*))$ onde $e \in E(x^*) \iff x_e^* > 0$.

Caso trivial: $G(x^*)$ não é conexo !

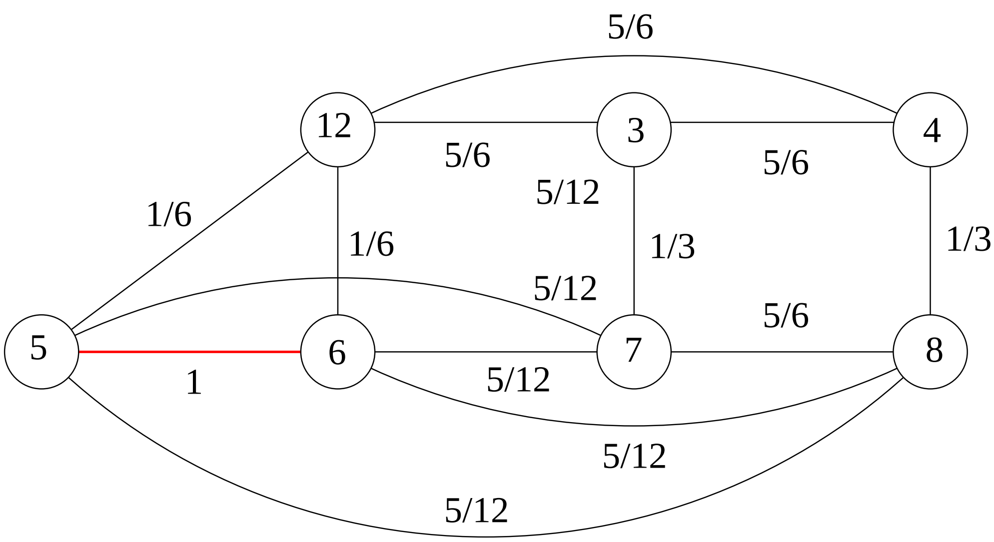
Algoritmo de contração de arestas:

Seja $e = (i, j)$ e $x_e^* = 1$. O grafo $G(x')$ obtido de $G(x^*)$ pela contração de e é gerado a partir das seguintes operações:
1. substituir i e j por um vértice único ℓ.
2. substituir todo par de arestas $\{(i, k), (j, k)\}$ por uma única aresta $(\ell, k) = e'$ onde $x_{e'} = x_{ik}^* + x_{jk}^*$.
3. substituir toda aresta $e = (i, p)$ ou $e = (j, q)$ remanescente por uma aresta $e' = (\ell, p)$ ou $e' = (\ell, q)$ onde $x_{e'} = x_e^*$.



contrair a aresta $(1,2)$.

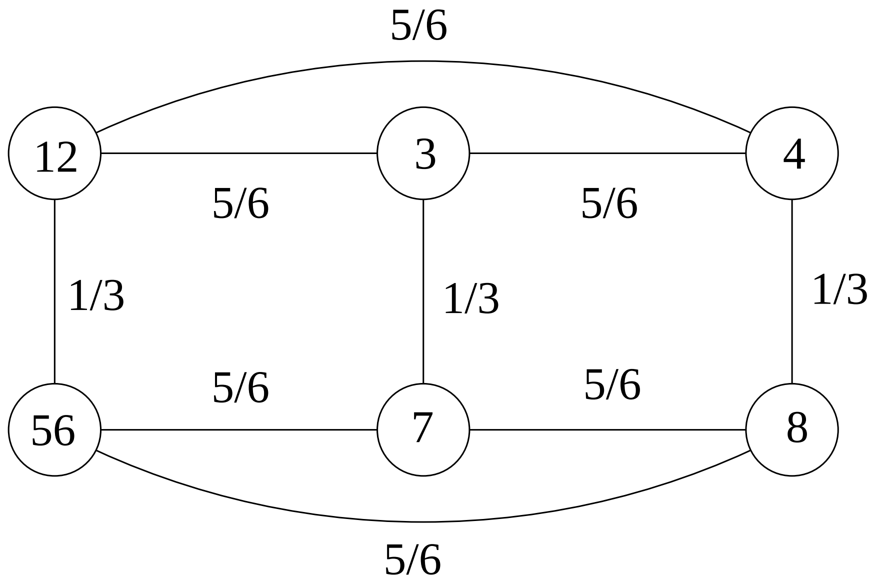
Separação de subciclos para o STSP: contração



contrair a aresta $(5,6)$.

C. C. de Souza (IC-UNICAMP) Combinatória Poliédrica - III 2º semestre de 2006 7 / 13

Separação de subciclos para o STSP: contração



Separação de subciclos para o STSP

Como vimos, o procedimento de contração é aplicado repetidas vezes sobre **todas** as arestas $\underline{e}$ satisfazendo $x_e^* = 1$ (incluindo aquelas criadas durante o procedimento).

Proposição: (corretude da contração)

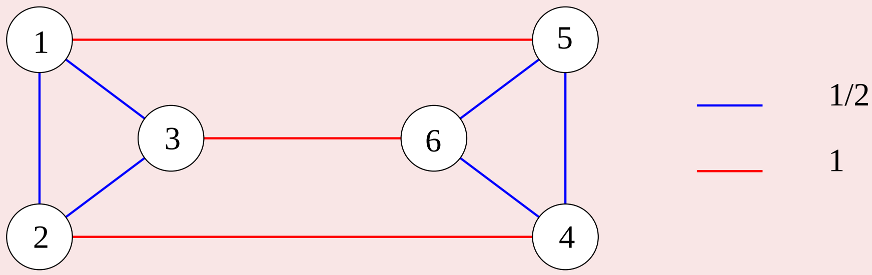
Seja $G(x') = (V', E(x'))$ o grafo obtido após a contração da aresta (i,j). Então, existe $W \subset V$, $W \neq \{i,j\}$, tal que $\sum_{e \in E(W)} x_e^* > |W| - 1$ *se e somente se* existe $W' \subset V'$ tal que $\sum_{e \in E(W')} x'_e > |W'| - 1$ em $G(x')$.

Prova:

Caso 1. $\{i,j\} \subset W$: $W' = (W - \{i,j\}) \cup \{\ell\}$.
Caso 2. $\{i,j\} \cap W = \emptyset$: $W' = W$.
Caso 3. $i \in W, j \notin W$: faça $\tilde{W} = W \cup \{j\}$. Se o subciclo de W está violado, o de $\tilde{W}$ também está. Como $\{i,j\} \in \tilde{W}$, aplica-se o **caso 1**. $\square$

Separação de subciclos para o STSP

No entanto, como mostrado no exemplo abaixo, as desigualdades de subciclo **não são suficientes** para descrever o politopo do STSP.



É fácil ver que esta solução corresponde a um vértice da relaxação e que ela satisfaz a <u>todas</u> desigualdades de subciclos !

Posso usar o procedimento de Chvàtal-Gomory para gerar uma nova restrição violada por este ponto ...

Outras desigualdades válidas para o STSP

Aplicando CG à solução anterior:

- Seja $H = \{1, 2, 3\}$. Multiplique as restrições de grau dos vértices em H por $1/2$.

- Seja $\hat{E} = \{(1,5), (2,4), (3,6)\}$. Para todo $e \in \hat{E}$, multiplique as desigualdades triviais $x_e \leq 1$ por $1/2$.

- Para todo $e \in \delta(H) - \hat{E}$, multiplique as desigualdades triviais $-x_e \leq 0$ por $1/2$.

- Some as desigualdades resultantes das operações anteriores.

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{15} + x_{36} + x_{24} \leq \lfloor 4\frac{1}{2} \rfloor = 4.$$

Esta desigualdade está violada pela solução fracionária anterior !

Outras desigualdades válidas para o STSP

Desigualdades de *2-emparelhamento* (*2 matching inequalities*)

A desigualdade obtida pelo procedimento CG no exemplo anterior podem ser generalizadas do seguinte modo.
Seja $H \subset V$ tal que $3 \leq |H| \leq |V| - 1$ e $\hat{E} \subset \delta(H)$ um conjunto (de tamanho) **ímpar** de arestas *disjuntas*. Multiplicando-se por $1/2$ as restrições de grau dos vértices de H, as desigualdades triviais $x_e \leq 1$ para todo $e \in \hat{E}$ e as desigualdades triviais $-x_e \leq 0$ para todas as arestas de $\delta(H) - \hat{E}$, somando os resultados e aplicando-se o arredondamento inteiro, chega-se a

$$\sum_{e \in E(H)} + \sum_{e \in \hat{E}} x_e \leq |H| + \lfloor \frac{|\hat{E}|}{2} \rfloor$$

Nota: fazendo-se $|\hat{E}| = 1$ chega-se à uma desigualdade dominada pela desigualdade de subciclo em $H \cup V(\hat{E})$. Logo, deve-se considerar apenas as desigualdades de *2-emparelhamento* onde $|\hat{E}| \geq 3$.

Outras desigualdades válidas para o STSP

Generalizando ainda mais: desigualdades do *pente* (*comb inequalities*)

Ao invés de "pendurarmos" arestas em H, poderíamos pendurar estruturas um pouco mais complexas. Suponha que k estruturas destas sejam adicionadas e denote por W_i, para todo $i = 1, \ldots, k$, o conjunto de vértices da i-ésima estrutura. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. $|H \cap W_i| \geq 1$, para todo $i = 1, \ldots, k$.
2. $|W_i - H| \geq 1$, para todo $i = 1, \ldots, k$.
3. $2 \leq |W_i| \leq n - 2$, para todo $i = 1, \ldots, k$.
4. $W_i \cap W_j = \emptyset$, para todo i e j distintos em $\{1, \ldots, k\}$.
5. k ímpar.

Considere a *desigualdade do pente* dada por:

$$\sum_{e \in E(H)} x_e + \sum_{i=1}^{k} \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |H| + k - \frac{k+1}{2} = |H| + \sum_{i=1}^{k} (|W_i| - 1) - \frac{k+1}{2}.$$

Outras desigualdades válidas para o STSP

Proposição:

A desigualdade do pente satisfazendo as condições definidas anteriormente é válida para o politopo do STSP.

Nota: no caso de k ser ímpar, o termo $\frac{k+1}{2}$ pode ser substituído por $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.