Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Computação - IC
MO824 - Tópicos em Otimização Combinatória

Algoritmos de Planos de Corte e Desigualdades Válidas

Cid Carvalho de Souza

2^{o} semestre de 2005

Algoritmos de planos de corte

- **Idéia**:
  1. resolver a relaxação linear de $z = \max\{cx : \underbrace{x \in \mathbb{Z}^n_+, Ax \le b}_{X}\}$.
  2. seja x^* a solução ótima da relaxação.
     Pergunta: $x^* \in \mathbb{Z}^n_+$?
     - **SIM** $\Rightarrow x^*$ é solução ótima do PLI. PÀRA.
     - **NÃO** $\Rightarrow$ resolve o problema da separação para x^* e $\texttt{conv}(X)$.
  3. se o problema da separação retornar uma desigualdade $\pi x \le \pi_0$ que é satisfeita por todos pontos de $\texttt{conv}(X)$ mas tal que $\pi x^* > \pi_0$, incluí-la na formulação e voltar ao Passo 1.
     Se não, PÀRA.
- **Definição**: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. A desigualdade $\pi x \le \pi_0$ válida para X *se e somente se* $\pi y \le \pi_0$ para todo $y \in X$.

Algoritmos de planos de corte: observações

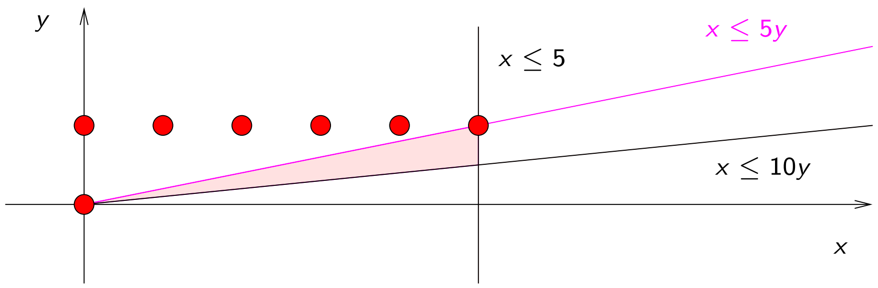
- A cada iteração do algoritmo de planos de corte a formulação se *"aproxima mais"* de $\texttt{conv}(X)$.
- Em geral, na prática, para problemas $\mathcal{NP}$-difíceis, o algoritmo deve ser interrompido bem antes de se chegar a $\texttt{conv}(X)$. Por quê ?
- Quais desigualdades levam o algoritmo a encerrar mais rapidamente ?
- Como obtê-las ?
- É **SEMPRE** possível encontrar uma desigualdade no passo 3 e garantir que o algoritmo pàra em um tempo finito ?

Exemplos de desigualdades válidas

- Conjunto 0-1 puro:

$$\begin{aligned} & X = \{x \in \mathbb{B}^5 : 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2\}; \\ \Rightarrow\ & x_2 \text{ e } x_4 \text{ não podem ser ambos nulos: } x_2 + x_4 \geq 1; \\ \Rightarrow\ & x_1 = 1 \text{ implica } x_2 \text{ e } x_4 \text{ devem ser 1: } 2x_1 \leq x_2 + x_4. \end{aligned}$$

- Conjunto 0-1 misto:
  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B} : x \leq 10y, 0 \leq x \leq 5\}$;
  Desigualdade válida: $x \leq 5y$.



Chegou-se à envoltória convexa !

Exemplos de desigualdades válidas

- No caso do problema de localização de facilidades com capacidades, tínhamos o modelo

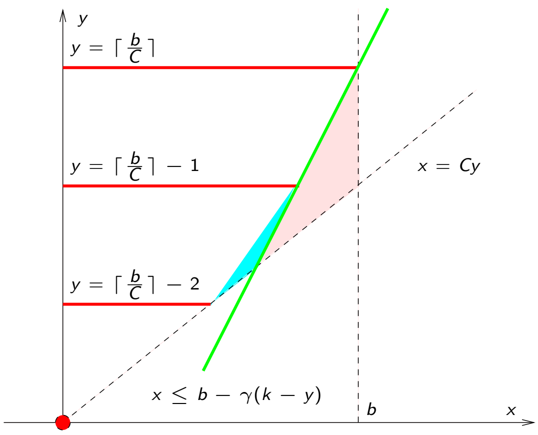
$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in M} x_{ij} \leq b_j y_j, & \forall j \in N \\ \sum_{j \in N} x_{ij} = a_i, & \forall i \in N \\ x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0,1\}. & \end{array}$$

  Desigualdade válida: $x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\} y_j$.

- Conjunto inteiro misto:
  $X = \{(x,y) : x \leq Cy, 0 \leq x \leq b, y \in \mathbb{Z}_+\}$ onde C não divide b.
  Defina: $\gamma = b - \left(\lceil \frac{b}{C} \rceil - 1\right) C$ e $k = \lceil \frac{b}{C} \rceil$.
  Desigualdade válida: $x \leq b - \gamma(k - y)$.
  Por exemplo, se $X = \{(x,y) : x \leq 5y, 0 \leq x \leq 14, y \in \mathbb{Z}_+\}$,
  $\gamma = 4$ e $k = 3$ e a desigualdade obtida é $x \leq 4y + 2$;

Exemplos de desigualdades válidas

y	$x \leq 5y$	$x \leq 4y + 2$
0	$x \leq 0$	$x \leq 2$
1	$x \leq 5$	$x \leq 6$
2	$x \leq 10$	$x \leq 10$
3	$x \leq 15$	$x \leq 14$ ($x \leq 15$ redundante)



A desigualdade válida é dada pela reta que passa nos pontos

$$\begin{array}{l} x_0 = b, \\ y_0 = \lceil \frac{b}{C} \rceil; \\ \\ x_1 = \left(\lceil \frac{b}{C} \rceil - 1\right) C, \\ y_1 = \lceil \frac{b}{C} \rceil - 1. \end{array}$$

Exemplos de desigualdades válidas

- Conjunto Combinatório:
  $X = \{$vetores de incidência dos emparelhamentos de um grafo$\}$ ou
  $X = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : \sum_{e \in \delta(i)} x_e \leq 1, \forall i \in V\}$.
  Se $T \subseteq V$ e $|T|$ é ímpar, temos a seguinte desigualdade válida:
  $\sum_{e \in E(T)} x_e \leq \frac{|T|-1}{2}$.
- Arredondamento inteiro:
  $X = \{x \in \mathbb{Z}^4_+ : 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72\}$.
  A seguinte desigualdade é válida para X:
  $$\frac{13}{11}x_1 + \frac{20}{11}x_2 + \frac{11}{11}x_3 + \frac{6}{11}x_4 \geq \frac{72}{11}.$$
  Como estamos no ortante positivo, outra desigualdade válida seria:
  $$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 6\frac{6}{11}.$$
  E como as variáveis x são inteiras, chega-se a desigualdade válida
  $$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 7.$$

Como gerar desigualdades válidas

- Como encontrar desigualdades válidas para $P = \{x \in \mathbb{R}_+ : Ax \leq b\}$? *(Programação Linear !)*

- **Proposição 1:**
  A desigualdade $\pi x \leq \pi_0$ é válida para $P \neq \emptyset$ *se e somente se* existem vetores u e v não negativos tais que $uA - v = \pi$ e $ub \leq \pi_0$ (ou $u \geq 0$ tal que $uA \geq \pi$ e $ub \leq \pi_0$).

Prova:

- Primal: $z = \max\{\pi x : \underbrace{Ax \leq b}_{u}, \underbrace{-x \leq 0}_{v}, x \text{ irrestrito}\}$.
- Dual: $w = \min\{ub : uA - v = \pi, u \geq 0, v \geq 0\}$.
- Desigualdade Válida: $z \leq \pi_0 \equiv w \leq \pi_0 \equiv ub \leq \pi_0$, onde $uA - v = \pi, u \geq 0, v \geq 0$. $\square$

Como gerar desigualdades válidas

Para PL toda desigualdade válida é obtida a partir de combinações lineares não-negativas das desigualdades em $Ax \leq b$.
E para PLI ?

Observação trivial: arredondamento

Se $X = \{y \in \mathbb{Z} : y \leq b\}$ então $y \leq \lfloor b \rfloor$ é válida para X.

Gerando desigualdades válidas para PLI *(I)*

Combinação linear não-negativa de desigualdades válidas seguida de arredondamento inteiro do RHS.

Exemplo: emparelhamento em grafos

- desigualdades originais: $\sum_{e \in \delta(i)} x_e \leq 1, \forall i \in V$;
- Seja $T \subseteq V$ com T ímpar. Multiplicar todas as desigualdades originais dos vértices em T por $1/2$ e somar:

$$\sum_{i \neq j, \{i,j\} \subset T} x_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i \in T, j \notin T} x_{ij} \leq \frac{|T|}{2}.$$

Como o segundo termo do LHS é não-negativo, chega-se a

$$\textstyle\sum_{e \in E(T)} x_e \leq \frac{|T|}{2}.$$

Considerando que as variáveis são inteiras, pode-se concluir que a seguinte desigualdade é válida para o politopo dos emparelhamentos:

$$\sum_{e \in E(T)} x_e \leq \lfloor \frac{|T|}{2} \rfloor.$$

Gerando desigualdades válidas para PLI *(II)*

Arredondamento dos coeficientes das variáveis inteiras mantendo a direção da desigualdade.

Exemplo 1:

$X = \{5.27x \leq 11.32, \text{ com } x \in \mathbb{Z}\}$.
Desigualdade válida: $5x \leq 11.32 \Longrightarrow 5x \leq 11 \Longrightarrow x \leq \lfloor \frac{11}{5} \rfloor = 2$.

Exemplo 2:

$$\begin{array}{rlcc} -x_1 + 2x_2 & \leq 4 & (5/11) & (4/11) \\ 5x_1 + x_2 & \leq 20 & (3/22) & (3/11) \\ -2x_1 - 2x_2 & \leq -7 & (0) & (0) \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. & & & \end{array}$$

Desigualdade válida 1: $(5/22)x_1 + (23/22)x_2 \leq (100/22)$ ou, após arredondamento, $x_2 \leq \lfloor (100/22) \rfloor = 4$.
Desigualdade válida 2: $x_1 + x_2 \leq 6$.

Procedimento de Chvátal-Gomory

Procedimento de Chvátal-Gomory

Seja $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, onde $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$, $A : m \times n$ e $u \in \mathbb{R}^m_+$.

1. $\sum_{j \in N} (ua_{.j}) x_j \leq ub$ é válida para X;
2. $\sum_{j \in N} \lfloor ua_{.j} \rfloor x_j \leq ub$ é válida para X;
3. $\sum_{j \in N} \lfloor ua_{.j} \rfloor x_j \leq \lfloor ub \rfloor$ é válida para X;

Teorema 2

Toda desigualdade válida para X pode ser obtida pela aplicação do procedimento de Chvàtal-Gomory em um número finito de vezes.

Inclusão de desigualdades válidas *a priori*

- Formulação: $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$, $X = P \cap \mathbb{Z}^n$.
- $Qx \leq d$: conjunto de desigualdades válidas para X.
- Nova formulação: $P' = P \cap \{Qx \leq d\}$.
- Usar P' como entrada para o *branch-and-bound !*
  - vantagem: se a formulação P' for muito melhor que a formulação P, permitirá que o pruning seja feito mais cedo !
  - desvantagem: se o número de desigualdades em $Qx \leq d$ for muito grande, tornará muito lenta a resolução das relaxações lineares !

Como encontrar desigualdades válidas a priori

Decomposição de X: $X = X_1 \cap X_2$.
Encontrar desigualdades válidas para $\mathtt{conv}(X_2)$ é mais fácil do que para $\mathtt{conv}(X)$.

Exemplo: *uncapacitated facility location*

- Formulação:
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \ldots, m,$$
$$(P_j) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq m y_j, & j = 1, \ldots, n,. \\ x_{ij} \geq 0,\ 1 \geq y_j \geq 0 \end{cases}$$
- A envoltória convexa dos pontos inteiros de P_j (X_j) é dada por:
$$\mathtt{conv}(X_j) = \{x_{ij} \leq y_j, x_{ij} \geq 0, 1 \geq y_j \geq 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}.$$
- Substituindo P_j por $\mathtt{conv}(X_j)$ chega-se a uma formulação forte !
- Os limitantes melhoram <u>muito</u> e as soluções da relaxação são *quase* inteiras.

Algoritmo de planos de corte

Especializando para uma família de desigualdades

Seja $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, onde $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$.
Seja $\mathcal{F}$ uma família de desigualdades válidas para X e considere o problema de PLI dado por $z = \max\{cx : x \in X\}$.

Passo 0: $t \leftarrow 0$ e $P^0 \leftarrow P$;
Passo 1: resolver a relaxação linear (LP^t): $\overline{z}^t = \max\{cx : x \in P^t\}$, obtendo a solução ótima x^t.
Passo 2: Se x^t é inteira, retorne $(\overline{z}^t, x^t)$ e *pare*.
Se não, resolver o problema de separação para x^t e $\mathcal{F}$ e ir para o passo 3.
Passo 3: Se não encontrou desigualdade violada por x^t em $\mathcal{F}$, pare e retorne o limitante superior $\overline{z}^t$.
Se não, seja $\pi^t x \leq \pi^t_0$ a desigualdade violada por x^t em $\mathcal{F}$.
Faça $P^{t+1} = P^t \cap \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \pi^t x \leq \pi^t_0\}$, $t \leftarrow t+1$ e volte ao passo 1.

Algoritmo de planos de corte (cont.)

Comentários:

- $P^0 \supset P^1 \supset P^2 \supset \ldots \supset P^t \supset \ldots$;
- Com a adição de cortes o limite superior decresce a cada iteração;
- A partir da segunda relaxação linear, resolver o LP usando o dual simplex;
- Se for conhecido um limitante inferior $\underline{z}_t$, o algoritmo pode ser interrompido na k-ésima iteração usando um *pruning* por otimalidade quando $\overline{z}^t - \underline{z}^t \leq \epsilon$ (fixado *a priori*).
- Usando limitantes inferiores, é possível ainda fixar variáveis por custo reduzido;
- **IMPORTANTE**: na prática, é melhor adicionar várias desigualdades violadas a cada iteração do que uma única !

Como garantir que uma solução inteira seja atingida ?

- $\mathcal{F} = \{$todas desigualdades obtidas de P pelo procedimento CG$\}$;
- Ou seja, no passo 2, se x^t não é inteira, ela viola uma desigualdade CG;
- Preciso de um algoritmo para encontrar esta desigualdade !

O corte fracionário de Gomory

- Seja B uma base ótima da relaxação. Reescrevendo a formulação:

$$\begin{array}{lll} \max & z = z_0 + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j^* & (\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} a_{.j}) \\ \text{s.a.} & x_{B,u}^* + \sum_{j \in N} \bar{a}_{uj} x_j^* = \bar{a}_{u0}, \; u \in M & (\bar{a}_{.j} = B^{-1} a_{.j}) \\ & x^* \geq 0 & (\bar{a}_{u_0} = [B^{-1} b]_u) \end{array}$$

- Se $x^* \notin \mathbb{Z}^n$, existe $u \in M$ tal que $x_{B,u}^*$ é fracionário ($\bar{a}_{u_0}$ não é inteiro);
- Aplicar o procedimento CG nesta linha do *tableau* !

Corte fracionário de Gomory

Aplicando CG à linha u

$$\begin{array}{c} x_{B,u}^* + \sum_{j \in N} \bar{a}_{uj} x_j^* = \bar{a}_{u0} \\ x_{B,u}^* + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{uj} \rfloor x_j^* \leq \lfloor \bar{a}_{u0} \rfloor \end{array}$$

Subtraindo-se as duas expressões chega-se a:

$$\sum_{j \in N} \underbrace{(\bar{a}_{uj} - \lfloor \bar{a}_{uj} \rfloor)}_{f_{uj}} x_j^* \geq \underbrace{(\bar{a}_{u_0} - \lfloor \bar{a}_{u0} \rfloor)}_{f_{u0}},$$

onde $0 \leq f_{uj} \leq 1$ e $0 < f_{u_0} < 1$ (parte fracionária).

Corte fracionário de Gomory

$$\sum_{j \in N} f_{uj} x_j \geq f_{u_0}$$

Para x inteiro, a folga desta restrição é inteira ! (Por quê ?)

Exemplo

$$\begin{array}{lll} \max & z = 3x_1 + 4x_2 & \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 11 & x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & 7x_1 + x_2 \leq 21 & 7x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ & \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	-3	-4	0	0	0
x_3	1	2	1	0	11
x_4	7	1	0	1	21

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	-1	0	2	0	22
x_2	1/2	1	1/2	0	11/2
x_4	13/2	0	-1/2	1	31/2

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	0	0	25/13	2/13	317/13
x_2	0	1	7/13	-1/13	56/13
x_1	1	0	-1/13	2/13	31/13

1º corte de Gomory:

$$\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{13}}\mathbf{x_3} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{13}}\mathbf{x_4} \geq \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}.$$

Inserindo a variável de folga: (tem que ser inteira)

$$-\frac{12}{13}x_3 - \frac{2}{13} + x_5 = -\frac{5}{13} \qquad \text{(restrição da forma } \leq)$$

Exemplo (cont.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	0	25/13	2/13	0	317/13
x_2	0	1	7/13	-(1/13)	0	56/13
x_1	1	0	-(1/13)	2/13	0	31/13
x_5	0	0	-(12/13)	-(2/13)	1	-(5/13)

Usar o dual simplex !

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	0	1	0	1	24
x_2	0	1	1	0	-(1/2)	9/2
x_1	1	0	-1	0	1	2
x_4	0	0	6	1	-(13/2)	5/2

2º corte de Gomory:

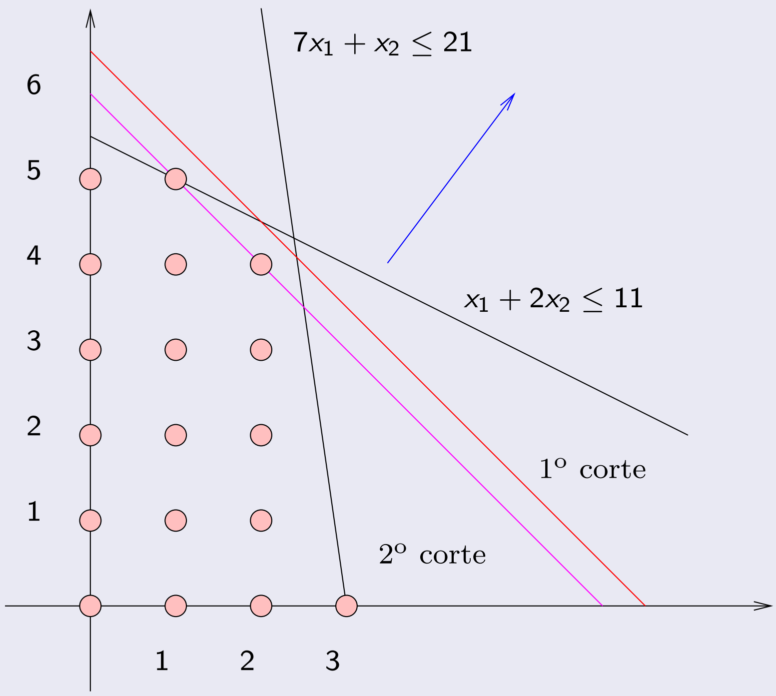
$$(1/2)x_5 \geq 1/2 \text{ ou } -(1/2)x_5 + x_6 = -(1/2).$$

Exemplo (cont.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	1	0	1	0	24
x_2	0	1	1	0	-(1/2)	0	9/2
x_1	1	0	-1	0	1	0	2
x_4	0	0	6	1	-(13/2)	0	5/2
x_6	0	0	0	0	-(1/2)	1	-(1/2)

- Dual simplex ...
- Próxima iteração: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 5$ e $z^* = 23$.
  Solução ótima inteira !
- Cortes de Gomory em função das variáveis originais:
  - 1º: $2x_1 + 2x_2 \leq 13$;
  - 2º: $x_1 + x_2 \leq 6$;

Gráfico



Proposição

Seja β a u-ésima linha de B^{-1} e $q = \beta - \lfloor \beta \rfloor$. Então, a desigualdade $\sum_{j \in N} f_j x_j \geq f_0$ escrita em função das variáveis originais é o corte de Chvátal-Gomory dado por $\sum_{j \in N} \lfloor q a_j \rfloor x_j \leq \lfloor qb \rfloor$ ($\lfloor qA \rfloor x \leq \lfloor qb \rfloor$).

Exemplo

- Obtendo o corte 1 do exemplo anterior ...
- $\beta = [-(1/13) \quad 2/13]$, $\beta - \lfloor \beta \rfloor = q = [12/13 \quad 2/13]$.
- $\lfloor q a_1 \rfloor x_1 + \lfloor q a_2 \rfloor x_2 \Rightarrow$
  $\lfloor [12/13 \quad 2/13][1 \quad 7]^t \rfloor x_1 + \lfloor [12/13 \quad 2/13][2 \quad 1]^t \rfloor x_2$
  $\leq \lfloor [12/13 \quad 2/13][11 \quad 21]^t \rfloor \Rightarrow$
  $\lfloor 26/13 \rfloor x_1 + \lfloor 26/13 \rfloor x_2 \leq \lfloor 174/13 \rfloor \Rightarrow$
  $2x_1 + 2x_2 \leq 13$.