Introdução à PLI e Formulações

Cid C. de Souza

cid@ic.unicamp.br

Instituto de Computação – UNICAMP

Introdução à PLI e formulações

Problemas que podem ser formulados por PLI:

- Montagem de tabelas de horários: aulas em escolas, viagens de ônibus, etc.
- Montagem de escalas de trabalhos: enfermarias de hospitais, tripulação de aviões, etc.
- Planejamento de produção: seqüenciamento de máquinas, controle de estoques, etc.
- Telecomunicações: localização de antenas de celulares, planejamento de expansão de redes telefônicas, etc.
- Roteamento: logística de distribuição, caminhos mais curtos, etc.
- Projetos de circuitos integrados: *routing* e *placement*.
- . . .

Introdução à PLI e formulações (cont.)

- Forma geral de um Programa Linear Inteiro Misto:

$$(\text{MIP}) \quad \begin{array}{ll} \max & z = cx + hy \\ \text{s.a} & Ax + Gy \leq b \\ & x \geq 0, y \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{Z}^p \end{array}$$

Dimensões:

$$\begin{array}{lll} A : m \times n & G : m \times p & x : n \times 1 \\ c : 1 \times n & h : 1 \times p & y : p \times 1 \\ b : m \times 1 & & \end{array}$$

- PLI Puro: só existem as variáveis y.
- PLI 0–1 ou binário: todas variáveis assumem valores 0 ou 1, ou seja, $y \in \mathbb{B}^p$.

Introdução à PLI e formulações (cont.)

- Problema de Otimização Combinatória (COP):
  - dado um conjunto finito de elementos: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
  - dados os custos dos elementos de N: c_j, para todo $j \in N$.
  - dada uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de N: $\mathcal{F} \subseteq 2^N$.
  - Calcular:

$$(\text{COP}) \qquad z = \min \left\{ \sum_{j \in S} c_j : S \in \mathcal{F} \right\}.$$

- Muitos COPs são formulados como PLIs 0–1 !

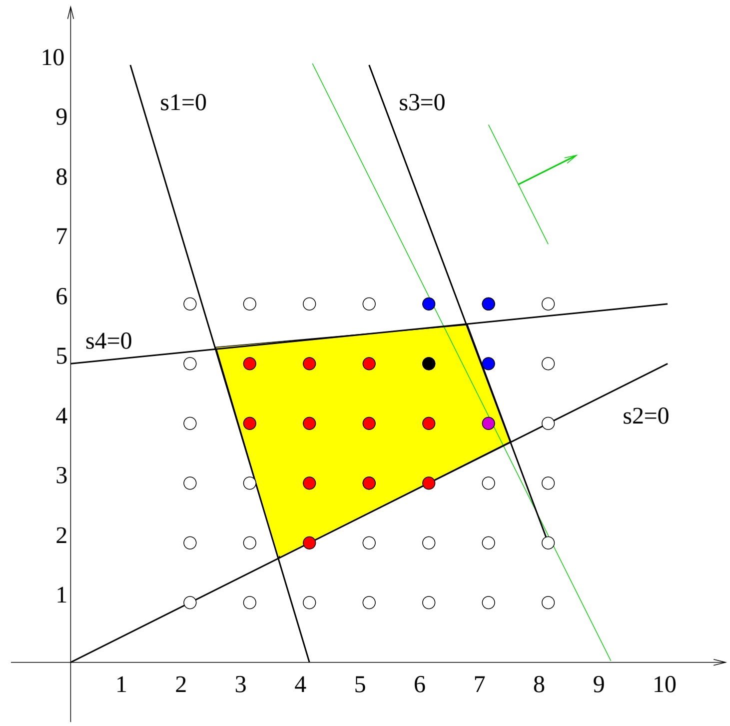
PL × PLI: arredondamento

$$
\begin{array}{rrrcr}
z = \max & 2x_1 & + & x_2 & \\
\\
10x_1 & +3x_2 & \geq & 40 \\
x_1 & -2x_2 & \leq & 0 \\
8x_1 & +3x_2 & \leq & 70 \\
-1x_1 & +10x_2 & \leq & 50 \\
x_1, & x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

ótimo contínuo:
$(6.63, 5.66)$, $z = 18.92$

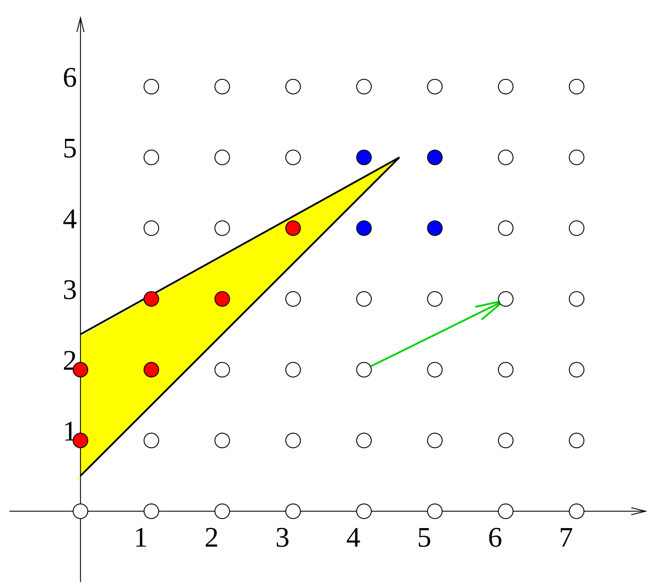
solução arredondada:
$(6, 5)$, $z = 17$.

solução ótima:
$(7, 4)$, $z = 18$.



PL × PLI: arredondamento (cont.)

Pode ser que nenhuma solução arredonda seja viável !



Arredondamento para PLI 0–1 é ainda pior em geral !

Formulações em PLI

- Problema de Alocação *(Assignment)*:
  - n pessoas devem realizar n tarefas
  - cada pessoa executa exatamente uma única tarefa
  - o valor c_{ij} mede a adequação de se alocar a pessoa i para executar a tarefa j (quanto maior melhor)
  - Pergunta: qual é alocação mais adequada ?
- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a pessoa } i \text{ executa a tarefa } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

n^2 variáveis binárias.

Formulações em PLI (cont.)

- Restrições:
  - cada pessoa executa uma tarefa: (n)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\}$$

  - cada tarefa só pode ser executada por uma pessoa: (n)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \text{para todo } j \in \{1, \ldots, n\}$$

  - integralidade: $x_{ij} \in \{0, 1\}$ para todo i e j em $\{1, \ldots, n\}$.
- Função objetivo: $z = \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Formulações em PLI (cont.)

- Problema binário da mochila *(0–1 knapsack)*:
  - uma empresa tem n possíveis projetos para investir para aumentar sua capacidade de produção
  - o projeto i tem um custo de w_i reais e um retorno esperado de c_i reais
  - o orçamento da empresa para realizar novos projetos é de W reais
  - os projetos são independentes e, quando selecionados para investimento, devem ser feitos na íntegra caso contrário não dão nenhum retorno.
- Pergunta: em quais projetos a empresa deve empregar o orçamento de modo maximizar o seu retorno ?

Formulações em PLI (cont.)

- Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o projeto } i \text{ for ser executado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  n variáveis binárias.
- Restrições:
  - Limitação do orçamento:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W$$

  - integralidade: $x_i \in \{0, 1\}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Função objetivo: $z = \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

Formulações em PLI (cont.)

- Problemas de empacotamento, cobertura e partição: *(packing, covering, partition)*:
  - uma transportadora aluga *vans* para eventos em Campinas
  - a organização do congresso da SBC deve alugar *vans* para fazer 14 viagens diárias entre a UNICAMP e o centro de Campinas.
  - os locais e horários de partida das viagens bem como suas durações estimadas são conhecidas dos organizadores
  - a transportadora não aceita que as *vans* façam outras viagens que não aquelas na tabela de horários fornecida pela organização e também não aluga uma *van* para fazer menos que 3 viagens. Mas ela não se importa que duas ou mais *vans* façam a mesma viagem pois ela recebe por viagem.
  - evidentemente que uma mesma *van* não pode realizar mais de uma viagem em cada instante de tempo

Formulações em PLI (cont.)

- Problema 1: *(covering)*
  Qual o número mínimo de *vans* que devem ser alugadas para que cada viagem seja realizada por pelo menos uma *van* ?

- Problema 2: *(packing)*
  Qual o número máximo de *vans* que deve ser alugada para que nenhuma viagem seja realizada mais do que uma vez ?

- Problema 3: *(partitioning)*
  Qual o número mínimo de *vans* que devem ser alugadas para que cada viagem seja realizada por exatamente uma *van* ?

Formulações em PLI (cont.)

- Variáveis:
  - Poderíamos ter uma variável binária para cada subconjunto das 14 viagens com pelo menos três elementos.
  - Estes elementos devem representar viagens que não se interceptam no tempo e que podem ser colocadas numa seqüência tal que suas direções se alternem (... – UNICAMP – Centro – ...).
  - Não haverá mais do que 2^{14} variáveis binárias ($\approx 16K$)
  - Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos subconjuntos de viagens com as propriedades acima e $n = |\mathcal{F}|$.
  - Seja A a matriz composta de todos os n vetores booleanos que representam os subconjuntos em $\mathcal{F}$.

Formulações em PLI (cont.)

- Set covering:
$$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbb{1}_n x \\ \text{s.a} \quad & Ax \geq \mathbb{1}_m \\ & x \geq 0, \ x \in \mathbb{B}^n \end{aligned}$$

- Set packing:
$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbb{1}_n x \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq \mathbb{1}_m \\ & x \geq 0, \ x \in \mathbb{B}^n \end{aligned}$$

- Set partition:
$$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbb{1}_n x \\ \text{s.a} \quad & Ax = \mathbb{1}_m \\ & x \geq 0, \ x \in \mathbb{B}^n \end{aligned}$$

Formulações em PLI (cont.)

Em geral:

- $M = \{1, \ldots, m\}$: conjunto finito de elementos
- $\mathcal{F} = \{M_1, \ldots, M_n\} \subseteq 2^M$: conjunto finito de subconjuntos de M
- custo c_j associado ao subconjunto M_j para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$

Definições: *(Nota: $N = \{1, \ldots, n\}$ e $n = |\mathcal{F}|$)*

- $F \subseteq N$ é uma cobertura de M se $M = \bigcup_{j \in F} M_j$.
- $F \subseteq N$ é um empacotamento de M se $M_i \cap M_j = \emptyset$ para todo par (i, j) em $F \times F$ com $i \neq j$
- $F \subseteq N$ é uma partição de M se F for ao mesmo tempo uma cobertura e um empacotamento de M

Formulações em PLI (cont.)

- O problema do caixeiro viajante *(Traveling Salesman Problem, TSP)*:
  - é o problema combinatório mais conhecido e estudado, tendo várias aplicações práticas
  - são dadas n cidades com os tempos de viagens entre cada par de cidades
  - um caixeiro viajante precisa sair da sua cidade, passar por todas as demais cidades uma única vez e retornar à sua cidade de origem
  - Pergunta: qual é a seqüência em que as cidades devem ser visitadas de modo a minimizar o tempo total de viagem do caixeiro ?

Formulações em PLI (cont.)

- Observações:
  - Modelar o problema com um grafo completo orientado onde os vértices representam as cidades e os arcos têm pesos iguais aos tempos de viagens entre as cidades *(o tempo de ir de i para j pode não ser o mesmo de ir de j para i)*
  - uma solução viável do TSP é chamada de um *tour* e, no grafo, corresponde a um *ciclo hamiltoniano*
- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a cidade } i \text{ é visitada imediatamente antes da cidade } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As variáveis x_{ii} estão indefinidas. Existem $\Theta(n^2)$ variáveis binárias.

Formulações em PLI (cont.)

- Função objetivo: sendo t_{ij} o tempo de viagem para ir da cidade i para a cidade j a F.O. é dada por

$$z = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$$

- Restrições:
  - o caixeiro chega à cidade j uma única vez:

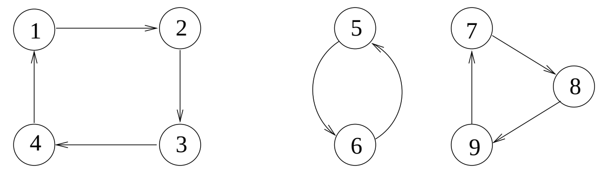
$$\sum_{i=1, i \neq j}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$$

  - o caixeiro sai da cidade i uma única vez:

$$\sum_{j=1, i \neq j}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$

Formulações em PLI (cont.)

- Até aqui, estamos com o modelo do Problema de Alocação !
- O que está faltando ?
  Temos que eliminar
  ciclos pequenos



- Alternativa 1: *(cut set constraints)*

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1, \qquad \forall\, \emptyset \neq S \subset \{1, \ldots, n\}$$

- Alternativa 2: *(subtour elimination constraints)*

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S \setminus \{i\}} x_{ij} \leq |S| - 1, \qquad \forall\, S \subset \{1, \ldots, n\},\; 2 \leq |S| \leq n - 1$$

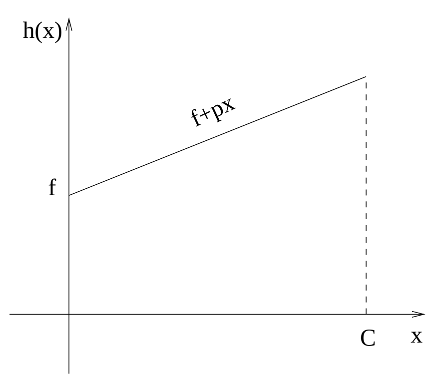
- Quantas desigualdades tem neste modelo ?

Formulações em PLI (cont.)

- Modelagem de custos fixos:

$$h(x) = \begin{cases} f + px, & \text{se } 0 < x \leq C \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$f, p > 0$



- Variável binária auxiliar: $y = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- desigualdade adicional: $x \leq Cy, \qquad y \in \{0, 1\}$
- função de custo: substituída por $fy + px$.
- Observação: $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ mas y pode ser 1 e x ser nulo.

Formulações em PLI (cont.)

- Problema de Localização de Facilidades Não-Capacitado *(Uncapacitated Facility Location)*:
  - um conjunto de n potenciais depósitos deve atender a m clientes
  - o custo de utilização do depósito j é f_j
  - o custo do transporte de toda mercadoria do cliente i para o depósito j é c_{ij}
    Nota: supor custo proporcional à fração transportada
  - Pergunta: quais depósitos devem ser construídos e que fração da demanda de cada cliente eles devem atender de modo a minimizar o custo da logística ?

Formulações em PLI (cont.)

- variáveis:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o depósito } j \text{ é usado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \Theta(n) \text{ variáveis binárias}$$

$$x_{ij} = \text{fração da demanda do cliente } i \text{ atendida pelo depósito } j \qquad \Theta(mn) \text{ variáveis contínuas}$$

- Restrições:
  - Atendimento à demanda dos clientes:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$$

Formulações em PLI (cont.)

- Restrições:
  - Limite sobre as frações das demandas dos clientes atendidas pelo depósito j:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq m y_j, \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$$

- Função objetivo:

$$\min\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}_{\text{custo do transporte}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f_j y_j}_{\text{custo fixo de uso dos depósitos}} \Big)$$

Formulações em PLI (cont.)

- Problema Básico de Fluxos em Redes *(Network Flow)*:
  - dada uma rede $G = (V, E)$ com demanda b_i associada a todo vértice $i \in V$ onde

$$\begin{cases} b_i > 0 & \Longrightarrow & i \text{ é um vértice fornecedor} \\ b_i < 0 & \Longrightarrow & i \text{ é um vértice consumidor} \\ b_i = 0 & \Longrightarrow & i \text{ é um vértice de passagem} \end{cases}$$

  - dada a capacidade máxima u_{ij} de fluxo de cada arco $(i, j) \in E$
  - dado o custo unitário h_{ij} de transporte de fluxo sobre cada arco $(i, j) \in E$
  - Pergunta: qual é o menor custo de se atender à demanda na rede ?
- Hipótese: assumir que $\sum_{i \in V} b_i = 0$

Formulações em PLI (cont.)

- Variáveis:

$$y_{ij} = \text{ fluxo no arco } (i,j), \qquad \forall\, (i,j) \in E$$

- Restrições:
  - Conservação de fluxo em cada vértice da rede:

$$\underbrace{\sum_{j \in V \setminus \{i\}} y_{ij}}_{\text{fluxo que sai de } i} \quad - \quad \underbrace{\sum_{j \in V \setminus \{i\}} y_{ji}}_{\text{fluxo que entra em } i} \quad = b_i, \qquad \forall\, i \in V$$

  - Limite de fluxo no arco (i,j):

$$y_{ij} \leq u_{ij}, \qquad \forall\, (i,j) \in E$$

- Função objetivo: $\quad \min \sum_{(i,j) \in E} h_{ij} y_{ij}$

Formulações em PLI (cont.)

- Problema de Fluxos em Redes com custos fixos *(Fixed Charge Network Flow)*:
  - Exemplos de aplicação: expansão de redes (telefone, água, computadores, etc)
  - Modela a seguinte situação:

    Para poder escoar fluxo do local i para o local j, deve-se primeiramente abrir um *novo* canal de escoamento de fluxo, o qual custará c_{ij} (≥ 0) unidades monetárias e terá uma capacidade máxima de fluxo de u_{ij} unidades

- Variáveis:

$$y_{ij} = \text{ fluxo no arco } (i,j) \text{ como no modelo anterior}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se for abrir o arco } (i,j) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulações em PLI (cont.)

- Restrições:
  - Conservação de fluxo nos vértices: igual ao modelo anterior
  - Limite de fluxo nos arcos:

$$y_{ij} \leq u_{ij} x_{ij} \qquad \forall\ (i,j) \in E$$

- Função objetivo:

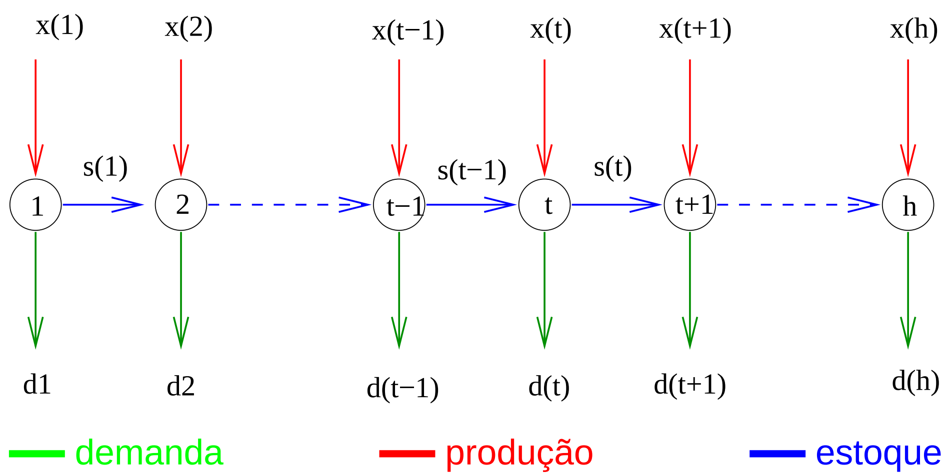
$$\min(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}}_{\text{custo fixo de instalação dos arcos}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} h_{ij} y_{ij}}_{\text{custo do transporte}})$$

Formulações em PLI (cont.)

- Problema do Planejamento de Produção Não Capacitado *(Uncapacitated Lot Sizing)*:
  - dado um horizonte de planejamento H com h meses
  - dada a demanda d_t pelo produto em cada período t de H
  - dado o custo c_t de fazer um setup na linha de produção em cada período t do horizonte H
  - dado o custo unitário de estocagem h_t do produto de cada período t do horizonte H para o período seguinte
  - dado o custo unitário de produção p_t do produto em cada período t do horizonte H
  - dado que os estoques no início e no final do horizonte são nulos
  - Pergunta: como minimizar os custos de produção e estocagem de modo a atender às demandas no horizonte H ?

Formulações em PLI (cont.)

- Observações:
  - O setup deve ser feito sempre que houver produção
  - Por hipótese, a capacidade de produção é ilimitada !
- Modelagem: fluxos em redes ?



Formulações em PLI (cont.)

- Variáveis:
  - Definir: $H = \{1, \ldots, h\}$
  - $x_t \in \mathbb{R}_+ \doteq$ produção no período $t, \quad \forall\, t \in H$
  - $s_t \in \mathbb{R}_+ \doteq$ estoque do período t para o período $t+1$, para todo $t \in H$ sendo $s_0 = s_h = 0$
  - $y_t = \begin{cases} 1, & \text{se há } \textit{setup} \text{ no período } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \forall\, t \in H$

Formulações em PLI (cont.)

- Restrições:
  - Conservação de fluxo:

$$x_t + s_{t-1} - s_t = d_t, \qquad \forall\, t \in H$$

  - Só há produção se houver *setup*:

$$x_t \leq M y_t,$$

onde M é um valor muito grande ($\sum_{i \in H} d_i$ serve ?)

- Função objetivo:

$$\min \sum_{t \in H} (\underbrace{p_t x_t}_{\text{produção}} + \underbrace{h_t s_t}_{\text{estocagem}} + \underbrace{c_t y_t}_{\textit{setup}})$$

Formulações em PLI (cont.)

- Restrições Disjuntivas: apenas $ax \leq b$ ou $a'x \leq b'$ deve ser satisfeita
- Um problema de escalonamento de tarefas: *(scheduling)*
  - n tarefas devem ser executadas em m máquinas
  - toda tarefa j é dividida em m operações
  - cada operação é executada em uma única máquina fixada *a priori* e, além disso, não existem duas operações de uma mesma tarefa que sejam feitas numa mesma máquina (i.e., a tarefa "passa" por todas as máquinas)
  - as operações de uma tarefa j devem ser executadas numa seqüência pré-determinada sendo que uma operação só pode começar quando a anterior tiver sido concluída.
    Logo, pode-se dizer que existe uma seqüência $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ de máquinas a serem "visitadas" pela tarefa j

Formulações em PLI (cont.)

- Um problema de escalonamento de tarefas: *(cont.)*
  - p_{ij} é o tempo de processamento da tarefa j na máquina i
  - uma máquina só executa uma operação de cada vez e, uma vez iniciada a execução de uma operação, ela não será interrompida até que esteja encerrada (no preemption)
- Pergunta: como escalonar as operações nas máquinas de modo que o tempo médio de conclusão das n tarefas seja minimizado ?
- Variáveis: *(Parte 1)*

$$t_{ij} \geq 0, \quad \text{tempo de início da execução da tarefa } j \text{ na máquina } i \qquad (m \times n)$$

Formulações em PLI (cont.)

- Função objetivo: seja $j(i)$ a iª máquina que processa a tarefa j então a F.O. será dada por

$$\min \left[\sum_{j=1}^{n} (t_{j(m),j} + p_{j(m),j}) \right] /n \equiv \min \sum_{j=1}^{n} t_{j(m),j}$$

- Restrições:
  - Restrições de precedência entre as operações (máquinas) em uma mesma tarefa:

$$t_{j(i+1),j} \leq t_{j(i),j} + p_{j(i),j}, \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m-1\}$$

Formulações em PLI (cont.)

- Usando apenas as variáveis t_{ij}, como representar as restrições que exigem que apenas uma operação pode ser executada por vez em cada máquina ?
- Fixada a máquina i e duas tarefas arbitrárias j e k, apenas uma das seguintes situações podem ocorrer:
  - j é executada antes de k $\Longrightarrow t_{ij} + p_{ij} \leq t_{ik}$ $\quad (1)$
  - j é executada depois de k $\Longrightarrow t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$ $\quad (2)$
- Como representar em PLI o fato de que a inequação (1) ou a inequação (2) devem ser satisfeitas mas não ambas ?

Formulações em PLI (cont.)

- Variáveis binárias adicionais: *(Parte 2)*

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ é executada antes} \\ & \text{de } k \text{ na máquina } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (m \times n^2)$$

ou seja,

$x_{ijk} = 1$ se a inequação (1) deve ser satisfeita e a inequação (2) deve tornar-se redundante e

$x_{ijk} = 0$ se a inequação (2) deve ser satisfeita e a inequação (1) deve tornar-se redundante !

- Para que tornar uma desigualdade redundante ?
  Como fazer isso ?

Formulações em PLI (cont.)

- Seja M um número tal que $t_{ij} \ll M$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e para todo $j = 1, \ldots, n$.
- Para cada par $(j, k) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ com $j \neq k$ e para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ adicionar o seguinte par de restrições à formulação:

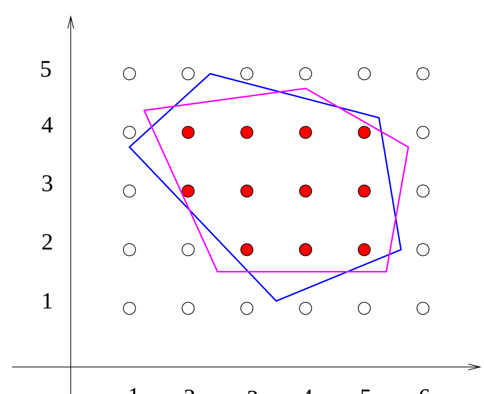
$$t_{ij} \leq t_{ik} + M(1 - x_{ijk}) - p_{ij} \qquad (1')$$

$$t_{ik} \leq t_{ij} + M x_{ijk} - p_{ik} \qquad (2')$$

Formulações alternativas

- Seja X o conjunto de soluções viáveis de um MIP: $X \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p$
- Definição *(aproximada)*: um poliedro $P \subset \mathbb{R}^{n+p}$ é uma formulação de X se e somente se $X = P \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p)$
- Observação: esta definição exclui o caso de custo fixo pois as soluções que satisfazem o modelo estão em $X \cup \{(0, 1)\}$
- Conseqüência: existem infinitas formulações para um MIP !

$$X = \{ \ (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3), (5,4) \ \}$$



Formulações alternativas (cont.)

- Problema da mochila 0–1:

$$X = \{0, (1000), (0100), (0010), (0001), (0110), (0101), (0011)\} \subset \mathbb{B}^4$$

  - (P1) $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : \; 93x_1 + 49x_2 + 37x_3 + 29x_4 \leq 111, \; x_i \leq 1, i = 1, \ldots, 4\}$
  - (P2) $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : \; 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \; x_i \leq 1, i = 1, \ldots, 4\}$
  - (P3) $P_3 = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : \; 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, x_1 + x_2 \leq 1, \; x_1 + x_3 \leq 1, x_1 + x_4 \leq 1\}$

Formulações alternativas (cont.)

- Problema da Localização de facilidades (não capacitado):
  Para a facilidade j fixa tínhamos a seguinte restrição:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \leq m y_j.$$

  Poderíamos ter usado as m restrições abaixo:

$$x_{ij} \leq y_j, \qquad \forall\, i \in M.$$

  Usar mais restrições é bom ou é ruim ?

- Nos exemplos anteriores adicionamos ou subtraímos restrições. Poderíamos também ter escolhido ou adicionado outras variáveis.
  No segundo caso, temos as chamadas formulações estendidas.

Formulações alternativas (cont.)

- Formulação estendida para o *Uncapacitated Lot Sizing:*
- Variáveis:

$$w_{it} \doteq \begin{cases} \text{quantidade produzida no período } i \\ \text{para atender à demanda no período } t \end{cases}$$

$$y_t \doteq \begin{cases} 1, & \text{se há produção em } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Restrições:
  - Atendimento à demanda do período t:

$$\sum_{i=1}^{t} w_{it} = d_t, \qquad \forall\, t \in \{1, \ldots, h\}$$

Formulações alternativas (cont.)

- Formulação estendida para o *Uncapacitated Lot Sizing:*
- Restrições:
  - Limites de produção:

$$w_{it} \leq d_t y_i, \qquad \forall\, t \in \{1, \ldots, h\}$$

  - Não negatividade: $w_{it} \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq t \leq h$
- Função Objetivo:

$$\min \sum_{t=1}^{h} \sum_{i=1}^{t} (p_i + h_i + h_{i+1} + \ldots + h_{t-1}) w_{it} + \sum_{t=1}^{h} f_t y_t$$

- Observação: este modelo é um caso particular do UFL !

Formulação alternativa para o TSP

- Lembrar: as equações de eliminação de sub-ciclos são em número exponencial !
- Para obter uma formulação compacta criam-se novas variáveis: $u = (u_2, u_3, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$
- Novo modelo:

$$
\begin{array}{lll}
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & \forall\, j \in V & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & \forall\, i \in V & \\
u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, & \forall (i,j) \in E & (\star) \\
 & i \neq j \neq 1 &
\end{array}
$$

- Formulação mais compacta ! Número de restrições é polinomial !

TSP: formulação alternativa (cont.)

- Proposição: As restrições $(\star)$ evitam a formação de sub-ciclos.

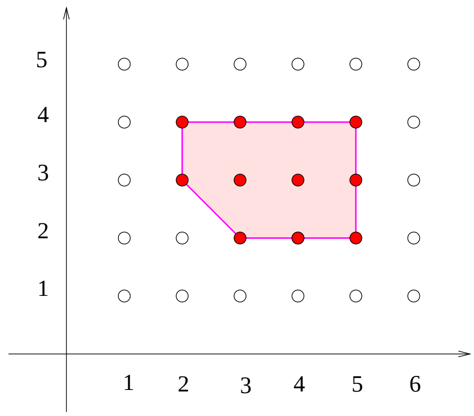
Prova: supor que $x \in \mathbb{B}^{|E|}$ satisfaz o modelo de alocação. Se x não representa um ciclo hamiltoniano, então x representa pelo menos dois sub-ciclos sendo que um deles não contém o vértice 1. Seja C este ciclo. Somando-se as restrições $(\star)$ para todos os arcos de C chega-se ao resultado. $\square$

- Proposição: As restrições $(\star)$ não eliminam ciclos hamiltonianos.

Prova: supor que $x \in \mathbb{B}^{|E|}$ satisfaz o modelo de alocação. Deve-se mostrar que existe $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ satisfazendo todas restrições $(\star)$ sempre que x representa um ciclo hamiltoniano. Para tanto, escolhe-se $u_i = k$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$ onde k é a posição do vértice i no ciclo, considerando o vértice 1 na primeira posição. $\square$

Formulações alternativas de um PLI

- Qual seria a formulação ideal ? Como comparar formulações ?
- Envoltória convexa do conjuto de soluções viáveis X: $\text{conv}(X)$



Posso resolver o MIP
por Programação Linear !

- Proposição: $\text{conv}(X)$ é um poliedro
- Proposição: Todo ponto extremo de $\text{conv}(X)$ está em X

Formulações alternativas de um PLI

- Em geral: :-(
  - o número de desigualdades que descrevem completamente o $\text{conv}(X)$ é exponencial
  - não existe maneira simples de caracterizar estas desigualdades
- Se P é uma formulação de X então $X \subseteq \text{conv}(X) \subseteq P$.
- Assim, dadas duas formulações P_1 e P_2 para X, diremos que P_1 é melhor do que P_2 se $P_1 \subset P_2$
- Exemplo da Mochila 0–1: $P_3 \subset P_2 \subset P_1$
- Exemplo do UFL:

$$(P_1) \quad \sum_{i \in M} x_{ij} \leq m y_j \quad (\star) \qquad\qquad (P_2) \quad x_{ij} \leq y_j, \; \forall\, i \in M \quad (\dagger)$$

Formulações alternativas de um PLI

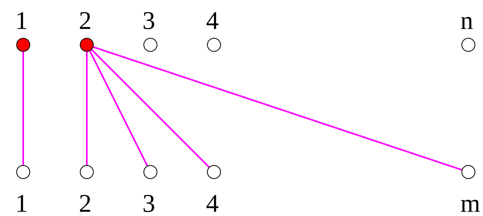
- Afirmativa 1: para $m > 1$ e $n > 1$, $P_2 \subseteq P_1$

  Prova: trivial pois $(\star) = \sum_{i \in M} (\dagger)$

- Afirmativa 2: para $m > 1$ e $n > 1$, $P_2 \subset P_1$

  Prova: devo exibir um ponto que está em P_1 mas não em P_2.

  - faça $x^*_{11} = 1, y^*_1 = 1/m$ e $x^*_{i1} = 0,\ \forall\, i \in \{2, \dots, m\}$
  - faça $x^*_{1j} = 0,\ \forall\, j \in \{2, \dots, n\};\ y^*_2 = 1$ e $x^*_{i2} = 1,\ \forall\, i \in \{2, \dots, m\}$
  - faça $y^*_j = 0$ e $x^*_{ij} = 0,\ \forall\, j \in \{3, \dots, n\}$



  - $(x^*, y^*) \in P_1 \setminus P_2$ logo P_2 é melhor do que P_1 $\square$

Formulações alternativas (cont.)

- a comparação de modelos é mais difícil quando as variáveis são diferentes nas duas formulações
- Projeção de um poliedro:

$$(P_1) \quad \min\{cx : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}, \qquad \text{onde } P \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(P_2) \quad \min\{cx : (x, w) \in Q \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p)\}, \qquad \text{onde } Q \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

- (P_2) é uma formulação estendida
- Definição: A projeção de Q sobre o sub-espaço $\mathbb{R}^n$ é dada por:

$$\texttt{proj}_x Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists w \in \mathbb{R}^p \text{ tal que } (x, w) \in Q\}$$

- Posso comparar (P_1) e $\texttt{proj}_x(P_2)$ pois ambas estão no espaço das variáveis originais x !

Formulações alternativas (cont.)

- Para o problema ULS, a relaxação da formulação estendida ao ser projetada no espaço das variáveis originais x, y e s fornece a envoltória convexa das soluções viáveis !

  Ou seja, temos a formulação ideal !

  Além disso, $(P_1) \setminus \texttt{proj}_x(P_2) \neq \emptyset$: considere por exemplo o ponto $x_t = d_t$, $y_t = d_t/M$ para todo $t \in \{1, \ldots, h\}$

- Formulações para o TSP:

$$(P_1) \quad \text{alocação}, \quad \sum_{i \in S} \sum_{j \in S \setminus \{i\}} x_{ij} \leq |S| - 1, \qquad (\dagger)$$
$$\forall\, S \subset \{1, \ldots, n\},\ 2 \leq |S| \leq n-1$$
$$(P_2) \quad \text{alocação}, \quad u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \qquad (\star)$$
$$\forall (i,j) \in E, i \neq j \neq 1$$

Formulações alternativas (cont.)

- Qual das duas formulações do TSP é melhor ?

- $P_2 \not\subseteq P_1$:

  Seja $n > 4$. Considere o ponto (u, x) satisfazendo $u_2 = u_3 = u_4 = 0$, $x_{23} = x_{34} = x_{42} = \frac{n-1}{n}$, $x_{32} = x_{43} = x_{24} = \frac{1}{n}$, $u_n = n - 3$, $u_i = i - 3$ e $x_{i,i+1} = 1$ para todo $i \in \{5, \ldots, n-1\}$, $x_{1,5} = x_{n,1} = 1$ e todas as demais variáveis nulas. Esse ponto satisfaz ao modelo de alocação e a todas desigualdades $(\star)$. Contudo, para $S = \{2, 3, 4\}$, como $\frac{n-1}{n} > \frac{2}{3}$, a restrição de subciclo para S está violada. $\square$

- $P_1 \subseteq P_2$: exercício ! difícil