Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Computação - IC
MO824 - Tópicos em Otimização Combinatória

Problemas bem resolvidos

Cid Carvalho de Souza

Setembro de 2005

Pergunta

- (IP) $z = \max\{cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$, com A e b inteiros;
- (LP) $z^{LP} = \max\{cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$: relaxação linear;
- (LP) resolve (IP) ?

Observação

Se a base ótima de (LP) dada por B é tal que $|\mathtt{det}(B)| = 1$, então (LP) resolve (IP). (Por quê ?)

Pergunta

Quando é que **todas** as bases ótimas satisfazem $|\mathtt{det}(B)| = 1$?

Definição 1

A é uma matriz **totalmente unimodular (TU)** se toda submatriz quadrada de A tiver determinante $0, +1$ ou -1.

Observação

É claro que se A é uma matriz **TU** de dimensão $m \times n$ então $a_{ij} \in \{-1, 0, +1\}$ para <u>todo</u> $i = 1, \ldots, m$ e para <u>todo</u> $j = 1, \ldots, n$.

Exemplos

- Matrizes TU:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrizes **não** TU: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proposição 2:

As seguintes afirmações são **equivalentes**:

1. A é TU;
2. A^T é TU;
3. (A, I) é TU;
4. Toda matriz obtida de A multiplicando-se uma linha (coluna) por -1 é TU;
5. Toda matriz obtida de A trocando-se duas linhas (colunas) entre si é TU;
6. Toda matriz obtida de A duplicando-se linhas (colunas) é TU.

Proposição 3:

Se a matriz A é TU então

1. Toda matriz obtida de A pela remoção de uma linha (coluna) é TU;
2. Toda matriz obtida de A por uma operação de *pivoteamento* é TU. Prova ?

Corolário 4:

Seja A uma matriz TU de dimensão $m \times n$. Sejam $b \in \mathbb{Z}^m$ e $c \in \mathbb{Z}^n$ vetores quaisquer tais que $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ e $Q(c) = \{u \in \mathbb{R}^m_+ : uA \geq c\}$ são poliedros não-vazios. Então, $P(b)$ e $Q(c)$ são ambos **inteiros**.

Proposição 5

Se $P(b)$ é inteiro para **todo** $b \in \mathbb{Z}^m$ para o qual ele não é vazio, então A é TU.
Nota: o resultado é **falso** se $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$.

Proposição 6

Assuma que A é uma matriz com todos elementos em $\{0, -1, +1\}$. Suponha que A contém no máximo dois elementos não-nulos por coluna e que existe uma partição (M_1, M_2) do conjunto M dos índices das linhas de A tal que, para toda coluna j contendo dois coeficientes não-nulos, tem-se que $\sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} = 0$. Então, A é TU.

Prova:

- Assuma que A não é TU *(contradição)*;
- Seja B a **menor** submatriz quadrada de A tal que $\det(B) \notin \{0, -1, +1\}$;
- *Fato 1*: toda coluna de B tem dois elementos não-nulos (minimalidade de B);
- *Fato 2*: somando-se as linhas de B em M_1 e substraindo-se aquelas em M_2, obtém-se o vetor nulo;
- **Conclusão**: o determinante de B é nulo. $\square$

Proposição 7 *(mais geral)*

A é uma matriz TU se e somente se para todo $M' \subseteq M$ existe uma partição (M'_1, M'_2) tal que $\left|\sum_{i \in M'_1} a_{ij} - \sum_{i \in M'_2} a_{ij}\right| \leq 1$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Observações:

- É difícil obter um algoritmo eficiente para reconhecer se uma matriz é TU (Seymour, 1984).
- Se um problema Π tem uma formulação PLI cuja matriz de restrições é TU então a relaxação linear desta formulação corresponde à **envoltória convexa** das soluções inteiras de Π. Além disso, o problema Π' correspondente ao dual da relaxação linear desta formulação forma um **par dual forte** com Π.

- A **matriz de incidência** vértice–aresta de um grafo bipartido é TU. Logo os problemas de emparelhamento máximo e cobertura mínima por vértices em grafos bipartidos formam um par dual forte.
- A matriz de restrições do problema de alocação *(assignment)* é TU.
- **O Problema do Fluxo de Custo Mínimo (PFCM)**:
  - rede de entrada: $D = (V, A)$ (grafo direcionado);
  - demandas: $b_i, \forall i \in V$, satisfazendo $\sum_{i \in V} b_i = 0$;
  - custos: c_{ij} por unidade de fluxo no arco (i,j), para todo arco em A;
  - capacidades; h_{ij} limite **máximo** de fluxo no arco (i,j), para todo arco em A;
  - Formulação:

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} & \\
s.a. & \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} = b_i, \ \forall i \in V & (I) \\
 & 0 \leq x_{ik} \leq h_{ij}, \ \forall (i,j) \in A & (II)
\end{array}
$$

Proposição 8

A matriz de restrições de um PFCM é TU.

Proposição 9

Se as demandas b_i e as capacidades h_{ij} são inteiras então (I) e (II) descrevem a **envoltória convexa** dos fluxos viáveis inteiros.

Caso especial do PFCM: caminhos mais curtos

Achar o caminho mais curto de s para t em D. Formulação:

$$
\begin{array}{ll}
\min & z = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
s.a. & \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} - \sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} = 0, \ \forall i \in V - \{s,t\} \\
 & \sum_{k\in V^-(s)} x_{ks} - \sum_{k\in V^+(s)} x_{sk} = -1, \\
 & \sum_{k\in V^-(t)} x_{kt} - \sum_{k\in V^+(t)} x_{tk} = +1, \\
 & x \in \mathbb{Z}_+^{|A|}.
\end{array}
$$

Nota: $x_{ij} = 1$ se e somente se (i,j) está no caminho mínimo de s para t.

Teorema 10

z é o comprimento do caminho mais curto de s para t se e somente se existem valores π para todo i em V tais que: $\pi_s = 0$, $\pi_t = z$ e $\pi_j - \pi_i \leq c_{ij}$ para todo (i,j) em A.

Prova:

- Dual: $\begin{array}{ll} \max & w_{LP} = \pi_t - \pi_s \\ s.a. & \pi_j - \pi_i \leq c_{ij}, \ \forall (i,j) \in A. \end{array}$
- Observação: se π é uma solução viável do dual, então $\pi + \alpha.\mathbf{1}$ também é. Portanto, posso fixar $\pi_s = 0 \Rightarrow \pi_t = w_{LP}$.
- A unimodularidade total implica que $\pi_t = z$. $\square$

Solução dual

Fazer $\pi_i =$ comprimento do caminho mais curto de s para i.

Caso especial do PFCM: fluxo máximo

Achar o fluxo máximo que pode ir de s para t em D. Formulação (adicionar o arco (t,s) à rede):

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_{ts} \\ s.a. & \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} = 0, \ \forall i \in V \\ & 0 \le x_{ik} \le h_{ij}, \ \forall (i,j) \in A; \\ & x \in \mathbb{R}_+^{|A|}. \end{array}$$

Nota: x_{ij} fluxo no arco (i,j).

Dual

$$\begin{array}{ll} \min & \omega = \sum_{(i,j) \in A} h_{ij} w_{ij} \\ s.a. & u_i - u_j + w_{ij} \ge 0, \ \forall (i,j) \in A; \\ & u_t - u_s \ge 1, \\ & w \in \mathbb{R}_+^{|A|}. \end{array}$$

Observações

1. Unimodularidade Total: solução do dual é inteira;
2. Existe solução com $u_s = 0$ pois, se u é solução viável do dual, então $u + \alpha.\mathbf{1}$ também é.
3. Definir: $X = \{j \in V : u_j \le 0\}$ e $\tilde{X} = \{j \in V : u_j \ge 1\}$;
4. $s \in X$ e $t \in \tilde{X}$;
5. $$\begin{array}{lcll} \omega & = & \sum_{(i,j) \in A} h_{ij} w_{ij} & (h_{ij}, w_{ij} \ge 0) \\ \omega & \ge & \sum_{(i,j) \in \delta(X,\tilde{X})} h_{ij} w_{ij} & (w_{ij} \ge u_j - u_i \ge 1, i \in X, j \in \tilde{X}) \\ \omega & \ge & \sum_{(i,j) \in \delta(X,\tilde{X})} h_{ij} = \underline{\omega} & (\text{lim. inferior de } \omega) \end{array}$$
6. Construindo uma solução dual de custo $\underline{\omega}$:
$$\begin{array}{l} u_j = 0, \ \forall j \in X \\ u_j = 1, \ \forall j \in \tilde{X} \end{array} \implies w_{ij} = \begin{cases} 1, \ \forall i \in X, j \in \tilde{X} \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$
7. **Conclusão**: o dual tem uma solução ótima binária !

Observação

A solução binária ótima do dual é o vetor característico das arestas do corte $\delta(X, \tilde{X})$.

Teorema 11 *(Fluxo Máximo-Corte Mínimo)*

Dada uma rede e dois vértices s e t da mesma, os problemas do fluxo máximo entre s e t e do corte mínimo que separa s de t formam um par dual forte.

Florestas e Árvores Ótimas

O problema

Dado um grafo $G = (V, E)$ com pesos c_e associados às arestas de E, encontre um subgrafo acíclico de G cujo peso seja máximo.

Algoritmo de Kruskal *(Guloso)*

- Ordenar as arestas em ordem decrescente de peso.
  Assumir que: $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_m$.
- Fazer: $T \leftarrow \{\}$; e $i \leftarrow 1$;
- **Enquanto** $|T| < |V| - 1$ e $c_i \geq 0$ **faça**
      Se $T \cup \{i\}$ é acíclico **então** $T \leftarrow T \cup \{i\}$;
      $i \leftarrow i + 1$;
  fim-enquanto
- **Retornar** T.

Teorema 12

O algoritmo guloso é polinomial e termina com uma floresta de peso máximo (ótima).

Formulação PLI

$$\begin{array}{lll} \max & z = \sum_{e \in E} c_e x_e & \\ s.a. & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq V, & (1) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 2 \leq |S| \leq |V| & \\ & x_e \geq 0, \; \forall e \in E, x \in \mathbb{Z}^{|E|}. & (2) \end{array}$$

Teorema 13

A envoltória convexa dos vetores de incidência das florestas de um grafo é dada pelas desigualdades (1) e (2).

Existência de algoritmo eficiente $\times$ Envoltória Convexa Conhecida $\times$ Par dual forte disponível

Submodularidade e Matróides

Seja N um conjunto e a função $f : 2^{|N|} \rightarrow \mathbb{R}$:

1. f é submodular se $f(A) + f(B) \geq f(A \cap B) + f(A \cup B)$ para todo $A, B \subseteq N$.
2. f é não decrescente se $f(A) \leq f(B)$ para todo $A \subseteq B \subseteq N$.

Proposição 14

- f é submodular se e somente se, para todo j e k em N e $A \subseteq N \setminus \{j, k\}$, tem-se que

$$f(A \cup \{j\}) - f(A) \geq f(A \cup \{j, k\}) - f(A \cup \{k\}).$$

- f é submodular e não decrescente se e somente se, para todo A e $B \subseteq N$, tem-se que:

$$f(A) \leq f(B) + \sum_{j \in A \setminus B} [f(B \cup \{j\}) - f(B)].$$

Definições

Seja f uma função submodular, não-decrescente com $f(\emptyset) = 0$.

- O poliedro submodular é definido por

$$P_f = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{j \in S} x_j \le f(S), \forall S \subseteq N\}.$$

- O problema de otimização submodular (POS) é dado por $z = \max\{cx : x \in P_f\}$.

Algoritmo guloso para o POS

1. Ordenar as variáveis de modo que

$$c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_r > 0 \ge c_{r+1} \ge \ldots \ge c_n.$$

2. Faça $x_i \leftarrow f(S^i) - f(S^{i-1}), \quad 1 \le i \le r$
   $x_i \leftarrow 0, \quad r+1 \le i \le n$
   onde $S^0 \leftarrow \emptyset$ e $S^i = \{1, 2, \ldots, i\}$ para $1 \le i \le r$.

Teorema 15

O algoritmo guloso resolve o POS.

Prova: Parte I – Viabilidade de x

- $x_i = f(S^i) - f(S^{i-1}) \ge 0$, para $1 \le i \le r$ pois f é não-decrescente;
- Dado $T \subseteq N$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in T} x_j &= \sum_{j \in T \cap S^r} [f(S^j) - f(S^{j-1})] && \text{(submodularidade)} \\
&\le \sum_{j \in T \cap S^r} [f(S^j \cap T) - f(S^{j-1} \cap T)] && (f \text{ não-decrescente}) \\
&\le \sum_{j \in S^r} [f(S^j \cap T) - f(S^{j-1} \cap T)] \\
&= f(S^r \cap T) - \underbrace{f(S^0 \cap T)}_{=f(\emptyset)=0} \le f(T).
\end{aligned}$$

- Custo da solução gulosa: $z^G = \sum_{i=1}^r c_i [f(S^i) - f(S^{i-1})]$.

Prova: Parte II – Otimalidade de x

- Formulação do dual: $\begin{cases} \min & w = \sum_{S \subseteq N} f(S) y_S \\ s.a. & \sum_{S : j \in S} y_S \geq c_j, \ \forall j \in N, \\ & y_S \geq 0, \ \forall S \subseteq N \end{cases}$
- Solução dual viável: $\begin{cases} y_{S^i} = c_i - c_{i+1}, & 1 \leq i \leq r-1, \\ y_{S^r} = c_r, & \\ y_S = 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
- $y_S \geq 0$ para todo S pois os custos estão ordenados.
- se $j \leq r$, $\sum_{S : j \in S} y_S \geq \sum_{i=j}^{r} y_{S^i} = c_j$.
- se $j > r$, $\sum_{S : j \in S} y_S = 0 \geq c_j$.
- Custo da solução dual:

$$w(y) = \sum_{i=1}^{r} f(S^i) y_{S^i} = \sum_{i=1}^{r-1} [c_i - c_{i+1}] f(S^i) + f(S^r) c_r, \Rightarrow$$
$$w(y) = \sum_{i=1}^{r} c_i [f(S^i) - f(S^{i-1})] = z^G.$$

Logo a solução gulosa é ótima. $\square$

Observações

- Se $f : 2^N \to \mathbb{Z}$, o algoritmo guloso fornece uma solução inteira para o Problema de Otimização Submodular !
- Se $f : 2^N \to \mathbb{Z}$ e $f(S \cup \{j\}) - f(S) \in \{0, 1\}$ para todo $S \subseteq N$ e $j \in N \setminus S$, então f é dita ser uma **função posto submodular (rank submodular function)** e a solução ótima é **binária** !

Proposição 16

Seja r um função posto submodular (FPS) com $r(\emptyset) = 0$. Então

(i) $r(A) \leq |A|$, para todo $A \subseteq N$;

(ii) Se $r(A) = |A|$ então $r(B) = |B|$, para todo $B \subset A \subseteq N$;

(iii) Seja x^A o vetor de incidência de $A \subseteq N$.
Então, $x^A \in P_r$ *se e somente se* $r(A) = |A|$.

Prova

(i) : $r(A) \leq r(\emptyset) + \sum_{j \in A \setminus \emptyset}[r(\emptyset \cup \{j\}) - r(\emptyset)]$ (Proposição 14)
$r(A) = 0 + \sum_{j \in A} r(\{j\}) \leq |A|$. ($r$ é FPS)

(ii) : $r(A) = |A| \leq r(B) + \sum_{j \in A \setminus B}[r(B \cup \{j\}) - r(B)]$ (Proposição 14)
$\leq |B| + |A \setminus B| = |A|$. ($r$ FPS, $B \subseteq A$)

Logo, $r(B) = |B|$.

Prova *Proposição 16 (iii)*

(iii) : Se $r(A) < |A|$, então $\sum_{j \in A} x_j^A = |A| > r(A)$.
Portanto, $x^A \notin P_r$.

Se $r(A) = |A|$, então, dado $S \subseteq N$ qualquer, tem-se:
$\sum_{j \in S} x_j^A = \sum_{j \in S \cap A} x_j^A = |A \cap S| \underbrace{=}_{(ii)} r(A \cap S)$.

Como r é submodular, conclui-se que $\sum_{j \in S} x_j^A \leq r(S)$.
Logo, $x^A \in P_r$. $\square$.

Definição

Seja $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de N.
$\mathcal{I} = (N, \mathcal{F})$ é um **sistema de independência** se, para todo $F_1 \in \mathcal{F}$ e todo $F_2 \subseteq F_1$ tem-se que $F_2 \in \mathcal{F}$.

Neste caso, os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de **conjuntos independentes**.

Definição

$\mathcal{I} = (N, \mathcal{F})$ é uma **matróide** se $\mathcal{I}$ é um sistema de independência e, para todo $T \subseteq N$, todo subconjunto independente **maximal** em T tem o mesmo tamanho.

Proposição 17

Seja r uma FPS em N. Seja $\mathcal{F}$ dado por $\mathcal{F} = \{T \subseteq N : r(T) = |T|\}$.
Então, $\mathcal{I} = (N, \mathcal{F})$ é uma matróide.

Prova

Parte I : $\mathcal{I}$ é um sistema de independência (pela Proposição 16 (ii)).

Parte II : $\mathcal{I}$ é uma matróide (por contradição).
Sejam A e B dois conjuntos independentes *maximais* em $T \subseteq N$, com $r(A) = |A| > r(B) = |B|$.

Pela Proposição 14, $r(A) \leq r(B) + \sum_{j \in A \setminus B} [r(B \cup \{j\}) - r(B)]$ †.
Como A e B são subconjuntos de T, se $j \in A \setminus B$, então $B \subset B \cup \{j\} \subseteq T$.
Além disso, como B é independente maximal, $r(B \cup \{j\}) < |B| + 1$, ou ainda, $r(B \cup \{j\}) \leq r(B)$.

Logo, de ($\dagger$), chega-se a $r(A) = |A| \leq r(B) = |B|$, contrariando a hipótese. $\square$

Teorema 18

O algoritmo guloso resolve o problema de encontrar o conjunto independente de peso máximo em uma matróide.

Observações

1. o conjunto de arestas de florestas de um grafo $G = (V, E)$ forma uma matróide;
2. A função $r : 2^E \longrightarrow \mathbb{Z}$ onde $r(E')$ é o tamanho da maior floresta em $G = (V, E')$ é FPS;
3. Se $S \subseteq V$ e o subgrafo induzido por S em G é conexo, então $r(E(S)) = |S| - 1$. Logo, o poliedro das florestas é um caso particular do poliedro submodular.