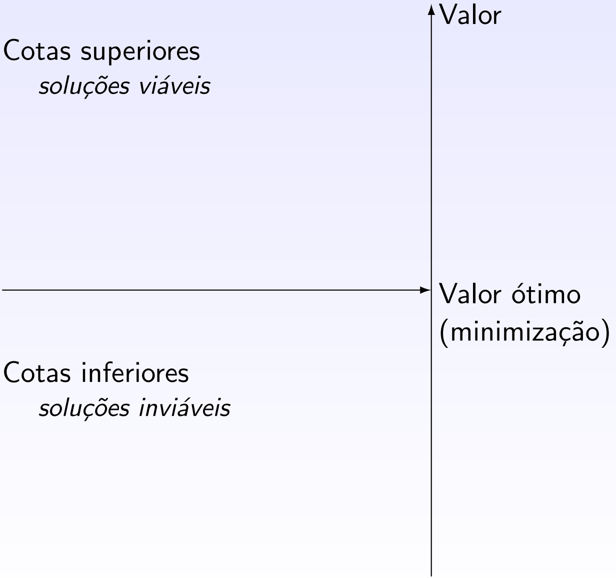
Relaxação Lagrangiana

Margarida P. Mello

MT852 – 15 de maio, 2009

Contexto


Valor
Cotas superiores
soluções viáveis
Valor ótimo
(minimização)
Cotas inferiores
soluções inviáveis

Valor

Heurísticas

Destinadas a classes específicas
Busca local
Têmpera simulada
Algoritmos genéticos
Redes neurais
...

Valor ótimo (minimização)

Relaxações

Linear
Lagrangiana

Usos

- como um método

Usos

- como um método
- como um coadjuvante (e.g., R.L. + B&B)

Usos

- como um método
- como um coadjuvante (e.g., R.L. + B&B)
- na avaliação de resultados obtidos com outras heurísticas

Idéia

Problema linear inteiro

$$
\begin{aligned}
(PI) \quad \min \quad & z_{PI} = cx \\
\text{s.a} \quad & A^1 x \geq b^1 \\
& A^2 x \geq b^2 \\
& x_j \in \mathbb{Z}, \quad \forall j
\end{aligned}
$$

Idéia

Problema linear inteiro

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & z_{PI} = cx \\
& \text{s.a} & A^1 x \geq b^1 \\
& & A^2 x \geq b^2 \\
& & x_j \in \mathbb{Z}, \quad \forall j
\end{array}
$$

Se $\lambda \geq 0$, $z_{PI} \geq z'$:

$$
\begin{array}{ll}
\min & z' = cx + \lambda(b^1 - A^1 x) \\
\text{s.a} & A^1 x \geq b^1 \\
& A^2 x \geq b^2 \\
& x_j \in \mathbb{Z}, \quad \forall j
\end{array}
$$

Problema linear inteiro

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & z_{PI} = cx \\
 & \text{s.a} & A^1 x \geq b^1 \\
 & & A^2 x \geq b^2 \\
 & & x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall j
\end{array}
$$

E $z' \geq z(\lambda)$:

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \min & z(\lambda) = cx + \lambda(b^1 - A^1 x) \\
 & \text{s.a} & A^2 x \geq b^2 \\
 & & x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall j
\end{array}
$$

Problema linear inteiro

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & z_{PI} = cx \\
 & \text{s.a} & A^1 x \geq b^1 \\
 & & A^2 x \geq b^2 \\
 & & x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall j
\end{array}
$$

E $z' \geq z(\lambda)$:

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \min & z(\lambda) = cx + \lambda(b^1 - A^1 x) \\
 & \text{s.a} & \left.\begin{array}{l} A^2 x \geq b^2 \\ x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall j \end{array}\right\} Q
\end{array}
$$

Resultado importante

Dual Lagrangiano (melhor cota inferior)

Resultado importante

Dual Lagrangiano (melhor cota inferior)

$$(DL) \quad z_{DL} = \max_{\lambda \geq 0} \; z(\lambda)$$

Teorema (Nemhauser & Wolsey, p. 327–328)

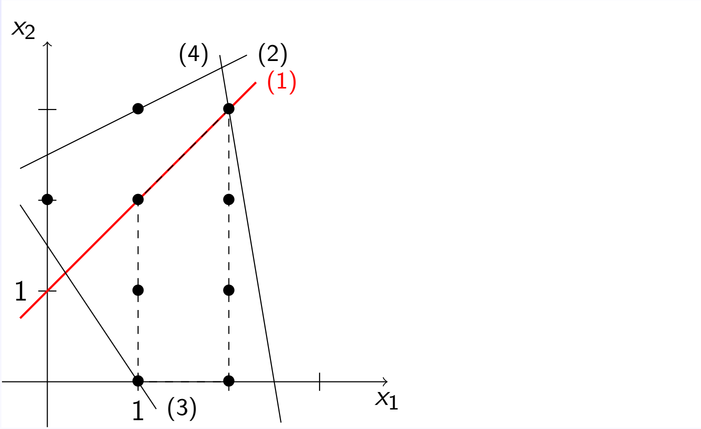
$$z_{DL} = \min\{cx \mid A^1 x \geq b^1, \;\; x \in \text{conv}\,(Q)\}$$

Exemplo

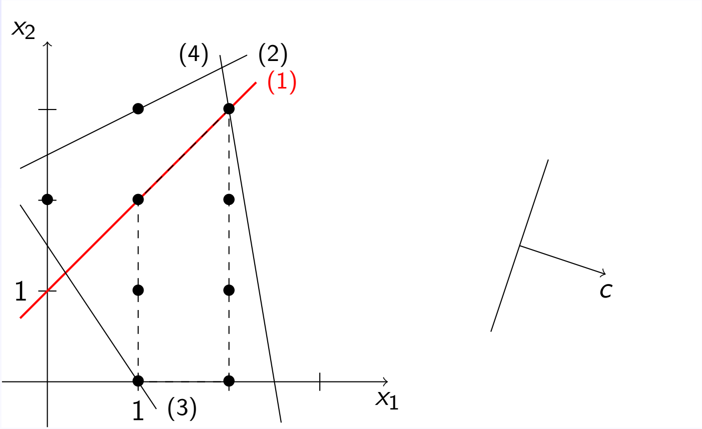
Problema

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\min & 3x_1 & - & x_2 & & & \\
\text{s.a} & x_1 & - & x_2 & \geq & -1 & (1) \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 & (2) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 3 & (3) \\
 & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 15 & (4) \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 & \\
 & & & x_1,\ x_2 & \in & \mathbb{Z} &
\end{array}
$$

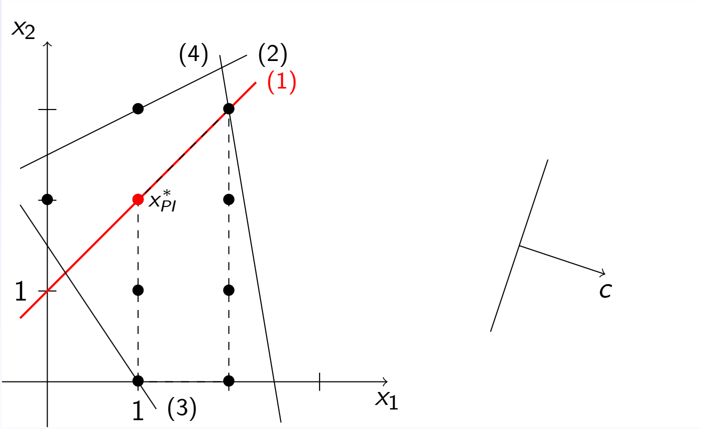
Exemplo — cont.



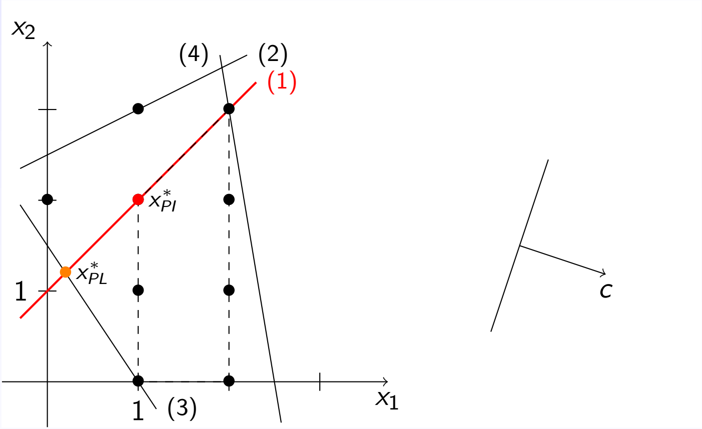
Exemplo — cont.



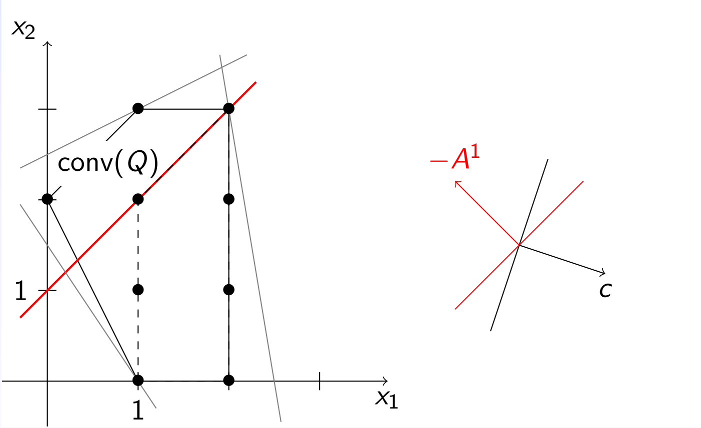
Exemplo — cont.



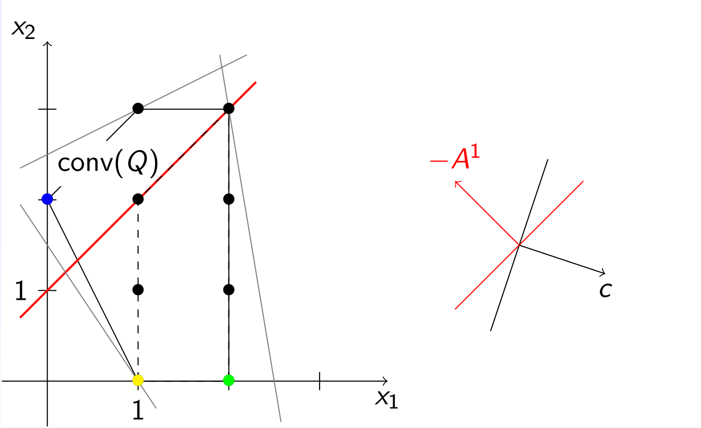
Exemplo — cont.



Exemplo — cont.



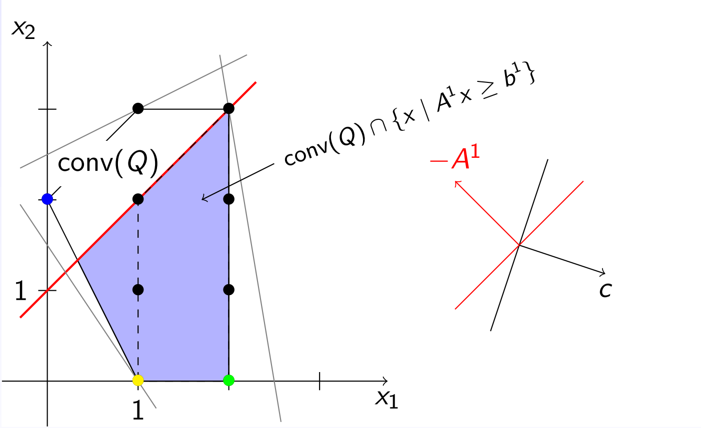
Exemplo — cont.



λ	$(0, 5/3)$	$(5/3, 3)$	$(3, \infty)$
$x^*(\lambda)$	$(0, 2)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$
$z(\lambda)$	$-2+\lambda$	$3-2\lambda$	$6-3\lambda$

$$\Rightarrow \quad z_{DL} = z\left(\tfrac{5}{3}\right) = -\tfrac{1}{3}$$

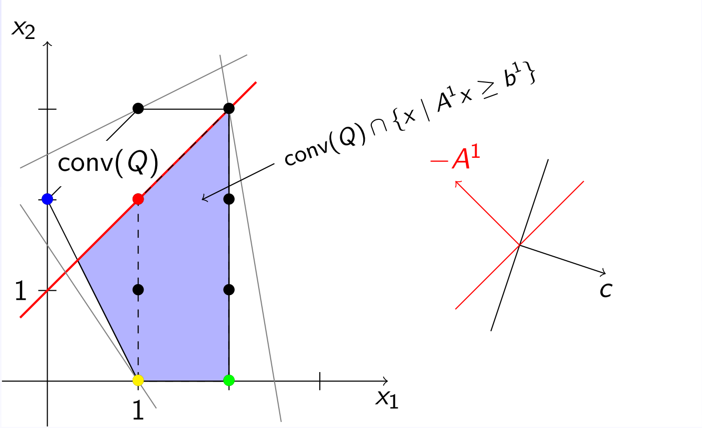
Exemplo — cont.



λ	$(0, 5/3)$	$(5/3, 3)$	$(3, \infty)$
$x^*(\lambda)$	$(0, 2)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$
$z(\lambda)$	$-2 + \lambda$	$3 - 2\lambda$	$6 - 3\lambda$

$$\Rightarrow \quad z_{DL} = z\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

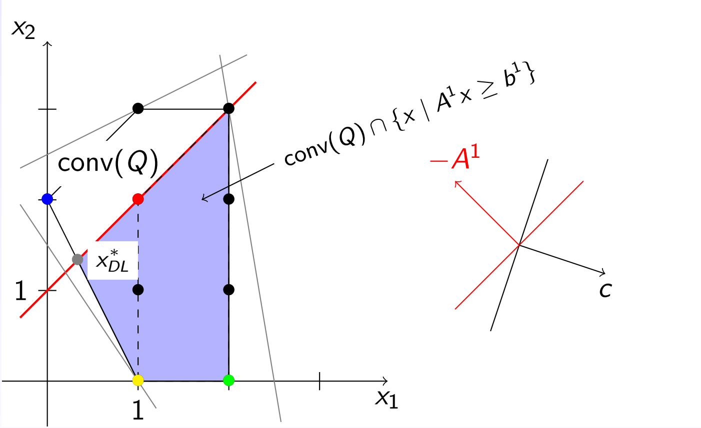
Exemplo — cont.



λ	$(0, 5/3)$	$(5/3, 3)$	$(3, \infty)$
$x^*(\lambda)$	$(0, 2)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$
$z(\lambda)$	$-2 + \lambda$	$3 - 2\lambda$	$6 - 3\lambda$

$$\Rightarrow \quad z_{DL} = cx^*_{DL} = -\frac{1}{3}$$

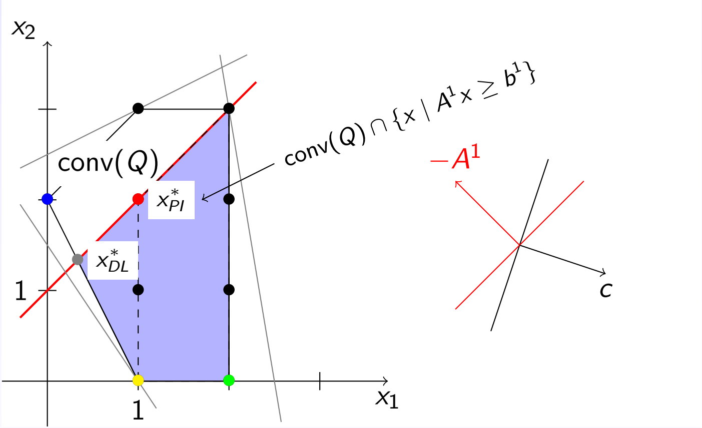
Exemplo — cont.



λ	$(0, 5/3)$	$(5/3, 3)$	$(3, \infty)$
$x^*(\lambda)$	$(0, 2)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$
$z(\lambda)$	$-2 + \lambda$	$3 - 2\lambda$	$6 - 3\lambda$

$$\Rightarrow \quad z_{DL} = cx^*_{DL} = -\frac{1}{3}$$

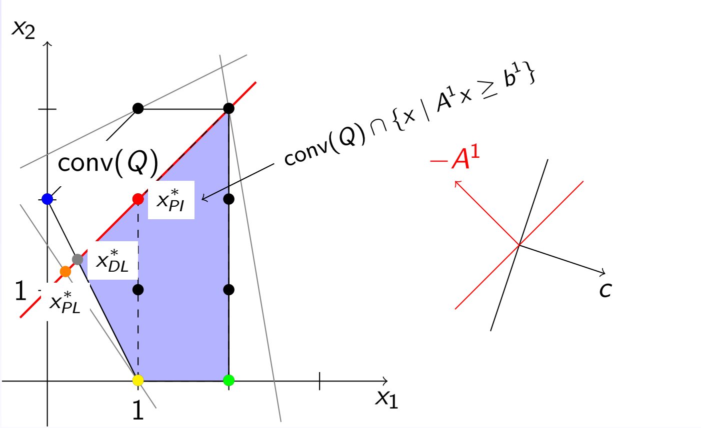
Exemplo — cont.



λ	$(0, 5/3)$	$(5/3, 3)$	$(3, \infty)$
$x^*(\lambda)$	$(0, 2)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$
$z(\lambda)$	$-2 + \lambda$	$3 - 2\lambda$	$6 - 3\lambda$

$$\Rightarrow \quad z_{DL} = cx^*_{DL} = -\frac{1}{3}$$

Exemplo — cont.



λ	$(0, 5/3)$	$(5/3, 3)$	$(3, \infty)$
$x^*(\lambda)$	$(0, 2)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$
$z(\lambda)$	$-2 + \lambda$	$3 - 2\lambda$	$6 - 3\lambda$

$$\Rightarrow \quad z_{DL} = cx^*_{DL} = -\frac{1}{3}$$

Exemplo — cont.

Gap de dualidade

Exemplo — cont.

Gap de dualidade

$$z_{PI} - z_{DL} = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Exemplo — cont.

Gap de dualidade

$$z_{PI} - z_{DL} = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Comparando com relaxação linear

$$x_{PL} = \left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right) \Rightarrow z_{PL} = -\frac{3}{5}$$

Exemplo — cont.

Gap de dualidade

$$z_{PI} - z_{DL} = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Comparando com relaxação linear

$$x_{PL} = \left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right) \Rightarrow z_{PL} = -\frac{3}{5}$$

Logo

$$z_{PI} > z_{DL} > z_{PL}$$

Exemplo — cont.

Gap de dualidade

$$z_{PI} - z_{DL} = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Comparando com relaxação linear

$$x_{PL} = \left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right) \Rightarrow z_{PL} = -\frac{3}{5}$$

Logo

$$z_{PI} > z_{DL} > z_{PL}$$

Note que $x^*(\lambda^*)$ é viável para (PI), porém não é ótima para (PI).

Demonstração

Fato (N&W, p. 106): se dados são racionais, $\mathrm{conv}(Q)$ é poliedro racional e $\min\{dx \mid x \in Q\} = \min\{dx \mid x \in \mathrm{conv}(Q)\}$.

Demonstração

Fato (N&W, p. 106): se dados são racionais, $\mathrm{conv}(Q)$ é poliedro racional e $\min\{dx \mid x \in Q\} = \min\{dx \mid x \in \mathrm{conv}(Q)\}$.

$\mathrm{conv}(Q) = \mathrm{conv}(P) + \mathrm{conic}(R)$.

Demonstração

Fato (N&W, p. 106): se dados são racionais, $\mathrm{conv}(Q)$ é poliedro racional e $\min\{dx \mid x \in Q\} = \min\{dx \mid x \in \mathrm{conv}(Q)\}$.

$\mathrm{conv}(Q) = \mathrm{conv}(P) + \mathrm{conic}(R)$.

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= \min\{(c - \lambda A^1)x + \lambda b^1 \mid x \in Q\} \\ &= \min\{cx + \lambda(b^1 - A^1 x) \mid x \in \mathrm{conv}(Q)\} \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{se } Q = P = \emptyset \\ -\infty, & \text{se } \exists r^j \in R \mid (c - \lambda A^1) r^j < 0 \\ cx^k + \lambda(b^1 - A^1)x^k, & \text{c.c., para algum } x^k \in P \end{cases} \end{aligned}$$

dem. — cont.

Logo

$$z_{DL} = \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in \mathrm{conv}(Q)} \{cx + \lambda(b^1 - A^1 x)\}$$

dem. — cont.

Logo

$$
\begin{aligned}
z_{DL} &= \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in \mathrm{conv}(Q)} \{cx + \lambda(b^1 - A^1 x)\} \\
&= \max_{z,\lambda} z \\
&\qquad z \leq cx^k + \lambda(b^1 - A^1 x^k), \quad \forall x^k \in P \\
&\qquad (c - \lambda A^1) r^j \geq 0, \quad \forall r^j \in R \\
&\qquad \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

dem. — cont.

Logo

$$
\begin{aligned}
z_{DL} &= \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in \mathrm{conv}(Q)} \{cx + \lambda(b^1 - A^1 x)\} \\
&= \max_{z,\lambda} z \\
&\qquad z \leq cx^k + \lambda(b^1 - A^1 x^k), \quad \forall x^k \in P \\
&\qquad (c - \lambda A^1) r^j \geq 0, \quad \forall r^j \in R \\
&\qquad \lambda \geq 0 \\
&= \max_{z,\lambda} z \\
&\qquad z + \lambda(A^1 x^k - b^1) \leq cx^k, \quad \forall x^k \in P \\
&\qquad \lambda A^1 r^j \leq cr^j, \quad \forall r^j \in R \\
&\qquad \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

dem. — cont.

Teor. de dualidade de PL $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
z_{DL} = \min\ & c\left(\textstyle\sum_k \alpha_k x^k + \sum_j \mu_j r^j\right) \\
& \textstyle\sum_k \alpha_k = 1 \\
& A^1\left(\textstyle\sum_k \alpha_k x^k + \sum_j \mu_j r^j\right) \geq b^1 \left(\textstyle\sum_k \alpha_k\right) \\
& \alpha_k, \mu_j \geq 0, \quad \forall k, j
\end{aligned}
$$

dem. — cont.

Teor. de dualidade de PL $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
z_{DL} = \min\ & c\left(\sum_k \alpha_k x^k + \sum_j \mu_j r^j\right)\\
& \sum_k \alpha_k = 1\\
& A^1\left(\sum_k \alpha_k x^k + \sum_j \mu_j r^j\right) \geq b^1\left(\sum_k \alpha_k\right)\\
& \alpha_k, \mu_j \geq 0, \quad \forall k, j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \min_{\text{s.a}}\ & cx\\
& A^1 x \geq b^1\\
& x \in \text{conv}(Q)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Corolário

Se

$$\operatorname{conv}(Q) \cap \{x \mid A^2 x \geq b^2\} = \operatorname{conv}\{x \mid A^1 x \geq b^1, A^2 x \geq b^2, x_j \in \mathbb{Z}_+\},$$

então cota fornecida por relaxação lagrangiana coincide com cota fornecida por relaxação linear.

Questões importantes

- Estratégia: quais restrições relaxar/dualizar? Levar em consideração

Questões importantes

- Estratégia: quais restrições relaxar/dualizar? Levar em consideração
  - a qualidade da cota z_{DL}

Questões importantes

- Estratégia: quais restrições relaxar/dualizar?
  Levar em consideração
  - a qualidade da cota z_{DL}
  - a facilidade de solução de (PR_λ)

Questões importantes

- Estratégia: quais restrições relaxar/dualizar?
  Levar em consideração
  - a qualidade da cota z_{DL}
  - a facilidade de solução de (PR_λ)
  - a facilidade de solução de (DL)

Questões importantes

- Estratégia: quais restrições relaxar/dualizar?
  Levar em consideração
  - a qualidade da cota z_{DL}
  - a facilidade de solução de (PR_λ)
  - a facilidade de solução de (DL)
- Tática: como estimar/atualizar λ?

Questões importantes

- Estratégia: quais restrições relaxar/dualizar?
  Levar em consideração
  - a qualidade da cota z_{DL}
  - a facilidade de solução de (PR_λ)
  - a facilidade de solução de (DL)
- Tática: como estimar/atualizar λ?
  - método do subgradiente

Método do subgradiente

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \max & z(\lambda) = cx + \lambda(b - Ax) \\
 & \text{s.a} & x \in X
\end{array}
$$

Método do subgradiente

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \max & z(\lambda) = cx + \lambda(b - Ax) \\
 & \text{s.a} & x \in X
\end{array}
$$

- $z(\lambda)$ é convexa, linear por partes.

Método do subgradiente

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \max & z(\lambda) = cx + \lambda(b - Ax) \\
 & \text{s.a} & x \in X
\end{array}
$$

- $z(\lambda)$ é convexa, linear por partes.
- $(b - Ax^*(\lambda)) \in \partial z(\lambda)$

Método do subgradiente

$$(PR_\lambda) \quad \max \quad z(\lambda) = cx + \lambda(b - Ax)$$
$$\text{s.a} \quad x \in X$$

- $z(\lambda)$ é convexa, linear por partes.
- $(b - Ax^*(\lambda)) \in \partial z(\lambda)$

Método do subgradiente

$$(PR_\lambda) \quad \max \quad z(\lambda) = cx + \lambda(b - Ax)$$
$$\text{s.a} \quad x \in X$$

- $z(\lambda)$ é convexa, linear por partes.
- $(b - Ax^*(\lambda)) \in \partial z(\lambda)$

Passo 1	(Inicialização) $k \leftarrow 0$ Chuta λ^0
Passo 2	(Iteração) Enquanto não satisfaz critério de parada $\lambda \leftarrow \lambda^k$ Seja $x^k \in \operatorname{argmax}\{cx + \lambda^k(b - Ax) \mid x \in X\}$ $\lambda_i^{k+1} = [\lambda_i^k - \mu_k(b - Ax^k)_i]^+$ $k \leftarrow k + 1$

Exemplo

Problema de cobertura

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & cx \\
 & \text{s.a} & Ax \geq \mathbf{1} \\
 & & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Exemplo

Problema de cobertura

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & cx \\
 & \text{s.a} & Ax \geq \mathbf{1} \\
 & & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Dualizando restrições de cobertura

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \min & (c - \lambda A)x + \sum_i \lambda_i = Cx + \sum_i \lambda_i \\
 & \text{s.a} & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Exemplo

Problema de cobertura

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & cx \\
& \text{s.a} & Ax \geq \mathbf{1} \\
& & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Dualizando restrições de cobertura

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \min & (c - \lambda A)x + \sum_i \lambda_i = Cx + \sum_i \lambda_i \\
& \text{s.a} & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Solução ótima

$$
x_j^*(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{se } C_j \leq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}
$$

Exemplo

Problema da mochila

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
z & = & \max & 10y_1 & + & 4y_2 & + & 14y_3 & & \\
 & & & 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & \leq & 4 \\
 & & & & & & & y & \in & B^3.
\end{array}
$$

Exemplo

Problema da mochila

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
z & = & \max & 10y_1 & + & 4y_2 & + & 14y_3 & & \\
 & & & 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & \leq & 4 \\
 & & & & & & & y & \in & B^3.
\end{array}
$$

Dualizando a restrição de capacidade

$$
z_{DL} = \min_{\lambda \geq 0} z(\lambda),
$$

Exemplo

Problema da mochila

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} z & = & \max & 10y_1 & + & 4y_2 & + & 14y_3 & & \\ & & & 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & \leq & 4 \\ & & & & & & & y & \in & B^3. \end{array}$$

Dualizando a restrição de capacidade

$$z_{DL} = \min_{\lambda \geq 0} z(\lambda),$$

$$\begin{array}{rcl} z(\lambda) & = & \max \quad (10 - 3\lambda)y_1 + (4 - \lambda)y_2 + (14 - \lambda)y_3 + 4\lambda \\ & & y \in B^3, \end{array}$$

onde $\lambda \geq 0$.

Exemplo — cont

Logo

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= \max\{0, 10 - 3\lambda\} + \max\{0, 4 - \lambda\} \\ &\quad + \max\{0, 14 - 4\lambda\} + 4\lambda \end{aligned}$$

Exemplo — cont

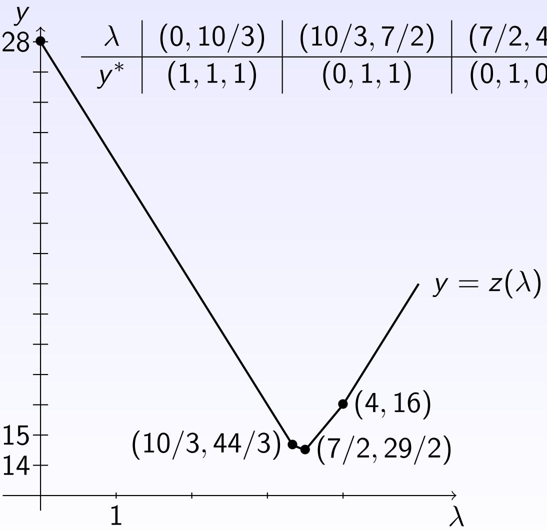
Logo

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= \max\{0, 10 - 3\lambda\} + \max\{0, 4 - \lambda\} \\ &\quad + \max\{0, 14 - 4\lambda\} + 4\lambda \end{aligned}$$

$z(\lambda) =$ função convexa, linear por partes

Exemplo — cont

λ	$(0, 10/3)$	$(10/3, 7/2)$	$(7/2, 4)$	$(4, \infty)$
y^*	$(1, 1, 1)$	$(0, 1, 1)$	$(0, 1, 0)$	$(0, 0, 0)$



Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1
1	$\max\{0 - 1(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 4$	$1/2$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1
1	$\max\{0 - 1(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 4$	$1/2$
2	$\max\{4 - \frac{1}{2}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 2\frac{1}{2}$	$1/4$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1
1	$\max\{0 - 1(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 4$	$1/2$
2	$\max\{4 - \frac{1}{2}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 2\frac{1}{2}$	$1/4$
3	$\max\{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{1}{2}$	$1/8$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1
1	$\max\{0 - 1(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 4$	$1/2$
2	$\max\{4 - \frac{1}{2}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 2\frac{1}{2}$	$1/4$
3	$\max\{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{1}{2}$	$1/8$
4	$\max\{\frac{7}{2} - \frac{1}{8}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{5}{8}$	$1/16$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o\rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1
1	$\max\{0 - 1(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 4$	$1/2$
2	$\max\{4 - \frac{1}{2}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 2\frac{1}{2}$	$1/4$
3	$\max\{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{1}{2}$	$1/8$
4	$\max\{\frac{7}{2} - \frac{1}{8}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{5}{8}$	$1/16$
5	$\max\{\frac{29}{8} - \frac{1}{16}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 3\frac{7}{16}$	$1/32$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1
1	$\max\{0 - 1(4-3-1-4), 0\} = 4$	$1/2$
2	$\max\{4 - \frac{1}{2}(4-0-1-0), 0\} = 2\frac{1}{2}$	$1/4$
3	$\max\{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}(4-3-1-4), 0\} = 3\frac{1}{2}$	$1/8$
4	$\max\{\frac{7}{2} - \frac{1}{8}(4-0-1-4), 0\} = 3\frac{5}{8}$	$1/16$
5	$\max\{\frac{29}{8} - \frac{1}{16}(4-0-1-0), 0\} = 3\frac{7}{16}$	$1/32$
6	$\max\{\frac{55}{16} - \frac{1}{32}(4-0-1-4), 0\} = 3\frac{15}{32}$	$1/64$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1
1	$\max\{0 - 1(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 4$	$1/2$
2	$\max\{4 - \frac{1}{2}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 2\frac{1}{2}$	$1/4$
3	$\max\{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{1}{2}$	$1/8$
4	$\max\{\frac{7}{2} - \frac{1}{8}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{5}{8}$	$1/16$
5	$\max\{\frac{29}{8} - \frac{1}{16}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 3\frac{7}{16}$	$1/32$
6	$\max\{\frac{55}{16} - \frac{1}{32}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{15}{32}$	$1/64$
7	$\max\{\frac{111}{32} - \frac{1}{64}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{31}{64}$	$1/128$

Exemplo — cont

$$\lambda^{k+1} = \max\{\lambda^k - \mu_k(4 - 3y_1^* - y_2^* - 4y_3^*), 0\}$$

$$\mu_k = \mu_o \rho^k, \text{ com } \lambda^0 = 0, \mu_0 = 1 \text{ e } \rho = 1/2$$

k	λ	μ
0	0	1
1	$\max\{0 - 1(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 4$	$1/2$
2	$\max\{4 - \frac{1}{2}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 2\frac{1}{2}$	$1/4$
3	$\max\{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}(4 - 3 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{1}{2}$	$1/8$
4	$\max\{\frac{7}{2} - \frac{1}{8}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{5}{8}$	$1/16$
5	$\max\{\frac{29}{8} - \frac{1}{16}(4 - 0 - 1 - 0), 0\} = 3\frac{7}{16}$	$1/32$
6	$\max\{\frac{55}{16} - \frac{1}{32}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{15}{32}$	$1/64$
7	$\max\{\frac{111}{32} - \frac{1}{64}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{31}{64}$	$1/128$
8	$\max\{\frac{223}{64} - \frac{1}{128}(4 - 0 - 1 - 4), 0\} = 3\frac{63}{128}$	$1/256$

Exemplo — cont

Embora $\lambda^3 = 7/2 = \lambda^*$, o subgradiente

$$(b - Ay^*(\lambda^3)) = 4 - 0 - 1 - 4 \neq 0$$

Exemplo — cont

Embora $\lambda^3 = 7/2 = \lambda^*$, o subgradiente

$$(b - Ay^*(\lambda^3)) = 4 - 0 - 1 - 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ otimalidade não é detectada

Exemplo — cont

Embora $\lambda^3 = 7/2 = \lambda^*$, o subgradiente

$$(b - Ay^*(\lambda^3)) = 4 - 0 - 1 - 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ otimalidade não é detectada

Indução $\quad \Rightarrow \quad \lambda^k = 3 + \frac{7}{16} + \frac{1}{32} \sum_{i=0}^{k-6} \left(\frac{1}{2}\right)^i$, para $k \geq 6$

Exemplo — cont

Embora $\lambda^3 = 7/2 = \lambda^*$, o subgradiente

$(b - Ay^*(\lambda^3)) = 4 - 0 - 1 - 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ otimalidade não é detectada

Indução $\quad\Rightarrow\quad \lambda^k = 3 + \frac{7}{16} + \frac{1}{32}\sum_{i=0}^{k-6}\left(\frac{1}{2}\right)^i$, para $k \geq 6$

Logo

$$\lambda^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 3 + \frac{7}{16} + \frac{2}{32} = \frac{7}{2}$$

Exemplo

Problema simétrico do caixeiro viajante (Held & Karp)

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
& \text{s.a} & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 \quad \forall i \in V \\
& & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall 2 \leq |S| \leq |V| - 1 \\
& & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Exemplo

Problema simétrico do caixeiro viajante (Held & Karp)

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
 & \text{s.a} & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 \quad \forall i \in V \\
 & & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall 2 \leq |S| \leq |V| - 1 \\
 & & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Dualizando restrições de dupla incidência no nó i, para $i \neq 1$

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \min & \sum_{e \in E} (c_e - \lambda_i - \lambda_j) x_e + 2 \sum_{i \in V} \lambda_i \\
 & \text{s.a} & \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2 \\
 & & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall 2 \leq |S| \leq |V| - 1, 1 \notin S \\
 & & \sum_{e \in E} x_e = n \\
 & & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Exemplo

Problema simétrico do caixeiro viajante (Held & Karp)

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
& \text{s.a} & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 \quad \forall i \in V \\
& & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall 2 \leq |S| \leq |V| - 1 \\
& & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Dualizando restrições de dupla incidência no nó i, para $i \neq 1$

$$
\begin{array}{lll}
(PR_\lambda) & \min & \sum_{e \in E} (c_e - \lambda_i - \lambda_j) x_e + 2 \sum_{i \in V} \lambda_i \\
& \text{s.a} & \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2 \\
& & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall 2 \leq |S| \leq |V| - 1, 1 \notin S \\
& & \sum_{e \in E} x_e = n \\
& & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Solução de (PR_λ) é 1-árvore

Exemplo — cont.

Grafo completo com 5 nós. Matriz de custos

$$(c_e) = \begin{pmatrix} — & 30 & 26 & 50 & 40 \\ — & — & 24 & 40 & 50 \\ — & — & — & 24 & 26 \\ — & — & — & — & 30 \\ — & — & — & — & — \end{pmatrix}$$

Exemplo — cont.

Grafo completo com 5 nós. Matriz de custos

$$(c_e) = \begin{pmatrix} - & 30 & 26 & 50 & 40 \\ - & - & 24 & 40 & 50 \\ - & - & - & 24 & 26 \\ - & - & - & - & 30 \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Se $\lambda = (0, 0, -15, 0, 0)$ e $\bar{c}_e = c_e - \lambda_i \lambda_j$

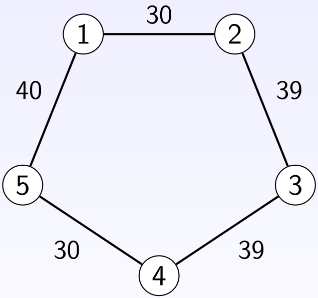
$$(\bar{c}_e) = \begin{pmatrix} - & 30 & 42 & 50 & 40 \\ - & - & 39 & 40 & 50 \\ - & - & - & 39 & 41 \\ - & - & - & - & 30 \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Exemplo — cont.

1-árvore é solução ótima

Exemplo — cont.

1-árvore é solução ótima



Exemplo

Decomposição lagrangiana

$$
\begin{array}{ll}
\min & cx \\
\text{s.a} & Ax \geq b \\
 & Bx \geq d \\
 & x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j
\end{array}
$$

Exemplo

Decomposição lagrangiana

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & Bx \geq d \\ & x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \end{array}$$

Introduzindo cópias das variáveis

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & y = x \\ & By \geq d \\ & x_j, y_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \end{array}$$

Exemplo — cont

Dualizando as igualdades

$$
\begin{array}{ll}
\min & cx + \lambda(x - y) \\
\text{s.a} & Ax \geq b \\
& By \geq d \\
& x_j, y_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j
\end{array}
$$

Exemplo — cont

Dualizando as igualdades

$$\begin{array}{ll} \min & cx + \lambda(x - y) \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & By \geq d \\ & x_j, y_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \end{array}$$

Problema pode ser decomposto

$$\begin{array}{ll} \min & (c + \lambda)x \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{ll} \min & -\lambda y \\ \text{s.a} & By \geq d \\ & y_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \end{array}$$

Exemplo

Melhorando o problema relaxado

Problema de cobertura

$$\begin{array}{lll} (PI) & \min & cx \\ & \text{s.a} & Ax \geq \mathbf{1} \\ & & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \end{array}$$

Exemplo

Melhorando o problema relaxado

Problema de cobertura

$$
\begin{array}{lll}
(PI) & \min & cx \\
 & \text{s.a} & Ax \geq \mathbf{1} \\
 & & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j
\end{array}
$$

Se A é $m \times n$, $1 \leq \sum_j x_j \leq m$ é redundante para (PI), mas não para (PR_λ)

Exemplo

Melhorando o problema relaxado

Problema de cobertura

$$\begin{array}{lll} (PI) & \min & cx \\ & \text{s.a} & Ax \geq \mathbf{1} \\ & & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \end{array}$$

Se A é $m \times n$, $1 \leq \sum_j x_j \leq m$ é redundante para (PI), mas não para (PR_λ)
Introduzindo esta restrição temos cota melhor

$$\begin{array}{lll} (PR_\lambda) & \min & (c - \lambda A)x + \sum_i \lambda_i = Cx + \sum_i \lambda_i \\ & \text{s.a} & 1 \leq \sum_j x_j \leq m \\ & & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \end{array}$$

Heurística lagrangiana

$x^*(\lambda) \rightsquigarrow \bar{x}$, solução viável para (PI)
(fornece cota superior para z_{PI})

Heurística lagrangiana

$x^*(\lambda) \rightsquigarrow \bar{x}$, solução viável para (PI)
(fornece cota superior para z_{PI})

Exemplo: problema de cobertura

- $S = \{j \mid x_j^*(\lambda) = 1\}$
- $N = \{i \mid A_{i\cdot} x^* = 0\}$
- Para $i \in N$
  Seja $j \in \operatorname{argmin}\{c_j \mid a_{ij} = 1\}$
  Faça $S \leftarrow S \cup \{j\}$

Exemplo

$$(c_j) = (2, 3, 4, 5)$$

Exemplo

$$(c_j) = (2, 3, 4, 5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

$$(c_j) = (2, 3, 4, 5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = (1.5, 1.6, 2.2)$$

Exemplo

$$(c_j) = (2, 3, 4, 5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = (1.5, 1.6, 2.2)$$

$$x^*(\lambda) = (1, 0, 0, 0)$$

Exemplo

$$(c_j) = (2, 3, 4, 5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = (1.5, 1.6, 2.2)$$

$$x^*(\lambda) = (1, 0, 0, 0)$$

Aplicando o procedimento:
$S = \{1\}$, $N = \{3\}$ e $j = 2$
$\Rightarrow \bar{x} = (1, 1, 0, 0)$ (solução ótima!)

Redução do problema

Dimensão reduzida via fixação de variáveis

Exemplo: problema de cobertura

- $x^* = x^*(\lambda)$ inviável

Redução do problema

Dimensão reduzida via fixação de variáveis

Exemplo: problema de cobertura

- $x^* = x^*(\lambda)$ inviável
- $x^H = x^* + y$ viável, y obtido com algoritmo guloso, como na heurística lagrangiana

Redução do problema

Dimensão reduzida via fixação de variáveis

Exemplo: problema de cobertura

- $x^* = x^*(\lambda)$ inviável
- $x^H = x^* + y$ viável, y obtido com algoritmo guloso, como na heurística lagrangiana
- $N_1 = \{j \mid c_j - \sum_i \lambda_i a_{ij} > 0\}$
  $N_0 = \{j \mid c_j - \sum_i \lambda_i a_{ij} < 0\} \subseteq \{j \mid x_j^* = 1\}$

Redução do problema

Dimensão reduzida via fixação de variáveis

Exemplo: problema de cobertura

- $x^* = x^*(\lambda)$ inviável
- $x^H = x^* + y$ viável, y obtido com algoritmo guloso, como na heurística lagrangiana
- $N_1 = \{j \mid c_j - \sum_i \lambda_i a_{ij} > 0\}$
  $N_0 = \{j \mid c_j - \sum_i \lambda_i a_{ij} < 0\} \subseteq \{j \mid x_j^* = 1\}$
- $\bar{z} =$ melhor cota superior conhecida (valor de melhor solução viável conhecida)

Proposição (Wolsey, p. 178)

Se $k \in N_1$ e

$$\sum_i \lambda_i + \sum_{j \in N_0} (c_j - \sum_i \lambda_i a_{ij}) + (c_k - \sum_i \lambda_i a_{ik}) \geq \bar{z}$$

então $x_k = 0$ em qualquer solução viável melhor do que a atual candidata.

Se $k \in N_0$ e

$$\sum_i \lambda_i + \sum_{j \in N_0 \setminus k} (c_j - \sum_i \lambda_i a_{ij}) + (c_k - \sum_i \lambda_i a_{ik}) \geq \bar{z}$$

então $x_k = 1$ em qualquer solução viável melhor do que a atual candidata.

Aplicações

Line segmentation problem

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Problema de localização com capacidades

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Problema de localização com capacidades

Problema de entregas

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Problema de localização com capacidades

Problema de entregas

Problema do caixeiro viajante assimétrico generalizado

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Problema de localização com capacidades

Problema de entregas

Problema do caixeiro viajante assimétrico generalizado

Problema do particionamento de operações

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Problema de localização com capacidades

Problema de entregas

Problema do caixeiro viajante assimétrico generalizado

Problema do particionamento de operações

Problema de cobertura com capacidade

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Problema de localização com capacidades

Problema de entregas

Problema do caixeiro viajante assimétrico generalizado

Problema do particionamento de operações

Problema de cobertura com capacidade

Problema de designação multi-recurso

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Problema de localização com capacidades

Problema de entregas

Problema do caixeiro viajante assimétrico generalizado

Problema do particionamento de operações

Problema de cobertura com capacidade

Problema de designação multi-recurso

Problema de designação com restrições adicionais

Aplicações

Line segmentation problem

Problema de designação generalizado

Problema de localização com capacidades

Problema de entregas

Problema do caixeiro viajante assimétrico generalizado

Problema do particionamento de operações

Problema de cobertura com capacidade

Problema de designação multi-recurso

Problema de designação com restrições adicionais

Problema de distribuição

Referências

J.E. Beasley, Lagrangean relaxation, in *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, C. Reeves (ed.), Blackwell Scientific Publishing (1993) 143–303.

M. Held, R.M. Karp, The traveling salesman problem and minimum spanning trees, *Operations Research* **18** (1970), 1138–1162.

M. Held, R.M. Karp, The traveling salesman problem and minimum spanning trees: part II, *Mathematical Programming* **1** (1971), 6–25.

G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988.

Referências — cont.

L.A. Wolsey, *Integer Programming*, Wiley, New York, 1998.