# Revisão de Álgebra Linear

Cid C. de Souza – IC-UNICAMP

Agosto de 2005



## Notação e definições

▷ Vetor nulo: $[0\ 0\ \ldots\ 0]^t$.

▷ Vetores unitários: $e_i = [0\ 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0]^t$.

▷ Adição de vetores:

$$a^1 + a^2 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} \\ a_{12} + a_{22} \end{bmatrix}$$

▷ Vetor soma: $e = [1\ 1\ \ldots\ 1]^t$.

▷ Multiplicação por escalar: $k \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^n$,

$$ka = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

▷ Produto interno (escalar): $a$ e $b \in \mathbb{R}^n$,

$$a.b = [a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i.b_i$$





## Notações e definições (cont.)

▷ **Combinações Linear, Afim e Convexa**: $a^1, a^2, \ldots, a^n \in \mathbb{R}^n$,

- Linear: $\sum_{i=1}^{n} a^i.\lambda_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Afim: $\sum_{i=1}^{n} a^i.\lambda_i$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Convexa: $\sum_{i=1}^{n} a^i.\lambda_i$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$.

▷ **Subespaços Lineares e Afins**: $S$ é um subespaço linear (afim) se, dados dois vetores quaisquer $a^1$ e $a^2$ em $S$ e dois escalares $\lambda_1$ e $\lambda_2$ quaisquer em $\mathbb{R}$ (satisfazendo $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$), o vetor $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2$ também está em $S$.

▷ **Independência Linear**:

o conjunto de vetores $a^1, a^2, \ldots, a^n \in \mathbb{R}^n$ é linearmente independente (LI) se $\sum_{i=1}^n \lambda_i.a^i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

▷ **Independência Afim**:

o conjunto de vetores $a^1, a^2, \ldots, a^i \in \mathbb{R}^n$ é afim independente (AI) se

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n \lambda_i.a^i = 0 \\ \sum_{i=1} \lambda_i = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda_i = 0 \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

▷ **Observação**: LI $\Longrightarrow$ AI mas a inversa não é verdadeira !





▷ O **subespaço linear (afim)** ***gerado*** por um conjunto $S$ de vetores é o conjunto de todas os vetores que são combinações lineares (afim) de $S$.

▷ **Base**: os vetores $a^1, a^2, \ldots, a^k$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$ se o subespaço linear gerado por eles é o $\mathbb{R}^n$ **e** se eles forem LI.

**Observação**: nesse caso, para todo $b$ em $\mathbb{R}^n$ existe um único conjunto de escalares $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i.a^i = b$.

▷ **Mudança de Base**:

Se $\{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i.a^i = a$ e $\lambda_j \neq 0$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$, então $\{a^1, \ldots, a^{j-1}, a, a^{j+1}, \ldots, a^n\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^n$.

## Matrizes

- ▷ $a_{.j} \doteq j$-ésima coluna de $A$, $a_{i.} \doteq i$-ésima linha de $A$.
- ▷ **Adição e Multiplicação por escalar**: feita termo a termo.
- ▷ **Multiplicação de matrizes**: $A : m \times n$ e $B : p \times q$, $C = AB$ existe se $n = p$. Neste caso, $C$ tem dimensão $m \times q$ e $c_{ij} = a_{i.}.b_{.j}$.
  **Observação**: mesmo que $C = AB$ e $C' = BA$ existam, é possível que $C \neq C'$.
- ▷ **Matrizes especiais:**
  - Matriz nula: todos elementos são nulos.
  - Matriz identidade ($I$): matriz quadrada onde todos elementos da diagonal principal valem 1. Se $A : m \times n$, $AI_n = I_m A = A$.
  - Matriz triangular inferior (superior): matriz quadrada onde todos elementos acima (abaixo) da diagonal principal são 0.





## Matrizes (cont.)

- ▷ **Matriz transposta**: se $A : m \times n$ a matriz transposta de $A$ é a matriz $A^t : n \times m$ onde $a_{i.} = a^t_{.i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.
- ▷ Se $A = A^t$ então $A$ é *simétrica*. Se $A = -A^t$ então $A$ é *anti-simétrica*.
- ▷ $(A^t)^t = A$.
- ▷ $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- ▷ $(AB)^t = B^t A^t$.

## Operações elementares sobre matrizes

- ▷ trocar posições das linhas $i$ e $j$.
- ▷ multiplicar a linha $i$ por um escalar.
- ▷ substituir a linha $i$ pela soma da linha $i$ com a linha $k$ multiplicada por um escalar.
- ▷ **Matrizes de Permutação**: obtidas da matriz identidade pela aplicação de uma das operações elementares descritas acima.
- ▷ **Observação 1**: se $A : m \times n$, toda operação elementar pode ser efetuada sobre $A$ pré-multiplicando-a pela matriz de permutação correspondente às mesmas operações efetuadas sobre $I_m$.
- ▷ **Observação 2**: operações elementares também podem ser feitas sobre colunas. A observação 1 ainda é válida mas a matriz de permutação é obtida a partir de $I_n$ e deve pós-multiplicar $A$.





## Resolução de Sistemas Lineares

- ▷ $A : m \times n$, $b : m \times 1$ e $x : n \times 1$.
- ▷ ***Teorema***: $Ax = b$ tem solução *sss* $A'x = b'$ onde $(A', b')$ é obtido de $(A, b)$ através de operações elementares.
- ▷ *Métodos de solução para o caso de matrizes quadradas*:
  - Gauss: $A'$ é triangular superior com 1's na diagonal.
    Usa "*back substitution*".
  - Gauss-Jordan: $A' = I_m$.
- ▷ **Inversão de matrizes** (quadradas $n \times n$):
  - $B$ inversa de $A$ então $AB = BA = I_n$. Notação: $B = A^{-1}$.
  - Se $B$ existir, então $B$ é única.
  - Se $A$ tem inversa, $A$ é dita *não-singular*.

## Resolução de Sistemas Lineares (cont.)

- ▷ $A$ tem inversa *sss* suas linhas (colunas) são LI.
- ▷ Cálculo da inversa: realizar operações elementares sobre a matriz $(A, I_n)$ até que se chegue a uma matriz da forma $(I_n, B)$. Se isso for possível, $B = A^{-1}$.
- ▷ Se $A$ é não-singular, $A^t$ é não-singular e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- ▷ Se $A$ e $B$ são não singulares, $AB$ é não singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- ▷ Se $A$ é triangular e sem zeros na diagonal então $A$ tem inversa.





## Resolução de Sistemas Lineares (cont.)

- ▷ $A : (n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$,

$$A = \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} I & -CD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

- ▷ **Determinante de uma matriz** $A : n \times n$: se $n = 1$ então $\det(A) = a_{11}$, se não $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A^{ij}$, onde $A^{ij}$ é o <u>cofator</u> do elemento $a_{ij}$ o qual é obtido pela multiplicação de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da submatriz obtida de $A$ pela remoção da linha $i$ e da coluna $j$.
- ▷ $\det(A) = \det(A^t)$.
- ▷ Se $B$ é obtida de $A$ pela troca de duas linhas, $\det(B) = -\det(A)$.

## Resolução de Sistemas Lineares (cont.)

▷ Se $B$ é obtida de $A$ pela soma de uma linha com outra linha multiplicada por escalar, então $\det(B) = \det(A)$.

▷ $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

▷ $\det(A) \neq 0$ *sss* as linhas (colunas) de $A$ são LI, ou seja, $A$ é não singular e portanto tem inversa !

▷ Outra forma de calcular a inversa (quando existe):

$$A^{-1} = \frac{B}{\det(A)},$$

onde $B$ é a transposta da matriz dos cofatores, i.e., a *matriz adjunta* de $A$.





## Resolução de Sistemas Lineares (cont.)

▷ Para $B$ e $C$ quadradas,

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & C \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \det(B).\det(C).$$

▷ *Regra de Cramer*: $A : m \times n$, $b : m \times 1$, $x : n \times 1$ e $A$ não singular, então para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)},$$

onde $B_j$ é a matriz obtida de $A$ substituindo a coluna $A_{.j}$ pelo vetor $b$.

## Resolução de Sistemas Lineares (cont.)

- **Posto (linear) de uma matriz**: $\rho(A)$ é o número máximo de linhas (colunas) LI de $A$.
- Se $\rho(A, b) > \rho(A)$ então $Ax = b$ não tem solução.
- Se $\rho(A, b) = \rho(A) = n$ então $Ax = b$ tem uma **única** solução.
- Se $\rho(A, b) = \rho(A) = k < n$ então $Ax = b$ tem um número infinito de soluções