Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Computação - IC
MO824 - Tópicos em Otimização Combinatória

Combinatória Poliédrica – Parte I

Cid Carvalho de Souza

2º semestre de 2006

Desigualdades válidas **"fortes"**

Definição:

Sejam $\pi x \leq \pi_0$ e $\mu x \leq \mu_0$ duas desigualdades válidas para um poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$. As desigualdades são idênticas se existe $\alpha > 0$ tal que $(\pi, \pi_0) = (\alpha\mu, \alpha\mu_0)$.

Definição:

A desigualdade válida $\pi x \leq \pi_0$ domina a desigualdade $\mu x \leq \mu_0$ para $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ se existe $\alpha > 0$ tal que: $\pi \geq \alpha\mu$, $\pi_0 \leq \alpha\mu_0$ e $(\pi, \pi_0) \neq (\alpha\mu, \alpha\mu_0)$.

Observação:

Se $\pi x \leq \pi_0$ domina $\mu x \leq \mu_0$ então,
$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \pi x \leq \pi_0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \mu x \leq \mu_0\}$.

Desigualdades válidas **"fortes"**

Definição:

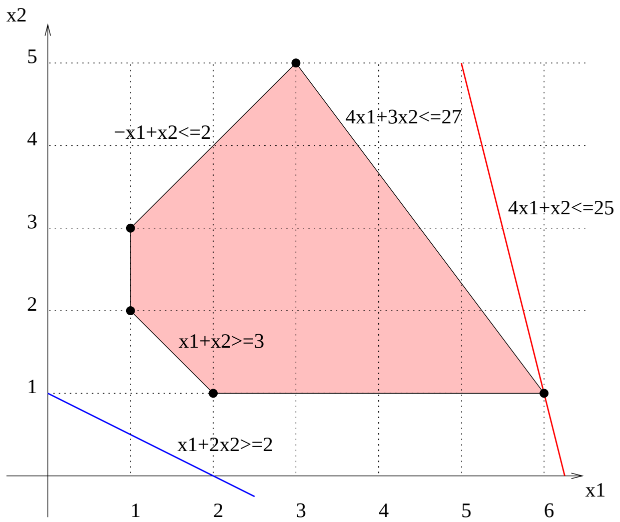
A desigualdade $\mu x \leq \mu_0$ válida para $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ é redundante para descrição deste poliedro se existirem $k \geq 2$ desigualdades válidas para P $\pi^i x \leq \pi^i_0, i = 1, \ldots, k$, tais que a desigualdade $(\sum_{i=1}^k \alpha_i \pi^i) x \leq (\sum_{i=1}^k \alpha_i \pi^i_0)$ domina $\mu x \leq \mu_0$ para algum conjunto de escalares $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Observação:

Neste caso,

$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \pi^i x \leq \pi^i_0, i = 1, \ldots, k\}$$
$$\subseteq$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : (\textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i \pi^i) x \leq (\sum_{i=1}^k \alpha_i \pi^i_0)\}$$
$$\subseteq$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \mu x \leq \mu_0\}.$$

Desigualdades válidas **"fortes"**



$(4x_1 + x_2 \leq 25) = 2(-x_2 \leq -1) + 1(4x_1 + 3x_2 \leq 27)$

$\Longrightarrow$ $4x_1 + x_2 \leq 25$ é redundante.

Desigualdades válidas **"fortes"**

Para PLI, o poliedro $\texttt{conv}(X)$ é geralmente desconhecido e, portanto, é difícil verificar redundância.

Prática:

Pelo menos procure verificar se é *fácil* encontrar uma desigualdade que <u>domine</u> a desigualdade encontrada.

Como verificar se uma desigualdade não é redundante para $\texttt{conv}(X)$?

Teoria poliédrica básica

Definição 1:

Os vetores $x^1, x^2, \ldots, x^p$ do $\mathbb{R}^n$ são

- linearmente independentes se $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i = 0$ implica que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, p$.
- afim independentes se $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i = 0$ **<u>e</u>** $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$ implica que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, p$.

Observações:

- o conjunto com um único elemento <u>não nulo</u> é afim <u>e</u> linearmente independente.
- o vetor nulo é afim independente mas linearmente dependente.
- convenção: o conjunto vazio é AI e LI.

Teoria poliédrica básica

O conjunto dos vetores linearmente dependentes dos pontos $x^1, \ldots, x^p$ do $\mathbb{R}^n$ é dado por:

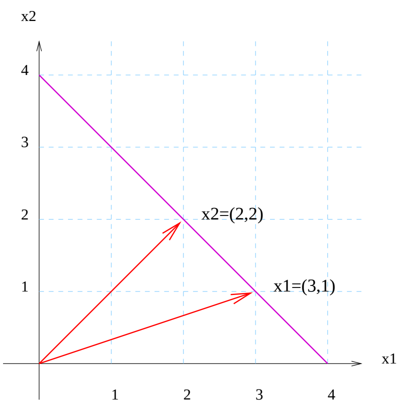
$$\{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda \in \mathbb{R}^p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i = x\}.$$

O conjunto dos vetores afim dependentes dos pontos $x^1, \ldots, x^p$ do $\mathbb{R}^n$ é dado por:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda \in \mathbb{R}^p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i = x \text{ e } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\}.$$

LI implica AI mas AI **não** implica LI.
Exemplo: $(1\ 1)$, $(-1\ \ -1)$ e $(1\ 0)$ (AI mas LD).

Teoria poliédrica básica



x AD com x^1 e x^2 então:

$$\begin{cases} \lambda_1(3\ 1) + \lambda_2(2\ 2) = (x_1\ x_2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chega-se a:

$$x_1 + x_2 = 4.$$

x LD com x^1 e x^2 então:

$$\begin{cases} x_1 = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_1 - x_2 = 2\lambda_1,$$

ou seja, todas as retas da forma $x_1 - x_2 = \text{constante} \equiv \mathbb{R}^2$.

Definição 2:

O posto de uma matriz A, denotado por $\rho(A)$ é o número de linhas (ou colunas) LI de A.

Proposição 3:

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. Então, S não é vazio *se e somente se* $\rho(A, b) = \rho(A)$.

$S \neq \emptyset \Leftrightarrow b$ é LD com as colunas de A.

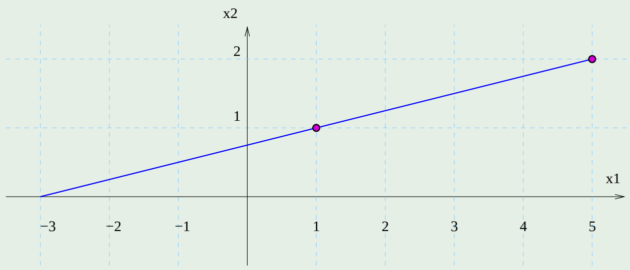
Proposição 4:

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. O número máximo de vetores **AI** em S (chamado de posto afim de S, $\rho_A(S)$) é igual a $n + 1 - \rho(A)$.

Seja $S \in \mathbb{R}^2$ definido por $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$Ax = b \quad \equiv \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 = -3 \\ -2x_1 + 8x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\rho(A) = 1 \overset{Prop.4}{\Longrightarrow} \rho_A(S) = n + 1 - \rho(A) = 2.$$



(1 1) e (5 2) formam um conjunto **maximal** de vetores AI (e LI também !) em S.

Teoria poliédrica básica

Observação 1:

Seja $\texttt{aff}(S)$ o conjunto de todos os vetores AD com os vetores de S e $\rho(S)$ o posto linear de S (= número máximo de vetores LI em S). Então:

- $0 \notin \texttt{aff}(S) \Longrightarrow \rho(S) = \rho_A(S)$.
- $0 \in \texttt{aff}(S) \Longrightarrow \rho(S) = \rho_A(S) - 1$.

Observação 2:

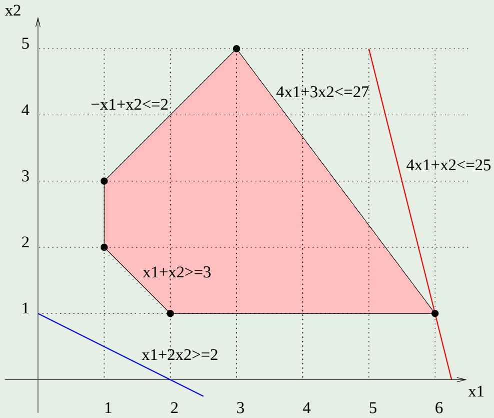
$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0x = 0\}$. Como 0 é LD por definição, $\rho(A) = 0 \Longrightarrow \rho_A(\mathbb{R}^n) = n + 1 - \rho(A) = n + 1$. Como $0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho(\mathbb{R}^n) = n$.

Definição 4:

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$. A **dimensão** de S é dada por $\dim(S) = \rho_A(S) - 1$.
S tem **dimensão cheia** se $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Teoria poliédrica básica

Exemplo:



(1 3), (3 5) e (6 1) são AIs. Como estamos no $\mathbb{R}^2$ não pode haver mais vetores AI em P. Logo, $\rho_A(P) = 3$ e $\dim(P) = 2$.

Se S for vazio, $\dim(S) = -1$.

Proposição 5:

Seja P um poliedro **<u>não vazio</u>** de $\mathbb{R}^n$ dado por:

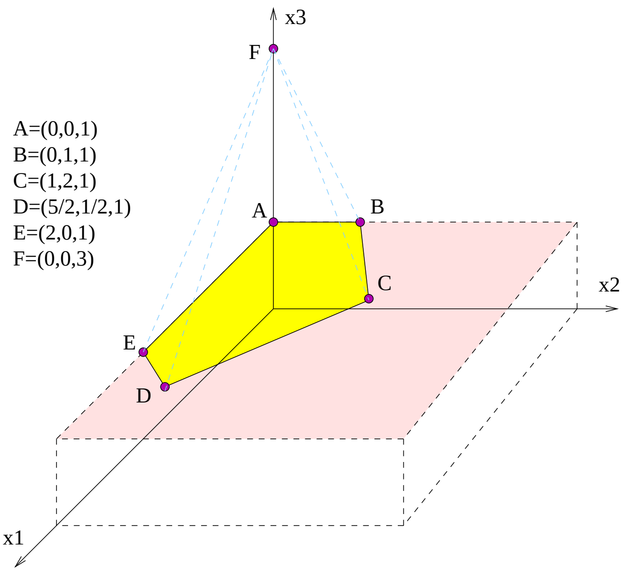
$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^n : A^{=}x = b^{=}, A^{\leq}x \leq b^{\leq}\} \\ &= \left\{ \begin{array}{lll} x \in \mathbb{R}^n : & a_i^{=}x = b_i^{=}, & i \in M^{=} \\ & a_i^{\leq}x \leq b_i^{\leq}, & i \in M^{\leq} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

onde $M^{=}$ ($M^{\leq}$) é o conjunto de índices das linhas de A que são igualdades (desigualdades da forma $\leq$) e, além disso:

- para todo $i \in M^{\leq}$, $(a_i^{\leq}, b_i^{\leq})$ não é combinação linear de $(A^{\leq}, b^{\leq})$ <u>e</u>
- $A^{\leq}x \leq b^{\leq}$ não contém igualdades implícitas.

Então, $\dim(P) + \rho(A^{=}, b^{=}) = \dim(P) + \rho(A^{=}) = n$.

Notas. Como $P \neq \emptyset$, pela Proposição 3, $\rho(A^{=}, b^{=}) = \rho(A^{=})$. Além disso, se P tem dimensão cheia $M^{=}$ deve ser vazio !



$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{ll} x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 & (EDF) \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 & (CDF) \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 & (BCF) \\ -x1 \leq 0, -x_2 \leq 0, x_3 = 1\} & \end{array}$$

Teoria poliédrica básica

Definição 6:

Seja $\pi x \leq \pi_0$ uma desigualdade válida para o poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$. A face definida por $\pi x \leq \pi_0$ em P é dada por $F(\pi, \pi_0) = \{x \in P : \pi x = \pi_0\}$.
Dizemos que $\pi x \leq \pi_0$ representa $F(\pi, \pi_0)$.

Ver no exemplo padrão ...

F é chamada de uma face **própria** de P se $F \neq P$ e $F \neq \emptyset$, caso contrário, ela é uma face **imprópria**.

Definição 7:

Uma desigualdade válida $\pi x \leq \pi_0$ é dita ser um **suporte** de P se $F(\pi, \pi_0) \neq \emptyset$.

Teoria poliédrica básica

Proposição 8:

Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A^{=}x = b^{=}, A^{\leq}x \leq b^{\leq}\}$ e M o conjunto de índices das restrições que definem P.
Se F é uma face não vazia de P então, existe $M_F^{=} \subset M$ $(M_F^{\leq} = M \setminus M_F^{=})$ tal que

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x = b_i \;\forall\; i \in M_F^{=}, a_i x \leq b_i \;\forall\; i \in M_F^{\leq}\}.$$

Logo, F é um poliedro.
Além disso, o número de faces de P é finito.

Prova da proposição 8:

Seja $F = \{y \in \mathbb{R}^n : \pi y = \max\{\pi x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\} = \pi_0\}$.
$\pi y \leq \pi_0$ válida para P e representa F.

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & \pi_0 = \pi x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \end{array} \qquad (\mathcal{D}) \quad \begin{array}{ll} \min & \omega_0 = ub \\ \text{s.a.} & uA = \pi \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Seja u^* ótimo para $(\mathcal{D})$ e $I^* = \{i \in M : u_i^* > 0\}$.
Seja $F^* = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x = b_i \,\forall\, i \in I^*, a_i x \leq b_i \,\forall\, i \in M \setminus I^*\}$.
Devemos mostrar que $F = F^*$.
$F^* \subset F$: se $x \in F^*$ então
$\pi x = u^* A x = \sum_{i \in M} u_i^* a_i x = \sum_{i \in I^*} u_i^* a_i x = \sum_{i \in I^*} u_i^* b_i = \pi_0$.
$F \subset F^*$: se $x \notin F^*$ então, $\exists k \in I^*$ tal que $a_k x < b_k$ e $u_k^* > 0$. Logo,
$\pi x = \sum_{i \in I^*} u_i^* a_i x < \sum_{i \in I^*} u_i^* b_i = \pi_0$. Portanto, $x \notin F$. $\square$.

Então, se F é uma face não vazia de P, F pode ser escrita como

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n; A_F^= x = b_F^=, A_F^{\leq} x \leq b_F^{\leq}\},$$

onde $A^= \subseteq A_F^=$ e $A_F^{\leq} = A - A_F^=$.
Pela Proposição 5, $\dim(P) + \rho(A^=) = n$ e $\dim(F) + \rho(A_F^=) = n$.
Logo, como $\rho(A_F^=) > \rho(A^=)$, temos que $\dim(F) < \dim(P)$.

Definição 9:

Seja F uma face própria de um poliedro P. Diz-se que F é uma **facet** de P se $\dim(F) = \dim(P) - 1$.

Ver no exemplo padrão ...

Proposição 10:

Se F é uma facet de $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A^= x = b^=, A^\leq x \leq b^\leq\}$ então existe $j \in M^\leq$ tal que $F = \{x \in P : a_{j.}x = b_j\}$.

Prova:

Pela Prop. 8, se $F \subset P$ então $A_F^= \supset A^=$.
Pela Prop. 5, como F é uma facet, temos que:

$$\dim(F) = n - \rho(A_F^=) = n - (\rho(A^=) + 1) = dim(P) - 1.$$

Logo, $\rho(A_F^=) = \rho(A^=) + 1$. $\square$

Ou seja, o sistema linear que descreve P contém uma desigualdade que representa a facet F.

Proposição 11:

Se F é uma facet de P, em todo sistema linear que descreve P é necessário que haja pelo menos uma desigualdade representando F.

Em outras palavras, se não houver uma desigualdade representando F, o sistema linear descreve outro poliedro !

O Lema de Farkas

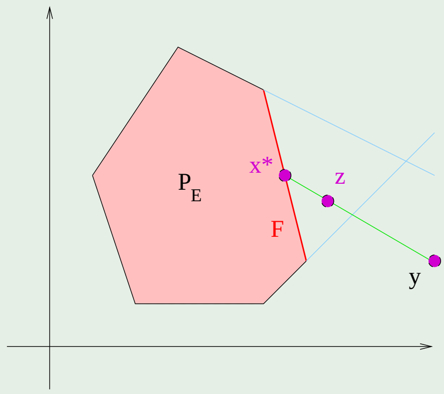
$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ ou *(exclusivo)* existe $v \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $vA \geq 0$ e $vb < 0$.

Variantes:

- $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax = b\} \neq \emptyset$ ou $\{v \in \mathbb{R}^m : vA \geq 0, vb < 0\} \neq \emptyset$.
- $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ ou $\{v \in \mathbb{R}^m_+ : vA = 0, vb < 0\} \neq \emptyset$.
- Se $P = \{r \in \mathbb{R}^n_+ : Ar = 0\}$ então **ou** $P \setminus \{0\} \neq \emptyset$ **ou** $\{v \in \mathbb{R}^m : vA > 0\} \neq \emptyset$.

Prova da Proposição 11:

Seja P_E o poliedro descrito pelo mesmo sistema linear que descreve P, removidas as desigualdades que representam F. Como F é uma facet de P, F não pode definir facet em P_E (Por quê ?). Seja $a_r x \leq b_r$ uma desigualdade representando F. F é um poliedro **não vazio** (por quê ?), portanto, F tem um **ponto interno** x^* (i.e., $a_i x^* < b_i$ para todo $i \in A_F^{\leq}$).
Idéia: mostrar que $P_E \setminus P$ não é vazio.



Prova da Proposição 11 (cont.):

Mas, a_r é LI com as linhas de $A^=$ (pois F é facet).
Portanto, pelo **Lema Farkas**, temos que existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_r y > 0$ e $A^= y = 0$. Logo, existe $y \notin P_E$ satisfazendo $a_r y > b_r$ (por quê ?). Assim, para algum $\epsilon > 0$, $z = x^* + \epsilon y$ pertence a $P_E \setminus P$ (por quê ?).
Ou seja,

$$\begin{aligned} A^=(x^* + \epsilon y) &= A^= x + \epsilon A^= y = A^= x = b \\ a_j(x^* + \epsilon y) &= a_j x^* + \epsilon(a_j y) \leq b_j,\ \forall j \in M^{\leq} \setminus \{r\}, \end{aligned}$$

se ϵ for escolhido convenientemente. □

Proposição 12:

Toda desigualdade $a_r x \leq b_r$ (com $r \in M^{\leq}$) que represente uma face F de um poliedro P tal que $\dim(F) < \dim(P) - 1$ é **irrelevante** para a descrição linear de P.

Prova:

Supor que $a_r x \leq b_r$ representa a face F e que $\dim(F) = \dim(P) - k$ **para algum** $k > 1$. Supor que $a_r x \leq b_r$ não é irrelevante para descrever P.
Portanto, existe y tal que $A^{=} y = b^{=}$, $A^{\leq} y \leq b^{\leq}$ para todo $i \in M^{\leq} \setminus \{r\}$ e $a_r y > b_r$. Agora, P possui um ponto interno x^* (por quê ?).
O segmento de reta que une os pontos x^* e y cruza a face F em um ponto z dado por $z = \alpha x^* + (1 - \alpha) y$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

Prova da Proposição 12 (cont.):

Logo z só satisfaz todas desigualdades de $A^{\leq} x \leq b^{\leq}$ estritamente (por quê ?). Ou seja, além das igualdades de $A^{=} x = b^{=}$, o sistema linear que descreve F só tem a igualdade $a_r x = b_r$ que é LI com as igualdades originais (por hipótese).
Então, $A^{=}_F = A^{=} \cup \{a_r\}$ e
$\dim(F) = n - \rho(A^{=}_F) = n - \rho(A^{=}) - 1 = \dim(P) - 1$.
Conclui-se que F é facet, contrariando a **hipótese**. $\square$

Teoria poliédrica básica

Observações:

- Se $\pi x \leq \pi_0$ e $\gamma x \leq \gamma_0$ são desigualdades válidas para o poliedro P e $\{x \in P : \pi x = \pi_0\} = \{x \in P : \gamma x = \gamma_0\}$, então as duas desigualdades são ditas **equivalentes**.
- Seja $A^= x = b^=$ o conjunto de igualdades do sistema linear que descreve $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, para $u \in \mathbb{R}^{|M^=|}$ e $\lambda > 0$, os dois conjuntos abaixo são iguais

$$\{x \in \mathbb{R}^n : A^= x = b^=, \pi x \leq \pi_0\},$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n : A^= x = b^=, (\lambda\pi + uA^=)x \leq \lambda\pi_0 + ub^=\}.$$

- Assim, para $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} \gamma = uA^= + \lambda\pi \\ \gamma_0 = ub^= + \lambda\pi_0 \end{cases} \Longrightarrow \pi x \leq \pi_0 \text{ e } \gamma x \leq \gamma_0 \text{ são equivalentes !}$$

Teoria poliédrica básica

Teorema 13:

Se P um poliedro descrito por $\{x \in \mathbb{R}^n : A^= x = b^=, A^{\leq} x \leq b^{\leq}\}$. Então:

- se $\dim(P) = n$, a descrição linear de P é **única**, a menos de multiplicação de desigualdades por escalares positivos. Se a descrição não tiver redundâncias, cada desigualdade do sistema linear representa uma facet.
- Se $\dim(P) = n - k$, com $k > 0$, uma descrição linear mínima deve conter k igualdades LI de $A^= x = b^=$. Além disso, para toda facet F_i de P representada por $a_i x \leq b_i$, deve existir uma desigualdade da forma $(\pi, \pi_0) = \lambda(a_i, b_i) + u(A^=, b^=)$.

Teoria poliédrica básica

Teorema 14: (caracterização de facets)

Seja P definido como no teorema anterior e F uma face **própria** de P dada por $F = \{x \in P : \pi x = \pi_0\}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma facet de P.

(b) Se **todo** $x \in F$ satisfaz $\gamma x = \gamma_0$, então $\gamma = \alpha\pi + uA^=$ e $\gamma_0 = \alpha\pi_0 + ub^=$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e algum $u \in \mathbb{R}^{|M^=|}$.

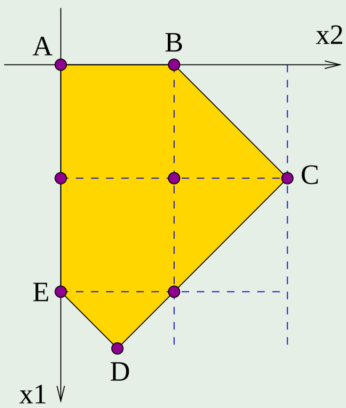
Uma forma equivalente de enunciar *(b)*

Seja $\gamma x \leq \gamma_0$ uma desigualdade válida para P e $\tilde{F} = \{x \in P : \gamma x = \gamma_0\}$ a face definida por ela. Se $F \subset \tilde{F}$ então $\gamma = \alpha\pi + uA^=$ e $\gamma_0 = \alpha\pi_0 + ub^=$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e algum $u \in \mathbb{R}^{|M^=|}$.

Teoria poliédrica básica

Exemplo de uso do Teorema 14:

Vamos usar a figura padrão. Considere o poliedro $P_I = \texttt{conv}(P \cap \mathbb{Z}^3)$. Mostremos que $x_1 + x_3 \leq 3$ é facet de P_I.
Na figura ao lado, vemos que os pontos inteiros de P_I são: $(0,0,1)$, $(2,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,1)$ e $(2,1,1)$.



Plano x3=1

Primeiro, note que a desigualdade é válida para P_I.
Agora, seja $F = \{x \in P_I : x_1 + x_3 = 3\}$ e F' uma face genérica de P_I definida pela desigualdade válida $\pi_1 x + \pi_2 x + \pi_3 x \leq \pi_0$ e tal que $F \subseteq F'$.

Exemplo de uso do Teorema 14: (cont.)

Pelo Teo. 14, se $x_1 + x_3 \leq 3$ define uma facet de P_I, existem constantes $\alpha > 0$ e u em $\mathbb{R}$ satisfazendo:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_0) = \alpha(1, 0, 1, 3) + u(0, 0, 1, 1).$$

Logo, as constantes u e α devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} \pi_1 = \alpha & \equiv \quad \alpha = \pi_1 \\ \pi_2 = 0 & \\ \pi_3 = \alpha + u & \equiv \quad u = \pi_3 - \alpha \quad \equiv u = \pi_3 - \pi_1 \\ \pi_0 = 3\alpha + u & \end{cases}$$

Eliminando-se α e u deste sistema, pode-se escrever π_0 e π_2 em função de π_1 e π_3, obtendo-se as seguintes relações entre os coeficientes: $\pi_2 = 0$ e $\pi_0 = 2\pi_1 + \pi_3$.

Exemplo de uso do Teorema 14: (cont.)

Assim, se $x_1 + x_2 \leq 3$ definir uma facet, deve ser possível chegar a estas **mesmas relações** entre π_0, π_1, π_2 e π_3 *usando o fato de que $F \subseteq F'$*.

$$\begin{array}{lclcll} (2,0,1) \in F & \Longrightarrow & (2,0,1) \in F' & \Longrightarrow & 2\pi_1 + \pi_3 = \pi_0 & (1) \\ (2,1,1) \in F & \Longrightarrow & (2,1,1) \in F' & \Longrightarrow & 2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \pi_0 & (2) \end{array}$$

Extraindo-se os valores de π_0, π_1, π_2 e π_3 de (1) e (2) conclui-se que $\pi_2 = 0$ e $\pi_0 = 2\pi_1 + \pi_3$. □

Exercício:

Prove que $-2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$ define uma facet de P_I.

O que acontece se eu tentar usar o Teorema 14 para uma desigualdade que **não é** facet ?

Outro exemplo de uso do Teorema 14:

Tentemos provar que a desigualdade válida $x_2 \leq 2$ define uma facet de P_I. Seja $F = \{x \in P_I : x_2 = 2\}$ e F' uma face genérica de P_I definida pela desigualdade válida $\pi_1 x + \pi_2 x + \pi_3 x \leq \pi_0$ e tal que $F \subseteq F'$.
Pelo Teo. 14, se esta desigualdade definir uma facet, existem $\alpha > 0$ e u em $\mathbb{R}$ tais que $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_0) = \alpha(0,1,0,2) + u(0,0,1,1)$. Ou seja:

$$\begin{cases} \pi_1 = 0 & \\ \pi_2 = \alpha & \equiv \quad \alpha = \pi_2 \\ \pi_3 = u & \equiv \quad u = \pi_3 \\ \pi_0 = 2\alpha + u & \end{cases}$$

Devemos chegar então às relações $\pi_1 = 0$ e $\pi_0 = 2\pi_2 + \pi_3$ *usando o fato de que* $F \subseteq F'$ *!* Porém, $(1,2,1)$ é o **único** ponto de F, o que só permite obter a relação $\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 = \pi_0$ $(\star)$. Assim, **a prova não pode ser completada !**

Observações relevantes:

- Apesar de não ter sido possível completar a prova anterior, podemos *"aprender com os erros"*. Se observarmos a relação $(\star)$, ela dá uma *"dica"* de qual (quais) relação (relações) deve(m) ser atendida(s) pelos coeficientes da desigualdade genérica que define F'.
  No exemplo, esta relação é verificada pelas desigualdades $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$ e $-2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$, as quais são **definidoras de facets** de P_I.
- Outra forma de provar que uma desigualdade define uma facet é mostrar que o número máximo de pontos **afim independentes** na face representada pela desigualdade é igual a dimensão do poliedro. (método direto)
- Se P é uma formulação para X e $P_I = \mathrm{conv}(X)$, *não é necessariamente verdade que* $\dim(P) = \dim(P_I)$.