看黑圈部分

杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	高等数学 A1		考试日期	2018 年 月 日		成绩	
课程号	A0714201	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		年级		专业	

题号	一	二	三						四	五	六
			1	2	3	4	5	6			
得分											

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 若 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax+\sin x}{x}=2$，则 $a=$ __2__.

2. 设 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，则 $dy=$ __$2\cos(2x+\frac{\pi}{3})dx$__.

3. $\int(e^{-2x}+1)dx=$ __$-\frac{1}{2}e^{-2x}+x+C$__.

4. 微分方程 $y'x=y$ 满足 $y(1)=3$ 的特解为__$y=3x$__.

5.设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{2x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ __$e^{\frac{1}{2}}$__.

6. $y=\ln(1-x)$ 的带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林表达式为

__$-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots-\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$__.

得分	

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 当 $x\to 0$ 时,下列函数中（ B ）是 $f(x)=x^2$ 的同阶但非等价无穷小.

(A) $\sin x$； (B) $1-\cos x$； (C) $\arctan 2x$； (D) $\tan x^2$.

2. 下列结论不正确的是（ A ）.

（A）若 $f(x)$ 在区间I内连续，则 $f'(x)$ 在区间I内连续 ；

（B）若 $f'(x)$ 在区间I内连续，则 $f(x)$ 在区间I内连续；

(C) 若 $f(x)$ 在区间I内等于常数，则 $f'(x)$ 在区间I内等于零；

（D）若 $f'(x)$ 在区间I内等于零．则 $f(x)$ 在区间I内等于常数.

3. $x=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 的（ C ）.

(A)连续点； (B)可去间断点； (C)跳跃间断点； (D) 无穷间断点.

4. 定积分 $\int_0^{\pi}|\sin 2x|dx$ 的值是（ B ）.

（A）0; （B）2; （C）-2; （D）4.

5. 函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日定理的点 $\xi=$（ B ）.

(A) $1-\ln 2$； (B) $\frac{1}{\ln 2}-1$； (C) $1-\frac{1}{\ln 2}$； (D) $\frac{1}{\ln 2}$.

6. $\int(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x})dx=$（ C ）.

(A) $-2\cot x+C$； (B) $2\cot x+C$； (C) $-\cot x+\tan x+C$； (D) $\cot x-\tan x+C$.

7. $\frac{d}{dx}\int_a^x \arcsin t dt=$（ D ）.

(A) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$； (B) 0 ； (C) $\arcsin x-\arcsin a$ ； (D) $\arcsin x$.

8. 曲线 $y=e^x$ 与该曲线过原点的切线及 y 轴所围的平面图形面积为（ A ）.

(A) $\int_0^1(e^x-ex)dx$； (B) $\int_1^e(e^x-xe^x)dx$；

(C) $\int_1^e(\ln y-y\ln y)dy$； (D) $\int_0^1(\ln y-y\ln y)dy$.

三、简单计算题（共 6 小题，每题 6 分，共 36 分）

得分	

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ ……………………………………………(2')

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ ……………………………………………(2')

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$ ……………………………………………(2')

得分	

2．设 $y=\ln\sqrt{4-x^2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$ 的值.

解：$y=\dfrac{1}{2}\ln(4-x^2)$ ……………………………………………(2')

$y'=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4-x^2}(4-x^2)'$ ……………………………………………(2')

$=\dfrac{-x}{4-x^2}$ ……………………………………………(1')

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=-\dfrac{1}{3}$ ……………………………………………(1')

得分	

3．求函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{4x}$ 的极值.

解：$f'(x)=2x-\dfrac{1}{4x^2}$ ……………………………………………(1')

$f''(x)=2+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^3}$ ……………………………………………(1')

令 $f'(x)=0$，有 $\overline{x}=\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的驻点……………………………………………(1')

由于 $f''(\dfrac{1}{2})=6>0$，所以 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}$ 为 $f(x)$ 的极小值。……………………(2')

$f(x)$ 无极大值。……………………………………………(1')

得分	

4．已知 $\begin{cases}x=e^{-t}\cos t\\ y=e^{-t}\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：$x_t=e^{-t}(-\cos t-\sin t)$ ……………………………………………(2')

$y_t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$ ……………………………………………(2')

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t}{x_t}=\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}$ ……………………………………………(2')

得分	

5．求$\int \arcsin x dx$．

解：$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int x \,\mathrm{d}\arcsin x$ ……………………………………………(1')

$= x\arcsin x - \int x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ ……………………………………………(2')

$= x\arcsin x + \dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,(1-x^2)$ ……………………………………(2')

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\boxed{+C}$．……………………………………………(1')

得分	

6．计算$I=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$．

解：令 $x=2\sin t$，$dx=2\cos t\, dt$；从而有：$x=0, t=0$，$x=2, t=\dfrac{\pi}{2}$

$I=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\sin^2 x\cos^2 xdx$ ……………………………………(2')

$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)dx$

$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x-\sin^4 xdx$ ……………………………………………(2')

$=16[\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}]=\pi$ ……………………………………………(2')

得分	

四、综合计算题（共 10 分）

1．[4 分]方程$xy+e^{y^2}-x=0$确定隐函数$y=y(x)$，求曲线$y=y(x)$在点$(1,0)$处的切线方程．

解：在$xy+e^{y^2}-x=0$两边求对x求导数

$y+xy'+e^{y^2}2yy'-1=0$ ……………………………………(2')

$y'|_{(1,0)}=1$ ……………………………………………(1')

从而切线方程为$y=x-1$ ……………………………………(1')

2．[6 分] 求微分方程$y''+5y'-6y=xe^{-2x}$的通解.

解：$y''+5y'-6y=xe^{-2x}$

$r^2+5r-6=0$

$r_1=-6$，$r_2=1$

从而对应齐次方程的通解$Y=C_1e^{-6x}+C_2e^x$ ……………………………………(3')

由于$\lambda=2$不是特征方程的根，则原方程的特解可设为 $y^*=(Ax+B)e^{-2x}$ ………(1')

将y^*，$y^{*}{}'$，$y^{*}{}''$代入原方程，整理得$-12Ax+A-12B=x$，从而有：

$A=-\dfrac{1}{12}$，$B=-\dfrac{1}{144}$，从而有$y^*=(-\dfrac{1}{12}x-\dfrac{1}{144})e^{-2x}$。 ……………………(1')

所以原方程的通解为：

$y=Y+y^*=C_1e^{-6x}+C_2e^x+(-\dfrac{1}{12}x-\dfrac{1}{144})e^{-2x}$。 ……………………………(1')

得分	

五、应用题（本题 7 分）

已知平面图形由直线 $y=x+2$ 和曲线 $y=x^2$ 围成，试求该平面图形的面积以及它绕 x 轴旋转一周生成的旋转体的体积.

解：由 $\begin{cases} y=x+2 \\ y=x^2 \end{cases}$ 得 $A(-1,1)$， $B(2,4)$

从而 $S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx$ ……(1')

$=[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{2}$ ……(1')

化简 $\boxed{=\frac{9}{2}}$ ……(1')

$V=\int_{-1}^{2}\pi[(x+2)^2-(x^2)^2]dx$ ……(2')

$=\pi[\frac{1}{3}(x+2)^3-\frac{1}{5}x^5]_{-1}^{2}$ ……(1')

$=\frac{72}{5}\pi$ ……(1')

得分	

六、证明题 （本题 5 分）

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且满足：

(1) 当 $x\in[a,b)$ 时， $\int_a^x f(t)dt \ge \int_a^x g(t)dt$；

(2) $\int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt$.

试证明： $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$.

证明：令 $H(x)=\int_a^x[f(t)-g(t)]dt$ ，则有 $H'(x)=f(x)-g(x)\overset{\Delta}{=}h(x)$ ……(1')

由(1)和(2)可知， $H(x)\ge 0$ ，且有 $H(a)=H(b)=0$ ……(1')

所以有 $\int_a^b xf(x)dx-\int_a^b xg(x)dx=\int_a^b xh(x)dx=\int_a^b xdH(x)$ ……(1')

$=bH(b)-aH(a)-\int_a^b H(x)dx=-\int_a^b H(x)dx\le 0$ ……(1')

所以有 $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$ 。 ……(1')