选择题答案：

第一章 函数与极限

解析：

1.设$\mathrm{f(x)}=\begin{cases}1,|x|\leq 1\\0,|x|>1\end{cases}$，则$f\{f[f(x)]\}$=(B).

(A) 0; (B) 1; (C) $\begin{cases}1,|x|\leq 1\\0,|x|>1\end{cases}$; (D) $\begin{cases}0,|x|\leq 1\\1,|x|>1\end{cases}$;

解析：$f(x)$的取值为{0,1}∈[-1,1]，故$f\{f[f(x)]\}$恒等于 1.

2.函数$\mathrm{f(x)}=\frac{\sin x}{x^2}$，$\mathrm{g(x)}=\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$和$\mathrm{h(x)}=arctan\frac{|x|}{xln(1-x)}$中在区间(0,1)内有界的函数有(C)个.

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3;

解析：由等价无穷小知当$x\to 0$时，$sinx\sim x$，即$f(x)\sim 1/x$，$f(x)$无界.

3.下列说法正确的是(A).

(A) $\alpha=\beta+o(\beta)$是α和β为等价无穷小的充要条件;

(B) 无穷小是一个很小的数;

(C) 两个无穷小的商仍是一个无穷小;

(D) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，那么有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$;

4.函数$f(x)=arctan\frac{1}{1-x}$当$x\to 1$时的极限是(D).

(A) 0; (B) $\frac{\pi}{2}$; (C) $-\frac{\pi}{2}$; (D) 不存在;

解析：因为$x\to 1$包含左侧和右侧趋于 1 这两种情况，$f(x)$因此会得到±$\frac{\pi}{2}$两种情况，故极限不存在.

5.函数$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是(C).

(A) 当$x \to 0$时为无穷大;

(B) 当$x \to 0$时为无穷小;

(C) 无界，但当$x \to 0$时不是无穷大;

(D) 有界，但当$x \to 0$时不是无穷小;

解析：当 x 向 0 靠近时，函数无界；但是当$x \to 0$时，$\sin\frac{1}{x}$取值不确定，故极限不存在.

第二章 导数与微分

解析：

1.已知$y = sinx$，则$y^{(10)}$=(C).

(A) $sinx$; (B) $cosx$; (C) $-sinx$; (D) $-cosx$;

解析：$y^{(10)} = \sin\left(x + \frac{10}{2}\pi\right) = \sin(x + 5\pi) = -sinx$.

2.设函数$y = f(x)$在$x = a$处可导，$\Delta y = f(a+h) - f(a)$，则当 h→0 时有(D).

(A) dy是 h 的等价无穷小量; (B) $\Delta y - dy$是 h 的同阶无穷小量;

(C) dy是 h 的高阶无穷小量; (D) $\Delta y - dy$是 h 的高阶无穷小量;

解析：$\Delta y = dy + o(h)$.

3.函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数是(B).

(A) 3;　(B) 2;　(C) 1;　(D) 0;

解析：$f(x)=\begin{cases}-(x-2)(x+1)x(x+1)(x-1), & x<-1\text{ 或 }0\le x<1\\ (x-2)(x+1)x(x+1)(x-1), & -1\le x<0\text{ 或}x\ge 1\end{cases}$

则$f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{-(x-2)(x+1)x(x+1)(x-1)}{x+1}=0$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x-2)(x+1)x(x+1)(x-1)}{x+1}=0$$

故当$x=-1$时，$f(x)$可导，同理可得当$x=0,1$时，$f(x)$不可导.

4.设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^\alpha}\cos\frac{1}{x-1}, & x\ne 1\\ 0, & x=1\end{cases}$在$x=1$处可导，则实数$\alpha$满足(A).

(A) α<-1;　(B) $-1\le\alpha<0$　(C) $0\le\alpha<1$;　(D) $\alpha\ge 1$;

解析：$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{(\Delta x)^\alpha}\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}==\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{1}{(\Delta x)^{\alpha+1}}\cos\frac{1}{\Delta x}$

故当$\alpha+1<0$时，$f'(1)$存在.

5.设函数$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$，则(B).

(A) $f(0)=0$且$f'_-(0)$存在;　(B) $f(0)=0$且$f'_+(0)$存在;

(C) $f(0)=1$且$f'_-(0)$存在;　(D) $f(0)=1$且$f'_+(0)$存在;

解析：$f(0)=\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}h^2=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}\lim\limits_{h\to0}h^2=\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h^2)-f(0)}{h^2-0}=1$$

第三章 微分中值定理与导数的应用

解析：

1.设$f'(x_0)=0$是$f(x)$在x_0取得极值的(B).

(A) 充分条件; (B) 必要条件;

(C) 充分非必要条件; (D) 既非充分又非必要条件;

解析：$f'(x_0)=0$要成为充分条件还应该加上x_0左右两侧导数异号这个条件.

2.设$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}=2$，则在$x=1$处(D).

(A) $f(x)$的导数不存在; (B) $f(x)$的导数存在，但$f'(1)\neq 0$;

(C) $f(x)$取得极大值; (D) $f(x)$取得极小值;

解析：用极限的保号性即可:

由$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}=2$可知，在$x=1$的某去心邻域内有，$f(x)-f(1)>0$，即$f(x)>f(1)$，所以在$x=1$处$f(x)$取得极小值.

3.设$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则(D).

(A) $f'(x_0)$是$f(x_0)$的极大值; (B) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值;

(C) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值; (D) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点;

解析：由于$f'''(x_0)>0$可知$f''(x_0)$在点x_0的邻域内递增，又由于$f''(x_0)=0$，可知$f''(x_0)$在点x_0的左邻域内为负，$f''(x_0)$在点x_0的右邻域内为正，所以$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

下面说明$f(x_0)$不是$f(x)$的极值。由上面可知$f''(x_0)$在点x_0的左邻域内为负，$f''(x_0)$在点x_0的右邻域内为正，所以$f'(x_0)$在点x_0的左邻域内递减，$f'(x_0)$在点x_0的右邻域内递增，而$f'(x_0)=0$，则$f'(x_0)$在点x_0的左邻域内为正，$f'(x_0)$在点x_0的右邻域内也为正，所以x_0不是$f(x_0)$的极值点.

4.方程$2^x - x^2 = 1$的实根个数是(C).

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4;

解析：令$f(x) = 2^x - x^2 - 1$，函数在$(-\infty, +\infty)$内任意阶可导，观察可知有两个零点$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，又由于$f(2) = -1 < 0$，而$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[2^x - x^2 - 1] = +\infty$，所以存在第三个零点$x_3 > 2$。若是还有第四个零点$x_4$，则$f'(x) = 2^x ln2 - 2x$至少有三个零点，从而$f''(x) = 2^x ln^2 2 - 2$至少有两个零点，而$f''(x) = 2^x ln^2 2 - 2$是单调函数，最多只存在一个零点，所以$f(x)$有且仅有三个零点.

5.当$x \to 0$时，函数$\ln(1+x) - x$是关于x的(B)阶无穷小.

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4;

解析：设函数$\ln(1+x) - x$是关于x的k阶$(k > 0)$无穷小。则$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^k} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to0}\frac{x}{kx^{k-1}(1+x)} = \lim_{x\to0}\frac{x}{kx^{k-1}} = c \neq 0$易知$k = 2$.

或者也可以考虑用泰勒公式：$\ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

第四章 不定积分

解析：

1.下列不是$sin2x$的原函数的是(D).

(A) $-\frac{1}{2}cos2x+C$;　　　　(B) sin^2x+C;

(C) $-cos^2x+C$;　　　　(D) $\frac{1}{2}sin^2x+C$;

解析：逐个验算即可.

2.若函数$f(x)$的导数是$sinx$，则$f(x)$的一个原函数为(B).

(A) $sinx$;　(B) $-sinx$;　(C) $cosx$;　(D) $-cosx$;

解析：$f'(x)=sinx$，那么$f(x)=\int f'(x)dx=-cosx+c_1$，因此$f(x)$的原函数为$\int f(x)dx=-sinx+c_1x+c_2$，（$c_1$、$c_2$为任意常数），现取$c_1=0$、$c_2=0$时，得$f(x)$的一个原函数为$-sinx$.

3.若$\int f(x)dx=F(x)+c$，则$\int f(ax^2+b)xdx$=(C).

(A) $F(ax^2+b)+c$;　　　　(B) $\frac{1}{2a}F(ax^2+b)$;

(C) $\frac{1}{2a}F(ax^2+b)+c$;　　　　(D) $2aF(ax^2+b)+c$;

解析：$\int f(ax^2+b)xdx=\frac{1}{2a}\int f(ax^2+b)d(ax^2+b)=\frac{1}{2a}F(ax^2+b)+c$

4.已知函数$f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1\\ lnx, & x\geq 1\end{cases}$，则函数$f(x)$的一个原函数是(　).

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(lnx-1), & x\geq 1\end{cases}$;　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(lnx+1)-1, & x\geq 1\end{cases}$;

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(lnx-1)+1, & x\geq 1\end{cases}$;　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(lnx+1)+1, & x\geq 1\end{cases}$;

解析：当$x<1$时，$\int 2(x-1)dx=(x-1)^2+C_1$;

$x>1$时，$\int lnxdx=xlnx-\int xdlnx=x[lnx-1]+C_2$;

这里要注意到原函数的连续型，所以必然在处连续，由答案选项可知当$C_1=0$时，那么$C_2=1$.

5.设$f(x)$的原函数为$\frac{sinx}{x}$，则$\int xf'(x)dx$=(D)

(A) $sinx-\frac{1}{2}sin^2x+c$;　　(B) $x-\frac{1}{2}x^2+c$;

(C) $cosx-sinx+c$;　　(D) $cosx-\frac{2sinx}{x}+c$;

解析：由题可知$f'(x)=\frac{xcosx-sinx}{x^2}$，$\int f(x)dx=\frac{sinx}{x}+c$，运用分部积分法：

$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=cosx\frac{2sinx}{x}+c$.

第五章 定积分

解析：

1.定积分$\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2lnxdx$值的符号为(B).

(A) 大于零;　(B) 小于零;　(C) 等于零;　(D) 不能确定;

解析：在$(1,\frac{1}{2})$上，$x^2>0$，$lnx<0$，故被积函数小于零，结果小于零.

2.设$f(x)=\int_0^{sinx}sint^2dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的（B).

(A) 等价无穷小;　(B) 同阶，但非等价无穷小;

(C) 高阶无穷小;　(D) 低阶无穷小;

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{sinx}sint^2dt}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(sinx^2)cosx}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(sinx^2)c}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{3}$.

3.下列定积分为零的是(A).

(A) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{arctanx}{1+x^4}dx$;　　(B) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}xarcsinxdx$;

(C) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$;　　　(D) $\int_{-1}^{1}(x^2+x)sinxdx$;

解析：在积分范围内，A 是奇函数，其余都是偶函数，而奇函数在关于原点对称的积分范围内结果为零.

4.设函数$f(x)=xe^{x^2}$，$\int_2^3 f(x-2)dx$=(C).

(A) $e-1$;　(B) e　(C) $\frac{1}{2}(e-1)$;　(D) $\frac{1}{2}e$;

解析：$\int f(x)dx=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}$，$\int_2^3 f(x-2)dx=$

$\int_2^3 f(x-2)d(x-2)\xRightarrow{t=x-2}\int_0^1 f(t)dt=[\frac{1}{2}e^{t^2}]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$.

5.设$F(x)=\int_0^x\frac{du}{1+u^2}+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{du}{1+u^2}(x>0)$，则(B).

(A) $F(x)\equiv 0$;　(B) $F(x)\equiv\frac{\pi}{2}$;

(C) $F(x)=arctanx$;　(D) $F(x)=2arctanx$;

解析：根据$arctanx$的性质可知$arctanx+arctan\frac{1}{x}\equiv\frac{\pi}{2}$.

第六章 定积分的应用

解析：

1.曲线$y=e^x$与其过原点的切线及y轴所围成的平面图形的面积是(C).

(A) $\int_0^1(ex-e^x)dx$;　　　(B) $\int_1^e(lny-ylny)dy$;

(C) $\int_0^1(e^x-ex)dx$;　　　(D) $\int_0^1(e^x-xe^x)dx$;

解析：曲线$y=e^x$的斜率$k=y'=e^x$，故曲线上任意一点(x,y)处的切线方程

为：$Y-e^x=e^x(X-x)$，由于切线过原点，即有$Y-e^x=e^x(X-x)$，可得$x=1$，因此切点为$(1,e)$，切线方程为$y=ex$，故所求的面积为$\int_0^1(e^x-ex)dx$.

2.曲线$y=x^2$绕直线$y=1$旋转一周所得旋转体封闭部分的体积为(A).

(A) $V=\int_{-1}^1\pi(x^2-1)^2dx$;　　(B) $V=\int_{-1}^1\pi\sqrt{x^2-1}dx$;

(C) $V=\int_{-1}^1\pi(x^2-1)dx$;　　(D) $V=\int_{-1}^1\pi(x^2+1)dx$;

解析：由切片法即可得到所求的体积为$V=\int_{-1}^1\pi(x^2-1)^2dx$.

3.连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$以及x轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周得到的旋转体体积为（ D).

(A) $\int_a^b\pi f^2(x)dx$;　　(B) $\int_a^b f^2(x)dx$;

(C) $\int_a^b f(x)dx$;　　(D) $2\pi\int_a^b|xf(x)|dx$;

提示：体积元素是空心圆柱，然后将圆柱展开成一个长方体.

4.函数$y=x(x-1)(x-2)$和x轴所围成的图形面积可表示为(C).

(A) $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$;

(B) $\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$;

(C) $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$-$\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$;

(D) $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$+$\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$;

解析：画出函数的图像，并将 x 轴下方部分的积分取负.

第七章 微分方程

解析：

1.设线性无关函数y_1，y_2，y_3都是二阶非齐次线性微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解，C_1，C_2是待定常数，则次方程的通解是(　).

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$;　　　　　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$;　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$;

解析：因为y_1，y_2，y_3是二阶非齐次线性微分方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的线性无关的解，所以y_1-y_3，y_2-y_3为对应的齐次方程的两个线性无关的解（这里y_1-y_3，y_2-y_3线性无关可以用反证法得到），因此对应齐次方程的通解为$y=c_1(y_1-y_3)+c_2(y_2-y_3)$，故原方程的通解为：$y=c_1(y_1-y_3)+c_2(y_2-y_3)+y_3=c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$.

2.函数$y=y(x)$在点x处的增量满足$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+o(\Delta x)$，且$y(0)=\pi$，则$y(1)$=(　).

(A) 2π;　(B) π　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$;　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$;

解析：将原方程变形为$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，令$\Delta x\to 0$，得$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$，分离变量并解方程得$y=Ce^{arctanx}$，又因为$y(0)=\pi$，所以$C=\pi$，即该函数为$y=\pi e^{arctanx}$，令$x=1$，得$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

3.微分方程$y''+2y'+2y=e^{-x}sinx$的特解形式应设为(　).

(A) $e^{-x}(acosx+bsinx)$;　　(B) $e^{-x}bxsinx+ae^{-x}cosx$;

(C) $xe^{-x}(acosx+bsinx)$; (D) $e^{-x}bsinx+axe^{-x}cosx$;

解析：方程对应的其次方程的特征方程为$r^2+2r+2=0$，所以特征根为$r_{1,2}=-1\pm i,\lambda=-1$，$\omega=1$，因此原微分方程有特解$y^*=xe^{-x}(acosx+bsinx)$.

4.一条直线在其上任意一点(x,y)处切线斜率等于$-\frac{2x}{y}$，这条曲线是( ).

(A) 直线; (B) 抛物线 (C) 圆; (D) 椭圆;

解析：由题意有$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$，即$ydy=-2xdx$，积分得$\frac{1}{2}y^2+x^2=c$，可见，该曲线是椭圆 .

5.曲线$y=y(x)$经过点$(0,-1)$且满足微分方程$y'+2y=4x$，则当$x=1$时，y=( ).

(A) 0; (B) 1 (C) 2; (D) 4;

解析：方程$y'+2y=4x$为一阶线性微分方程，其通解为：

$y=e^{-\int 2dx}\left(\int 4xe^{\int 2dx}dx+C\right)=2x-1+Ce^{-2x}$.

由$x=0$时$y=-1$知$C=0$，所以曲线为$y=2x-1$，由此，当$x=1$时$y=1$.

填空题答案：

第一章

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{7x+6}-3}{x-3}$

解：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{7x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt[3]{7x+6})^3-3^3}{(x-3)[(\sqrt[3]{7x+6})^2+3\cdot\sqrt[3]{7x+6}+9]}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{7}{(\sqrt[3]{7x+6})^2+3\cdot\sqrt[3]{7x+6}+9}=\frac{7}{27}$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{e^{\sin x}-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{e^{\sin x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x[\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}]}=\frac{1}{2}$$

12. 当$x\to 0$时，$(1-\cos x)^2$是x^n的同阶无穷小，求n.

解：由于$(1-\cos x)^2$与$\dfrac{x^4}{4}$等价，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{x^4}=\dfrac{1}{4}$，故$n=4$

13. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{2x})^{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$，求$a$.

解：由于左边$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{2x})^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\dfrac{1}{2x})^{-2x}]^{-\frac{a}{2}}=e^{-\frac{a}{2}}$

右边$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2$

所以 $a=-2\ln 2$

14. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{2\sin x}, & x<0\\ a+e^{2x}, & x\ge 0\end{cases}$且$f(x)$在$x$=0处连续，求$a$.

解：$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0}(a+e^{2x})=a+1$

那么函数$f(x)$在x=0处连续，则需要$f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，即

$$-\frac{1}{2}=a+1\qquad\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

第二章

6. 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}$，则 $y'=-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}(\sec^2\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})$

7. 设 $x+y=\sec y$，则 $dy=\frac{1}{\sec y\tan y-1}dx$

提示：两边同时关于 x 求导，得 $1+y'=\sec y\tan y\cdot y'$

8. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=e^{3x}(1+3x)$

提示： $f(x)=x\lim\limits_{t\to 0}(1+3t)^{\frac{1}{3t}3x}=xe^{3x}$

9. 设 $x>0$，$d(\frac{\tan x}{\sqrt{x}})=\frac{2x\sec^2 x-\tan x}{x}d\sqrt{x}$

提示： $d(\frac{\tan x}{\sqrt{x}})=\frac{\sec^2 x\cdot\sqrt{x}-\tan x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}dx$, $\quad d(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$\frac{d(\frac{\tan x}{\sqrt{x}})}{d(\sqrt{x})}=\frac{\sec^2 x\cdot\sqrt{x}-\tan x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}dx\Big/\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{2x\sec^2 x-\tan x}{x}.$$

---

14. 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(\frac{t}{2})=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{t}{2})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

第三章

7. 曲线弧 $y=\ln(x+1)$ 在点 (x,y) 处的曲率半径 $R=$（ $\dfrac{[1+(1+x)^2]^{\frac{3}{2}}}{1+x}$ ）.

解：由于 $y'=\dfrac{1}{1+x}$， $y''=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$，则有

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{[1+(\frac{1}{1+x})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1+x}{[1+(1+x)^2]^{\frac{3}{2}}}，所以 \ R=\frac{[1+(1+x)^2]^{\frac{3}{2}}}{1+x}$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]=$（ $\dfrac{1}{2}$ ）.

解：法 1：由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，则

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim_{x\to\infty}[x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right))]$$

$$=\lim_{x\to\infty}[\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)]=\frac{1}{2}$$

法 2：用洛必达法则做，先做变量替换

$$\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}=\lim_{t\to0}[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)]=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$$

法 3：用洛必达法则做

$$\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim_{x\to\infty}x[1-x\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\ln(1+\frac{1}{x})-x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{2}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(1+x)^2}=\frac{1}{2}$$

9. 曲线 $y=e^{\arctan x}$ 的拐点坐标为（ $(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$ ）.

解： $y'=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}$， $y''=\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2}(1-2x)$

5. 当 $x\to 0$ 时，函数 $\ln(1+x)-x$ 是关于 x 的（ B ）阶无穷小.

（A）1； （B）2； （C）3； （D）4

分析： 设函数 $\ln(1+x)-x$ 是关于 x 的 k 阶（ $k>0$ ）无穷小. 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{kx^{k-1}(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{kx^{k-1}}=c\neq 0$$

易知 $k=2$.

或者也可以考虑用泰勒公式： $\ln(1+x)-x=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

10. $a=$（ -2 ）时，方程 $(x-a)^{\frac{2}{3}}=2+a$ 有唯一解.

解： 设 $F(x)=(x-a)^{\frac{2}{3}}-2-a$， $F'(x)=\frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}$ 无驻点，有 $F'(x)$ 不存在的点 $x=a$.

当 $x<a$ 时 $F'(x)<0$； 当 $x>a$ 时 $F'(x)>0$； 所以 $F(a)$ 是极小值， 而 $F(a)=-2-a$， $\lim_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$， $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$，所以有：

1) 当 $-2-a<0$ 时，方程有两个实根；
2) 当 $-2-a=0$ 时，只有一根；
3) 当 $-2-a>0$ 时，无实根.

第四章

5. $\int \frac{x+3}{x^2+4x+13}dx =$ （ $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+13)+\frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3}$ ）.

解：$\int \frac{x+3}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)+1}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)}{x^2+4x+13}dx + \int \frac{1}{x^2+4x+13}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13} + \int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+13) + \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C$$

6. 设曲线过点 $(e^2,3)$，且在任意点处的切线的斜率是该点横坐标的倒数，则曲线方程为（ $y(x)=\ln|x|+1$ ）.

解：由已知可得 $y'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $y(x)=\ln|x|+C$，又 $y(e^2)=3$，$C=1$ 则

$y(x)=\ln|x|+1$

7. 设 $f'(\tan^2 x)=\sec^2 x$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$（ $x+\frac{1}{2}x^2+1$ ）.

解：因 $f'(\tan^2 x)=\sec^2 x=1+\tan^2 x$，故 $f'(x)=1+x$，因此

$$f(x)=\int f'(x)dx = x+\frac{1}{2}x^2+c$$

又由于 $f(0)=1$，所以 $f(x)=x+\frac{1}{2}x^2+1$

8. 设 $\int xf(x)dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$，则 $\int \frac{1}{f(x)}dx =$（ $\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$ ）.

解：对 $\int xf(x)dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$ 两边同时求导，则 $xf(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

所以 $\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{x^2+1}$，则 $\int \frac{1}{f(x)}dx = \int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}dx^2 = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$

9. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$.

解：$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx = \int \frac{x^2+x^{-2}}{x^3}dx = \int (\frac{1}{x}+x^{-5})dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$

第五章

1. 若 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)\,dt$，则 $f(x)=$（ $\sin x$ ）.

解： $f(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)\,dt \overset{u=t-x}{=} \dfrac{d}{dx}\int_{-x}^0 \sin u\,du = \dfrac{d}{dx}(-\int_0^{-x}\sin u\,du)$

$=-\sin(-x)\cdot(-1)=-\sin x$

2. 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=$（ $af(a)$ ）.

解： 该极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=\lim_{x\to a}\frac{x\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\,dt+xf(x)}{1}=af(a)$$

3. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+1}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^a te^t\,dt$，则常数 $a=$（ 2 ）.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+1}{x})^{ax}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{ax}=e^a$

$\int_{-\infty}^a te^t\,dt=\int_{-\infty}^a t\,de^t=te^t\Big|_{-\infty}^a-\int_{-\infty}^a e^t\,dt=ae^a-e^t\Big|_{-\infty}^a=(a-1)e^a$

所以有：$e^a=(a-1)e^a$，则 $a=2$.

4. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}\,dt$ 的最大最小值.

解： $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}$，令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=0,\quad x=\pm\sqrt{2}$

x	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},0)$	0	$(0,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	极大值 $1+e^{-2}$	$\downarrow$	极小值0	$\uparrow$	极大值 $1+e^{-2}$	$\downarrow$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}\,dt=1$，所以又 $f(x)$ 的最大值为又 $f(\pm\sqrt{2})=1+e^{-2}$，

最小值为又 $f(0)=0$.

7. 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x t\,f(x^2-t^2)\,dt=$（ $xf(x^2)$ ）.

解： $\dfrac{d}{dx}\int_0^x t\,f(x^2-t^2)\,dt \overset{u=x^2-t^2}{=} \dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^0 -\dfrac{1}{2}f(u)\,du=\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\dfrac{1}{2}f(u)\,du=xf(x^2)$

第六章

3.【10 分】求对数螺线 $\rho = e^{a\theta}$ 自 $\theta = 0$ 到 $\theta = \varphi$ 的弧长.

解： $s = \int_0^{\varphi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta = \int_0^{\varphi} \sqrt{(e^{a\theta})^2 + (ae^{a\theta})^2}\, d\theta$

$$= \int_0^{\varphi} \sqrt{1+a^2}\; e^{a\theta} d\theta = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi} - 1)$$

4.【10 分】求曲线 $\rho = a\sin 3\theta$，（$a > 0$，$0 \le \theta \le 2\pi$）所围图形的面积.

解： 该曲线为三叶玫瑰线，其三部分的面积是相等的，所以有

$$A = 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (a\sin 3\theta)^2 d\theta = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta\, d\theta = \frac{3a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 6\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{4}\left(\theta - \frac{\sin 6\theta}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

5.【10 分】已知曲线 $y = x^2$，$y = 0$，$x = t$ 所围平面图形绕 x 轴旋转的旋转体体积与绕 y 轴旋转的旋转体体积相等，求 t.

解： 图形分别绕 x 轴与绕 y 轴旋转的旋转体体积为

$$V_x = \int_0^t \pi x^4 dx = \frac{\pi t^5}{5}, \qquad V_y = \pi t^4 - \int_0^t 2\pi x^3 dx = \frac{\pi t^4}{2}$$

由已知 $V_x = V_y$，所以 $t = \dfrac{5}{2}$.

第七章

6. 【5 分】函数 $f(x)$ 连续，且满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，求 $f(x)$.

解： 对方程两边求导得 $f'(x)=2f(x)$，解方程得 $f(x)=Ce^{2x}$，又 $f(0)=\ln 2$，所以 $C=\ln 2$，故 $f(x)=e^{2x}\ln 2$.

7. 【5 分】求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ 的通解.

解：由已知方程变形为：$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，代入方程可得

$$u+xu'=u\ln u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}$$

求解可得 $u=e^{Cx+1}$，所以方程通解为 $y=xe^{Cx+1}$.

8. 【5 分】求微分方程 $y'=\frac{1}{x+e^y}$ 的通解.

解： 由已知 $y'=\frac{1}{x+e^y}$，可得 $\frac{dx}{dy}=x+e^y$，即 $\frac{dx}{dy}-x=e^y$

所以方程的通解为：

$$x=e^{-\int p(y)dy}(\int Q(y)e^{\int p(y)dy}dy+C)=e^{-\int -dy}(\int e^y\cdot e^{\int -dy}dy+C)=e^y(y+C)$$

即方程的通解为：$x=e^y(y+C)$.

9. 【5 分】函数 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，求此方程.

解： 由已知可得方程对应的特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$，即 $r^2-3r+2=0$

所以所求方程为：$y''-3y'+2y=0$.

大题答案：

第一章解答题：

17. 求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的所有渐近线.

解：由于 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty$，所以 $x=-1$ 是曲线的铅直渐近线。

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(x+1)}=1$， $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{x+1}=-1$

所以 $y=x-1$ 是曲线的一条斜渐近线。

18. 已知函数 $f(x)$ 是区间 $[0,2a]$（$a>0$）上的连续函数，且 $f(0)=f(2a)$，证明：

方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 内至少有一个根.

证明：令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，则由已知 $F(x)$ 函数在 $[0,2a]$ 上连续，且

$$F(0)=f(0)-f(a)\quad,\quad F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

若 $f(0)-f(a)=0$，则 $x=0,x=a$ 即为函数 $F(x)$ 的零点，也就是方程 $f(x)=f(x+a)$ 的根。

若 $f(0)-f(a)\neq 0$，则 $F(0)F(a)<0$，根据闭区间上连续函数的零点定理可知，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $F(\xi)=0$。即 $\xi\in(0,a)$ 为函数 $F(x)$ 的零点，也就是方程 $f(x)=f(x+a)$ 的根。

第二章解答题：

18. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

证明：$y=\dfrac{a^2}{x}$，$y'=-\dfrac{a^2}{x^2}$. 设曲线上一点 (x_0,y_0)，则该点斜率 $-\dfrac{a^2}{{x_0}^2}$

故该点切线方程 $y-\dfrac{a^2}{x_0}=-\dfrac{a^2}{{x_0}^2}(x-x_0)$，即 $y+\dfrac{a^2}{{x_0}^2}x=\dfrac{2a^2}{x_0}$

该切线与x,y轴的截距分别为$2x_0$，$\dfrac{2a^2}{x_0}$

所以该切线与x,y轴所围面积是$\dfrac{1}{2}|2x_0|\left|\dfrac{2a^2}{x_0}\right|=2a^2$

19. 设周期函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为4，且它在$x=0$的某个邻域内满足$f(1)-2f(1-x)=-2x+o(x)$，求曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线方程.

解：已知$f(1)-2f(1-x)=-2x+o(x)$，两边同时取极限$x\to 0$，得$f(1)=0$，故$f(5)=0$.

又由 $f(1)-2f(1-x)=-2x+o(x)$，可得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-2f(1-x)+2x}{x}=0$

进而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-2f(1-x)}{x}=-2$ ，于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(5)-2f(5-x)}{x}=-2$

得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(5-x)-f(5)}{-x}=-1$， 即$f'(5)=-1$

于是切线为: $y-0=-(x-5)$ ，即 $x+y=5$

第三章解答题：

11. 求函数$f(x)=\ln(2+x)$的带有佩亚诺型余项的n阶麦克劳林公式 .

解：由于$\ln\left(1+x\right)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o\left(x^n\right)$，$x\in(-1,1]$，则

$$f(x)=\ln(2+x)=\ln 2(1+\frac{x}{2})=\ln 2+\ln(1+\frac{x}{2})$$

$$=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{(\frac{x}{2})^2}{2}+\frac{(\frac{x}{2})^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(\frac{x}{2})^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n\cdot 2^n}+o\left(x^n\right),\quad \frac{x}{2}\in(-1,1]$$

$$=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n\cdot 2^n}+o\left(x^n\right)，\quad x\in(-2,2]$$

12. 求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\ln(1+x)}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln(\sin x)^{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)^{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\cdot\ln(\sin x)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\csc^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}-\sin x\cos x}=e^0=1$$

（2）利用泰勒公式求极限

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)，\quad e^{\frac{-x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)，$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{12}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}=\frac{-1}{12}$$

13. 求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值，并求此函数图像对应的凹凸区间以及曲线的拐点 .

解：$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$，$x\neq 0$

$$f''(x)=\frac{5\sqrt[3]{x}-(5x-2)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2(5x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}，\quad x\neq 0$$

令 $f'(x)=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0$，可得函数的驻点为 $x=\dfrac{2}{5}$

令 $f''(x)=\dfrac{2(5x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$，可得 $x=\dfrac{-1}{5}$

x	$(-\infty,\frac{-1}{5})$	$\frac{-1}{5}$	$(\frac{-1}{5},0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
y'	+	+	+	不存在	−	0	+
y''	−	0	+	不存在	+	+	+
y	上凸递增	拐点 $(\frac{-1}{5},\frac{-6}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{25}})$	下凸递增	极大值 0	下凸递减	极小值 $\frac{-3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	下凸递增

综上所述，函数的单调增加区间为$(-\infty,0]\cup[\frac{2}{5},+\infty)$，单调减少的区间为$[0,\frac{2}{5}]$，函数的极大值为$f(0)=0$，极小值为$f(\frac{2}{5})=\frac{-3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

函数曲线的上凸区间为$(-\infty,-\frac{1}{5}]$，下凸区间为$[-\frac{1}{5},+\infty)$，拐点坐标为$(\frac{-1}{5},\frac{-6}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{25}})$.

14. 求曲线$y=\frac{1}{2}x^6$（$x>0$）上哪一点处的法线在Y轴上的截距最小.

解：由已知可得$y'=3x^5$（$x>0$），那么曲线上点$\left(t,\frac{1}{2}t^6\right)$处的法线方程为：

$y-\frac{1}{2}t^6=\frac{-1}{3t^5}(x-t)$，即 $y=\frac{1}{2}t^6-\frac{1}{3t^5}(x-t)$，$t>0$.

其在Y轴上的截距为：$Y=\frac{1}{2}t^6+\frac{1}{3t^4}$，那么有 $Y'(t)=3t^5-\frac{4}{3t^5}$，

令$Y'(t)=3t^5-\frac{4}{3t^5}=0$，有$t=\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$，而$Y''(t)=15t^4+\frac{20}{3t^6}>0$，所以$Y=\frac{1}{2}t^6+\frac{1}{3t^4}$在$t=\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$处取得最小值，即曲线$y=\frac{1}{2}x^6$（$x>0$）上$(\sqrt[5]{\frac{2}{3}},\frac{1}{3}\sqrt[5]{\frac{2}{3}})$处的法线在$Y$轴上的截距最小，最小截距为$Y=\frac{1}{3}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}(\frac{3}{2})^{\frac{4}{5}}$.

第三章证明题：

15. 设$x>0$，证明：$(e+x)^e<e^{e+x}$.

证明：**法 1**：要证 $(e+x)^e < e^{e+x} \Leftrightarrow \ln(e+x)^e < \ln e^{e+x} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(e+x)}{e+x} < \dfrac{\ln e}{e}$

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x \ge e$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，$x>e$

即函数在 $[e,+\infty)$ 上严格单调增加，所以当 $x>0$，有 $(e+x)^e < e^{e+x}$.

法 2：要证 $(e+x)^e < e^{e+x} \Leftrightarrow e^{\ln(e+x)^e} < e^{e+x} \Leftrightarrow e^{e\ln(e+x)} < e^{e+x}$

$f(x)=x-e\ln x$，则 $f'(x)=1-\dfrac{e}{x}$，当 $x=e$ 时，$f'(x)=0$，

又当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)>f(e)=0$，即

$(e+x)-e\ln(e+x)>0$，所以当 $x>0$ 时，成立 $(e+x)^e < e^{e+x}$.

16. 证明恒等式：$\arcsin(2x-1)-2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=-\dfrac{\pi}{2}$ ，$0<x<1$.

证明：设 $f(x)=\arcsin(2x-1)-2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$，$0<x<1$，则有

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}-2\frac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=0$$

所以由拉格朗日定理的推论可知 $f(x)\equiv C$，$0<x<1$.

取 $x=\dfrac{1}{2}$，可得 $C=\dfrac{-\pi}{2}$ ，得证 .

17. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：

存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+(1-e^{-\xi})f'(\xi)=0$.

分析：$f(\xi)+(1-e^{-\xi})f'(\xi)=0$，$\because e^{-\xi}\ne 0$，$\therefore e^{\xi}f(\xi)+(e^{\xi}-1)f'(\xi)=0$，

证明：作辅助函数 $F(x)=(e^x-1)f(x)$，则 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=0$, $F(1)=(e-1)f(1)=0$，所以由罗尔定理知

$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$　即 $e^{\xi}f(\xi)+(e^{\xi}-1)f'(\xi)=0$.

18. 设函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f''(x)\le 0$，证明：对于 (a,b) 内任意的 x_1,x_2 及 $0\le\lambda\le 1$，有 $f[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]\ge(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$.

证明：由于在区间 (a,b) 内 $f''(x)\le 0$ 可知 $f'(x)$ 为减函数，对于 (a,b) 内任意的 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，记 $x_3=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$，则 $x_1\le x_3\le x_2$，根据拉格朗日中值定理有 $f(x_3)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x_3-x_1)\ge f'(x_3)(x_3-x_1)$， 即

$$f(x_1)\le f(x_3)-f'(x_3)(x_3-x_1) \tag{1}$$

$$f(x_2)-f(x_3)=f'(\xi_2)(x_2-x_3)\le f'(x_3)(x_2-x_3),\quad 即$$

$$f(x_2)\le f(x_3)+f'(x_3)(x_2-x_3) \tag{2}$$

由于 $x_3-x_1=\lambda(x_2-x_1)$， $x_2-x_3=(1-\lambda)(x_2-x_1)$，所以

$$f(x_1)\le f(x_3)-f'(x_3)\lambda(x_2-x_1) \tag{3}$$

$$f(x_2)\le f(x_3)+f'(x_3)(1-\lambda)(x_2-x_1) \tag{4}$$

$(1-\lambda)(3)+\lambda(4)$ 可得：

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)\le(1-\lambda)f(x_3)+\lambda f(x_3)=f(x_3)$$

即

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)\le f[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]$$

法 2：记 $x_3=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$， $0\le\lambda\le 1$，则 $x_1\le x_3\le x_2$，在 x_3 处对函数做一阶的泰勒展开，则有：

$$f(x)=f(x_3)+f'(x_3)(x-x_3)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_3)$$

所以有

（1） $f(x_1)=f(x_3)+f'(x_3)(x_1-x_3)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1-x_3)^2$， ξ_1介于x_1与x_3之间

（2） $f(x_2)=f(x_3)+f'(x_3)(x_2-x_3)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2-x_3)^2$， ξ_2介于x_2与x_3之间

$(1-\lambda)(1)+\lambda(2)$ 可得：

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)=f(x_3)+\frac{1}{2}[(1-\lambda)f''(\xi_1)(x_1-x_3)^2+\lambda)f''(\xi_2)(x_2-x_3)^2]$$

由于$f''(x)\le 0$， 有$\frac{1}{2}[(1-\lambda)f''(\xi_1)(x_1-x_3)^2+\lambda)f''(\xi_2)(x_2-x_3)^2]<0$

所以

$$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)\le f(x_3)$$

第四章计算题：

17. 设$f'(e^x)=a\sin x+b\cos x$，其中a,b是不同时为零的常数，求$f(x)$.

解：由于$f'(e^x)=a\sin x+b\cos x$，令$t=e^x$，则$x=\ln t$

$$f'(t)=a\sin(\ln t)+b\cos(\ln t)$$

所以 $f(x)=\int[a\sin(\ln x)+b\cos(\ln x)]dx$

利用分部积分可知 $\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int xd\sin(\ln x)$

$$=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)d\ln x$$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)dx$$

可得 $\int\sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C_1$

同理可得 $\int\cos(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C_2$

以是 $f(x)=\int[a\sin(\ln x)+b\cos(\ln x)]dx$

$$=\frac{ax}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C_1+\frac{bx}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C_2$$

$$=\frac{a+b}{2}x\sin(\ln x)+\frac{b-a}{2}x\cos(\ln x)+C$$

18. 设 $x\neq 0$ 时，$f'(x)$ 连续，求 $\int\frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx$.

解：利用分部积分计算

$$\int\frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx=\int\frac{xdf(x)}{x^2e^x}-\int\frac{(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx$$

$$=\frac{f(x)}{xe^x}-\int f(x)d\frac{1}{xe^x}-\int\frac{(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx$$

$$=\frac{f(x)}{xe^x}+\int\frac{(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx-\int\frac{(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx$$

$$=\frac{f(x)}{xe^x}+C$$

19. 设 $f(x)$ 是的一个原函数是 $\frac{\cos x}{x}$，求 $\int x^3f'(x)dx$.

解：由已知得 $f(x)=(\frac{\cos x}{x})'=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，$\int f(x)dx=\frac{\cos x}{x}+C$

那么 $\int x^3f'(x)dx=\int x^3df(x)=x^3f(x)-\int f(x)dx^3=x^3f(x)-3\int x^2f(x)dx$

$$=x^3\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}-3\int x^2\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}dx$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x-3\int(-x\sin x-\cos x)dx$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x+3\int(x\sin x+\cos x)dx$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x+3\sin x+3\int x\sin xdx$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x+3\sin x+3\int xd(-\cos x)$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x+3\sin x-3x\cos x+3\int\cos xdx$$

$$=-x^2\sin x-x\cos x+3\sin x-3x\cos x+3\sin x+C$$

$$=-x^2\sin x-4x\cos x+6\sin x+C$$

20. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(0)=1$，$F'(x)\geq 0$，且当 $x\geq 0$ 时，有

$f(x)F(x)=\sin^2 2x$，求 $f(x)$.

解：对 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$ 两边同时积分，有

$$\int f(x)F(x)dx=\int\sin^2 2xdx$$

$$\int F(x)dF(x)=\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx$$

$$\frac{F^2(x)}{2}=\frac{1}{2}[x-\frac{\sin 4x}{4}]+C$$

由于$F(0)=1$，可知$C=\frac{1}{2}$，又由于$F(0)=1$，$F'(x)\geq 0$，可知$F(x)\geq 0$，所以

$$\frac{F^2(x)}{2}=\frac{1}{2}[x-\frac{\sin 4x}{4}]+\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad F^2(x)=x-\frac{\sin 4x}{4}+1$$

$F(x)=\sqrt{x-\frac{\sin 4x}{4}+1}$，所以 $f(x)=F'(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{2\sqrt{x-\frac{\sin 4x}{4}+1}}$

第五章计算题：

4. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}\,dt$ 的最大最小值.

解： $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}$，令 $f'(x)=0 \quad\Rightarrow x=0,\quad x=\pm\sqrt{2}$

x	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},0)$	0	$(0,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	极大值 $1+e^{-2}$	$\downarrow$	极小值0	$\uparrow$	极大值 $1+e^{-2}$	$\downarrow$

又$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}\,dt=1$，所以又 $f(x)$ 的最大值为又 $f(\pm\sqrt{2})=1+e^{-2}$，最小值为又 $f(0)=0$.

6. 求$\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)\,f(t)\,dt$，其中 $f(x)$ 为已知的连续函数 .

解： $\int_0^{x^2}(x^2-t)\,f(t)\,dt=x^2\int_0^{x^2}f(t)\,dt-\int_0^{x^2}t\,f(t)\,dt$

所以有：$\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)\,f(t)\,dt=\dfrac{d}{dx}[x^2\int_0^{x^2}f(t)\,dt-\int_0^{x^2}t\,f(t)\,dt]$

$$=2x\int_0^{x^2}f(t)\,dt+2x^3f(x^2)-2x\cdot x^2f(x^2)$$

$$=2x\int_0^{x^2}f(t)\,dt$$

10. 求$\int_0^2 f(x-1)\,dx$，其中$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0\end{cases}$.

解： $\int_0^2 f(x-1)\,dx \overset{x-1=t}{=} \int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+e^t} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \int_{-1}^0 (1-\frac{e^t}{1+e^t})dt + \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$

$$= [t-\ln(1+e^t)]\Big|_{-1}^0 + \ln(1+t)]\Big|_0^1$$

$$= -\ln 2 + 1 + \ln(1+e^{-1}) + \ln 2$$

$$= \ln(1+e)$$

12. 已知$f(x)=e^x + x\int_0^1 f(\sqrt{x})\,dx$，求$f(x)$.

解： 由于$\int_0^1 f(\sqrt{x})\,dx \overset{\sqrt{x}=t}{=} 2\int_0^1 t\,f(t)\,dt$

所以$f(x)=e^x+2x\int_0^1 t\,f(t)\,dt$，即有

$$xf(x)=xe^x+2x^2\int_0^1 t\,f(t)\,dt$$

设$A=\int_0^1 t\,f(t)\,dt$，那么对上式两边积分有

$$\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\,e^x dx + (\int_0^1 t\,f(t)\,dt)\int_0^1 2x^2\,dx$$

即有
$$A=\int_0^1 x\,e^x dx + A\int_0^1 2x^2\,dx$$

$$A=\int_0^1 xd\,e^x + \frac{2}{3}A = (x-1)e^x\Big|_0^1 + \frac{2}{3}A = 1+\frac{2}{3}A$$

所以$A=3$，则$f(x)=e^x+6x$.

13. 利用定积分的定义求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{1+\frac{i}{n}}$.

解： 利用定积分的定义可知：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sqrt{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

15. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$.

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{1+\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d\cos x}{1+\cos x}$

$$= x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2} dx - \ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{2} + \ln 2 + 2\ln(\cos\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln 2 + 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + \ln 2 + \ln\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

16. 计算 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$.

解： $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx = -(\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}$

18. 计算 $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$.

解： $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx \overset{1-x=\sin t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin t)^2}{|\cos t|}(-\cos t)dt$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin t)^2}{\cos t}(\cos t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin t)^2 dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin t+\sin^2 t)\, dt = \pi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$

$$= \pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\, dt = \pi + (t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi$$

第五章证明题：

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续且递增的函数，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx \le 2\int_a^b xf(x)dx\ .$$

证明：法 1： 只要证明 $(a+b)\int_a^b f(x)dx - 2\int_a^b xf(x)dx \le 0$，故可令

$$F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)dt - 2\int_a^x tf(t)dt\text{，则}$$

$$F'(x)=\int_a^x f(t)dt+(x+a)f(x)-2xf(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(x)$$

$$=(x-a)[f(\xi)-f(x)],\quad a<\xi<x$$

$f(x)$ 是递增的，因此 $f(\xi)\le f(x)$，即有 $F'(x)\le 0$．又 $F(a)=0$，所以 $F(x)\le 0$．特别地，$F(b)\le 0$，故 $(a+b)\int_a^b f(x)dx \le 2\int_a^b xf(x)dx$．

法 2： 由已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是递增的函数，则

$$(\frac{a+b}{2}-x)[f(\frac{a+b}{2})-f(x)]\ge 0$$

故
$$\int_a^b(\frac{a+b}{2}-x)[f(\frac{a+b}{2})-f(x)]\,dx\ge 0$$

即
$$\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx+f(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\,dx\le\int_a^b xf(x)dx$$

而
$$\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx+f(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

所以
$$\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b xf(x)\,dx$$

所证明的不等式得证．

17. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $\int_0^x f(t)(x-t)\,dt=\int_0^x(\int_0^t f(u)\,du)\,dt$ ．

解：法 1： 考虑左边有

$$\int_0^x(\int_0^t f(u)\,du)\,dt=t(\int_0^t f(u)\,du)\Big|_0^x-\int_0^x t\,d(\int_0^t f(u)\,du)$$

$$=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x t\,f(t)dt=\int_0^x(x-t)\,f(t)dt$$

法 2： 令 $F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)dt-\int_0^x(\int_0^t f(u)du)dt$

$$F'(x)=[\int_0^x f(t)(x-t)dt-\int_0^x(\int_0^t f(u)du)dt]'$$

$$=[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t\,f(t)dt-\int_0^x(\int_0^t f(u)\,du)dt]'$$

$$=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(u)du=\int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(u)du=0$$

故 $F(x)$ 是常值函数，于是有

$$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)dt-\int_0^x(\int_0^t f(u)du)dt=F(0)=0$$

即
$$\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x(\int_0^t f(u)du)dt.$$

第六章计算题：

3.【10 分】求对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 自 $\theta=0$ 到 $\theta=\varphi$ 的弧长.

解： $s=\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta=\int_0^{\varphi}\sqrt{(e^{a\theta})^2+(ae^{a\theta})^2}\,d\theta$

$$=\int_0^{\varphi}\sqrt{1+a^2}\,e^{a\theta}d\theta=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi}-1)$$

4.【10 分】求曲线 $\rho=a\sin 3\theta$，（$a>0$，$0\le\theta\le 2\pi$）所围图形的面积.

解： 该曲线为三叶玫瑰线，其三部分的面积是相等的，所以有

$$A=3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(a\sin 3\theta)^2d\theta=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3\theta\,d\theta=\frac{3a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{3a^2}{4}(\theta-\frac{\sin 6\theta}{6})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

5.【10 分】已知曲线 $y=x^2$，$y=0$，$x=t$ 所围平面图形绕 x 轴旋转的旋转体体积与绕 y 轴旋转的旋转体体积相等，求 t.

解： 图形分别绕 x 轴与绕 y 轴旋转的旋转体体积为

$$V_x=\int_0^t\pi x^4dx=\frac{\pi t^5}{5},\qquad V_y=\pi t^4-\int_0^t 2\pi x^3dx=\frac{\pi t^4}{2}$$

由已知 $V_x=V_y$，所以 $t=\dfrac{5}{2}$.

6.【10 分】求曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 的弧长.

解： 由已知 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，方程两边同时对 x 求导可得 $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$，所以有

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0 \quad \Rightarrow y'=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\text{，即 } y'=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$s=\int_0^1\sqrt{1+(1-\frac{1}{\sqrt{x}})^2}\,dx \overset{\sqrt{x}=u}{=} 2\int_0^1\sqrt{2u^2-2u+1}\,du=2\int_0^1\sqrt{2(u-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

$$\overset{u-\frac{1}{2}=t}{=} 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}\,dt=4\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}\,dt=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\sqrt{2}t)^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\,d\sqrt{2}t$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2}}[\frac{\sqrt{2}\,t}{2}\sqrt{(\sqrt{2}t)^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}+\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{2}\ln(\sqrt{2}\,t+\sqrt{(\sqrt{2}t)^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}]\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

7.【10 分】求圆 $x^2+(y-R)^2\le r^2$（$0<r<R$）绕 x 轴旋转一周所得环状立体的体积.

解： 上下半圆方程分别为： $y=f_2(x)=R+\sqrt{r^2-x^2}$， $y=f_1(x)=R-\sqrt{r^2-x^2}$

$$V_x=\int_{-r}^{r}\pi f_2^{\,2}(x)\,dx-\int_{-r}^{r}\pi f_1^{\,2}(x)\,dx=\int_{-r}^{r}4\pi R\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=2\int_0^r 4\pi R\sqrt{r^2-x^2}\,dx=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\pi^2r^2R$$

8.【10 分】求平面曲线 $9y^2=x(x-3)^2$ （$y\ge 0$），位于 $x=0$ 到 $x=3$ 之间的一段弧长.

解： 由已知对 $9y^2=x(x-3)^2$ 两边同时对 x 求导，可以得到 $y'=\frac{1}{6y}(x-1)(x-3)$

所以计算可得 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{4x}}=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$，因此

$$s=\int_0^3\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^3\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{3}$$

9.【10 分】求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$，（$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$）的长度.

解：由已知可得 $y'=\sqrt{\cos x}$，所以

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx=4\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=4$$

10.【18 分】设曲线 $y=x^2-2x$， $y=0$， $x=1$， $x=3$ 围成一平面图形 A，

（1）求 A 的面积 S ；

（2）求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1） $A=\int_{1}^{3}\left|x^2-2x\right|dx=\int_{1}^{2}(2x-x^2)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx=2$

（2）法 1： $V=2\pi\int_{1}^{3}x\left|y\right|dx=2\pi[\int_{1}^{2}x(2x-x^2)\,dx+\int_{2}^{3}x(x^2-2x)\,dx]=9\pi$

法 2：或者也可以用“切片法”

$$V=[\int_{-1}^{0}\pi x^2dy-\pi\cdot1^2\cdot1]+[\pi\cdot3^2\cdot3-\int_{0}^{1}\pi x^2dy]$$

$$=[\int_{-1}^{0}\pi(1-\sqrt{1+y})^2dy-\pi\cdot1^2\cdot1]+[\pi\cdot3^2\cdot3-\int_{0}^{1}\pi(1+\sqrt{1+y})^2dy]$$

$$=\frac{17}{6}\pi-\pi+27\pi-\frac{119}{6}\pi=9\pi$$

第七章计算题：

6. 【5 分】函数 $f(x)$ 连续，且满足关系式 $f(x)=\int_{0}^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，求 $f(x)$.

解：对方程两边求导得 $f'(x)=2f(x)$，解方程得 $f(x)=Ce^{2x}$，又 $f(0)=\ln 2$，所以 $C=\ln 2$，故 $f(x)=e^{2x}\ln 2$.

7. 【5 分】求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ 的通解.

解：由已知方程变形为：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，代入方程可得

$$u+xu'=u\ln u \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}$$

求解可得 $u=e^{Cx+1}$，所以方程通解为 $y=xe^{Cx+1}$.

8. 【5 分】求微分方程 $y'=\dfrac{1}{x+e^{y}}$ 的通解.

解：由已知 $y'=\dfrac{1}{x+e^{y}}$，可得 $\dfrac{dx}{dy}=x+e^{y}$，即 $\dfrac{dx}{dy}-x=e^{y}$

所以方程的通解为：

$$x=e^{-\int p(y)dy}(\int Q(y)e^{\int p(y)dy}dy+C)=e^{-\int -dy}(\int e^{y}\cdot e^{\int -dy}dy+C)=e^{y}(y+C)$$

即方程的通解为：$x=e^{y}(y+C)$.

9. 【5 分】函数 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$ 是某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，求此方程.

解：由已知可得方程对应的特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$，即 $r^2-3r+2=0$

所以所求方程为：$y''-3y'+2y=0$.

10. 【5 分】设常系数齐次线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^{x}$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$，试确定常数 α,β,γ .

解：因为 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$ 为方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^{x}$ 的解，将

$$y=e^{2x}+(1+x)e^{x} \quad 与 \quad y'=2e^{2x}+2e^{x}+xe^{x} \quad 及 \quad y''=4e^{2x}+3e^{x}+xe^{x}$$

代入方程得

$$4e^{2x}+3e^{x}+xe^{x}+\alpha\,[2e^{2x}+2e^{x}+xe^{x}]+\beta\,[e^{2x}+e^{x}+xe^{x}]=\gamma\, e^{x}$$

整理得 $(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(3+2\alpha+\beta)e^{x}+(1+\alpha+\beta)xe^{x}=\gamma\, e^{x}$，比较系数得

$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$ ，解方程得 $\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1$，

所以原方程为 $y''-3y'+2y=-e^{x}$，（原方程的通解为 $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+xe^{x}$）.

11. 【7 分】求微分方程 $y''=\dfrac{2xy'}{1+x^2}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$， $y'\big|_{x=0}=3$ 的特解.

解：方程 $y''=\dfrac{2xy'}{1+x^2}$ 中不显含未知函数 y，因此作变量代换令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'(x)$，代入方程得 $p'=\dfrac{2xp}{1+x^2}$，分离变量法解此方程得 $p=C_1(1+x^2)$，即 $y'=C_1(1+x^2)$，代入初始条件 $y'\big|_{x=0}=3$ 得 $C_1=3$，于是 $y'=3(1+x^2)$，两边积分得 $y'=x^3+3x+C_2$，代入初始条件 $y\big|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$，所以所求特解为 $y=x^3+3x+1$.

12. 【7 分】求微分方程 $yy''+(y')^2=y'$ 的通解.

解：令 $y'=p, y''=p\dfrac{dp}{dy}$，代入原方程得 $p(y\dfrac{dp}{dy}+p)=p$，

若 $p=0$，则 $y=C$；

若 $p\neq 0$，则 $y\dfrac{dp}{dy}+p=1$，即 $\dfrac{dp}{1-p}=\dfrac{dy}{y}$，积分得：$p=1-\dfrac{C_1}{y}$，即 $\dfrac{y}{y-C_1}dy=dx$，

两边积分得 $y+C_1\ln\left|y-C_1\right|=x+C_2$ 为原方程通解.

13. 【7 分】求微分方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解.

解：令 $y'=p$， $y''=\dfrac{dp}{dx}$，代入原方程得 $x\dfrac{dp}{dx}-p=x^2$，即 $\dfrac{dp}{dx}-\dfrac{1}{x}p=x$

求解得： $p=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}(\int x\cdot e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C_1)=x(x+C_1)$，即 $p=y'=x(x+C_1)$，

两边积分得 $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}C_1+C_2$ 为原方程通解.

14. 【7 分】求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

解：由特征方程 $r^2+2r+1=0$ 解得特征根 $r_1=r_2=-1$，所以对应齐次方程的通解为 $Y=(C_1x+C_2)e^{-x}$。又因为 xe^x 中 $\lambda=1$ 不是特征根，所以可设原方程的特解为 $y^*=(ax+b)e^x$，代入原方程整理得 $4ax+4a+4b=x$，从而 $a=\dfrac{1}{4}, b=-\dfrac{1}{4}$，即 $y^*=\dfrac{1}{4}(x-1)e^x$，原方程的通解为 $y=(C_1x+C_2)e^{-x}+\dfrac{1}{4}(x-1)e^x$.

15. 【7 分】求微分方程 $y''-2y'+y=2e^x$ 的通解.

解：特征方程 $r^2-2r+1=0\Rightarrow$ 特征根 $r_{1,2}=1$，对应齐次方程通解为 $y=e^x(C_1+C_2x)$， 因为 $f(x)=2e^x$ 属于 $P_m(x)e^{-\lambda x}$ 型 $\lambda=1$ 是特征根,
那么原方程的一个特解为： $y^*=ax^2e^x$，将 y^* 代入原方程比较系数得 $a=1$，
故 $y^*=x^2e^x$，所以原方程通解为： $y=e^x(C_1+C_2x)+x^2e^x$.

16.【9 分】求微分方程 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$ 的通解.

解：特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0$，特征根为 $r_1=-1$， $r_2=r_3=i$， $r_4=r_5=-i$，故原方程的通解为： $y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x$.

17.【9 分】求微分方程 $y''+y=\sin x-2e^{-x}$ 的通解.

解：特征方程为 $r^2+1=0\Rightarrow$ 特征根 $r_{1,2}=\pm i$，对应齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

设 $y_1^*=x(a\cos x+b\sin x)$， $y_2^*=ce^{-x}$ 分别为 $y''+y=\sin x$ 和 $y''+y=-2e^{-x}$ 的特解，

将 y_1^* 代入 $y''+y=\sin x$ 得： $a=-\frac{1}{2}, b=0$，

将 y_2^* 代入 $y''+y=-2e^{-x}$ 得 $c=-1$，

所以原方程有特解： $y^*=y_1^*+y_2^*=-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$，

原方程的通解为： $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$.

18.【9 分】设连接两点 $A(0,1)$， $B(1,0)$ 的一条凸弧， $P(x,y)$ 为凸弧 AB 上任意一点，已知凸弧与弦 AP 之间的面积为 x^3，求此凸弧的方程.

解：设所求曲线为 $y=f(x)$，依题意 $\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{2}x[1+f(x)]=x^3$，求导得

$f(x)-\frac{1}{2}[1+f(x)+xf'(x)]=3x^2$，整理得： $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{6x^2+1}{x}$

解得 $f(x)=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}(\int -\frac{6x^2+1}{x}\cdot e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C)=x(\int -\frac{6x^2+1}{x^2}dx+C)=x(-6x+\frac{1}{x}+C)$，

即： $f(x)=-6x^2+1+Cx$， 又因为 $f(1)=0$，所以 $C=5$，

所求曲线为： $y=f(x)=-6x^2+5x+1$.

19.【9分】设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x f(t)dt=\sin^2 x+\int_0^x t\,f(x-t)dt$，求 $f(x)$.

解：由于 $\int_0^x t\,f(x-t)dt \overset{u=x-t}{=} \int_x^0 (x-u)\,f(u)d(-u)$

$$=\int_0^x (x-u)\,f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x u\,f(u)du$$

所以有： $\int_0^x f(t)dt=\sin^2 x+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x u\,f(u)du$

上述方程两边对 x 求导得：

$$f(x)=\sin 2x+\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)$$

即 $f(x)=\sin 2x+\int_0^x f(u)du$ 且 $f(0)=0$

再对 x 求导得： $f'(x)=2\cos 2x+f(x)$

即 $f'(x)-f(x)=2\cos 2x$

其通解为： $f(x)=e^{-\int -dx}(\int 2\cos 2x\cdot e^{\int -dx}dx+C)=e^x(\int 2\cos 2x\cdot e^{-x}dx+C)$

$$=e^x[\frac{2}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)+C)]=Ce^x+\frac{2}{5}(2\sin 2x-\cos 2x)$$

即 $$f(x)=Ce^x+\frac{2}{5}(2\sin 2x-\cos 2x)$$

又由 $f(0)=0$，可得 $C=\frac{2}{5}$，所以 $f(x)=\frac{2}{5}(2\sin 2x-\cos 2x)+\frac{2}{5}e^x$.

20.【9分】求微分方程 $y''+4y'+5y=8\cos x$ 当 $x\to+\infty$ 时为有界的特解.

解：特征方程 $r^2+4r+5=0\Rightarrow$ 特征根 $r_{1,2}=-2\pm i$，原方程对应齐次方程通解为

$$Y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

而 $0\pm i$ 不是特征根，所以原方程的一个特解为：$y^*=a\cos x+b\sin x$，将 y^* 代入原方程比较系数得 $a=b=1$，原方程的通解为

$$y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+\cos x+\sin x$$

当 $x\to+\infty$ 时，$y\to\cos x+\sin x$，故极限函数为 $y=\cos x+\sin x$ 有界，且正好是原方程的一个特解.