选择题

第一章 函数与极限

1.设$f(x)=\begin{cases}1,|x|\le 1\\0,|x|>1\end{cases}$，则$f\{f[f(x)]\}$=(　).

(A) 0;　(B) 1;　(C) $\begin{cases}1,|x|\le 1\\0,|x|>1\end{cases}$;　(D) $\begin{cases}0,|x|\le 1\\1,|x|>1\end{cases}$;

2. 函数$\mathrm{f(x)}=\frac{\sin x}{x^2}$，$\mathrm{g(x)}=\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$和$\mathrm{h(x)}=arctan\frac{|x|}{xln(1-x)}$中在区间(0,1)内有界的函数有(　)个.

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3;

3.下列说法正确的是(　).

(A) $\alpha=\beta+o(\beta)$是α和β为等价无穷小的充要条件;

(B) 无穷小是一个很小的数;

(C) 两个无穷小的商仍是一个无穷小;

(D) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，那么有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$;

4.函数$f(x)=arctan\frac{1}{1-x}$当$x\to 1$时的极限是(　).

(A) 0;　(B) $\frac{\pi}{2}$;　(C) $-\frac{\pi}{2}$;　(D) 不存在;

5. 函数$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是(　).

(A) 当$x\to 0$时为无穷大;

(B) 当$x\to 0$时为无穷小;

(C) 无界，但当$x\to 0$时不是无穷大;

(D) 有界，但当$x\to 0$时不是无穷小;

第二章 导数与微分

1.已知$y=sinx$，则$y^{(10)}$=(　).

(A) $sinx$;　(B) $cosx$;　(C) $-sinx$;　(D) $-cosx$;

2.设函数$y=f(x)$在$x=a$处可导，$\Delta y=f(a+h)-f(a)$，则当 h→0 时有(　).

(A) dy是 h 的等价无穷小量;　(B) $\Delta y-dy$是 h 的同阶无穷小量;

(C) dy是 h 的高阶无穷小量;　(D) $\Delta y-dy$是 h 的高阶无穷小量;

3.函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数是(　).

(A) 3;　(B) 2;　(C) 1;　(D) 0;

4.设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^\alpha}\cos\frac{1}{x-1},\ x\ne 1\\0,\ x=1\end{cases}$在$x=1$处可导，则实数$\alpha$满足(　).

(A) α<-1;　(B) $-1\le\alpha<0$　(C) $0\le\alpha<1$;　(D) $\alpha\ge 1$;

5.设函数$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$，则(　).

(A) $f(0)=0$且$f'_-(0)$存在;　(B) $f(0)=0$且$f'_+(0)$存在;

(C) $f(0)=1$且$f'_-(0)$存在;　(D) $f(0)=1$且$f'_+(0)$存在;

第三章 微分中值定理与导数的应用

1.设$f'(x_0)=0$是$f(x)$在x_0取得极值的(　).

(A) 充分条件;　(B) 必要条件;

(C) 充分非必要条件;　(D) 既非充分又非必要条件;

2.设$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}=2$，则在$x=1$处(　).

(A) $f(x)$的导数不存在;　(B) $f(x)$的导数存在，但$f'(1)\neq 0$;

(C) $f(x)$取得极大值;　(D) $f(x)$取得极小值;

3.设$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则(　).

(A) $f'(x_0)$是$f(x_0)$的极大值;　(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值;

(C) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值;　(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点;

4. 方程$2^x-x^2=1$的实根个数是(　).

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4;

5.当$x\to 0$时，函数$\ln(1+x)-x$是关于x的(　)阶无穷小.

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4;

第四章 不定积分

1.下列不是$sin2x$的原函数的是(　).

(A) $-\frac{1}{2}cos2x+C$;　(B) sin^2x+C;

(C) $-cos^2x+C$;　(D) $\frac{1}{2}sin^2x+C$;

2.若函数$f(x)$的导数是$sinx$，则$f(x)$的一个原函数为(　).

(A) $sinx$;　(B) $-sinx$;　(C) $cosx$;　(D) $-cosx$;

3.若$\int f(x)dx=F(x)+c$，则$\int f(ax^2+b)xdx$=(　).

(A) $F(ax^2+b)+c$;　(B) $\frac{1}{2a}F(ax^2+b)$;

(C) $\frac{1}{2a}F(ax^2+b)+c$;　(D) $2aF(ax^2+b)+c$;

4.已知函数$f(x)=\begin{cases}2(x-1),\ x<1\\ lnx,\ x\geq 1\end{cases}$，则函数$f(x)$的一个原函数是(　).

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(lnx-1), & x\geq 1\end{cases}$;　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(lnx+1)-1, & x\geq 1\end{cases}$;

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(lnx-1)+1, & x\geq 1\end{cases}$;　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(lnx+1)+1, & x\geq 1\end{cases}$;

5.设$f(x)$的原函数为$\frac{sinx}{x}$，则$\int xf'(x)dx$=(　)

(A) $sinx-\frac{1}{2}sin^2x+c$;　　(B) $x-\frac{1}{2}x^2+c$;

(C) $cosx-sinx+c$;　　(D) $cosx-\frac{2sinx}{x}+c$;

第五章 定积分

1.定积分$\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2lnxdx$值的符号为(　).

(A) 大于零;　(B) 小于零;　(C) 等于零;　(D) 不能确定;

2.设$f(x)=\int_0^{sinx}sint^2dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的（　).

(A) 等价无穷小;　(B) 同阶，但非等价无穷小;

(C) 高阶无穷小;　(D) 低阶无穷小;

3.下列定积分为零的是(　).

(A) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{arctanx}{1+x^4}dx$;　　(B) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}xarcsinxdx$;

(C) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$;　　(D) $\int_{-1}^{1}(x^2+x)sinxdx$;

4.设函数$f(x)=xe^{x^2}$，$\int_2^3 f(x-2)dx$=(　).

(A) $e-1$;　(B) e　(C) $\frac{1}{2}(e-1)$;　(D) $\frac{1}{2}e$;

5.设$F(x)=\int_0^x\frac{du}{1+u^2}+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{du}{1+u^2}(x>0)$，则(　).

(A) $F(x)\equiv 0$;　(B) $F(x)\equiv\frac{\pi}{2}$;

(C) $F(x)=arctanx$;　(D) $F(x)=2arctanx$;

第六章 定积分的应用

1.曲线$y=e^x$与其过原点的切线及y轴所围成的平面图形的面积是(　).

(A) $\int_0^1(ex-e^x)dx$;　　(B) $\int_1^e(lny-ylny)dy$;

(C) $\int_0^1(e^x-ex)dx$;　　(D) $\int_0^1(e^x-xe^x)dx$;

2.曲线$y=x^2$绕直线$y=1$旋转一周所得旋转体封闭部分的体积为(　).

(A) $V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2-1)^2dx$;　　(B) $V=\int_{-1}^{1}\pi\sqrt{x^2-1}dx$;

(C) $V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2-1)dx$;　　(D) $V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2+1)dx$;

3.连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$以及x轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周得到的旋转体体积为（ ）.

(A) $\int_a^b \pi f^2(x)dx$; (B) $\int_a^b f^2(x)dx$;

(C) $\int_a^b f(x)dx$; (D) $2\pi\int_a^b |xf(x)|dx$;

4.函数$y=x(x-1)(x-2)$和x轴所围成的图形面积可表示为( ).

(A) $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$;

(B) $\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$;

(C) $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$-$\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$;

(D) $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$+$\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$;

第七章 微分方程

1.设线性无关函数y_1，y_2，y_3都是二阶非齐次线性微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解，C_1，C_2是待定常数，则次方程的通解是( ).

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$; (B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$; (D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$;

2.函数$y=y(x)$在点x处的增量满足$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+o(\Delta x)$，且$y(0)=\pi$，则$y(1)$=( ).

(A) 2π; (B) π (C) $e^{\frac{\pi}{4}}$; (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$;

3.微分方程$y''+2y'+2y=e^{-x}sinx$的特解形式应设为( ).

(A) $e^{-x}(acosx+bsinx)$; (B) $e^{-x}bxsinx+ae^{-x}cosx$;

(C) $xe^{-x}(acosx+bsinx)$; (D) $e^{-x}bsinx+axe^{-x}cosx$;

4.一条直线在其上任意一点(x,y)处切线斜率等于$-\frac{2x}{y}$，这条曲线是( ).

(A) 直线; (B) 抛物线 (C) 圆; (D) 椭圆;

5.曲线$y=y(x)$经过点$(0,-1)$且满足微分方程$y'+2y=4x$，则当$x=1$时，y=( ).

(A) 0; (B) 1 (C) 2; (D) 4;

填空题

第一章 函数与极

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{7x+6}-3}{x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{\quad 1+}}{e^{\sin x}-1}$

3. 当$x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是x^n 的同阶无穷小，求n.

4. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{2x})^{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ ，求a.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{2\sin x}, & x<0\\ a+e^{2x}, & x\geq 0\end{cases}$ 且$f(x)$ 在x=0 处连续，求a.

第二章 导数与微 分

6. 设$y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}$ ，则 y' =________________________________

7. 设$x+y=\sec y$ ，则dy =________________________________

8. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ ________________________________

9. 设$x>0$ ，$d(\dfrac{\tan x}{\sqrt{x}})=$ ________________________ $d\sqrt{x}$

10. 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ ，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

第三章 微分中值定理与导数的应用

11.曲线弧 $y=\ln(x+1)$ 在点(x,y) 处的曲率半径 $R=$______________.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]=$______________________ .

13.曲线$y=e^{\arctan x}$ 的拐点坐标为_________________________.

14.当$x \to 0$时，函数$\ln(1+x)-x$是关于x的____阶无穷小.

15. $a=$____________________时，方程$(x-a)^{\frac{2}{3}}=2+a$有唯一解.

第四章 不定积分

16.$\int \frac{x+3}{x^2+4x+13}dx=$________________________.

17. 设曲线过点$(e^2,3)$，且在任意点处的切线的斜率是该点横坐标的倒数，则曲线方程为__________________________.

18. 设$f'(\tan^2 x)=\sec^2 x$，且$f(0)=1$，则$f(x)=$______________.

19. 设$\int xf(x)dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$，则$\int \frac{1}{f(x)}dx=$_____________________.

20.$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx=$

第五章 定积分

21.若$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)\,dt$，则$f(x)=$（　　　　　）.

22.设函数$f(x)$连续，则$\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=$（　　　　　　　　）.

23.设$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^{a} te^t\,dt$，则常数$a=$（　　　　　　　）.

24.求函数$f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}\,dt$的最大值为______.

25.设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x t\,f(x^2-t^2)\,dt=$（　　　　　　　　）.

第六章　定积分的应用

26. 求对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 自 $\theta=0$ 到 $\theta=\varphi$ 的弧长.

27.求曲线 $\rho=a\sin 3\theta$，（$a>0$，$0\le\theta\le 2\pi$）所围图形的面积.

28. 已知曲线 $y=x^2$，$y=0$，$x=t$ 所围平面图形绕 x 轴旋转的旋转体体积与绕 y 轴旋转的旋转体体积相等，求 t.

第七章　微分方程

29.【5 分】 函数 $f(x)$ 连续，且满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，求 $f(x)$.

30.【5 分】求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ 的通解.

31.【5 分】求微分方程 $y'=\frac{1}{x+e^y}$ 的通解.

32.　函数 $y=C1\,e^x+C2\,e^{2x}$ 是某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，C1=_____, C2=_____.

大题

第一章解答题：

17. 求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的所有渐近线.

18. 已知函数 $f(x)$ 是区间 $[0,2a]$（$a>0$）上的连续函数，且 $f(0)=f(2a)$，证明：方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 内至少有一个根.

第二章解答题：

18. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

19. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，且它在 $x=0$ 的某个邻域内满足 $f(1)-2f(1-x)=-2x+o(x)$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线方程.

第三章解答题：

11. 求函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式 .

12. 求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\ln(1+x)}$.

13. 求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值，并求此函数图像对应的凹凸区间以及曲线的拐点 .

14. 求曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^6$（$x>0$）上哪一点处的法线在 Y 轴上的截距最小 .

第三章证明题：

15. 设 $x>0$，证明：$(e+x)^e<e^{e+x}$.

16. 证明恒等式：$\arcsin(2x-1)-2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=-\dfrac{\pi}{2}$ ，$0<x<1$.

17. 设函数 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+(1-e^{-\xi})f'(\xi)=0$.

18. 设函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f''(x)\le 0$ ，证明：对于 (a,b) 内任意的 x_1,x_2 及 $0\le\lambda\le 1$，有 $f[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]\ge(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$.

第四章计算题：

17. 设 $f'(e^x)=a\sin x+b\cos x$，其中 a,b 是不同时为零的常数，求 $f(x)$.

18. 设 $x\ne 0$ 时，$f'(x)$ 连续，求 $\displaystyle\int\frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx$.

19. 设 $f(x)$ 是的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$，求 $\displaystyle\int x^3f'(x)dx$.

20. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(0)=1$，$F'(x)\ge 0$，且当 $x\ge 0$ 时，有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$，求 $f(x)$.

第五章计算题：

4. 求函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}\,dt$ 的最大最小值.

6. 求 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}(x^2-t)\,f(t)dt$，其中 $f(x)$ 为已知的连续函数 .

10. 求 $\displaystyle\int_0^2 f(x-1)\,dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0\end{cases}$.

12. 已知 $f(x)=e^{x}+x\int_{0}^{1} f(\sqrt{x})\, dx$，求 $f(x)$.

13. 利用定积分的定义求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$.

15. 计算 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

16. 计算 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{1-\sin 2x}\, dx$.

18. 计算 $\int_{0}^{2}\frac{x^{2}}{\sqrt{2x-x^{2}}}dx$.

第五章证明题：

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续且递增的函数，证明：

$$(a+b)\int_{a}^{b} f(x)dx\le 2\int_{a}^{b} xf(x)dx.$$

17. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $\int_{0}^{x} f(t)(x-t)\, dt=\int_{0}^{x}(\int_{0}^{t} f(u)\, du)\, dt$

第六章计算题：

3.【10 分】求对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 自 $\theta=0$ 到 $\theta=\varphi$ 的弧长.

4.【10 分】求曲线 $\rho=a\sin 3\theta$，（$a>0$，$0\le\theta\le 2\pi$）所围图形的面积.

5.【10 分】已知曲线 $y=x^{2}$，$y=0$，$x=t$ 所围平面图形绕 x 轴旋转的旋转体体积与绕 y 轴旋转的旋转体体积相等，求 t.

6.【10 分】求曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$的弧长.

7.【10 分】求圆$x^2+(y-R)^2\le r^2$（$0<r<R$）绕x轴旋转一周所得环状立体的体积.

8.【10 分】求平面曲线$9y^2=x(x-3)^2$ （$y\ge 0$），位于$x=0$到$x=3$之间的一段弧长.

9.【10 分】求曲线$y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$，（$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$）的长度.

10.【18 分】设曲线$y=x^2-2x$，$y=0$，$x=1$，$x=3$围成一平面图形A，

（1）求A的面积S ；

（2）求该平面图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积.

第七章计算题：

6. 【5 分】函数$f(x)$连续，且满足关系式$f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，求$f(x)$.

7. 【5 分】求微分方程$x\frac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$的通解.

8. 【5 分】求微分方程$y'=\frac{1}{x+e^y}$的通解.

9. 【5 分】函数$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$是某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，求此方程.

10.【5 分】设常系数齐次线性微分方程$y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$的一个特解为$y=e^{2x}+(1+x)e^x$，试确定常数$\alpha,\beta,\gamma$.

11. 【7 分】求微分方程$y''=\frac{2xy'}{1+x^2}$满足初始条件$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=3$的特解.

12. 【7 分】求微分方程 $yy''+(y')^2=y'$ 的通解.

13. 【7 分】求微分方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解.

14. 【7 分】求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

15. 【7 分】求微分方程 $y''-2y'+y=2e^x$ 的通解.

16. 【9 分】求微分方程 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$ 的通解.

17. 【9 分】求微分方程 $y''+y=\sin x-2e^{-x}$ 的通解.

18.【9 分】设连接两点 $A(0,1)$， $B(1,0)$ 的一条凸弧， $P(x,y)$ 为凸弧 AB 上任意一点，已知凸弧与弦 AP 之间的面积为 x^3，求此凸弧的方程.

19. 【9分】设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x f(t)dt=\sin^2 x+\int_0^x t f(x-t)dt$，求 $f(x)$.

20. 【9分】求微分方程 $y''+4y'+5y=8\cos x$ 当 $x\to+\infty$ 时为有界的特解.