线性代数选择题整理

1. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是四维列向量，且$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则

$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$（　　　）.

（A） $m+n$　　（B） $-(m+n)$　　（C） $n-m$　　（D） $m-n$

2. 如果$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|\boldsymbol{A}^*|=$（　　　）.

（A） 4　　（B） 8　　（C） 2　　（D） 16

3. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=0$，则（　　　）.

(A） $\boldsymbol{A}$中必有两行（列）的元素对应成比例

(B） $\boldsymbol{A}$中至少有一行（列）的元素全为 0

(C） $\boldsymbol{A}$中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

(D） $\boldsymbol{A}$中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

4. 设$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$的秩分别为r_1,r_2，则分块矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的秩$r$满足（　　）.

（A） $r\le r_1+r_2$　　（B） $r=r_1+r_2$　　(C) $r\ge r_1+r_2$　　（D） $r=r_1r_2$

5. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$\boldsymbol{C}$是n阶正交阵，且$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则下列结论不成立的是（　　　）.

(A） $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似　　（B） $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价

(C） $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值　　（D） $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征向量

6. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是n阶可逆矩阵，矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为r，矩阵$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$的秩为$r_1$，则

（　　　）.

（A） $r>r_1$　　（B） $r<r_1$　　（C） $r=r_1$　　（D） r与r_1的关系依$\boldsymbol{B}$

而定

7 . 若A，$\boldsymbol{B}$为同阶正交阵，则下列矩阵中不一定是正交阵的是（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$　　（B） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　（C） $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$　　（D） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$

8. n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式不为零，$\boldsymbol{A}$经过若干次初等变换变为$\boldsymbol{B}$，则（　　　）.

（A）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　　（B）$|\boldsymbol{B}|\neq 0$

（C）$|\boldsymbol{A}|$与$|\boldsymbol{B}|$有相同的正负号　　　（D）$|\boldsymbol{B}|$可以变为任何值

9. 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是n阶方阵，下列各项中，只有（　　　）正确.

(A)　若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是对称阵，则$\boldsymbol{AB}$也是对称阵

(B)　若$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，且$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{0}$

(C)　若$\boldsymbol{AB}$是奇异阵，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是奇异阵

(D)　若$\boldsymbol{AB}$是可逆阵，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是可逆阵

10. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关的充要条件是（　　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中有一个零向量

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中有两个向量的分量成比例

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中有一个向量是其余向量的线性组合

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量是其余向量的线性组合

11．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$为n阶方阵，且$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则（　　　）.

（A）$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　（B）$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　（C）$\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$　（D）$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$

12. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$均为$n$阶方阵，若由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$能推出$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A}$应满足下列条件中的

（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}\neq 0$　（B）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$　（C）$\boldsymbol{A}=0$　（D）$|\boldsymbol{A}|=0$

13. 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为n阶矩阵，k为正整数，下列各式中不正确的是（　　）.

（A）$|\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$　　（B）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

（C）$|(\boldsymbol{AB})^k|=|\boldsymbol{A}|^k|\boldsymbol{B}|^k$　　（D）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

14. 已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & x & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|$ 中的一次项系数是（　　）.

（A） 4　　（B）1　　（C） -4　　（D） -1

15. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & 3a_{11}+a_{13}\\ a_{31} & a_{31} & 3a_{31}+a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21}+a_{23}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，那么（　）.

（A） $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　（B） $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　（C） $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AP}_2=\boldsymbol{B}$　　（D） $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B}$

16. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩（　　）.

（A）必有一个等于零　　（B）都小于 n

（C）一个小于 n,一个等于 n　　（D）都等于 n

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，则（　　）.

（A） $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$　　（B） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

（C） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于一个对角矩阵　　（D）对任意常数 t，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似

18. 关于矩阵，下列命题正确的是（　　　）.

(A) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(B) 可经过一系列的初等行变换把矩阵化为标准形

（C）矩阵的标准形不惟一　　（D）若 $\boldsymbol{P}$ 为初等矩阵，$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{PB}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

19. 下列命题正确的是（　　）.

（A） n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m>n)$ 可以线性无关

（B）矩阵的初等变换可能改变矩阵的秩

（C） n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m>n)$ 必线性相关

（D）若方阵 $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶正交阵，且 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}$，则下列结论不成立的是（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　　（B） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量

（C） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值　　（D） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价

21. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -4,$ 其对应的特征向量分别是 ξ_1, ξ_2, ξ_3，取 $\boldsymbol{P} = (\xi_2, \xi_3, \xi_1)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} =$（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

22. 二次型 $f(X) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$ （$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵）正定的充要条件是（　　）.

（A）对任何 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX} \geq 0$　　（B） $\boldsymbol{A}$ 的特征值为非负数

（C）对任何 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{O}$，有 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX} \neq 0$　　（D）对任意 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{O}$，有 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX} > 0$

23. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1} =$（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　（B） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　（C） $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　（D） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

24. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 3，则（　　）.

（A）任意三个向量线性无关　　（B） $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中无零向量

（C）任意四个向量线性相关　　（D）任意两个向量线性无关

25. 线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{m\times 1}$，$(\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ 有解的充要条件是（　　）.

（A） $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$　（B） $R(\boldsymbol{A}) = m$　（C） $R(\boldsymbol{A}) = n$　（D） $R(\boldsymbol{A}) \neq R(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$

26. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相同　　（B） $\boldsymbol{A}$ 可逆

（C） $\boldsymbol{A}$ 无零特征值　　（D） $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

27. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组（Ⅰ）：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和（Ⅱ）：

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，必有（　　）．

（A）（Ⅱ）的解是（Ⅰ）的解，（Ⅰ）的解也是（Ⅱ）的解

（B）（Ⅱ）的解是（Ⅰ）的解，但（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解

（C）（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解，（Ⅱ）的解也不是（Ⅰ）的解

（D）（Ⅰ）的解是（Ⅱ）的解，但（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解

28. 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \cdots, \quad 0, \quad \frac{1}{2}\right)$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{AB}=$（　　）．

（A）$\boldsymbol{O}$　　（B）$-\boldsymbol{E}$　　（C）$\boldsymbol{E}$　　（D）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$

29. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}$，则该向量组的一个最大无关组为（　　）．

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$　　（C）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_5$　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$

30. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则下列矩阵中不是对称矩阵的是（　　）．

（A）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$　　（B）$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T$　　（C）$\boldsymbol{AA}^T$　　（D）$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$

31. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则（　　）．

（A）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

（B）$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

（C）若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta})=m$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

（D）若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)=m$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

32．下列结论不正确的是（　　）．

(A)　n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$|\boldsymbol{A}| \neq 0$

(B)　n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是存在可逆阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{E}$

(C)　n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}$可表成一系列初等矩阵之和

(D)　n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}$可表成一系列初等矩阵之积

33. 设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}| = 2$，则$\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^T\right| = ($　　　$)$.

(A) 2^n　　(B) 2^{n-1}　　(C) 2^{n+1}　　(D) 4

34. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = 0$的一个基础解系，则下列向量组中不再是$\boldsymbol{Ax} = 0$的基础解系的为(　　　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$

35. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，且$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$，则(　　　　).

(A)　$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = 0$　　(B)　$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 2r(\boldsymbol{A})$

(C)　$r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 2r(\boldsymbol{A})$　　(D)　$r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \le r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$

36. A是 n 阶方阵且$|A| = 3$，则$|-A| =$_____。

37. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$_____。

38. 设 D= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$，则$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} =$_____

39. 设　A, B是同阶的可逆矩阵，且$AXB = C$，则$X =$_____。

40. 向量$\beta = [1, k, 5]^T$能由$\alpha_1 = [1, -3, 2]^T$，$\alpha_2 = [2, -1, 1]^T$ 线性表示，则$k =$_____。

41. 已知齐次线性方程组$A_{5\times 4}X = O$有唯一解，则$R(A) =$_____。

42. 设 A 是三阶方阵且$R(A) = 2$，而$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则$R(AB) =$_____。

43. 如果二阶矩阵$A=\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ y & x \end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$相似，则$x=$____，$y=$____。

44. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-8x_2x_3$的矩阵为____。

45. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+(a+1)x_3=3 \\ x_1+ax_2-2x_3=0 \end{cases}$ 无解，则$a=$____。

46. 设三阶方阵A有三个不同的特征值$2,3,\lambda$，且$|A|=36$， 则$\lambda=$____。

47. 若$A=\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$为正定矩阵，则 t 满足____。

48. 设三元线性方程组 $Ax=b$ 的两个特解为 $\eta_1=[1,2,3]^T,\eta_2=[1,1,1]^T$， 且 $R(A)=2$，则 $Ax=b$ 的通解为________(k 为任意数)；

49. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_3x_2$ 的标准形是

50. 设三阶方阵 A 的特征值为 $0,-1,1$, 且$B=A^2-A+E$，则$|B|=$____.

51. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2-2x_3^2-4x_1x_3+2x_2x_3$，则二次型 f 的矩阵为

52. 设矩阵 A 为 3 阶方阵，且$|A|=\dfrac{1}{2}$，则$|2A|=$_______;

53. n阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=$________________________.

54. 设$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)^T$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，则$\boldsymbol{A}^n=$______________________.

55. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{B}=$______________.

56. 设四阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$_________________________.

57. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,3,1)^T$线性相关，则$t=$_________.

58. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3, 则$|\boldsymbol{A}|=$________，$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值为___________，

$\boldsymbol{A}^*$的特征值为__________________.

59. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的范围是_________.

60. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，3，则 $|\boldsymbol{A}|=$________________.

61. 四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ a & b & c & d\end{vmatrix}=$__________________________.

62. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 ________________________.

63. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，若 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是它的解，则 $k_1+k_2+\cdots+k_s=$______________.

64.若对 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & t\end{pmatrix}$，有 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $t=$_____________________.

65.向量组（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，（Ⅱ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，（Ⅲ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$，如果 R(Ⅰ) = R(Ⅱ) =3,

R(Ⅲ) = 4, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩=_________________.

66.若四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 满足条件 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}_1$ 的一个解为_____________________.

67.已知 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 $a(a\neq 0)$，则数 _________一定是 $2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}$ 的特征值.

68.设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值范围为_______________.

69.设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3},\frac{1}{\lambda_4}$，则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________.

70.方程 $2x_1+x_2+2x_3=0$ 的规范正交解为________________________.

71. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}$，问 k 取何值时，使得

（1） $R(A)=1$；（2） $R(A)=2$；（3） $R(A)=3$.

72．解下列矩阵方程：

（1） $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

（2）设 $X=AX+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

（3） $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

73. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A=O$，证明 $A-2E$ 可逆，并求 $\left(A-2E\right)^{-1}$.

74. （1）设 $P^{-1}AP=B$，证明 $B^k=P^{-1}A^kP$.

（2）设 $AP=PB$，且 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，求 A 与 A^{2011}.

75．利用分块矩阵计算下列矩阵的乘积：

（1） $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

（2） $\begin{pmatrix}a & 0 & 1 & 0\\ 0 & a & 0 & 1\\ 1 & 0 & b & 0\\ 0 & 1 & 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ c & 0\\ d & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$.

76. 试求 p,q 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=0,\\ 3x_1+2x_2+px_3+qx_4=0,\\ 2x_1+x_2+x_4=0\end{cases}$ 有非零解，并求通解 .

77. 证明：（1）设 A,B 为矩阵，则 $AB-BA$ 有意义的充分必要条件是 A,B 为同阶矩阵．

（2）对任意 n 阶矩阵 A,B，都有 $AB-BA\neq E$，其中 E 为单位矩阵．

78. 任取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R^n$，又记 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 必线性相关．

79. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R^n$，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关当且仅当任一 n 维向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示．

80. 在 R^4 中求一向量 γ，使其在下面两组基：

$$\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T,\alpha_3=(0,0,1,0)^T,\alpha_4=(0,0,0,1)^T;$$

$$\beta_1=(2,1,-1,1)^T,\beta_2=(0,3,1,0)^T,\beta_3=(5,3,2,1)^T,\beta_4=(6,6,1,3)^T$$

下有相同的坐标．

81. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解．

（1）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+2x_3=0.\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\ 3x_1+x_2+x_4=0.\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3-x_4=0,\\ 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0.\end{cases}$

（4）$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0,\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0,\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0,\\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0.\end{cases}$

82. 判断下列非齐次线性方程组是否有解，若有解，并求其解（在有无穷多解的情况下，用基础解系表示全部解）．

(1) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 - x_4 = 4, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = -3. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -5, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -7. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

83. 设 $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$，其中 A 为 3 阶方阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维向量，且 $\alpha_1 \neq 0$，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 .

84. 设向量组 A 的秩与向量组 B 相同，且 A 组可由 B 组线性表示，证明 A 组与 B 组等价 .

85. 已知三阶方阵 A 的三个特征值分别为 $1,-1,2$，矩阵 $B = A^3 - 5A^2$.求矩阵 B 的特征值及 B 的行列式 $|B|$.

86. 设 $A = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，求:

(1) A 的特征值与特征向量; (2) A^* 的特征值; (3) $2E - 3A^{-1}$ 的特征值 .

87. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 A 与 B 相似，求常数 λ .

88. 设 3 阶方阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 9$，对应特征向量依次为

$$\xi_1 = (-1,-1,1)^T, \xi_2 = (-1,1,0)^T, \xi_3 = (1,1,2)^T,$$

求 A .

89. 试求一个正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵:

（1） $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

(3) $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$.

(4) $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$.

90．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似．

(1) 求 a , b 之值;

(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵;

(3) 求 A^{100} ．

91. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求 a ．

92. 设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足

$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ ．

93. 按定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}0&0&a&0\\b&0&0&0\\f&0&0&c\\0&d&0&e\end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$.

94. 试问 λ 、 μ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + \quad x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \quad \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解．

95. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$

96. 解下列矩阵方程：

（1） $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ．

（2）设 $X = AX + B$，其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

（3） $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ．

97. 已知 A 为三阶方阵，且 $|A| = -2$，求：

（1） $\left|(2A)^{-1}\right|$；（2） $\left|A^*\right|$；（3） $\left|A^* - \frac{1}{2}A^{-1}\right|$ ．

98. （1）设 $A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$，且 m 阶矩阵 B 和 n 阶矩阵 C 均可逆，试证明 $A^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$.

（2）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非零常数，求 A^{-1}.

99. 求下列矩阵的秩：

（1） $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ．

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

100. 利用行列式展开定理，计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

(4) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.