杭州电子科技大学学生考试卷（期中）卷（参考答案）

考试课程	高等数学 A1	考试日期	2020 年 11 月 22 日	成绩	
课程号	A0714201	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一 1-8	二 9-12	三 13-16	四 17-20	五 21	六 22
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$，$-\infty<x<+\infty$ 是（ C ）.

（A）有界函数；（B）单调函数；（C）偶函数；（D）周期函数

2. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$（ D ）.

（A）是无穷大量；（B）是无穷小量；

（C）极限存在但非无穷小量；（D）极限不存在

3. 当 $x\to 0^+$ 时，与函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 等价无穷小的是（ B ）.

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$； (B) $\ln(1+\sqrt{x})$； (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$； (D) $1-\cos\sqrt{x}$

4. 设 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（ D ）.

（A）连续点；（B）跳跃间断点；（C）无穷间断点；（D）可去间断点

5. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h}=$（ B ）.

(A) $f'(x_0)$； (B) $5f'(x_0)$； (C) $6f'(x_0)$； (D) 不存在

6. $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是（ C ）.

(A) $n>-1$； (B) $n>0$； (C) $n>1$； (D) $n>2$

7. 下列函数中满足罗尔定理条件的是（ A ）.

(A) $f(x)=\sin x$，$x\in[0,\pi]$； (B) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases}$，$x\in[-2,2]$；

(C) $f(x)=\cos x$，$x\in[0,\pi]$； (D) $f(x)=|x|$，$x\in[-1,1]$

8. 函数 $f(x)=x^2+1$ 在区间 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值公式的中值 $\xi=$（ D ）.

(A) 1； (B) $\frac{6}{5}$； (C) $\frac{5}{4}$； (D) $\frac{3}{2}$

得分	

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ 2.

10. 曲线 $y=\frac{\pi}{2}\cos x-x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程为 $y=-x+\frac{\pi}{2}$.

11. 函数的参数表示为 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1})\end{cases}$，那么 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ 1.

12. $f(x)=10^x$ 在 $x_0=1$ 处展开的泰勒公式中 $(x-1)^n$ 项的系数为 $\frac{10(\ln 10)^n}{n!}$.

得分	

三、简单计算题（共4小题，每题6分，共24分）

13．求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2\sin x}-1}{x}$．

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}$$

$$=2$$

14．求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$．

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$$

$$\overset{洛}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}{1}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=e^0$$

$$=1$$

15．已知 $y=x^{\cos x}(x>0)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$．

$$y=e^{\ln x^{\cos x}}=e^{\cos x\cdot\ln x}$$

$$y'=e^{\cos x\ln x}\left(-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right).$$

16．已知 $f(x)=x^2\sin x$，求函数的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$．

$$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$$

$$f''(x)=2\sin x+2x\cdot\cos x+2x\cos x+x^2(-\sin x)$$

$$f'''(x)=2\cos x+4\cos x+4x(-\sin x)+2x(-\sin x)+x^2(-\cos x)$$

$\cdots$

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,(x^2)^{(k)}(\sin x)^{(n-k)}\qquad\left(\because\ u'=2x,\ u''=2,\ u'''=0\right)$$

$$=x^2(\sin x)^{(n)}+C_n^1\cdot 2x(\sin x)^{(n-1)}+C_n^2\cdot 2(\sin x)^{(n-2)}$$

$$=x^2\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+2nx\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right).$$

得分	

四、综合题（共 4 小题，每题 7 分，共 28 分）

17．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $(\arcsin x)\ln y-e^{2x}+y=0$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$．

解．对 x 求导，得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln y+\arcsin x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'-2e^{2x}+y'=0 \quad (1)$$

再对 x 求导，得

$$\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ln y+2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{y}\cdot y'+\arcsin x\cdot\frac{1}{y^2}y'^2 \quad (2)$$
$$+\arcsin x\cdot\frac{1}{y}\cdot y''-4e^{2x}+y''=0$$

由 $x=0$ 知 $y=1$，代入(1) 得 $y'=2$，

代入(2) 得 $y''\big|_{x=0}=0$．

18．设 $f(x)$ 有连续的导函数，函数 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=b$，其中 a, b 为已知常数，求常数 A 的值（用 a, b 的关系式表示）．

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}=A$$

$$左\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+a\cdot\cos x}{1}=f'(0)+a=b+a=右.$$

$$\therefore\ A=a+b.$$

19．证明方程 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根．

$$f(x)=4\arctan x-x+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=0\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{3}$$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$y=f'$	$-$	0	$+$	0	$-$
$y=f$	↘	0	↗	$\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$	↘

$\because$ $x=-\sqrt{3}$ 时 $f_{极小}(-\sqrt{3})=0$

$x=\sqrt{3}$ 时 $f_{极大}(\sqrt{3})=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

又$\because$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

$\therefore$ $f(x)=0$ 除 $x=-\sqrt{3}$ 零点外，在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 存在一个零点

$\therefore$ 原方程恰有两实根

20．设函数 $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$，求（1）函数图形的拐点及凹凸区间；（2）函数的极值以及在区间 $[-4,4]$ 上的最值．

解 (一) $y'=x^3-3x^2$ ；$y''=3x^2-6x=3x(x-2)$，

(二) $y'=0$，$x=0$，$x=3$

$y''=0$，$x=0$，$x=2$.

$f(0)=0$，$f(3)=-\frac{27}{4}$，$f(4)=0$，$f(-4)=128$

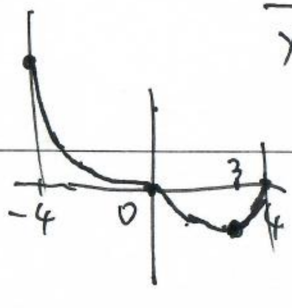
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	拐0	凸	-4	凹

$\therefore$ (1) 拐点 $(0,0)$，$(2,-4)$

凹区间 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$

凸区间 $(0,2)$

(2) $x=3$ 时，$f_{极小}(3)=-$



x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘		↘		↗

当 $x=-4$ 时 $f_{最大值}=128$

当 $x=3$ 时 $f_{最小值}=-\frac{27}{4}$

得分	

五、应用计算题（本题8分）

21．某房产中介承担一房产商的50套公寓的出租业务．当月租金为6000元时，公寓会全部租出去，当月租每增加200元时，就会少租出去一套，而租出去的每套公寓平均每月需要400元维护费．请问中介给房租定价为多少时，可获得最大收入？

解 定价为x，收入$S=S(x)$，

$$S(x)=\left(50-\frac{x-6000}{200}\right)(x-400),\quad x\geq 6000$$

$$S'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=8200,$$

因为$S(x)$存在唯一驻点，故

当定价为8200元时，收入最大，

得分	

六、证明题 （本题4分）

22．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=1$，证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$

证明：变形：$e^{\eta}(f(\eta)+f'(\eta))=e^{\xi}$

或 $(e^{x}f(x))'\big|_{x=\eta}=e^{\xi}$.

由于$F(x)=e^{x}f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，

应用拉格朗日中值定理，$\exists\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}=[e^{x}f(x)]'\big|_{x=\eta},\quad (1)$$

又$f(a)=f(b)=1$，(1)式变为

$$\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=(e^{x}f(x))'\big|_{x=\eta}.$$

令$G(x)=e^{x}$应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，

$$\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\xi}. \quad (2)$$

∴ ~~得证~~ (1)与(2)比较，得证.