线性代数模拟试卷

一． 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设矩阵 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $|2A|$=__

2. 设三元线性方程组 Ax=b 的两个特解为 $\eta_1=[1,2,3]^T$ ， $\eta_2=[1,1,1]^T$，

且 R（A）=2，则 Ax=b 的通解为____

3. 二次型 f（x_1,x_2,x_3）=$x_1^2+x_2^2+x_3^2+4X_1X_2+4X_1X_3+4X_3X_2$ D 的

标准形是__

4. 设三阶方阵 A 的特征值为 0，-1，1，且 B=A^2 - A+E,则 $|B|$=__

5. 设二次型 f= $x_1^2+x_2^2-2x_3^2-4x_1x_3+2x_2x_3$,则二次型 f 的矩阵为__

二．单项选择题（每小题 5 分，共 20 分）

1.设 A,B 都是 n 阶方阵，下列命题正确的是 （ ）

(A).$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (B).$(AB)^2=A^2B^2$

(C).$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ (D).$(AB)^T=B^TA^T$

2.设 A 是 3×5 矩阵，B 是 3 维列向量，R（A）=3，则方程组 AX=B（ ）

(A).必定有解 （B）.未必有解 （C）.必定无解 （D）.必有唯一解

3.矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$相似于（ ）

（A）$\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$

4.设二次型 f =$x_1^2+\lambda x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3$,则 f 为正定的充要条件是 λ

满足（　　）

(A) $\lambda>4$　(B) $\lambda>2$　(C) $\lambda>-1$　(D) $\lambda>0$

三．下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$；

2. 求矩阵 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$的逆矩阵；

3. 求齐次线方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+2x_3+3x_4=3 \end{cases}$ 的通解（用特解和基础解系的形式表示）；

4. 已知矩阵方程 AX+B=X, 求矩阵 X。其中 A=$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

5. 已知矩阵 A=$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$与 B=$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$相似，求 x 和 y 的值。

6. 已知方阵 A 的属于特征值$\lambda=2$的特征向量是$\xi_1=[1,0,2]^T$和$\xi_2=[2,1,2]^T$，又向量$\alpha=2\xi_1+\xi_2$，求 Aα.

四．[本题10分]已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

（1）求 A 的特征值和相应的特征向量；

（2）若 A 与对角矩阵相似，试求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵，并求对角矩阵 Λ。

五．[本题10分]

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，用正交变换 X=UY 把 f 化成标准型，并判断它是否是正二次型？

六．证明题（本题 4 分）

已知二阶正交矩阵 A 满足$|A|>0$且$|2E-A|=0$，计算行列式$|2E+A|$.

线性代数模拟试卷答案(仅供参考)

一.

1.4； **2.**$[1,2,3]^T$ **+k**$[0,1,2]^T$ **(k 为任意数)；** **3.** f=$-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$

4. 3； 5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

二.

1. D　2. A　3. C　4. B

三．1. 解：原式=$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 10 \\ -5 & 0 & 4 & -9 \end{vmatrix}$=1×（−1）$^{1+2}$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 10 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix}$（4 分）

=2$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix}$=2$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 16 \end{vmatrix}$（1 分）=−2$\begin{vmatrix} -5 & -9 \\ 4 & 16 \end{vmatrix}$=88（1 分）

2. 解：用初等变换法

$$[A \vdots E] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **(2　分)** →

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$(4 分)

3. $\tilde{A}$=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$(2 分)

与原方程组同解方程$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 1 - x_4 \end{cases}$，得特解 $X_0=[0,1,0,0]^T$，

对应的其次线性方程组的基础解系 $\xi_1=[1,0,-1,0]^T$， $\xi_2=[0,1,0,-1]^T$ （3 分）

方程组的通解是 $X_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$（ k_1， k_2 为任意数）（1 分）

4.解：由 AX+B=X 得(E-A)X=B

因为 E-A=$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0$，所以 E-A 可逆，于是 $X=(E-A)^{-1}B$(2 分)

由于

$$[E-A\vdots B]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 5 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & -2 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

因此 X=$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$。（4 分）

5.解：因为 A 和 B 相似，$\begin{cases}trA=trB\\ |A|=|B|\end{cases}$(2 分)，

于是有$\begin{cases}2+x+1=2+y-1\\ 2x-8=-2y\end{cases}$，化简得$\begin{cases}x-y=-2\\ x+y=4\end{cases}$（2 分）

解得：$\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$（2 分）

6.解：已知 $A\xi_1=2\xi_1$，$A\xi_2=2\xi_2$，所以

$A\alpha=A(2\xi_1+\xi_2)=2A\xi_1+A\xi_2=4\xi_1+2\xi_2$ （3 分）

$=4[1,0,2]^T+2[2,1,2]^T=6[8,2,12]^T=2[4,1,6]^T$ (3 分）

四．解：（1）因为 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

故 A 的特征值为λ_1=1（二重），λ_2=-2.　　（2 分）

将λ_1=1 代入特征方程组（λE-A）X=0 得$\begin{bmatrix}-3 & -6 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{bmatrix}$X=0，

其基础系为$\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$。

故矩阵 A 的属于特征值λ_1=1 的所有特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$（k_1，k_2不全为 0）．（2 分）

将λ_2=-2 代入特征方程组（$\lambda E-A$）X=0 得$\begin{bmatrix}-6 & -6 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 3 & 6 & -3\end{bmatrix}$X=0，

其基础解系为$\xi_3=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

故矩阵 A 的属于特征值λ_2=-2 的所有特征向量为 $k_3\xi_3$（$k_3\neq 0$）（2 分）

（2）因 A 有 3 个线性无关的特征向量ξ_1，ξ_2，ξ_3，故 A 可相似对角化。（1 分）　令 $P=[\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3]=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$，

则 P 为可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵。（3 分）

五．解：（1）二次型对应的矩阵 A=$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$(1 分)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)=0$$

解得 A 的特征值λ_1=-2，λ_2=1，λ_3=4 （1 分）

将λ_1=-2 代入特征方程得（-2-A）X=0

$$2E+A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 4 & -4\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得方程组$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$基础解系$\xi_1=[1,2,2]^T$ 单位化得$\eta_1=\frac{1}{3}[1,2,2]^T$ (1 分)

将λ_2=1 代入特征方程得（E-A）X=0

$$E-A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得方程组$\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$ 基础解系为$\xi_2=[2,1,-2]^T$，单位化$\eta_2=\frac{1}{3}[2,1,-2]^T$ （1 分）

将λ_3=4 代入特征方程得（4E-A）X=0

$$4E-A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得方程组$\begin{cases}x_1=2x_3\\ x_2=-2x_3\end{cases}$

基础解系$\xi_3=[2,-2,1]^T$，单位化$\eta_3=\frac{1}{3}[2,-2,1]^T$ (1 分)

令 $U=[\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$，得正交变换 X=UY （2 分）

f的标准型 $f=X^TAX=Y^TU^TAUY=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$ (1 分)

由于 A 有特征值$\lambda_1=-2<0$，所以二次型f不是正定二次型。（2 分）

六．解：因为$|2E-A|$=0，所以 A 有特征值 2（1 分）

又知 A 是正交矩阵且$|A|>0$，所以 A 的另一个特征值为$\frac{1}{2}$，

因此 A 的特征值分别是λ_1=2，λ_2=$\frac{1}{2}$，

设f（A）=A+2E，则$f(2)$=4，$f(\frac{1}{2})$=$\frac{1}{2}$+2=$\frac{5}{2}$,(1 分)

所以$|2E+A|$=4×$\frac{5}{2}$=10　　（1 分）