看黑圈

杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	高等数学 A1	考试日期	2020 年 1 月 5 日	成绩	
课程号	A0714201	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一 1-8	二 9-12	三 13-18	四 19-20	五 21	六 22
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题 （本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1、设 $f(x)=x\cos\dfrac{2}{x}+x^2$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　B　）

（A）连续点；（B）可去间断点；（C）无穷间断点；（D）震荡间断点.

2、若过曲线 $y=x^3-3x$ 上一个点的切线平行于 x 轴，则曲线上这个点为（　C　）

（A）$(0,0)$；（B）$(1,2)$；（C）$(1,-2)$；（D）$(2,2)$.

3、设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，则 $f'(x)=$（　C　）

（A）$\dfrac{1}{x}$；（B）$x\ln x-x+c$；（C）$-\dfrac{1}{x^2}$；（D）e^{x^2}.

4、下列反常积分收敛的是（　D　）

（A）$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$；（B）$\int_0^{+\infty}xe^x dx$；（C）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x}dx$；（D）$\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5、设 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 的值为（　D　）

（A）0；（B）a；（C）$f(a)$；（D）$af(a)$.

6、曲线 $y=x^2$ 绕直线 $y=1$ 旋转所得旋转体体积封闭部分体积为（　A　）

（A）$V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2-1)^2dx$；（B）$V=\int_{-1}^{1}\pi\sqrt{x^2-1}dx$；

（C）$V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2-1)dx$；（D）$V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2+1)dx$.

7、有两个解为 $y_1=e^{-x},y_2=3e^{2x}$ 的二阶常系数齐次线性微分方程为（　C　）

（A）$y''-y'+y=0$；（B）$y''-2y'+y=0$；

（C）$y''-y'-2y=0$；（D）$y''-y'+2y=0$.

8、若 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　D　）

（A）不可导；（B）可导，且 $f'(0)\neq0$；（C）取极大值；（D）取极小值.

得分	

二、填空题 （本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9、设 $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$，则 $dy=$______.（$\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$ 或者 $\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)dx$）

10、$\int_{-1}^{1}(x+|x|)^2dx=$_______.（$\dfrac{4}{3}$）

11、心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 的全长 $s=$_______.（$8a$）

12、微分方程 $y''+2y'+y=xe^{-x}$ 的特解的形式应设为_____.（$(Ax+B)x^2e^{-x}$）

得分	

三、简单计算题（共 6 小题，每题 5 分，共 30 分）

13、设 f'' 存在，$y=f(e^{-x})$，求 y''.

解：$y'=-e^{-x}f'(e^{-x})$ ……………………2 分

$y''=e^{-x}f'(e^{-x})+e^{-2x}f''(e^{-x})$ ……………………3 分

14、求函数 $y=e^{\arctan x}$ 的凹凸区间和拐点.

解：$y'=e^{\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

$y''=e^{\arctan x}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^2+e^{\arctan x}\cdot\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}=e^{\arctan x}\cdot\dfrac{1-2x}{(1+x^2)^2}$ ……………………2 分

函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，凹区间为 $(-\infty,\frac{1}{2})$，凸区间为 $(\frac{1}{2},+\infty)$，……………………2 分

对应曲线的拐点为 $(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$ ……………………1 分

15、求不定积分 $\int\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx$.

解：$\int\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\ln\sin x\,d\tan x$ ……………………2 分

$=\tan x\ln\sin x-\int\tan x\dfrac{\cos x}{\sin x}dx=\tan x\ln\sin x-x+C$ ……….3 分

16、证明不等式：$2x\arctan x\ge\ln(1+x^2)$.

解：令 $f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$

则 $f'(x)=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$ ……………………2 分

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；

故 $x=0$ 为唯一极小值点，是最小值

因此 $f(x)>f(0)=0$，即 $2x\arctan x\ge\ln(1+x^2)$. ……………………3 分

17、求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt,(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 的弧长.

解：$y'=\sqrt{\cos x}$

弧长 $\ell=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\sqrt{\cos x}\right)^2}\,dx$ …………3 分

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=4$ ….2 分

18、求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ 的通解.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，令 $\frac{y}{x}=u$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

原方程化为 $u+x\frac{du}{dx}=u\ln u$ …………………2 分

整理且分离变量得 $\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$，

两边积分得 $\ln u-1=cx$，

即 $\ln\frac{y}{x}-1=cx$ 或者 $y=xe^{cx+1}$. …………………3 分

四、综合题（共 **2** 小题，每题 **8** 分，共 **16** 分）

19、求 $\int_0^2 f(x-1)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^x}, & x<0,\\ \frac{1}{1+x}, & x\ge 0\end{cases}$.

解：$\int_0^2 f(x-1)dx\overset{u=x-1}{=}\int_{-1}^{1}f(u)du$ …………………. 3 分

$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^u}du+\int_0^1\frac{1}{1+u}du$ …………………3 分

$=1+\ln(1+\frac{1}{e})=\ln(1+e)$ …………………2 分

20、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^2, & x\ge 1.\end{cases}$ 求 $\int_0^x f(t)dt$.

解：当 $x<1$ 时，$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2}$ …………………4 分

当 $x\ge 1$ 时，$\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 tdt+\int_1^x t^2dt=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6}$ …………………4 分

得分	

五、应用计算题（本题 12 分）

21、设连接两点 $A(0,1), B(1,0)$ 的一段向上凸的曲线弧 AB，对于弧 AB 上任意一点 $P(x,y)$，曲线弧 AP 与直线段 $\overline{AP}$ 所围成图形的面积为 x^3，求曲线弧 AB 的方程.

解： 设曲线弧方程为 $Y=f(X)$，直线段 AP 方程为 $Y=\frac{f(x)-1}{x}X+1$ ……..1 分

根据题意 $x^3=\int_0^x\left[f(X)-\frac{f(x)-1}{x}X-1\right]dX$ ………………….3 分

换用曲边梯形减去一个直角梯形

两边对 x 求导，整理得 $6x^2=f(x)-xf'(x)-1$,即

$$y'-\frac{1}{x}y=-6x-\frac{1}{x}$$ ………………….4 分

求解微分方程得 $f(x)=-6x^2-Cx+1$ ………………….2 分

因为 $f(1)=0$，可得 $C=-5$，

所以曲线弧方程为 $y=-6x^2+5x+1$ ………………….2 分

得分	

六、证明题 （本题 6 分）

22、设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)dx=0$，

证明：（1）在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

（2）在 (a,b) 内至少存在一点 $\eta(\eta\neq\xi)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

证明：（1）因为 $\int_a^b f(x)dx=0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由积分中值定理可知存在 $c\in(a,b)$，使得

$0=\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$，从而 $f(c)=0$

构造函数 $G(x)=e^{-x}f(x)$，易知 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$G(a)=G(c)=G(b)=0$，由罗尔定理可知，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得

$G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0$，而 $G'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]$，因此

$$f(\xi_1)=f'(\xi_1), f(\xi_2)=f'(\xi_2)$$ ………………….3 分

（注意：本小题直接通过 $G(a)=G(b)=0$，用罗尔定理证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $G'(\xi)=0$，从而得到 $f(\xi)=f'(\xi)$，也给 3 分）

（2）令 $F(x)=e^{x}[f'(x)-f(x)]$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由（1）可知

$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，由罗尔定理可知至少存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $F'(\eta)=0$，而

$F'(x)=e^{x}[f''(x)-f(x)]$，因此有

$$f''(\eta)-f(\eta)=0，\eta\in(\xi_1,\xi_2)，即 \eta\neq\xi_1,\xi_2$$ ………………….3 分