一、选择题

1.A　2.D　3.B　4.C　5.D　6.B　7.C　8.D　9.D　10.A
11.B　12.C　13.C　14.B

二、填空题

1. -1　2. 1　3. $\lambda\neq 2$且$\lambda\neq 1$　4. $\frac{a}{6}$　5. $\frac{1}{18}A$　6. -1　7. 2　8. k=1 或-2

9. 12　10. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$　11. 3　12. λ=4 或-1　13. -ab　14. $\frac{125}{16}$　15. $\frac{1}{24}A$

三、计算题

1、

解：$D \xlongequal{R_2-R_1} \begin{vmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix} \xlongequal{按第1列展开} 1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}$

$\xlongequal{按第1行展开} 1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix} = (x_4-x_3)(x_3-x_2)(x_4-x_2)$

2、

解：$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&1-x^2&0&0\\0&1&-3&-1\\0&1&-3&3-x^2\end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1-x^2&0&0\\1&-3&-1\\1&-3&3-x^2\end{vmatrix} = (1-x^2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3&-1\\-3&3-x^2\end{vmatrix}$

$=(1-x^2)(-12+3x^2) = -3x^4+15x^2-12 = -3(x^4-5x^2+4)=0$，

∴ $f(x)$的根为±1，±2

3、

解：∵ $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，∴ $A^3=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴ $f(A)=3A^3+2A+E=3\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

4、

解：∵矩阵X满足 $AX+E=A^2+X$，∴ $(A-E)X=A^2-E$，

∵ $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，∴ $A-E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，

∵ $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，$(A-E)^*=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$

~~∴ $(A-E)^{-1}=\frac{(A-E)^*}{|A-E|}$~~ ∴ $(A-E)^{-1}=\frac{1}{|A-E|}(A-E)^*=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

又∵ $A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，∴ $A^2-E=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{bmatrix}$

∴ $X=(A-E)^{-1}(A^2-E)=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$

5、

解：$A=\begin{bmatrix}\lambda&3&3&3\\3&\lambda&3&3\\3&3&\lambda&3\\3&3&3&\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{R14}\begin{bmatrix}3&3&3&\lambda\\3&\lambda&3&3\\3&3&\lambda&3\\\lambda&3&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[R4-\frac{\lambda}{3}R_1]{R_2-R_1,\ R_3-R_1}\begin{bmatrix}3&3&3&\lambda\\0&\lambda-3&0&3-\lambda\\0&0&\lambda-3&3-\lambda\\0&3-\lambda&3-\lambda&3-\frac{\lambda^2}{3}\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_4+R_2}\begin{bmatrix}3&3&3&\lambda\\0&\lambda-3&0&3-\lambda\\0&0&\lambda-3&3-\lambda\\0&0&3-\lambda&-\frac{\lambda^2}{3}-\lambda+6\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4+R_3}\begin{bmatrix}3&3&3&\lambda\\0&\lambda-3&0&3-\lambda\\0&0&\lambda-3&3-\lambda\\0&0&0&-\frac{\lambda^2}{3}-2\lambda+9\end{bmatrix}$

∵秩(A)=3，∴ $-\frac{\lambda^2}{3}-2\lambda+9=0$，解得：$\lambda=3$或$-9$.

当 $\lambda=3$ 时，$A\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，秩(A)=1≠3，舍去；当 $\lambda=-9$ 时，$A\to\begin{bmatrix}1&1&1&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

符合题意，∴ $\lambda=-9$

6、

解：设 $X=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，∵ $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，

∴ $AX=\begin{bmatrix}0&0&0\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$，$XA=\begin{bmatrix}a_{12}&a_{13}&0\\a_{22}&a_{23}&0\\a_{32}&a_{33}&0\end{bmatrix}$，

∵满足 $AX=XA$，

∴ $a_{12}=0$，$a_{13}=0$，$a_{11}=a_{22}$，$a_{12}=a_{23}$，$a_{21}=a_{32}$，$a_{22}=a_{33}$，$a_{23}=0$

∴ $X=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，∴ $X=\begin{bmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{bmatrix}$，其中，a, b, c为任意常数.

7、

解：(1) 证明：∵A和B满足 $A+B=BA$，

∴ $A+(E-A)B=0$，∴ $A-E+(E-A)B=-E$，

∴ $(A-E)(B-E)=E$，

∴ $A-E$ 为可逆矩阵

(2) ∵ $B=\begin{bmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，∴ $B-E=\begin{bmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，∵ $|B-E|=\begin{vmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=6\neq 0$，

且 $(B-E)^*=\begin{bmatrix}0&3&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，∴ $(B-E)^{-1}=\frac{1}{|B-E|}(B-E)^*=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴ $A-E=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，∴ $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

8、

解：$\because A=diag[\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{7}]$，$\therefore |A|=\frac{1}{84}\neq 0$，$\therefore A$为可逆矩阵，

又$\because A、B$满足$A^{-1}BA=6A+BA$，$\therefore A^{-1}B=6E+B$，$\therefore (A^{-1}-E)B=6E$

$\because A^{*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{28}&0&0\\0&\frac{1}{21}&0\\0&0&\frac{1}{12}\end{bmatrix}$，$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=84\begin{bmatrix}\frac{1}{28}&0&0\\0&\frac{1}{21}&0\\0&0&\frac{1}{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1}-E=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，令$A^{-1}-E=C$，

$\because |C|=36$，$C^{*}=\begin{bmatrix}18&0&0\\0&12&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，$\therefore C^{-1}=\frac{1}{|C|}C^{*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$

$\therefore B=(A^{-1}-E)^{-1}\cdot 6E=C^{-1}\cdot 6E=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

9、

…解，有无穷多解？当方程组有无穷多解的时候，写出方程组的通解。

解：由题意得：令$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&4\\-1&\lambda&1&\lambda^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&4\\0&\lambda+1&\lambda+1&\lambda^2+4\\0&-2&2-\lambda&-8\end{array}\right]$

①当$\lambda\neq -1$时，

$\xrightarrow{R_3+\frac{2}{\lambda+1}R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&4\\0&\lambda+1&\lambda+1&\lambda^2+4\\0&0&4-\lambda&\frac{2\lambda^2-8\lambda}{\lambda+1}\end{array}\right]$ $\therefore \lambda\neq 4$且$\lambda\neq -1$时，秩(A)=秩($\bar{A}$)=3 方程组有唯一解

$\because$当$\lambda=4$时，$\bar{A}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right]$，$\therefore$秩(A)=秩($\bar{A}$)=2<3，

$\therefore$方程组有无穷多解，且通解为$\begin{cases}x_1=-3t\\x_2=4-t\\x_3=t\end{cases}$ 其中，t为任意常数

②当$\lambda=-1$时，$\bar{A}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&-2&3&-8\end{array}\right]\xrightarrow{R_{23}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&4\\0&-2&3&-8\\0&0&0&5\end{array}\right]$，

$\because$秩(A)=2，秩($\bar{A}$)=3，$\therefore$秩(A)≠秩($\bar{A}$)，$\therefore$方程组无解。

综上，$\lambda\neq 4$且$\lambda\neq -1$时，方程组有唯一解

$\lambda=4$时，方程组有无穷多解，且通解为$\begin{cases}x_1=-3t\\x_2=4-t\\x_3=t\end{cases}$，其中t为任意常数

$\lambda=-1$时，方程组无解

10、

$=-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\-1&7&-3&4\\2&-9&5&7\\1&-6&4&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&2&-1&6\\0&1&1&3\\0&-1&2&0\end{vmatrix}$ ···3分

$=\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-9$ ···3分

11、

$\begin{pmatrix}1&2&2&1&0&0\\2&1&-2&0&1&0\\2&-2&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-6&-2&1&0\\0&-6&-3&-2&0&1\end{pmatrix}$ ···3分

$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&0&\frac{5}{9}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\0&-3&0&-\frac{6}{9}&-\frac{3}{9}&\frac{6}{9}\\0&0&1&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\0&0&1&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$ ···3分 $A^{-1}=\frac{1}{9}A$

12、

$f(A) = A^2 - 3A - 2E$ ···1分

$$f(A)=\begin{pmatrix}3&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}13&3&5\\14&2&5\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&3&3\\9&3&6\\3&-3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdots 3分 =\begin{pmatrix}2&0&2\\5&-3&-1\\-3&3&-3\end{pmatrix}\cdots 1分$$

13、

$A_{13}+A_{23}+A_{43} = A_{13}+A_{23}+0\cdot A_{33}+A_{43}$

$$=\begin{vmatrix}2&1&1&4\\1&0&1&3\\1&5&0&1\\-1&1&1&2\end{vmatrix} \;3分\; = -\begin{vmatrix}1&1&2&4\\1&0&1&3\\0&5&1&1\\1&1&-1&2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&1&2&4\\0&-1&-1&-1\\0&5&1&1\\0&0&-3&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\0&1&1&1\\0&0&-4&-4\\0&0&-3&-2\end{vmatrix} \;2分\; = -4\begin{vmatrix}1&1&2&4\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-3&-2\end{vmatrix} = -4 \cdots 1分$$

第 2 页 共 4 页

14、

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&-1&-5&10-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&5&\lambda-10\\0&0&\lambda-3&9-3\lambda\end{pmatrix}$$

由$R(A)=3$

可得 $\lambda\neq 3$

15、

$AX - X = A^2 - E$ ···1分

$(A-E)X = (A-E)(A+E)$ ···2分

$|A-E||X| = |A-E||A+E|$ ···1分

$\because |A-E| = -2 \neq 0$ ···1分

$\therefore |X| = |A+E| = 9$ ···1分

16、

因为 $A^* = |A|\cdot A^{-1} = 4\cdot A^{-1}$ ···1分

所以 $4A^{-1}X = A^{-1} + 2X$ （两边同时左乘A

$4X = E + 2AX$ ···2分

$4X - 2AX = E$

$(4E-2A)X = E$

所以 $X = (4E-2A)^{-1}$ ···1分

$$\therefore X=\begin{pmatrix}\frac14&\frac14&0\\0&\frac14&\frac14\\\frac14&0&\frac14\end{pmatrix}\cdots 2分$$

得分	

五、试求解下列各题（本题共两小题，共 14 分）

$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0$

17、

$\{x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} = -\mu(\lambda-1) \quad \cdots 3分$$

因为该齐次线性方程组有非零解，所以 $|A|=0$ ……1分

所以当 $\lambda=1$ 或 $\mu=0$ 时，方程组有非零解 ……1分

18、

因为 $|A| = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 1 & -1 & \lambda \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4+5\lambda) \quad \cdots 3分$

所以当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解 ……1

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时

$$B \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & 2 \\ -1 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & 2 \\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

无解 ……2分

当 $\lambda=1$ 时

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

无穷多解 ……2分

$$\begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases} \cdots 1分 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots 1分$$

其中 t 为自由变量.

19、

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1+\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & -\lambda-1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & -\lambda-1 \end{array}\right) = B \quad 2'$$

若 $\lambda+3=0$，$(\lambda=-3)$ 则 $B \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda=-3$ 时 有无数解，通解 $\begin{cases} x_1 = k+\frac{1}{3} \\ x_2 = k+\frac{5}{3} \\ x_3 = k \end{cases}$ 2' 2'

若 $\lambda+3 \neq 0$，则 $B \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & -\lambda-1 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda-1 \end{array}\right)$$

$\lambda=0$ 时无解 2'

$\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时 唯一解

20、

1. 讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & t \\ 2 & 3 & k & 4 \end{bmatrix}$ 的秩；

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & t \\ 0 & 1 & k-2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & k-1 & 2-t \end{pmatrix} \quad 3'$$

$k=1$ 且 $t=2$ 时

$R(A)=2$

$k \neq 1$ 或 $t \neq 2$ 时

$R(A)=3$

3'

21、

$$(A^2-E)B = A+E$$

$$(A-E)B = E$$

$$|A-E|\,|B| = 1 \qquad 2'$$

又 $A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$，$|A-E| = 2$

$\therefore |B| = \frac{1}{2} \qquad 2'$

22、

$f(A) = A^2 - A - 2E$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&-9&7\\-3&7&4\\-1&4&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-7&4\\-5&9&3\\-4&9&4\end{pmatrix} \qquad 1'$$

23、

$(E-A)X = B$

$$E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix} \qquad 2'$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&-1&-1&5&6\\0&-1&-1&3&4\\0&0&-1&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&-5&-6\\0&1&1&-3&-4\\0&0&1&-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-2&-2\\0&1&0&-2&-2\\0&0&1&-1&-2\end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\\-1&-2\end{pmatrix} \qquad 1'$$

四、 证明题

1、

$x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3$

$x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3$

证明：由题意得：令 $\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{array}\right]$

$$\xrightarrow[R_4-R_1]{R_2-R_1,\ R_3-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\0&a_2-a_1&a_2^2-a_1^2&a_2^3-a_1^3\\0&a_3-a_1&a_3^2-a_1^2&a_3^3-a_1^3\\0&a_4-a_1&a_4^2-a_1^2&a_4^3-a_1^3\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{a_3-a_1}R_3,\ \frac{1}{a_4-a_1}R_4]{\frac{1}{a_2-a_1}R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\0&1&a_2+a_1&a_2^2+a_1a_2+a_1^2\\0&1&a_3+a_1&a_3^2+a_1a_3+a_1^2\\0&1&a_4+a_1&a_4^2+a_1a_4+a_1^2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4-\frac{a_4-a_2}{a_3-a_2}R_3]{R_3-R_2,\ R_4-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\0&1&a_1+a_2&a_2^2+a_2a_1+a_1^2\\0&0&a_3-a_2&(a_3-a_2)(a_3+a_2+a_1)\\0&0&0&(a_4-a_2)(a_4-a_3)\end{array}\right]$$

又 $\because a_1,a_2,a_3,a_4$ 两两不相等，秩$(\bar{A})=4$，秩$(A)=3$，

$\therefore$ 秩$(A)\neq$秩$(\bar{A})$，

$\therefore$ 该方程组无解.

2、

证明：$\because |E-A| \neq 0$，$\therefore E-A$为可逆矩阵

又$\because B=E+AB$，$\therefore (E-A)B=E$，$\therefore B=(E-A)^{-1}$.

又$\because C=A+CA$，$\therefore (E-A)C=A$，$\therefore C=(E-A)^{-1}A$，

$\therefore C=BA$，

$\therefore B-C=B-BA=B(E-A)$

又$\because (E-A)B=E$，

$\therefore B-C=E$，得证.

3、

因为 $(A-2E)(A-E)=2E$ ··· 3分

所以 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$

4、

因为 $AB=E$，所以 $R(AB)=n$ ··· 1

由于 B 是 $m\times n$ 矩阵且 $n<m$，所以 $R(B)\le n$

又因为 $R(AB)\le R(B)$，即 $R(B)\ge n$

所以 $R(B)=n$，即 $BX=0$ 只有零解

5、

$A^T=A$，$B^T=B$ 1'

"⇒" 易知 $(AB)^T=AB$，即 $B^TA^T=AB$，

则 $BA=AB$ 2'

"⇐" $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$

故 AB 是对称阵 2'

6、

由 $A^*A=|A|E$ 1'

知 $|A^*||A|=|A|^n$ $\therefore |A^*|=|A|^{n-1}$ 1'

又 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$ 1'

由 $(A^*)^*A^*=|A^*|E$ 1'

知 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A$

$=|A|^{n-2}A$ 1'

7、

$$A^3-3A^2+3A=0$$

$$(A-E)(A^2-2A+E)+E=0$$

$$(A-E)(-A^2+2A-E)=E$$

$\therefore$ $A-E$ 可逆

$$(A-E)^{-1}=-A^2+2A-E$$