看黑圈

杭州电子科技大学学生考试卷（期末）B 卷

〈补考〉

考试课程	高等数学 A1	考试日期	2021 年3月3日	成绩	参考答案
课程号	A0714201	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一 1-8	二 9-12	三 13-16	四 17-20	五 21	六 22
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题（本题共 9 小题，每小题 3 分，共 27 分）

1. 下列各式中正确的是（ B ）.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ (B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$ (C) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=-e$ (D) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}=e$

2. 设 $f(x)=1-\cos x$，则当 $x\to 0$，$f(x)$ 是 x^3 的（ D ）无穷小.

(A) 等价 (B) 同阶，但非等价 (C) 高阶 (D) 低阶

3. 已知 $f'(x^2)=x^2+1$，则 $f(x)=$（ B ）.

(A) $x-\frac{1}{2}x^2+C$ (B) $x+\frac{1}{2}x^2+C$ (C) $x^2+\frac{1}{2}x+C$ (D) $x^2-\frac{1}{2}x+C$

4. 设 $y=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则曲线 $y=f(x),x=a,x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形面积为（ C ）.

(A) $\int_a^b f(x)dx$ (B) $|\int_a^b f(x)dx|$ (C) $\int_a^b|f(x)|dx$ (D) 无法确定

5. 设 $f'(x)=2f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)$ 为（ C ）.

(A) $e^{x/2}$ (B) $e^x/2$ (C) e^{2x} (D) $e^{2x}/2$

6. 阿基米德线 $\rho=a\theta,(a>0)$ 相应于 $0\le\theta\le 2\pi$ 一段的弧长是（ A ）.

(A) $a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta$ (B) $a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta}d\theta$

(C) $a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\theta^2}d\theta$ (D) $a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\theta}d\theta$

7. 已知 $f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(t-x)dt$，则 $f(x)=$（ A ）.

(A) $-\sin x$ (B) $-1+\cos x$ (C) $\sin x$ (D) $1-\sin x$

8. 关于反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 敛散性下列结论正确的是（ A ）.

(A) $p>1$ 收敛 (B) $p>-1$ 收敛 (C) $p<1$ 收敛 (D) $p<-1$ 收敛

9. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x-1}$ 的通解为（ C ）.

(A) $y=x^2-C$ (B) $y=C(x^2-1)$ (C) $y=C(x-1)^2$ (D) $y=Cx^2$

得分	

二、填空题（本题共 3 小题，每小题 3 分，共 9 分）

10. 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+2x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ 2 .

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)=$ 1 .

12. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sin^2 x}\sqrt{1+\cos x}\arcsin x dx=$ 0 .

得分	

三. 计算题（本题共4小题，每小题6分，共24分）

13. 已知 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$.

(-1)

解. $\int xf'(x)dx = \int x\,df(x) = xf(x) - \int f(x)dx \cdots\cdots 3'$

$= x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)' - \frac{\sin x}{x} + C \cdots\cdots 2'$

$= \frac{x\cos x}{x} - \frac{2\sin x}{x} + C \cdots\cdots 1'$

14. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-\int_0^y e^t dt+2021=0$ 所决定，求 $\frac{dy}{dx}$.

解. 两边求导，得

$2x - e^y\cdot y' = 0 \cdots\cdots 4'$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y} \cdots\cdots 2'$

15. 计算 $\int\frac{2x-5}{x^2-4x+8}dx$.

解. $I = \int\frac{(2x-4)-1}{x^2-4x+8}dx$

$= \int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8} - \int\frac{1}{(x-2)^2+2^2}d(x-2) \cdots\cdots 2'$

$= \ln(x^2-4x+8) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x-2}{2} + C$

$\cdots\cdots 4'$

(找到一个原函数给2分)

16. 已知 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$，求 $\int\frac{dx}{f(x)}$.

解. $xf(x) = (\arcsin x + C)'$

$\therefore f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdots\cdots 3'$

$\int\frac{dx}{f(x)} = \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2)$

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \cdots\cdots 3'$

得分	

四、综合题（本题共 4 小题，每小题 7 分，共 28 分）

17．求函数 $f(x)=\int_0^x (2-t)e^t dt$ 的单调区间与最值.

解. $f'(x)=(2-x)e^x=0$，驻点 $x=2$ ……2'

$f(x)$在$(-\infty,2]$上，单调增加；

$f(x)$在$[2,+\infty)$上，单调减少；……2'

$f(x)$最大值：$f(2)=\int_0^2(2-t)e^t dt=e^2-3$ ……3'

18. 设 $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=\int_a^{+\infty}e^{-t}dt$，求常数 a .

解. $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}=e$ ……3'

$\int_a^{+\infty}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_a^{+\infty}=-(\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}-e^{-a})$

$=e^{-a}$ ……3'

故 $a=-1$. ……1'

19．设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x>0,\\ 1+\cos x, & -\pi\le x<0.\end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

解. $\int_1^4 f(x-2)dx \overset{t=x-2}{=\!=\!=} \int_{-1}^2 f(t)dt$ ……2'

$=\int_{-1}^0(1+\cos t)dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt$ ……4'

$=1+\sin1-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$ ……1'

$=\frac{3}{2}+\sin1-\frac{1}{2}e^{-4}$.

20．求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

解 $y''+2y'+y=0$ 特征方程 $r^2+2r+1=0$

得 $r_{1,2}=-1$，故 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$ ……2'

由 $f(x)=xe^x$，$\lambda=1$ 不是特征根，故

特解设为 $y^*=(ax+b)e^x$ ……2'

y^*代入原方程，比较系数，得 $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{4}$

$y^*=\frac{1}{4}(x-1)e^x$ ……2'

∴ 通解 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)e^x$ ……1'

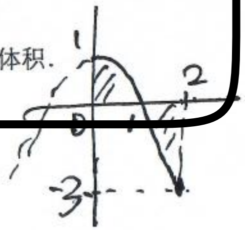
得分	

五、应用计算题（7 分）

21．已知平面区域 D 由抛物线 $y=1-x^2$（$x\geq 0$）和 x 轴、y 轴以及直线 $x=2$ 围成．试求：

（1）平面区域 D 的面积；

（2）平面区域 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积．



解．(1) $A=\int_0^2|1-x^2|dx$

$=2 \quad \cdots\cdots 3'$

(2) $V_y=2\pi\int_0^2 x|1-x^2|dx=5\pi$

$\cdots\cdots 4'$

（或 $V_y=\pi\cdot 2^2\times 3-\pi\int_{-3}^{0}(1-y)dy+\pi\int_0^1(1-y)dy$

$=5\pi \quad \cdots\cdots 4'$ ）

得分	

六、证明题（5 分）

22．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$．证明：对任意 $k\in R$，都有

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\leq 1.$$

证明：由柯西-许瓦兹不等式知

$\left(\int_a^b f(x)\cos kx dx\right)^2=\left[\int_a^b \sqrt{f(x)}\,(\sqrt{f(x)}\cos kx)\,dx\right]^2$

$\leq \int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b f(x)\cos^2 kx dx=\int_a^b f(x)\cos^2 kx dx \quad \cdots\cdots 2'$

同理 $\left(\int_a^b f(x)\sin kx dx\right)^2\leq\int_a^b f(x)\sin^2 kx dx \quad \cdots\cdots 2'$

∴ 原不等式左端 $\leq\int_a^b f(x)(\cos^2 kx+\sin^2 kx)dx$

$=\int_a^b f(x)dx$

$=1. \quad \cdots\cdots 1'$

证毕.