# 线性代数期末样卷 2 参考答案

一、1. $\underline{a_1a_2a_3}$；2. $\dfrac{1}{9}$；3. $\underline{2}$；4. $\underline{2}$；5. $\underline{-1，2，3}$；6. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$，$\underline{2}$；

二、1. $D=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ (3 分)

$$=-\begin{vmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 14 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 1 \end{vmatrix}=-120$$ （6 分）

2. $A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}; A_1=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; A_2=\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; A_2^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix};$（3 分）

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix};$$ （6 分）

3. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$ （3 分）

原方程的解 $\begin{cases} x_1=t_1+t_2 \\ x_2=-t_1 \\ x_3=t_1 \\ x_4=t_2 \end{cases}$ $t_1,t_2$ 为任意常数。 （5 分）

基础解系为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T,\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$； （6 分）

三、1. 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$ 即 $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_2-x_3=5 \\ x_1+x_2-x_3=-6 \end{cases}$ （2 分）

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$ （5 分）

$\beta=-11\alpha_1+14\alpha_2+9\alpha_3$ （6 分）

2．$A=\begin{bmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，　　$\Delta_1=1>0$　　（2分）

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0\Rightarrow -2<t<2,\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2(2-t^2)>0\Rightarrow -\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

（5分）

当$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$时，二次型 f 是正定二次型　　（6分）

四、$AX=B-X\Rightarrow(A+E)X=B,|A+E|=6\neq 0,(A+E)$可逆。

$X=(A+E)^{-1}B$　　（4分）

$[A+E,B]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$　　（7分）

$X=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ 1 & \frac{4}{3}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$　　（8分）

五、设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，将此式写成分量形式，得齐次型线性方程组，对方程组系数矩阵做初等行变换得　　（2分）

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda-2\\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1^2\end{bmatrix}$　　（4分）

当$\lambda=1,\alpha_{1,}\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；线性相关；

当$\lambda\neq 1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；线性无关；　　（8分）

当$\lambda=1$；　$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

向量组的秩为 3，一个极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；　　（10分）

$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ （１２分）

六、$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&0&-3&-3\\2&k&-1&-2\\1&2&k&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&-3&-3\\0&1&\frac{k+3}{2}&2\\0&0&-\frac{(k+5)(k-2)}{2}&-2(k-2)\end{bmatrix}$ （４分）

当$k\neq-5,k\neq2;R(\overline{A})=R(A)=3$；惟一解； （６分）

当$k=-5,R(\overline{A})=3,R(A)=2;$ 无解；

当$k=2,R(\overline{A})=R(A)=2<3$； 无穷多解； （８分）

此时$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&0&-3&-3\\2&2&-1&-2\\1&2&2&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&-3&-3\\0&1&\frac{5}{2}&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ （１０分）

通解为$\begin{cases}x_1=-3+3t\\x_2=2-\frac{5}{2}t\\x_3=t\end{cases}$ t为任意常数 （１２分）

七、A与**B**相似，$trA=trB,|A|=|B|$ （４分）

$\begin{cases}2+x=1+y\\-15x-40=-20y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ （６分）

A的特征值为５，５，－４；$A^2-5E$的特征值为２０，２０， １１； （８分）

$|A^2-5E|=4400$； （１０分）

八、１．$A(\frac{3E-A}{2})=E$ （４分）

A可逆且$A^{-1}=\frac{3E-A}{2}$ （５分）

２．若$l_0\alpha+l_1A\alpha+l_2A^2\alpha+\cdots+l_{k-1}A^{k-1}\alpha=0,$ （＊）

下证：$l_0=l_1=\cdots=l_{k-1}=0$ 即可。 （２分）

用$A^{k-1}$作用于（＊）式得：

$$\begin{aligned}0&=A^{k-1}(l_0\alpha+l_1A\alpha+l_2A^2\alpha+\cdots+l_{k-1}A^{k-1}\alpha)\\&=l_0A^{k-1}\alpha+l_1A^k\alpha+l_2A^{k+1}\alpha+\cdots+l_{k-1}A^{2k-2}\end{aligned}$$

注意到 $A^k\alpha=0,A^{k-1}\alpha\neq0$，所以 $l_0=0$。 （３分）

依次用 $A^{k-2}, A^{k-3}, \cdots, A^{1}$ 作用（＊）可得：$l_1 = l_2 = \cdots = l_{k-1} = 0$，（4 分）

故 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关。（5 分）