参考答案：

1.C	2.A	3.C	4.A	5.D
6.C	7.B	8.B	9.D	10.C
11.C	12.B	13.B	14.C	15.C
16.B	17.D	18.D	19.C	20.B
21.B	22.D	23.C	24.C	25.A
26.D	27.A	28.C	29.B	30.B
31.D	32.C	33.C	34.D	35.D

36.A是 n 阶方阵且$|A|=3$，则$|-A|=((-1)^n 3)$。

37.$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-2)$。

38.设 D=$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, 则$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=(0)$

39.设 A,B是同阶的可逆矩阵，且$AXB=C$, 则$X=(A^{-1}CB^{-1})$。

40.向量$\beta=[1,k,5]^T$能由$\alpha_1=[1,-3,2]^T$，$\alpha_2=[2,-1,1]^T$ 线性表示， 则$k=(-8)$。

41.已知齐次线性方程组$A_{5\times4}X=O$有唯一解，则$R(A)=(4)$。

42.设 A 是三阶方阵且$R(A)=2$，而$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则$R(AB)=(2)$。

43.如果二阶矩阵$A=\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ y & x \end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$相似，则$x=(-2)$，$y=(-1)$。

44.二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-8x_2x_3$的矩阵为$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$。

45.已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+(a+1)x_3=3 \\ x_1+ax_2-2x_3=0 \end{cases}$ 无解，则$a=(-1)$。

46.设三阶方阵A有三个不同的特征值$2,3,\lambda$，且$|A|=36$， 则$\lambda=(6)$。

47.若$A=\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$为正定矩阵，则 t 满足$(-\sqrt{2})<t<\sqrt{2})$。

48$[1,2,3]^T+k[0,1,2]^T \quad (k$

49. $f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$

50. 3

51. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

52. $a^n + (-1)^{n+1} b^n$

53. $3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

54 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

55. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

56. -3

57. 6； $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$； 6，3，2

58. $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

59.6____；

60. $D = a + b + c + d$

61. $0, 0, \cdots, 0$（$n-1$个），n；

62. 9

63. 4

64. $(3,\ 1,\ -1,\ 1)^T$

65. $\dfrac{2}{a} + 1$

66. $-2 < t < 1$

67. $(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)(\lambda_4 - 1)$；

68. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$

69.3；

70. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{8}{3}\boldsymbol{\alpha}_2 + \frac{5}{6}\boldsymbol{\alpha}_3$

71. **解** $A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&0&-3(k-1)(k+2)\end{pmatrix}$，有

当 $k\neq1$ 且 $k\neq-2$ 时，$R(A)=3$；当 $k=1$ 时，$R(A)=1$；当 $k=-2$ 时，$R(A)=2$.

72.（1）**解** $X=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-8&3\\-2&5&-1\end{pmatrix}$.

（2）**解** 由 $X=AX+B$，得 $(E-A)X=B$. 又

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix},|E-A|=3\neq0,$$

则 $E-A$ 可逆，且 $X=(E-A)^{-1}B$. 经计算，得

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{|E-A|}(E-A)^{*}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

（3）**解** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&2&1\\9&8&7\\6&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

73. **证** 由 $A^2-3A=O$，得 $(A-2E)(A-E)=2E$，即

$$(A-2E)\frac{A-E}{2}=E,$$

所以 $A-2E$ 可逆，且 $\left(A-2E\right)^{-1}=\dfrac{A-E}{2}$.

74. **证** （1）$B^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP=P^{-1}A^kP$.

（2）由 $AP=PB$，得 $A=PBP^{-1}$，且 $A^{2011}=PB^{2011}P^{-1}$. 又

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}, B^{2011}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B,$$

所以 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}, A^{2011}=PBP^{-1}=A$.

75.（1）**解**　将矩阵进行如下分块：

$$\begin{pmatrix}1&2&\vdots&1&0\\0&1&\vdots&0&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\vdots&2&1\\0&0&\vdots&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&E\\O&A_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&\vdots&3&0\\0&1&\vdots&2&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\vdots&-2&3\\0&0&\vdots&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&B_1\\O&B_2\end{pmatrix},$$

则原式 $=\begin{pmatrix}A_1&E\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_1\\O&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_1+B_2\\O&A_2B_2\end{pmatrix}$. 又

$$A_1B_1+B_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\2&2\end{pmatrix}, A_2B_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&9\\0&9\end{pmatrix}$$

,

所以原式 $=\begin{pmatrix}1&2&5&1\\0&1&2&2\\0&0&-4&9\\0&0&0&9\end{pmatrix}$.

（2）将矩阵进行如下分块：

$$\begin{pmatrix}a&0&\vdots&1&0\\0&a&\vdots&0&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&\vdots&b&0\\0&1&\vdots&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aE&E\\E&bE\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&c\\c&0\\\cdots&\cdots\\d&0\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\dE\end{pmatrix},$$

则原式 $=\begin{pmatrix}aE&E\\E&bE\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\dE\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aC+dE\\C+bdE\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&ac\\ac&d\\bd&c\\c&bd\end{pmatrix}$.

76. **解**　方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\2&1&-6&4\\3&2&p&q\\2&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&1&2&2\\0&0&2&-1\\0&0&0&p+2q-6\end{pmatrix}.$$

当 $p+2q=6$ 时，$R(A)=3<4$，方程组有非零解，且

$$A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&3\\0&0&1&-\dfrac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=x_4,\\x_2=-3x_4,\\x_3=\dfrac{1}{2}x_4.\end{cases}$$

令 $x_4=2c$，得方程组的通解为

$$X=c(2,-6,1,2)^T\text{，其中 }c\text{ 为任意常数.}$$

77. **证**　（1）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $s\times t$ 矩阵，则

$$AB-BA\text{有意义}\Leftrightarrow\begin{cases}n=s,\\t=m,\\m=s,\\t=n.\end{cases}\Leftrightarrow m=n=s=t\text{，}$$

即 A,B 为同阶矩阵.

（2）设 $A=(a_{ij})_{n\times n},B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $AB-BA$ 的主对角线上元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}b_{st}a_{ts}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{ts}b_{st}=0\text{，}$$

而 E 的主对角线上元素之和为 n，所以 $AB-BA\neq E$.

78. **证**　显然 $\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta_2+\beta_4$，即

$$\beta_1+(-1)\beta_2+\beta_3+(-1)\beta_4=0\text{，}$$

所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 必线性相关.

79. 证 必要性：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，任取$\beta\in R^n$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$线性相关，所以$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示.

充分性：任一n维向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，则单位坐标向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，有

$$n=R(e_1,e_2,\cdots,e_n)\le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\le n,$$

所以$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$，即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

80. 解 由$\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)X=X,\gamma=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)X$，得$\gamma=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\gamma$，即

$$((\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)-E)\gamma=0.$$

令$\gamma=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$．由

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)-E=\begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases}x_1=-x_4,\\x_2=-x_4,\\x_3=-x_4.\end{cases}$取$x_4=1$，得$\gamma=(-1,-1,-1,1)^T$.

81.（1）解 由$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=-x_3.\end{cases}$

令$x_3=1$，得方程组的一个基础解系$\xi=(0,-1,1)^T$，通解为$X=c\xi$，其中c为任意常数.

（2）**解** 由$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&2&-1\\3&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3,\\x_2=\frac{3}{2}x_3-x_4.\end{cases}$

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得方程组的一个基础解系$\xi_1=(-1,3,2,0)^T$，$\xi_2=(0,-1,0,1)^T$，

通解为 $X=c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

（3）**解**　由 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1\\2&-4&5&3\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\begin{cases}x_1=2x_2+\frac{2}{7}x_4,\\x_3=\qquad\;-\frac{5}{7}x_4.\end{cases}$

令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$，得方程组的一个基础解系 $\xi_1=(2,1,0,0)^T$，$\xi_2=(2,0,-5,7)^T$，通

解为 $X=c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

（4）**解**　由 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&-1&1\\1&-1&1&1&-2\\3&3&-3&-3&4\\4&5&-5&-5&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{1}{3}\\0&1&-1&-1&\frac{5}{3}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，得

$$\begin{cases}x_1=\qquad\qquad\frac{1}{3}x_5,\\x_2=x_3+x_4-\frac{5}{3}x_5.\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$，得方程组的一个基础解系

$$\xi_1=(0,1,1,0,0)^T,\quad \xi_2=(0,1,0,1,0)^T,\quad \xi_3=(1,-5,0,0,3)^T,$$

通解为 $X=c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3$，其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

82.（1）**解**　方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A&\beta\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc:c}2&-4&-1&0&4\\-1&-2&0&-1&4\\0&3&1&2&1\\3&1&0&2&-3\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&-\frac{14}{5}\\0&1&0&0&-\frac{13}{5}\\0&0&1&0&\frac{4}{5}\\0&0&0&1&4\end{array}\right).$$

因为 $R(A)=R(B)=4$，所以方程组有唯一解，且解为 $X=(-\frac{14}{5},-\frac{13}{5},\frac{4}{5},4)^T$.

（2）**解**　方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&-1\\3&2&1&1&-3&-5\\0&1&2&2&6&2\\5&4&3&3&-1&-7\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&-1&-1&-5&-3\\0&1&2&2&6&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

因为 $R(A)=R(B)=2<5$，所以方程组有无穷多解，且

$$\begin{cases}x_1=\quad x_3+\quad x_4+5x_5-3,\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+2.\end{cases}$$

令 $x_3=c_1,x_4=c_2,x_5=c_3$，得通解为

$$X=(-3,2,0,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0,0)^T+c_2(1,-2,0,1,0)^T+c_3(5,-6,0,0,1)^T$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

（3）**解**　方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc:c}2&3&-1&-5&-2\\1&2&-1&1&-2\\1&1&1&1&5\\3&1&2&3&4\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&-3\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&0\end{array}\right).$$

因为 $R(A)=R(B)=4$，所以方程组有唯一解，且解为 $X=(-3,3,5,0)^T$.

83. **证**　设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$.　　（1）

（1）式两边左乘以 A，得 $(x_1+x_2)\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$.　　（2）

（2）减去（1），得 $x_2\alpha_1+x_3\alpha_2=0$.　　（3）

（3）式两边左乘以 A，得 $(x_2+x_3)\alpha_1+x_3\alpha_2=0$.　　（4）

（4）减去（3），得 $x_3\alpha_1=0$．因为 $\alpha_1\neq 0$，所以 $x_3=0$.

代入（3），得 $x_2\alpha_1=0$，所以 $x_2=0$．代入（1），得 $x_1\alpha_1=0$，所以 $x_1=0$.

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

84. **证**　设 $R(A)=R(B)=r$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 A 组的一个极大无关组，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为 B 组的一个极大无关组．由 A 组可由 B 组线性表示，得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)K_{r\times r}.$$

又$r\ge R(K)\ge R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r$，则$R(K)=r$，即$K$为可逆矩阵，有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)K^{-1},$$

即$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，所以$B$组可由$A$组线性表示.故$A$组与$B$组等价.

85. **解** 令$\varphi(x)=x^3-5x^2$，则B的特征值分别为$\varphi(1)=-4,\varphi(-1)=-6,\varphi(2)=-12$，且

$$|B|=\varphi(1)\varphi(-1)\varphi(2)=-288.$$

86. **解** （1）A的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-4-\lambda & -10 & 0\\ 1 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 6 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(1-\lambda)^2,$$

则A的特征值为$\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-2$；属于特征值$\lambda_{1,2}=1$全部特征向量为

$$k_1(-2,1,0)^T+k_2(0,0,1)^T，\ k_1、k_2\text{不全为}0;$$

属于特征值$\lambda_3=-2$全部特征向量为$k_3(-5,1,3)^T$，$k_3\ne 0$.

（2）$|A|=-2$，则A^*的特征值为$-2,-2,1$.

（3）令$\varphi(x)=2-3x^{-1}$，则$2E-3A^{-1}$的特征值为

$$\varphi(1)=-1,\varphi(1)=-1，\ \varphi(-2)=\frac{7}{2}.$$

87. **解** 显然B的特征值为$\lambda,2,2$．A与B相似，则A的特征值为$\lambda,2,2$．由

$$1+4+5=\lambda+2+2,$$

解得$\lambda=6$.

88. **解** A有3个不同的特征值，则A能相似对角化.令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & 9\end{pmatrix},$$

有 $A=P\Lambda P^{-1}$． 又 $P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -3 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，所以 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$.

89.（1）**解**　A 的特征多项式

$$\left|A-\lambda E\right|=-(2+\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(1,2,2)^T$；单位化，得

$$\beta_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T.$$

属于特征值 $\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_2=(2,1,-2)^T$；单位化，得

$$\beta_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T.$$

属于特征值 $\lambda_3=4$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(2,-2,1)^T$；单位化，得

$$\beta_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T.$$

令正交矩阵 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

（2）**解**　A 的特征多项式

$$\left|A-\lambda E\right|=(1-\lambda)^2(3-\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=3$.

属于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$；显然 α_1,α_2 正交，单位化，得

$$\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

属于特征值 $\lambda_3=3$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(0,1,1)^T$；单位化，得

$$\beta_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

令正交矩阵 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

（3）**解**　A 的特征多项式

$$\left|A-\lambda E\right|=(1-\lambda)^2(10-\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=10$.

属于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(-2,1,0)^T,\alpha_2=(2,0,1)^T$；正交化，得 $\beta_1=(-2,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{5}(2,4,5)^T$；单位化，得

$$\gamma_1=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T,\gamma_2=(\frac{2}{\sqrt{45}},\frac{4}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}})^T.$$

属于特征值 $\lambda_3=10$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(-1,-2,2)^T$；单位化，得

$$\gamma_3=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T.$$

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{45}}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{\sqrt{45}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{\sqrt{45}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}.$$

（4）**解**　A 的特征多项式

$$\left|A-\lambda E\right|=\lambda^2(9-\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=0,\lambda_3=9$.

属于特征值 $\lambda_{1,2}=0$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(2,1,0)^T,\alpha_2=(-2,0,1)^T$ ；正交化，

得 $\beta_1=(2,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{5}(-2,4,5)^T$ ；单位化，得

$$\gamma_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T,\gamma_2=(-\frac{2}{\sqrt{45}},\frac{4}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}})^T .$$

属于特征值 $\lambda_3=9$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(1,-2,2)^T$ ；单位化，得

$$\gamma_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T .$$

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&9\end{pmatrix}.$$

90. **解**　（1）A 与 Λ 相似，则 $|A-\lambda E|=|\Lambda-\lambda E|$，即

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(a+1)\lambda+a-2]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-b) .$$

将 $\lambda=-1$ 代入有 $a=0$，将 $\lambda=-2$ 代入有 $b=-2$.

（2）显然 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.

属于 $\lambda_1=-2$ 的线性无关的特征向量为 $p_1=(-1,0,1)^T$ ；

属于 $\lambda_2=-1$ 的线性无关的特征向量为 $p_2=(0,-2,1)^T$ ；

属于 $\lambda_3=2$ 的线性无关的特征向量为 $p_3=(0,1,1)^T$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，有 $P^{-1}AP=\Lambda=diag(-2,-1,2)$.

（3）$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}$. 又

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\Lambda^{100}=\begin{pmatrix}2^{100} & & \\ & 1 & \\ & & 2^{100}\end{pmatrix},$$

所以 $A^{100}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\cdot 2^{100} & 0 & 0\\ 2^{101}-2 & 2^{100}+2 & 2^{101}-2\\ 1-2^{100} & 2^{100}-1 & 2^{101}+1\end{pmatrix}$.

91. **解** 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & a-3\end{pmatrix}.$$

由 $R(A)=2$，得 $a-3=0$，所以 $a=3$.

92. **证** （1）设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$， （1）

（1）式两边左乘以 A，得 $-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$. （2）

（1）-（2），得 $2x_1\alpha_1-x_3\alpha_2=0$. 显然 α_1,α_2 线性无关，则 $x_1=0,x_3=0$. 代入（1），得 $x_2\alpha_2=0$，有 $x_2=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

（2） $AP=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

即 $AP=P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 由第一部分知 P 可逆，所以 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

93.（1）**解** 原式 $=a(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}b & 0 & 0\\ f & 0 & c\\ 0 & d & e\end{vmatrix}=ab(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & c\\ d & e\end{vmatrix}=-abcd$.

（2）**解** 原式 $=n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n!$.

94. **解** 方程组有非零解，则 $D=0$. 又

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}=\mu(1-\lambda),$$

所以$\lambda=1$或$\mu=0$.

95. **解** 将行列式按第一行展开，得 $D_n=xD_{n-1}+a_0$，则

$$D_n=x(xD_{n-2}+a_1)+a_0=x^2D_{n-2}+a_1x+a_0$$

$$=\cdots=x^{n-1}D_1+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$=x^{n-1}(x+a_{n-1})+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \quad =x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 .$$

96.（1）**解** $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 3\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

（2）**解** 由 $X=AX+B$，得$(E-A)X=B$. 又

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},|E-A|=3\neq 0,$$

则$E-A$可逆，且 $X=(E-A)^{-1}B$. 经计算，得

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{|E-A|}(E-A)^*=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

（3）**解** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

97. **解** （1）原式$=\left|\frac{1}{2}A^{-1}\right|=(\frac{1}{2})^3\frac{1}{|A|}=-\frac{1}{16}$.

（2）原式$=|A|^2=4$.

（3）$A^*-\frac{1}{2}A^{-1}=|A|A^{-1}-\frac{1}{2}A^{-1}=-\frac{5}{2}A^{-1}$，有

$$原式=\left|-\frac{5}{2}A^{-1}\right|=(-\frac{5}{2})^3\frac{1}{|A|}=\frac{125}{16}.$$

98. **证** （1）因为$\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} BB^{-1} & O \\ O & CC^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}=E$，所以$A$可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

（2）将矩阵进行如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \vdots & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix},$$

则$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$. 又$B^{-1}=diag(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_{n-1}^{-1}),C^{-1}=(a_n^{-1})$，所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

99.（1）**解** $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以$R(A)=2$.

（2）**解** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$.

（3）**解**　$A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$.

（4）**解**　$A=\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-3&-5&0&-7\\0&4&9&1&13\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=3$.

100.（1）**解**　原式$=\begin{vmatrix}0&2&0&1\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1\\-1&2&1\\1&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\-3&2&1\\-1&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&2\\-1&3\end{vmatrix}=-7$

（2）**解**　原式$=\begin{vmatrix}0&0&3&0\\-3&2&2&3\\1&4&-3&4\\3&4&-4&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-3&2&3\\1&4&4\\3&4&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&14&15\\1&4&4\\0&6&6\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}14&15\\6&6\end{vmatrix}=18$.

（3）**解**　原式$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\a_2&0&\cdots&0&0\\0&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}&0\end{vmatrix}+a_n\begin{vmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix}a_2&0&\cdots&0\\0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}\end{vmatrix}+a_1a_2\cdots a_n$$

$$=-a_2a_3\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_n=a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1a_n-1).$$

（4）**解**　将行列式按第一行展开，得 $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$，则

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-2=1,$$

所以 $D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+(n-1)=n+1$.