一．单项选择题

1.C 2.B 3.C 4.A 5.B 6.C 7.D 8.B 9.B 10,A 11.A 12.B 13.C 14.D 15.B 16.B 17.C 18.C 19.D 20.D

二．填空

（1）A是三阶方阵且$|\ A\ |=3$，则$|\ -3A\ |=(-81)$。

（2）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=$(-2)$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$。

（4）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

（5）向量$\beta=[1,k,5]^T$能由$\alpha_1=[1,-3,2]^T$，$\alpha_2=[2,-1,1]^T$ 线性表示， 则$k=(-8)$。

（6）设 A 是三阶方阵且$R(A)=2$，而$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则$R(AB)=(2)$。

（7）如果二阶矩阵$A=\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ y & x \end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$相似，则$x=(-2)$，$y=(-1)$。

（8）矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的非零特征值是$(4)$。

（9）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-8x_2x_3$的矩阵为$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$。

（10）实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于零是 A 正定的(充要)条件。

（11）1

（12）0

（13）-2 或 5

（14）2

（15）$k(\alpha_1-\alpha_2)+\ \alpha_1$

（16）$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

（17）-81

（18）3

（19）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（20）$k\neq -2$

(21)$(1,1,0,2)^T+k(0,1,-1,-1)^T$

三．判断是非 （$5\times 2'=10'$，正确打勾，错误打叉）

（1）设矩阵A,B是同阶方阵， 则由$AB=O$, 可得$A=O$ 或 $B=O$。 （F）

（2）一组向量中含有零向量，则这组向量必定线性相关 。 （ T ）

（3）解线性方程组$AX=b$时，对增广矩阵$\bar{A}$既可以施行初等行变换，也可以施行初等列变换。 （ F ）

（4）实对称矩阵A满足$|A|>0$， 则A为正定矩阵。 （ F ）

（5）正交矩阵的行列式等于1或者－1。 （ T ）

四．计算题

1． 利用矩阵的初等行变换求矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&3&3\\1&3&4\end{bmatrix}$的逆矩阵。

解： $[A\mid E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&3&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]$……………………….2 分

$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right]$……………………..3 分

$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&2&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]$

$\xrightarrow{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&2&0\\0&-1&0&-5&2&1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]$

$\xrightarrow{(-1)r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&2&0\\0&1&0&5&-2&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]$…………………….5 分

$=[E\mid A^{-1}]$

所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-3&2&0\\5&-2&-1\\-3&1&1\end{bmatrix}$$……………………………….6 分

只要能正确显示行变换的过程都视为正确

2． 求下列向量组的一个极大线性无关组， 并把其余的向量用极大线性无关组线性表示。

$\alpha_1=[2,1,3,-1]^T,\ \alpha_2=[3,-1,2,0]^T,\ \alpha_3=[1,3,4,-2]^T,\ \alpha_4=[4,-3,1,1]^T.$

解：由这四个列向量组作矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$……………………………1 分

对矩阵 A 仅施行初等行变换

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_1,r_3-3r_1]{r_4+r_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}r_2]{\frac{1}{5}r_3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2,r_4+r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$………………………3 分

所以, $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(A)=2,$ ……………………..4 分

又显然 α_1,α_2线性无关，所以α_1,α_2是一个极大线性无关组，……………….5 分

且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$……………………………………………6 分

3．求下面非齐次线性方程组的通解。

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=3 \\ x_1+4x_2+5x_3+3x_4=5 \\ 2x_1+5x_2+8x_3+3x_4=7 \\ 3x_1+7x_2+11x_3+4x_4=10 \end{cases}$$

解：增广矩阵为

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

对$\bar{A}$施行初等行变换

$$\bar{A}\xrightarrow{r_2-r_1,r_3-2r_1,r_4-3r_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&2&2&2&2\\0&1&2&1&1\\0&1&2&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3,r_2-2r_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&0&-2&0&0\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&1&2&1&1\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-2r_2]{\frac{-1}{2}r_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$……………………………………………………………3 分

有$\begin{cases}x_1=1+x_4\\x_2=1-x_4\\x_3=0\end{cases}$ 令$x_4=0$得特解为$X_0=[1,1,0,0]^T$……………..4 分

由于 R(A)=3, 故所对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个解向量为$\xi=[1,-1,0,1]^T$…………………………………………………………………………….5 分

因此， 非齐次线性方程组的通解为$X_0+k\xi$ （k 取任意值）。…………………………6 分

4．设方阵$A=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}$， 求

（1）A的特征值和特征向量；

（2）A^{100}。

解：（1） A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\mid\lambda E-A\mid=\begin{bmatrix}\lambda-3&1\\1&\lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-2)$$

所以 A 的特征值为 4，2…………………………………………………..1 分

$\lambda_1=2$代入$(\lambda E-A)X=O$, 求得一个基础解系$\xi_1=[1,1]^T$, 从而得到对用于$\lambda_1=2$

的特征向量 $k\xi_1$ （$k \neq 0$）……………………………………………….2 分

$\lambda_2 = 4$代入$(\lambda E - A)X = O$, 求得一个基础解系$\xi_2 = [1, -1]^T$, 从而得到对用于$\lambda_2 = 4$的特征向量 $k\xi_2$ （$k \neq 0$）……………………………………………….3 分

（2）A 有两个线性无关的特征向量，因而 A 可以对角化，且存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$ …………………………4 分

其中$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 进一步求得$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

故 $A = P\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}P^{-1}$

所以

$$A^{100} = P\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{100}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 2^{99} + 2^{199} & 2^{99} - 2^{199} \\ 2^{99} - 2^{199} & 2^{99} + 2^{199} \end{bmatrix}$。…………………………………..6 分

（5）

$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ 1′

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$（二重）

$\lambda_1 = 1$ 代入 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 得基础解系 $\xi_1 = (1, 1, 1)^T$

$\therefore$ A的属于$\lambda_1 = 1$的所有特征向量为 $k_1\xi_1$ $k_1 \neq 0$ 2′

$\lambda_2 = 2$ 代入 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 得基础解系 $\xi_2 = (1, 1, 0)^T$ $\xi_3 = (1, 0, -3)^T$

$\therefore$ A的属于$\lambda_2 = 2$的所有特征向量为 $k_2\xi_2 + k_3\xi_3$, k_2, k_3不全为0. 2′

（6）

2、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+x_4^2$，a 取何值时 f 正定？

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ -1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 1′

$$\begin{cases} \Delta_1 = a > 0 \\ \Delta_2 = a^2-1 > 0 \\ \Delta_3 = a(a-1)(a+1) > 0. \\ \Delta_4 = \Delta_3 = a(a-1)(a+1) > 0 \end{cases}$$ 3′

∴ $a>1$ 时 f 正定. 1′

（7）

3、在欧氏空间 R^3 中，设有两组基：

(I):$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；(II):$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3$；设 α 在基(I)下的坐标为 $X=[1,1,1]^T$，求 α 在基(II)下的坐标；

基(I)到基(II)的过渡矩阵为 $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2′

设 α 在基(II)下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3)^T$ 1′

则有 $Y=M^{-1}X$ 1′

$(M\vdots X) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ 1′

∴ α 在基(II)下的坐标为 $(1,0,0)^T$ 1′

$[-1 \quad 1 \quad 0]$

（8）

4、判别矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 能否和对角矩阵相似。若与对角矩阵相似，求一个可逆矩阵

使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

$|\lambda E-A| = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+1)$

∴A有三个互异特征值为 $\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=2 \quad \lambda_3=3$ 2′

∴ A可对角化.

$\lambda_1=-1$ 代入 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(3,0,-1)^T$

$\lambda_2=2$ ⋯ $(\lambda_2E-A)X=0$ ⋯⋯ $\xi_2=(0,0,1)^T$

$\lambda_3=3$ ⋯ $(\lambda_3E-A)X=0$ ⋯⋯ $\xi_3=(1,4,1)^T$

令 $P=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为可逆阵 且 $P^{-1}AP = diag(-1,2,3)$ 3′

（9）

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大线性无关组. 3′

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4 \,\vdots\, \alpha_3) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore$ $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ 3′

（10）

$\because$ A, B 相似

$\therefore \begin{cases} trA = trB \\ |A| = |B| \end{cases}$ 2′

$\therefore \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ 2′

$\therefore \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$ 2′

（11）

$\because R(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = 2$ 1′

$\therefore |\beta_1\ \beta_2\ \beta_3| = -(a-3b) = 0$ 1′

$\therefore a = 3b$ 1′

$\because$ β_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

$\therefore |\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_3| = 2(b-5) = 0$ 1′

$\therefore b = 5$ 1′

$\therefore a = 15$ 1′

（12）

（1）对应于λ_1的特征向量；

（2）求A。

(1) 设对应于λ_1的特征向量为 $\xi=(x_1, x_2, x_3)^T$

$\because \xi \perp \xi_1 \quad \therefore -x_1+x_2+2x_3=0$ 2′

得基础解系 $\xi_2=(1,1,0)^T \quad \xi_3=(2,0,1)^T$

$\therefore$ 对应于λ_1的特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$ k_2, k_3不全为0. 2′

(2) 令 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 可逆.

则 $P^{-1}AP=diag(-2,1,1)$ 2′

$A=P\,diag(-2,1,1)\,P^{-1}$

其中 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 2′

$\therefore \quad A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ 2′

（13）

化为标准形，并写出正交线性替换。

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$ 1′

$|\lambda E-A|=(\lambda+7)(\lambda-2)^2$

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1=-7 \quad \lambda_2=2$ (二重) 1′

$\lambda_1=-7$ 代入 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(2,1,-1)^T$

$\lambda_2=2$ ··· $(\lambda_2E-A)X=0$ ······ $\xi_2=(2,-1,0)^T \quad \xi_3=(2,0,1)^T$ 2′

$\xi_2'=\xi_2=(2,-1,0)^T$

$\xi_3'=\xi_3-\frac{(\xi_3,\xi_2')}{(\xi_2',\xi_2')}\xi_2'=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)^T$ 1′

$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt6}(2,1,-1)^T$

$\eta_2=\frac{\xi_2'}{\|\xi_2'\|}=\frac{1}{\sqrt5}(2,-1,0)^T$

$\eta_3=\frac{\xi_3'}{\|\xi_3'\|}=\frac{1}{3\sqrt5}(2,4,5)^T$

$U=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5}\\ -\frac{1}{\sqrt6} & 0 & \frac{\sqrt5}{3}\end{pmatrix}$ 为正交阵. 3′

正交线性替换 $X=UY$. 1′

标准形 $-7y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$ 1′

（14）

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&4&3\\1&-1&3&-2&1\\2&1&3&5&5\\3&1&5&6&7\end{pmatrix} \qquad 1'$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&4&3\\0&1&-1&3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad 3'$$

$\therefore$ α_1, α_2 为一个极大无关组　　1′

（15）

$$f(A)=3A^2-2A+5E \qquad 1'$$

$$A^2=\begin{pmatrix}6&-9&7\\-3&7&4\\-1&4&8\end{pmatrix} \qquad 2'$$

$$\therefore f(A)=\begin{pmatrix}21&-23&15\\-13&34&10\\-9&22&25\end{pmatrix} \qquad 2'$$

（16）

$$(A+2E)X=(A+2E)(A-2E) \qquad 2'$$

$$|A+2E|=60\neq 0 \qquad 1'$$

$$\therefore X=A-2E$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\5&-3&0\end{pmatrix} \qquad 2'$$

（17）

求对应于 λ_2 的特征向量.

设对应于 λ_2 的特征向量为 $\xi=(x_1, x_2, x_3)^T$

则 $\xi \perp \xi_1$ 2′

即 $x_2+x_3=0$

得基础解系为 $\xi_2=(1,0,0)^T$ $\xi_3=(0,1,-1)^T$ 2′

$\therefore$ 对应于 λ_2 的特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$ (其中 k_2, k_3 不全为 0)

（18）

$\because$ A, B 相似

$\therefore \begin{cases} trA = trB \\ |A| = |B| \end{cases}$ 2′

即 $\begin{cases} x-y=-1 \\ 3x-4y=-8 \end{cases}$ 2′

$\therefore$ $x=4$ $y=5$ 2′

（19）

基(I)到基(II)的过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2′

1′

$X=PY$ $Y=P^{-1}X$

$(P \vdots X)=\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$ 2′

$\therefore$ $Y=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ 1′

（20）

(1) t为何值时，

$$\left|(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & t+2 & t \end{vmatrix} = 14(t-2) \qquad 2'$$

$t \neq 2$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关 $\quad 2'$

$t = 2$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关． $\quad 2'$

（21）

设 $A\xi = \lambda\xi \quad 1'$

即 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 2'$

∴ $\lambda = -1$

$a = -3 \quad 3'$

$b = 0$

（22）

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 3b & 1 \end{vmatrix} = -2b(a-1) \qquad 2'$$

$a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时 唯一解 $\quad 1'$

$a = 1$ 时 $\quad B = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 3b & 1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3-4b \end{array}\right) \quad 1'$

$a=1$，$b=\frac{3}{4}$ 时 无穷多解 $\quad 2'$

$$B \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

基础解系为 $(1, 4, -1)^T$

∴ 通解为 $k(1, 4, -1)^T$（其中 k 为任意常数．）$2'$

其它情形，方程组无解 $\quad 2'$

五、证明题

1、

令 $k_1\beta+k_2(A\beta)+k_3(A^2\beta)=0$. 1′

$A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$

$A^2\beta=A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3$

$\therefore\ k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)+k_3(\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3)=0$.

$(k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3)\alpha_1+(k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3)+(k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3)\alpha_3=0$.

$\because\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 1

$\therefore\ \begin{cases} k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3=0 \\ k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3=0 \\ k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3=0 \end{cases}$ 1′ 系数行列式 $=\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$

$\therefore\ k_1=k_2=k_3=0$ 1′ $\therefore\ \beta, A\beta, A^2\beta$

4、设向量组(I): $\beta_1=[0,1,-1]^T,\beta_2=[a,2,1]^T,\beta_3=[b,1,0]^T$ 及向量组(II): $\alpha_1=[1,2,-3]^T$,