A1 1

看黑圈

杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学 A1	考试日期	2019 年 1 月 14 日	成绩	
课程号	A0714201	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则下述结论正确的是（ B ）。

（A）函数 $f(x)$ 是无界函数； （B）函数 $f(x)$ 是偶函数；

（C）函数 $f(x)$ 在定义域内不连续； （D）函数 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 不可导

2. 已知 $y=\ln\sqrt{x}$，则函数的微分 $dy=$（ D ）。

（A）$\dfrac{1}{2}dx$； （B）$\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$； （C）$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$； （D）$\dfrac{1}{2x}dx$

3. 函数 $y=x^3+x+C$ 在 $[0,1]$ 上最多有（ C ）个零点。

（A）3； （B）2； （C）1； （D）0

4. 当 $x\to0$ 时，$x-\sin x$ 是关于 x^2 的（ D ）无穷小。

（A）等价； （B）低阶； （C）同阶非等价； （D）高阶

5. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，x_1 和 x_2 是区间 (a,b) 内任意两点，且 $x_1<x_2$，则至少存在一点 ξ，使得（ C ）。

（A）$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，其中 $a<\xi<b$；

（B）$f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$，其中 $x_1<\xi<b$；

（C）$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，其中 $x_1<\xi<x_2$；

（D）$f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$，其中 $a<\xi<x_2$

6. 微分方程 $xyy''-x(y')^3-y^4y+\sin x=0$ 的阶数是（ B ）。

（A）1 阶； （B）2 阶； （C）3 阶； （D）4 阶

7. 下列极限中能用洛必达法则求解的是（ C ）。

（A）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{x}$； （B）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$； （C）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$； （D）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

8. 下列反常积分中收敛的是（ A ）。

（A）$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$； （B）$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$； （C）$\int_1^{e}\dfrac{1}{(x-1)^2}dx$； （D）$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$

得分	

二、填空题（本题共 5 小题，每题 3 分，共 15 分）

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\ge0\end{cases}$，当 $a=$ 1 时，$f(x)$ 是连续函数。

10. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x$ 的通解为 $Ce^{-x^2}+2$。

11. 函数 $f(x)=e^{2x}-2x$ 的单调增区间是 $x>0$ 或 $(0,+\infty)$

12. 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}x^3\cos2x\,dx$ 的值是 0。

13. 函数 $y=3x^3-x$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值是 $-\dfrac{2}{9}$。

A1 2

得分	

三、简单计算题（共5小题，每题5分，共25分）

14. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}$ ······ 3'

$= e^{-2}$ ········ 2'

15. 求 $y = x\ln x$ 的二阶导数.

解 $y' = \ln x + 1$ ······ 2'

$y'' = \frac{1}{x}$ ······ 3'

16. 求曲线 $y=\sqrt[3]{(x-1)^5}$ 的凹凸区间和拐点.

解：$y' = \frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} = 0$，$x=1$

$y'' = \frac{10}{9}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$，

当 $x>1$ 时，$y''>0$，当 $x<1$ 时，$y''<0$ ······ 3'

∴ 凸区间 $(-\infty,1)$，凹区间 $(1,+\infty)$

当 $x=1$ 时 $y=0$，∴ 拐点 $(1,0)$ ······ 2'

17. 已知函数由参数方程 $\begin{cases} x=e^t\sin 2t, \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$. 〈改 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = ?$〉

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t\cos t - e^t\sin t}{e^t\sin 2t + 2e^t\cos 2t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2\cos 2t}$ ······ 3'

∴ 当 $t=0$ 时

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}$ ······ 2'

18. 求微分方程 $y''-5y'+6y=2e^x$ 的通解.

解 $r^2-5r+6=0$，$r_1=2$，$r_2=3$

齐次方程通解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ ······ 2'

由 $\lambda=1$ 不是特征根，设 $y^*=Ae^x$

代入原方程得 $A=1$.

∴ $y^*=e^x$.

∴ 原方程通解为

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+e^x$. ······ 3'

(A1) 3

得分	

四、综合计算题（共 3 小题，共 22 分）

19. [7 分] 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(2x)dx$.

解. $\int x f'(2x)dx = \frac{1}{2}\int x\, d f(2x)$

$= \frac{1}{2}\left[x f(2x) - \int f(2x)dx\right]$ …… 3'

由题意 $\int f(x)dx = \frac{\sin x}{x} + C$ 故

$f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, $\int f(2x)dx = \frac{1}{2}\int f(2x)d2x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2x} + C\right)$

$\therefore \int x f'(2x)dx = \frac{x\cos 2x - \sin 2x}{4x} \boxed{+C}$ …… 4'

20. [7 分] 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & x\ge 0\\ x+\cos x & x<0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

解 令 $t=x-1$，则 $x=0$ 时，$t=-1$，$x=2$ 时 $t=1$

$\int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 (t+\cos t)dt + \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ …… 5'

$= -\frac{1}{2} + \sin 1 + \frac{\pi}{4}$ ………… 2'.

21. [8 分] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 试求 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

解. 当 $x\le 0$ 时， $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$ …… 3'

当 $x>0$ 时,

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt$ …… 3'

$= 1-e^{-\frac{x}{5}}$ …… 2'

$\therefore \Phi(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{5}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$

A1 4.

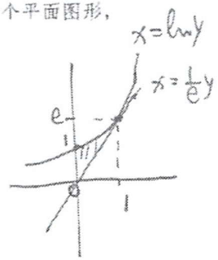
得分

五、应用计算题（本题9分）

22. 已知曲线为 $y=e^x$，曲线与其过原点的切线以及 y 轴围成一个平面图形，

（1）求曲线的过原点的切线方程；

（2）求此图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.



解 (1) 设切线方程为 $y=kx$，

则 $k=y'=e^x$.

$\begin{cases} y=e^x \\ y=e^x x \end{cases} \Rightarrow (1,e)$ 切点 …… 2'

$\therefore k=e$, …… 2'

切线方程为 $y=ex$.

(2). $V_y=\pi\int_0^e(\frac{1}{e}y)^2dy-\pi\int_1^e(\ln y)^2dy$ …… 3'

$=\frac{1}{3}\pi e-\pi(e-2)$ …… 2'

$=(2-\frac{2}{3}e)\pi$.

得分

六、证明题（本题5分）

23. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的导函数，且 $f(a)=f(b)=0$，试证明

$$\int_a^b|f(x)|dx\le\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\le x\le b}|f'(x)|.$$

证明：$\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx$ …… 1分

当 $a\le x\le\frac{a+b}{2}$ 时，

$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)\le\max_{a\le x\le b}|f'(x)|(x-a)$ …… 1分

当 $\frac{a+b}{2}<x\le b$ 时

$-f(x)=f(b)-f(x)=f'(\xi_2)(b-x)\le\max_{a\le x\le b}|f'(x)|(b-x)$

$\therefore\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^{\frac{a+b}{2}}|\max_{a\le x\le b}|f'(x)|(x-a)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|\max_{a\le x\le b}|f'(x)|(b-x)|dx$

$=\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx\right)$

$=\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\le x\le b}|f'(x)|$. …… 3分

杭州电子科技大学试卷分析表

考试学年学期 2018-2019-1

课程名称	高等数学 A1	课程类别		必修	学时	80
班 级 号	（2018-2019-1）A0714201				人数	2352
任课教师	周文祥、毕金钵等					
最高分	100	最低分	3		平均分 $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$	74.94
成绩分布	≥ 90	89 – 80	79 – 70	69 – 60	60 以下	标准差 σ（$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$）
	281	687	707	397	411	约
试卷内容覆盖教学大纲程度（%）	85%左右					
试卷总体难易程度	1．难 2．较难 √3．一般 4．较容易			期望平均分	75	
与往届同类班级比较（难度和成绩）	在保证全面考核的条件下，难度适当降低，平均成绩较好					
不足之处与改进性建议（先分析试题）	试题难度可适当向上调整，试卷控制好得分率					