线性代数期末样卷 1 解答

一. 1 .（C）； 2. (C) ; 3 .(A) ; 4 . (C) ; 5. (B);

二. 1. $\underline{\quad 2 \quad}$; 2. $\underline{3^k}$; 3 . $\underline{\ 0\ }$; 4. $\underline{\quad 3 \quad}$; 5 . $\underline{\ 3\ \ ,3\ \ ,-1\quad}$;

三. 1 . 解. $D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 32 & 1 & 4 & 5 \\ 13 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ （2 分）

$$=== \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 32 & 1 & 4 \\ 13 & 7 & 4 \end{vmatrix} === \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 20 & -19 & 0 \\ -19 & 6 & 0 \end{vmatrix} ===-241 .$$ （6 分）

2 . 解. $A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$. $A_1=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. $A_2=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $|A_1|\neq 0, |A_2|\neq 0.$（2 分）

A 可逆且 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$. （6 分）

3 .解. 令 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

$$[3,5,-6] = k_1[1,0,1] + k_2[1,1,1] + k_3[0,-1,-1].$$ （ 2 分）

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 3 \\ k_2 - k_3 = 5 \\ k_1 + k_2 - k_3 = -6 \end{cases} \qquad \bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$k_1=-11, k_2=14, k_3=9,$

$\beta = -11\alpha_1 + 14\alpha_2 + 9\alpha_3.$ (6 分)

四 . 1. 解. $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]M$ （2 分）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} M \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{bmatrix}\to\cdots\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$ （6 分）

2 .解。 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 所对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&t&1\\t&4&0\\1&0&2\end{bmatrix}$。 （2 分）

矩阵 A 的顺序主子式为 $\Delta_1=1\succ 0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=4-t^2\succ 0\Rightarrow -2\prec t\prec 2$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&t&1\\t&4&0\\1&0&2\end{vmatrix}=4-2t^2\succ 0\Rightarrow -\sqrt{2}\prec t\prec\sqrt{2}.$$ （4 分）

当 $-\sqrt{2}\prec t\prec\sqrt{2}$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定的。 （6 分）

五．解. $AB=A+B\Rightarrow(A-E)B=A$

$A-E=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow|A-E|\neq 0$. $A-E$ 可逆。$B=(A-E)^{-1}A$。 （4 分）

$$\begin{bmatrix}1&0&1&2&0&1\\0&2&0&0&3&0\\1&0&0&1&0&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&3/2&0\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}。$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3/2&0\\1&0&0\end{bmatrix}。$$ （8 分）

六. $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&4&-3&0\\3&2&1&10b\\0&1&a&-2\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&4&-3&0\\0&1&-1&-b\\0&0&a+1&-2+b\end{bmatrix}$ （3 分）

当 $a\neq -1,$ 时，$r(\overline{A})=r(A)=3,$ 惟一解。

当 $a=-1,b\neq 2$ 时，$r(\overline{A})=3, r(A)=2$。无解。

当 $a=-1,b=2$ 时。$r(\overline{A})=r(A)=2\prec 3$ 无穷多解。（9 分）

当 $a=-1,b=2$ 时。$\overline{A}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&1&8\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\begin{cases}x_1=8-t\\x_2=-2+t\\x_3=t\end{cases}$。t 为任意常数。$X=[8,-2,0]^T+[-1,1,1]t$ t 为任意常数。（12 分）

七. 解。 因为 A 与 B 相似。$|A|=|B|\Rightarrow x=y+2$。（2 分）

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-x&-2\\-3&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)((\lambda-x)(\lambda-1)-2)=0$。

A 有特征值 2，y，-1。 所以 $y=-2\Rightarrow x=0$.（4 分）

$\lambda_1=2:(2E-A)X=0$,解为：$k_1\xi_1=k_1[0,1,1,]^T,(k_1\neq 0)$

$\lambda_2=-2:(-2E-A)X=0$,解为：$k_2\xi_2=k_2[-1,0,1,]^T,(k_2\neq 0)$

$\lambda_3=-1:(-E-A)X=0$,解为：$k_3\xi_3=k_3[,0,-2,1,]^T,(k_3\neq 0)$（10 分）

则有 $P^{-1}AP=B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，取 $P=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&-2\\1&1&1\end{bmatrix}$。（12 分）

八. 1. 证。 $A^2-2A+E=-E\Rightarrow(A-E)(E-A)=E$（2 分）

$A-E$ 可逆，且 $(A-E)^{-1}=E-A$。（4 分）

2. 证：$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{bmatrix}$，$\overline{A}$ 为线性方程组的增广矩阵。（1 分）

$$\left|\bar{A}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

因为 a_1, a_2, a_3, a_4, 两两不相等。$\left|\bar{A}\right| \neq 0$ 。$r(\bar{A}) = 4, r(A) \leq 3, r(\bar{A}) \neq r(A)$

所以线性方程组无解。 （4 分）