一．单项选择题

（1）二阶行列式 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 等于（　　）

$(A)1$　　　$(B)0$　　　$(C)\cos 2\alpha$　　　(D)$\cos\alpha-\sin\alpha$

（2）已知 $f(x)=\begin{vmatrix} -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，则在$f(x)$中，一次项$x$的系数是（　　）

$(A)-1$　　　$(B)-4$　　　$(C)4$　　　$(D)2$

（3）设矩阵A,B是同阶方阵，下列各式中肯定正确的是（　　）

$(A)\mid A+B\mid=\mid A\mid+\mid B\mid$　　$(B)(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

$(C)(A+B)^T=A^T+B^T$　　$(D)(A+B)^*=A^*+B^*$

（4）设矩阵A满足$A^2-E=O$, 则必有（　　）

$(A)A=A^{-1}$　　　$(B)A=E$　　　$(C)\mid A\mid=1$　　　$(D)A=1$

(5) 设n阶矩阵 A 的秩为 r，　则（　　）

（A）A 的所有 r 阶子式不为零　　（B）A 的所有 r+1 阶子式全为零

（C）A 可逆　　（D）方程组 AX=b 一定有解

（6）在方程组$AX=b$中，若方程的个数小于未知量的个数，　则（）

（A）$AX=b$必有无穷多个解　　（B）$AX=O$必有无穷多个解

（C）$AX=O$仅有零解　　（D）$AX=b$一定无解

（7）设 A 为 n 阶方阵，且$R(A)=n-1$，α_1,α_2是$AX=b$的两个不同的解向量，则$AX=O$的通解为（ ）

（A）$k\alpha_1$　　（B）$k\alpha_2$

（C）$k(\alpha_1+\alpha_2)$　　（D）$k(\alpha_1-\alpha_2)$

（8）设 2 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵$(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$有一个特征值等于（ ）

$(A)\frac{4}{3}$　　$(B)\frac{3}{4}$　　$(C)\frac{1}{2}$　　$(D)\frac{1}{4}$

（9）特征多项式相同是两个矩阵相似的（ ）

（A）充分条件　（B）必要条件　（C）充要条件　（D）以上三者都不是

（10）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$的标准型是（　　）

（A）$y_1^2+3y_2^2$　　（B）$y_1^2-6y_2^2+2y_3^2$

（C）$y_1^2-y_2^2$　　（D）$y_1^2+4y_2^2+y_3^2$

（11）若向量组α，β线性相关，则( )

（A）α，β对应分量成比例　　（B）其中必有一零向量

（C）α，β一定是非零向量　　（D）α=kβ,k 是不为零的数

（12）设λ=2 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵（$\frac{1}{3}A^2$）$^{-1}$有一个特征值等于（）

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

（13）已知矩阵$\begin{bmatrix} 22 & 30 \\ -12 & x \end{bmatrix}$有一个特征向量$\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, 则 x=（ ）

（A）-12　　（B）-14　　（C）-16　　（D）-18

（14）若 A 为正交阵，则下列矩阵中不是正交阵的是（ ）

（A）A^{-1}　　（B）A^T　　（C）A^3　　（D）3A

（15）若方程组 AX=b 中，方程的个数小于未知量的个数，则有（ ）

（A）AX=b 必有无穷多解　　（B）AX=0 必有非零解

（C）AX=0 仅有零解　　（D）AX=0 一定无解

（16）设 A 为$m \times n$矩阵，B 为$n \times m$矩阵，则（）

（A）当 m>n 时，必有行列式|AB|$\neq 0$　　（B）当 m>n 时，必有行列式|AB|=0

（C）当 m<n 时，必有行列式|AB|$\neq 0$　　（D）当 m<n 时，必有行列式|AB|=0

（17）行列式D_1=$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，$D_2$=$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$，若$D_1 = D_2$，则 λ 的值为（ ）

（A）0，1　　（B）0，2　　（C）1，-1　　（D）2，-1

（18）设 A 时$m \times n$矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 A 的秩为 r，矩阵 B=AC 的秩为 r1，则

（A）r>r1　　(B)r<r2　　(C)r=r1　　(D)r 与 r1 的关系以 C 而定

（19）λ_1，λ_2是 n 阶矩阵 A 的互异特征值，x_1和x_2分别是对应于λ_1，λ_2的特征向量，当（）时，x=k_1x_1+k_2x_2必是矩阵 A 的特征向量

（A）k_1=0 且k_2=0　　（B）$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$

(C) $k_1k_2 = 0$　　（D）$k_1 \neq 0$而$k_2 = 0$

（20）如果 A，B 都是正定的 n 阶实对称矩阵，则 AB 一定是（）

（A）实对称矩阵　　（B）正交矩阵　　（C）正定矩阵　　（D）可逆矩阵

二．填空

（1）A是三阶方阵且$|A| = 3$，则$|-3A|$=＿＿＿。

（2）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=＿＿＿。

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$=＿＿＿＿。

（4）设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则$A^{-1}$=＿＿＿。

（5）向量$\beta = [1, k, 5]^T$能由$\alpha_1 = [1, -3, 2]^T$，$\alpha_2 = [2, -1, 1]^T$ 线性表示，则k=＿＿＿。

（6）设 A 是三阶方阵且$R(A)=2$，而$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则$R(AB)=$_____。

（7）如果二阶矩阵$A=\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ y & x \end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$相似，则$x=$_____，$y=$_____。

（8）矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的非零特征值是_____。

（9） 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-8x_2x_3$的矩阵为_____。

（10）实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于零是 A 正定的__________条件。

（11）设 A 为五阶方阵，秩（A）=4，A^*是 A 的伴随矩阵，则秩(A^*)=

（12）已知三阶方阵 A 的三个特征值分别为 1，2，3，则|A^2+2A-3E|=

（13）若向量组$\alpha_1=[1 \quad 1 \quad 2]^T$，$\alpha_2=[3 \quad t \quad 1]^T$，$\alpha_3=[0 \quad 2 \quad -t]^T$线性相关，则 t=

（14）设 A 是4×3矩阵，秩（A）=2，而 B=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则秩（AB）=

（15）设 A 是5×3矩阵，秩（A）=2，已知α_1，α_2是非齐次线性方程组 AX=b 的两个相异的解，则 AX=b 的通解为

（16）设 A=$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$A^{-1}$=

（17）设三阶方阵 A 的特征值为 1，-1，3，则行列式|3A|=

（18）设 A，B 为三阶方阵，且|A|=3，|B|=2，$|A^{-1}+B|$=2，则|A+B^{-1}|=

（19）二次型 f$(x_1,x_2,x_3)={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-2x_1x_2+2x_1x_3$的矩阵为

（20）已知$\alpha_1=(0,1,2)^T,\alpha_2=(1,0,3)^T$, $\alpha_3=(0,-1,k)^T$在 k_____时，α_1，α_2，α_3线性无关

（21）已知四元非齐次线性方程组 AX=b,R(A)=3, α_1,α_2是它的两个解向量，其中$\alpha_1=(1,1,0，2)^T$，$\alpha_2=(1,0,1,3)^T$,则该非齐次线性方程组的通解为

三．判断是非 （$5\times2'=10'$，正确打勾，错误打叉）

（1）设矩阵A,B是同阶方阵， 则由$AB=O$, 可得$A=O$ 或 $B=O$。 （）

（2）一组向量中含有零向量，则这组向量必定线性相关 。 （ ）

（3）解线性方程组$AX=b$时，对增广矩阵$\bar{A}$既可以施行初等行变换，也可以施行初等列变换。 （ ）

（4）实对称矩阵 A 满足$|A|>0$， 则 A 为正定矩阵。 （ ）

（5）正交矩阵的行列式等于 1 或者－1。　　（　）

四．计算题

1． 利用矩阵的初等行变换求矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&3&3\\1&3&4\end{bmatrix}$的逆矩阵。

2． 求下列向量组的一个极大线性无关组， 并把其余的向量用极大线性无关组线性表示。

$$\alpha_1=[2,1,3,-1]^T,\ \alpha_2=[3,-1,2,0]^T,\ \alpha_3=[1,3,4,-2]^T,\ \alpha_4=[4,-3,1,1]^T.$$

3．求下面非齐次线性方程组的通解。

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+x_4=3\\x_1+4x_2+5x_3+3x_4=5\\2x_1+5x_2+8x_3+3x_4=7\\3x_1+7x_2+11x_3+4x_4=10\end{cases}$$

4．设方阵$A=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}$， 求

（1） A的特征值和特征向量；

（2） A^{100}。

5.求矩阵 A=$\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$的特征值和特征向量

6.设实二次型 f(x_1,x_2,x_3,x_4)=a($x_1^2+x_2^2+x_3^2$)+$2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+x_4^2$,a 取何值时 f 正定？

7.在欧式空间R^3中，设有两组基：
（1）α_1，α_2，α_3　　（2）$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3$　设α 在基（1）下的坐标为 X=$[1,1,1]^T$,求α 在基（2）下的坐标

8.判别矩阵 A=$\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$能否和对角矩阵相似，若与对角矩阵相似，求一个可逆矩阵 P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵

9.设向量组$\alpha_1=[1,1,2]^T,\alpha_2=[0,2,1]^T,\alpha_3=[2,0,3]^T,\alpha_4=[1,1,0]^T$,求$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$的一个极大线性无关组，将其余向量用该极大线性无关组线性表示

10.设矩阵 A 与 B 相似，其中 A=$\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&x\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$,求 x 与 y 的值：

11、设向量组（1）$\beta_1=[0,1,-1]^T,\beta_2=[a,2,1]^T,\beta_3=[b,1,0]^T$ 及向量组（2）$\alpha_1=[1,2,-3]^T,\alpha_2=[3,0,1]^T,\alpha_3=[9,6,-7]^T$有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性表示，求 a,b 的值

12、设三阶实对称矩阵 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，λ_3=-2,对应于λ_3的特征向量$\xi_1=[-1,1,2]^T$，求（1）对应于λ_1的特征向量

（2）求 A

13、用正交线性替换将实二次型 f(x_1，x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4$x_1x_3+8x_2x_3$化为标准型，并写出正交线性替换。

14. 设向量组 $\alpha_1=(1,1,2,3)^T$， $\alpha_2=(1,-1,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,3,5)^T,\alpha_4=(4,-2,5,6)^T,\alpha_5=(3,1,5,7)^T$,求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4,\alpha_5$的一个极大线性无关组

15.设 f(x)=$3x^2-2x+5,A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$$,求f(A)$

16.已知 AX+4E=A^2-2X，其中 A=$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\5&-3&2\end{pmatrix}$，求 X

17.设三阶实对称矩阵 A 的特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$，对应于λ_1的特征向量为$\xi_1=(0,1,1)^T$,求对应于λ_2的特征向量

18.已知矩阵 A=$\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$与 B=$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&4\end{pmatrix}$相似，求 x 与 y 的值

19.在向量空间R^4中，设有两组基（1）：α_1，α_2，α_3，α_4和（2）2α_1+α_2，α_2+α_3，α_3+α_4，α_4，α 在基（1）下的坐标为 X=$(1,1,1,1)^T$,求 α 在基（2）下的坐标 Y

20.设α_1=$(1,1,1,3)^T$，α_2=$(-1,-3,5,1)^T$，α_3=$(3,2,-1,t+2)^T$,α_4=$(-2,-6,10,t)^T$
(1)t 为何值时，该向量组线性无关？
（2）t 为何值时，该向量组线性相关

21.已知ξ=$(2,2,-2)^T$是矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量，确定参数 a,b 及特征向量$\xi$所对应的特征值

22.问 a,b 为何值时，线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$有唯一解？无解？无穷多解？在有无穷多解的情况下，用基础解系表示全部解。

五、证明题

1.设 A 为三阶方阵，有 3 个不同的特征值λ_1，λ_2，λ_3，对应的特征向量分别为α_1，α_2，α_3，若 β $=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明 β，A β，$A^2\beta$线性无关