看黑圈

杭州电子科技大学学生考试卷（期末）A 卷

考试课程	高等数学 A1	考试日期	2021 年 01 月 22 日	成绩	
课程号	A0714201	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一 1-8	二 9-12	三 13-16	四 17-20	五 21	六 22
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题 （本题共 9 小题，每小题 3 分，共 27 分）

1. 若 $f(x)$ 在 x_0 的导函数 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0-\frac{1}{n})\right]=$（ B ）.

(A) $f'(x_0)$　(B) $2f'(x_0)$　(C) $3f'(x_0)$　(D) $4f'(x_0)$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有 $f''(x)>0$，则有不等式（ D ）成立.

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　(B) $f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　(D) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

3. 设 $f(x),g(x)$ 有连续导函数，则下列命题中，正确的命题一共有（A/B ）.

①若 $\int f(x)\,dx=g(x)$，则 $f(x)=g'(x)$；②若 $f'(x)=g(x)$，则 $f(x)=\int g(x)\,dx$；

③ $\int (f(x))'dx=f(x)$；④ $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$；⑤ $f(x)dx=d\left[\int f(x)dx\right]$

(A) 3 个　(B) 2 个　(C) 1 个　(D) 0 个

4. 设 $f(x)=\int_0^x \sin^2 t\,dt$，则当 $x\to 0$，$f(x)$ 是 x^2 的（ B ）无穷小.

(A) 等价　(B) 高阶　(C) 同阶，但非等价　(D) 低阶

5. 已知 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$，则 $f(x)=$（ A ）.

(A) $x-\frac{1}{2}x^2+C$　(B) $x+\frac{1}{2}x^2+C$　(C) $x^2+\frac{1}{2}x+C$　(D) $x^2-\frac{1}{2}x+C$

6. 关于反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^p}$ 敛散性下列结论正确的是（ B ）.

(A) $p<1$ 收敛　(B) $p>1$ 收敛　(C) $p\in R$ 都发散　(D) $p\in R$ 都收敛

7. 由 $y=e^x$，$y=e^{-x}$ 及 $x=1$ 所围成平面图区域的面积可表示为（ A ）.

(A) $\int_0^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx$　(B) $\int_0^e\left(e^x-e^{-x}\right)dx$　(C) $\int_{e^{-1}}^e(1-\ln y)\,dy$　(D) $2\int_{e^{-1}}^e(1-\ln y)\,dy$

8. 对数螺线 $\rho=e^\theta$（或记为 $\theta=\ln\rho$）相应于 θ 从 0 到 π 的弧长为（ C ）.

(A) $\sqrt{2}(\pi-1)$　(B) $2(e^\pi-1)$　(C) $\sqrt{2}(e^\pi-1)$　(D) $2(\pi-1)$

9. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt=f(x)-1$，则 $f(x)=$（ C ）.

(A) $y=2e^x$　(B) $y=e^{2x}$　(C) $y=e^x$　(D) $y=e^{x^2}$

得分	

二、填空题 （本题共 3 小题，每小题 3 分，共 9 分）

10. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\right)=$ __−1/3__.

11. $\int_{-2021}^{2021}\frac{x\sqrt{1+\sin^2 x}}{1+x^2}dx=$ __0__.

12. 已知 $f(x)=\begin{cases}1-\arctan\frac{1}{x}, & x<0,\\ a+e^{2\sqrt{x}}, & x\ge 0\end{cases}$ 是连续函数，则其中 $a=$ __π/2__.

高数 A1 答案：一 选择题　1.B　2.D　3.A/B　4.B　5.A　6.B　7.A　8.C　9.C

二 填空题　10 $-\dfrac{1}{3}$　11 0　12 $\dfrac{\pi}{2}$

得分	

三．计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

13．计算 $\int \dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x$．

解答：$\int \dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x = \int \dfrac{(2x-2)-1}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x = \int\left(\dfrac{(2x-2)}{x^2-2x+3}-\dfrac{1}{x^2-2x+3}\right)\mathrm{d}x$ —2 分

$= \int \dfrac{d(x^2-2x+3)}{x^2-2x+3} - \int \dfrac{1}{(x-1)^2+(\sqrt{2})^2}dx$ — 2 分

$= \ln(x^2-2x+3) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} + C$ — 2 分（找到一个原函数给 1 分）

或 令 $x-1=\sqrt{2}\tan t$ ⋯ 2分

原式 $=\frac{1}{\sqrt{2}}\int(2\sqrt{2}\tan t-1)dt$ ⋯ 2分

14．设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+\sin(xy)-\int_0^x e^t\mathrm{d}t=e$ 所确定，求 $y'(0)$．

解答：方程两边对 x 求导 ———— 1 分

$e^y\cdot y' + \cos(xy)(y+xy') - e^x = 0$ ———— 2 分

由于 $x=0$ 时，$y=1$， ———— 2 分

代入可得 $y'(0)=0$ ———— 1 分

15．已知 $\int \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x = x+C$，求 $\int \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$．

解答：求导 $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (x+C)'$， ——2 分

故 $f(x)=\sqrt{1+2x-x^2}$ ——2 分

$\int \dfrac{dx}{f(x)} = \int \dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = \int \dfrac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(x-1)^2}} = \arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+C$ ——2 分

16．求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x-y}$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解．

解答：法一 分离变量法

$e^y\mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x$， ———— 2 分

通解为 $e^y = e^x + C$ ———— 2 分

$y(0)=1$ 代入，得 $C=e-1$ ———— 1 分

特解 $e^y = e^x + e - 1$ ———— 1 分

法二 换元法 $x-y=u$ ———— 2 分

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1-e^u$ ———— 1 分

分离变量法 $\dfrac{\mathrm{d}u}{1-e^u} = \mathrm{d}x$ ———— 1 分

通解 $e^y = e^x + C$ ———— 1 分

特解 $e^y = e^x + e - 1$ ———— 1 分

得分	

四、综合题（本题共 4 小题，每小题 7 分，共 28 分）

17．求曲线 $f(x)=\int_0^{x^2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t)\,\mathrm{d}t$ 的凹凸区间和拐点.

解答：$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t)dt=(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2)(x^2)'=3x-x^3$ ----------1 分

$f''(x)=3(1-x^2)$ ----------1 分

令 $f''(x)=0\Rightarrow x=1和x=-1$ ----------1 分

$(-\infty,-1]$ 与 $[1,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的凸区间，$[-1,1]$ 是 $f(x)$ 的凹区间 ——2 分

$f(1)=f(-1)=\int_0^1(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t)dt=\frac{5}{4}$ ——————1 分

拐点为 $(-1,\frac{5}{4})$ 与 $(1,\frac{5}{4})$ ——————1 分

18．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{-2ax}=\int_{-\infty}^{a}xe^{2x}dx$，求常数 a.

解答：

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{-2ax}=e^{2a}$ —————— 2 分

$\int_{-\infty}^{a}xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}xde^{2x}$ —————— 1 分

$=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\Big|_{-\infty}^{a}-\int_{-\infty}^{a}e^{2x}dx\right]$ —————— 1 分

$=\frac{1}{2}\left[ae^{2a}-\frac{1}{2}e^{2a}\right]$ —————— 1 分

由 $e^{2a}=\frac{1}{2}\left[ae^{2a}-\frac{1}{2}e^{2a}\right]$ 得 $a=\frac{5}{2}$ —————— 2 分

19．求定积分 $\int_1^3 f(x-2)\,\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & x<0,\\ \frac{1}{1+\cos x}, & x\ge 0.\end{cases}$

解答：令 $x-2=t$

$\int_1^3 f(x-2)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t$ —————— 2 分（有换元思想给 1 分）

$=\int_{-1}^{0}te^{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{1}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$ ———— 2 分

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}e^{t^2}\,\mathrm{d}t^2+\int_0^1\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\mathrm{d}t$ ———— 1 分

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e+\tan\frac{1}{2}$ ———— 2 分

20．求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

解答：齐次方程 $y''-5y'+6y=0$ 的特征方程为 $r^2-5r+6=0$

有两个实根 $r_1=2,r_2=3$

齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ ----------3 分（算出两根就给 3 分）

$\lambda=2$ 是特征方程的单根，设原微分方程的解 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$ ----------2 分

带入所给方程，得 $-2b_0x+2b_0-b_1=x$，

比较两端系数，得 $\begin{cases}-2b_0=1\\ 2b_0-b_1=0\end{cases}\Rightarrow b_0=-\frac{1}{2},b_1=-1$

特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$ ----------1 分（算出系数就给 1 分）

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+(-\frac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$ ----------1 分

得分	

五、应用计算题（7分）

21．过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成的平面图形 D．试求：

（1）曲线 $y=\ln x$ 过坐标原点的切线方程；

（2）平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积．

解答：（1）设切点为 (x_0,y_0)，则

切线在该点的斜率为 $k=(\ln x)'\Big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$ ———— 1分

切线方程为 $Y=\dfrac{1}{x_0}X$ ———— 1分

又因为在该点处 $X=x_0$，$Y=\ln x_0$，

$\ln x_0=1$，得 $x_0=e$，$y_0=1$， ———— 1分

切线方程为 $y=\dfrac{x}{e}$ ———— 1分

（2）旋转体的体积

$V_y=\int_0^1\pi\left[(e^y)^2-(ey)^2\right]\mathrm{d}y$ ———— 2分

$=\pi\left(\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}e^2\right)$

$=\left(\dfrac{1}{6}e^2-\dfrac{1}{2}\right)\pi$ ———— 1分

得分	

六、证明题（5分）

22. 设 $a>0$，求证：$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x\ge\dfrac{\pi^3}{4}$.

证明：

由 $\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xa^{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x$

令 $t=\pi-x$，则

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)a^{\sin(\pi-t)}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\sin t}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}ta^{\sin t}\mathrm{d}t$ ——— 1分

比较上面两式，得

$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\sin x}\mathrm{d}x$ ———— 1分

再令 $u=\dfrac{\pi}{2}-x$，则

$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos u}\mathrm{d}u$， ———— 1分

代入题目中不等式左边，并利用柯西–施瓦茨不等式，得

$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x$

$\ge\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos x}\cdot a^{-\cos x}\mathrm{d}x\right)^2=\dfrac{\pi^3}{4}$ ———— 2分