选择题

①

DADCA BDA

②

DCDAD B

③

BCADB CDB

④

BABDC D

⑤

BCABD B

⑥

BACBB CDA

⑦

BCAC

填空题

①

得分	

一、　填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 不定积分 $\int(x-\sin x)dx=$ $\frac{1}{2}x^2+\cos x+C$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\arcsin(\frac{\tan x}{2x}), & x<0\\ a, \ x\ge 0\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\pi/6$.

3. 若积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 收敛，则 q 的取值范围是 $q<1$.

4. 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt$，则 $f'(\frac{\pi}{4})=$ $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

5. 微分方程 $y'x=y\ln y$ 满足 $y(1)=e^{-2}$ 的特解为 $y=e^{-2x}$.

6. 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)=$ $1/3$.

②

得分	

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 设 $y=e^{x\sin x}$，则 y 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的微分等于 $e^{\frac{\pi}{2}}dx$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-x)}{2x}, & x<0\\ a+e^{2x}, & x\ge 0\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $-\frac{3}{2}$.

3. 不定积分 $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx=$ $-\sin\frac{1}{x}+C$.

4. 微分方程 $y''+\frac{1}{x}y'-x=0$ 的通解为 $\frac{1}{9}x^3+C_1\ln|x|+C_2$

③

1. 平面 $\Pi_1: x-y+2z-6=0$ 和平面 $\Pi_2: 2x+y+z-5=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ；

2. 设 L 是从 $A(1,\frac{1}{2})$ 沿曲线 $2y=x^2$ 到 $B(2,2)$ 的弧段，则 $\int_L\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy=$ 0 ；

3. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2x\}$，则 $\iint_D(1+2y)dxdy=$ π ；

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 在 $(0,\pi)$ 内的和函数为 $S(x)=1+x$，则此级数在 $x=3\pi$ 处收敛于 0 .

④

1. 2　2. $4\cdot e^{-2}$　3. $-3+C\cdot e^{-\cos x}$

4. 2　5. $-(x+1)+(e+1)\cdot e^{x}$.

⑤

得分	

1. 函数 $y=x+2\cos x$ 在闭区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值是 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

2. 函数 $y=\ln(4-x^2)$ 的单调减少区间是 $[0,2)$.

3. 微分方程 $(x+1)y'-2y=0$ 的满足 $y(1)=\frac{1}{4}$ 的特解是 $\frac{1}{16}(x+1)^2$.

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)\sin x dx=$ 2 .

⑥

1. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+\sin x}{x}=2$，则 $a=$ 2 .

2. 设 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，则 $dy=$ $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

3. $\int(e^{-2x}+1)dx=$ $-\frac{1}{2}e^{-2x}+x+c$.

4. 微分方程 $y'x=y$ 满足 $y(1)=3$ 的特解为 $y=3x$.

5.设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{2x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $e^{\frac{1}{2}}$.

6. $y=\ln(1-x)$ 的带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林表达式为 $-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots-\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$.

⑦

1. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

2. $\int_{-1}^{1}x\left(1+x^{2005}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)dx=\frac{4}{e}$.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=x$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=e-1$.

$\int_1^y e^{-t^2}dt=0$. $y=1$

$e^{-(x+y)^2}\cdot(1+y')=1$

$x=0$

$y'=e^{(x+y)^2}-1$

$=e^{y^2}-1$

$=e-1$

4. 设 $f(x)$ 可导，且 $\int_1^x tf(t)dt=f(x)$，$f(0)=1$，则 $f(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}$.

5. 微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

计算题

①

三、计算题（共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

得分	

1．设 $y = e^{2x} - \ln\cot x$，求 dy.

$$y' = 2e^{2x} - \frac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)$$

$$= 2e^{2x} + \frac{1}{\cos x\cdot\sin x}$$

$$\therefore dy = \left(2e^{2x} + \frac{1}{\cos x\cdot\sin x}\right)dx$$

得分	

2． $y = \arctan x + x\ln\sqrt{x}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1}$ 的值

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} + \ln\sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+x)^2} + \frac{1}{2x}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

得分	

3. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-k}{x}\right)^{-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2}{x}$，求 k 的值.

右边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2$.

左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{k}}\right)^{-\frac{x}{k}\cdot\left(\overset{2k}{\frac{k}{x}\cdot 2x}\right)}=e^{2k}$

$\therefore\ e^{2k}=2 \quad\Rightarrow k=\frac{1}{2}\ln 2$

得分	

4. 求函数 $f(x)=(x-2)^2\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

$f(x)=(x-2)^2x^{2/3}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=2(x-2)x^{2/3}+\frac{2}{3}(x-2)^2\cdot x^{-1/3}=\frac{4}{3}\cdot\dfrac{(x-2)(2x-1)}{\sqrt[3]{x}}$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1/2$、 or $x=2$

x	$(-\infty,0)$	$(0,1/2)$	$1/2$	$(1/2,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↘	↗		↘		↗

$\therefore$ 极大值 $f(1/2)=\frac{9}{8}\sqrt[3]{2}$

极小值 $\begin{cases}f(0)=0\\ f(2)=0\end{cases}$

得分	

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln\sin x$，求 $\int xf(1-x^2)dx$.

由已知. $d\ln\sin x = f(x)dx$ ∴

$$\int xf(1-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\,d(1-x^2) \xlongequal{1-x^2=t} -\frac{1}{2}\int f(t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\sin t + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\sin(1-x^2) + C$$

得分	

6. 计算 $\int_0^2 (1+\frac{x}{2})\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

∵ $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$ ∴ 令 $x-1=t$.

原积分 $= \int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}+\frac{t}{2})\sqrt{1-t^2}\,dt$

$= 3\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$

$= 3\cdot\frac{1}{4}\pi$

得分	

四、[本题 10 分]

1. [4 分]方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\cos x$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $y'(0)$.

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^2y'-\sin x$$

$x=0$ 时 $\ln y=1 \Rightarrow y=e$

$\therefore y'(0)=0$

2. [6 分] 求微分方程 $y''+2y'-3y=xe^{-3x}$ 的通解.

① $r^2+2r-3=0 \Rightarrow (r+3)(r-1)=0 \Rightarrow r_1=1.\ r_2=-3$

$\therefore \quad Y=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}$

② $m=1.\ \lambda=-3$

令特解 $y^*=(ax+b)\cdot x e^{-3x}=(ax^2+bx)e^{-3x}$

$y^{*\prime}=[-3ax^2+(2a-3b)x+b]e^{-3x}$

$y^{*\prime\prime}=[9ax^2+(-12a+9b)x+(2a-6b)]e^{-3x}$

代入得. $a=-1/8 \quad b=1/16 \qquad \therefore y^*=\frac{x}{16}(-2x+1)e^{-3x}$

③ 通解 $y=\frac{x}{16}(-2x+1)e^{-3x}+C_1e^{x}+C_2e^{-3x}$

②

三、小型计算题（共 3 小题，每小题 4 分，共 12 分）

得分	

1. 求曲线 $y=2\ln x+x^2+3$ 平行于直线 $y=4x+1$ 的切线方程

解 $y'=\frac{2}{x}+2x$

$k_{切}=y'=\frac{2}{x}+2x=4 \quad x=1$ 2'

切点 $M_0(1,4)$

切线方程 $y-4=4(x-1)$ …… 2'

即 $4x-y=0$

得分	

2. 隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 确定，求 $y'(0)$.

解 在 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 两边同时求x导数

$e^x-e^y y'=\cos(xy)(y+xy')$ (1) 2'

又∵ $x=0 \quad y=0$ (2) 1'

代入(1) 解 $y'(0)=1$ 1'

得分	

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}$ 1'

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}$ 1'

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}}$ 1'

$=e^4$ 1'

四、计算题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

得分	

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{ctg}\,x}{-4(\pi-2x)}$ 2'

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\csc^2x}{8}$ 2'

$=-\frac{1}{8}$ 1'

得分	

2. $y=\cos\frac{x^2}{1+x}$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$ 的值.

解 $y'=-\sin\frac{x^2}{1+x}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x}\right)'$ 　　2'

$=-\sin\frac{x^2}{1+x}\ \frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$ 　　2'

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=-\frac{3}{4}\sin\frac{1}{2}$ 　　1'

得分	

3. 求曲线 $y=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的凹凸区间和拐点.

解 $y'=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$

$y''=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2x+1}{3x\sqrt[3]{x}}$ ---2'

令 $y''=0$. $x=-\frac{1}{2}$ 　 $y''\big|_{x=0}$ 不存在

$x<-\frac{1}{2}$ 　 $y''<0$ 　 $\therefore (-\infty,-\frac{1}{2}]$ 为 y 凸区间 　2'

$x>-\frac{1}{2}$ 且 $x\neq0$ 　 $y''>0$ 　 $[-\frac{1}{2},+\infty)$ 为 y 凹区间 　1'

$M(-\frac{1}{2},\frac{18}{5}(-\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}})$ 为拐点 　1

得分	

4. 求定积分 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 令 $x=a\sin t$. $x=0$. $t=0$; $x=a$. $t=\frac{\pi}{2}$ 　1'

$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt$ — 2'

$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,d2t$ 　1'

$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2u\,du$ 　1

$=\frac{a^4}{16}[u-\frac{1}{2}\sin u]_0^{\pi}$ 　1

$=\frac{\pi a^4}{16}.$ 　1'

五、计算题（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）.

得分	

1. 求定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx$.

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)\, d(2+x)^{-1}$ ……1′

$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2+x}\, d\ln(1+x)\right]$ 2′

$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}\, dx$

$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}\right)dx$ ……1

$= -\frac{\ln 2}{3} + \ln(1+x)\Big|_0^1 - \ln(2+x)\Big|_0^1$ 1′

$= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3$ ……1′

得分	

2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，且满足 $\int_0^x tf(x-t)dt = e^{2x} - 2x - 1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 $\because \int_0^x t f(x-t)\,dt \xlongequal{x-t=u} \int_0^x (x-u)f(u)\,du$

$= x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du$ ……3′

∴ 已知等式改写为

$x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du = e^{2x} - 2x - 1$ ……1′

$\int_0^x f(u)\,du = 2e^{2x} - 2$ 1′

$f(x) = 4e^{2x}$ 1′

六、(共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分).

得分	

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，问 a 取何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ··1'

$a=f(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(e^{4x^2}-1)2}{2x}=0$ ·2'

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^3}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{(e^{4x^2}-1)\cdot 2}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^2\cdot 2}{3x^2}=\dfrac{8}{3}$ 3'

得分	

2. 求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ (1)

特征方程 $r^2-3r+2=0$ (2)

$r_1=+1$, $r_2=+2$

$Y=C_1e^{+x}+C_2e^{+2x}$ 为 (1) 通解 3'

$\because xe^{2x}$ 具有 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 形式 且 $\lambda=2$ 为

r^2-3r+2 单根 ··1'

$\therefore$ 设 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$

将 y^* $y^{*\prime}$ $y^{*\prime\prime}$ 代入方程 $a=\frac{1}{2}$ $b=-1$ ·1'

$y^*=(\frac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$

故 原方程通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+(\frac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$ ·1'

③

三、试解下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

得分	

1. 设 $f(x,y)=x\ln(x+\ln y)$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=\ln(x+\ln y)+\frac{x}{x+\ln y}$ ……3'

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{y(x+\ln y)}$ ……3'

得分	

2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$ 的敛散性，并给出理由（若是收敛，要说明是条件收敛还是绝对收敛）。

解 $\because \left|\frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}\right|\leq\frac{1}{n^{3/2}}$ ……… 2'

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛 1'

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}\right|$ 收敛 ---- 1'

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$ 收敛，且为绝对收敛 2'

3. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由曲线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域

解：D_Y：$-1\le y\le 2$，$y^2\le x\le y+2$ ... $2'$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}xydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left[y(y+2)^2-y^5\right]dy \quad 2'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{45}{8}=\frac{135}{24} \quad 2'$$

4. 立体 Ω 由曲面 $x^2+y^2=4z$ 和平面 $z=4$ 所围成，求其表面积。

解 Ω 表面可分 $\Sigma_上$ $\Sigma_下$ 两部分

$\Sigma_上$ 面积 $S_1=\pi 4^2=16\pi$ ... $1'$

$\Sigma_下$ 方程 $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$

$\Sigma_下$ 面积 $S_2=\iint\limits_{x^2+y^2\le16}\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2}\,dxdy$ ... $2'$

$$=\iint\limits_{\substack{0\le\theta\le2\pi\\0\le\rho\le4}}\sqrt{1+\frac{1}{4}\rho^2}\,\rho d\rho d\theta$$

$$=2\pi\cdot2\int_0^4\left(1+\frac{1}{4}\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{1}{4}\rho^2\right)$$

$$=\frac{8\pi}{3}(5\sqrt5-1) \quad 2'$$

$$S_总=S_1+S_2=\frac{40\pi}{3}(\sqrt5+1) \quad 1'$$

得分	

5. 求 $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}dx$.

解 原式 $= \iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$

$= \iint_D e^{\rho^2}\rho d\rho d\theta$ ---2'

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho$ --2'

$= \frac{\pi}{4}\left[e^{\rho^2}\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{4}(e-1)$ --2'

得分	

6. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域和它的和函数.

解 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. $R=1$ 1'

$x\in(-1,1)$ 级数绝对收敛

$x=\pm1$ $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(\pm1)^n$ 发散 3'

∴ 级数收敛域 $C=(-1,1)$ ---

令和函数 $S(x)$, 则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ --1'

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n + x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (n+1)x^n dx\right)' + x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx\right)'$

$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)' + x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$

$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)' + x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'$ 2'

$=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^2}$

④

无

⑤

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

原式$=\lim\limits_{x\to1}\frac{lnx-x+1}{(x-1)lnx}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{lnx+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{xlnx+x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{lnx+2}=-\frac{1}{2}$$

2. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y=y\sin x+1$ 所确定，求 $y'(0)$.

设$e^y=ysinx+1$ ①

方程$e^y=ysinx+1$两边对x求导有

$e^y\cdot y'=y'\cdot sinx+ycosx$ ②

将$x=0$代入①有$y(0)=0$

$y(0)=0$代入②得$y'(0)=0$

3. 求 $f(x)=2x^2-\ln x$ 的极值.

函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$

$f'(x)=4x-\frac{1}{x}$

$f''(x)=4+\frac{1}{x^2}$

令$f'(x)=0$ => $x_1=\frac{1}{2},x_2=-\frac{1}{2}$(舍去)

$\because f''\left(\frac{1}{2}\right)=8>0$ $\therefore x_1=\frac{1}{2}$为$f(x)$的极小值点

$f(x)$的极小值为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+ln2$

$f''(x)=4+\frac{1}{x^2}$，$f(x)$无极大值

4. 求曲线 $\begin{cases}x=1+t^2\\y=t^3\end{cases}$ 在 $t=2$ 对应点处的切线方程.

$t=2$对应点为$M_0(5,8)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$

$K=\frac{dy}{dx}|_{M_0}=3$

所求切线方程为$y-8=3(x-5)$，即$y=3x-7$

分

5. 求微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解.

方程对应的特征方程为$r^2-4r+4=0$，其根为$r_1=r_2=2$

$\therefore y_1=e^{2x},y_2=xe^{2x}$

原方程通解为$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=e^{2x}(C_1+C_2x)$

6. 设$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-k}{x})^{-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2}{x}$，求$k$的值.

左$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{-k}{x})^{\frac{-k}{x}}]^{2k}=e^{2k}$

右$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot 2=2$

$\therefore e^{2k}=2$，即$k=\frac{ln2}{2}$

1. 求不定积分$\int x(1+\cos 2x)dx$.

$$\int x(1+cos2x)dx=\int xdx+\int xcos2xdx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int xdsin2x$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(xsin2x-\int sin2xdx)$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}xsin2x+\frac{1}{4}cos2x+c$$

分

2. 计算$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

令$x=tant,dx=sec^2tdt\quad x:1\to\sqrt{3}$

则$t:\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{3}$

$$\therefore I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{sec^2tdt}{tan^2t\cdot sect}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{costdt}{sin^2t}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dsint}{sin^2t}=-\frac{1}{sint}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

得分	

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0 \sin 2tdt}{x} & x>0\\ a+e^x & x\le 0\end{cases}$，(1) 当$a$取何值$f(x)$在$x=0$处连续？(2) $f(x)$在$x=0$是否可导？

①$f(x)$在$x=0$连续 $<=> f(0-0)=f(0+0)=f(0)$

由$f(0)=f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+e^x)=a+1$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x sin2tdt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{1}=0$$

$\therefore a+1=0 => a=-1$

②$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\int_0^x sin2tdt}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x sin2tdt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}=1$$

$\therefore f'_+(0)=f'_-(0)=1 => f'(0)=1$

得分	

2. $f(x)$在闭区间$[0,1]$连续，证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$，并由此计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$的值.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}-t}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(cost)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cost)dt$$

由上面的结果可知$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^3x}{sinx+cosx}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3x}{sinx+cosx}dx$

从而$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^3x}{sinx+cosx}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^3x+cos^3x}{sinx+cosx}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^2x-sinxcosx+cos^2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-sinxcosx)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{sin^2x}{2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{4}$$

⑥

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-cosx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cosx}$$

$$=2$$

2. 设$y=\ln\sqrt{4-x^2}$，求$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$的值.

$$y=\frac{1}{2}\ln(4-x^2)$$

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{4-x^2}(4-x^2)'=\frac{-x}{4-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=-\frac{1}{3}$$

3. 求函数$f(x)=x^2+\frac{1}{4x}$的极值.

$f'(x)=2x-\frac{1}{4x^2}\quad f''(x)=2+\frac{1}{2x^3}$

令$f'(x)=0$得$x=\frac{1}{2}$为$f(x)$驻点

$\because f''\left(\frac{1}{2}\right)=6>0$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$为 $f(x)$的极小值，$f(x)$无极大值

4. 已知$\begin{cases}x=e^{-t}\cos t\\ y=e^{-t}\sin t\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$.

$x_t=e^{-t}(-cost-sint)$

$y_t=e^{-t}(cost-sint)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t}{x_t}=\frac{sint-cost}{sint+cost}$

5. 求$\int \arcsin xdx$.

$\int arcsinxdx=xarcsinx-\int xdarcsinx$

$=xarcsinx-\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=xarcsinx+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$

$=xarcsinx+\sqrt{1-x^2}+c$

6. 计算$I=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

$x=2sint\quad dx=2costdt$

$x=0\ \ t=0;x=2\ \ t=\frac{\pi}{2}$

$I=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}16sin^2tcos^2tdt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2 2tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos4t)dt$

$=2[t-\frac{1}{4}sin4t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$

1. [4 分]方程 $xy+e^{y^2}-x=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程.

在$xy+e^{y^2}-x=0$两边对 x 求导

$y+xy'+e^{y^2}2yy'-1=0$

$y'|_{(1,0)}=1$

切线方程: $y=x-1$

2. [6 分] 求微分方程 $y''+5y'-6y=xe^{-2x}$ 的通解.

$y''+5y'-6y=0$ (1)

$r^2+5r-6=0$ (2)

$r_1=-6, r_2=1$

$Y=C_1e^{-6x}+C_2e^{x}$为(1)的通解

$\because x=-2$不是$r^2+5r-6=0$根

$\therefore$原方程特解可设为$y^*=(ax+b)e^{-2x}$

将$y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$代入原方程整理得

$-12ax+a-12b=x \quad => \quad a=-\frac{1}{12}, b=-\frac{1}{144}$

$y^*=(-\frac{1}{12}x-\frac{1}{144})e^{-2x}$

故原方程通解为$y=y^*+Y$

即$y=C_1e^{-6x}+C_2e^{x}-(\frac{1}{12}x+\frac{1}{144})e^{-2x}$

⑦

1．计算定积分 $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx$．

解： 设 $x^2 = t$，则 $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} t e^{-t} dt = -\frac{1}{2}\int_0^2 t de^{-t}$ -------2

$= -\frac{1}{2}\left[te^{-t}\Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-t} dt \right]$ -------2

$= -e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-t}\Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-2}$ --------2

2．计算不定积分 $\int \frac{x\sin x}{\cos^5 x} dx$．

解： $\int \frac{x\sin x}{\cos^5 x} dx = \frac{1}{4}\int x d(\frac{1}{\cos^4 x}) = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{\cos^4 x} - \int \frac{dx}{\cos^4 x} \right]$ --------3

$= \frac{x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{4}\int (\tan^2 x + 1) d\tan x$

$= \frac{x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{12}\tan^3 x - \frac{1}{4}\tan x + C$ -----------3

3．求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线的方程.

解：切点为 $(a(\frac{\pi}{2} - 1),\ \ a)$ -------2

$k = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$ -------2

切线方程为 $y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)$ 即 $y = x + (2 - \frac{\pi}{2})a$． -------2

4．设 $F(x) = \int_0^x \cos(x^2 - t) dt$，则 $F'(x) = 2x\cos x^2 - (2x - 1)\cos(x^2 - x)$．

5．设 $x_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}}{n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$．

解： $\ln x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{i}{n})$ ---------2

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{i}{n})\frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1 + x) dx$ --------------2

$= x\ln(1 + x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{1 + x} dx = 2\ln 2 - 1$ ------------2

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$

应用题

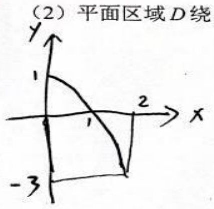
①

五、应用题[本题 7 分]

已知平面区域 D 由抛物线 $y=1-x^2$ 和 x 轴、y 轴及直线 $x=2$ 围成，

试求（1）平面区域 D 的面积；　$x=\sqrt{1-y}$　$x^2=1-y$

（2）平面区域 D 绕 y 轴旋转一周生成的旋转体的体积.



(1) $D=\int_0^1 1-x^2dx-\int_1^2 1-x^2dx=2$

(2) $V=\int_0^1\pi x^2dy+\left[\pi\cdot 2^2\cdot 3-\int_{-3}^0\pi x^2dy\right]$

$=\int_0^1\pi(1-y)dy+12\pi-\int_{-3}^0\pi(1-y)dy$

$=\pi\left[1-\frac{1}{2}+12-(3+\frac{9}{2})\right]$

$=5\pi$

②

七、应用题[本题 9 分]

已知平面区域 D 由抛物线 $y=1-x^2$ 及其在点 $(1,0)$ 处的切线和 y 轴围成，试求（1）平面区域 D 的面积；

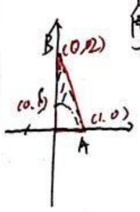
（2）平面区域 D 分别绕 x 轴、y 轴旋转一周生成的旋转体的体积.

解　切求 $y=1-x^2$ 在 $(1,0)$ 处切线方程　$y'=-2x|_{x=1}=-2$

$y-0=-2(x-1)$　即 $y=-2x+2$　3'

$x=1-\frac{y}{2}$

$x=\sqrt{1-y}$



(1) D 的面积，$S=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

D 绕 x 轴旋转生成的旋转体体积

$V_{x轴}=\int_0^1\left[\pi(-2x+2)^2-\pi(1-x^2)^2\right]dx$　2'

$=\pi\int_0^1(-x^4+6x^2-8x+3)dx$　3

$=\pi\left[-\frac{1}{5}x^5+2x^3-4x^2+3x\right]_0^1$

$=\frac{4}{5}\pi$　1'

$V_1=\frac{4}{3}\pi$

$V_2=\frac{8}{15}\pi$

$V_x=V_1-V_2=\frac{4}{5}\pi$

D 绕 y 轴旋转生成的旋转体体积

$V_y=\int_0^1 2\pi x(-2x+2-1+x^2)dx$　2'

$=2\pi\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx$　3

$=2\pi\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{\pi}{6}$.　1'

$V_y=\pi\int_0^2(1-\frac{y}{2})^2dy-\pi\int_0^1 1-y\,dy$

$=\pi(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{6}\pi$.

③

四、应用题[本题共15分]

得分	

1.（5分）求曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=3t-1$ 上一点处与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程。

解 $\vec{T}=(x_t', y_t', z_t')=(1,-2t,3)$ 2'

$\vec{n}=(1,2,1)$

由已知 $\vec{T}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{T}\cdot\vec{n}=0$ $t=1$

切点 $M_0(1,-1,2)$ $\vec{T}|_{M_0}=(1,-2,3)$ 2'

切线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ 1'

2.（10分）设曲面 S：$\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 和平面 π：$2x+2y+z+5=0$。

（1） 试求曲面 S 上平行于平面 π 的切平面方程；

（2） 试求曲面 S 和平面 π 之间的最短距离。

解 曲面S在其上点 $M(x,y,z)$ 处法向量 $\vec{n}=(x,2y,\frac{z}{2})$ 1'

已知平面π法向量 $\vec{n_0}=(2,2,1)$ 1'

由已知条件 $\vec{n}\parallel\vec{n_0} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{\frac{z}{2}}{1}=t$ 2'

$x=2t$, $y=t$, $z=2t$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 中 $t=\pm\frac{1}{2}$ 1'

$t=\frac{1}{2}$ $M_1(1,\frac{1}{2},1)$ 切平面π_1 $2(x-1)+2(y-\frac{1}{2})+(z-1)=0$

$t=-\frac{1}{2}$ $M_2(-1,-\frac{1}{2},-1)$ 切平面π_2 $2(x+1)+2(y+\frac{1}{2})+(z+1)=0$ 2'

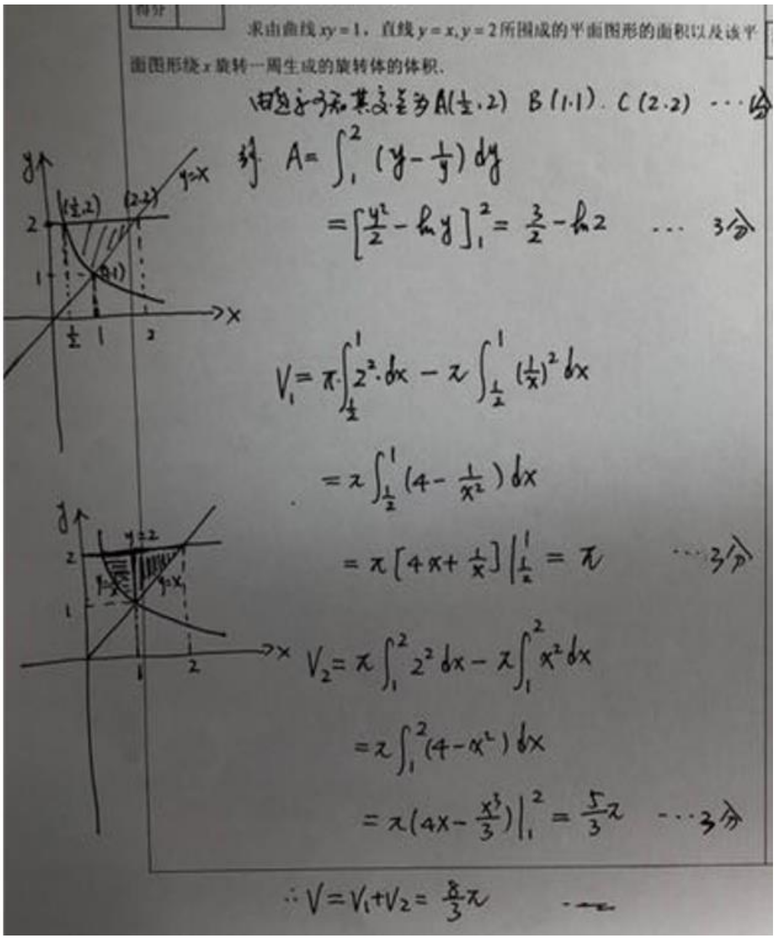
M_1, M_2 到已知平面π的距离分别为

$$d_1=\frac{|2x+2y+z+5|}{3}\Big|_{M_1}=\frac{9}{3}=3$$

$$d_2=\frac{|2x+2y+z+5|}{3}\Big|_{M_2}=\frac{1}{3}$$

因此曲面S和平面π最短距离 $d_{min}=\frac{1}{3}$ 3'

④



求由曲线 $xy=1$，直线 $y=x, y=2$ 所围成的平面图形的面积以及该平面图形绕 x 旋转一周生成的旋转体的体积.

由题意可知其交点为 $A(\frac{1}{2},2)$ $B(1,1)$. $C(2,2)$ ··· 分

解 $A=\int_1^2 (y-\frac{1}{y})\,dy$

$=[\frac{y^2}{2}-\ln y]_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2$ ··· 3分

$V_1=\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 2^2\,dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 (\frac{1}{x})^2\,dx$

$=\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 (4-\frac{1}{x^2})\,dx$

$=\pi[4x+\frac{1}{x}]\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\pi$ ···3分

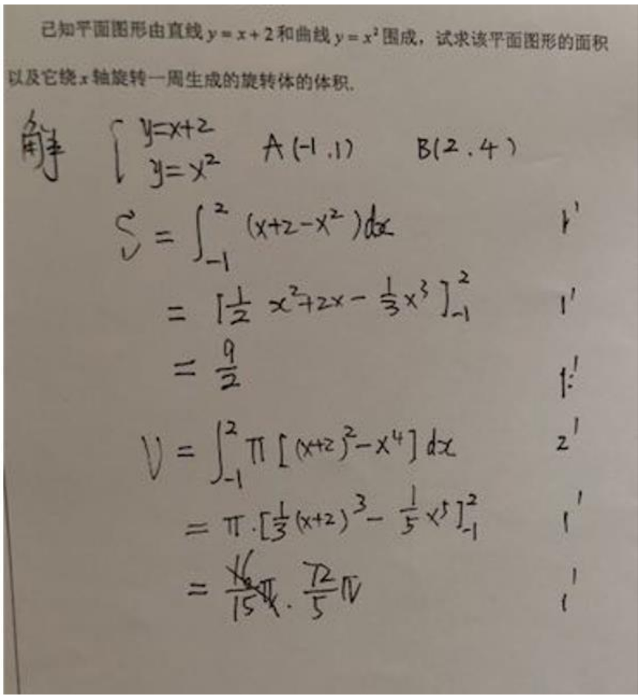
$V_2=\pi\int_1^2 2^2\,dx-\pi\int_1^2 x^2\,dx$

$=\pi\int_1^2 (4-x^2)\,dx$

$=\pi(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_1^2=\frac{5}{3}\pi$ ···3分

$\therefore V=V_1+V_2=\frac{8}{3}\pi$

⑤



已知平面图形由直线 $y=x+2$ 和曲线 $y=x^2$ 围成，试求该平面图形的面积以及它绕 x 轴旋转一周生成的旋转体的体积.

解 $\begin{cases} y=x+2 \\ y=x^2 \end{cases}$ $A(-1,1)$ $B(2,4)$

$S=\int_{-1}^2 (x+2-x^2)\,dx$ 1'

$=[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^2$ 1'

$=\frac{9}{2}$ 1'

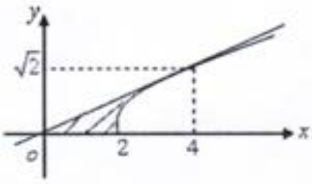
$V=\int_{-1}^2 \pi[(x+2)^2-x^4]\,dx$ 2'

$=\pi\cdot[\frac{1}{3}(x+2)^3-\frac{1}{5}x^5]_{-1}^2$ 1'

$=\cancel{\frac{16}{15}\pi}\cdot\frac{72}{5}\pi$ 1'

⑥

1．求由曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 与该曲线过坐标原点的切线及 x 轴所围图形的面积.



解：

设切点为 (x_0, y_0)，则过原点的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}x$，

由于点 (x_0, y_0) 在切线上，带入切线方程，解得切点为 $x_0=4, y_0=\sqrt{2}$ -----3

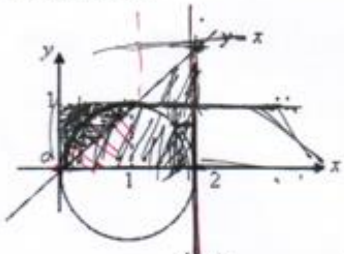
过原点和点 $(4,\sqrt{2})$ 的切线方程为 $y=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$ ----------------------------3

面积 $s=\int_0^{\sqrt{2}}(y^2+2-2\sqrt{2}y)dy=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ -----------------3

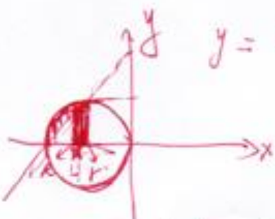
或 $s=\int_0^2\dfrac{1}{2\sqrt{2}}xdx+\int_2^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x-\sqrt{x-2}\right)dx=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2．设平面图形 D 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，试求 D 绕直线 $x=2$ 旋转一周所生成的旋转体的体积.

$y=x$.



$2<y<$.



$y=x+2.$ $(-x+1)^2+y^2=1-x^2$ x^2+2x

$y=\sqrt{\cancel{\ }-x^2}$ $-2x$

$-(x^2+2x)$

解： 法一：$V=V_1-V_2$

$\pi(R^2-r^2)\ f(x)\ \sqrt{-x^2-2x}$

$\pi\cdot 2x\cdot\sqrt{-(x^2+2x)}\ dx\cdot$

$=\ 2\pi x\cdot\sqrt{-(x^2+2x)}-(x+2)\ dx$

$\int_{-1}^{2} 2\pi x\sqrt{-x(x+2)}-(x+2)dx$

$$= \int_0^1 \pi\left[2-(1-\sqrt{1-y^2})\right]^2 dy - \int_0^1 \pi (2-y)^2 dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[\sqrt{1-y^2} - (y-1)^2\right] dy$$ -------6

$$= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(y-1)^3 \Big|_0^1\right] = 2\pi(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})$$ --------3

~~$(x+y)^2$~~

$(x-1)^2+y^2=1$

~~$1-x$~~

$1-x = \sqrt{1-y^2}$

$x = 1-\sqrt{\ }$

$x = 1-\sqrt{1-y^2}$

法二：$V= 2\pi \int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2} - x)dx$

$$= 2\pi \int_0^1 (2-x)\sqrt{2x-x^2}dx - 2\pi \int_0^1 (2x-x^2)dx$$ ------------------ 5

$$= \pi \int_0^1 \left[(2-2x)\sqrt{2x-x^2} + 2\sqrt{2x-x^2}\right] dx - \frac{4}{3}\pi$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + 2\times\frac{1}{4}\pi\times 1\right] - \frac{4}{3}\pi$$

$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{2}{3}\pi$$ ------------- 4

3. 设 $a>1$, $f(t)=a^t - at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时 $t(a)$ 最小？并求最小值.

解: 由 $f'(t) = a^t \ln a - a = 0$ 得 $t(a) = 1 - \frac{\ln\ln a}{\ln a}$. -------------- 3 ?

又由 $t'(a) = \frac{\ln\ln a - 1}{a(\ln a)^2} = 0$ 得唯一驻点 $a = e^e$ ------------3

当 $a > e^e$ 时, $t'(a) > 0$; 当 $a < e^e$ 时, $t'(a) < 0$, 于是 $a = e^e$ 为 $t(a)$ 的极小值点. -----2

故 $a = e^e$ 为 $t(a)$ 的最小值点, 最小值为 $t(e^e) = 1 - \frac{\ln e}{e} = 1 - \frac{1}{e}$. -------------1

证明题

①

得分	

八、证明题 [本题 5 分]

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 具有连续的导函数 $f'(x)$，且 $f(a)=f(b)=0$，试证明不等式

$$4\int_a^b |f(x)|dx \le M(b-a)^2 \qquad （其中 M=\max_{a\le x\le b}|f'(x)|）.$$

= -2

3' 证明 任取 $x\in(a,b)$，对 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 应用 Lagrange

$$f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a) \qquad 1'$$

$$f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)$$

2'

$$|f(x)|=|f'(\xi_1)||x-a|\le M(x-a) \qquad 1'$$

$$|f(x)|=|f'(\xi_2)||x-b|\le M(b-x)$$

'

$$\int_a^b|f(x)|dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx+\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx \cdots\cdots 1'$$

2'

$$\le \int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx$$

$$=\frac{M}{2}(x-a)^2\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}-\frac{M}{2}(b-x)^2\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \qquad 1$$

$$=\frac{M(b-a)^2}{4}$$

'

故 $4\int_a^b|f(x)|dx\le M(b-a)^2$. 1'

②

六、证明题 [本题 5 分]

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$，证明：当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u$

证明

$$\frac{u_{n+1}}{u_1}=\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_4}{u_3}\cdots\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_1}=\frac{v_2}{v_1}\cdot\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_4}{v_3}\cdots\frac{u_{n+1}}{v_n} \qquad \Rightarrow 2'$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_1}\le\frac{v_{n+1}}{v_1} \quad 即 \quad u_{n+1}<\frac{u_1}{v_1}v_{n+1} \qquad 1'$$

1' 当 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时 由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛. 2'

1

③

设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$．试证明：存在两点 $\xi_1 \in (0,\pi)$，$\xi_2 \in (0,\pi)$，$\xi_1 \neq \xi_2$，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2)$．

证明：$\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$ ⋯ 1分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx \xlongequal{x=\pi-t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-t)(-\cos t)(-dt)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-t)\cos t\,dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t)\cos t\,dt \quad \cdots \text{1分}$$

于是有：$0 = \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - f(\pi-x)]\cos x\,dx$

利用积分中值定理得 $\frac{\pi}{2}\cdot[f(\xi)-f(\pi-\xi)]\cos\xi$，$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ ⋯ 1分

又由于 $\cos\xi \neq 0$．故必有

$f(\xi)-f(\pi-\xi)=0$ 即 $f(\xi)=f(\pi-\xi)$ ⋯ 1分

取 $\xi_1=\xi$，$\xi_2=\pi-\xi$，，命题得证． ⋯ 1分

④

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且满足：

(1) 当 $x\in[a,b)$ 时，$\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt$；

(2) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$．

试证明：$\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$．

[证明] 令 $H(x)=\int_a^x [f(t)-g(t)]dt$，则 $H'(x) = f(x)-g(x) \triangleq h(x)$ 1'

由 (1)．(2) 知 $H(x) \geq 0$．$H(a)=H(b)=0$ 1'

$\int_a^b xf(x)dx - \int_a^b xg(x)dx = \int_a^b x h(x)dx = \int_a^b x\,dH(x)$ 1'

$$= bH(b) - aH(a) - \int_a^b H(x)dx$$

$= -\int_a^b H(x)dx \leq 0$ 1'

得证 $\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$ 1'

⑤

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$,

试证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

证明：设 $F(x)=f(x)-x$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续在 $(0,1)$ 可导，因 $f(0)=f(1)=0$，

有 $F(0)=f(0)-0=0, F(1)=f(1)-1=-1$, --------------- 2

又由 $f(\frac{1}{2})=1$，知 $F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，在 $[\frac{1}{2},1]$ 上 $F(x)$ 用零点定理，

根据 $F(1)F(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}<0$，--------------- 2

可知在 $(\frac{1}{2},1)$ 内至少存在一点 η，使得 $F(\eta)=0$，$\eta \in (\frac{1}{2},1) \subset (0,1)$，

$F(0)=F(\eta)=0$ 由 ROLLE 中值定理得 至少存在一点 $\xi \in (0,\eta) \subset (0,1)$ 使得

$F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)-1=0$，证毕. --------------3