《现代控制理论》MOOC课程

第六章　最优控制

- 最优控制理论所要解决的问题：

  按照控制对象的动态特性，选择一个容许控制，使得被控对象按照技术要求运行，并使给定的性能指标达到最优值。

- 最优控制的数学问题：

  从数学观点来看，最优控制问题就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题。

- 最优控制的基本内容：

  经典变分法；

  极小值原理；

  动态规划；

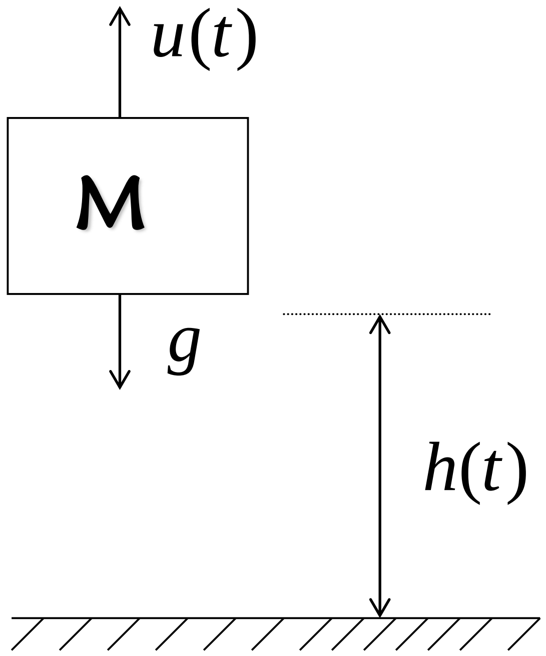
《现代控制理论》MOOC课程

6.1 最优控制问题的数学描述

一. 最优控制问题的实例

例1：最速升降问题

设有一质量为M的物体，其内部有一控制器，可以产生一个作用力$u(t)$控制物体上下运动作用力满足约束条件$|u(t)| \le C$。若物体在t_0时刻，离地面的高度为h_0，垂直运动的速度为v_0。寻找作用力$u(t)$，使物体最快地到达地面，且到达地面的速度为零。物体运动的速度$|v(t)| \le v_{max}$



建模：受控系统的状态方程

令 $x_1(t) = h(t)$，$x_2(t) = \dot{h}(t) = v(t)$

系统的状态方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{u(t)}{M} - g \end{cases} \qquad (6\text{---}1)$$

一. 最优控制问题的实例

初始条件为： $x_1(t_0)=h_0,\ x_2(t_0)=v_0$

现在的问题是，寻找一个$u(t)$,且满足$|u(t)|\le C$,使物体在最短时间内由状态(h_0,v_0)，转移到$(0,0)$。且$|v(t)|\le v_{max}$。

问题例1：对于给定的动态系统（6-1），寻找满足约束条件$|u(t)|\le C$的最优控制$u(t)$,使性能指标

$$J=\int_{t_0}^{t_f}dt=t_f-t_0$$

取得极小值，且满足如下约束条件：

$$|x_2(t)|\le v_{max}$$

$$x_1(t_f)=0,\ x_2(t_f)=0$$

二. 最优控制问题的一般提法

用数学语言描述最优控制问题，应包括以下几个方面的内容：

1. 受控系统的数学模型

用状态方程描述：$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$

2. 受控系统的始端和终端条件，即状态方程的边界条件:

对最优控制问题始端条件通常是已知的: $x(t_0) = x_0$

终端条件可以用一个目标集表示：$\Omega_f = \{x(t_f); g_1[x(t_f)] = 0, g_2[x(t_f)] \le 0\}$

3. 容许控制

控制量受客观条件限制所能取值的范围: $u(t) \in U$，$U = \{u(t); \varphi(x, u) \le 0\}$

4. 性能指标

(1) 积分型性能指标：$J=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t),t]dt$

反映控制过程中对系统性能的要求。

(2) 终值型性能指标： $J=\Phi[x(t_f),t_f]$

反映了系统状态在终端时刻的性能。

(3) 复合型性能指标：$J=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t),t]dt$

反映了控制过程和终端时刻对系统性能的要求。

若：$\Phi[x(t_f),t_f]$，$L[x(t),u(t),t]$ 为二次型函数，则性能指标可表示为二次型性能指标：

$$J=\frac{1}{2}x(t_f)^T P x(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x(t)^T Q x(t)+u(t)^T R u(t)]dt$$

最优控制问题的一般提法：

已知受控系统的状态方程：$\dot{x}(t) = \boldsymbol{f}[x(t), \boldsymbol{u}(t), t]$

及给定的始端条件$x(t_0) = x_0$和规定的目标集$\Omega_f = \{x(t_f); \boldsymbol{g}_1[x(t_f)] = \mathbf{0}, \boldsymbol{g}_2[x(t_f)] \leq \mathbf{0}\}$

在容许控制集合U中，寻找控制向量$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{t} \in [t_0, t_f]$

使系统由给定的初始状态出发，在$t_f > t_0$时刻转移到规定的目标集，并使性能指标：

$$\min \ J = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \boldsymbol{u}(t), t] dt$$

最优控制问题是在多种约束条件下寻找控制$u^*(t)$，使某个性能指标J取得极小值。由于J为函数$x(t), \boldsymbol{u}(t)$的函数，即泛函。最优控制问题可归结为求某个泛函的条件极值问题。

《现代控制理论》MOOC课程

6.2　求解最优控制的变分方法

一 泛函与泛函的变分

1. 泛函的定义

对于某一类函数集合$\{x(t)\}$中的每一个函数$x(t)$，均有一个确定的数 J与之对应，则称J为依赖于函数$x(t)$的泛函，记作：$J=J[x(t)]$

- $J[x(t)]$中的$x(t)$ 应理解为某一特定函数的整体，而不是对应于t的函数值。

例如泛函：$J=\int_0^1\left(x^2(t)+t\frac{dx(t)}{dt}\right)dt$

当 $x(t)=t$ 有：$J=\int_0^1(t^2+t)dt=\frac{5}{6}$

当 $x(t)=e^t$ 有：$J=\int_0^1(e^{2t}+te^t)dt=\left(\frac{1}{2}e^{2t}+te^t-e^t\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^2+1)$

2.泛函自变量的变分

泛函$J[x(t)]$的自变量函数$x(t)$与标称函数$x^*(t)$之间的差值函数:

$$\delta x = \delta x(t) = x(t) - x^*(t)$$

称为泛函自变量的变分，记作$\delta x(t)$或δx。

这样$x(t)$可表示为：$x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$

3.泛函的变分

- 泛函的增量

由自变量函数$x(t)$的变分$\delta x(t)$引起泛函$J[x(t)]$的增加值

$$\Delta J[x(t)] = J[x^*(t) + \delta x(t)] - J[x^*(t)]$$

称为泛函$J[x(t)]$的增量。

泛函的连续性

对于任意给定的正数ε，可以找到这样一个正数δ，当$d(x,x^*)<\varepsilon$时，有

$$|J[x(t)]-J[x^*(t)]|<\delta$$

则称泛函$J[x(t)]$在$x^*(t)$处是连续的。

其中，$d(x,x^*)$表示在函数空间中$x(t)$与$x^*(t)$之间的距离：

$$d(x,x^*)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-x^*(t)|$$

泛函的变分

泛函$J[x(t)]$增量$\Delta J[x(t)]$的线性主部称为泛函的一阶变分，简称泛函的变分，记作δJ

$$\Delta J=J[x^*(t)+\delta x(t)]-J[x^*(t)]=\left.\frac{dJ}{dx}\right|_{x^*}\delta x+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2J}{dx^2}\right|_{x^*}(\delta x)^2+R$$

其中，R是关于δx的高阶无穷小项。

泛函的变分定义为：$\delta J=\left.\frac{dJ}{dx}\right|_{x^*}\delta x$

泛函的变分引理

泛函的变分 $\delta J[x(t)] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[x(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}$

证明：

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J[x(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta J[x(t)+\alpha\delta x(t)]}{\Delta\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$\Delta\alpha = \alpha - 0 = \alpha$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{J[x(t)+\alpha\delta x(t)] - J[x(t)]}{\alpha}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{dJ}{dx}\Big|_x \alpha\delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2J}{dx^2}\Big|_x (\alpha\delta x)^2 + R\right\}$$

$$= \frac{dJ}{dx}\Big|_x \delta x = \delta J$$

得证

例 计算 泛函$J=\int_0^1 x^2(t)dt$ 的变分

解：方法一，直接根据变分引理：

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^1[x(t)+\alpha\delta x(t)]^2dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_0^1 2[x(t)+\alpha\delta x(t)]\delta x(t)dt\Big|_{\alpha=0}=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt$$

方法二，根据变分的定义：

$$\Delta J=\int_0^1[x(t)+\delta x(t)]^2dt-\int_0^1 x^2(t)dt=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt+\int_0^1(\delta x(t))^2dt$$

故增量的线性主部为：$\delta J=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt$

二 泛函的极值

1. 泛函极值的定义

如果泛函$J[x(t)]$在$x(t)=x^*(t)$的邻域内，其增量：

$$\Delta J = J[x(t)] - J[x^*(t)] \geq 0$$

或 $$\Delta J = J[x(t)] - J[x^*(t)] \leq 0$$

则称泛函$J[x(t)]$在$x(t)=x^*(t)$有极小值或极大值。

2. 泛函极值定理

若可微泛函$J[x(t)]$在函数$x(t)=x^*(t)$达到极值，则泛函$J[x(t)]$在$x(t)=x^*(t)$上的变分等于零，即

$$\delta J[x^*(t)]=0$$

证明：对于任意给定的$\delta x(t)$ 来说，$J[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]$ 是实变量α的函数。

泛函$J[x(t)]$在$x^*(t)$时达到极值，即函数$J[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]$在$\alpha=0$时达到极值，

所以它的导数在$\alpha=0$时应为零，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}=0$$

由变分引理 $\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}=\delta J[x^*(t)]=0$

得证

《现代控制理论》MOOC课程

6.2.2　无约束条件的变分问题(1)

引理： 如果函数$F(t)$在区间$t\in[t_0,t_f]$上是连续的，而且对于只满足某些一般条件的任意选定的函数$\eta(t)$有$\int_{t_0}^{t_f}F(t)\eta(t)dt=0$，则在区间$t\in[t_0,t_f]$上有：$F(t)\equiv 0$

一 欧拉方程

讨论一个固定端点时间，固定端点状态的无约束条件变分问题。

问题： 考虑泛函为 $J[x(t)]=\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),\dot{x}(t),t]dt$

式中$x(t)$在$t\in[t_0,t_f]$上连续，$L[x(t),\dot{x}(t),t]$连续，二阶可微，求使$J[x(t)]$取极值，且满足给定边界条件：$x(t_0)=x_0$，$x(t_f)=x_f$的函数$x^*(t)$。

解：根据泛函极值定理,在极值曲线$x^*(t)$上，必有$\delta J[x^*(t)]=0$

而 $$\delta J[x(t)]=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial}{\partial\alpha}L[x(t)+\alpha\delta x(t),\dot{x}(t)+\alpha\delta\dot{x}(t),t]\Bigg|_{\alpha=0}dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})+\alpha\delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))} \boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \alpha\delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \alpha\delta\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}] \frac{\partial(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})+\alpha\delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))}{\partial\alpha} \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial}{\partial(\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \alpha\delta\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}))} \boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \alpha\delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \alpha\delta\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}] \frac{\partial\left(\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \alpha\delta\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\right)}{\partial\alpha} \right\} \right|_{\alpha=0} \boldsymbol{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}]}{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})} \delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \frac{\partial \boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}]}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})} \delta\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) \right\} \boldsymbol{d}t$$

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right)dt$$

右边第二项：$\displaystyle\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}dt=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta dx=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d(\delta x)=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\bigg|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x$

$$=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\bigg|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt$$

故：$\displaystyle\delta J=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\bigg|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\delta x dt$

考虑端点固定，故有：$\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$

所以：$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\delta x dt$

在极值曲线$x^*(t)$ 上，必有 $\delta J[x^*(t)]=0$

即：$\delta J[x^*(t)]=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\Big|_{x=x^*}\delta x dt=0$

故：$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$

该式称为**欧拉方程**，是泛函极值的必要条件。

由于

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L[x,\dot{x},t]}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{d\dot{x}}{dt}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\partial x}\dot{x}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\partial t}$$

欧拉方程可进一步表示为：

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\partial x}\dot{x}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\partial t}=0$$

写成简洁的形式：$L_x-L_{\dot{x}x}\dot{x}-L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}-L_{\dot{x}t}=0$

这样无约束泛函极值问题就归结为求解欧拉方程问题。

例：求泛函 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2-x^2)\,dt$

在边界条件：$x(0)=1, x\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ 下的极值曲线。

解：$L=\dot{x}^2-x^2$　　$L_x=-2x$　　$L_{\dot{x}}=2\dot{x}$　　$L_{\dot{x}\dot{x}}=2$　　$L_{\dot{x}x}=L_{\dot{x}t}=0$

由欧拉方程：$L_x-L_{\dot{x}x}\dot{x}-L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}-L_{\dot{x}t}=0$　　可得：$-2x-2\ddot{x}=0$

解得：$x^*(t)=cos(t)+2sin(t)$

《现代控制理论》MOOC课程

6.2.2　无约束条件的变分问题(2)

二 横截条件

端点状态$x(t_0)$ 和 $x(t_f)$均不固定时的变分问题。

问题: 寻求使泛函 $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t]dt$

取极值，且$x(t_0)$ 和 $x(t_f)$均不固定时的函数 $x^*(t)$。

解： $\delta J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right) \delta x dt$

由于端点不固定，所以$\delta x(t_0) \neq 0$， $\delta x(t_f) \neq 0$

$$\delta J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} \delta x(t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right) \delta x dt$$

在极值曲线$x^*(t)$上，必有$\delta J[x^*(t)]=0$

故欧拉方程：$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

横截条件：$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0,$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}=0$$

成立

显然，端点中任意一点固定时，其横截条件改由终端条件代替。

$$\delta J=\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}\delta x(t_f)-\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}\delta x(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\delta x dt=0$$

例：求泛函 $J=\int_0^1(\dot{x}^2+1)\,dt$

求满足下列两种端点情况的极值曲线。

(1) $x(0)=1, x(1)=2$　　(2) $x(0)=1, x(1)$未定

解：$L=\dot{x}^2+1$　　$L_{\dot{x}\dot{x}}=2$　　$L_x=L_{\dot{x}x}=L_{\dot{x}t}=0$

由欧拉方程：$L_x-L_{\dot{x}x}\dot{x}-L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}-L_{\dot{x}t}=0$

可得：$2\ddot{x}=0$

通解为：$x(t)=C_1t+C_2$

对端点情况(1)可得：$x^*(t)=t+1$　　相应的极值为：$J[x^*(t)]=2$

对端点情况(2)由横截条件：$\left.\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=2\dot{x}\big|_{t=1}=0$　　可得：$\dot{x}(1)=0$

考虑初值条件可得：$x^*(t)=1$　　相应的极值为：$J[x^*(t)]=1$

二 欧拉方程与横截条件的向量形式

问题： 寻求使泛函 $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t]dt$

取极值，且 $x(t_0)$ 和 $x(t_f)$ 均不固定时的函数 $x^*(t)$。

其中， $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$

$$\dot{x}(t) = [\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \cdots, \dot{x}_n(t)]^T$$

一维情况下的欧拉方程和横截条件可以推广到n维情况：

故欧拉方程： $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

横截条件： $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0$， $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0$

例. 求泛函

$$J[x(t)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x_1x_2+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)dt$$

满足边界条件 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(\pi/2) \\ x_2(\pi/2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

的最优轨线。

解：由欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$ 得

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 2\dot{x}_1 \\ 2\dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2\ddot{x}_1 \\ 2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}=0$$

于是：
$$\begin{cases} x_2 - \ddot{x}_1 = 0 \\ x_1 - \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$
可得：
$$x_1^{(4)} - x_1 = 0$$

特征方程为：
$$\lambda^4 - 1 = 0$$

特征值为：
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$$

其通解为：
$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$
$$x_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$$

代入边界条件得：
$$x_1^*(t) = \sin t$$
$$x_2^*(t) = -\sin t$$

《现代控制理论》MOOC课程

6.2.3 有约束条件的变分问题 (1)

- 在本节中假定，控制$u(t)$是无约束的，且是连续的。

一. 终端时间固定、状态自由，等式约束条件下的变分问题

受控系统的状态方程为 $\dot{x}(t)=f[x(t),u(t),t]$

初始状态为$x(t_0)=x_0$

终端时间t_f固定，终端状态$x(t_f)$自由

寻求最优控制$u(t)$使性能指标 $J=\Phi\left[x\left(t_f\right),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),u(t),t]dt$ 取得极小值。

将状态方程改写成：$f[x(t),u(t),t]-\dot{x}(t)=0$

引入拉格朗日乘子函数$\lambda(t)$，原等式约束问题，转化为如下无约束优化问题：

$$J'=\Phi\left[x\left(t_f\right),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\{L[x(t),u(t),t]+\lambda^T(t)[f[x(t),u(t),t]-\dot{x}(t)]\}dt$$

定义标量函数 $\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t}),t]=\boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]+\boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{t})\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}]$

称$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t}),t]$为哈密尔顿函数。则

$$J'=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}\{H[x(t),u(t),\lambda(t),t]-\lambda^T(t)\dot{x}(t)\}dt=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}[H-\lambda^T(t)\dot{x}(t)]dt$$

泛函 J' 取得极值的必要条件为：$\delta J'=0$

$$0=\delta J'=\left(\frac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)^T\delta x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\delta\lambda-\dot{x}^T\delta\lambda-\lambda^T\delta\dot{x}\right\}dt$$

而 $\displaystyle\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T\delta\dot{x}\,dt=\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T\delta dx=\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T d(\delta x)=\lambda^T\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}d\lambda^T\delta x=\lambda^T\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T\delta x dt$

$$0=\delta J'=\left(\frac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)^T\delta x(t_f)-\lambda^T\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\delta\lambda-\dot{x}^T\delta\lambda+\dot{\lambda}^T\delta x\right\}dt$$

$$0=\delta J'=\left(\frac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}-\lambda(t_f)\right)^T\delta x(t_f)+\lambda^T(t_0)\delta x(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)^T\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}-\dot{x}\right)^T\delta\lambda\right\}dt$$

由于$x(t_0)$固定，故$\delta x(t_0)=0$

$$0=\delta J'=\left(\frac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}-\lambda(t_f)\right)^T\delta x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)^T\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}-\dot{x}\right)^T\delta\lambda\right\}dt$$

由于$x(t),u(t),\lambda(t),x(t_f)$不受限制，故$\delta x(t),\delta u(t),\delta\lambda(t),\delta x(t_f)$ 任意

要使$\delta J'=0$　　必有：$\frac{\partial H}{\partial \lambda}-\dot{x}=0$　　即有 $\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t)$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}\qquad \lambda(t_f)=\frac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\qquad \frac{\partial H}{\partial u}=0$$

综上，终端时间固定、状态自由，等式约束条件下的性能指标取极值的必要条件为：

状态方程：
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

协状态方程：
$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \lambda(t_f) = \dfrac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \end{cases}$$

控制方程：
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

《现代控制理论》MOOC课程

6.2.3　有约束条件的变分问题 (2)

- 哈密尔顿函数的重要性质：

沿着最优轨迹的哈密尔顿函数对时间的全导数等于对时间的偏导数： $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$

当哈密尔顿函数不显含时间变量时，沿着最优轨迹的哈密尔顿函数为常数：$H=C$

证明： $H=L+\lambda^T f$

$$\frac{dH}{dt}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\dot{x}+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\dot{u}+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\dot{\lambda}+\frac{\partial H}{\partial t}$$

当系统取得极值时有：

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\dot{x}+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\dot{\lambda}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)=0$$

故：
$$\frac{dH}{d\,t}=\frac{\partial H}{\partial\,t}$$

当H不显含t时有：$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=0$ 即：$H=C$

这一性质可用于判断系统的最优轨迹是否正确。

例：已知一阶受控系统 $\dot{x}=u,\quad x(t_0)=x_0$ 性能指标函数为

$$J=\frac{1}{2}C\,x^2(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}u^2dt$$

其中常数 $C>0$，求使 J 为极小值的最优控制 $u(t)$

解：$H=\frac{1}{2}u^2+\lambda\,u$ 由 $\frac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda=0$ 得 $\lambda=-u$

解协状态方程：

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \lambda(t_f) = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}Cx^2(t_f)\right)}{\partial x(t_f)} = Cx(t_f)$$

得： $\lambda = Cx(t_f)$

代入状态方程：

$$\dot{x} = u = -\lambda = -C\,x(t_f)$$

$$x(t_0) = x_0$$

故： $x(t) = x_0 - C\,x(t_f)\,t + C\,x(t_f)\,t_0$

令 $t = t_f$ 可得： $x(t_f) = \dfrac{x_0}{1 + C(t_f - t_0)}$

进而得： $u = -\lambda = -\lambda(t_f) = -Cx(t_f) = -\dfrac{C\,x_0}{1 + C(t_f - t_0)}$

《现代控制理论》MOOC课程

6.2.3　有约束条件的变分问题 (3)

二. 终端时间固定、状态约束，等式约束条件下的变分问题

受控系统的状态方程为 $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$

初始状态为 $x(t_0) = x_0$

终端时间 t_f 固定，但终端状态 $x(t_f)$ 受约束：$g[x(t_f), t_f] = 0$

寻求最优控制 $u(t)$ 使性能指标 $J = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]dt$ 取得极小值。

将状态方程改写成：$f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t) = 0$

引入拉格朗日乘子函数 $\lambda(t), \mu(t)$，原等式约束问题，转化为如下无约束优化问题：

$$J' = \theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t)[f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t)]\}dt$$

其中： $\theta[x(t_f),t_f]=\Phi[x(t_f),t_f]+\mu^T(t)g[x(t_f),t_f]$

终端时间固定、终端状态约束，等式约束条件下性能指标取得极值的必要条件为：

状态方程：
$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

控制方程：
$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

协状态方程：
$$\begin{cases}\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}\\ \lambda(t_f)=\dfrac{\partial\theta[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}=\dfrac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}+\mu^T\left(\dfrac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)\\ g[x(t_f),t_f]=0\end{cases}$$

例：受控系统的状态方程为：$\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = u$$

初始状态为：$x_1(0) = x_2(0) = 0$

当 $t_f = 1$ 时将系统状态转移到 $x_1(1) + x_2(1) = 1$，且使性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt$$

达到极小值，求最优控制及相应的最优轨线。

解：终端约束为：$g(x(t_f)) = x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$

哈密尔顿函数为：$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

由：$\dfrac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0$ 得 $u = -\lambda_2$

代入状态方程和协状态方程：

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0)=0$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda_2 \qquad x_2(0)=0$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \qquad \lambda_1(1) = \frac{\partial[\mu g(x(1))]}{\partial x_1(1)} = \mu$$

$$x_1(1)+x_2(1)-1=0$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \qquad \lambda_2(1) = \frac{\partial[\mu g(x(1))]}{\partial x_2(1)} = \mu$$

解得：

$$x_1(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2$$

$$u(t) = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$$

$$x_2(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t \qquad \lambda_2(t) = \frac{3}{7}t - \frac{6}{7}$$

《现代控制理论》MOOC课程

6.2.3　有约束条件的变分问题 (4)

三. 终端时间自由、状态约束，等式约束条件下的变分问题

受控系统的状态方程为 $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ 初始状态为$x(t_0) = x_0$

寻求最优控制$u(t)$及最优终端时刻t_f，使系统在终端时刻转移到某一终端状态$x(t_f)$

且满足：$g[x(t_f), t_f] = 0$

使性能指标 $J = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]dt$ 取得极小值。

将状态方程改写成：$f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t) = 0$

引入拉格朗日乘子函数 $\lambda(t), \mu(t)$ 原等式约束问题，转化为如下无约束优化问题：

$$J' = \theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t)[f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t)]\}dt$$

其中： $\theta[x(t_f),t_f]=\Phi[x(t_f),t_f]+\mu^T(t)g[x(t_f),t_f]$

哈密尔顿函数为：$H[x(t),u(t),\lambda(t),t]=L[x(t),u(t),t]+\lambda^T(t)\ f\,[x(t),u(t),t]$

于是： $J^{'}=\Phi[x(t_f),t_f]+\mu^T g[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}\{H[x(t),u(t),\lambda(t),t]-\lambda^T(t)\dot{x}(t)\}dt$

故： $\delta J^{'}=\left(\dfrac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)^T\delta\,x(t_f)+\left(\dfrac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial t_f}\right)d\,t_f$

$$+\mu^T\left(\frac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)\delta\,x(t_f)+\mu^T\left(\frac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial t_f}\right)d\,t_f+g^T[x(t_f),t_f]\,\delta\,\mu$$

$$+\{H[x(t),u(t),t]-\lambda^{T}(t)\dot{x}(t)\}\Big|_{t=t_f} dt_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{T}\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^{T}\delta u+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^{T}\delta \lambda-\dot{x}^{T}\delta \lambda-\lambda^{T}(t)\,\delta \dot{x}(t)\}dt$$

而： $$\int_{t_0}^{t_f}\lambda^{T}\,\delta \dot{x}dt=\int_{t_0}^{t_f}\lambda^{T}\,d\delta x=\lambda^{T}\,\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^{T}\,\delta xdt$$

故有：

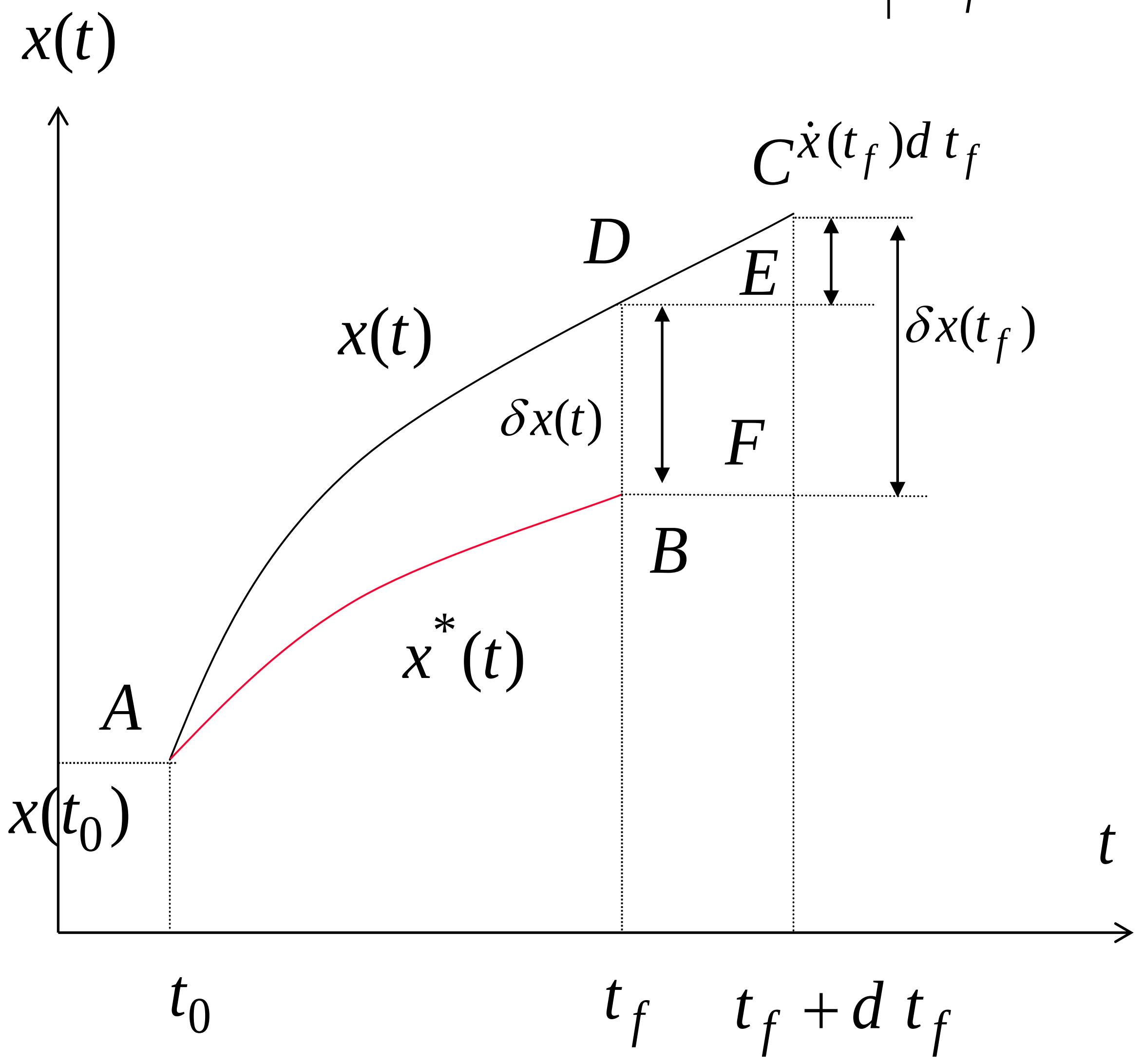
$$\delta J' = \left\{ \left(\frac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right)^T + \mu^T \left(\frac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right) \right\} \delta x(t_f) +$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) + \mu^T \left(\frac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) \right\} d t_f + g^T[x(t_f), t_f] \delta \mu$$

$$\{H[x(t), u(t), t] - \lambda^T(t)\dot{x}(t)\}\Big|_{t=t_f} dt_f - \lambda^T \delta x\Big|_{t=t_f} +$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right)^T \delta \lambda \} dt$$

注意在$\delta t_f \neq 0$时，$\delta x(t_f)$与 $\delta x(t)\big|_{t=t_f}$ 的区别：



$\delta x(t_f)$是终端状态向量的变分,它是由$\delta x(t)$和 dt_f 综合引起的，相当于FC；

$\delta x(t)\big|_{t=t_f}$是在时刻 t_f 上，变分$\delta x(t)$的值，相当于BD。

$$\delta x(t)\big|_{t=t_f} = BD = FC - EC$$

$$= \delta x(t_f) - \dot{x}(t_f)\,dt_f$$

故有：

$$\delta J' = \left\{ \left(\frac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right)^T + \mu^T \left(\frac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right) \right\} \delta x(t_f) +$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) + \mu^T \left(\frac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) \right\} d t_f + g^T [x(t_f), t_f] \delta \mu +$$

$$\{H[x(t), u(t), t] - \lambda^T(t)\dot{x}(t)\}\Big|_{t=t_f} dt_f - \lambda^T(t_f)\delta x(t_f) + \lambda^T(t_f)\dot{x}(t_f) d t_f +$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right)^T \delta \lambda \right\} dt$$

即：

$$\delta J' = \left\{ \left(\frac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right)^T + \mu^T \left(\frac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right) - \lambda^T(t_f) \right\} \delta x(t_f) +$$

$$\left\{ H[x(t_f), u(t_f), t_f] + \left(\frac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) + \mu^T \left(\frac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) \right\} d\, t_f +$$

$$g^T[x(t_f), t_f]\, \delta \mu +$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right)^T \delta \lambda \right\} dt$$

泛函极值存在的必要条件为 $\delta J' = 0$，即：

状态方程：
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

控制方程：
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

协状态方程：
$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \lambda(t_f) = \left(\dfrac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right) + \left(\dfrac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right)^T \mu \\ g[x(t_f), t_f] = 0 \\ H[x(t_f), u(t_f), t_f] + \left(\dfrac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) + \mu^T \left(\dfrac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) = 0 \end{cases}$$

例：给定受控系统 $\dot{x}=u, \quad x(0)=1$

求最优控制 $u(t)$，使 $x(t_f)=0$，并使性能指标

$$J=t_f+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}u^2(t)dt$$

取极小值。其中 t_f 未定。

解：哈密尔顿函数为 $H=\frac{1}{2}u^2+\lambda u$

控制方程为：$\frac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda=0$ 得 $u=-\lambda$

状态方程为：$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=u$ 协状态方程为：$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=0$

边界条件为(由于端点状态固定，故不用横截条件）：

$$x(0)=1$$

由：$H[x(t_f),u(t_f),t_f]+\left(\frac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial t_f}\right)+\mu^T\left(\frac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial t_f}\right)=-\frac{\lambda^2(t_f)}{2}+1=0$

可得：$\lambda(t_f)=\sqrt{2}$

故：　$\lambda=\sqrt{2}$　　可得：$u(t)=-\lambda=-\sqrt{2}$

$x(t)=1-\sqrt{2}\,t$

再由：$x(t_f)=0$　　可得：$t_f=\frac{1}{\sqrt{2}}$

《现代控制理论》MOOC课程

6.3 极小值原理

经典变分法

$$0 = \delta J = \left(\frac{\partial\Phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} - \lambda(t_f)\right)^T \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}\right)^T \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x}\right)^T \delta\lambda\right\} dt$$

- 用经典变分法求泛函极值时，假定控制量$u(t)$不受约束，即δu为任意,为使性能指标函$\delta J = 0$，可得获得最优控制所需满足的控制方程${}^{\partial H}/_{\partial u} = 0$。而当控制量存在约束时，$\delta u$不能任意取值，控制方程不成立。

例．考虑一阶系统

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \qquad x(0) = 1$$

试求最优控制 $u(t)$，使如下目标函数有极小值。

$$J = \int_0^1 x(t)dt$$

解：这是一个终端时间固定、状态自由的最优控制问题。

应用经典变分法求解。

引入乘子 $\lambda(t)$，构造哈密尔顿函数：

$$H = x(t) + \lambda(t)[-x(t) + u(t)]$$

协状态方程及边界条件为：$\dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \lambda(t) - 1$

$$\lambda(t_f) = \lambda(1) = 0$$

控制方程为： $\dfrac{\partial H}{\partial u}=\lambda(t)=0$

显然，控制方程与协状态方程矛盾。

用变分法求解，问题无解。

而问题是有解的。由于H是u的一次函数，故极值一定存在且存在边界上，而不能在

$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$ 的点上达到。

此外，应用经典变分法H对u必须有导数，即要求状态方程的右侧 $f(x,u,t)$ 和目标函数的被积函数 $L(x,u,t)$ 对控制u可导。

《现代控制理论》MOOC课程

6.3.2 终端时间固定的极小值原理

定理(极小值原理)

受控系统的状态方程为 $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$

初始状态为 $x(t_0) = x_0$

终端时间 t_f 固定，终端状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$ 自由。控制 $u(t) \in U$ ，U 可为闭集。

寻求最优控制 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ 使性能指标 $J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt$ 取得极小值。

若取：$H = L[x(t), u(t), t] + \lambda^T f[x(t), u(t), t]$

则极小值存在的必要条件为：

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \lambda(t_f) = 0$$

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \qquad x(t_0) = 0$$

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = \min_{u \in U} H(x^*(t), u(t), \lambda(t), t)$$

式中，$x^*(t), u^*(t)$ 为最优运动轨迹和最优控制。

说明：

1）$\forall u \in U, H(x^*, u^*, \lambda, t) \le H(x^*, u, \lambda, t)$，即$u^*$使哈密尔顿函数为$u$的函数极小值。

2）u^*使哈密尔顿函数为u的函数最小值，这也是极小值原理的来源。若$H = -L - \lambda^T f$ 则有极大值原理，此时最优控制的必要条件为：

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = \max_{u \in U} H(x^*(t), u(t), \lambda(t), t)$$

3）极小值原理是性能指标取极小值的最优控制问题的必要条件，而非充分条件。

证明：

对于控制： $u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in [t_0, t) \\ u(t), & t \in [t, t+\varepsilon) \\ \tilde{u}^*(t), & t \in [t+\varepsilon, t_f] \end{cases}$ 对应的状态轨迹为：$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} x^*(t), & t \in [t_0, t) \\ \tilde{x}(t), & t \in [t, t+\varepsilon) \\ \tilde{x}^*(t), & t \in [t+\varepsilon, t_f] \end{cases}$

故有： $J(u_\varepsilon(\bullet)) - J(u^*(\bullet)) = \int_{t_0}^{t_f} [L(x_\varepsilon, u_\varepsilon, t) - L(x^*, u^*, t)]dt \geq 0$

对上式加减： $\frac{\partial L^T}{\partial x}(x_\varepsilon - x^*)$ 可得：

$$\int_{t_0}^{t_f} [L(x_\varepsilon, u_\varepsilon, t) - L(x^*, u^*, t) - \frac{\partial L^T}{\partial x}(x_\varepsilon - x^*) + \frac{\partial L^T}{\partial x}(x_\varepsilon - x^*)]dt \geq 0$$

由协状态方程可得： $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial (L + \lambda^T f)}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$

即： $-\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{\lambda} + \frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$ $\qquad -\frac{\partial L^T}{\partial x} = \dot{\lambda}^T + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x}$

故有：
$$\int_{t_0}^{t_f}[L(x_\varepsilon,u_\varepsilon,t)-L(x^*,u^*,t)-\frac{\partial L^T}{\partial x}(x_\varepsilon-x^*)-(\dot\lambda^T+\lambda^T\frac{\partial f}{\partial x})(x_\varepsilon-x^*)]dt\geq 0$$

其中：
$$\int_{t_0}^{t_f}\dot\lambda^T(x_\varepsilon-x^*)dt=\int_{t_0}^{t_f}d\lambda^T(x_\varepsilon-x^*)=\lambda^T(x_\varepsilon-x^*)\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T d(x_\varepsilon-x^*)=\lambda^T(x_\varepsilon-x^*)\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T(\dot x_\varepsilon-\dot x^*)dt$$
$$=\lambda^T(x_\varepsilon-x^*)\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T[f(x_\varepsilon,u_\varepsilon,t)-f(x^*,u^*,t)]dt$$

代入上式可得：
$$-\lambda^T(x_\varepsilon-x^*)\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\{[L(x_\varepsilon,u_\varepsilon,t)-L(x^*,u^*,t)]+\lambda^T[f(x_\varepsilon,u_\varepsilon,t)-f(x^*,u^*,t)]-\frac{\partial L^T}{\partial x}(x_\varepsilon-x^*)-\lambda^T\frac{\partial f}{\partial x}(x_\varepsilon-x^*)\}dt\geq 0$$

即：
$$-\lambda^T(x_\varepsilon-x^*)\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}[H(x_\varepsilon,u_\varepsilon,\lambda,t)-H(x^*,u^*,\lambda,t)-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T(x_\varepsilon-x^*)]dt\geq 0$$

按积分区间分段可得：

$$-\lambda^T(x_\varepsilon - x^*)\big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t}[H(x^*,u^*,\lambda,t) - H(x^*,u^*,\lambda,t) - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x^* - x^*)]dt$$

$$+\int_{t}^{t+\varepsilon}[H(\tilde{x},u,\lambda,t) - H(x^*,u^*,\lambda,t) - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (\tilde{x} - x^*)]dt$$

$$+\int_{t+\varepsilon}^{t_f}[H(\tilde{x}^*,\tilde{u}^*,\lambda,t) - H(x^*,u^*,\lambda,t) - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (\tilde{x}^* - x^*)]dt \ge 0$$

由于 $\lambda(t_f)=0$ ，当 $t=t_0$ 有： $x_\varepsilon = x^*$

故有： $-\lambda^T(x_\varepsilon - x^*)\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t}[H(x^*,u^*,\lambda,t) - H(x^*,u^*,\lambda,t) - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x^* - x^*)]dt = 0$

在 t 处： $\tilde{x}=x^*$ ，当 $\varepsilon\to 0$

$$\int_t^{t+\varepsilon}[H(x^*,u,\lambda,t)-H(x^*,u^*,\lambda,t)-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T(x^*-x^*)]dt=\int_t^{t+\varepsilon}[H(x^*,u,\lambda,t)-H(x^*,u^*,\lambda,t)]dt$$

$$=\varepsilon[H(x^*,u,\lambda,t)-H(x^*,u^*,\lambda,t)]+o(\varepsilon)$$

其中：$o(\varepsilon)$ 是关于 ε 的高阶无穷小。

令：$V^*(t+\varepsilon)=\int_{t+\varepsilon}^{t_f}[H(\tilde{x}^*,\tilde{u}^*,\lambda,t)-H(x^*,u^*,\lambda,t)-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T(\tilde{x}^*-x^*)]dt$

对 $V^*(t+\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 处用泰勒级数展开：$V^*(t+\varepsilon)=V^*(t)+\left.\dfrac{dV}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon+o(\varepsilon)$

当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\tilde{x}^*(t) = x^*(t), \qquad \tilde{u}^*(t) = u^*(t)$

故有， $V^*(t) = 0, \qquad \left.\frac{dV}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = 0$

即： $V^*(t+\varepsilon) = \int_{t+\varepsilon}^{t_f} [H(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*, \lambda, t) - H(x^*, u^*, \lambda, t) - \frac{\partial H}{\partial x}(\tilde{x}^* - x^*)]dt = o(\varepsilon)$

综上可得，对 $\forall u \in U$ ：

$$[H(x^*, u, \lambda, t) - H(x^*, u^*, \lambda, t)] + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0$$

即： $\forall u \in U \qquad H(x^*, u^*, \lambda, t) \leq H(x^*, u, \lambda, t)$

得证

例. 给定受控系统：$\dot{x}_1 = -x_2 + u \qquad x_1(0) = x_1^0$

$\dot{x}_2 = -u \qquad x_2(0) = x_2^0$

控制变量u 满足如下不等式: $0 < \underline{u} \le u \le \bar{u}$

求最优控制，使如下性能指标取得极小值。

$$J = \int_0^T (2x_1 + u)dt$$

解：哈密尔顿函数为

$$H = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t) = 2x_1 + u + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - x_2 \\ -u \end{bmatrix} = 2x_1 + u + \lambda_1 u - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 u$$

$$= 2x_1 - \lambda_1 x_2 + (1 + \lambda_1 - \lambda_2)u$$

H是u的线性函数，使H在 $0 < \underline{u} \le u \le \bar{u}$ 中取极小值有：$u^* = \begin{cases} \bar{u}, & 1 + \lambda_1 - \lambda_2 < 0 \\ \underline{u}, & 1 + \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \end{cases}$

由协状态方程：

$$\dot{\lambda}=\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\end{bmatrix}=-\frac{\partial H}{\partial x}=\begin{bmatrix}-2\\ \lambda_1\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}\lambda_1(T)\\ \lambda_2(T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

可得：

$$\lambda_1(t)=-2(t-T)$$

$$\lambda_2(t)=-(t-T)^2$$

换接函数：$\xi(t)=1+\lambda_1-\lambda_2=1-2(t-T)+(t-T)^2=(1-t+T)^2>0$

故最优控制 $u^*(t)\equiv \underline{u}$

《现代控制理论》MOOC课程

6.3.3 终端时间未固定的极小值原理

定理(极小值原理)

受控系统的状态方程为 $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$

初始状态为 $x(t_0) = x_0$

终端时间 t_f 不固定，终端状态 $x(t_f)$ 自由。控制 $u(t) \in U$ ， U 可为闭集。

寻求最优控制 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ 使性能指标 $J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]dt$ 取得极小值。

若取： $H = L[x(t), u(t), t] + \lambda^T f[x(t), u(t), t]$

则极小值存在的必要条件为：

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \lambda(t_f) = 0$$

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \qquad x(t_0) = 0$$

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = \min_{u \in U} H(x^*(t), u(t), \lambda(t), t)$$

且： $H\left(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\right)\Big|_{t_f^*} = 0$ 　　式中，$x^*(t), u^*(t)$ 为最优运动轨迹和最优控制。

证明：作时间变换

$$t \to \tau: \quad t(\tau) = t_0 + \int_0^{\tau} w(s)ds, \quad t(1) = t_f, \quad 0 < w(\tau) < \infty$$

$$\frac{dt}{d\tau} = w(\tau) \qquad dt = w(\tau)d\tau$$

将问题有 $t \in [t_0, t_f]$ 变换为：$\tau \in [0,1]$

系统状态方程为：$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau))w(\tau)$

目标函数为：$$J = \int_0^1 L(x(\tau), u(\tau))w(\tau)d\tau$$

取：$\tilde{H}[x(\tau),u(\tau),w(\tau),\lambda(\tau)]=L(x(\tau),u(\tau))w(\tau)+\lambda^T(\tau)f(x(\tau),u(\tau))w(\tau)$

$$H[x(\tau),u(\tau),\lambda(\tau)]=L(x(\tau),u(\tau))+\lambda^T(\tau)f(x(\tau),u(\tau))$$

$$\tilde{H}[x(\tau),u(\tau),w(\tau),\lambda(\tau)]=H[x(\tau),u(\tau),\lambda(\tau)]w(\tau)$$

若 $x^*(\tau)$， $u^*(\tau)$， $w^*(\tau)$ 为变换后问题的最优解，则必为下列二个问题的最优解：

问题（A)：固定 $w^*(\tau)$，求取 $x^*(\tau)$， $u^*(\tau)$,使如下问题取极小

$$J=\int_0^1 L(x(\tau),u(\tau))w(\tau)d\tau \qquad s.t. \quad \dot{x}(\tau)=f(x(\tau),u(\tau))w(\tau)$$

问题（B)：固定 $u^*(\tau)$，求取 $x^*(\tau)$， $w^*(\tau)$,使如下问题取极小

$$J=\int_0^1 L(x(\tau),u(\tau))w(\tau)d\tau \qquad s.t. \quad \dot{x}(\tau)=f(x(\tau),u(\tau))w(\tau)$$

对于问题（A），应用终端时间固定的极小值原理，其必要条件为：

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} w(\tau)$$

由 $\frac{dt}{d\tau} = w(\tau)$ 有：$\dot{\lambda}(\tau) = \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} = \frac{d\lambda(t)}{dt} w(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial x} w(\tau)$

即 $\dot{\lambda}(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$

$$\tilde{H}[x^*(\tau), u^*(\tau), w^*(\tau), \lambda(\tau)] = \min_{u \in U} \tilde{H}[x^*(\tau), u(\tau), w^*(\tau), \lambda(\tau)]$$

由于 $w^*(\tau)$ 固定，故 $H[x^*(\tau), u^*(\tau), \lambda(\tau)] = \min_{u \in U} H[x^*(\tau), u(\tau), \lambda(\tau)]$

即：$H[x^*(t), u^*(t), \lambda(t)] = \min_{u \in U} H[x^*(t), u(t), \lambda(t)]$

对于问题（B），应用变分法，其必要条件为：

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial w(\tau)} = H = 0$$

即：

$$H[x^*(t), u^*(t), \lambda(t)] \equiv 0$$

从而：

$$H[x^*(t), u^*(t), \lambda(t)]\Big|_{t_f^*} = 0$$

证毕

例. 给定受控系统：

$$\dot{x}_1 = -0.5x_2 - 4u \qquad x_1(0) = 50$$
$$\dot{x}_2 = u \qquad x_2(0) = 1$$

控制变量u满足如下不等式

$$-1 \le u \le 1$$

求最优控制及终端时刻t_f，使如下性能指标取得极小值： $J = \int_0^{t_f} (x_2 - u)dt$

解：哈密尔顿函数为

$$H = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$$
$$= x_2 - u + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5x_2 - 4u \\ u \end{bmatrix} = x_2 - u - 0.5x_2\lambda_1 - 4u\lambda_1 + \lambda_2 u$$

$$H = x_2 - 0.5x_2\lambda_1 + (\lambda_2 - 1 - 4\lambda_1)u$$

为使H函数取得极小值： $u^* = \begin{cases} 1, & \lambda_2 - 1 - 4\lambda_1 < 0 \\ -1, & \lambda_2 - 1 - 4\lambda_1 > 0 \end{cases}$

由协状态方程： $\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -1 + 0.5\lambda_1 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1(t_f) = 0 \\ \lambda_2(t_f) = 0 \end{cases}$

解得： $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -t + t_f \end{cases}$

换接函数为： $\xi(t) = \lambda_2 - 1 - 4\lambda_1 = -t + t_f - 1$

由： $H = x_2 - 0.5x_2\lambda_1 + (\lambda_2 - 1 - 4\lambda_1)u = x_2 + (-t + t_f - 1)u$

当：$t = t_f$ 时，$\xi = -1$，$H = 0$ 故： $x_2(t_f) = 1$

当：$t \in [0, t_f - 1)$, $\xi > 0$, $u^* = -1$

由： $\begin{cases} \dot{x}_2 = -1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$ 得： $x_2 = 1 - t$

当：$t \in (t_f - 1, t_f]$, $\xi < 0$, $u^* = 1$

由： $\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 \\ x_2(t_f) = 1 \end{cases}$ 解得： $x_2(t) = t - t_f + 1$

由于状态连续，在换接点 $t = t_f - 1$ ，必有

$$x_2(t_f - 1) = t_f - 1 - t_f + 1 = 1 - (t_f - 1)$$

故：$t_f = 2$

最优控制为：$u^* = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 < t \le 2 \end{cases}$

《现代控制理论》MOOC课程

6.3.4 极小值原理

定理(极小值原理)

受控系统的状态方程为 $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$

初始状态为$x(t_0) = x_0$

终端状态 $x(t_f)$满足约束 $g(x(t_f), t_f) = 0$

控制 $u(t) \in U$， U 可为闭集

寻求最优控制$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$使性能指标 $J = \Phi\left(x\left(t_f\right), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]dt$ 取得极小值。

若取： $H = L[x(t), u(t), t] + \lambda^T f[x(t), u(t), t]$

则泛函极值存在的必要条件为：

状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

协状态方程：

$$
\begin{cases}
\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\
\lambda(t_f) = \left(\dfrac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right) + \left(\dfrac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} \right)^T \mu \\
g[x(t_f), t_f] = 0 \\
H[x(t_f), u(t_f), t_f] + \left(\dfrac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) + \mu^T \left(\dfrac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \right) = 0
\end{cases}
$$

H 函数在最优轨迹和最优控制上取极小值：

$$
H(x^*(t), u^*(t), \lambda) = \min_{u \in U} H(x^*(t), u(t), \lambda)
$$

式中， $x^*(t)$、$u^*(t)$ 为最优状态轨迹和最优控制。

$$
\begin{cases}
t_f \quad 固定, & H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t)] \equiv C \\
t_f \quad 未固定, & H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t)]\Big|_{t_f^*} = 0
\end{cases}
$$

证明：略。

基本思想是将混合型目标函数化为积分型目标函数，将终端目标集约束化为动态约束。然后用与证明积分型性能指标极小值原理相同的方法来证明。

例如，对于目标函数，由于 $\Phi(x(t_0),t_0)$ 为常数

如下目标函数与原问题目标函数 J 等价

$$
\bar{J} = \Phi(x(t_f),t_f) - \Phi(x(t_0),t_0) + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t)]dt
$$

目标函数$\bar{J}$可进一步表示为：

$$\bar{J}=\int_{t_0}^{t_f}[\frac{d\Phi(x(t),t)}{dt}+L(x(t),u(t))]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial\Phi(x(t),t)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi^T(x(t),t)}{\partial x(t)}\frac{dx(t)}{dt}+L(x(t),u(t))]dt$$

$$\bar{J}=\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial\Phi(x(t),t)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi^T(x(t),t)}{\partial x(t)}f(x(t),u(t))+L(x(t),u(t))]dt$$

这样复合型目标函数就化为了积分型目标函数。

《现代控制理论》MOOC课程

6.3.5 时间最优控制

一.线性定常时间最优控制问题的数学描述

问题：已知受控系统的状态方程为：

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

求满足如下不等式约束条件

$$|\boldsymbol{u}| \le \mathbf{1} \text{ 或} |\boldsymbol{u}| \le C, \quad t \in [0, t_f]$$

的控制 $u(t)$，使系统自某一初始状态$\boldsymbol{x}(0)$转移到状态空间原点，即$\boldsymbol{x}(t_f) = 0$。

使如下性能指标取极小值： $J = \int_0^{t_f} dt$

二.线性定常系统时间最优控制

系统哈密尔顿函数为：

$$H[x(t),\ u(t),\ \lambda(t)] = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t) = 1 + \lambda^T Ax + \lambda^T Bu$$

运用最小值原理，若系统取得最优控制必有控制 u^*，使得：

$$H[x^*,\ u^*,\ \lambda^*] = \min_{|u|\le 1}\{1 + (\lambda^*)^T Ax^* + (\lambda^*)^T Bu\} = 1 + (\lambda^*)^T Ax^* + \min_{|u|\le 1}\{(\lambda^*)^T Bu\}$$

可得最优控制为： $u^*(t) = -sign[(\lambda^*)^T B]$

协状态方程为：

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda$$

可解得：

$$\lambda(t) = e^{-A^T t}\lambda(0)$$

由极小值原理得哈密尔顿函数在终端时刻的值为：

$$H\Big|_{t=t_f} = 0$$

$$H[x(t_f),\ u(t_f),\ \lambda(t_f)] = 1 + \lambda^T(t_f)Ax(t_f) + \lambda^T(t_f)Bu(t_f) = 0$$

可知：$\lambda(t_f) \neq 0$ 故：$\lambda(0) \neq 0$

故最优控制为：$u^*(t) = -sign[(\lambda^*)^T B] = -sign(\lambda^T(0)e^{-At}B) = -sign(\xi(t))$

$$u_j^*(t) = -sign(\xi_j(t)) = -sign(\lambda^T(0)e^{-At}b_j) \qquad j = 1, 2\cdots, r$$

最优控制完全由$\xi(t)$的符号和变符号的时间决定，称$\xi(t)$为换接函数。

b_j为系统输入矩阵B的列向量。

三. 时间最优控制正则的充要条件

定义：若对时间最优控制问题，协状态方程的任一非零解$\lambda(t)$都使换接函数的每一个分量$\xi_j(t)$在$[t_0, t_f^*]$上不存在零聚点，则称时间最优控制问题为正则的，否则为奇异的。

所谓$\xi_j(t)$的零聚点$\bar{t} \in [t_0, t_f^*]$是指$\xi_j(\bar{t}) = 0$，且在$\bar{t}$的任何邻域内都存在$\xi_j(t)$的零点。

定理：线性定常时间最优控制问题为正则的充要条件为：

$$rankG_j = n, \qquad j = 1,2,\cdots,r$$

$$G_j = \left[b_j, \boldsymbol{A}b_j, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}b_j\right]$$

证明：充分条件：

若 $rankG_j = n, \quad j = 1,2,\cdots,r$，则时间最优控制问题为正则。

反设$rankG_j = n, \quad j = 1,2,\cdots,r$ 存在一个正整数j_k，使得：

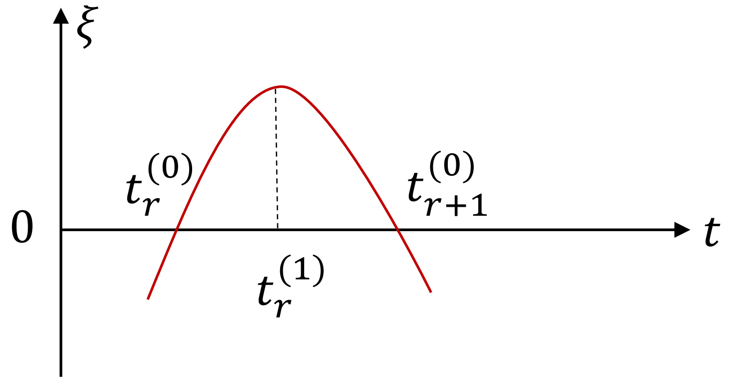
$$\xi_{j_k}(t) = \lambda^T(0)e^{-At}b_{j_k}$$

在区间$[t_0, t_f]$上有零聚点 $\bar{t} \in [t_0, t_f]$，即在 $\bar{t}$ 的任何邻域内总存在$\xi_{j_k}(t)$的零点。

因此，存在无穷时间点列$t_r^{(0)} \in [t_0, t_f] \quad (r = 1, 2, \cdots)$

满足：$\lim\limits_{r\to\infty} t_r^{(0)} = \bar{t}$

且 $\xi_{j_k}(t_r^{(0)}) = \lambda^T(0)e^{-At_r^{(0)}}b_{j_k} = 0$



根据罗尔定理：一个连续可微函数的两个零点之间其导数至少存在一个零点。

故必存在无穷点列$t_r^{(1)}(r = 1, 2, \cdots)$ 满足：$\bar{t} \in [t_0, t_f]$

且使的 $$\left.\frac{d\xi_{j_k}(t)}{dt}\right|_{t=t_r^{(1)}} = -\lambda^T(0)e^{-At}Ab_{j_k}\Big|_{t=t_r^{(1)}} = 0$$

反复应用罗尔定理，可得：

$$\left.\frac{d^2\xi_{j_k}(t)}{dt^2}\right|_{t=t_r^{(2)}} = \lambda^T(0)e^{-At}A^2b_{j_k}\Big|_{t=t_r^{(2)}} = 0, \quad t_r^{(1)} < t_r^{(2)} < t_{r+1}^{(1)}$$

$$\cdots$$

$$\left.\frac{d^{n-1}\xi_{j_k}(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_r^{(n-1)}} = \lambda^T(0)e^{-At}A^{n-1}b_{j_k}\Big|_{t=t_r^{(n-1)}} = 0, \quad t_r^{(n-2)} < t_r^{(n-1)} < t_{r+1}^{(n-2)}$$

显然有： $\lim_{r\to\infty} t_r^{(1)} = \lim_{r\to\infty} t_r^{(2)} = \cdots = \lim_{r\to\infty} t_r^{(n-1)} = \bar{t}$

故有：

$$\lambda^T(0)e^{-A\bar{t}}b_{j_k} = 0$$

$$\lambda^T(0)e^{-A\bar{t}}Ab_{j_k} = 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda^T(0)e^{-A\bar{t}}A^{n-1}b_{j_k} = 0$$

因此有： $\lambda^T(0)e^{-A\bar{t}}[b_{j_k} \quad Ab_{j_k} \cdots A^{n-1}b_{j_k}] = 0$

由于： $\lambda^T(0)e^{-A\bar{t}} \neq 0$

故有： $rank[b_{j_k} \quad Ab_{j_k} \cdots A^{n-1}b_{j_k}] < n$

这与假设 $rankG_j = n, \quad j = 1, 2, \cdots, r$ 矛盾。反设不成立。

即 $\xi_{j_k}(t)$ 在区间 $[t_0, t_f]$ 没有零聚点，问题正则。

必要条件：若正则，必有 $rankG_j = n, \quad j = 1, 2, \cdots, r$

反设正则，但存在一个 $j(1 \le j \le r)$ 使得：$rankG_j < n$

故必存在 $\alpha \ne 0, \quad \alpha \in R^n$ 使

$$\alpha^T G_j = \alpha^T [b_j \ Ab_j \ \cdots \ A^{n-1} b_j] = 0$$

即 $\alpha^T b_j = 0, \quad \alpha^T A b_j = 0 \quad , \cdots, \quad \alpha^T A^{n-1} b_j = 0$

由凯莱—哈密尔顿定理,矩阵指数函数 e^{-At} 可表示为：

$$e^{-At}=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i(t)A^i$$

用 α^T、b_j 左、右乘上式，可得：$\alpha^T e^{-At}b_j=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i(t)a^T A^i b_j$

由 $\alpha^T b_j=0,\quad \alpha^T A b_j=0\quad ,\cdots,\quad \alpha^T A^{n-1}b_j=0$

可得：$\alpha^T e^{-At}b_j=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i(t)a^T A^i b_j=0$

由 $\lambda(0)\neq 0$，取 $\lambda(0)=\alpha$　　则：$\xi_j(t)=\lambda^T(0)e^{-At}b_j\equiv 0$

故问题奇异，这与问题正则的假设矛盾。反设不成立，必要性得证。　得证

《现代控制理论》MOOC课程

6.3.5 时间最优控制

四.时间最优控制的唯一性

定理：设线性定常时间最优控制问题是正则的，若其时间最优控制存在，则最优控制必是唯一的。

五.开关次数

定理：设线性定常时间最优控制问题是正则的，且其最优控制存在。记最优控制 $u^*(t)$ 的第j 个分量$u_j^*(t)$ 的开关次数为N_j ($u_j^*(t)$开关次数为相应换接函数的零点个数),若系统的n个特征值均为实数，则开关次数：

$$N = \max_j N_j \le n-1$$

例：已知受控系统的状态方程为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

式中： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

求满足如下不等式约束条件

$$|u| \le 1 \qquad t \in [0, \quad t_f]$$

的控制 $u(t)$ ，使系统自某一初始状态

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T$$

转移到状态空间原点的时间最短。即使如下性能指标取极小值：

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

解： 哈密尔顿函数为：

$$H[x(t), \quad u(t), \quad \lambda(t)] = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$$

协状态方程为：
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \dot{\lambda}_1^*(t) = 0$$
$$\dot{\lambda}_2^*(t) = -\lambda_1^*$$

可得：
$$\lambda_1^*(t) = C_1$$
$$\lambda_2^*(t) = -C_1 t + C_2$$

运用极小值原理可得：
$$H[x^*, \quad u^*, \quad \lambda^*] = \min_{|u|\le 1}\{1 + \lambda_1^* x_2^* + \lambda_2^* u(t)\}$$
$$= 1 + \lambda_1^* x_2^* + \min_{|u|\le 1}\{\lambda_2^* u(t)\}$$

可得最优控制为： $u^*(t) = -sign\lambda_2^*(t)$

当： $\lambda_2^*(t) = -C_1 t + C_2 > 0$ 有： $u^*(t) = -1$

状态方程为： $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ $\qquad x_1(0) = x_{10}$

$\dot{x}_2(t) = u^*(t) = -1$ $\qquad x_2(0) = x_{20}$

解得： $x_2(t) = -t + x_{20}$

$$x_1(t) = x_{20}t - \frac{1}{2}t^2 + x_{10}$$

消去t可得： $x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + (x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2)$

当：$\lambda_2^*(t) = -C_1 t + C_2 < 0$ 有： $u^*(t) = 1$

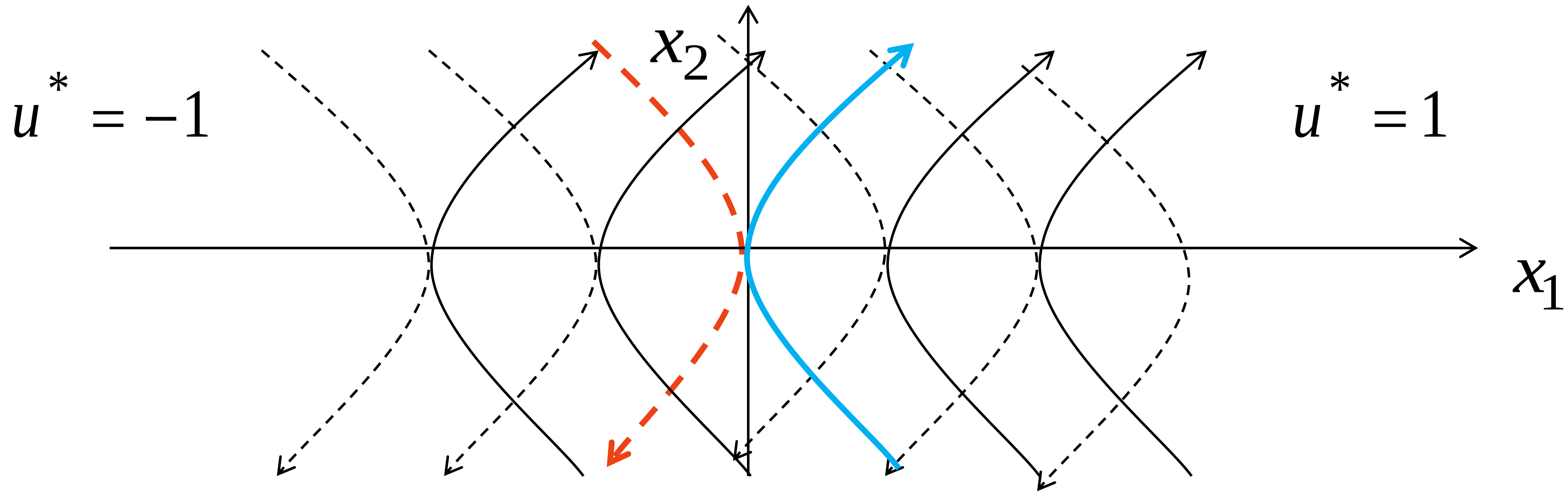
状态方程为： $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ $\qquad x_1(0) = x_{10}$

$\dot{x}_2(t) = 1$ $\qquad x_2(0) = x_{20}$

解得：$x_2(t) = t + x_{20}$

$$x_1(t) = x_{20}t + \frac{1}{2}t^2 + x_{10}$$

消去t可得：$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + (x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2)$



通过原点的曲线为：

当 $u(t)=-1$：　$x_1(t)=-\frac{1}{2}x_2^2(t)$　　$x_2(t)\ge 0$

当 $u(t)=1$：　$x_1(t)=\frac{1}{2}x_2^2(t)$　　$x_2(t)\le 0$

合并为一个方程为γ称为开关曲线：$x_1(t)=-\frac{1}{2}x_2(t)\left|x_2(t)\right|$

故最优控制规律与初始状态的位置有关，当初始状态

在γ的上半沿上：　$u^*=\{-1\}$　　在γ的下半沿上：$u^*=\{+1\}$

在γ的右侧：$u^*=\{-1,+1\}$　　在γ的左侧：$u^*=\{+1,-1\}$

最优时间的计算步骤：

1) 根据初始状态的位置确定 u^* 的取值。

2) 将 $u=u^*$ 代入状态方程求出状态轨线。

3) 计算状态轨线与开关曲线的交点，并计算从初始状态到交点处的时间。

4) 计算从状态轨线与开关曲线的交点到坐标原点的时间。

5) 将两段时间加起来就是总的最优控制时间。

$$t_f^*=\begin{cases} x_{20}+\sqrt{4x_{10}+2x_{20}^2} & \text{当}(x_{10},x_{20})\text{位于}\gamma\text{曲线的右侧} \\ |x_{20}| & \text{当}(x_{10},x_{20})\text{位于}\gamma\text{曲线上} \\ -x_{20}+\sqrt{-4x_{10}+2x_{20}^2} & \text{当}(x_{10},x_{20})\text{位于}\gamma\text{曲线的左侧} \end{cases}$$

《现代控制理论》MOOC课程

6.4 线性二次型最优控制

一.线性二次型最优控制问题的数学描述

问题LQ：给定线性定常系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0 \qquad t \in [0, t_f]$$

寻找最优控制$u^*(t)$，使得系统由指定初始状态x_0出发的运动，导致如下二次型性能指标：

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

取得极小值。

其中，t_f 为终端时间，S, Q为$n \times n$阶半正定对称权矩阵；R为$r \times r$阶正定对称权矩阵。

- 目标函数的物理意义：应用最小的控制能量，使得系统在指定时间区间内的状态与平衡状态的偏差最小。

第一项，$\frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f)$强调了终端时刻系统状态与平衡状态的偏差最小；

第二项 $\frac{1}{2}\int_0^{t_f} x^T(t)Qx(t)dt$ 希望系统的整个运动轨迹与平衡状态的偏差最小；

第三项 $\frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^T(t)Ru(t)dt$ 希望控制能量最小；

- 线性二次型最优控制系统的分类：

1. 当终端时刻是固定的且为有限值时，称为有限时间线性二次型最优控制问题；

2. 当终端时刻 $t_f \to \infty$ ，称为无限时间线性二次型最优控制问题；此时

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

3. 当寻找最优控制的目的是将系统由初始状态驱动到平衡状态，同时使二次型性能指标最小，称为线性二次型最优调节问题；

4. 当寻找最优控制的目的是使系统的输出跟踪已知或未知的参考信号，同时使二次型性能指标最小，称为线性二次型最优跟踪问题；

- 有限时间问题与无限时间问题，对控制及控制系统的要求有着显著的不同；而跟踪问题则可以看作是调节问题的一种推广。

二. 有限时间LQ调节问题

1.有限时间LQ最优控制的充要条件

定理：给定线性定常系统和二次型性能指标

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0 \quad t \in [0, t_f]$$

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

其中，t_f 固定， $S = S^T \geq 0, \quad Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T > 0$

则存在最优反馈控制 $S=S^T\geq 0,\ Q=Q^T\geq 0,\ R=R^T>0$ 的充要条件为：$\boldsymbol{K}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)$

其中，$S=S^T\geq 0,\ Q=Q^T\geq 0,\ R=R^T>0$ 且满足如下形式的Riccati微分方程

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) = -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t), \quad \boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{S}$$

的解，且最优性能指标为： $J^* = \dfrac{1}{2} x_0^T P(0) x_0$

证明：必要性

当系统取得形如$u^*(t)=-K(t)x(t)$的最优控制时，必有 $K(t)=R^{-1}B^TP(t)$

$P(t)$为Riccati矩阵微分方程的解。

系统的哈密尔顿函数为： $H(x,u,\lambda,t)=\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}u^TRu+\lambda^TAx+\lambda^TBu$

系统已取得最优控制，控制方程$\frac{\partial H}{\partial u}=0$ 必成立，可得：$Ru+B^T\lambda=0$

由于 $R>0$，故：$u^*(t)=-R^{-1}B^T\lambda$

要使最优控制具有 $u^*(t)=-K(t)x(t)$的形式，协状态变量必具有如下形式：$\lambda=P(t)x(t)$

对上式两端求导可得：$\dot{\lambda}=\dot{P}(t)x(t)+P(t)\dot{x}(t)$

由协状态方程： $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$$

可得： $\dot{\lambda} = -[\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\lambda]$

$$\lambda(t_f) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t_f)$$

故： $\dot{P}(t)x + P(t)\dot{x} = -[Qx + A^T\lambda] = -[Qx + A^T P(t)x]$

将状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BR^{-1}B^T P(t)x$ 代入上式，可得：

$$\dot{P}(t)x + P(t)[Ax - BR^{-1}B^T P(t)x] = -[Qx + A^T P(t)x]$$

故有： $[\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t)]x = 0$

由于已给定 $x(0) = x_0$，且在过渡过程中 $x(t) \neq 0$ ，故有：

$$\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t) = 0$$

由 $\lambda(t_f)=Sx(t_f)$ 及 $\lambda(t_f)=P(t_f)x(t_f)$ 可得：$P(t_f)=S$

即： $\dot{P}(t)=-P(t)A-A^TP(t)-Q+P(t)BR^{-1}B^TP(t),\quad P(t_f)=S$

对上式两边取转置：

$$\dot{P}^T(t)=-A^TP^T(t)-P^T(t)A-Q+P^T(t)BR^{-1}B^TP^T(t),\quad P^T(t_f)=S$$

由于 $P^T(t)$、 $P(t)$ 为同一Riccati方程的解，故 $P^T(t)=P(t)$

故当系统取得形如 $u^*(t)=-K(t)x(t)$ 的最优控制时，必有

$$K(t)=R^{-1}B^TP(t)$$

$P(t)$为Riccati矩阵微分方程的解， 且$P(t)\geq 0$， $P(t)=P^T(t)$ 。 必要性得证

充分性：

$P(t)$为Riccati矩阵微分方程的解， $x(t)$ 为系统在$[0,t_f]$区间上容许控制$u(t)$作用下的状态，则对如下函数求导：

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$$

可得： $$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \dot{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}(t)\dot{\boldsymbol{x}}$$

$$= [\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{B}^T]\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T[-\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)]$$

$$= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

$$+ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$= -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$$

$$= -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{u}(t)$$

$$+ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$$

$$= -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) + [\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}]^T \boldsymbol{R}[\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}]$$

对上式两边从0到t_f积分：

$$\int_0^{t_f} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x})dt = \boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{P}(t_f)\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{x}(0)$$

$$= \int_0^{t_f} \{-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) + [\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}]^T \boldsymbol{R}[\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}]\}dt$$

$$= -\int_0^{t_f} (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))dt + \int_0^{t_f} [\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}]^T \boldsymbol{R}[\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}]dt$$

$$J(u(\bullet)) = \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [u(t) + R^{-1}B^T P(t)x]^{\mathrm{T}} \mathrm{R}[u(t) + R^{-1}B^T P(t)x]dt$$

由于 $R>0$ 故：$[\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}]^{T}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}]\geq 0$

故，当 $\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}=0$

即：$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$ 时，目标函数取得极小值：

$$J^{*}(u(\bullet))=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{T}(0)\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{x}(0)$$

充分性得证。

得证

2. 有限时间线性二次型最优调节器的设计步骤

(1). 根据工程经验和性能分析，确定权矩阵S，Q，R；

(2). 求解黎卡提方程 $-\dot{P}(t)=P(t)A+A^T P(t)+Q-P(t)BR^{-1}B^T P(t)$

$$P(t_f)=S,\quad t\in[0,t_f]$$

(3).计算反馈增益阵$K^*(t)$ 及最优控制$u^*(t)$

$$K^*(t)=R^{-1}B^T P(t)、u^*(t)=-K^*(t)x^*(t)$$

(4).计算最优状态轨迹

$$\dot{x}^*(t)=Ax^*(t)-BR^{-1}B^T P(t)x^*(t),\quad x^*(0)=x_0$$

(5).计算最优目标函数值 $J^*=J(u^*(\cdot))=\frac{1}{2}x_0^T P(0)x_0$

《现代控制理论》MOOC课程

6.4 线性二次型最优控制

三. 无限时间LQ调节问题

1.无限时间LQ最优控制的充要条件

定理：给定完全能控的线性定常系统和二次型性能指标

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

其中， $Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T > 0$

则存在最优反馈控制 $u^*(t) = -Kx(t)$ 的充要条件为

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}$$

其中，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \geq 0$ 且为满足如下形式的Riccati代数方程

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = 0$$

的解，且最优性能指标为： $J^* = \frac{1}{2}x_0^T P x_0$

证明：必要条件：当系统用状态反馈 $u^*(t) = -Kx(t)$ 实现了最优控制时，

要证明反馈矩阵 $K = R^{-1}B^TP$，其中P为Riccati代数方程的解。

系统的哈密尔顿函数为：$H(x,u,\lambda,t) = \frac{1}{2}x^TQx + \frac{1}{2}u^TRu + \lambda^TAx + \lambda^TBu$

由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 可得：$Ru + B^T\lambda = 0$

由于 $R > 0$，故：$u^*(t) = -R^{-1}B^T\lambda$

要使最优控制具有 $u^*(t) = -Kx(t)$ 的形式，协状态量必具有如下形式：

$$\lambda = Px(t)$$

故：$u^*(t) = -R^{-1}B^T\lambda = -R^{-1}B^TPx$

由协状态变量和状态变量的关系$\lambda = Px(t)$可得：$\dot{\lambda} = P\dot{x}(t)$

由协状态方程 $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ $\lambda(t_f) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}$ 可得： $\dot{\lambda} = -[Qx + A^T\lambda]$ $\lambda(\infty) = 0$

将$\dot{\lambda}$、$\dot{x}(t)$ 代入 $\dot{\lambda} = P\dot{x}(t)$ 有：$-[Qx(t) + A^T\lambda] = P(Ax(t) + Bu)$

故有：$-[Qx(t) + A^TPx(t)] = P(Ax(t) - BR^{-1}B^TPx(t))$

$$[A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP]x(t) = 0$$

故可得：$A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$

对上式取转置可知P^T也满足该方程，故有：$P = P^T$

故当系统取得形如$u^*(t) = -Kx(t)$ 的最优控制时，必有 $K = R^{-1}B^TP$

P为Riccati矩阵代数方程的解。 必要性得证。

充分性：

P为Riccati矩阵代数方程的解，$x(t)$为系统容许控$u(t)$作用下的状态，则对如下函数求导

$$x(t)^T Px(t)$$

可得：$\frac{d}{dt}(x^T(t)Px(t)) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) = (Ax+Bu)^T Px + x^T P(Ax+Bu)$

$$= x^T A^T Px + x^T PAx + u^T B^T Px + x^T PBu$$

$$= x^T (A^T P + PA)x + u^T B^T Px + x^T PBu$$

$$= x^T (-Q + PBR^{-1}B^T P)x + u^T B^T Px + x^T PBu$$

$$= -x^T Qx - u^T Ru + u^T Ru + x^T PBRR^{-1}R^{-1}B^T Px + u^T RR^{-1}B^T Px + x^T PBRR^{-1}u$$

$$= -x^T Qx - u^T Ru + [u + R^{-1}B^T Px]^T R[u + R^{-1}B^T Px]$$

对上式两边积分可得：

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\{-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}+[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}]^T\boldsymbol{R}[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}]\}dt$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}]^T\boldsymbol{R}[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}]dt$$

$$J(u(\bullet))=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}]^T\boldsymbol{R}[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}]dt$$

故，当 $\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=0$ 即：$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 时

目标函数取得极小值： $J^*(u(\bullet))=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T{}_0\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$

由于 $J^*(u(\bullet))\geq 0$ ，可得 $P\geq 0$ 充分性得证。 得证

2. 无限时间线性二次型最优调节器的设计步骤

(1). 根据工程经验和性能分析，确定权矩阵Q，R；

(2). 求解黎卡提方程 $PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

(3).计算反馈增益阵 K^* 及最优控制 $u^*(t)$

$$K^*(t) = R^{-1}B^T P、u^*(t) = -K^* x^*(t)$$

(4).计算最优状态轨迹

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) - BR^{-1}B^T Px^*(t), \quad x^*(0) = x_0$$

(5).计算最优目标函数值 $J^* = J(u^*(\cdot)) = \frac{1}{2} x_0^T P x_0$

例：给定线性定常系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1$$
$$\dot{x}_2 = u, \quad x_2(0) = 1$$

求最优反馈控制 u^* 使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (4x_1^2 + u^2)dt$$

取极小值.

解：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad R = 1$$

令 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$

由Riccati代数方程：

$$A^T P + PA + Q = PBR^{-1}B^T P$$

可得：
$$P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

故 $$u^* = -R^{-1}B^T Px = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2x_1 - 2x_2$$

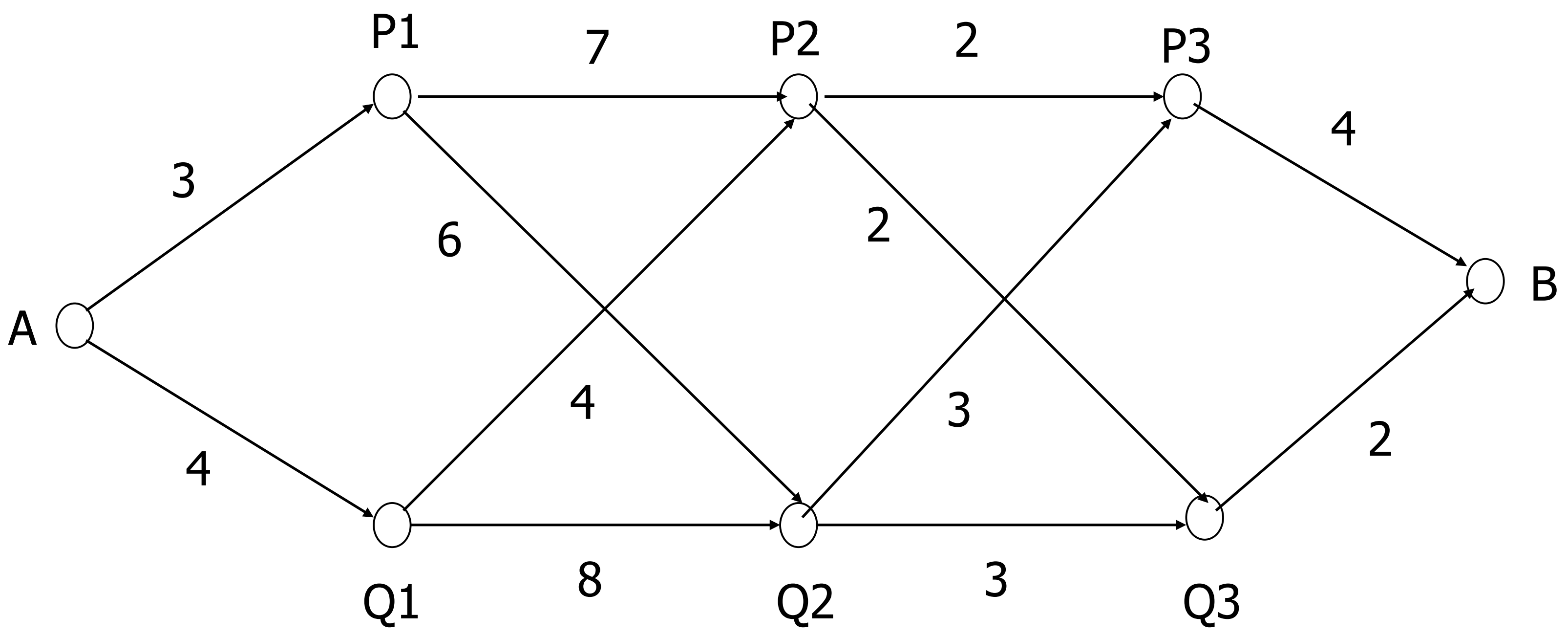
$$J^* = \frac{1}{2}x_0^T P x_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

《现代控制理论》MOOC课程

6.5 动态规划法

例：最优路线决策问题

从A城到B城的线路如下图所示，确定最优路径，使A城到B城的时间最短，其中线段中的数字表示走这路程所需的时间。



解：方法一：穷举法

找出所有可能的行车路径，计算行走每一路径所需的时间，比较大小，得出最优路径。

共有4个路段，每个节点有二种选择，故共有8条路径。

$$2^{n-1}=2^{4-1}=8$$

计算 $(4-1)2^{n-1}=24$次加法得到行走每一路径所需的时间如下：

(1) $AP1P2P3B=16$　　(5) $AQ1Q2Q3B=17$

(2) $AP1Q2Q3B=14$　　(6) $AQ1P2P3B=14$

(3) $AP1Q2P3B=16$　　(7) $AQ1P2Q3B=12$

(4) $AP1P2Q3B=14$　　(8) $AQ1Q2P3B=19$

比较7次可得最优路径为(7)，所需时间为12。

对电力网络的节点编号优化问题：节点数3千个，则编号排序方式种类为：

$$3000! = 4.149 \times 10^{9130}$$

假定每种编号方式，计算新增元个数的计算时间为1ms

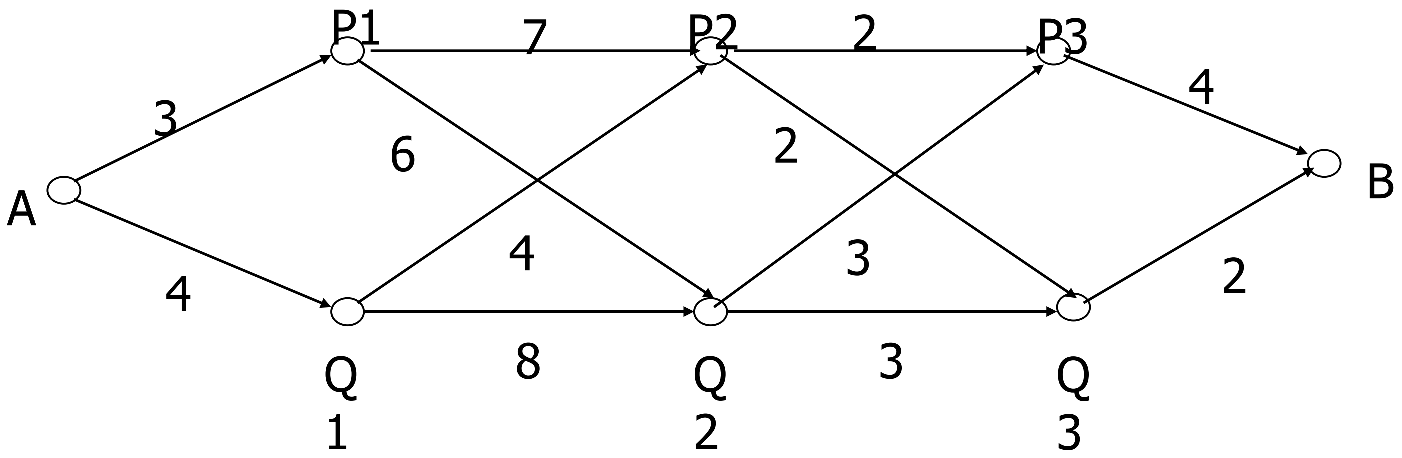
则每一种编号方式的新增元都计算出来需 1.316×10^{9121} 年。

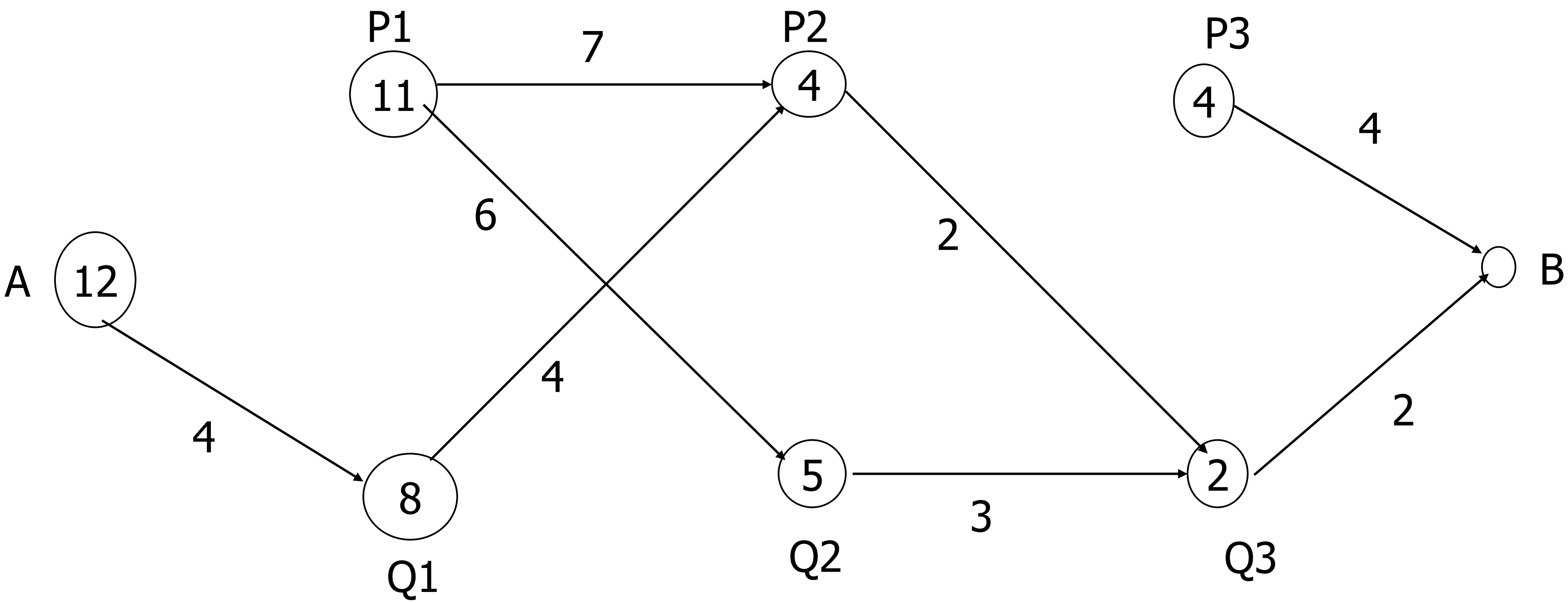
上次宇宙大爆炸的时间距今约在150亿年。

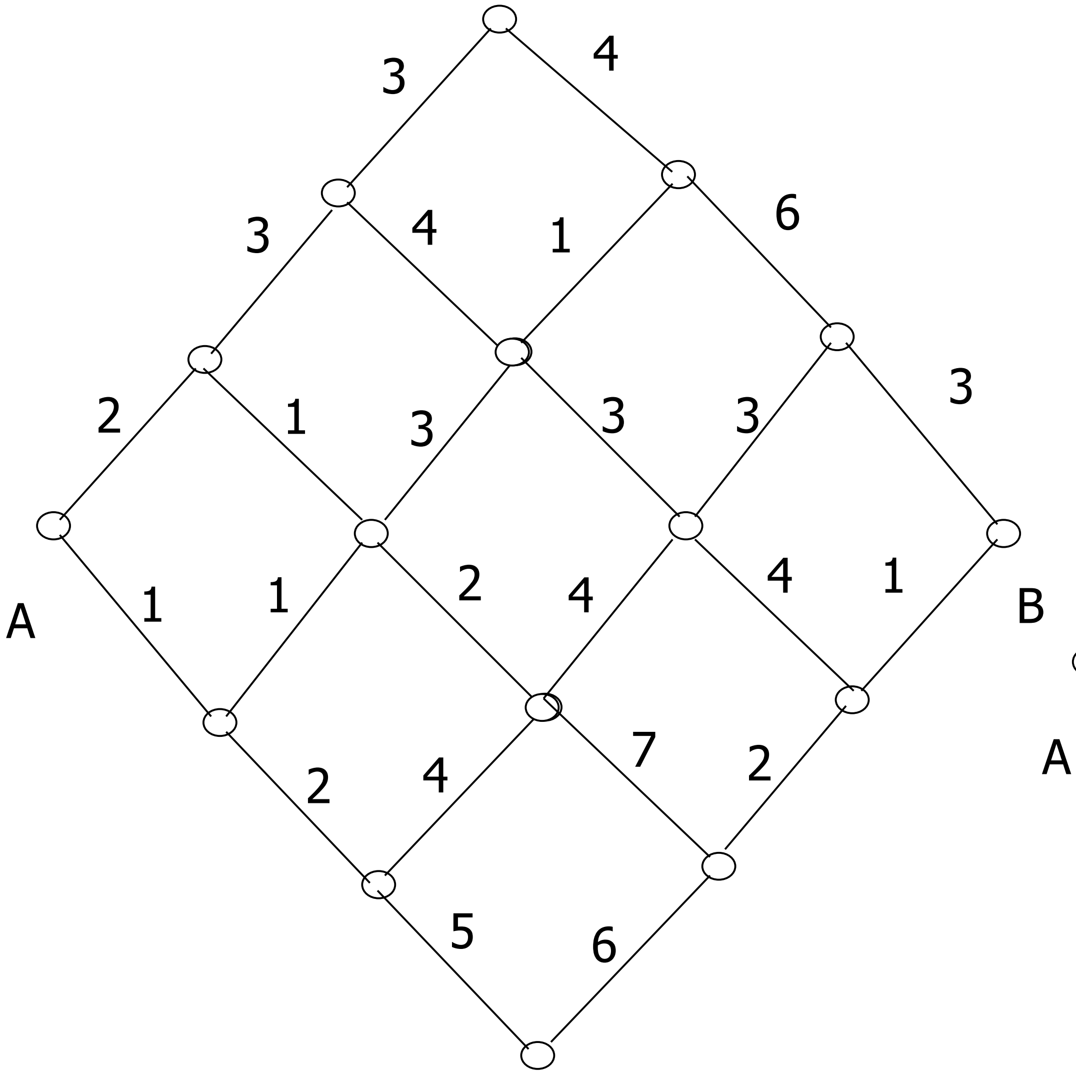
方法二：动态规划法（逆向分级计算法）

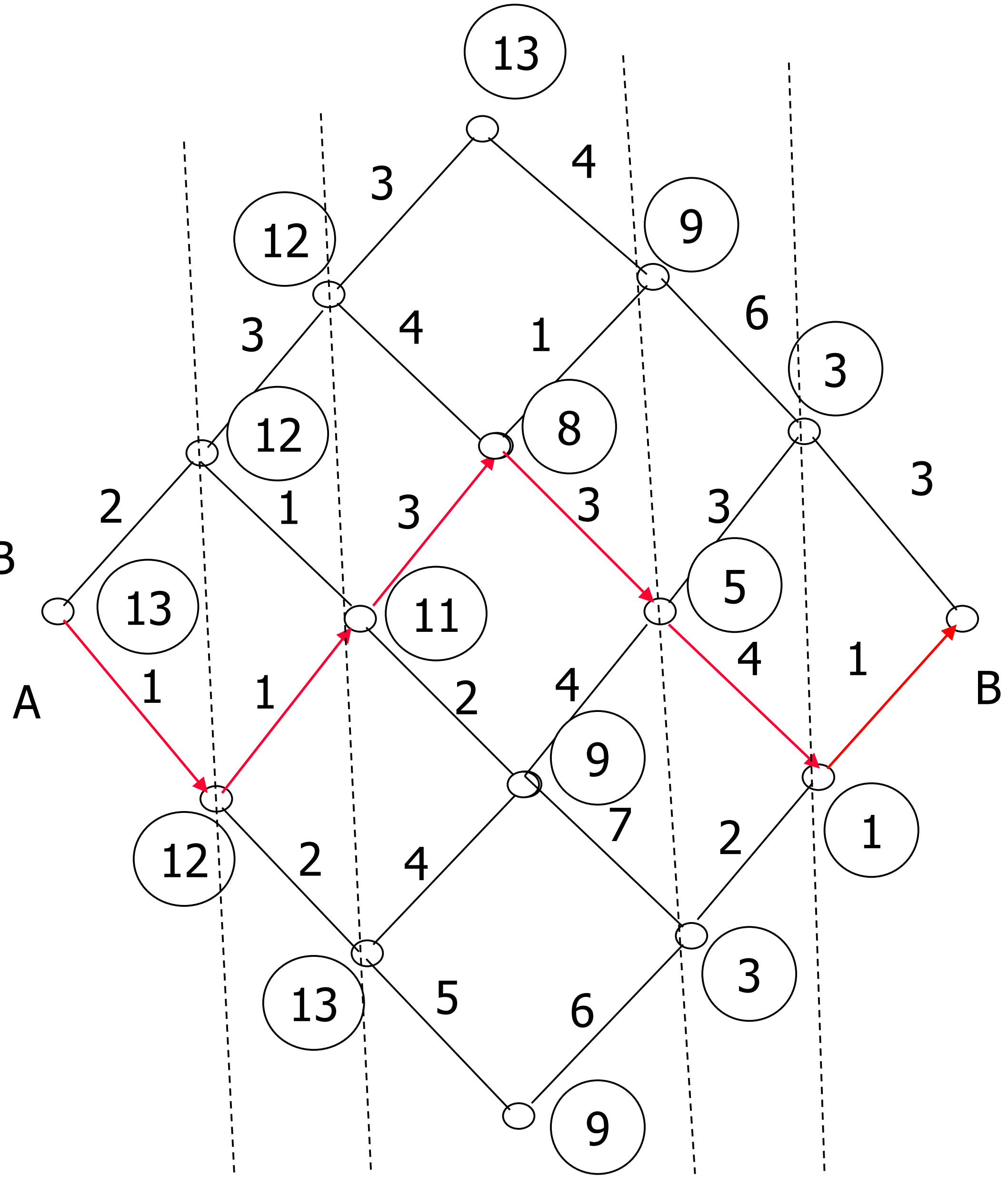
从终点开始，逐段向前逆推，依次计算出各节点至终点的最优值，确定最优路径。

只需进行 $4(n-2)+2=10$ 次加法和6次比较可得最优路径。


P1
7
P2
2
P3
3
6
2
4
A
B
4
4
3
2
8
3
Q
1
Q
2
Q
3


P1
11
7
P2
4
P3
4
4
6
2
A
12
B
4
4
2
8
Q1
5
Q2
3
2
Q3


A
B
3
4
3
4
1
6
2
1
3
3
3
3
1
1
2
4
4
1
2
4
7
2
5
6


A
B
13
12
12
13
12
13
9
8
11
9
3
5
1
3
9

动态规划法得特点：

(1) 与穷举法相比，计算量大大减少。

(2) 将多段决策问题转换为多个单段决策问题处理。

(3) 多段决策的最优策略遵循**最优性原理**，即：

不论初始状态和初始决策如何，当把其中任何一级作为初始级和初始状态时，余下的决策对此仍然是最优决策。也就是说一个最优过程的任何最后一段过程都是最优的，或者说最优路径上任一节点至终点的路径必定也是最优的。

《现代控制理论》MOOC课程

6.5.2 离散系统动态规划

一. 离散系统动态规划的数学描述：

给定有n阶离散系统：$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad k = 0,1,\cdots,N-1$

状态初值： $x(0) = x_0$

控制约束： $g[x_k, u_k] \le 0$

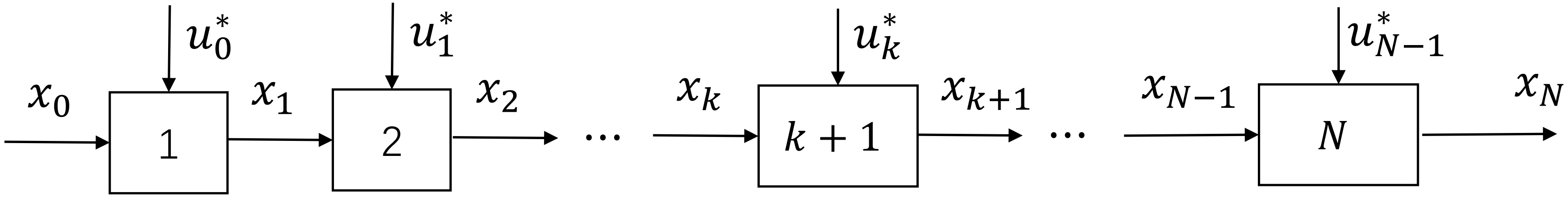
寻求一个最优控制序列 $\left\{u_k^*\right\}$ $(k = 0,1,\cdots,N-1)$

使性能指标： $J = \Phi[x_N] + \sum_{k=0}^{N-1} L[x_k, u_k]$

取得极小值。

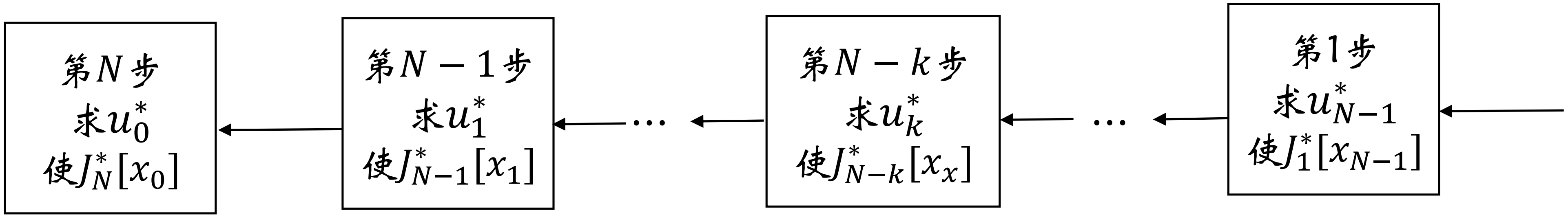
二. 动态规划递推方程：

给定初值：$x(0)=x_0$，寻求一个最优控制序列$\{u_k^*\}$ $(k=0,1,\cdots,N-1)$使性能指标取得极小值。



控制过程顺序

动态规划法依据最优性原理进行**逆向分级计算**



动态规划法求解顺序

性能指标：

$$J=\Phi[x_N]+\sum_{k=0}^{N-1}L[x_k,u_k]$$

$$=\Phi[x_N]+L[x_{N-1},u_{N-1}]+\sum_{k=0}^{N-2}L[x_k,u_k]=J_1[x_{N-1}]+\sum_{k=0}^{N-2}L[x_k,u_k]$$

其中 $J_1[x_{N-1}]=\Phi[x_N]+L[x_{N-1},u_{N-1}]=J_0[x_N]+L[x_{N-1},u_{N-1}]$

第一计算步：$J_1^*[x_{N-1}]=\min\{J_0[x_N]+L[x_{N-1},u_{N-1}]\}$

$$x_N=f(x_{N-1},u_{N-1})$$

$$J=J_1[x_{N-1}]+L[x_{N-2},u_{N-2}]+\sum_{k=0}^{N-3}L[x_k,u_k]=J_2[x_{N-2}]+\sum_{k=0}^{N-3}L[x_k,u_k]$$

其中 $J_2[x_{N-2}]=J_1[x_{N-1}]+L[x_{N-2},u_{N-2}]$

第二计算步：$J_2^*[x_{N-2}]=\min\{J_1[x_{N-1}]+L[x_{N-2},u_{N-2}]\}$

$$x_{N-1}=f(x_{N-2},u_{N-2})$$

$$J=J_{N-k}[x_k]+\sum_{k=0}^{k-1}L[x_k,u_k]$$

其中 $J_{N-k}[x_k]=J_{N-k-1}[x_{k+1}]+L[x_k,u_k]$

第N-k计算步：$J_{N-k}^*[x_k]=\min\{J_{N-k-1}[x_{k+1}]+L[x_k,u_k]\}$

$$x_{k+1}=f(x_k,u_k)$$

有了第一个计算步和第N-k个计算步的优化计算方程，就可以递推计算出最优控制序列和最优状态轨迹。把这个递推计算方程称为**动态规划递推方程。**

例：设一阶离散系统，状态方程和初始条件为：

$$x_{k+1} = x_k + u_k , \quad x(0) = x_0$$

性能指标为
$$J = x_N^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^2 + u_k^2)$$

求当N=2时的最优控制决策序列和最优轨迹序列。

解：当N=2时，求 $u^*(0)$、$u^*(1)$ 和 $x^*(1)$、$x^*(2)$

考虑系统在 $u(1)$ 控制下由 $x(1)$ 转移到 $x(2)$，则有

$$x(2) = x(1) + u(1)$$

$$J_1[x(1)] = x^2(2) + x^2(1) + u^2(1) = [x(1) + u(1)]^2 + x^2(1) + u^2(1)$$

$$= 2x^2(1) + 2x(1)u(1) + 2u^2(1)$$

为使 $J_1[x(1)]$ 为极小，故有：

$$\frac{\partial J_1[x(1)]}{\partial u(1)} = 2x(1) + 4u(1) = 0$$

得： $u(1) = -\frac{1}{2}x(1)$

最优目标

$$J_1[x(1)] = 2x^2(1) - 2x(1)\frac{1}{2}x(1) + 2(-\frac{1}{2}x(1))^2 = \frac{3}{2}x^2(1)$$

进一步求上一级决策：

$$J_2[x(0)] = x^2(0) + u^2(0) + J_1^*[x(1)] = x^2(0) + u^2(0) + \frac{3}{2}x^2(1)$$

$$= x^2(0) + u^2(0) + \frac{3}{2}[x(0) + u(0)]^2$$

可得：$$\frac{\partial J_2[x(0)]}{\partial u(0)} = 2u(0) + 3[x(0)+u(0)] = 5u(0) + 3x(0) = 0$$

$$u(0) = -\frac{3}{5}x(0)$$

故最优性能指标为：$$J^* = J_2[x(0)] = x^2(0) + u^2(0) + \frac{3}{2}[x(0)+u(0)]^2 = \frac{8}{5}x^2(0)$$

最优控制序列为：

$$u(0) = -\frac{3}{5}x(0)$$

$$u(1) = -\frac{1}{2}x(1) = -\frac{1}{2}(x(0)+u(0)) = -\frac{1}{2}(x(0)-\frac{3}{5}x(0)) = -\frac{1}{5}x(0)$$

最优轨迹为：$$x(0)\text{、}x(1) = x(0)+u(0) = x(0)-\frac{3}{5}x(0) = \frac{2}{5}x(0)$$

$$x(2) = x(1)+u(1) = \frac{2}{5}x(0)-\frac{1}{2}x(1) = \frac{2}{5}x(0)-\frac{1}{5}x(0) = \frac{1}{5}x(0)$$

《现代控制理论》MOOC课程

6.5.3 连续系统动态规划

一. 连续动态规划的数学描述

给定连续系统状态方程： $\dot{x} = f[x, u, t]$

初始状态： $x(t_0) = x_0$

终端约束： $g[x(t_f), t_f] = 0$

求最优控制 $u^*(t)$， $u \in U$ ，使如下性能指标取极小值：

$$J[x_0, t] = \min\left\{\Phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t)dt\right\}$$

二. 连续动态规划方程

- 由最优性原理：如果对于初始时刻t_0和初始状态x_0，$u^*(t)$和$x^*(t)$ 是系统的最优控制和相应的最优轨迹，那么对任一时刻$t_1(t_0 < t_1 < t_f)$ 的控制$u^*(t_1)$和状态$x^*(t_1)$，它们仍然是系统在$t > t_1$以后直到t_f这一时间的最优控制和最优轨迹。

引进记号 $V(x,t)$

$$V(x,t) = J[x^*(t),u^*(t)] = \min_{u \in U} J(x(t),u(t))$$

表示以t时刻状态$x(t)$作初始条件所得到的最优性能指标。

则有：$V(x(t),t) = \min_{u \in U} \left\{ \Phi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(x(t),u(t),t)dt \right\}$

$$V(x(t),t)=\min_{u\in U}\left\{\int_t^{t+\Delta t}L(x(t),u(t),t)dt+\int_{t+\Delta t}^{t_f}L(x(t),u(t),t)dt+\Phi(x(t_f))\right\}$$

$$=\min_{u\in U}\left\{\int_t^{t+\Delta t}L(x(t),u(t),t)dt\right\}+\min_{u\in U}\left\{\int_{t+\Delta t}^{t_f}L(x(t),u(t),t)dt+\Phi(x(t_f))\right\}$$

$$=\min_{u\in U}\left\{\int_t^{t+\Delta t}L(x(t),u(t),t)dt\right\}+V(x(t+\Delta t),t+\Delta t)$$

其中：$V(x(t+\Delta t),t+\Delta t)=\min_{u\in U}\left\{\int_{t+\Delta t}^{t_f}L(x(t),u(t),t)dt+\Phi(x(t_f))\right\}$

用泰勒级数展开可得：

$$V(x(t+\Delta t),t+\Delta t)=V(x(t),t)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T\frac{dx}{dt}\Delta t+\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+o(\Delta t)^2$$

由中值定理：

$$\int_t^{t+\Delta t} L(x(t),u(t),t)dt = L(x(t+\alpha\Delta t),u(t+\alpha\Delta t),t+\alpha\Delta t)\Delta t$$

其中： $0<\alpha<1$

则有：

$$V(x(t),t) = \min_{u\in U}\left\{L(x(t+\alpha\Delta t),u(t+\alpha\Delta t),t+\alpha\Delta t)\Delta t\right\} + V(x(t),t) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + o(\Delta t)^2$$

可得：
$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\min_{u\in U}\left\{L(x(t+\alpha\Delta t),u(t+\alpha\Delta t),t+\alpha\Delta t) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} + \frac{o(\Delta t)^2}{\Delta t}\right\}$$

令：$\Delta t \to 0$

可得：
$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\min_{u\in U}\left\{L(x(t),u(t),t) + \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right)^T f(x,u,t)\right\}$$

连续系统动态规划方程

令：$\lambda(t)=\dfrac{\partial V}{\partial x}$ ，则动态规划方程可表示为：

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-\min_{u\in U}\left\{L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)\right\}=-\min_{u\in U}H(x^*,\lambda,u,t)$$

即系统要取得极值，必须要满足极小值原理。

可以证明当系统取得最优控制时，协状态方程成立：

$$\begin{cases}\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}\\ \lambda(t_f)=\left(\dfrac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)+\left(\dfrac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)^T\mu\\ g[x(t_f),t_f]=0\\ H[x(t_f),u(t_f),t_f]+\left(\dfrac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial t_f}\right)+\mu^T\left(\dfrac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial t_f}\right)=0\end{cases}$$

系统取得最优控制的必要条件为：

状态方程： $\dot{x} = f[x,u,t] \quad x(t_0) = x_0$

协状态方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \lambda(t_f) = \left(\dfrac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)}\right) + \left(\dfrac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)}\right)^T \mu \\ g[x(t_f), t_f] = 0 \\ H[x(t_f), u(t_f), t_f] + \left(\dfrac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f}\right) + \mu^T \left(\dfrac{\partial g[x(t_f), t_f]}{\partial t_f}\right) = 0 \end{cases}$$

动态规划方程 $\dfrac{\partial V}{\partial t} = -\min\limits_{u \in U} \left\{ L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t) \right\} = -\min\limits_{u \in U} H(x^*, \lambda, u, t)$

第六章 小结

- 最优控制问题就是求解一类带有约束的泛函极值问题；
- 有约束的泛函极值问题是通过引入拉格朗日乘子向量转换为无约束的泛函极值问题；
- 泛函极值存在的必要条件为泛函的变分为零。
- 求解泛函极值问题有三种方法：经典变分法、极小值原理和动态规划法
- 时间最优控制，线性二次型最优控制是极小值原理和经典变分法在特殊情况下的应用。