# 《现代控制理论》第6章作业解析

1. 最优控制问题，性能指标的主要类型有（ ）

A. 积分型性能指标；

B. 终值型性能指标；

C. 中值型性能指标；

D. 复合型性能指标；

2. 泛函的变分等于零是泛函取得极值的（ ）

A. 充分条件；

B. 必要条件；

C. 充分必要条件；

D. 既不充分也不必要；

3. 固定端点时间，固定端点状态的无约束泛函取得极值的必要条件是（ ）

A. 欧拉方程成立；

B. 横截条件成立；

C. 欧拉方程与横截条件均成立；

D. 欧拉方程、横截条件任一个成立；

4. 经典变分法求解最优控制问题的局限性主要体现在（ ）。

A. 对控制有闭区间约束时；

B. 控制的终端时间自由时；

C. 哈密尔顿函数是控制的一次函数时；

D. 哈密尔顿函数对控制函数的偏导数不存在时；

5. 从数学的观点来看，最优控制问题可以描述为（ ）。

A. 无约束条件的泛函极值问题；

B. 一类带有约束条件的泛函极值问题；

C. 一个函数的极大值问题；

D. 一个函数的极小值问题；

6. 求解最优控制问题的基本方法有（ ）

A. 经典变分法；

B. 极小值原理；

C. 动态规划法；

D. 李雅普诺夫直接法；

7. 设有一阶系统$\dot{x} = -x - u$, $x(0) = 4$。使性能指标 $J = \int_0^2 (3x^2 + u^2) dt$取极小值的最优控制$u(t)$为（ ）

A. $u(t) = 4e^{-2t}$ B. $u(t) = 2e^{-2t} + 4e^{2t}$ C. $u(t) = \frac{4e^4 e^{-2t} + 12e^{-4}e^{2t}}{e^4 - e^{-4}}$ D. $u(t) = \frac{12e^4 e^{-2t} - 12e^{-4}e^{2t}}{e^{-4} + 3e^4}$

解析：本题为终端时间固定、终端状态自由、控制无约束最优控制问题。

系统的哈密尔顿函数为 $H = 3x^2 + u^2 + \lambda(-x - u)$

由控制方程：$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u - \lambda = 0$，可得 $u = \frac{1}{2}\lambda$

故状态方程为：$\dot{x} = -x - \frac{1}{2}\lambda$，$x(0) = 4$， 协状态方程为：$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -6x + \lambda$，$\lambda(2) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(2)} = 0$

联立求解状态方程和协状态方程：$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$

状态转移矩阵：$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+1 & 0.5 \\ 6 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+2)(s-2)} & -\frac{1}{2(s+2)(s-2)} \\ -\frac{6}{(s+2)(s-2)} & \frac{s+1}{(s+2)(s-2)} \end{bmatrix}$

$$= L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-2} & \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s-2} \\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t} + e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t} - e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t} - e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t} + 3e^{2t}) \end{bmatrix}$$

**故状态变量和协状态变量的解为：**

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t}+e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t}-e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t}-e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t}+3e^{2t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t}+e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t}-e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t}-e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t}+3e^{2t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

**可得**

$$x = (3e^{-2t}+e^{2t}) + \frac{1}{8}\lambda(0)(e^{-2t}-e^{2t})$$

$$\lambda = 6(e^{-2t}-e^{2t}) + \frac{1}{4}\lambda(0)(e^{-2t}+3e^{2t})$$

**由**$\lambda(2)=0$**，可得** $\lambda(0) = \frac{24(e^{4}-e^{-4})}{e^{-4}+3e^{4}}$

**进一步可得：**

$$x = 3e^{-2t} + e^{2t} + \frac{3(e^{4}-e^{-4})}{e^{-4}+3e^{4}}(e^{-2t}-e^{2t})$$

$$\lambda = 6(e^{-2t}-e^{2t}) + \frac{6(e^{4}-e^{-4})}{e^{-4}+3e^{4}}(e^{-2t}+3e^{2t})$$

$$u = 0.5\lambda$$

**化简可得：**

$$x = \frac{12e^{4}e^{-2t}+4e^{-4}e^{2t}}{e^{-4}+3e^{4}}$$

$$\lambda = \frac{24e^{4}e^{-2t}-24e^{-4}e^{2t}}{e^{-4}+3e^{4}}$$

$$u = \frac{12e^{4}e^{-2t}-12e^{-4}e^{2t}}{e^{-4}+3e^{4}}$$

8. 设有一阶系统$\dot{x} = -x - u$，$x(0) = 4$。使系统在$t = 2$ 的状态转移到 $x(2) = 0$，

并使性能指标 $J = \int_0^2 (3x^2 + u^2) dt$取极小值的最优控制$u(t)$为（ ）。

A. $u(t) = 4e^{-2t}$ B. $u(t) = 2e^{-2t} + 4e^{2t}$ C. $u(t) = \frac{4e^4 e^{-2t} + 12e^{-4} e^{2t}}{e^4 - e^{-4}}$ D. $u(t) = \frac{12e^4 e^{-2t} - 12e^{-4} e^{2t}}{e^{-4} + 3e^4}$

解析：本题为终端时间固定、终端状态固定、控制无约束最优控制问题。

系统的哈密尔顿函数为 $H = 3x^2 + u^2 + \lambda(-x - u)$

终端约束：$x(2) = 0$，故有 $\Theta = \Phi + \mu x(2) = \mu x(2)$

由控制方程：$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u - \lambda = 0$，可得 $u = \frac{1}{2}\lambda$

故状态方程为：$\dot{x} = -x - \frac{1}{2}\lambda$，$x(0) = 4$， 协状态方程为：$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -6x + \lambda$，$\lambda(2) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(2)} = 0$

联立求解状态方程和协状态方程：$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$

状态转移矩阵：$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+1 & 0.5 \\ 6 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t} + e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t} - e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t} - e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t} + 3e^{2t}) \end{bmatrix}$

**故状态变量和协状态变量的解为：**

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t}+e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t}-e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t}-e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t}+3e^{2t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t}+e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t}-e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t}-e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t}+3e^{2t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

**可得** $x = (3e^{-2t}+e^{2t}) + \frac{1}{8}\lambda(0)(e^{-2t}-e^{2t})$

**有终端约束：**$x(2)=0$**，可得：**$(3e^{-4}+e^{4}) + \frac{1}{8}\lambda(0)(e^{-4}-e^{4}) = 0$ **故有：**$\lambda(0) = \frac{8(3e^{-4}+e^{4})}{e^{4}-e^{-4}}$

$$x = 3e^{-2t}+e^{2t}+\frac{3e^{-4}+e^{4}}{e^{4}-e^{-4}}\left(e^{-2t}-e^{2t}\right)$$

**可得：** $\lambda = 6(e^{-2t}-e^{2t}) + \frac{2(3e^{-4}+e^{4})}{e^{4}-e^{-4}}(e^{-2t}+3e^{2t})$

$$u = 0.5\lambda = 3(e^{-2t}-e^{2t}) + \frac{3e^{-4}+e^{4}}{e^{4}-e^{-4}}(e^{-2t}+3e^{2t})$$

$$x = \frac{4e^{4}e^{-2t}-4e^{-4}e^{2t}}{e^{4}-e^{-4}}$$

**化简可得：**$\lambda = \frac{8e^{4}e^{-2t}+24e^{-4}e^{2t}}{e^{4}-e^{-4}}$

$$u = \frac{4e^{4}e^{-2t}+12e^{-4}e^{2t}}{e^{4}-e^{-4}}$$

9. 设有一阶系统$\dot{x} = -x - u$， $x(0) = 4$。使系统在终端时刻 $t_f$ 的状态为 $x(t_f) = 1$，$t_f$为待定，

并使性能指标 $J = \int_0^{t_f}(3x^2 + u^2)dt$取极小值的最优控制$u(t)$为（ ）。

A. $u(t) = 4e^{-2t}$　　B. $u(t) = 2e^{-2t} + 4e^{2t}$　　C. $u(t) = \frac{4e^4e^{-2t}+12e^{-4}e^{2t}}{e^4-e^{-4}}$　　D. $u(t) = \frac{12e^4e^{-2t}-12e^{-4}e^{2t}}{e^{-4}+3e^4}$

解析：本题为终端时间自由、终端状态固定、控制无约束最优控制问题。

系统的哈密尔顿函数为 $H = 3x^2 + u^2 + \lambda(-x - u)$

终端约束：$x(t_f) = 1$，故有 $\Theta = \Phi + \mu x(t_f) = \mu(x(t_f) - 1)$

由控制方程: $\frac{\partial H}{\partial u} = 2u - \lambda = 0$，可得 $u = \frac{1}{2}\lambda$

故状态方程为：$\dot{x} = -x - \frac{1}{2}\lambda$，$x(0) = 4$，　协状态方程为：$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -6x + \lambda$，$\lambda(t_f) = \frac{\partial \Theta}{\partial x(t_f)} = \mu$

最优时间$t_f$应满足：$H(t_f) + \left.\frac{\partial \Theta}{\partial t_f}\right|_{t=t_f} = 0$，即$3x^2(t_f) + u^2(t_f) - \lambda(t_f)x(t_f) - \lambda(t_f)u(t_f) = 0$

可得：$\mu^2 + 4\mu - 12 = 0$，$\mu = 2$ ，$\lambda(t_f) = \mu = 2$

联立求解状态方程和协状态方程：$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ -6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix}$

**状态转移矩阵：** $e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+1 & 0.5 \\ 6 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}\right\}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t}+e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t}-e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t}-e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t}+3e^{2t}) \end{bmatrix}$

**故状态变量和协状态变量的解为：**

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t}+e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t}-e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t}-e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t}+3e^{2t}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3e^{-2t}+e^{2t}) & \frac{1}{8}(e^{-2t}-e^{2t}) \\ \frac{3}{2}(e^{-2t}-e^{2t}) & \frac{1}{4}(e^{-2t}+3e^{2t}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

**可得** $x=(3e^{-2t}+e^{2t})+\frac{1}{8}\lambda(0)(e^{-2t}-e^{2t})$

$$\lambda=6(e^{-2t}-e^{2t})+\frac{1}{4}\lambda(0)(e^{-2t}+3e^{2t})$$

**将$x(t_f)=1$，$\lambda(t_f)=2$代入可得：**

$$(3e^{-2t_f}+e^{2t_f})+\frac{1}{8}\lambda(0)(e^{-2t_f}-e^{2t_f})=1$$

$$6(e^{-2t_f}-e^{2t_f})+\frac{1}{4}\lambda(0)(e^{-2t_f}+3e^{2t_f})=2$$

**解得** $\lambda(0)=\frac{8(3e^{-2t_f}+e^{2t_f})-8}{e^{2t_f}-e^{-2t_f}}=\frac{24\left(e^{2t_f}-e^{-2t_f}\right)+8}{3e^{2t_f}+e^{-2t_f}},e^{2t_f}=4,e^{-2t_f}=\frac{1}{4},t_f=ln2=0.6931$

**故有** $\lambda(0)=8$

可得：

$$x = 3e^{-2t} + e^{2t} + \left(e^{-2t} - e^{2t}\right) = 4e^{-2t}$$

$$\lambda = 6(e^{-2t} - e^{2t}) + 2(e^{-2t} + 3e^{2t}) = 8e^{-2t}$$

$$u = 0.5\lambda = 4e^{-2t}$$

10. 设有一阶系统$\dot{x} = -x - u$，$x(0) = 4$。使性能指标 $J = \int_0^{\infty}(3x^2 + u^2)dt$取极小值的最优控制$u(t)$为（　）。

A. $u(t) = 4e^{-2t}$　　B. $u(t) = 2e^{-2t} + 4e^{2t}$　　C. $u(t) = \frac{4e^4e^{-2t}+12e^{-4}e^{2t}}{e^4-e^{-4}}$　　D. $u(t) = \frac{12e^4e^{-2t}-12e^{-4}e^{2t}}{e^{-4}+3e^4}$

**解析**：本题无限时间线性二次型最优控制问题。

$$J = \int_0^{\infty}(3x^2 + u^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(6x^2 + 2u^2)dt$$

故有：$A = -1$，$B = -1$，$Q = 6$，$R = 2$

由黎卡提代数方程：$[PA] + [PA]^T + Q - [PB]R^{-1}[PB]^T = 0$

代入系数：　$-p - p + 6 - [-p]\frac{1}{2}[-p]^T = 0$

可得：$p^2 + 4p - 12 = 0$ 解得$p_1 = 2$，$p_2 = -6$，P为正定对称矩阵，故$P = 2$

最优控制为：$u^*(t) = -R^{-1}B^TPx(t) = x(t)$

状态方程$\dot{x} = -x - u$，$x(0) = 4$的解为：　$x(t) = 4e^{-2t}$

故最优控制为：$u^*(t) = x(t) = 4e^{-2t}$

最优性能指标为：$J^* = \frac{1}{2}x_0^TPx_0 = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 4 = 16$