# 《现代控制理论》MOOC课程

## 1.2 状态空间表达式的建立

## 三. 依据传递函数或高阶微分方程建立状态空间表达式

### 实现方法一：能控标准型实现

由系统的传递函数可得：

$$Y(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}U(s) \qquad m\le n$$

1. 当 $m<n$

引入中间变量 $$\tilde{Y}(s)=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}U(s)$$

进而可得 $$\tilde{Y}(s)\left(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0\right)=U(s)$$

$$Y(s)=\tilde{Y}(s)\left(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0\right)$$

## 拉氏微分定理

拉氏微分定理：

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

当初始条件为0时：

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$$

拉氏反变换：

$$L^{-1}[s^n F(s)] = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = f^{(n)}(t)$$

取拉式反变换可得：

$$y = b_m \tilde{y}^{(m)} + b_{m-1}\tilde{y}^{(m-1)} + \cdots + b_1\tilde{y}^{(1)} + b_0\tilde{y} \qquad (1)$$

$$\tilde{y}^{(n)} + a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_1\tilde{y}^{(1)} + a_0\tilde{y} = u \qquad (2)$$

选取状态变量为：

$$x_1 = \tilde{y},\ x_2 = \tilde{y}^{(1)},\ \cdots,\ x_n = \tilde{y}^{(n-1)} \qquad (3)$$

可得状态方程为：

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \cdots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = \tilde{y}^{(n)} = -a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} - \cdots - a_1\tilde{y}^{(1)} - a_0\tilde{y} + u = -a_{n-1}x_n - \cdots - a_1x_2 - a_0x_1 + u$$

可得输出方程为： $y = b_m x_{m+1} + b_{m-1}x_m + \cdots + b_1x_2 + b_0x_1$

状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u}$$

$$y = [b_0 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\boldsymbol{x}$$

特点：

- 系统矩阵A的前n-1行为次对角单位阵，最后一行由传递函数分母的系数，也就是系统特征多项式的系数取相反号组成。
- 输入矩阵b，最后一个元素为1，其余元素均为0。
- 能控标准I型。

2. 当 $m = n$

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} U(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} U(s)$$

$$= \left( b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1) s + (b_0 - b_n a_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \right) U(s) \qquad (1)$$

引入中间变量 $\tilde{Y}(s) = \dfrac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} U(s)$

将中间变量$\tilde{Y}(s)$代入（1）式可得

$$\mathrm{Y(s)} = \left( (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1) s + (b_0 - b_n a_0) \right) \tilde{Y}(s) + b_n U(s)$$

取拉氏反变换

$$y = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + (b_1 - b_n a_1)\tilde{y}^{(1)} + (b_0 - b_n a_0)\tilde{y} + b_n u \qquad (1)$$

$$\tilde{y}^{(n)} + a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_1\tilde{y}^{(1)} + a_0\tilde{y} = u \qquad (2)$$

同样选取状态变量为： $x_1 = \tilde{y},\ x_2 = \tilde{y}^{(1)},\ \cdots,\ x_n = \tilde{y}^{(n-1)}$

状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u}$$

$$y = [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \cdots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})]\boldsymbol{x} + b_n u$$

例：系统的动态特性由下列微分方程描述

(1). $\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\dot{u}+2u$

(2). $\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\ddot{u}+3\dot{u}+2u$

列写其相应的状态空间表达式。

解：(1) 对微分方程取拉氏变换，可得

$$Y(s)=\frac{s+2}{s^3+5s^2+7s+3}U(s)$$

设 $$\tilde{Y}(s)=\frac{1}{s^3+5s^2+7s+3}U(s)$$

则有 $$Y(s)=(s+2)\tilde{Y}(s)$$

取拉氏反变换，有：

$$\begin{cases}\tilde{y}^{(3)}+5\tilde{y}^{(2)}+7\tilde{y}^{(1)}+3\tilde{y}=u\\ y=\tilde{y}^{(1)}+2\tilde{y}\end{cases}$$

选取状态变量：$x_1=\tilde{y}, x_2=\tilde{y}^{(1)}, x_3=\tilde{y}^{(2)}$

则：$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=x_3$

$$\dot{x}_3=\tilde{y}^{(3)}=-5x_3-7x_2-3x_1+u$$

$$y=x_2+2x_1$$

可得状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-7&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

例：系统的动态特性由下列微分方程描述

(1). $\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\dot{u}+2u$

(2). $\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\ddot{u}+3\dot{u}+2u$

列写其相应的状态空间表达式。

解：(2)状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

第(1)小题状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

- 在实现问题中，传递函数的分母决定系统的状态方程，而传递函数的分子决定系统的输出方程。