《现代控制理论》第2章练习作业解析

1. 下列矩阵中不可能是状态转移矩阵的是（ ）

A. $\begin{bmatrix} sin2t & -\frac{1}{2}cos2t \\ 2cos2t & sin2t \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} cos2t & -\frac{1}{2}sin2t \\ 2sin2t & cos2t \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} cos2t & -sin2t \\ sin2t & cos2t \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$

解析：矩阵指数函数在t=0时为单位阵。

2. 已知系统的状态转移矩阵为 $\Phi(t)=\begin{bmatrix} cos2t & -\frac{1}{2}sin2t \\ 2sin2t & cos2t \end{bmatrix}$则状态转移矩阵的逆为（ ）

A. $\Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} cos2t & \frac{1}{2}sin2t \\ -2sin2t & cos2t \end{bmatrix}$

B. $\Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} -2sin2t & -cos2t \\ 4cos2t & -2sin2t \end{bmatrix}$

C. $\Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} cos2t & \frac{1}{2}sin2t \\ sin2t & -2cos2t \end{bmatrix}$

D. $\Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} cos2t & 2sin2t \\ -\frac{1}{2}sin2t & cos2t \end{bmatrix}$

解析：$\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$

3. 如下线性时变系统：$\dot{x} = A(t)x,\quad x(0) = x_0$的解，可以表示为 $x(t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}x_0$形式的系统矩阵为（ ）

A. $A(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

B. $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} \\ -e^{-t} & 0 \end{bmatrix}$

C. $A(t) = \begin{bmatrix} -2t & -1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}$

D. $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}$

解析：需满足 $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$

4. 系统矩阵：$A=\begin{bmatrix}-\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma\end{bmatrix}$ 的矩阵指数函数为( )

A. $e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\sigma t}\cos\omega t & -e^{\sigma t}\sin\omega t \\ e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t\end{bmatrix}$

B. $e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-\sigma t}\cos\omega t & -e^{-\sigma t}\sin\omega t \\ e^{-\sigma t}\sin\omega t & e^{-\sigma t}\cos\omega t\end{bmatrix}$

C. $e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t\end{bmatrix}$

D. $e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-\sigma t}\cos\omega t & e^{-\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{-\sigma t}\sin\omega t & e^{-\sigma t}\cos\omega t\end{bmatrix}$

解析： $A=\begin{bmatrix}-\sigma & \omega\\ -\omega & -\sigma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sigma & 0\\ 0 & -\sigma\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}=A_1+A_2$

$$e^{A_1 t}=\begin{bmatrix}e^{-\sigma t} & 0\\ 0 & e^{-\sigma t}\end{bmatrix}$$

$$e^{A_2 t}=L^{-1}\left([sI-A_2]^{-1}\right)=L^{-1}\left(\begin{bmatrix}s & -\omega\\ \omega & s\end{bmatrix}^{-1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\begin{bmatrix}s & \omega\\ -\omega & s\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}$$

由于 $A_1A_2=\begin{bmatrix}-\sigma & 0\\ 0 & -\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sigma & 0\\ 0 & -\sigma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\sigma\omega\\ \sigma\omega & 0\end{bmatrix}=A_2A_1$

故有$e^{At}=e^{(A_1+A_2)t}=e^{A_1 t}e^{A_2 t}=\begin{bmatrix}e^{-\sigma t} & 0\\ 0 & e^{-\sigma t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-\sigma t}\cos\omega t & e^{-\sigma t}\sin\omega t\\ -e^{-\sigma t}\sin\omega t & e^{-\sigma t}\cos\omega t\end{bmatrix}$

5. 已知线性系统的状态转移矩阵为：$\Phi(t)=\begin{bmatrix} cos2t & -\frac{1}{2}sin2t \\ 2sin2t & cos2t \end{bmatrix}$ 则系统的系统矩阵为（　　）

A. $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

B. $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

C. $A=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

D. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

解析： $\frac{d\Phi(t)}{dt}=\begin{bmatrix} -2\sin2t & -cos2t \\ 4cos2t & -2sin2t \end{bmatrix}$

$$A=\frac{d\Phi(t)}{dt}\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix} -2\sin2t & -cos2t \\ 4cos2t & -2sin2t \end{bmatrix}\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 已知系统的矩阵指数函数为：$\Phi(t)=\begin{bmatrix} cos2t & -\frac{1}{2}sin2t \\ 2sin2t & cos2t \end{bmatrix}$

则系统在初始状态$x_0=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$作用下的零输入响应为（　　）

A. $x=\begin{bmatrix} cos2t-sin2t \\ 2sin2t+2cos2t \end{bmatrix}$

B. $x=\begin{bmatrix} cos2t-sin2t \\ 2sin2t+cos2t \end{bmatrix}$

C. $x=\begin{bmatrix} 2cos2t-2sin2t \\ sin2t+cos2t \end{bmatrix}$

D. $x=\begin{bmatrix} 2cos2t-2sin2t \\ sin2t+cos2t \end{bmatrix}$

解析： $x(t)=\Phi(t)x_0=\begin{bmatrix} cos2t & -\frac{1}{2}sin2t \\ 2sin2t & cos2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos2t-sin2t \\ 2sin2t+2cos2t \end{bmatrix}$

7. 给定线性定常系统 $\dot{x} = Ax, \quad t \geq 0$ 。现知，对应于两个不同初始状态的状态响应为：

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + 6te^{-t} \\ 2e^{-t} + 3te^{-t} \end{bmatrix}; \qquad x_2(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2te^{-t} \\ e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$$

则系统矩阵A 为（ ）

A. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

B. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

C. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

D. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

解析： $[x_1(t) \quad x_2(t)] = e^{At}[x_1(0) \quad x_2(0)]$

$$e^{At} = [x_1(t) \quad x_2(t)][x_1(0) \quad x_2(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} + 6te^{-t} & 3e^{-t} - 2te^{-t} \\ 2e^{-t} + 3te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} - 2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix}$$

$$A = \left.\frac{d\Phi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\begin{bmatrix} -3e^{-t} + 2te^{-t} & 4 - 4te^{-t} \\ -e^{-t} + te^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. 给定线性定常系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=[3\quad 1]$x。使得系统在输入$u=e^{-3t}$作用下的响应，对所有$t\geq 0$为$y\equiv 0$的初始状态为（　　）

A. $x(0)=\begin{bmatrix}1/2\\ -3/2\end{bmatrix}$

B. $x(0)=\begin{bmatrix}3/2\\ -5/2\end{bmatrix}$

C. $x(0)=\begin{bmatrix}-3/2\\ 5/2\end{bmatrix}$

D. $x(0)=\begin{bmatrix}-1/2\\ 3/2\end{bmatrix}$

解析：$[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s-3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$

$$e^{At}=L^{-1}\left([sI-A]^{-1}\right)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x_{0u}=e^{At}x_0=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2x_{10}+x_{20})e^{-t}-(x_{10}+x_{20})e^{-2t}\\ -(2x_{10}+x_{20})e^{-t}+(2x_{10}+2x_{20})e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x_{0x}=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}e^{-3t}\,d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=x_{0u}+x_{0x}=\begin{bmatrix}(2x_{10}+x_{20})e^{-t}-(x_{10}+x_{20})e^{-2t}\\ -(2x_{10}+x_{20})e^{-t}+(2x_{10}+2x_{20})e^{-2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(2x_{10}+x_{20})e^{-t}-(x_{10}+x_{20})e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -(2x_{10}+x_{20})e^{-t}+(2x_{10}+2x_{20})e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$y=Cx(t)=[3\quad 1]\begin{bmatrix}(2x_{10}+x_{20})e^{-t}-(x_{10}+x_{20})e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -(2x_{10}+x_{20})e^{-t}+(2x_{10}+2x_{20})e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$=(4x_{10}+2x_{20}+1)e^{-t}-(x_{10}+x_{20}+1)e^{-2t}$$

由 $\begin{cases}4x_{10}+2x_{20}+1=0\\ x_{10}+x_{20}+1=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_{10}=1/2\\ x_{20}=-3/2\end{cases}$

9. 系统的状态方程为：$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u,\ x(0)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$。在控制量$u=e^{-t}$作用下状态方程的解为（ ），

A. $x(t)=\begin{bmatrix}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}\\ e^{t}+\frac{3}{2}e^{3t}\end{bmatrix}$

B. $x(t)=\begin{bmatrix}-e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}\\ -e^{t}+\frac{3}{2}e^{3t}\end{bmatrix}$

C. $x(t)=\begin{bmatrix}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ e^{t}+\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$

D. $x(t)=\begin{bmatrix}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\ e^{t}+\frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$

解析：$[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 3 & s-4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-1)(s-3)}\begin{bmatrix}s-4 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}$

$$e^{At}=L^{-1}([sI-A]^{-1})=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-3)}\begin{bmatrix}s-4 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{t}-e^{3t} & -e^{t}+e^{3t}\\ 3e^{t}-3e^{3t} & -e^{t}+3e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{t} - e^{3t} & -e^{t} + e^{3t} \\ 3e^{t} - 3e^{3t} & -e^{t} + 3e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^t \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{(t-\tau)} - e^{3(t-\tau)} & -e^{(t-\tau)} + e^{3(t-\tau)} \\ 3e^{(t-\tau)} - 3e^{3(t-\tau)} & -e^{(t-\tau)} + 3e^{3(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{t} + e^{3t} \\ e^{t} + 3e^{3t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{(t-2\tau)} \\ e^{(t-2\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^{t} + \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{t} + \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

10. 系统时变系统的状态方程为：$\dot{x} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$，系统的状态转移矩阵为（ ）

A. $\begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t^2} \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 1 \end{bmatrix}$

解析：由于$A(t_1)A(t_2) = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 t_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A(t_2)A(t_1)$

故有：$e^{At} = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau} = e^{\int_0^t \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau} = e^{\left.\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right|_0^t} = e^{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

$$= I + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2 + \cdots & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$