《现代控制理论》MOOC课程

1.3　状态向量的线性变换

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

特征根的代数重数和几何重数

- 设 λ_i 为系统矩阵A的特征值,若 λ_i 的重根数为 σ_i，则称 λ_i 的**代数重数**为 σ_i。
- 设V为n维线性空间，λ_i 为系统矩阵A的特征值，则 λ_i 的特征子空间

$V_{\lambda_i}=\{p_i \in V | Ap_i = \lambda_i p_i\}$ 的维数 α_i，称为 λ_i 特征值的**几何重数**。

λ_i 的几何重数 α_i 也就是 λ_i 线性无关特征向量的个数。

$$\alpha_i = n - rank(\lambda_i I - A)$$

例：求系统矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ 相异特征值的代数重数和几何重数。

解： $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -3 & \lambda-2 & -3\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-4)=\mathbf{0}$ 可得： $\boldsymbol{\lambda_1}=-1,\ -1$　$\lambda_2=4$

故 λ_1、λ_2 的代数重数分别为 $\sigma_1=2$、$\sigma_2=1$

λ_1的几何重数 $\alpha_1=3-\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{\lambda_1 I}-\boldsymbol{A})=3-\boldsymbol{rank}\begin{bmatrix}-2 & -2 & -3\\ -3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=3-2=1$

λ_2的几何重数 $\alpha_2=3-\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{\lambda_2 I}-\boldsymbol{A})=3-\boldsymbol{rank}\begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ -3 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=3-2=1$

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

系统的广义特征向量

对于n×n维矩阵A，若存在一个不为零的n维向量p_i和一个标量λ_i，k为正整数，

使得：
$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})^k\boldsymbol{p}_i=0\\(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})^{k-1}\boldsymbol{p}_i\neq 0\end{cases}$$

成立，则称p_i为矩阵A的特征值λ_i所对应的k级广义特征向量。

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

约当规范型

对于给定的n维线性定常系统 $\dot{x}=Ax+Bu$。设系统的特征值为：

λ_1(σ_1代数重，α_1几何重)，λ_2(σ_2代数重，α_2几何重)，…，λ_l(σ_l代数重，α_l几何重)

$(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_l=n)$，则存在由各特征值的广义特征向量组成的变换阵Q，通过变换 $z=Q^{-1}x$，可将状态方程化为如下的约当规范型：

$$\dot{z}=Q^{-1}AQz+Q^{-1}Bu=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{bmatrix}z+\bar{B}u$$

其中，$\bar{A}=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{bmatrix}$，　$\bar{B}=Q^{-1}B$

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{ik} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{i\alpha_i} \end{bmatrix}$$

特征值 λ_i 对应的约当块矩阵 J_i 由 α_i 个约当子块矩阵组成。

同一个约当块中，每一个约当子块都对应着同一个特征值。

J_i 的维数为 $\sigma_i \times \sigma_i$ $\quad i = 1, 2, \cdots, l$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_l \end{bmatrix} z + \bar{B}u$$

$$J_{ik} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

系统矩阵为 l 个约当块组成的对角块矩阵；

l 个约当块，对应着 l 组不同的特征值；

一个约当块，对应着一组相同的特征值。

J_{ik} 的维数为 $r_{ik} \times r_{ik}$ $\quad k = 1, 2, \cdots, \alpha_i$

$$r_{i1} + r_{i2} + \cdots + r_{i\alpha_i} = \sigma_i$$

讨论

- 当系统矩阵A的特征值有重根时，通常不可能通过线性变换而实现状态变量之间的完全解耦，约当规范型是可能达到的最简耦合形式。同一特征根、同一约当子块所对应的状态变量之间才存在耦合关系。

小结

- 对同一动态系统，描述系统动态过程的状态空间表达式有无穷多种，但反映系统本质特征的系统特征值是唯一的。
- 同一动态系统，不同状态空间表达式之间，存在着一种非奇异线性变换关系。
- 同一动态系统，不同状态空间表达式的系统矩阵是相似矩阵。
- 不存在重根的系统，可变换为对角规范型，实现状态变量之间的完全解耦。
- 存在重根的系统，通常只能变换为约当规范型，实现部分状态变量解耦。