《现代控制理论》MOOC课程

1.3　状态向量的线性变换

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

系统的特征向量

对于n×n维矩阵A，若存在一个不为零的n维向量p_i 和一个标量 λ_i，使得：

$$(A-\lambda_i I)p_i=0$$

则称 p_i 为矩阵A的特征值λ_i所对应的特征向量。

计算特征向量，就是求解齐次代数方程

$$(A-\lambda_i I)p_i=0$$

由齐次代数方程解的性质，系数矩阵奇异时，有无穷多组非零解。

一个特征根，对应于无穷多个特征向量。

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

对角规范型

对于给定系统 $\dot{x} = Ax + Bu$，设其特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为两两互异，由它们的特征向量组成变换阵 $T = [p_1, p_2, \cdots, p_n]$，那么系统的状态方程在变换 $z = T^{-1}x$ 下必可化为如下形式的对角规范型：

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} z + \bar{B}u, \qquad \bar{B} = T^{-1}B$$

证：对系统进行线性变换 $z = T^{-1}x$

可得到一个新的状态方程 $\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

$$AT = A[p_1, p_2, \cdots, p_n] = [Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n] = [\lambda_1 p_1, \ \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n]$$

$$= [p_1, \ p_2, \cdots, p_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

方程两边同乘 T^{-1}可得：

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

证毕

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

讨论

➢ 在对角规范型下，各状态变量间实现了完全解耦，可表示为n个独立的状态变量方程。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}$$

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

➢ 若系统矩阵A为标准型，即

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

则将状态方程变换为对角规范型的变换阵T为范德蒙德阵，即：

$$T=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

证明：设系统矩阵A的特征值λ_i所对应特征向量为：

$$p_i = [p_{1i} \quad p_{2i} \quad \cdots \quad p_{ni}]^T$$

由特征向量的定义可得 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i I)p_i = 0$

将规范性系统矩阵代入：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = 0$$

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

将矩阵方程展开：

$$\begin{cases} -\lambda_i p_{1i} + p_{2i} = 0 \\ -\lambda_i p_{2i} + p_{3i} = 0 \\ \qquad\vdots \\ -\lambda_i p_{(n-1)i} + p_{ni} = 0 \\ -a_0 p_{1i} - a_1 p_{2i} - \cdots - (a_{n-1} + \lambda_i) p_{ni} = 0 \end{cases}$$

这是一个齐次方程，且其秩小于n，故其有无穷个解。

令 $p_{1i} = 1$ 可得 $p_{2i} = \lambda_i$， $\cdots$， $p_{ni} = \lambda_i^{n-1}$

故状态方程变换为对角规范型的变换阵可表示为：

$$\boldsymbol{T} = [p_1 \quad p_1 \quad \cdots \quad p_n] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

得证

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

例. 给定线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

将状态方程化为规范型。

解： ① 确定系统的特征值，即

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

可得： $\lambda_1 = 2$， $\lambda_2 = -1$， $\lambda_3 = 1$

因为系统特征值不存在重根，故系统的状态方程可化为对角规范型。

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

② 确定非奇异变换阵T

求取与特征值 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ 所对应的特征向量。

代入特征向量求解方程 $(A-\lambda_i I)\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{0}$ ，当 $\lambda_1 = 2$ 有：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

可得 $p_{11} = k$ ($k \neq 0$的任意值)，$p_{21} = p_{31} = 0$

取 $k = 1$ 有：$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 同理可得：$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

由此可得：$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 求逆可得：$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

三. 状态空间表达式的对角规范型和约当规范型

③ 求系数矩阵 $\bar{A}$、$\bar{B}$

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$$

故系统状态方程的对角规范型为：

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}u$$