



《现代控制理论》MOOC课程

1.3 状态向量的线性变换

1.3 状态向量的线性变换

状态空间表达式非唯一性

系统特征值的不变性

对角线规范型和约当规范型

一. 状态空间表达式的非唯一性

- 状态变量是足以完全表征系统运动状态的最小个数的一组变量
- 状态变量是相互独立的
- 同一系统状态变量的个数是唯一确定的
- 同一系统状态变量的选取是非唯一的

➤ 同一系统不同状态向量之间必然存在一种线性变换的关系

一. 状态空间表达式的非唯一性

同一系统不同状态向量之间必然存在一种线性变换的关系。

证明：

反设： x 、 z 为同一系统的两个不同状态向量，但 x 、 z 之间不存在线性变换关系

由 x 、 z 之间不存在线性变换关系。

则向量 x 中至少存在一个变量 x_i ，不能用向量 z 各分量的线性组合来表示，即独立于 z 向量的各分量。

因为，变量 x_i 和向量 z 的各分量都是状态变量，故要完全表征系统的动态行为向量 z 至少还要增加一个分量 x_i ，即向量 z 不是系统的状态向量。

反设不成立。故，同一系统不同状态向量之间必然存在一种线性变换的关系。

一. 状态空间表达式的非唯一性

设一给定的 n 阶系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0$$

$$y = Cx + Du$$

对于任意给定的 $n \times n$ 阶非奇异阵 T , 作如下变换:

$$z = T^{-1}x$$

则 z 也一定是给定系统的另一个状态向量。

由 $z = T^{-1}x$ 可得 $x = Tz$, 代入状态空间表达式为:

$$T\dot{z} = ATz + Bu \quad Tz(0) = x_0$$

$$y = CTz + Du$$

一. 状态空间表达式的非唯一性

状态方程和初值两端同乘 T 的逆:

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \quad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y = CTz + Du$$

则有系统新的状态空间表达式:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad z(0) = z_0$$

$$y = \bar{C}z + \bar{D}u$$

其中, $\bar{A} = T^{-1}AT$, $\bar{B} = T^{-1}B$, $\bar{C} = CT$, $\bar{D} = D$, $z_0 = T^{-1}x_0$

由于 T 是任意非奇异阵, 故系统的状态空间表达式是非唯一的。

一. 状态空间表达式的非唯一性

例. 某系统的状态空间表达式为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} x$$

作如下变换, $x = Tz = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} z$ 。求变换后系统的状态空间表达式。

解: $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$z(0) = T^{-1}x(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

一. 状态空间表达式的非唯一性

$$\bar{B} = T^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = [0 \quad 3] \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = [6 \quad 0]$$

变换后系统的状态空间表达式为：

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = [6 \quad 0] \mathbf{z}$$

二. 系统特征根的不变性

系统的特征值

定义：系统状态空间表达式中系统矩阵 A 的特征值称为系统的特征值。

➤ 系统特征值也就是系统矩阵特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 的根。

➤ 将特征方程写成多项式的形式：

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

显然对 n 阶系统有 n 个特征值。

二. 系统特征根的不变性

系统特征值的不变性

非奇异线性变换不改变系统的特征值。

证明：非奇异线性变换前： $|\lambda I - A| = 0$ 非奇异线性变换后： $|\lambda I - T^{-1}AT| = 0$

$$\text{而： } |\lambda I - T^{-1}AT| = |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| = |T^{-1}\lambda T - T^{-1}AT| = |T^{-1}(\lambda I - A)T|$$

因为矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积，矩阵逆的行列式等于矩阵行列式的倒数，
所以有：

$$|T^{-1}(\lambda I - A)T| = |T^{-1}| |\lambda I - A| |T| = |\lambda I - A|$$

$$\text{即 } |\lambda I - A| = |\lambda I - T^{-1}AT| \quad \text{证毕}$$