《现代控制理论》MOOC课程

第一章 控制系统的状态空间表达式

- 状态空间变量及状态空间表达式
- 状态空间表达式的建立
- 状态向量的线性变换
- 从状态空间表达式求传递函数
- 组合系统的状态空间表达式
- 离散系统、 时变系统和非线性系统的状态空间表达式

- 经典控制理论：

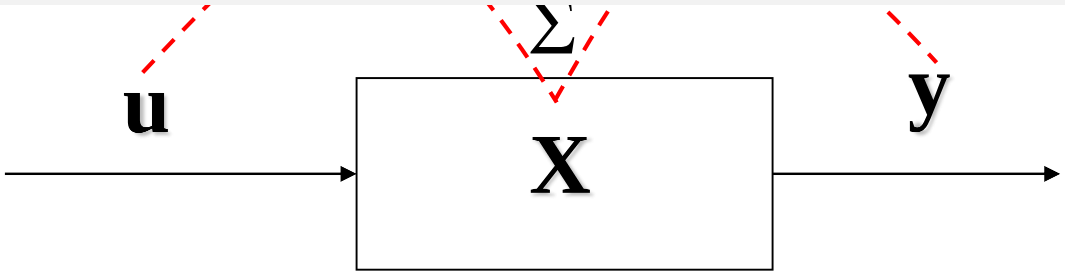
数学模型：传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

传递函数的定义

线性定常系统的传递函数是指在初始状态为零的条件下，系统输出变量的拉氏变换与输入变量的拉氏变换之比。

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$



数学模型：状态空间表达式

《现代控制理论》MOOC课程

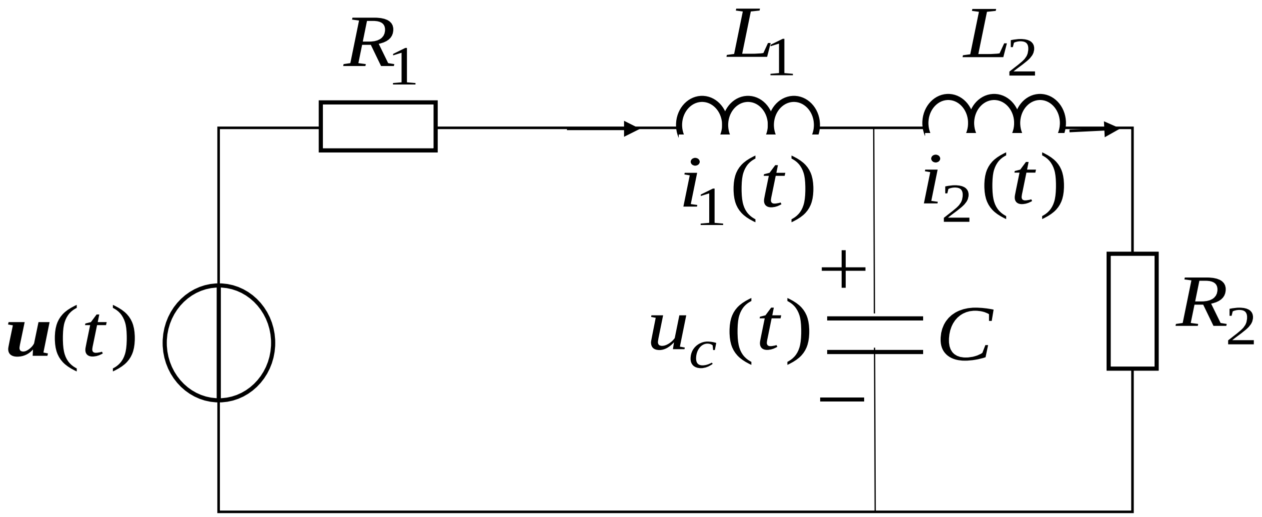
1.1 状态空间变量及状态空间表达式

一．状态变量

足以完全表征系统运动状态的最少个数的一组变量，称为状态变量。

完全表征

只要给定状态变量的初值$x(t_0)$以及$t \geq t_0$时刻的输入$u(t)$，就能够完全确定系统在任何$t \geq t_0$时间的动态行为。



已知：

$i_1(t_0), i_2(t_0), u_c(t_0)$

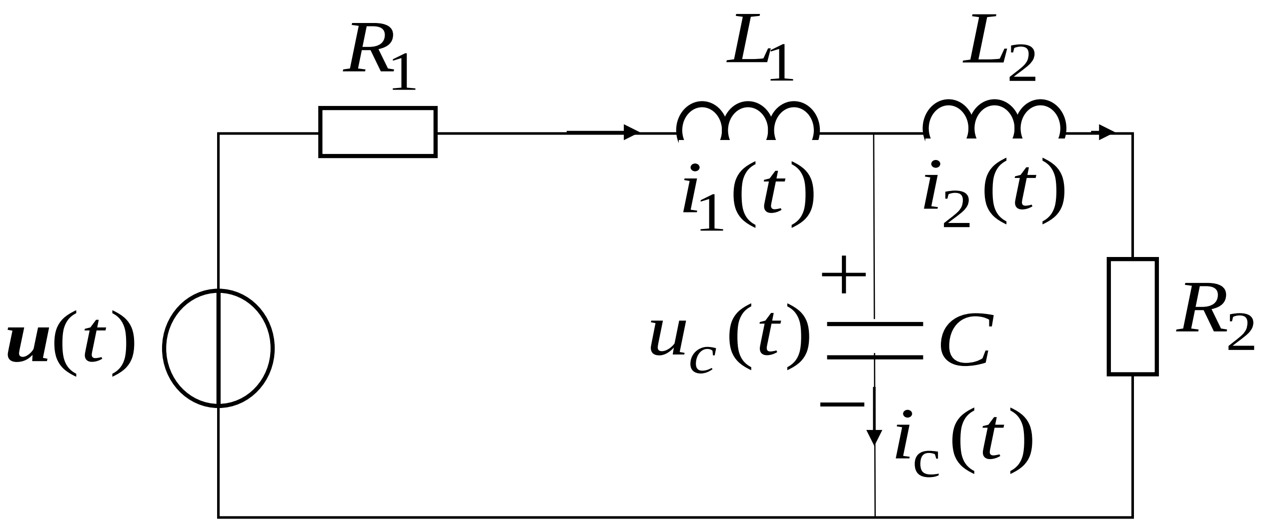
$u(t)$

一．状态变量

最小性

体现在减少变量个数就不能够完全表征系统的动态行为，

而增加变量的个数则是完全表征系统动态行为所不需要的。



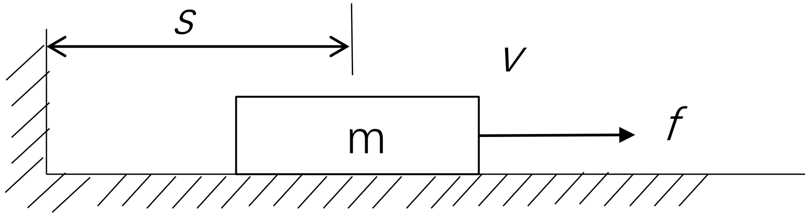
$$i_1(t), i_2(t), u_c(t)$$

$$i_c(t)=i_1(t)-i_2(t)$$

关于状态变量的几点说明

- 状态变量是相互独立的。
- 对于一个实际的物理系统，状态变量的个数大于等于系统中独立储能元件的个数。

例如，对于如下质量运动系统：



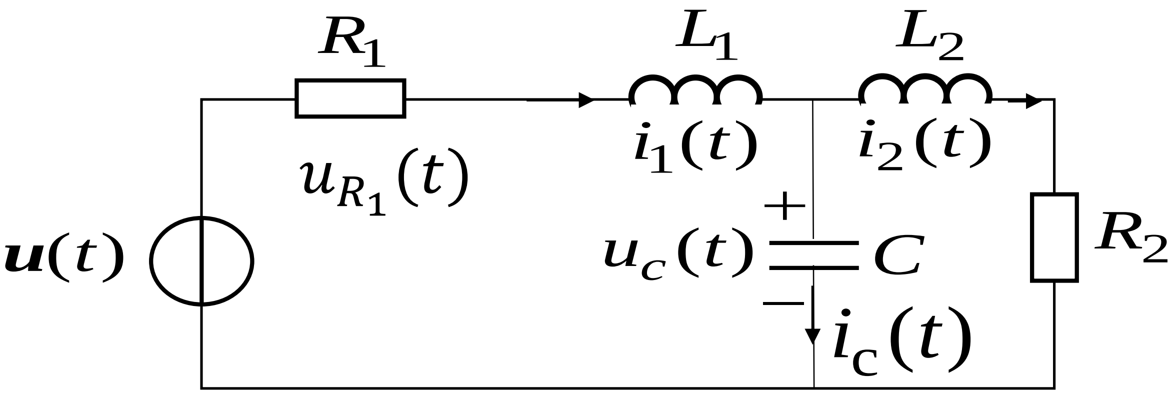
- 若只描述质量块的运动速度，选取一个状态变量v，$f = ma = m\dfrac{dv}{dt}$；
- 若需要描述质量块的运动速度和距离，选取两个状态变量s、v；

$$\frac{ds}{dt} = v,\quad f = m\frac{dv}{dt}$$

◆ 若不考虑具体物理意义，可选取无穷多个状态变量：$x_1 = v, x_2 = s, \dot{x}_3 = x_2, \cdots$

$$f = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_2, \quad \cdots$$

➢ 对同一个动态系统，在内涵精度描述相同的情况下，状态变量的选取不是唯一的，但状态变量的个数是唯一确定的，不能多，也不能少。



状态变量1： $i_1(t), i_2(t), u_c(t)$

状态变量2： $u_{R_1}(t), i_2(t), u_c(t)$

二. 状态向量

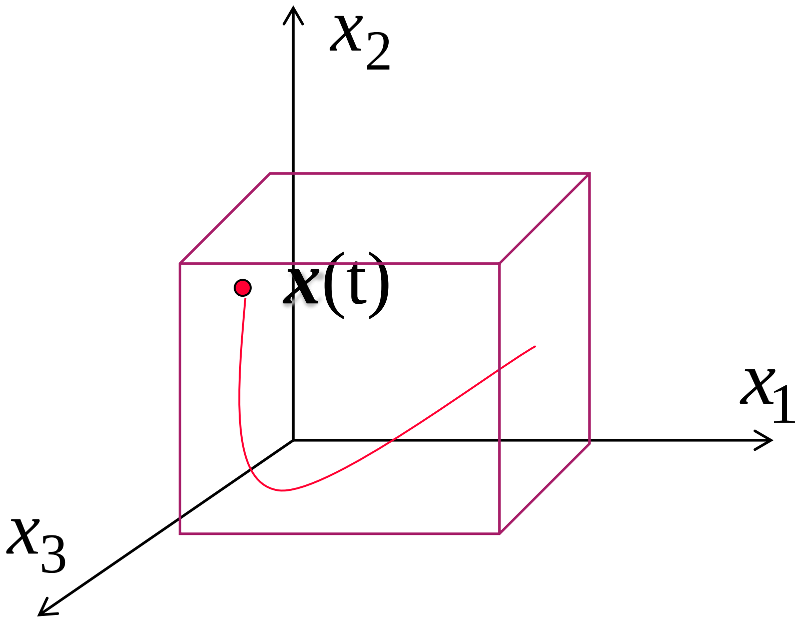
由系统状态变量构成的向量，称为系统的**状态向量**。

若一个系统有n个状态变量$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，把这$n$个状态变量作为分量所构成的向量就称为系统的状态向量。

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \cdots x_n(t) \end{bmatrix}$$

三．状态空间

以状态向量的每一个分量$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$为坐标轴所构成的空间,称为状态空间。

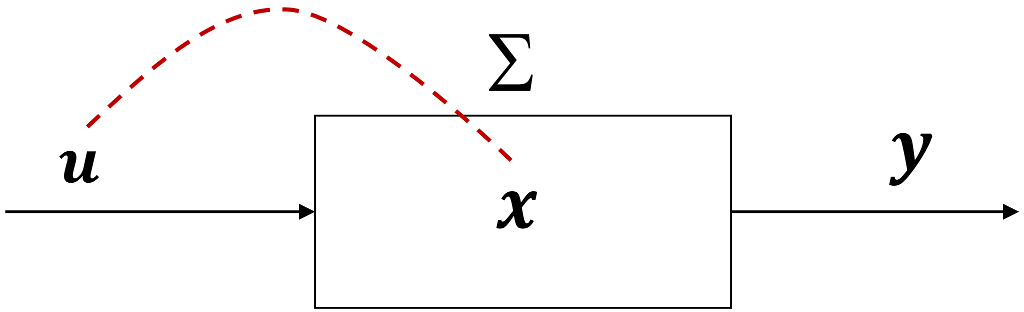


- 系统任一时刻的状态均可表示为状态空间中的一个点。
- 系统状态随时间变化的过程，在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨迹。

四. 状态方程

由系统状态变量构成的描述系统动态过程的一阶微分方程组，称为系统的**状态方程**。

- 状态方程用于描述系统输入引起系统状态变化的动态过程 。

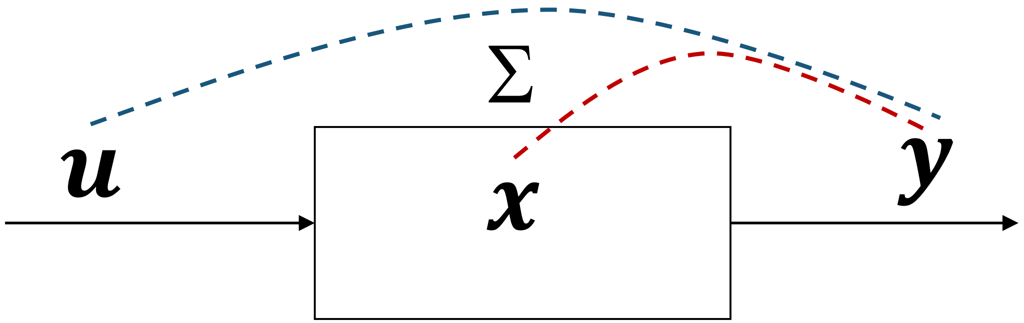


- 状态方程的一般形式为：$\dot{x} = Ax + Bu$

五. 输出方程

在指定系统输出y的情况下，输出y向量与状态向量x及系统输入u向量的函数关系式，称为系统的**输出方程**。

- 系统的状态和输入决定了系统输出的变化。



- 系统输出方程的一般形式为：$y = Cx + Du$

六. 状态空间表达式

状态方程和输出方程总和起来，构成对一个系统的完整动态描述，称为系统的**状态空间表达式**。

对于n个状态变量、r个输入、m个输出的动态系统，状态空间表达式的一般形式为：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$A\in R^{n\times n}$,表征了系统内部状态的联系，称为系统矩阵;

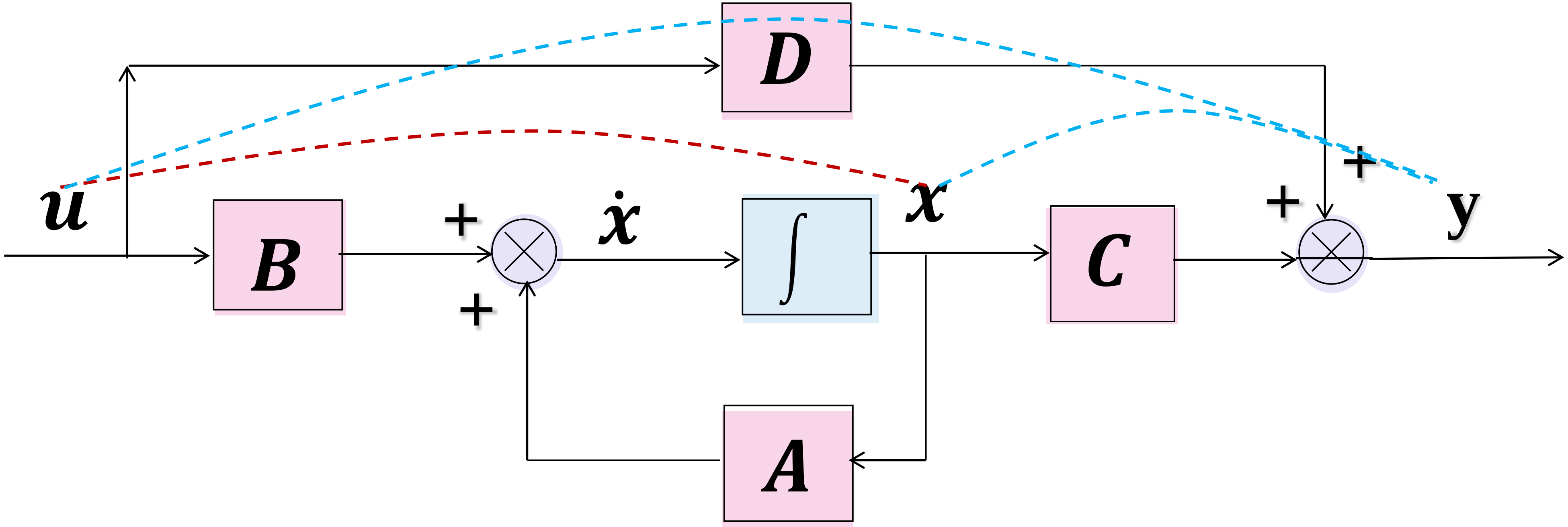
$B\in R^{n\times r}$,表征了输入对状态的作用，称为控制矩阵;

$C\in R^{m\times n}$,表征了输出与状态变量的关系，称为输出矩阵;

$D\in R^{m\times r}$,表征了输出与输入的关系，称为直接传输矩阵;

关于状态空间表达式的几点说明

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$



- 状态空间表达式可以用系统方框图描述；
- 输入引起系统状态的变化，而状态和输入则决定了输出的变化；
- 状态空间表达式的方框图，只含有比例、积分、加法三类基本环节；
- 在输出方程中，若无特殊声明，均不考虑输入向量的直接传输，即令D＝0；

小结

- 状态变量、状态向量、状态空间、状态轨迹、状态空间表达式的定义；
- 状态变量是相互独立的，从数学上来看是线性无关的。
- 对同一个动态系统，在描述内涵精度相同的情况下，状态变量的个数是唯一确定的，但是状态向量的选取可以有无穷多种；
- 对于一个实际的物理系统,通常状态变量个数等于系统中独立储能元件的个数。
- 状态空间表达式的方框图，只含有比例、积分、加法三类基本环节；