《现代控制理论》第3章作业解析

1. 已知系统的状态空间表达式为：$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$

则系统是（ ）。

A. 完全能控完全能观的

B. 完全能控不完全能观的

C. 不完全能控完全能观的

D. 不完全能控不完全能观的

解析：系统矩阵为约当规范型，约当块最后一行所对应的输入矩阵行为0，约当块第一列所对应的输出矩阵列不为0，故选 C。

2. 给定二阶系统：$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$ 为完全能控， a, b 应满足的关系( )

A. $b \neq a + 1$

B. $b \neq a + 2$

C. $b \neq a + 3$

D. $b \neq a + 4$

解析：$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & a+4 \\ 2 & 2b \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a+4 \\ 2 & 2b \end{vmatrix} = 2b - 2a - 8 \neq 0$$

$$b \neq a + 4$$

3. 已知系统的状态方程为：$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$

系统的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，则有（ ）。

A. λ_1，λ_2 均为能控振型；

B. λ_1 为能控振型，λ_2为不能控振型；

C. λ_1 为不能控振型，λ_2为能控振型；

D. λ_1，λ_2均为不能控振型；

解析：由PBH判据

$$rank[\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=rank\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}=2$$

$$rank[\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=rank\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}=1$$

故选B

4. 已知系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

则系统是（ ）。

A. 完全能控完全能观的　　B. 完全能控不完全能观的

C. 不完全能控完全能观的　　D. 不完全能控不完全能观的

解析：特征值-1有两个约当子块。

两个约当块的最后1行分别是第3行和第5行，输入矩阵的第3行和第5行线性无关，故系统完全能控。

两个约当块的第1列分别是第1列和第4列，输出矩阵的第1列和第4列线性相关，故系统不完全能观。

5. 已知系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & 0 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3\end{bmatrix}x+Bu,\quad y=Cx$$

若系统完全能控、完全能观。输入向量是r维的，输出向量是m维的，则有（ ）。

A. $r\geq 1,\ m\geq 1$　　**B.** $r\geq 2,\ m\geq 1$

C. $r\geq 1,\ m\geq 2$　　**D.** $r\geq 2,\ m\geq 2$

解析：特征值3有两个约当子块，几何重数为2。

要使特征值3两个约当子块的最后一行所对应的输入矩阵行线性无关，输入向量的维数应满足 $r\geq 2$

要使特征值3两个约当子块的第1列所对应的输出矩阵列线性无关，输出向量的维数应满足 $m\geq 2$

6. 完全能控的状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}x$$

则以下系统为完全能观的是（ ）

A. $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}x$

B. $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}x$

C. $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}x$

D. $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}x$

解析：A、D为原系统的对偶系统，原系统完全能控，故A、D完全能观；

B. $rank\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 11 & 2 \\ -11 & 38 & -3 \end{bmatrix}=3$ **完全能观**

C. $rank\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 11 & -2 \\ -12 & 40 & -12 \end{bmatrix}=2$ **不完全能观**

7. 已知系统的状态空间表达式为： $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$ 则状态变量x_3是（ ）

A. 能控能观的　　B. 能控不能观的　　C. 不能控能观的　　D. 不能控不能观的

解析： $M=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $rank(M)=2<3$ 系统不完全能控

取能控性分解变换矩阵 $T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 做线性变换 $x=Tz$

可得：$\dot{z}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$ 　　即z_1、z_2可控，z_3不可控。

由 $\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=T^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\ -x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ 　　即x_1+x_3、$-x_1$可控，x_2不可控。

而可控状态的线性组合仍然控制，有$(x_1+x_3)+(-x_1)=x_3$可控。

再由能观性秩判据，系统完全能观。

故选A。

8.下列系统中实现了能控性分解的系统为（ ）

A. $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$

B. $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$

C. $\dot{x}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}u$

D. $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}u$

解析：实现了能控性分解的系统特征为：

1）能控子系统的输入矩阵为0；

2）不能控子系统与能控子系统的关联矩阵为0；

故有，对A. x_1, x_2 能控， x_3 不能控，实现了能控性分解；

对B. x_1能控，，x_2, x_3不能控，实现了能控性分解；

9. 已知系统的状态空间表达式为：$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$

经线性变换 $x=Tz$ 将系统的状态方程变换为：$\dot{z}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$

A. $T=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$

B. $T=\begin{bmatrix}-6 & -4 & 2\\ -8 & -1 & 1\\ -6 & 1 & 1\end{bmatrix}$

C. $T=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 2\\ -5 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$

D. $T=\begin{bmatrix}2 & -4 & -6\\ 1 & -1 & -8\\ 1 & 1 & -6\end{bmatrix}$

解析：系统 $\dot{z}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$为能控标准II型。

即变换矩 T 能控标准II型的变换矩阵，即为能控性秩判别矩阵。

$$T=[B\quad AB\quad A^2B]=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

10. x_α, x_β 分别为系统的两个能控状态，α, β 为不同时为零的任意常数，则状态$x_{\alpha\beta} = \alpha x_\alpha + \beta x_\beta$（ ）

A. 能控；　B. 不能控；　C. 能控性α, β 的具体取值有关；　D. 无法确定是否能控；

解析：由于x_α, x_β是系统的能控状态，故分别存在控制$u_\alpha(t), u_\beta(t)$，在有限时间$[t_0 \quad t_f]$内，将t_0时刻的状态x_α, x_β，在t_f时刻转移到坐标原点。即

$$e^{A(t-t_0)}x_a + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t-\tau)}Bu_a(\tau)d\tau = 0, \qquad e^{A(t-t_0)}x_b + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t-\tau)}Bu_b(\tau)d\tau = 0$$

将上两式两边分别乘以α, β ，再相加可得：

$$e^{A(t-t_0)}\left(\alpha x_a + \beta x_b\right) + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t-\tau)}B\left(\alpha u_a(\tau) + \beta u_b(\tau)\right)d\tau = 0$$

即存在控制$u = \alpha u_a(\tau) + \beta u_b(\tau)$可在 t_f 时刻，将t_0时刻的状态$\alpha x_a + \beta x_b$转移到坐标原点。

因此，状态$x_{\alpha\beta} = \alpha x_\alpha + \beta x_\beta$是能控的。