《现代控制理论》MOOC课程

5.3　系统镇定问题

一. 状态反馈的镇定问题

给定n阶线性定常受控系统： $\dot{x} = Ax + Bu$， $x(0) = \mathbf{0}$， $t \geq 0$

$y = Cx$

确定状态反馈控制$u = -Kx + v$，使得所导出的状态反馈闭环系统

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv$$

是渐近稳定的，也即闭环系统的特征值均有负的实部，则称系统实现了状态反馈镇定。

- 镇定是极点配置的一类特殊情况，它要求将极点配置到根平面的左半平面。

二. 状态反馈可镇定的条件

定理：线性定常系统

$\dot{x} = Ax + Bu$， $x(0) = \mathbf{0}$， $t \geq 0$

$y = Cx$

可通过状态反馈 $u = -Kx + v$ 实现镇定的充要条件是其不能控子系统是渐近稳定的。

证明：设线性定常系统为不完全能控，故存在非奇异线性变换R_C对系统进行能控性分解

而导出：$\tilde{A} = R_C^{-1}AR_c = \begin{bmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$ $\tilde{B} = R_C^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}$

且对任一状态反馈矩阵 $K = [k_1 \quad k_2]$ 可导出 $\tilde{K} = KR_c = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2]$，

于是有：$det[\lambda I - (A - BK)] = det[\lambda I - R_C{}^{-1}(A - BK)R_C]$

$$= det\begin{bmatrix} \lambda I - \tilde{A}_c + \tilde{B}_c\tilde{k}_1 & -\tilde{A}_{12} + \tilde{B}_c\tilde{k}_2 \\ 0 & \lambda I - \tilde{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = det\left(\lambda I - \tilde{A}_c + \tilde{B}_c\tilde{k}_1\right)det(\lambda I - \tilde{A}_{\bar{c}})$$

由于$\{\tilde{A}_c，\tilde{B}_c\}$为能控，故必存在$\tilde{k}_1$使$(\tilde{A}_c - \tilde{B}_c\tilde{k}_1)$的特征值具有负的实部，即存在$K$使能控子系统的特征值均具有负的实部。

因此，系统由状态反馈实现镇定的充要条件为不能控子系统的特征值均具有负实部。

得证

三. 状态反馈镇定的算法

算法 给定不完全能控系统 $\dot{x}=Ax+Bu$，且知其满足可镇定的条件，则镇定问题中反馈矩阵K的计算步骤如下：

1. 对给定系统进行能控性分解，导出能控子系统$\{\tilde{A}_c,\ \tilde{B}_c\}$，能控性分解的变换阵为$R_C$；

2. 应用非奇异线性变换阵T_{C1}，将能控子系统$\{\tilde{A}_c,\ \tilde{B}_c\}$化为能控标准I型$\{\bar{A}_c,\ \bar{B}_c\}$；

3. 应用极点配置算法,计算反馈增益阵$\bar{K}$使能控子系统的特征值具有负的实部；

4. 计算状态反馈矩阵$K=[k_1\quad 0]$；

$$K=[k_1\quad 0]=[\bar{k}_1T_{C1}^{-1}\quad 0]R_C^{-1}$$

例：已知系统的状态方程为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

判别其是否为可镇定的，若是可镇定的，试求一状态反馈 K，使闭环系统为渐近稳定。

解：(1) 判别系统的可控性

$$M=[B \quad AB \quad A^2B]=\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix} \qquad rank\boldsymbol{M}=2<3$$

故系统为不完全能控。

(2) 将系统按能控性进行分解(取M中2个线性无关列，第3 列为确保非奇异的任意向量)

取 $R_C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ $\qquad R_C^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

作非奇异变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R_C}\widetilde{\boldsymbol{x}}$

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{R_C^{-1}AR_C}\widetilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{R_C^{-1}B}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

不可控子系统为：$\dot{\widetilde{x}}_{\overline{C}}=-2\widetilde{x}_{\overline{C}}$， $\lambda_{\overline{C}}=-2$ 不可控子系统渐近稳定，故系统是可镇定的。

（3）对可控子系统作状态反馈，使系统稳定

a. 可控子系统的特征多项式为：

$$f_0(\lambda)=det(\boldsymbol{\lambda I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+1$$

b. 假定使能控子系统的闭环极点为：$\lambda_{1,2}=-1\pm j2$

闭环系统的期望特征多项式为：$f_k(\lambda^*)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2+2\lambda+5$

c. 变换后的反馈矩阵：

$$\overline{\boldsymbol{K}}=[a_0^*-a_0 \quad a_1^*-a_1]=[5-1 \quad 2-(-3)]=[4 \quad 5]$$

(4）计算状态反馈矩阵

能控标准I型变换阵：

$$T_{C1}=[AB\quad B]\begin{bmatrix}1 & 0\\ a_1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad T_{C1}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=[\bar{\boldsymbol{k}}_1T_{C1}^{-1}\quad 0]\boldsymbol{R}_C^{-1}=\left[[4\quad 5]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\quad 0\right]\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=[-9\quad 0\quad 5]$$