《现代控制理论》第4章练习作业解析

中国大学MOOC

1. 可用于判定非线性系统大范围渐进稳定的方法是（ ）

A. 李亚普诺夫判据

B. 奈奎斯特判据

C. 求系统的特征根

D.将系统在稳态平衡点线性化后求系统的特征根

中国大学MOOC

2. 下列关于系统稳定性说法正确的是（ ）

A. 系统的稳定性是针对系统的平衡状态的，只要一个平衡状态稳定，其它平衡状态也稳定；

B. 通过克拉索夫斯基法一定可以构造出判断系统稳定性的李雅普诺夫函数；

C. 判定线性系统稳定性只能采用李雅普诺夫方程判据；

D. 线性系统的李雅普诺夫局部稳定等价于全局稳定；

解析：C. 注意李雅普诺夫判据与李雅普诺夫方程判据的区别；

D. 线性系统通常只有一个平衡状态。

3. 下列关于系统稳定性说法错误的是（ ）

A. 系统输入有界输出有界，则系统在该输入下是稳定的；

B. 若线性定常系统的所有特征值均有负的实部则系统是稳定的；

C. 系统在非零初始状态作用下的运动轨迹最终将回到原平衡状态则系统是渐进稳定的；

D. 系统在非零初始状态作用下的运动轨迹回不到原平衡状态则系统是不稳定的；

解析：D. 也可能是李雅普诺夫意义下的稳定。

中国大学MOOC

4. 以下关于系统稳定性从强到弱的排序正确的是（ ）

A. 大范围渐近稳定、渐近稳定、李亚普诺夫意义下的稳定、不稳定；

B.李亚普诺夫意义下的稳定、大范围渐近稳定、渐近稳定、不稳定；

C. 渐近稳定、大范围渐近稳定、李亚普诺夫意义下的稳定、不稳定；

D.李亚普诺夫意义下的稳定、渐近稳定、大范围渐近稳定、不稳定；

中国大学MOOC

5. 系统的状态方程为：$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2(x_2 - 1)\end{aligned}$ 则系统的平衡状态为（ ）

A. $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ B. $x_e = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ C. $x_e = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ D. $x_e = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

解：由 $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2(x_2 - 1) = 0 \end{cases}$

可解得：$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$x_{e2} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

中国大学MOOC

6. 下列系统中不能用雅克比矩阵法（克拉索夫斯基法）判断系统稳定性的是（   ）

A. $\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^2$
$\dot{x}_2 = -x_2$

B. $\dot{x}_1 = 2x_2$
$\dot{x}_2 = -2x_1^2 + x_2$

C. $\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2$
$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^2$

D. $\dot{x}_1 = 4x_1 + x_2^4 + 2x_2^3 + 4x_2^2$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_1^2$

解析：雅克比矩阵法（克拉索夫斯基法）应用的条件为雅克比矩阵 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的对角元不存在零元，即$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \neq 0$

B、D不满足这一条件。

中国大学MOOC

7. 下列系统中可以用李雅普诺夫方程判断系统稳定性的是（ ）

A. $\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^2$
$\dot{x}_2 = -x_2$

B. $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2$

C. $\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2$
$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^2$

D. $\dot{x}_1 = 4x_1 + x_2^4 + 2x_2^3 + 4x_2^2$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_1^2$

解析：李雅普诺夫方程判据是判定线性系统稳定性的充分必要条件，只能用于判定线性系统的稳定性。

中国大学MOOC

8. 用李雅普诺夫直接法判定系统: $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 2x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2\end{aligned}$

在平衡状态$x_e = 0$的稳定性。

A. 李雅普诺夫意义下的稳定　B. 渐近稳定　C. 大范围渐近稳定　D. 不稳定

解析：雅克比矩阵 $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4x_2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

取$P = I$

则有 $Q = -J^T P - PJ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4x_2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4x_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4x_2 \\ -4x_2 & 4 \end{bmatrix}$

由 $4 > 0$, 当$4^2 - 4^2 x_2^2 > 0$，即$|x_2| < 1$时, $Q > 0$

故系统在原点局部渐进稳定。

9. 用李雅普诺夫直接法判定系统 $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 6x_2\end{aligned}$

在平衡状态$x_e = 0$的稳定性。

A. 李雅普诺夫意义下的稳定　　B. 渐近稳定　　C. 大范围渐近稳定　　D. 不稳定

解析：雅克比矩阵 $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & -4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

取$P = I$

则有 $Q = -J^T P - PJ = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1^2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} > 0$

故系统在$x_e = 0$渐进稳定。

且 $V(x) = f^T(x) f(x) = \begin{bmatrix} -x_1^3 - 4x_2 & 4x_1 - 6x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1^3 - 4x_2 \\ 4x_1 - 6x_2 \end{bmatrix} = \left(-x_1^3 - 4x_2\right)^2 + (4x_1 - 6x_2)^2$

故有 $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} V(x) \to \infty$ ，系统大范围渐进稳定。

10. 用李雅普诺夫直接法判定系统 $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$

在平衡状态$x_e = 0$的稳定性。

A. 李雅普诺夫意义下的稳定

B. 渐近稳定

C. 大范围渐近稳定

D. 不稳定

解析：取$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

故有，$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(x_1^3 - x_2) + 2x_2(x_1 + x_2) = 2x_1^4 + 2x_2^2 > 0$

由李雅普诺夫稳定性判据，系统在平衡状态$x_e = 0$不稳定。