Problem maksymalnego przepływu w sieci

Krótki rys historyczny:

Problem maksymalnego przepływu w sieci po raz pierwszy sformułowano w 1954 roku przez T.E. Harrisa jako uproszczony model radzieckiego przepływu ruchu kolejowego. W 1955 roku, Lester R. Ford i Delbert R. Fulkerson stworzyli pierwszy znany algorytm, nazwany algorytmem Forda-Fulkersona .

Później zostały odkryte inne ulepszone rozwiązania problemu maksymalnego przepływu w sieci, szczególnie algorytm najkrótszej ścieżki powiększającej ścieżki Edmondsa i Karpa, algorytm Dinitza blokowania przepływu, algorytm „push-relabel" Goldberga i Tarjana oraz algorytm binarnego blokowania przepływu Goldberga i Rao. Elektryczny algorytm przepływu Christiano, Kelnera, Madry'ego i Spielmana znajdzie przybliżony optymalny maksymalny przepływ, ale zadziała tylko na grafach niekierunkowych.

Źródło: http://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_flow_problem

Istota problemu:

Niech dany będzie graf zorientowany, ważony *G*=<*V*, *E*, *u*>, z nieujemnymi wagami u_{ij} określonymi dla wszystkich krawędzi (*i*, *j*) ze zbioru *E*. Wartość u_{ij} będziemy nazywali przepustowością krawędzi (*i*, *j*).

Przepustowość danej krawędzi może mieć wartość nieskończenie dużą. Niech $U = max\{u_{ij}: u_{ij} < \infty \text{ i } (i,j) \in \mathrm{E}\}$ (*U* - maksymalna skończona przepustowość)

W grafie wyróżnione są dwa wierzchołki: *s* – źródło oraz *t* – ujęcie.
Graf *G* z węzłami *s* oraz *t* będziemy nazywali siecią przepływu.

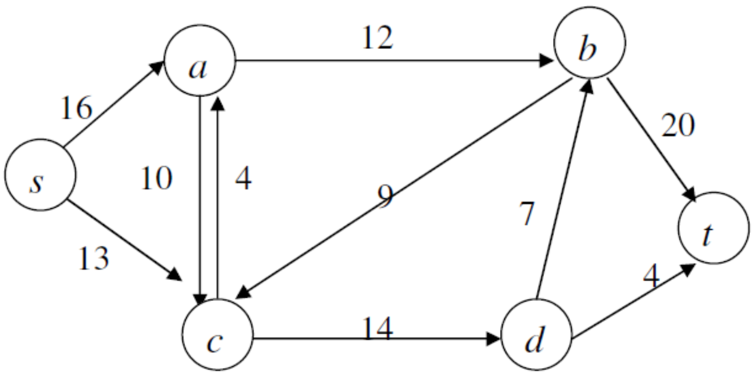
Rozwiązaniem problemu jest maksymalna wartość *v* dla wszystkich funkcji $f: E \to R_+ \cup \{0\}$ spełniających następujące warunki:

a) $\sum_{\{j:(i,j)\in E\}} f_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in E\}} f_{ji} = \begin{cases} v & dla\ i = s \\ 0\ dla\ i \in V - \{s,t\} \\ -v & dla\ i = t \end{cases}$

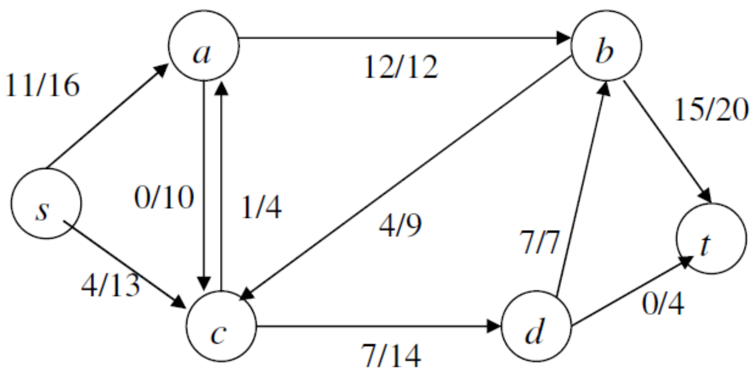
b) $0 \leq f_{ij} \leq u_{ij}$ dla każdej krawędzi $(i,j) \in E$

Funkcja f to funkcja przepływu, a *v* to wartość tego przepływu.
Maksymalną wartość *v* przepływu będziemy oznaczać przez v_{max}, a funkcja przepływu *f* dla której tę maksymalną wartość można uzyskać nazwiemy maksymalnym przepływem i oznaczymy przez f_{max}.

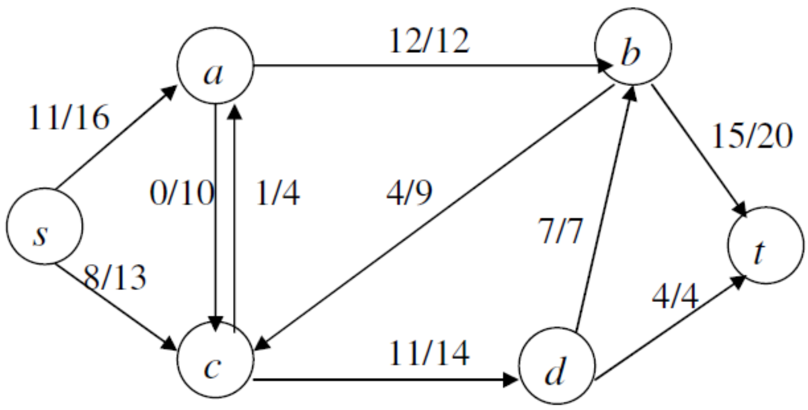
Przykładowa sieć przepływu:



Funkcja przepływu f o wartości v=15:



Funkcja przepływu f_{max} o wartości $v_{max} = 19$:



Zakładamy też, że:
1) Przepustowości to liczby całkowite nieujemne.
2) Graf nie zawiera ścieżki z s do t złożonej wyłącznie z krawędzi o nieskończonych wartościach przepustowości.
3) Graf nie zawiera krawędzi równoległych