Problem maksymalnego przepływu w sieci

Krótki rys historyczny:

Problem maksymalnego przepływu w sieci po raz pierwszy sformułowano w 1954 roku przez T.E. Harrisa jako uproszczony model radzieckiego przepływu ruchu kolejowego. W 1955 roku, Lester R. Ford i Delbert R. Fulkerson stworzyli pierwszy znany algorytm, nazwany algorytmem Forda-Fulkersona .

Później zostały odkryte inne ulepszone rozwiązania problemu maksymalnego przepływu w sieci, szczególnie algorytm najkrótszej ścieżki powiększającej ścieżki Edmondsa i Karpa, algorytm Dinitza blokowania przepływu, algorytm „push-relabel" Goldberga i Tarjana oraz algorytm binarnego blokowania przepływu Goldberga i Rao. Elektryczny algorytm przepływu Christiano, Kelnera, Madry'ego i Spielmana znajdzie przybliżony optymalny maksymalny przepływ, ale zadziała tylko na grafach niekierunkowych.

Źródło: http://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_flow_problem

Istota problemu:

Sieć przepływowa składa się ze źródła s, ujścia t oraz wierzchołków (węzłów) różnych od s i t. Możemy wyobrazić sobie taką sieć np. jako sieć wodociągów:
Każda krawędź grafu skierowanego to kanał, w którym płynie woda. Taki kanał ma określoną przepustowość, którą jest maksymalna szybkość, z jaką następuje przepływ w tym kanale (np. 100 m^3 wody na godzinę). Wierzchołki, które nie są źródłem ani ujściem to punkty, w których zbiegają się te kanały. Przepływ odbywa się tylko poprzez te punkty i jest nieprzerwany. Szybkość wpływania do takiego punktu musi być identyczna z szybkością wypływania z niego. Taka własność nosi nazwę „zachowania przepływu".

Problem maksymalnego przepływu jest najprostszym problemem w sieciach przepływowych. Należy znaleźć największą szybkość, z jaką może przepłynąć woda ze źródła do ujścia, mając na uwadze ograniczoną przepustowość kanałów.

Definicja bardziej formalna:

Niech dany będzie graf zorientowany, ważony $G=(V, E, c)$, z nieujemnymi wagami $c(u,v)$ określonymi dla wszystkich krawędzi (u, v) ze zbioru *E*. Wartość *c(u,v)* będziemy nazywali **przepustowością** krawędzi (u, v). Jeśli $(u,v) \in E$ to przyjmujemy, że $c(u,v)=0$. Przepustowość danej krawędzi może mieć wartość nieskończenie dużą. W grafie wyróżniamy ponadto dwa wierzchołki: *s* – **źródło** oraz *t* – **ujście**.
Graf *G* z węzłami *s* oraz *t* będziemy nazywali **siecią przepływu**.

Rozwiązaniem problemu jest maksymalna wartość *v* dla wszystkich funkcji $f\colon E \to R_+ \cup \{0\}$ spełniających następujące warunki:

a) Dla $(u,v) \in E$ zachodzi $f(u,v) = -f(v,u)$ czyli **warunek skośnej symetryczności**

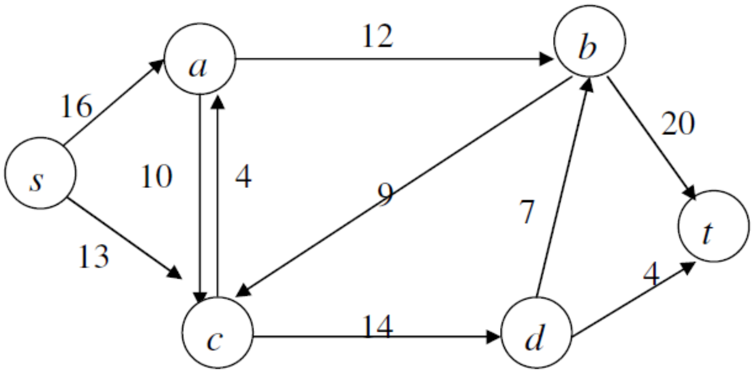
b) $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$ dla każdej krawędzi $(u,v) \in E$ czyli **warunek przepustowości**

c) $\forall u \in V - \{s,t\}$ zachodzi $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$ czyli **warunek zachowania przepływu**

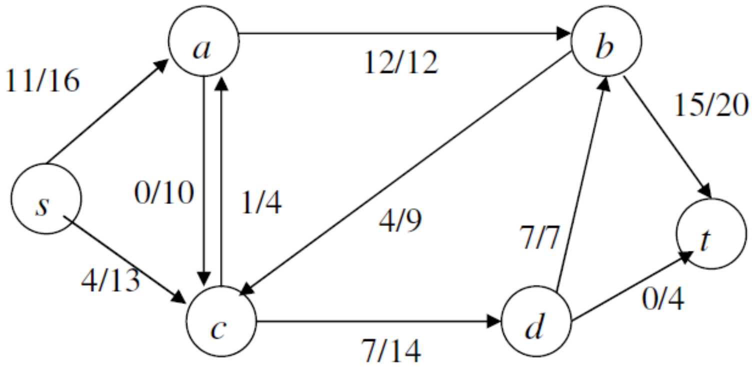
Funkcja f to **funkcja przepływu**, a $|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$ to wartość tego przepływu. Oznacza to łączny przepływ netto wypływający ze źródła.
Wartość $f(u,v)$ która może być dodatnia lub ujemna nazywamy **przepływem netto** z wierzchołka *u* do wierzchołka *v*.

Maksymalną wartość v przepływu będziemy oznaczać przez $|f|_{max}$, a funkcja przepływu f dla której tę maksymalną wartość można uzyskać nazwiemy maksymalnym przepływem i oznaczymy przez f_{max}.

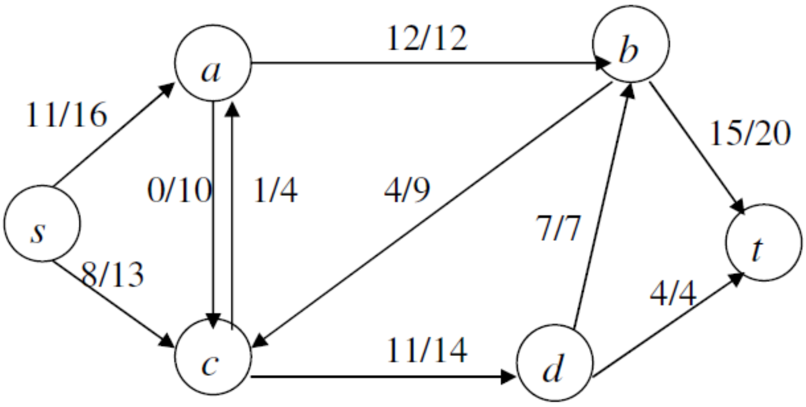
Przykładowa sieć przepływu:



Funkcja przepływu f o wartości $|f| = 15$:



Funkcja przepływu f_{max} o wartości $|f|_{max} = 19$:



Zakładamy też, że:

1) Przepustowości to liczby całkowite nieujemne.

2) Graf nie zawiera ścieżki z s do t złożonej wyłącznie z krawędzi o nieskończonych wartościach przepustowości.

3) Graf nie zawiera krawędzi równoległych

Źródło: T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R. L. Rivest "Wprowadzenie do algorytmów"

Sposoby rozwiązania problemu:

Podstawą wielu algorytmów rozwiązujących problem maksymalnego przepływu w sieci jest algorytm (metoda) **Forda-Fulkersona**. Krótko mówiąc, wg tego algorytmu rozwiązanie problemu polega na zwiększaniu przepływu wzdłuż dowolnej ścieżki (tzw. „**ścieżka powiększająca**") od źródła do ujścia, aż nie będzie możliwe znalezienie żadnej ścieżki powiększającej. W każdym kroku zwiększamy przepływ o przepustowość **residualną** (przepustowość maksymalna zmniejszona o aktualny przepływ.

Algorytmem wywodzącym się od metody Forda-Fulkersona jest algorytm **Edmondsa-Karpa**. Idea rozwiązania jest ta sama z tą różnicą, że w każdym kroku algorytmu szukamy **najkrótszej** ścieżki powiększającej za pomocą przeszukiwania wszerz w **sieci residualnej** do której należą krawędzie, przez które można zwiększyć przepływ.

Również podobnym algorytmem do Edmondsa-Karpa jest algorytm Dinitza, który miał też swój udział przy algorytmie Edmondsa-Karpa, lecz sam wymyślił nieco szybszy. W skrócie polega on na podzieleniu grafu sieci przepływowej na warstwy (przeglądanie wszerz), następnie stworzeniu ścieżek powiększających, nie przemieszczając się względem tej samej warstwy (metodą „w głąb").

Źródło: T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R. L. Rivest "Wprowadzenie do algorytmów", Wikipedia