

Objectif: Atteindre les théories BRST¹ et BV², théories physiques développées pour quantifier les théories de jauge, tout particulièrement les Yang-Mills mais aussi d'autres.

1 Calcul des variations

1.1 Rappels de base de physique des particules classiques (en formalisme Lagrangien)

On considère une particule (classique) dans une variété \mathcal{M} de dimension m ; $I =]t_0, t_1[$ un intervalle réel ouvert (le temps, $t_0, t_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$); et on appelle:

$$\begin{aligned} \text{"Lagrangien"} : \quad L : \quad I \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) &\mapsto L(t, x, v) \\ \text{"Action"} : \quad \mathcal{A} : \quad \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \mathcal{A}[\gamma] := \int_I L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

où L est au moins \mathcal{C}^1 en x et \mathcal{C}^2 en v , et où

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] &= \int_I \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \frac{d\delta\gamma^i}{dt} \\ &= \int_I \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \delta\gamma^i \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \delta\gamma^i \end{aligned}$$

Principe de Maupertuis (généralisé): On obtient les trajectoires d'une physique classique régie par L en se restreignant à l'ensemble des chemins γ tels que $\forall \delta\gamma \quad \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] = 0$. i.e. ce sont les chemins qui extremisent localement l'action (hors cas physique, on parlera donc simplement de "points critiques").

D'où on dérive le principe d'Hamilton: $\forall \delta\gamma$ t.q. $\delta\gamma(t_0) = \delta\gamma(t_1) = 0$

$$(\text{Maup}) \quad \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})} \quad (\text{E.-L.})$$

où l'équation à droite est appelée "equations d'Euler-Lagrange" (E.-L.) (pour une physique de particules). (Existe aussi en version théorie de champs, cf plus tard).

1.2 1^{er} théorème de Noether, symétries et conservation (cas des particules)

Première difficulté: qu'est-ce qu'une symétrie? Il s'agit, grossièrement d'une action d'un groupe de Lie. (Enfin, d'une algèbre de Lie plutôt...)

Version simple:

METTRE LE DESSIN

$$X = X^0(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + X^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad T := X^0$$

¹BRST: Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora & Igor Tyutin

²Igor Batalin & Grigori Vilkovisky

On note $\Delta_X \subset \mathbb{R} \times (I \times \mathcal{M})$ maximal sur lequel le flot est défini.

$$\Phi_X : \begin{cases} \Delta_X & \rightarrow & I \times \mathcal{M} \\ (\epsilon, t, x) & \mapsto & \Phi_X(\epsilon, t, x) = e^{\epsilon X}(t, x) \end{cases}$$

i.e. $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(\epsilon, t, x) = X(\Phi_X(\epsilon, t, x))$ et $\Phi_X(0, t, x) = (t, x)$

en coord loc, ça donne: $e^{\epsilon X}(t, x) = (t + \epsilon T(t, x), x^i + \epsilon X^i(t, x)) + o(\epsilon)$

Action sur $\mathcal{C}^1(I', \mathcal{M})$ où I' est un intervalle compacte de I :

$$\begin{aligned} \gamma &\mapsto \gamma_\epsilon \\ [t_0, t_1] &\mapsto [t_0(\epsilon), t_1(\epsilon)] = [t_0 + \epsilon T(t_0, x_0), t_1 + \epsilon T(t_1, x_1)] \quad \text{modulo } \epsilon \end{aligned}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \gamma_\epsilon^i(\Phi_X^0(\epsilon, t, x)) = \Phi_X^i(\epsilon, t, \gamma(t))$$

$$\gamma_\epsilon = \gamma + \epsilon \delta \gamma + o(\epsilon)$$

$$\begin{aligned} (\gamma^i + \epsilon \delta \gamma^i)(t + \epsilon T(t, \gamma)) &= \gamma^i + \epsilon X^i(t, \gamma) + o(\epsilon) \iff \frac{d\gamma^i}{dt} T + \delta \gamma^i = X^i \\ &\iff \boxed{\delta \gamma^i = X^i(t, \gamma) - T(t, \gamma) \dot{\gamma}^i} \end{aligned}$$

$$X \text{ symetrie de } L \stackrel{(\text{def})}{\iff} \forall [t_0, t_1] \subset I \quad \int_{t_0(\epsilon)}^{t_1(\epsilon)} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt + (\epsilon)$$

Théorème 1: Si X est une symétrie et si γ est un point critique alors

$$Q_X(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) X^i(t, \gamma) - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}^i - L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) T(t, \gamma)$$

est conservé (i.e. $\frac{dQ}{dt} = 0$).

Remarque: $Q_X = \frac{\partial L}{\partial v^i} + LT$

Preuve du théorème: $\forall \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M})$

$$\begin{aligned} 1) \text{ hypothese de symetrie} &\iff \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt + \epsilon [LT]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i \right) dt + o(\epsilon) \\ &\iff \int_{t_0}^{t_1} \delta_X L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt := \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d(LT)}{dt} \right) dt = 0 \end{aligned}$$

où $\delta_X L : I \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Bref, “symétrie $\implies \delta_X L = 0$ ”.

Exo: construire $\delta_X L$ et montrer que ça marche...

2) Montrons que Q constant si (et seulement si) γ est un point critique.

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right)$$

D'où EL $\iff \frac{\delta L}{\delta \gamma^i} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{\delta L}{\delta \gamma^i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \\
\frac{dQ_X}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \gamma^i + LT \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d}{dt} (LT) \\
&= \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d(LT)}{dt} - \cancel{\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} \delta \gamma^i} \\
&\quad \quad \quad = 0 \text{ par (E.-L.)} \\
&= 0 \quad \text{par symetrie}
\end{aligned}$$

Variante: Si $\exists f : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\delta_X L(t, \gamma, \dot{\gamma}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)$ “symétrie modulo un terme exacte” (def) alors la quantité conservée est $(Q_X - f)$.

Même si on va aller plus loin dans les théorèmes de Noether plus tard, une bonne référence (historique) est *Les Théorèmes de Noether: Invariance et lois de conservation au XXe siècle* par Yvette Kosmann-Schwarzbach, éditions de l'école Polytechnique, ISBN: 978-2730211383.

1.3 Formalisme Hamiltonien

L'idée est de faire un changement de variable de $T\mathcal{M}$ vers $T^*\mathcal{M}$... Commençons par définir un variété symplectique.

Définition: (variété symplectique)

Un var symplectique \mathcal{M} est une variété munie d'une 2-forme ω , $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ telle que:

- ω non dégénérée i.e. $\forall \xi \in T\mathcal{M}, \quad \xi \lrcorner \omega = 0 \implies \xi = 0$
 $\xi \lrcorner \omega := \omega(\xi, \cdot)$ (également noté, $\iota_\xi \omega$ dans d'autres ressources)
- $d\omega = 0$ “forme fermée”

Dans des coordonnées locales, $\omega = \sum_{1 \leq a_1 < a_2 \leq n} \omega_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2}$, et les hypothèses reviennent à dire que le rang de la matrice $(\omega_{a_1 a_2})$ est maximal, d'où $\dim \mathcal{M}$ paire.

Théorème de Darboux:

Dans toute variété symplectique, tout point admet une carte (et un jeu de coordonnées $(p_i) \cup (q^i)$ sur cet ouvert) dans laquelle $\omega = dp_i \wedge dq^i$.

Constructions ultra classiques de var symplectiques:

- $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on peut donc définir ω comme dans le théorème de Darboux sur tout \mathbb{R}^{2n} .
- Soit \mathcal{M} une variété de dimension n ,

$$\exists! \pi : \begin{cases} (T^*\mathcal{M}) & \rightarrow \mathcal{M} \\ (q, p) & \mapsto q \end{cases}$$

Soit π et soit $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$ tel que,

$$\forall \xi \in T_{(p,q)}(T^*\mathcal{M}), \quad \theta_{(q,p)}(\xi) = \left\langle \begin{matrix} p, \\ \in T_q^*\mathcal{M} \end{matrix}, \begin{matrix} d\pi_{(q,p)}\xi \\ \in T_q\mathcal{M} \end{matrix} \right\rangle$$

En coordonnées locales, (q^i) sur \mathbb{M} et (p_i) sur $T_q^*\mathcal{M}$ avec $p := p_i dq^i$, on obtient $\theta = p_i d(q^i \circ \pi)$ où $(p_i) \smile (q^i)$ sont des coordonnées locales sur $T^*\mathcal{M}$. On notera tout simplement $\theta = p_i dq^i$ avec $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$ ce qui est un abus de notation conséquent (notamment puisque rentrant violemment en conflit avec la définition de p). Bref, il faut ouvrir l'œil au contexte.

Il suffit alors de prendre $\omega := d\theta$ forme symplectique, pour avoir $(T^*\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique.

Lien entre Lagrangien et géométrie symplectique (eq° de Hamilton)

L'objectif est d'effectuer une transformation de la forme:

$$L : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x, v) & \rightarrow & L(t, x, v) \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, q, p) & \rightarrow & H(t, q, p) \end{cases}$$

Si (dq^i) est une base de $T_q^*\mathcal{M}$, $p \in T_q^*\mathcal{M} \implies p = p_i dq^i$, d'où (p_i, q^i) est un système de coordonnées sur $T^*\mathcal{M}$; enfin, en fait c'est $q^i \circ \pi$ à la place de q^i mais bon, c'est l'abus de notation de tout à l'heure. On pose:

$$\theta = p_i dq^i$$

Transformation de Legendre:

$$\forall (t, q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M} \quad d(L|_{\{t\} \times T_q\mathcal{M}}) =: \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)$$

en coordonnées locales, $v = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in T_q\mathcal{M}$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v^i} dv^i$$

Hypothèse de Legendre:

$$\mathbb{L} : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ (t, q, v) & \mapsto & (t, q, \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)) \end{cases} \quad \text{est un diffeo}$$

Exemple: $L = \frac{m|v|^2}{2} - V(q)$

Définition: (Hamiltonien)

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (H \circ \mathbb{L})(t, q, v) &= \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v) v^i - L(t, q, v) \\ \iff (\text{implicit}) \quad \mathbb{L}^{-1} : (t, q, p) &\rightarrow (t, q, v(t, q, p)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v(t, q, p)) =: p_i$$

$$H(t, q, p) = p_i v^i(t, q, p) - L(t, q, v(t, q, p))$$

1.4 retours sur Noether

$T \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sur $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ est une symétrie de L .

$\implies Q = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) X^i(t, \gamma) - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{\gamma}^i - L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right)$ est conservé si γ est solution.

$$Q = \underset{\text{"moment"}}{(p_i \circ \mathbb{L})} X^i - \underset{\text{"énergie"}}{(H \circ \mathbb{L})} T$$

METTRE LES SOUSTITRES

$$\begin{aligned} dH &= v^i dp_i + \cancel{p_i dv^i} - \frac{\partial L}{\partial t}(t, q, v) dt - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v) dv^i} \\ &= v^i dp_i - \left(\frac{\partial L}{\partial t} \circ \mathbb{L}^{-1} \right) dt - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \mathbb{L}^{-1} \right) dq^i \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= - \frac{\partial L}{\partial t} \circ \mathbb{L} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} &= - \frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \mathbb{L} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= v^i \end{aligned}$$

d'où $\forall \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial v}(t, \gamma, \frac{d\gamma}{dt})$$

Lemme: (transition Lagrangien-Hamiltonien)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \quad (\text{EL}) \quad \iff \quad \begin{cases} \frac{d\gamma^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) & (\text{Hq}) \\ \frac{d\pi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^i}(t, \gamma, \pi) & (\text{Hp}) \end{cases}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} Hq &\iff (t\gamma, \pi) = \mathbb{L}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \\ \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) &= v^i(t, \gamma, \pi) = \frac{d\gamma^i}{dt} \end{aligned}$$

par def de v .

Alors, $\pi_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = (EL) \frac{\partial L}{\partial x^i} = - \frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Notation:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

1.5 Formulation Géométrique

$t \mapsto (\gamma(t), \pi(t)) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, T^*\mathcal{M})$ est solution de Hamilton

$$\iff \frac{d}{dt}(\gamma^i, \pi_i) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right)(\gamma, \pi)$$

champ de vecteurs **non-autonome** (i.e. **indépendant de t**) tangent à $T^*\mathcal{M}$.

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\omega = dp_i \wedge dq^i$$

$$\begin{aligned} X_H \lrcorner \omega &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \lrcorner dp_j dq^j \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} (-\delta^{ij} dp_j) - \frac{\partial H}{\partial q^i} (\delta_{ij} dq^j) \\ &= - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - dH \end{aligned}$$

bref:

$$X_H \lrcorner \omega + dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Artifice: $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M}) \supset (\mathbb{R} \times \{0\}) \times T^*\mathcal{M} \approx \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M}$

On pose alors $q^0 = t$ et sur $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$ on étends $\tilde{\omega} := dp_0 \wedge dt + dp_i \wedge dq^i$ d'où

$$X_{\tilde{H}} \lrcorner \tilde{\omega} + d\tilde{H} = 0$$

et donc on s'intéresse uniquement à l'hyper-surface $p^0 = H$.

2 Théorèmes de Noether généraux

2.1 Théorème 1

Lagrangien d'ordre quelconque r , i.e. $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(r)})$. On travaille sur des champs $u : U \rightarrow \mathcal{M}$ où $U = \mathbb{R}$ dans le cas particules, mais sinon peut-être n'importe quoi (ligne d'univers d'une particule dans l'espace-temps, champ classique, ou des produits de ça...).

Définition: (Jets)

Si \mathcal{M} est varr de dim k et U est un ouvert de \mathbb{R}^n ,

$$j^r u(x) := (x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x), \dots, \partial^r u(x))$$

où $\partial^i := \frac{\partial}{\partial \mu_1 \dots \partial \mu_r} =: \partial_{\mu_1 \dots \mu_r}$ Cas général pour des variétés quelconques:

$$\begin{aligned}
j^0(U, \mathcal{M}) &= U \times \mathcal{M} \\
j^1(U, \mathcal{M}) &= \{(x, y, E), \quad (x, y) \in U \times \mathcal{M}, E \text{ sev de } T_{(x,y)}(U \times \mathcal{M}) \\
&\quad | \quad \dim E = \dim U \\
&\quad d(\pi_{U \times \mathcal{M} \rightarrow U})_{(x,y)} : T_{(x,y)}(U \times \mathcal{M}) \rightarrow T_x \mathcal{M} \\
&\quad d(\pi_{U \times \mathcal{M} \rightarrow U})_{x,y}|_E : E \rightarrow T_x \mathcal{U} \quad \} \\
j^r(U, \mathcal{M}) &= j^1(U, j^{r-1}(U, \mathcal{M}))
\end{aligned}$$

Système de coordonnées locales sur les jets:

$$v_{\mu_1 \dots \mu_j}^i \quad \text{t.q.} \quad v_{\mu_1 \dots \mu_j}^i(j^r u(x)) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_j}}$$

Lagrangien général d'ordre r sur " $U \rightarrow \mathcal{M}$ ":

$$L : j^r(U, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[u] = \int_U L(j^r u(x)) dx$$

Symétrie infinitésimale $u \mapsto u + \epsilon \delta u + o(\epsilon)$ infinitésimales, générés par un champ de vecteurs Z sur $U \times \mathcal{M}$. Ou plutôt, pour être précis, un champ $Z : j^r(u) \rightarrow T(U \times \mathcal{M})$.

$$Z = X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$$

$$\delta u^i = Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} X^\mu$$

Théorème de Noether 1: (Forme la plus générale)

Si L est invariant par $X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$ et si u est un point critique de \mathcal{L} alors il lui correspond $J^\mu \partial_\mu$ définit sur U tel que $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Ex: } u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \mathcal{L}[u] &= \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} dx \quad (\text{action de Dirichlet}) \\
\mathcal{L}[u + \epsilon \varphi] &= \int_\omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \epsilon \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \epsilon^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} \quad (\varphi \text{ supposé à support compacte.})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_u[\varphi] &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx \\
&= \int_\Omega (\text{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u) dx \\
&= - \int_\Omega \varphi \Delta u
\end{aligned}$$

Symétrie par translation $u \mapsto u \circ \tau_\epsilon =: u_\epsilon; \tau_\epsilon(x) := x - \epsilon v$.

$$u_\epsilon(x) = u(x - \epsilon v) \approx u(x) - \epsilon v^i \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) + o(\epsilon)$$

$$\delta u = -v^i \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

Noether: Si $\delta u = 0$,

$$\frac{\partial L}{\partial v_\mu}(x, u, du) \frac{\partial u}{\partial x^\nu} - (L(x, u, dx) \delta_\mu^\nu) v^\mu = J^\nu$$

alors $\frac{\partial J^\nu}{\partial x^\nu} = 0$

(le prof est pas totalement sûr de la formule pour J , voir la démo qui suit)

Cas particulier: $r = 1$, i.e. $L(x, u, \partial u)$, $X^\mu(x, u)$, $Y^i(x, u)$

$$J^\mu = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, u, \partial u) Y^i - \left(\frac{\partial L}{\partial v_\mu^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^\nu} - L \delta_\nu^\mu \right) X^\nu$$

et EL $\implies \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

Démonstration: (cas général)

$X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$ agissant sur (U, u) .

$U \mapsto U_\epsilon = \varphi_\epsilon(U)$.

$\varphi_\epsilon := x + \epsilon X + o(\epsilon)$. $u \mapsto u_\epsilon = u + \epsilon \delta u + o(\epsilon)$.

$$\delta u^i := Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} X^\mu$$

Symétrie $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U \forall u \quad \mathcal{L}_{U_\epsilon}[e_\epsilon] = \mathcal{L} + o(\epsilon)$

Petit lemme de calcul (m multi-indice):

$$0 = \int_U \left[\sum_{|m| < r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u)) \frac{\partial^m \delta u^i}{\partial x^m} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (L(\mathbf{j}^r(u)) X^\mu) \right] d^n x$$

autre petit lemme:

$\rho(\epsilon, x) := L(\mathbf{j}^r u_\epsilon(x))$

$$\frac{d}{d\epsilon} \left(\int_{\varphi_\epsilon(U)} \rho(\epsilon, x) dx \right) \Big|_{\epsilon=0} = \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon}(0, x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (X^\mu \rho(0, x))$$

et un dernier lemme:

Soit $A^{\mu_1 \dots \mu_p}$ un tenseur symétrique, et g une fonction sur Ω . ($1 \leq p \leq r$)

$$A^{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_p}} = (-1)^p g \frac{\partial A^{\mu_1 \dots \mu_p}}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_p}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \left(A^{\mu_1 \dots \mu_p} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2 \dots \mu_p} g \right)$$

où

$$\begin{aligned} f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2 \dots \mu_p} g &:= f \partial_{\mu_2 \dots \mu_p} g \\ &\quad - \partial_{\mu_2} f \partial_{\mu_3 \dots \mu_p} g \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (-1)^p (\partial_{\mu_2 \dots \mu_p} f) g \end{aligned}$$

Tous ces lemmes se prouvent par du calcul un peu bourrin.

Ainsi, la condition de symétrie devient, via $A^m = \frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u))$ et $g = \delta u^i$:

$$\text{Symetrie} \iff \int_U \sum_{|m| < r} (-1)^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \left(\frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u)) \right) \delta u^i + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sum_{|m| \leq r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} \delta u^i + X^\mu L \right) = 0$$

Posant :

$$(\text{EL})(u) := \sum_{|m| \leq r} (-1)^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \left(\frac{\partial L}{\partial v_m^i} (j^r(u)) \right)$$

et

$$J^\mu := L X^\mu + \sum_{|m| \leq r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} \delta u^i$$

On a bien

$$X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i \quad \text{Symetrie} \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

2.2 Théorème 2

Hypothèse: il existe $X^{a,m,\mu}$ et $Y^{a,m,i}$ sur les jets tel que pour toute famille $(f_a)_{1 \leq a \leq A}$ de fonctions \mathcal{C}^∞ (ou $\mathcal{C}^{\dim \mathcal{M}}$) sur $\Omega \supset U$ on ait une (famille de) symétrie(s) via:

$$X^\mu = \sum_a \sum_{|m| \leq r} X^{a,m,\mu} (j^r(u)) \frac{\partial f_a}{\partial x^m}$$

$$Y^i = \sum_a \sum_{|m| \leq r} Y^{a,m,i} (j^r(u)) \frac{\partial f_a}{\partial x^m}$$

Théorème de Noether 2: (Cas des symétries de dimension infinie)

Si l'hypothèse ci-dessus est vérifiée, il y a dégénérescence de l'équation d'Euler-Lagrange.

Démonstration:

$$\begin{aligned} \delta u^i &:= Y^i - \partial_\mu u^i X^\mu \\ &= \sum_{|m| \leq r} \delta r^{r,i} \partial_m f_a \end{aligned}$$

$$\text{Symetrie} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_U (\text{EL})(u)_i \delta u^i + \partial_\mu \left(\sum_{|m| \leq 2r-1} K^{a,\mu} \partial_m f_a \right)$$

a) on prend $j^{2r-1} f_a |_{\partial U} = 0$, d'où $\int_U (\text{EL})(u) \delta u^i = 0$

b) $(\text{EL})(u)_i = \sum_m (-1)^r \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial v_m^i} \right)$

$$(\text{EL})(u)_i \delta u^i = (\text{EL})(u)_i \sum_{|m| \leq r} \delta u^{m,i} \partial_m f_a + \partial_\mu \left(\sum_{|m| \leq r} (\text{EL}) \delta u^{m,a} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} f_a \right)$$

Conclusion: $\forall f_a : j^{2r-1} f_a |_{\partial U} = 0$

$$\int \sum_{|m| \leq r} (-1)^{|m|} \partial_m \left[(\text{EL})(u)_i (Y^{m,a} - \frac{\partial u}{\partial x^\nu} X^{m,a,\nu}) \right] f_a = 0$$

Exemple: Électromagnétisme

Rappel: Étoile de Hodge $*$: $\Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{n-p}(\mathcal{M})$ pour passer de J^μ 3-forme à 1-forme...

$$\begin{aligned} \text{Electromagnetisme} & \iff \begin{cases} dF &= 0 \\ d(*F) &= J \end{cases} \\ & \iff \mathcal{A}[A] = \int \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu dx \\ & \text{avec } F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \text{et} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

$A \mapsto A + d\varphi$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ groupe de symétrie de Noether. D'où $J := d(*F) = d(*dA)$ est un problème sous-déterminé. Autre exemple: (RG) $\mathcal{A}[g] = \int \text{Ric}_g d\text{vol}_g$ (i.e. $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$) a ses symétries dans l'identité de Bianchi

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0$$

(et en fait, dans tous les difféomorphismes).

3 Mécanique et Géométrie Symplectique

3.1 Vers une approche plus générale

On rappelle que:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{L} : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ (t, x, v) & \mapsto (t, x, p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)) \end{aligned}$$

Et avec l'hypothèse que \mathbb{L} est un difféo, on construisait:

$$H(t, q, p) := p_i v^i(t, x, p) - L(t, x, v(t, x, p))$$

avec $p_i := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v(t, x, p))$.

On obtenait alors les equations:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) \\ \frac{d\pi_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q^i}(t, \gamma, \pi) \end{aligned}$$

On obtenait alors un flot sur la variété symplectique $T^*\mathcal{M}$ par

$$X_H : \begin{cases} 0 &= X_H \lrcorner + dH \\ \omega &= dp_i \wedge dq^i \end{cases}$$

Mais on peut se ramener à des problèmes variationnels, en changeant un peu notre construction: Nous allons maintenant travailler dans $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$ au lieu de $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{M})$.

$$\mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) := \int_I \left[L(t, \gamma, \zeta) dt + \pi \left(\frac{d\gamma^i}{dt} - \zeta^i \right) \right] dt$$

i.e. on impose $\zeta = \frac{d\gamma}{dt}$ via les multiplicateurs de Lagrange.

$$\pi \mapsto \pi + \delta\pi \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) \mapsto \mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) + \epsilon \int \delta\pi_i (\dot{\gamma}^i - \zeta^i) dt$$

$$\begin{aligned} \forall \delta \pi \quad \delta \mathcal{L}[\delta \pi] = 0 & \iff \zeta^i = \frac{d\gamma^i}{dt} \\ \delta \mathcal{L}[(0, \delta \zeta, 0)] = \int_I \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \zeta^i - \pi_i \delta \zeta^i \right) dt = 0 \end{aligned}$$

i.e. :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \gamma & \mapsto \gamma \\ \pi & \mapsto \pi \\ \zeta & \mapsto \zeta + \epsilon \delta \zeta \end{cases} \iff \pi_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} \\ \iff (t, \gamma, \pi) = \mathbb{L}(t, \gamma, \zeta) \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\gamma, \pi] &= \int_I [L(t, \gamma, v(t, \gamma, \pi))] dt \\ &= \int_I \pi_i \dot{\gamma}^i - (\pi_i v^i(\gamma, \pi) - L(t, \gamma, v(t, \gamma, \pi))) dt \\ &= \int_I \pi_i \dot{\gamma}^i - H(t, \gamma, \pi) \\ A[\pi, \gamma] &= \int_I \left(\pi_i \frac{d\gamma^i}{dt} - H(t, \gamma, \pi) \right) dt \end{aligned}$$

A pour point critique les solutions de l'équation de Hamilton. (proof left as exo)

On appelle cela l'action de Poincaré.

3.2 Trajectoires dans l'espace-temps

On travaille donc dans $T^*(I \times \mathcal{M})$. On a des coordonnées dans $T^*\mathcal{M}$ via (q^i, p_i) , et on complète par $q^0 := t$ et p_0 son dual, pour faire (q_μ, p^μ) coordonnées pour $T^*(I \times \mathcal{M})$.

$$\omega = dp_0 \wedge dq^0 + dp_i \wedge dp^i = dp_\mu \wedge dq^\mu$$

$$\mathcal{H}(p_\mu, q^\mu) := p_0 + H(q^0, q^1, p_i)$$

$$\mathcal{H} : T^*(I \times \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

On construit également:

$$(\gamma, \pi) \mapsto \Gamma := \left\{ \left(t, \quad \gamma^i(t) - H(t, \gamma(t), \pi(t)), \quad \pi(t) \right), \quad t \in I \right\} \subset \mathcal{H}^{-1}(\{0\}) =: \mathcal{N}$$

$$\mathcal{L}[\gamma, \pi] = \int_{\Gamma} \underset{=: \theta}{p_\mu dq^\mu}$$

$$\Gamma \subset \mathcal{N} \subset T^*(I \times \mathcal{M})$$

Notons qu'on se rapproche d'une description relativiste du mouvement (même si c'est pas encore tout à fait ça, car Γ est toujours défini à travers notre choix de coordonnées initial dans \mathcal{M}). On remplace $I \times \mathcal{M}$ pas une variété \mathcal{E} (idéalement avec une métrique pseudo-Riemannienne, pour

avoir un bon $*$). On a donc $\mathcal{H} : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ et la dynamique est donnée par $\omega|_{\mathcal{N}}$. Explicitons...
 H sur \mathcal{M} symplectique. Via le flot de X_H on a:

$$X_H \lrcorner \omega + dH = 0$$

\mathcal{N} est une hyper-surface, telle que

$$d(\omega|_{\mathcal{N}}) = 0 \quad \text{et} \quad \omega|_{\mathcal{N}} = i_{\mathcal{N}}^* \omega$$

Rappel: $d(\cdot)$ commute avec les pull-backs. $i_{\mathcal{N}} \rightarrow T^*\mathcal{E}$ Notons que si $\omega|_{\mathcal{N}}$ est bien fermée, elle est par contre dégénérée (ainsi, ce n'est pas une forme symplectique sur \mathcal{N}).

$\ker \omega|_{\mathcal{N}} = \text{droite} \subset T\mathcal{N}$, qui décrit la dynamique.

Lemme:

Soit V un espace vectoriel de dimension finie:

$$V \supset W := \ker(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad \alpha_j \in V^*$$

$$V^* \rightarrow W^*$$

$$\beta \mapsto \beta|_W$$

$$V^*/\mathbb{R}(\alpha_i)_{i \in [1, k]} \rightarrow W^*$$

$$\beta \bmod [\alpha_1, \dots, \alpha_k] \mapsto \beta|_W \quad \text{est uniso!}$$

Soit (\mathcal{M}, ω) une variété symplectique, $T^*\mathcal{E}$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{N}$, $X \in T_M \mathcal{M}$.

$$X \lrcorner \omega \in T_M^* \mathcal{M} \rightarrow X \lrcorner \omega|_{\mathcal{N}} \in T_M^* \mathcal{N}$$

Comme $\ker d\mathcal{H} = T_m \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \left(X \lrcorner (\omega|_{T_M \mathcal{N}}) = 0 \right) \quad X \lrcorner \omega|_{T_M \mathcal{N}} = 0 & \iff X \lrcorner \omega \in \mathbb{R} d\mathcal{H} \\ & \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad X = X_H \quad \text{avec} \quad X_H \lrcorner \omega + d\mathcal{H} = 0 \end{aligned}$$

$$\ker(\omega|_{T_M \mathcal{N}}) := \{X \in T_M \mathcal{N} \mid X \lrcorner \omega|_{T_M \mathcal{N}} = 0\} = \mathbb{R} X_H$$

On dit de $(\mathcal{N}, \omega|_{\mathcal{N}})$ que c'est une variété pré-symplectique i.e. munie d'une forme fermée et de dégénérescence pas forcément nulle mais de noyau tangent à la dynamique.

Les courbes dans $\mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(C)$ seront les points critiques de $\int_{\Gamma} \theta = \text{????}$, courbe tangente à la distribution $\ker \omega|_{\mathcal{N}}$.

Autre exemple: (Force de Lorentz)

$$\mathcal{H} = (p_0 - eA_0)^2 - c^2 |p_i - eA_i|_{\mathbb{R}^3}^2 - (mc^2)^2$$

3.3 Lien avec le premier théorème de Noether

Situation:

$$\gamma : \begin{cases} I & \rightarrow \mathcal{M} \\ t & \mapsto \gamma(t) \end{cases} \quad L[\gamma] = \int_I L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt$$

$$X^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} + T(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \in (T_t \times \mathcal{M}_x)$$

est une symétrie (modulo df) de L si

$$T \frac{\partial L}{\partial t} + \left(L - v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) + X^i L + \frac{\partial L}{\partial v^i} \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i df x^i \quad (*)$$

où $f : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad \text{Si } \mathcal{H} &= p_0 + H(t, q, p) \\ F &= p_0 T(q^0, q^i) + p_i X^i(q^\mu) - f(q^\mu) \\ &= \theta(T, X) - f, \quad \theta = p_\mu dq^\mu \end{aligned}$$

Or, si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(T^*(I \times \mathcal{M}))$

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Longleftrightarrow \{H, F\} = H\{H, T\} \\ &\xRightarrow{\text{si } \mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(0)} \{H, F\}|_{\mathcal{N}} = 0 \end{aligned}$$