

# Notes de cours de Physique-Mathématique et Géométrie Différentielle

Cours de Frédérique Hélein - Notes de Sacha Amiel

Année 2025 - M2 Math Fonda'

## Contents

<b>1</b>	<b>Calcul des variations</b>	<b>3</b>
1.1	Rappels de base de physique des particules classiques (en formalisme Lagrangien)	3
1.2	1 <sup>er</sup> théorème de Noether, symétries et conservation (cas des particules)	3
1.3	Formalisme Hamiltonien	5
1.4	Retours sur Noether	7
1.5	Formulation Géométrique	8
<b>2</b>	<b>Théorèmes de Noether généraux</b>	<b>8</b>
2.1	Théorème 1	8
2.2	Théorème 2	11
<b>3</b>	<b>Mécanique et Géométrie Symplectique</b>	<b>12</b>
3.1	Vers une approche plus générale	12
3.2	Trajectoires dans l'espace-temps	13
3.3	Lien avec le premier théorème de Noether	15
<b>4</b>	<b>Variétés de Poisson</b>	<b>17</b>
4.1	Introduction aux variétés de Poisson	17
4.2	Aparté sur les Algèbres de Lie	18
4.3	Retour à Poisson	20
4.4	Poisson, distributions et feuilletages	21
<b>5</b>	<b>Théories de Jauge</b>	<b>22</b>
5.1	Présentation des théories de référence	22
5.2	Géométrie des théories de Jauge: connexion sur un fibré principal	24
<b>6</b>	<b>Intégrale des Chemins (point de vue de Feynman)</b>	<b>25</b>
6.1	Difficultés et Méthode	25
6.2	Une construction: l'intégrale de Berezin	27
6.3	Application à Maxwell (vers le Gauge-fixing)	28
6.4	Un peu de super-calcul	31

6.5	Application à Yang-Mills . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Gestion des Symétries: BRST, BV</b>	<b>34</b>
7.1	Cohomologie fantôme . . . . .	34
7.2	Lien avec la théorie des représentations . . . . .	36
7.3	Algébroides & Groupoïdes de Lie . . . . .	37
7.4	Méthode BV . . . . .	40
7.5	Retour sur la Fixation de Jauge dans le cas BV . . . . .	42
7.6	Toute petite aparté sur la quantification . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Modèle Poisson-<math>\Sigma</math></b>	<b>43</b>
8.1	Contexte . . . . .	43
8.2	Symétrie de Jauge . . . . .	44

Objectif: Atteindre les théories BRST<sup>1</sup> et BV<sup>2</sup>, théories physiques développées pour quantifier les théories de jauge, tout particulièrement les Yang-Mills mais aussi d'autres.

## 1 Calcul des variations

### 1.1 Rappels de base de physique des particules classiques (en formalisme Lagrangien)

On considère une particule (classique) dans une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $m$ ;  $I = ]t_0, t_1[$  un intervalle réel ouvert (le temps,  $t_0, t_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ); et on appelle:

$$\begin{aligned} \text{“Lagrangien” :} \quad & L : \begin{cases} I \times \mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) & \mapsto L(t, x, v) \end{cases} \\ \text{“Action” :} \quad & \mathcal{A} : \begin{cases} \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma & \mapsto \mathcal{A}[\gamma] := \int_I L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

où  $L$  est au moins  $\mathcal{C}^1$  en  $x$  et  $\mathcal{C}^2$  en  $v$ , et où

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] &= \int_I \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \frac{d\delta\gamma^i}{dt} \\ &= \int_I \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \delta\gamma^i \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \delta\gamma^i \end{aligned}$$

Principe de Maupertuis (généralisé): On obtient les trajectoires d'une physique classique régie par  $L$  en se restreignant à l'ensemble des chemins  $\gamma$  tels que  $\forall \delta\gamma \quad \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] = 0$ . i.e. ce sont les chemins qui extremisent localement l'action (hors cas physique, on parlera donc simplement de “points critiques”).

D'où on dérive le principe d'Hamilton:  $\forall \delta\gamma$  t.q.  $\delta\gamma(t_0) = \delta\gamma(t_1) = 0$

$$(\text{Maup}) \quad \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})} \quad (\text{E.-L.})$$

où l'équation à droite est appelée “equations d'Euler-Lagrange” (E.-L.) (pour une physique de particules). (Existe aussi en version théorie de champs, cf plus tard).

### 1.2 1<sup>er</sup> théorème de Noether, symétries et conservation (cas des particules)

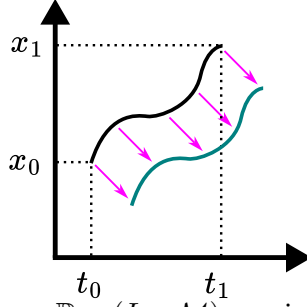
Première difficulté: qu'est-ce qu'une symétrie? Il s'agit, grossièrement d'une action d'un groupe de Lie. (Enfin, d'une algèbre de Lie plutôt...)

Version simple:

---

<sup>1</sup>BRST: Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora & Igor Tyutin

<sup>2</sup>Igor Batalin & Grigori Vilkovisky



$$X = X^0(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + X^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$T := X^0$$

On note  $\Delta_X \subset \mathbb{R} \times (I \times \mathcal{M})$  maximal sur lequel le flot est défini.

$$\Phi_X : \begin{cases} \Delta_X & \rightarrow & I \times \mathcal{M} \\ (\epsilon, t, x) & \mapsto & \Phi_X(\epsilon, t, x) = e^{\epsilon X}(t, x) \end{cases}$$

i.e.  $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(\epsilon, t, x) = X(\Phi_X(\epsilon, t, x))$  et  $\Phi_X(0, t, x) = (t, x)$

en coord loc, ça donne:  $e^{\epsilon X}(t, x) = \begin{pmatrix} t + \epsilon T(t, x), & x^i + \epsilon X^i(t, x) \end{pmatrix} + o(\epsilon)$

Action sur  $\mathcal{C}^1(I', \mathcal{M})$  où  $I'$  est un intervalle compacte de  $I$ :

$$\gamma \mapsto \gamma_\epsilon$$

$$[t_0, t_1] \mapsto [t_0(\epsilon), t_1(\epsilon)] = [t_0 + \epsilon T(t_0, x_0), t_1 + \epsilon T(t_1, x_1)] \quad \text{modulo } \epsilon$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \gamma_\epsilon^i(\Phi_X^0(\epsilon, t, x)) = \Phi_X^i(\epsilon, t, \gamma(t))$$

$$\gamma_\epsilon = \gamma + \epsilon \delta \gamma + o(\epsilon)$$

$$\begin{aligned} (\gamma^i + \epsilon \delta \gamma^i)(t + \epsilon T(t, \gamma)) &= \gamma^i + \epsilon X^i(t, \gamma) + o(\epsilon) \iff \frac{d\gamma^i}{dt} T + \delta \gamma^i = X^i \\ &\iff \boxed{\delta \gamma^i = X^i(t, \gamma) - T(t, \gamma) \dot{\gamma}^i} \end{aligned}$$

$$X \text{ symetrie de } L \stackrel{(\text{def})}{\iff} \forall [t_0, t_1] \subset I \quad \int_{t_0(\epsilon)}^{t_1(\epsilon)} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt + (\epsilon)$$

Théorème 1: Si  $X$  est une symétrie et si  $\gamma$  est un point critique alors

$$Q_X(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) X^i(t, \gamma) - \left( \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}^i - L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) T(t, \gamma)$$

est conservé (i.e.  $\frac{dQ}{dt} = 0$ ).

Remarque:  $Q_X = \frac{\partial L}{\partial v^i} + LT$

Preuve du théorème:  $\forall \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M})$

$$\begin{aligned} 1) \text{ hypothese de symetrie} &\iff \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt + \epsilon [LT]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i \right) dt + o(\epsilon) \\ &\iff \int_{t_0}^{t_1} \delta_X L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt := \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d(LT)}{dt} \right) dt = 0 \end{aligned}$$

où  $\delta_X L : I \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Bref, “symétrie  $\implies \delta_X L = 0$ ”.

Exo: construire  $\delta_X L$  et montrer que ça marche...

2) Montrons que  $Q$  constant si (et seulement si)  $\gamma$  est un point critique.

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right)$$

D'où EL  $\iff \frac{\delta L}{\delta \gamma^i} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{\delta L}{\delta \gamma^i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \\ \frac{dQ_X}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \gamma^i + LT \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d}{dt} (LT) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d(LT)}{dt} - \cancel{\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} \delta \gamma^i} \\ &\quad \quad \quad = 0 \text{ par (E.-L.)} \\ &= 0 \quad \text{par symetrie} \end{aligned}$$

Variante: Si  $\exists f : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $\delta_X L(t, \gamma, \dot{\gamma}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)$  “symétrie modulo un terme exacte” (def) alors la quantité conservée est  $(Q_X - f)$ .

Même si on va aller plus loin dans les théorèmes de Noether plus tard, une bonne référence (historique) est *Les Théorèmes de Noether: Invariance et lois de conservation au XXe siècle* par Yvette Kosmann-Schwarzbach, éditions de l'école Polytechnique, ISBN: 978-2730211383.

### 1.3 Formalisme Hamiltonien

L'idée est de faire un changement de variable de  $T\mathcal{M}$  vers  $T^*\mathcal{M}$ ... Commençons par définir une variété symplectique.

Définition: (variété symplectique)

Une var symplectique  $\mathcal{M}$  est une variété munie d'une 2-forme  $\omega$ ,  $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$  telle que:

- $\omega$  non dégénérée i.e.  $\forall \xi \in T\mathcal{M}, \quad \xi \lrcorner \omega = 0 \implies \xi = 0$   
 $\xi \lrcorner \omega := \omega(\xi, \cdot)$  (également noté,  $\iota_\xi \omega$  dans d'autres ressources)
- $d\omega = 0$  “forme fermée”

Dans des coordonnées locales,  $\omega = \sum_{1 \leq a_1 < a_2 \leq n} \omega_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2}$ , et les hypothèses reviennent à dire que le rang de la matrice  $(\omega_{a_1 a_2})$  est maximal, d'où  $\dim \mathcal{M}$  paire.

Théorème de Darboux:

Dans toute variété symplectique, tout point admet une carte (et un jeu de coordonnées  $(p_i) \smile (q^i)$  sur cet ouvert) dans laquelle  $\omega = dp_i \wedge dq^i$ .

Constructions ultra classiques de var symplectiques:

- a)  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on peut donc définir  $\omega$  comme dans le théorème de Darboux sur tout  $\mathbb{R}^{2n}$ .  
b) Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension  $n$ ,

$$\exists! \pi : \begin{cases} (T^*\mathcal{M}) & \rightarrow \mathcal{M} \\ (q, p) & \mapsto q \end{cases}$$

Soit ce  $\pi$  et soit  $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$  tel que,

$$\forall \xi \in T_{(p,q)}(T^*\mathcal{M}), \quad \theta_{(q,p)}(\xi) = \left\langle \begin{matrix} p, \\ \in T_q^*\mathcal{M} \end{matrix}, \begin{matrix} d\pi_{(q,p)}\xi \\ \in T_q\mathcal{M} \end{matrix} \right\rangle$$

En coordonnées locales,  $(q^i)$  sur  $\mathcal{M}$  et  $(p_i)$  sur  $T_q^*\mathcal{M}$  avec  $p := p_i dq^i$ , on obtient  $\theta = p_i d(q^i \circ \pi)$  où  $(p_i) \cup (q^i)$  sont des coordonnées locales sur  $T^*\mathcal{M}$ . On notera tout simplement  $\theta = p_i dq^i$  avec  $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$  ce qui est un abus de notation conséquent (notamment puisque rentrant violemment en conflit avec la définition de  $p$ ). Bref, il faut ouvrir l'œil au contexte.

Il suffit alors de prendre  $\omega := d\theta$  forme symplectique, pour avoir  $(T^*\mathcal{M}, \omega)$  une variété symplectique.

Lien entre Lagrangien et géométrie symplectique (eq° de Hamilton)

L'objectif est d'effectuer une transformation de la forme:

$$L : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) & \rightarrow L(t, x, v) \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, q, p) & \rightarrow H(t, q, p) \end{cases}$$

Si  $(dq^i)$  est une base de  $T_q^*\mathcal{M}$ ,  $p \in T_q^*\mathcal{M} \implies p = p_i dq^i$ , d'où  $(p_i, q^i)$  est un système de coordonnées sur  $T^*\mathcal{M}$ ; enfin, en fait c'est  $q^i \circ \pi$  à la place de  $q^i$  mais bon, c'est l'abus de notation de tout à l'heure. On pose:

$$\theta = p_i dq^i$$

Transformation de Legendre:

$$\forall (t, q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M} \quad d(L|_{\{t\} \times T_q\mathcal{M}}) =: \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)$$

en coordonnées locales,  $v = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in T_q\mathcal{M}$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v^i} dv^i$$

Hypothèse de Legendre:

$$\mathbb{L} : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ (t, q, v) & \mapsto (t, q, \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)) \end{cases} \quad \text{est un diffeo}$$

Exemple:  $L = \frac{m|v|^2}{2} - V(q)$

Définition: (Hamiltonien)

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (H \circ \mathbb{L})(t, q, v) &= \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v) v^i - L(t, q, v) \\ \iff (\text{implicit}) \quad \mathbb{L}^{-1} : (t, q, p) &\rightarrow (t, q, v(t, q, p)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v(t, q, p)) =: p_i$$

$$H(t, q, p) = p_i v^i(t, q, p) - L(t, q, v(t, q, p))$$

#### 1.4 Retours sur Noether

$T \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$  est une symétrie de  $L$ .  
 $\implies Q = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) X^i(t, \gamma) - (\frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{\gamma}^i - L(t, \gamma, \dot{\gamma}))$  est conservé si  $\gamma$  est solution.

$$Q = \underbrace{(p_i \circ \mathbb{L})}_{\text{"moment"}} X^i - \underbrace{(H \circ \mathbb{L})}_{\text{"énergie"}} T$$

$$\begin{aligned} dH &= v^i dp_i + \cancel{p_i dv^i} - \frac{\partial L}{\partial t}(t, q, v) dt - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v(t, q, p)) dv^i} \\ &= v^i dp_i - (\frac{\partial L}{\partial t} \circ \mathbb{L}^{-1}) dt - (\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \mathbb{L}^{-1}) dq^i \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \circ \mathbb{L} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} &= -\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \mathbb{L} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= v^i \end{aligned}$$

d'où  $\forall \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial v}(t, \gamma, \frac{d\gamma}{dt})$$

Lemme: (transition Lagrangien-Hamiltonien)

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})) = \frac{\partial L}{\partial q^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \quad (\text{EL}) \quad \iff \quad \begin{cases} \frac{d\gamma^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) & (\text{Hq}) \\ \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(t, \gamma, \pi) & (\text{Hp}) \end{cases}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} Hq &\iff (t\gamma, \pi) = \mathbb{L}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \\ \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) &= v^i(t, \gamma, \pi) = \frac{d\gamma^i}{dt} \end{aligned}$$

par def de  $v$ .

Alors,  $\pi_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}(t, \gamma, \dot{\gamma})$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v_i}) \stackrel{(\text{E.L.})}{=} \frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Notation:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

## 1.5 Formulation Géométrique

$t \mapsto (\gamma(t), \pi(t)) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, T^*\mathcal{M})$  est solution de Hamilton

$$\iff \frac{d}{dt}(\gamma^i, \pi_i) = \left( \frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right)(\gamma, \pi)$$

champ de vecteurs **non-autonome** (i.e. **indépendant de  $t$** ) tangent à  $T^*\mathcal{M}$ .

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\omega = dp_i \wedge dq^i$$

$$\begin{aligned} X_H \lrcorner \omega &= \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \lrcorner dp_j dq^j \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} (-\delta^{ij} dp_j) - \frac{\partial H}{\partial q^i} (\delta_{ij} dq^j) \\ &= - \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - dH \end{aligned}$$

bref:

$$X_H \lrcorner \omega + dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Artifice:  $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M}) \supset (\mathbb{R} \times \{0\}) \times T^*\mathcal{M} \approx \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M}$

On pose alors  $q^0 = t$  et sur  $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$  on étends  $\tilde{\omega} := dp_0 \wedge dt + dp_i \wedge dq^i$  d'où

$$X_{\tilde{H}} \lrcorner \tilde{\omega} + d\tilde{H} = 0$$

et donc on s'intéresse uniquement à l'hyper-surface  $p^0 = H$ .

## 2 Théorèmes de Noether généraux

### 2.1 Théorème 1

Lagrangien d'ordre quelconque  $r$ , i.e.  $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots x^{(r)})$ . On travaille sur des champs  $u : U \rightarrow \mathcal{M}$  où  $U = \mathbb{R}$  dans le cas particules, mais sinon peut-être n'importe quoi (ligne d'univers d'une particule dans l'espace-temps, champ classique, ou des produits de ça...).

Définition: (Jets)

Si  $\mathcal{M}$  est varr de dim  $k$  et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$j^r u(x) := \left( x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x), \dots \partial^r u(x) \right)$$

où  $\partial^i := \frac{\partial}{\partial \mu_1 \dots \partial \mu_i} =: \partial_{\mu_1 \dots \mu_i}$ . Cas général pour des variétés quelconques:



$$\begin{aligned}
j^0(U, \mathcal{M}) &= U \times \mathcal{M} \\
j^1(U, \mathcal{M}) &= \left\{ (x, y, E), \quad (x, y) \in U \times \mathcal{M}, E \text{ sev de } T_{(x,y)}(U \times \mathcal{M}) \right. \\
&\quad \left| \quad \dim E = \dim U \right. \\
&\quad \left. \begin{aligned}
&\mathrm{d}(\pi_{U \times \mathcal{M} \rightarrow U})_{(x,y)} : T_{(x,y)}(U \times \mathcal{M}) \rightarrow T_x \mathcal{M} \\
&\mathrm{d}(\pi_{U \times \mathcal{M} \rightarrow U})_{x,y}|_E : E \rightarrow T_x \mathcal{U}
\end{aligned} \right\} \\
j^r(U, \mathcal{M}) &= j^1(U, j^{r-1}(U, \mathcal{M}))
\end{aligned}$$

Système de coordonnées locales sur les jets:

$$v_{\mu_1 \dots \mu_j}^i \quad \text{t.q.} \quad v_{\mu_1 \dots \mu_j}^i(j^r u(x)) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_j}}$$

Lagrangien général d'ordre  $r$  sur " $U \rightarrow \mathcal{M}$ ":

$$L : j^r(U, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[u] = \int_U L(j^r u(x)) \mathrm{d}^n x$$

Symétrie infinitésimale  $u \mapsto u + \epsilon \delta u + o(\epsilon)$  infinitésimales, générés par un champ de vecteurs  $Z$  sur  $U \times \mathcal{M}$ . Ou plutôt, pour être précis, un champ  $Z : j^r(u) \rightarrow T(U \times \mathcal{M})$ .

$$Z = X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$$

$$\delta u^i = Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} X^\mu$$

Théorème de Noether 1: (Forme la plus générale)

Si  $L$  est invariant par  $X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$  et si  $u$  est un point critique de  $\mathcal{L}$  alors il lui correspond  $J^\mu \partial_\mu$  définit sur  $U$  tel que  $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Ex: } u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \mathcal{L}[u] &= \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} \mathrm{d}x \quad (\text{action de Dirichlet}) \\
\mathcal{L}[u + \epsilon \varphi] &= \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \epsilon \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \epsilon^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} \quad (\varphi \text{ supposé à support compacte.})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_u[\varphi] &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u) \mathrm{d}x \\
&= - \int_\Omega \varphi \Delta u
\end{aligned}$$

Symétrie par translation  $u \mapsto u \circ \tau_\epsilon =: u_\epsilon$ ;  $\tau_\epsilon(x) := x - \epsilon v$ .

$$u_\epsilon(x) = u(x - \epsilon v) \approx u(x) - \epsilon v^i \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) + o(\epsilon)$$

$$\delta u = -v^i \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

Noether: Si  $\delta u = 0$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial v_\mu}(x, u, \mathrm{d}u) \frac{\partial u}{\partial x^\nu} - (L(x, u, \mathrm{d}x) \delta_\mu^\nu) v^\mu = J^\nu$$

alors  $\frac{\partial J^\nu}{\partial x^\nu} = 0$

(le prof est pas totalement sûr de la formule pour  $J$ , voir la démo qui suit)

Cas particulier:  $r = 1$ , i.e.  $L(x, u, \partial u)$ ,  $X^\mu(x, u)$ ,  $Y^i(x, u)$

$$J^\mu = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, u, \partial u) Y^i - \left( \frac{\partial L}{\partial v_\mu^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^\nu} - L \delta_\nu^\mu \right) X^\nu$$

et EL  $\implies \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

Démonstration: (cas général)

$X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$  agissant sur  $(U, u)$ .

$U \mapsto U_\epsilon = \varphi_\epsilon(U)$ .

$\varphi_\epsilon := x + \epsilon X + o(\epsilon)$ .  $u \mapsto u_\epsilon = u + \epsilon \delta u + o(\epsilon)$ .

$$\delta u^i := Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} X^\mu$$

Symétrie  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U \forall u \quad \mathcal{L}_{U_\epsilon}[e_\epsilon] = \mathcal{L} + o(\epsilon)$

Petit lemme de calcul ( $m$  multi-indice):

$$0 = \int_U \left[ \sum_{|m| < r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u)) \frac{\partial^m \delta u^i}{\partial x^m} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (L(\mathbf{j}^r(u)) X^\mu) \right] d^n x$$

autre petit lemme:

$\rho(\epsilon, x) := L(\mathbf{j}^r u_\epsilon(x))$

$$\frac{d}{d\epsilon} \left( \int_{\varphi_\epsilon(U)} \rho(\epsilon, x) dx \right) \Big|_{\epsilon=0} = \int_U \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon}(0, x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (X^\mu \rho(0, x))$$

et un dernier lemme:

Soit  $A^{\mu_1 \dots \mu_p}$  un tenseur symétrique, et  $g$  une fonction sur  $\Omega$ . ( $1 \leq p \leq r$ )

$$A^{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_p}} = (-1)^p g \frac{\partial A^{\mu_1 \dots \mu_p}}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_p}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \left( A^{\mu_1 \dots \mu_p} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2 \dots \mu_p} g \right)$$

où

$$\begin{aligned} f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2 \dots \mu_p} g &:= f \partial_{\mu_2 \dots \mu_p} g \\ &\quad - \partial_{\mu_2} f \partial_{\mu_3 \dots \mu_p} g \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (-1)^p (\partial_{\mu_2 \dots \mu_p} f) g \end{aligned}$$

Tous ces lemmes se prouvent par du calcul un peu bourrin.

Ainsi, la condition de symétrie devient, via  $A^m = \frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u))$  et  $g = \delta u^i$ :

$$\text{Symetrie} \iff \int_U \sum_{|m| < r} (-1)^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \left( \frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u)) \right) \delta u^i + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sum_{|m| \leq r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} \delta u^i + X^\mu L \right) = 0$$

Posant :

$$(\text{EL})(u) := \sum_{|m| \leq r} (-1)^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \left( \frac{\partial L}{\partial v_m^i} (j^r(u)) \right)$$

et

$$J^\mu := L X^\mu + \sum_{|m| \leq r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} \delta u^i$$

On a bien

$$X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i \quad \text{Symetrie} \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

## 2.2 Théorème 2

Hypothèse: il existe  $X^{a,m,\mu}$  et  $Y^{a,m,i}$  sur les jets tel que pour toute famille  $(f_a)_{1 \leq a \leq A}$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  (ou  $\mathcal{C}^{\dim \mathcal{M}}$ ) sur  $\Omega \supset U$  on ait une (famille de) symétrie(s) via:

$$X^\mu = \sum_a \sum_{|m| \leq r} X^{a,m,\mu} (j^r(u)) \frac{\partial f_a}{\partial x^m}$$

$$Y^i = \sum_a \sum_{|m| \leq r} Y^{a,m,i} (j^r(u)) \frac{\partial f_a}{\partial x^m}$$

Théorème de Noether 2: (Cas des symétries de dimension infinie)

Si l'hypothèse ci-dessus est vérifiée, il y a dégénérescence de l'équation d'Euler-Lagrange.

Démonstration:

$$\begin{aligned} \delta u^i &:= Y^i - \partial_\mu u^i X^\mu \\ &= \sum_{|m| \leq r} \delta r^{r,i} \partial_m f_a \end{aligned}$$

$$\text{Symetrie} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_U (\text{EL})(u)_i \delta u^i + \partial_\mu \left( \sum_{|m| \leq 2r-1} K^{a,\mu} \partial_m f_a \right)$$

a) on prend  $j^{2r-1} f_a|_{\partial U} = 0$ , d'où  $\int_U (\text{EL})(u) \delta u^i = 0$

b)  $(\text{EL})(u)_i = \sum_m (-1)^r \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial v_m^i} \right)$

$$(\text{EL})(u)_i \delta u^i = (\text{EL})(u)_i \sum_{|m| \leq r} \delta u^{m,i} \partial_m f_a + \partial_\mu \left( \sum_{|m| \leq r} (\text{EL}) \delta u^{m,a} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} f_a \right)$$

Conclusion:  $\forall f_a : j^{2r-1} f_a|_{\partial U} = 0$

$$\int \sum_{|m| \leq r} (-1)^{|m|} \partial_m \left[ (\text{EL})(u)_i \left( Y^{m,a} - \frac{\partial u}{\partial x^\nu} X^{m,a,\nu} \right) \right] f_a = 0$$

Exemple: Électromagnétisme

Rappel: Étoile de Hodge  $*$  :  $\Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{n-p}(\mathcal{M})$  pour passer de  $J^\mu$  3-forme à 1-forme...

$$\begin{aligned} \text{Electromagnetisme} & \iff \begin{cases} dF &= 0 \\ d(*F) &= J \end{cases} \\ & \iff \mathcal{A}[A] = \int \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu dx \\ & \text{avec } F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \text{et} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

$A \mapsto A + d\varphi$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$  groupe de symétrie de Noether. D'où  $J := d(*F) = d(*dA)$  est un problème sous-déterminé. Autre exemple: (RG)  $\mathcal{A}[g] = \int \text{Ric}_g d\text{vol}_g$  (i.e.  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$ ) a ses symétries dans l'identité de Bianchi

$$\nabla_\mu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0$$

(et en fait, dans tous les difféomorphismes).

### 3 Mécanique et Géométrie Symplectique

#### 3.1 Vers une approche plus générale

On rappelle que:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{L} : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ (t, x, v) & \mapsto (t, x, p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)) \end{aligned}$$

Et avec l'hypothèse que  $\mathbb{L}$  est un difféo, on construisait:

$$H(t, q, p) := p_i v^i(t, x, p) - L(t, x, v(t, x, p))$$

avec  $p_i := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v(t, x, p))$ .

On obtenait alors les equations:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) \\ \frac{d\pi_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q^i}(t, \gamma, \pi) \end{aligned}$$

On obtenait alors un flot sur la variété symplectique  $T^*\mathcal{M}$  par

$$X_H : \begin{cases} 0 &= X_H \lrcorner \omega + dH \\ \omega &= dp_i \wedge dq^i \end{cases}$$

Mais on peut se ramener à des problèmes variationnels, en changeant un peu notre construction: Nous allons maintenant travailler dans  $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$  au lieu de  $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{M})$ .

$$\mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) := \int_I \left[ L(t, \gamma, \zeta) dt + \pi \left( \frac{d\gamma^i}{dt} - \zeta^i \right) \right] dt$$

i.e. on impose  $\zeta = \frac{d\gamma}{dt}$  via les multiplicateurs de Lagrange.

$$\pi \mapsto \pi + \delta\pi \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) \mapsto \mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) + \epsilon \int \delta\pi_i (\dot{\gamma}^i - \zeta^i) dt$$

$$\begin{aligned} \forall \delta \pi \quad \delta \mathcal{L}[\delta \pi] = 0 & \iff \zeta^i = \frac{d\gamma^i}{dt} \\ \delta \mathcal{L}[(0, \delta \zeta, 0)] &= \int_I \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \zeta^i - \pi_i \delta \zeta^i \right) dt = 0 \end{aligned}$$

i.e. :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \gamma & \mapsto \gamma \\ \pi & \mapsto \pi \\ \zeta & \mapsto \zeta + \epsilon \delta \zeta \end{cases} & \iff \pi_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} \\ & \iff (t, \gamma, \pi) = \mathbb{L}(t, \gamma, \zeta) \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\gamma, \pi] &= \int_I [L(t, \gamma, v(t, \gamma, \pi))] dt \\ &= \int_I \pi_i \dot{\gamma}^i - (\pi_i v^i(\gamma, \pi) - L(t, \gamma, v(t, \gamma, \pi))) dt \\ &= \int_I \pi_i \dot{\gamma}^i - H(t, \gamma, \pi) dt \\ A[\pi, \gamma] &= \int_I \left( \pi_i \frac{d\gamma^i}{dt} - H(t, \gamma, \pi) \right) dt \end{aligned}$$

A pour point critique les solutions de l'équation de Hamilton. (proof left as exo)

On appelle cela l'action de Poincaré.

### 3.2 Trajectoires dans l'espace-temps

On travaille donc dans  $T^*(I \times \mathcal{M})$ . On a des coordonnées dans  $T^*\mathcal{M}$  via  $(q^i, p_i)$ , et on complète par  $q^0 := t$  et  $p_0$  son dual, pour faire  $(q^\mu, p_\mu)$  coordonnées pour  $T^*(I \times \mathcal{M})$ .

$$\omega = dp_0 \wedge dq^0 + dp_i \wedge dq^i = dp_\mu \wedge dq^\mu$$

$$\mathcal{H}(p_\mu, q^\mu) := p_0 + H(q^0, q^1, p_i)$$

$$\mathcal{H} : T^*(I \times \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

On construit également:

$$(\gamma, \pi) \mapsto \Gamma := \left\{ \left( t, \quad \gamma^i(t) - H(t, \gamma(t), \pi(t)), \quad \pi(t) \right), \quad t \in I \right\} \subset \mathcal{H}^{-1}(\{0\}) =: \mathcal{N}$$

$$\mathcal{L}[\gamma, \pi] = \int_{\Gamma} \underset{=: \theta}{p_\mu dq^\mu}$$

$$\Gamma \subset \mathcal{N} \subset T^*(I \times \mathcal{M})$$

Notons qu'on se rapproche d'une description relativiste du mouvement (même si c'est pas encore tout à fait ça, car  $\Gamma$  est toujours défini à travers notre choix de coordonnées initial dans  $\mathcal{M}$ ). On remplace  $I \times \mathcal{M}$  pas une variété  $\mathcal{E}$  (idéalement avec une métrique pseudo-Riemannienne, pour

avoir un bon  $*$ ). On a donc  $\mathcal{H} : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  et la dynamique est donnée par  $\omega|_{\mathcal{N}}$ . Explicitons...  
 $H$  sur  $\mathcal{M}$  symplectique. Via le flot de  $X_H$  on a:

$$X_H \lrcorner \omega + dH = 0$$

$\mathcal{N}$  est une hyper-surface, telle que

$$d(\omega|_{\mathcal{N}}) = 0 \quad \text{et} \quad \omega|_{\mathcal{N}} = i_{\mathcal{N}}^* \omega$$

Rappel:  $d(\cdot)$  commute avec les pull-backs.  $i_{\mathcal{N}} : T^*\mathcal{E} \rightarrow T^*\mathcal{E}$  Notons que si  $\omega|_{\mathcal{N}}$  est bien fermée, elle est par contre dégénérée (ainsi, ce n'est pas une forme symplectique sur  $\mathcal{N}$ ).

$\ker \omega|_{\mathcal{N}} = \text{droite} \subset T\mathcal{N}$ , qui décrit la dynamique.

Lemme:

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie:

$$V \supset W := \ker(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad \alpha_j \in V^*$$

$$V^* \rightarrow W^*$$

$$\beta \mapsto \beta|_W$$

$$V^*/\mathbb{R}(\alpha_i)_{i \in [1, k]} \rightarrow W^*$$

$$\beta \bmod [\alpha_1, \dots, \alpha_k] \mapsto \beta|_W \quad \text{est un iso!}$$

Soit  $(\mathcal{M}, \omega)$  une variété symplectique,  $T^*\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ ,  $M \in \mathcal{N}$ ,  $X \in T_M \mathcal{M}$ .

$$X \lrcorner \omega \in T_M^* \mathcal{M} \rightarrow X \lrcorner \omega|_{\mathcal{N}} \in T_M^* \mathcal{N}$$

Comme  $\ker d\mathcal{H} = T_m \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \left( X \lrcorner (\omega|_{T_M \mathcal{N}}) = 0 \right) \quad X \lrcorner \omega|_{T_M \mathcal{N}} = 0 & \iff X \lrcorner \omega \in \mathbb{R} d\mathcal{H} \\ & \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad X = X_H \quad \text{avec} \quad X_H \lrcorner \omega + d\mathcal{H} = 0 \end{aligned}$$

$$\ker(\omega|_{T_M \mathcal{N}}) := \{X \in T_M \mathcal{N} \mid X \lrcorner \omega|_{T_M \mathcal{N}} = 0\} = \mathbb{R} X_H$$

On dit de  $(\mathcal{N}, \omega|_{\mathcal{N}})$  que c'est une variété pré-symplectique i.e. munie d'une forme fermée et de dégénérescence pas forcément nulle mais de noyau tangent à la dynamique.

Les courbes dans  $\mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(C)$  seront les points critiques de  $\int_{\Gamma} \theta = \text{????}$ , courbe tangente à la distribution  $\ker \omega|_{\mathcal{N}}$ .

Autre exemple: (Force de Lorentz)

$$\mathcal{H} = (p_0 - eA_0)^2 - c^2 |p_i - eA_i|_{\mathbb{R}^3}^2 - (mc^2)^2$$

### 3.3 Lien avec le premier théorème de Noether

Situation:

$$\gamma : \begin{cases} I & \rightarrow \mathcal{M} \\ t & \mapsto \gamma(t) \end{cases} \quad L[\gamma] = \int_I L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt$$

$$X^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} + T(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \in (T_t \times \mathcal{M}_x)$$

est une symétrie (modulo  $df$ ) de  $L$  si

$$T \frac{\partial L}{\partial t} + \left( L - v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) + X^i L + \frac{\partial L}{\partial v^i} \left( \frac{\partial x^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i df x^i \quad (*)$$

où  $f : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad \text{Si } \mathcal{H} &= p_0 + H(t, q, p) \\ F &= p_0 T(q^0, q^i) + p_i X^i(q^\mu) - f(q^\mu) \\ &= \theta(T, X) - f, \quad \theta = p_\mu dq^\mu \end{aligned}$$

Or, si  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(T^*(I \times \mathcal{M}))$

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Longleftrightarrow \{H, F\} = H\{H, T\} \\ &\xRightarrow{\text{si } \mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(0)} \{H, F\}|_{\mathcal{N}} = 0 \end{aligned}$$

Point de vue “Relativiste”:

$\mathcal{E}$  espace-temps,

$\mathcal{H} : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction “cohérente”,

$\mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(\{0\})$ ,

une courbe  $\Gamma$  par point critique:

$$\int_{\Gamma \subset \mathcal{N}} \theta \rightarrow \Gamma \text{ t.q. } \forall X \in T_M \Gamma \quad X \lrcorner (\omega|_{\mathcal{N}}) = 0$$

Si  $F = \theta(X) - f = p_\mu X^\mu(q) - f(q)$  où  $f \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $X^\mu$  est une symétrie (modulo  $df$ ) lorsque  $\{H, F\}|_{\mathcal{N}} = 0$ .

Point de vue non-relativiste:

$H : T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H$  indépendant du temps.  $X = X^i(x) \partial_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  est une symétrie de  $\int_I L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$  ssi  $\{H, p_i X^i(q)\} = 0$ .

Généralisation plus générale: (sur une variété symplectique quelconque  $\mathcal{M}$ )

Définition: (crochet de poisson sur une variété symplectique)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (F, G) &\mapsto \{F, G\} := \omega(X_F, X_G) \end{aligned}$$

Remarque, dans un jeu de coordonnées à la Darboux, ça donne:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

Soit:  $(\gamma, \pi) : I \rightarrow \mathcal{M}$  t.q.:

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma, \pi)}{dt} &= X_H(\gamma, \pi) \\ \forall F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}) \frac{dF(\gamma, \pi)}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q^i}(\gamma, \pi) \frac{d\gamma^i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\pi_i}{dt} \\ &= \{F, H\}(\gamma, \pi) \end{aligned}$$

Notons, au passage, les propriétés triviales:

$$\forall A, B, C \quad \{A, B\} = -\{B, A\} \quad \{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$$

Théorème de Noether 1 dans le cas symplectique:

Si  $X_F$  est une symétrie de  $H$  alors  $F$  est conservé le long du flot de  $X_H$ .

- $X_F$  symétrie de  $H \iff dH(X_F) = 0 \iff X_F \lrcorner dH = 0$ .
- $F$  conservé le long du flot de  $X_H$ :  $dF(X_H) = X_H \lrcorner dF = 0$

Preuve:

$$\begin{aligned} \{H, F\} &:= \omega(X_H, X_F) \\ &= (X_H \lrcorner \omega)(X_F) \\ &= -dH(X_F) = -X_F \lrcorner dH \\ &= X_H \lrcorner dF \end{aligned}$$

$$\boxed{X_H \lrcorner dF = -X_F \lrcorner dH = \{H, F\}}$$

$$\begin{aligned} u : I \rightarrow (\mathcal{M}, \omega) \quad \frac{dF(\omega)}{dt} &= dFu \left( \frac{du}{dt} \right) \\ &= dFu(X_H) \\ \frac{du}{dt} &= X_H(\omega) \quad = \{H, F\}(u) \end{aligned}$$

Proposition:

$F \mapsto X_F$  symétrie infinitésimale de  $\omega$  implique

$$L_{X_F} \omega = X_F \lrcorner d\omega + \underset{=-dF}{d(X_F \lrcorner \omega)} = 0 - d(dF) = 0$$

Se pose la question de si cette proposition admet une réciproque...

Soit  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  t.q.  $L_X(\omega) = 0$

$$0 = L_X(\omega) = 0 + d(X \lrcorner \omega)$$



d'où  $X \lrcorner \omega$  est fermé.

En fait la réciproque dépend de la cohomologie de la variété:

$$H^1(\mathcal{M}) = \{0\} \implies \exists F : X \lrcorner \omega = -dF, \text{ i.e. } X = X_F$$

Sinon, on peut dire que c'est localement vrai, mais c'est pas aussi fort évidemment. Bref:

Si  $H^1(\mathcal{M}) = \{0\}$ ,  $X$  est une symétrie physique si et seulement si  $L_X \omega = 0 = L_X H = X \lrcorner dH$ .

Premier lemme sympa:  $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$  i.e.

$$(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\}) \xrightarrow[\text{morphisme d'algèbre de Lie}]{X_{(\cdot)}} (\mathfrak{X}(\mathcal{M}), [\cdot, \cdot])$$

Preuve:

Montrons que  $d\{f, g\} + [X_f, X_g] \lrcorner \omega = 0$

$$\begin{aligned} d\{f, g\} &= d(X_f \lrcorner dg) \\ &= d(X_f \lrcorner dg) + X_f \lrcorner d(dg) \\ &= L_{X_f}(dg) \\ &\stackrel{\text{Leibnitz}}{=} L_{X_f}(-X_g \lrcorner \omega) \\ &= -L_{X_f}(X_g) \lrcorner \omega - X_g \lrcorner L_{X_f} \omega \\ &\stackrel{=[X_f, X_g]}{=} -[X_f, X_g] \lrcorner \omega \end{aligned}$$

Deuxième lemme:  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Preuve:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Lemme 1}}{=} ([X_f, X_g] - X_{\{f,g\}}) \lrcorner dh \\ &= X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h) - \{\{f, g\}, h\} \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \end{aligned}$$

## 4 Variétés de Poisson

### 4.1 Introduction aux variétés de Poisson

Définition: (variété de Poisson)

variété  $\mathcal{M}$  munie d'un crochet de Poisson

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (F, G) &\mapsto \{F, G\} \end{aligned}$$

Vérifiant:

- Bilinéarité
- anti-symétrie
- identité de Jacobi (donc c'est un crochet de Lie)

- Leibnitz

Lemme final: ( $\sim$ Darboux pour les variétés de poisson)

Dans tout système de coordonnées locales  $(x_i)$ ,

$$\exists \pi = \sum_{i < j} \pi^{ij}(x) \partial_i \wedge \partial_j$$

$\partial_i \wedge \partial_j := (\partial_i \otimes \partial_j - \partial_j \otimes \partial_i)$ , d'où  $\pi = \pi^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$  une fois anti-symétrisé, de sorte que:

$$\{f, g\} = \sum_{ij} \pi^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g)$$

$$\pi^{ab} \partial_b \pi^{a'a''} + \pi^{a'b} \partial_b \pi^{a''a} + \pi^{a''b} \partial_b \pi^{aa'} = 0 \quad (\text{Jacobi})$$

$$\pi \in \Gamma(\mathcal{M}, \lambda^2 T\mathcal{M})$$

Note: si on étends la dérivée de Lie au crochet de Schouten ( $\sim$  dérivée de Lie sur les structures supérieures) alors  $[\pi, \pi] = 0$ .

Exemple: Dual d'une algèbre de Lie.

## 4.2 Aparté sur les Algèbres de Lie

Rappels de base: définitions équivalentes de l'algèbre de Lie canoniquement associée à un groupe de Lie  $G$ .

1.  $\text{Lie}(G) = T_e G$
2.  $\text{Lie}(G) = \{ \text{Champs vectoriels tangents à } G \text{ invariants à gauche (resp à droite) par l'action du groupe sur lui-même} \}.$

Autre rappel (de pure géo-diff):

$$(\varphi_* X)(x) = d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(X(\varphi^{-1}(x))) \quad \varphi \text{ diffeomorphisme}$$

$$\varphi_* X \lrcorner \varphi^* \alpha = (X \lrcorner \alpha) \cdot \varphi \quad \text{dualité push-forward \& pullback}$$

Encore un rappel:  $G$  groupe de Lie  $\implies G \approx G' \subset \text{GL}_N(\mathbb{R})$

On vas donc écrire l'action à gauche simplement:  $L_g x =: gx$ .

Dernier Rappel:  $X, Y$  invariants  $\implies [X, Y]_{\mathfrak{X}(G)}$  invariant, d'où

$$[X, Y]_{\mathfrak{X}(G)}(e) =: [X, Y]_{\mathfrak{g}}$$

Point de vue dual: (Forme de Mauer-Cartan)

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g} & \rightarrow \mathfrak{X}(G) \\ \xi & \mapsto \begin{array}{l} \text{le champ de vecteurs} \\ \text{invariant qui vaut } \xi \text{ en } e_G \end{array} \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme  $\alpha_x : T_x G \rightarrow \mathfrak{g}$  (enfin, une application inverser en fait):

C'est la *forme de Maurer-Cartan*.

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$$
$$\begin{aligned} [\alpha \wedge \beta](v, w) &:= [\alpha(v), \beta(w)] - [\alpha(w), \beta(v)] \\ &= [\beta \wedge \alpha](v, w) \end{aligned}$$
$$\alpha = \alpha^i E_i, \quad \beta = \beta^i E_i, \quad \alpha^i = \alpha^i_\mu dx^\mu, \quad \beta^i = \beta^i_\mu dx^\mu$$

avec  $C_{ij}^k$  les coefficients de structure de l'algèbre de Lie dans  $\mathfrak{g}$  pour la base  $(E_i)$ . Bref:

Preuve: (formule de Cartan)

$$X = x \cdot \xi \qquad Y = x \cdot \zeta \qquad (\xi, \zeta) \in \mathfrak{g}$$

Bref,

Retour à Poisson: (Duale d'une algèbre de Lie comme exemple non-trivial de variété de Poisson)  
 $\mathfrak{g}$  algèbre de Lie,  $(E_i)$  base de  $\mathfrak{g}$ ,  $C_{ij}^k := [E_i, E_j]^k$  coefficients de structure,  $\{\cdot, \cdot\}$  sur  $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)^2$ .

$\forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*), \forall \alpha \in \mathfrak{g}^* \quad dF_\alpha \in T_\alpha^*(\mathfrak{g}^*) \approx (\mathfrak{g}^*)^* \approx \mathfrak{g}$ , et de même,  $dG_\alpha \in \mathfrak{g}$ .

On pose donc:

$$\{F, G\}(\alpha) := \left\langle \begin{matrix} \alpha \\ \in \mathfrak{g}^* \end{matrix}, \begin{matrix} [dF_\alpha, dG_\alpha] \\ \in \mathfrak{g} \end{matrix} \right\rangle_{\text{crochet de dualité}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

Il est trivial que ce crochet est bilinéaire, antisymétrique, Jacobi se vérifie simplement (c'est  $\langle \alpha, \cdot \rangle$  qui contient toute cette structure), quand à Leibniz, on l'obtient directement en passant en coordonnées via:

$$\{F, G\}(\alpha) = \alpha_i C_{jk}^i \frac{\partial F}{\partial \alpha^j}(\alpha) \frac{\partial G}{\partial \alpha^k}(\alpha)$$

Réciproquement: si  $V$  est un espace vectoriel, et  $\{\cdot, \cdot\}$  est un crochet de Poisson sur  $V^*$  linéaire, alors  $V$  est une algèbre de Lie.

En gros, tout se trouve dans la dualité:  $\pi_{ij}(\alpha) = C_{ij}^k \alpha_k$

### 4.3 Retour à Poisson

Lien avec Noether: (application moment - Souriau)

Dynamique dans  $(\mathcal{M}, \pi)$  variété de Poisson.

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \ni H \mapsto X_H \quad \text{t.q.} \quad \forall F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad X_H \lrcorner dF = \{H, F\}$$

i.e.  $X_H$  agit comme un opérateur différentiel d'ordre 1.

$$\{H, F\}(x) = \pi^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial x^j} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{X_H = \pi^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}}$$

Équations "de" Hamilton:

Pour  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= X_H(\gamma) \\ \frac{dF(\gamma)}{dt} &= \{H, F\}(\gamma) \end{aligned}$$

Maintenant, supposons qu'il existe  $G$ , groupe de Lie, qui agit sur  $(\mathcal{M}, \pi)$  en respectant  $\pi$  (i.e. une action à droite laissant la dynamique invariante).

On rappelle les propriétés élémentaires de l'exponentielle:

$$\begin{cases} \mathfrak{g} & \rightarrow & G \\ \xi & \mapsto & e^\xi \end{cases} \quad \frac{d(e^{t\xi})}{dt} = e^{t\xi} \cdot \xi \quad e_{|t=0}^{t\xi} = e_G$$

elle induit une action de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathcal{M}$ .

Hypothèses:

$$\Psi : \begin{cases} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} & \mapsto & \{\cdot, \cdot\} \end{cases} \quad \text{morphisme}$$

et  $\forall \xi \quad \Psi(\xi)$  satisfait:

- Symplectique:  $\Psi(\xi) \lrcorner \omega + d((H, \xi)) = 0$
- Poisson:  $dF(\Psi(\xi)) = \{(J, \xi), F\}$

où  $J \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathfrak{g}^*) =$  “application moment”.

Noether symplectique:

si  $\Psi(\xi) \lrcorner dH = 0$  et que  $\frac{d\gamma}{dt} = X_H(\gamma)$  alors  $J(\gamma)$  est constant.

Preuve:

$$\forall \xi \quad \frac{d(\langle J, \xi \rangle(\gamma))}{dt} = d\langle J, \xi \rangle_\gamma (\dot{\gamma}) \underset{=X_H(\gamma)}{=} \{H, \langle J, \xi \rangle\}(\gamma)$$

Exemple Physique: Problème à deux corps

Exemple “canonique”:  $T^*G$  variété symplectique

(sans preuves, mais voir les notes pour détails)

1. Action à droite de  $G$  sur  $T^*G$ :

$$\forall g \in G \quad R_g : \begin{cases} G & \rightarrow G \\ x & \mapsto xg \end{cases} \quad \tilde{R}_g : \begin{cases} T^*G & \rightarrow T^*G \\ (x, a) \begin{cases} x \in G \\ a \in T_x^*G \end{cases} & \mapsto \tilde{R}_g(x, a) \end{cases}$$

$$\tilde{R}_g(x, a) = (R_g x, R_{g^{-1}}^* a) = (xg, a \circ dR_{g^{-1}}) \quad \tilde{R}_{g_1, g_2} := \tilde{R}_{g_1} \circ \tilde{R}_{g_2}$$

2.  $g \mapsto e^{t\xi}$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}$  champ de vecteur invariant à droite.

$$X_\xi = \frac{d\tilde{R}_{e^{t\xi}}}{dt} \Big|_{t=0} \quad X_\xi(x, a) = \left( x \cdot \xi, -(\text{ad}_\xi p^*)a \right)$$

où  $p$  est donné par:

3.  $X_\xi$  est une action hamiltonienne;  $\sigma$  la forme symplectique usuelle sur  $T^*G$ . Or  $\exists! p$  t.q.

$$p : \begin{cases} T^*G & \rightarrow \mathfrak{g}^* \\ (x, a) & \mapsto p(x, a) \end{cases} \quad a = p_i(x, a) \alpha^i(x)$$

où  $\alpha \in \Omega^1$  est la forme de Maurer-Cartan. i.e.  $\exists! p : \langle p(x, a), \alpha_x \rangle = a$ . Notons, au passage, que  $\alpha = x^{-1}dx$  en notation matricielle.

Ainsi,

$$\boxed{X_\xi \lrcorner \sigma + d\langle p, \xi \rangle = 0}$$

et aussi:

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*), \quad \boxed{\{f \circ p, g \circ p\}_{T^*G} = \{f, g\}_{\mathfrak{g}^*} \circ p}$$

on dit que  $p$  est un “morphisme de Poisson”.

#### 4.4 Poisson, distributions et feuilletages

Soit  $(\mathcal{M}, \pi)$  une variété de Poisson.

Motivation via exemple:  $\mathcal{M} = \mathfrak{so}(3)^* \approx \mathbb{R}^3$ ;  $\mathfrak{so}(3) = \text{Vect} \left( x^i \frac{\partial}{\partial x^{i+1}} - x^{i+1} \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$

On étudie la distribution:

$$D_x := \{X_F(x), F \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{so}(3)^*)\} =: x^\perp \subset T_x \mathfrak{so}(3)^* = \mathfrak{so}(3)^* \quad \text{car espace vectoriel}$$

$D_x$  est une distribution singulière (singularité en 0)

$$(D_x)_{x \in \mathfrak{so}(3)^*} = \{(x, x^\perp), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \cup \{(0, 0)\}$$

est la distribution tangente aux sphères.

Cas général:  $(\mathcal{M}, \pi)$

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad D_x = \{X_F(x), F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \subset T_x \mathcal{M}\}$$

Si  $\mathcal{M}$  est symplectique,  $D_x = T_x \mathcal{M}$

Proposition 1:

Si le rang de  $D$  est constant, comme  $X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]$ . Soit  $F_1, \dots, F_k$  t.q.  $X_{F_1}, \dots, X_{F_k}$  base de  $D_x$ .

$$[X_{F_i}, X_{F_j}] \in \text{Vect}(X_{F_1}, \dots, X_{F_k})$$

Théorème: (Frobenius)

Si le rang de  $D$  est constant,  $D$  est intégrable.

D'où  $\mathcal{M}$  feuilleté par des sous-variétés intégrable de  $\mathcal{M}$ .

Soit  $\mathcal{F}$  une feuille intégrable

$$1. \text{ Si } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad \varphi|_{\mathcal{F}} = 0 \implies X_\varphi|_{\mathcal{F}} = 0$$

$$2. \forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad \varphi|_{\mathcal{F}} = \psi|_{\mathcal{F}} = 0 \implies \{F + \varphi, G + \psi\}|_{\mathcal{F}} = \{F, G\}|_{\mathcal{F}}$$

Conséquence: on peut définir un crochet de Poisson sur les feuilles, car si on connaît  $F|_{\mathcal{F}}$  et  $G|_{\mathcal{F}}$  on connaît  $\{F, G\}|_{\mathcal{F}}$

$$\rightsquigarrow \{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{F}} : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}) \quad \text{non degeneré}$$

$$\text{i.e. } \exists \omega_{\mathcal{F}} \in \Omega^2(\mathcal{F}); \quad \{F, G\}_{\mathcal{F}} = \omega_{\mathcal{F}}(X_F, X_G) \text{ et } d\omega_{\mathcal{F}} = 0$$

Bref: les feuilles des distributions non-dégénérées dans les variétés de poisson sont des variétés symplectiques. Résultat assez sympa.

## 5 Théories de Jauge

### 5.1 Présentation des théories de référence

Exemple: Maxwell sur  $\mathbb{M}_4 =: \mathbb{M}$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu & \text{i.e. } F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= dA \end{aligned}$$

$$A \in \Omega^1(\mathbb{M})$$

$$\mathcal{A}[A] = \int_{\mathbb{M}} \frac{-1}{2} |F|^2 d^4x$$

$$\begin{aligned} |F|^2 &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} \end{aligned}$$

Symétrie de Jauge:  $A \mapsto A + df$        $\mathcal{A}[A + df] = \mathcal{A}[A]$

Espace des configurations:  $\Omega^1(\mathbb{M})/d\Omega^0(\mathbb{M})$

Noether II  $\implies$  E.L. dégénéré.

Autre exemple: Maxwell-Dirac

$$\mathcal{A}_{\text{Maxwell}} + \int_{\mathbb{M}} \bar{\Psi} \not{D} \Psi + c \cdot \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

terme cubique

Donne une équation d'Euler non-linéaire.

Yang-Mills pure:  $A \in \Omega^1(\mathbb{M}) \otimes \mathfrak{g}$ , pour  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, le plus souvent parmi:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{u}(1) & \longleftrightarrow & \text{E.M.} \\ \mathfrak{su}(2) & \longleftrightarrow & \text{weak} \\ \mathfrak{su}(3) & \longleftrightarrow & \text{strong} \end{array}$$

Pour choisir un exemple à filer le long de cette section, on peut considérer  $\mathfrak{su}(2)$  vu comme:

$$\mathfrak{su}(2) = \text{Vec} \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vec}(E_i)$$

$$\begin{aligned} A &= A_\mu dx^\mu = A_\mu^i E_i dx^\mu \\ &\mapsto F = dA + A \wedge A \\ &= dA + \frac{1}{2} [A \wedge A] \end{aligned}$$

appelée “forme de courbure” (// avec Mauer-Cartan)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i E_i dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

$$|F|^2 = \frac{1}{2} F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^j K_{ij} \quad \mathcal{A}[A] = \int_{\mathbb{M}} \frac{-1}{2} |F|^2 d^4x$$

produit scalaire sur  $\mathfrak{g}$

Pour  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}, G)$ , (i.e.  $g = e^\varphi$ ) on prend la transformation de jauge  $A \mapsto g^{-1} A g + g^{-1} dg$ , et on remarque, évidemment, qu'on retrouve  $A \mapsto A + d\varphi$  dans le cas abélien. Si  $(K_{ij})$  est invariant par l'action adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$ , alors  $\mathcal{A}[g^{-1} A g + g^{-1} dg] = \mathcal{A}[A]$ . C'est une symétrie de Jauge (en général, non-abélienne).

$$\text{E.L. : } \boxed{\partial_\mu F^{i\mu\nu} - C_{jk}^i A_\mu^j F^{k\mu\nu} = 0}$$

On reconnait, dans le premier terme, Maxwell; et dans le second, des termes (interactions) non-linéaires.

## 5.2 Géométrie des théories de Jauge: connexion sur un fibré principal

On peut voir  $A$  comme une connexion sur  $\mathcal{F}$ , un fibré principal au dessus de  $X$ , groupe de structure de  $G$ :

$$\begin{array}{c} \mathcal{F} \\ P \downarrow \quad \mathcal{F} = X \times G \quad \text{Action de } G \text{ sur } \mathcal{F} \text{ à droite} \\ X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} \times G & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightsquigarrow & \mathcal{F} \times \mathfrak{g} \rightarrow T\mathcal{F} & \rightsquigarrow & \mathcal{F}_x = P^{-1}(\{x\}) = \text{"Orbite de l'action de } G. \\ (z, g) & \mapsto & z \cdot g & & (z, \xi) & \mapsto & (z, z \cdot \xi) \end{array}$$

On appelle cette construction une *connexion d'Ehresmann* (connexion sur des fibrés lisses), et est définie rigoureusement par:

$$\forall z \in \mathcal{F} \quad V_z = \ker dP_z \quad dP_z : T_z\mathcal{F} \rightarrow T_{P(z)}X$$

Utilisant l'extension naturelle sur les algèbres de Lie, on obtient:

$$z \cdot \xi = \left. \frac{d}{dt} (ze^{t\xi}) \right|_{t=0} \in V_z$$

D'où  $V_z = \ker dP_z = z \cdot \mathfrak{g}$ . La connexion d'Ehresmann peut être vue comme une distribution  $(H_z)_{z \in \mathcal{F}}$  où  $H_z \subset T_z\mathcal{F}$  et  $H_z \oplus V_z = T_z\mathcal{F}$ .

$$dP_z|_{H_z} : H_z \rightarrow T_{P(z)}X \text{ iso}$$

Comment représenter  $H_z$ ? Nous allons construire  $\Theta_z : T_z\mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{g}$  linéaire tel que  $\ker \Theta_z = H_z$ . Notons que  $\Theta_z$  est à priori non-unique.

On normalise:  $\Theta_z(z \cdot \xi) = \xi$ . Ce qui revient, en gros à dire que la restriction de  $\Theta$  à une fibre est (en gros, modulo identification) Mauer-Cartan.

On suppose:  $(H_z)$  invariante par l'action de  $G$  i.e.  $\iff R_g^*\Theta = \text{Ad}_g^{-1}\Theta = g^{-1}\Theta g$ . On parle de forme *equivariante*.

On utilise une connexion "usuelle": voir exposé d'Ehresmann de 1952 à Bourbaki pour plus d'info.

Trivialisations: i.e. existence d'une section  $\sigma : X \rightarrow \mathcal{F}$  (En réalité, il n'en existe pas forcément, mais localement, si, donc on peut voir une trivialisations comme un choix qui pave tout  $X$ , peu-importe ce qui marche...)

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \rightarrow & \mathcal{F} \\ (x, g) & \mapsto & \sigma(x) \cdot g \\ (x, g) & \leftarrow & z \\ & \rightarrow & \text{"coordonnées"} \quad (x, g) \in X \times G \end{array}$$

$$\Theta^{-1} = g^{-1} \begin{pmatrix} A(x) \\ = A_\mu(x) dx^\mu \end{pmatrix} g + g^{-1} dg$$

Le premier terme est indépendant du degré (c.f. hypothèse d'équivariance) tandis que le second gère la normalisation. Attention: on dirait une symétrie de Jauge, mais il s'agit en fait d'une expression sur les coordonnées. Ici,  $g$  est une coordonnée sur  $\mathcal{F}$ , i.e. une variété telle que  $\dim \mathcal{F} = \dim \mathbb{M} + \dim \mathfrak{g}$  et non une application  $X \rightarrow G$ .



Si on change  $\sigma \mapsto \tilde{\sigma} = \sigma \cdot \gamma$  où  $\gamma : X \rightarrow G$ ; la transformée de jauge de  $A$ ,  $A \mapsto \tilde{A}$ , alors  $A \in \Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g}$  décrit la connexion d'Ehresmann.

Note de rigueur:  $A \approx P^*a$  pour passer de la version sur  $\mathbb{M}$  à  $\mathcal{F}$ ... Mais bon...

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = g^{-1} \left( dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \right) g$$

Note: non trivial, dans cette égalité se cache l'utilisation de Mauer-Cartan pour annuler les composantes verticales.

## 6 Intégrale des Chemins (point de vue de Feynman)

$$\boxed{\int_{\text{Champs } \varphi} \mathcal{D}\varphi \, e^{\frac{iS(\varphi)}{\hbar}}}$$

Exemple:  $\{\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}\}$

$$S(\varphi) = \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{2} |\partial_0 \varphi|^2 - \sum_{a=1}^3 |\partial_a \varphi|^2 - m^2 |\varphi|^2 \quad \rightsquigarrow_{\text{E.L.}} \quad \square \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad \text{i.e. Klein - Gordon}$$

Problème: ça veut dire quoi?

### 6.1 Difficultés et Méthode

Difficultés:

1. Le “ $i$ ” dans  $e^{iS/\hbar}$  rends déjà les choses compliquées.  $\int_{\mathbb{R}} dx e^{ix^2}$  est une intégrale oscillante (Fresnel) donc ça converge, mais déjà  $\int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{i|x|^2}$  est beaucoup plus compliqué et nécessite en général de déformer des contours dans le plan complexe (Rotations de Wick)  $\int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{-\alpha|x|^2}$  avec  $\text{Re}(\alpha) > 0$  puis faire tendre  $\alpha$  vers  $i$ ... Le tout guidé par la seule formule que l'on ait: formule des Gaussiennes.

$$\begin{array}{ll} Q & : \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ Q(x) & = \quad A_{ij} x^i x^j \geq 0 \end{array} \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2} Q(x)} d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}$$

2. La dimension infinie des espaces fonctionnels est un gros problème.

$$\mathbb{R}^n \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E} := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^n) \ni \varphi$$

Alors, le “ $\mathcal{D}\varphi$ ” dans  $\int_{\mathcal{E}} \mathcal{D}\varphi e^{-Q(\varphi)}$  n'existe pas si on veut une mesure de Lebesgue. On peut résoudre ce problème avec des *mesures de Wiener* mais c'est très subtil de bien choisir  $\mathcal{E}$ , notamment sa topologie. Et en général, il faut en faire un espace de distributions.

3. Avec un terme d'interaction  $\mathcal{I} = \int_{\mathcal{E}} \mathcal{D}\varphi e^{-Q(\varphi)/2 + I(\varphi)}$ , où  $I$  est un polynôme de degrés  $\geq 3$ , c'est la catastrophe, en général plus rien ne converge. On travaille donc uniquement sur des cas particuliers, en petite dimension (de  $\mathbb{M}$ ) ou bien *par perturbation*.

Travailler en perturbation, c'est renoncer au calcul de  $\mathcal{I}$  et en faire un développement asymptotique en  $\varepsilon$  avec:

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \int_{\mathcal{E}} \mathcal{D}\varphi e^{-Q(\varphi)/2 + \varepsilon I(\varphi)}$$

mais du coup, il faut renormaliser...

4. Idee de la méthode perturbative illustrée en dimension finie.

$$\langle P \rangle = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{iA(x,x)/2} P(x) d^n x}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{iA(x,x)/2} d^n x} \quad P \in \mathbb{R}[x_i]$$

$$\langle x^1 x^2 \rangle = \left. \frac{\partial}{\partial J_1} \frac{\partial}{\partial J_2} e^{A^{-1}(J,J)/2} \right|_{J=0} \quad \begin{array}{lcl} A(x,x) & = & A_{ij} x^i x^j \\ A^{-1}(J,J) & = & (A^{-1})^{ij} J_i J_j \end{array} \quad J = (J_i) \text{ coord sur } \mathbb{R}^n$$

Preuve:

$$\begin{aligned} W(J) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-1/2 A(x,x) + \langle J,x \rangle} d^n x \\ \frac{\partial W}{\partial J_i} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-1/2 A(x,x) + \langle J,x \rangle} x^i d^n x \\ \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial J_j} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-1/2 A(x,x) + \langle J,x \rangle} x^i x^j d^n x \\ \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial J_j}(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-1/2 A(x,x)} x^i x^j d^n x \\ \text{Donc } \langle x^i x^j \rangle &= \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial J_j}(0) \\ \text{Or } W(J) &= [\dots \text{calcul peu passionnant} \dots] \\ &= e^{1/2 (A^{-1})^{ij} J_i J_j} \times W(0) \\ \text{Donc, } \langle x^i x^j \rangle &= \left. \frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} e^{1/2 (A^{-1})^{ij} J_i J_j} \right|_{J=0} \quad \square \end{aligned}$$

Ce calcul se généralise trivialement à  $\langle P(x) \rangle = P\left(\frac{\partial}{\partial J}\right) e^{1/2 A^{-1}(J,J)} \Big|_{J=0}$ , ce qui permet les développements asymptotiques.

En dimension finie, pour les cas “gentils” (K-G ou Dirac) on peut faire à peu près pareil. Développer devient alors ce qu'on appelle la renormalisation.

5. Problème supplémentaire pour les théories de Jauge: l'analogue de  $A$  n'est plus inversible (c'est re-la galère).

Analogie via Yang-Mills:

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \dots)$$

Où les termes ci-dessus sont les termes linéaires, et les termes “...” sont les non-linéaires.

$$\mathcal{A}[A] = \int_{\mathbb{M}} \frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \int_{\mathbb{M}} \frac{-1}{4} |dA|^2 + I(A)$$

Ici,  $|dA|^2$  présente un caractère dégénéré. Pourquoi? Passons en Fourier:

$$A = \text{cste} \times \int (\eta^{\mu\nu} \|p\|^2 - p^\mu p^\nu) \hat{A}_\mu \hat{A}_\nu \quad \text{avec} \quad \hat{A}_\mu(p) = \int A_\mu(x) e^{ip_\nu x^\nu / \hbar} d^n x$$

Y a un p'tit souci car l'intégrale s'annule sur le cône, mais passons... Le véritable problème est que  $A^{-1}$  a pour noyau  $\left(\frac{1}{\eta^{\mu\nu}||p||^2 - p^\mu p^\nu}\right)$  et donc n'existe pas!

$$M^{\mu\nu}(p) := \eta^{\mu\nu}||p^2|| - p^\mu p^\nu \implies M^{\mu\nu}(p)p_\nu = 0$$

et cela est fondamentalement lié à  $A \mapsto A + df...$

## 6.2 Une construction: l'intégrale de Berezin

On souhaite construire:

$$\int_{\pi V} : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\pi V) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_{\pi V} f(\theta) \mathcal{D}\theta^1 \dots \mathcal{D}\theta^n \end{cases}$$

vérifiant:

- Linéarité:  $\int_{\pi V}$  est linéaire.
- Stokes:  $\int_{\pi V} (\mathcal{D}\theta)^n \frac{\partial f}{\partial \theta^i} = 0$

$$\begin{aligned} \implies \int_{\pi V} (\mathcal{D}\theta)^n f(\theta) &= \int_{\pi V} (\mathcal{D}\theta)^n f_{1\dots n} \theta^1 \dots \theta^n \\ &= C f_{1\dots n}, \quad C \int \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Normalisation:  $C = 1$

Petite Bizarrerie: Formule du changement de variable:

$$\theta = A\tilde{\theta}, \quad A \in GL(V^*)$$

$$\int_{\pi V} (\mathcal{D}\theta)^n f(\theta) = \int_{\pi V} (\mathcal{D}\tilde{\theta})^n (\det A)^{-1} f(A \cdot \tilde{\theta})$$

Alors que cette expression devrait avoir un  $\det A$  à la puissance  $+1$  en géométrie classique.

$\int_{\pi V} \mathcal{D}\theta^n \dots \mathcal{D}\theta^1 f(\theta)$  correspond mathématiquement à  $e_n \lrcorner (\dots (e_1 \lrcorner (e_1 \lrcorner \alpha)) \dots) = (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \lrcorner \alpha$ .

Motivation (supersymétrie): Superparticule dans une variété Riemannienne  $\mathcal{N}$ :

Soit  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$  un boson et  $\psi : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \pi T_x \mathcal{N} \\ t & \mapsto & \psi(t) \in \pi T_{x(t)} \mathcal{N} \end{matrix}$  un fermion

$$\iff (x, \psi) : \mathbb{R} \rightarrow \pi T\mathcal{N} = \{(a, v), a \in \mathcal{N}, v \in \pi T_x \mathcal{N}\}$$

où  $\pi T\mathcal{N}$  est un fibré sur  $\mathcal{N}$ .

On note que  $\mathcal{C}^\infty(\pi T\mathcal{N}) = \Omega^0(\mathcal{N})...$

Supersymétrie:  $Q_\eta : \begin{cases} x & \mapsto x - \eta\psi \\ \psi & \mapsto \psi + \eta\dot{x} \end{cases}$  avec  $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\pi\mathbb{R})$  générateur ( $\eta^2 = 0$ ).

Exemple:

$$\mathcal{A}(\dot{x}, \psi) = \int_{\mathbb{R}} dt \frac{1}{2} (|\dot{x}|^2 + \langle \psi, \nabla_{\dot{x}} \psi \rangle)$$

Action invariante (modulo un terme exact) par la symétrie  $Q_\eta$ .

Formulation en supertemps:  $\mathbb{R}^{1/1}$  (le premier 1 correspond à  $t$ , le deuxième à  $\theta$ ), tel que  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1/1}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \oplus \theta \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^{1/1} &\rightarrow \mathcal{N} \\ (t, \theta) &\mapsto \phi(t, \theta) = x(t) + \theta \psi(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(x, \psi) = \int \int_{\mathbb{R}^{1/1}} dt d\theta \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle$$

$$Q_\eta : \phi \mapsto \phi + \eta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi$$

### 6.3 Application à Maxwell (vers le Gauge-fixing)

On cherche à définir:  $\int_{A \in \Omega^1(\mathbb{M})} e^{\frac{i}{\hbar} S(A)}$  avec  $S(A) := \int_{\mathbb{M}} d^4x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right)$ . Le terme avec les  $F_{\mu\nu}$  est quadratique et peut donc être ramené à une gaussienne. On observe la symétrie de jauge:  $S(A + d\varphi) = S(A)$  lorsque  $\varphi$  est à décroissance rapide. Cela implique que l'opérateur  $Q$  intervenant dans  $S$  n'est pas inversible.  $S$  est constante sur chaque  $A + d\Omega_c^0(\mathbb{M})$  l'orbite du groupe de jauge; il n'y a donc pas d'oscillations sur cette orbite, et donc pas de problème de définition de  $\int e^{iS(A)/\hbar}$ . De plus, l'orbite  $\approx d\Omega^0(\mathbb{M})$  est un espace de dimension infinie, *mais*  $A$  et  $A + d\varphi$  représentent le même état physique. Idée: fixer la jauge.

Exemple: On impose  $\partial_\mu A^\mu = 0$  ( $\iff d(*A) = 0$ ) qu'on appelle la jauge de Lorentz. Dès lors,  $A \mapsto A + d\varphi$  implique  $\partial_\mu A^\mu \mapsto \partial_\mu A^\mu + \square \varphi$ . L'unicité de  $A$  dans une orbite de Jauge est garantie si on impose des conditions aux bords.

Caricature en dimension finie:

- $\Omega^1(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathcal{M}$  variété de dimension  $N$ .
- $\Omega_c^0(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathfrak{g}$  algèbre de Lie de dimension  $k$ .
- $\{\text{orbites}\} = \Omega^1(\mathbb{M})/d\Omega_c^0(\mathbb{M}) \longrightarrow \underline{\mathcal{M}}$  variété de dimension  $n = N - k$ . (Notons qu'ici  $\Omega_c^0 \hookrightarrow \Omega^1(\mathbb{M})$  via la différentielle).
- L'intégrande  $\mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar} S(A)} \mathcal{O}(A)$  (où  $\mathcal{O}$  est une observable, c'est à dire une fonction invariante de Jauge) est une  $N$ -forme  $\omega \in \Omega^N(\mathcal{M})$ .

Idée:

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \rightsquigarrow \int_{\Sigma} p^* \omega \times \text{Jacobien}$$

avec:

- $\underline{\omega}$  une  $n$ -forme sur le quotient  $\underline{\mathcal{M}}$
- $p : \mathcal{M} \rightarrow \underline{\mathcal{M}}$  projection

- $\Sigma$  une hypersurface de dimension  $n$  transverse aux orbites (sections du fibré  $\mathcal{M} \xrightarrow{p} \underline{\mathcal{M}}$ )

*procédons par analyse-synthèse*

Analyse:

Supposons qu'il existe une telle forme  $\underline{\omega} \in \Omega^n(\underline{\mathcal{M}})$ . On suppose qu'il existe une application de fixation de jauge  $F : \mathcal{M} \rightarrow G$  (où  $G$  est la fibre de  $\mathcal{M} \rightarrow \underline{\mathcal{M}}$ ) telle que:

$$\forall x \in \underline{\mathcal{M}}, \quad F|_{p^{-1}\{x\}} \xrightarrow{\sim} G \quad \wedge \quad \text{rg}(dF, p) = N$$

(Analogie pour Maxwell:  $F(A) = \partial_\mu A^\mu$ , car  $F : \Omega^1(\mathbb{M}) \rightarrow \Omega^0(\mathbb{M})$ )

Soit  $\theta \in \Omega^k(G)$  tel que  $\int_G \theta = 1$ .

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \rightsquigarrow \int_{\underline{\mathcal{M}}} = \int_{\underline{\mathcal{M}}} \left( \int_{p^{-1}\{x\}} F^* \theta \right) \underline{\omega}$$

Soient des champs de vecteurs  $\begin{cases} Y_1 \dots Y_k & \text{tangents} \\ X_1 \dots X_n & \text{horizontaux} \end{cases}$  aux fibres sur  $\mathcal{M}$ , tels que  $(Y_1(z), \dots, Y_k(z))$  base de  $T_z p^{-1}\{x\}$  et  $(Y_1, \dots, Y_k, X_1, \dots, X_n)$  base de  $T_z \mathcal{M}$ .

$$\int_{\underline{\mathcal{M}}} \underline{\omega} = \int_{\underline{\mathcal{M}}} \int_{p^{-1}\{x\}} (F^* \theta(Y_1, \dots, Y_k) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k) p^* \underline{\omega}(X_1, \dots, X_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

avec  $x = p(z)$  et  $\begin{cases} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k(Y_1, \dots, Y_k) = 1 \\ dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(X_1, \dots, X_n) = 1 \end{cases}$  Or, comme  $p_* Y_\alpha = 0$ , on a  $Y_\alpha \lrcorner p^* \underline{\omega} = 0$  et donc:

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\mathcal{M}}} \underline{\omega} &= \int_{\mathcal{M}} (F^* \theta \wedge p^* \underline{\omega})(Y_1, \dots, Y_k, X_1, \dots, X_n) d^k y \wedge d^n x \\ &= \int_{\mathcal{M}} [(Y_1 \dots Y_k) \lrcorner (F^* \theta \wedge p^* \underline{\omega})](X_1, \dots, X_n) d^k y \wedge d^n x \\ &= \int_{\mathcal{M}} F^* \theta \wedge p^* \underline{\omega} \end{aligned}$$

Synthèse:

On part de  $\int_{\mathcal{M}} F^* \theta \wedge p^* \underline{\omega}$  où  $\omega$  est invariante par l'action du groupe de jauge.  $\mathfrak{g}$  algèbre de

Lie, et représentation  $\rho : \begin{matrix} \mathfrak{g} \times \mathcal{M} & \rightarrow & T\mathcal{M} \\ (\xi, z) & \mapsto & \xi \cdot z \end{matrix}$

Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $\mathfrak{g}$  et  $(e^1, \dots, e^k)$  sa duale, on définit  $Y_\alpha(z) = e_\alpha \cdot z$  pour  $\alpha \in \llbracket 1, k \rrbracket$ .

Hypothèse de symétrie:  $\boxed{L_{Y_\alpha} \omega = 0}$ .

On prend une fixation de jauge  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}$ ;  $\theta \in \Omega^k(\mathfrak{g})$ ,  $\theta = \varphi e^1 \wedge \dots \wedge e^k$  pour  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathfrak{g})$ .

Remarque d'Antoine: *pas clair en général si  $F$  est à valeur dans  $G$  ou  $\mathfrak{g}$ ... on peut alors définir:*

$$\int_{\underline{\mathcal{M}}} \underline{\omega} := \int_{\mathcal{M}} F^* \theta \wedge (Y \lrcorner \omega)$$

où  $Y \lrcorner \omega = p^* \omega$  pour faire le lien avec l'analyse, avec évidemment  $Y = Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k$ .

Lemme:

Si  $\mathfrak{g}$  est unimodulaire (i.e.  $c_{\alpha\beta}^\beta = 0$ , i.e. l'action adjointe  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est sans trace) alors:

$$L_{Y_\alpha} \omega = 0 \quad \implies \quad \begin{cases} d(Y \lrcorner \omega) = 0 \\ Y \lrcorner \omega \text{ invariante par l'action de } \mathfrak{g} \end{cases}$$

Note: Si  $\mathfrak{g}$  est unimodulaire, on peut définir la forme  $\underline{\omega}$ , comme ça:

$$\int_{\underline{\mathcal{M}}} \underline{\omega} := \int_{\mathcal{M}} F^* \theta \wedge (Y \lrcorner \omega) \stackrel{[\dots]}{=} \int_{\mathcal{M}} (F^* \theta)(Y) \omega$$

En écrivant  $\theta = \varphi e^1 \wedge \dots \wedge e^k$ , on a :

$$(F^* \theta)(Y) = (\varphi \circ F) \det \left[ \frac{\partial(F^\alpha \circ \rho)}{\partial \xi^\beta} \right] =: (\varphi \circ F) \det[A_\beta^\alpha] \quad A_\beta^\alpha = e^\alpha \circ dF_z \circ \rho(e_\beta)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho} & T_z \mathcal{M} \xrightarrow{d_z F} \mathfrak{g} \\ & \searrow A & \nearrow \\ & & \end{array}$$

où  $\underline{\mathcal{M}}^n$  est “espace quotient” avec une forme volume  $\underline{\omega}$ .

Conclusion: posant  $\omega = P^* \underline{\omega}$  on a

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \stackrel{\text{gauge fix}}{\rightsquigarrow \rightsquigarrow \rightsquigarrow} \int_{\underline{\mathcal{M}}} \underline{\omega} \tag{1}$$

$$= \int_{\mathcal{M}} (F^* \theta) \wedge (Y \lrcorner \omega) \tag{2}$$

$$= \int_{\mathcal{M}} (\varphi \circ F) \det(d(F \circ \rho)_z) \omega \tag{3}$$

$$= \int_{\mathcal{M}} \delta_0(F) (\text{FP}) \omega \tag{4}$$

Dans l'équation (2)  $\theta \in \Omega^k(\mathfrak{g})$ ;  $\theta = \varphi e^1 \wedge \dots \wedge e^k$  et  $Y = Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k$  avec  $Y_\alpha = \rho(e_\alpha)$ . Le terme “ $\det(d(F \circ \rho)_z)$ ” dans (3) est le déterminant de Faddeev Popov, noté FP. Enfin, le passage de (3) à (4) utilise le fait que  $A$  peut être vue via le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho_z} & T_x \mathcal{F}_x \xrightarrow{dF} \mathfrak{g} \\ & \searrow A & \nearrow \\ & & \end{array}$$

et pour finir, on remplace  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$  par  $\delta_0$  sur  $\mathfrak{g}$ . Pour rappel, on peut voir  $\delta_0$  comme limite (au sens des distrib') mais sinon, aussi via Fourier formel:

$$\delta_0(F) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^k} \int_{\mathfrak{g}^*} d^4 \lambda e^{\frac{i}{\hbar} \langle \lambda, F \rangle}$$

où  $\lambda \in \mathfrak{g}^*$  est un multiplicateur de Lagrange. De même  $\text{FP} = \det A$  où  $A = d(F) \circ \rho$ .

Remarque: On a un petit problème avec FP qui n'est pas local en l'espace-temps (i.e. si on change  $\mathcal{M}$  par  $\Omega^1(\mathbb{M})$ , par exemple,  $\det(A)_{z \in \Omega^1(\mathbb{M})}$  ne se calcul pas à partir de la forme locale de  $z$ )...

## 6.4 Un peu de super-calcul

Soit:

- $V$  un espace vectoriel de dimension  $k$ ;
- $\pi(V^* \oplus V)$  le foncteur de super-parité;
- $\mathcal{C}^\infty(\pi(V^* \oplus V)) = \Lambda^0(V^* \oplus V)^*$  où  $\Lambda^0$  est l'algèbre extérieure;
- $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $V$ ,  $(e^1, \dots, e^k)$  sa base duale (et on les combinera pour les bases des produits tensoriels);
- $A \in \text{End}(V) \approx V \otimes V^*$  que l'on décompose en  $A = A_j^i e^j \otimes e_i$

Propriété:

$$I := \int_{\pi(V^* \oplus V)} \mathcal{D}c^k \mathcal{D}\bar{c}_k \dots \mathcal{D}c^1 \mathcal{D}\bar{c}_1 \quad e^{\frac{i}{\hbar} \langle \bar{c}, Ac \rangle} = \left( \frac{i}{\hbar} \right)^k \det A$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \langle \bar{c}, Ac \rangle &= \bar{c}_\alpha A^\alpha_\beta c^\beta & c &\in \mathcal{C}^\infty(\pi V^*) & e^{\frac{i}{\hbar} \langle \bar{c}, Ac \rangle} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \frac{i}{\hbar} \langle \bar{c}, Ac \rangle \right)^p \\ A &= A^\alpha_\beta e^\beta \otimes e_\alpha & \bar{c} &\in \mathcal{C}^\infty(\pi V) & &= \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} \left( \frac{i}{\hbar} \langle \bar{c}, Ac \rangle \right)^p \end{aligned}$$

où les termes de degrés  $> k$  disparaissent car dans l'algèbre extérieure.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi(V^* \oplus V)} (\mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c})^k \left( \frac{i}{\hbar} \right)^k \frac{\langle \bar{c}, Ac \rangle^k}{k!} \\ &= \left( \frac{i}{\hbar} \right)^k \frac{1}{k!} \frac{\partial}{\partial c^k} \frac{\partial}{\partial \bar{c}_k} \dots \frac{\partial}{\partial c^1} \frac{\partial}{\partial \bar{c}_1} \langle \bar{c}, Ac \rangle^k && \text{car integrale de Berezin} \\ \langle \bar{c}, Ac \rangle^k &= (\bar{c}_1 A^1 + \dots + \bar{c}_k A^k)^k && A^\alpha = A^\alpha_\beta c^\beta \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} (\bar{c}_{\alpha_1} A^{\alpha_1}_{\beta_1} c^{\beta_1}) \dots (\bar{c}_{\alpha_k} A^{\alpha_k}_{\beta_k} c^{\beta_k}) && \langle \bar{c}, Ac \rangle = \bar{c}_\alpha A^\alpha \\ &= \sum_{\alpha_i, \beta_i} A^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots A^{\alpha_k}_{\beta_k} \times (\bar{c}_{\alpha_1} c^{\beta_1}) \dots (\bar{c}_{\alpha_k} c^{\beta_k}) && \text{les } (\bar{c}_\alpha c^\beta) \text{ commutent entre eux} \\ &= k! \sum_{\beta_i} A^1_{\beta_1} \dots A^k_{\beta_k} \times (\bar{c}_1 c^{\beta_1}) \dots (\bar{c}_k c^{\beta_k}) \\ &= k! \det(A) \times (\bar{c}_1 c^1) \dots (\bar{c}_k c^k) \quad \square \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\boxed{\int_{\underline{\mathcal{M}}} \omega = \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathfrak{g}^*} d^k \lambda \left( \frac{i}{\hbar} \right)^k \int_{\pi(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)} (\mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c})^k e^{\frac{i}{\hbar} \left( \langle \lambda, F \rangle + \langle \bar{c}, d(F \circ \varphi) c \rangle \right)} \omega}$$

Et ce qui nous intéresse est:

$$\omega := e^{\frac{\hbar}{i} S(x)} \mathcal{O}(x) d^N x \quad \mathcal{C} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$$

où  $\mathcal{O}$  est invariante par la jauge  $\mathfrak{g}$ , i.e. c'est une observable physique.

$$\int_{\mathcal{M}} e^{\frac{i}{\hbar} S} \mathcal{O} d^N x := \frac{\text{Vol}(G)}{(2\pi\hbar)^k} \left( \frac{\hbar}{i} \right)^k \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathfrak{g}} \int_{\pi(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g})} d^N x d^k \lambda (\mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c})^k e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{FP}}(x, \lambda, c, \bar{c})} \mathcal{O}(x)$$

où:

$$S_{\text{SP}}(x, \lambda, c, \bar{c}) := S(x) + \langle \lambda, F(x) \rangle + \langle \bar{c}, d(F \circ \rho)_x c \rangle$$

Remarque:

Ici, on a supposé que  $\langle \lambda, F(x) \rangle$  “passe une seule fois dans l'orbite”. On peut généraliser à un passage à  $n < \infty$  simplement en normalisant par  $\frac{1}{n}$ .

Interprétation: Hessienne de  $S_{\text{FP}}$  vs celle de  $S$ .

$$S(x) = \underset{\text{quadratic}}{Q(x)} + \underset{\text{interactions}}{\tilde{S}_{\text{int}}(x)}$$

$\int dx e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{int}}}$  n'a généralement pas de sens, mais  $\int dx e^{\frac{i}{\hbar} Q}$  (par exemple si  $Q \geq 0$  mais en fait, en général il suffit qu'il soit non-dégénéré). Si  $Q$  est inversible, on appelle  $Q^{-1}$  son “propagateur”. Le problème est qu'en théorie de jauge,  $Q$  n'est pas inversible à cause de son énorme noyau. En coordonnées locales sur  $\mathcal{M} \times \mathfrak{g} \times \pi(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g})$ :

$$\frac{\partial S}{\partial z^i} = 0 \quad (\text{symétrie de jauge})$$

$$dS_{x_0} = 0$$

i.e.  $x_0$  point critique de l'action (i.e. solution d'E.L.) notons  $x_0 \approx (x_0, \lambda_0, c_0, \bar{c}_0)$  pour aller plus vite.

$$\partial^2 S_{\text{F.P.}}(x_0) = \begin{matrix} & \partial_y & \partial_z & \partial_\lambda & \partial_c & \partial_{\bar{c}} \\ \begin{matrix} \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_\lambda \\ \partial_c \\ \partial_{\bar{c}} \end{matrix} & \left( \begin{array}{ccccc} \boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial y^i \partial y^j}} & 0 & ? & & \\ 0 & 0 & \frac{\partial F^\alpha}{\partial z^i} & & \dots \\ ? & \frac{\partial F^\alpha}{\partial z^j} & 0 & & \\ & & & \boxed{0} & -{}^t dF \circ \rho \\ & \dots & & dF \circ \rho & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Où:  $\boxed{\phantom{x}} = \partial^2 S_{x_0}$ ,  $\boxed{\phantom{x}}$  est inversible, et  $\boxed{\phantom{x}}$  aussi.

Remarque générale sur la notion de super-matrice: **paire** et **impaire**.

$$\begin{pmatrix} \boxed{M_{00}} & M_{01} \\ M_{10} & \boxed{M_{11}} \end{pmatrix}$$

$M_{00}$  et  $M_{11}$  sont à coefficients paires (Bosons) et  $M_{01}$  et  $M_{10}$  impaires (Fermions).

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{det}} &:= \text{“super determinant”} \\ &:= \frac{\det(M_{00} - M_{01} M_{11}^{-1} M_{10})}{\det M_{11}} \end{aligned}$$



et  $M$  inversible ssi  ${}^S\det M \neq 0$ .

L'idée derrière la construction de  ${}^S\det$  est que  $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$  d'où:

$${}^S\det \begin{pmatrix} M_{00} & 0 \\ 0 & M_{11} \end{pmatrix} = \frac{\det M_{00}}{\det M_{11}}$$

Lemme: (proof as exo)

$$\begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix} \stackrel{\exists X}{=} \begin{pmatrix} M_{00} - M_{01}M_{11}^{-1}M_{10} & 0 \\ 0 & M_{11} \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$(\partial^2 S(x_0, 0, c, \bar{c}))^{-1}$  est "l'énorme" propagateur dont on utilise des blocs.

## 6.5 Application à Yang-Mills

$$S_{\text{YM}} = \frac{-1}{4} \int_{\mathbb{M}} \text{tr}(F \wedge *F) \quad A \mapsto A + \epsilon d_A \alpha + o(\epsilon)$$

$$F : \quad \alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}, \mathfrak{g}) \quad \xrightarrow{\rho} \quad \begin{matrix} d_A \alpha = d\alpha + [A, \alpha] \\ \Omega^1(\mathbb{M}, \mathfrak{g}) \end{matrix} \quad \xrightarrow[\text{Lorentz}]{dF} \quad d(*d_A \alpha) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}, \mathfrak{g})$$

$$S_{\text{FP}}(A, \lambda, c, \bar{c}) = S_{\text{YM}}(A) + \int_{\mathbb{M}} d^4 x \lambda(x) d(*A) + \int_{\mathbb{M}} d^4 \bar{c}(x) d(*d_A c)(x)$$

Avec  $(k_{\alpha\beta})$  la métrique de  $\mathfrak{su}(p)$  et

$$F = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] = dA + A \wedge A$$

on a:

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= \int k_{\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha) (\partial^\mu A^{\beta\nu} - \partial^\nu A^{\beta\mu}) && \text{(Maxwell)} \\ &+ A \cdot A \cdot \partial A + A \cdot A \cdot A && \text{(Perturbations)} \\ &+ \lambda d(*A) + \bar{c} d(*dc) + \bar{c} d(*Ac) && \text{(Fantomes)} \\ &\quad \quad \quad =_{\bar{c} \square c} \end{aligned}$$

On peut alors avoir:  $\rightarrow \partial^2 S(\rho, c) \rightarrow (\partial^2 S)^{-1}(\rho, c)$

$$(\partial^2 S)^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{\eta^{-1}}{|\xi|^2} - \frac{\xi^\dagger \xi}{|\xi|^4} & \frac{\xi}{|\xi|^2} \\ \frac{\xi}{|\xi|^2} & 0 \end{matrix}} & \dots \\ \dots & \boxed{\begin{matrix} 0 & \frac{1}{|\xi|^2} \\ \frac{-1}{|\xi|^2} & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

où la première matrice par bloc est le propagateur.

Notons également que cela se traduit par un changement de règles de Feynman:

$$\begin{aligned} \alpha, \mu \quad \beta, \nu \\ x \quad y \quad &= \langle A_\mu^\alpha(x) A_\nu^\beta(y) \rangle = \left( \frac{\int \mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar}(\cdots)} A_\mu^\alpha(x) A_\nu^\beta(y)}{\int \mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar}(\cdots)}} \right) \longrightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^k} e^{-ik(x-y)} \frac{i\delta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}}{k^2 \pm i\epsilon} \\ \alpha \quad \beta \\ x \quad y \quad &= \langle c^\alpha(x) \bar{c}_\beta(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^k} e^{-ik(x-y)} \frac{i\delta_{\alpha\beta}}{k^2 \pm i\epsilon} \end{aligned}$$

Interactions:

## 7 Gestion des Symétries: BRST, BV

## 7.1 Cohomologie fantôme

Il reste à vérifier que:

- la théorie est bien invariante de jauge (✓ par construction)
- les fantômes  $c$  et anti-fantômes  $\bar{c}$  sont in-observables. (Méthode calculatoire: t'Hofft & Veltman.) Nous allons le montrer par la méthode BRST (Becchi, Rouet, Stora & Tyutin).

Observation:

Notons que  $\langle \lambda, F(x) \rangle + \langle \bar{c}, d(F \circ \rho)c \rangle = \lambda_\alpha F^\alpha + \bar{c}_\alpha (dF \circ \rho)^\alpha_\beta c^\beta$

Notons les constante de structures sur  $\mathfrak{g}$  par  $f_{\beta\gamma}^\alpha$  pour éviter les conflits de notations avec les fantômes.

$$Q := \frac{1}{2} f_{\alpha\beta}^{\gamma} c^{\alpha} c^{\beta} \frac{\partial}{\partial c^{\gamma}} - c^{\alpha} \rho^i(e_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \lambda_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{c}_{\alpha}}$$

$$\text{agit sur } \mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{M}_x \times_{\lambda} \mathfrak{g} \times \pi(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g})_{(c, \bar{c})}\right).$$

Lemme:

Soit  $\psi = \bar{c}F(x)$ :

1.  $Q\psi = \bar{c}_\alpha (c^\beta \rho^i (e_\beta)_j \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} + \lambda_\alpha F^\alpha = \langle \lambda, F \rangle + \bar{c}_\alpha (dF \circ \rho)_\beta^\alpha$ .  
Bref,  $S_{\text{FP}}$  est une dérivée totale par cet opérateur compliqué.
2.  $Q(S_0) = -c^\alpha \rho^i (e_\alpha)_j \frac{\partial S}{\partial x^i} = 0$  ssi  $S_0$  invariante de jauge.

3.  $Q^2 = 0$

Conclusion:

- et donc...  $S_{\text{FP}} := S_0 + Q\psi$ , mais ça c'est une conséquence triviale des prop ci-dessus.
- $QS_{\text{FP}} = Q(S_0 + Q\langle \bar{c}, F \rangle) = QS_0 + Q^2\langle \bar{c}, F \rangle = 0$
- Les “Observables” sont donc les quantités annulées par  $Q$  quotientées par l'invariance de jauge c'est à dire son image. i.e.  $\ker Q / \text{Im } Q$  i.e. une classe de cohomologie. C'est en fait la cohomologie des représentations d'algèbres de Lie.

Remarque:

Pour prouver  $Q^2 = 0$  le prof à fait un énorme super-calcul ultralong, ça utilisait du jaccobi et tout et tout... J'ai eu trop la flemme de noter.

Si pour l'instant on a vu  $Q$  comme un opérateur, on peut également remarquer que c'est un champ de (super)-vecteurs:  $Q = v^i(z, \theta) \frac{\partial}{\partial z^i} + v^a(z, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta^a}$  avec  $z = (x, \lambda)$  et  $\theta = \langle c, \bar{c} \rangle$ . Dès lors, on peut calculer sa divergence vis à vis de  $dz$  et  $\mathcal{D}\theta$  (on utilise la notation  $|v|$  pour désigner le degrés de parité de  $v$ ):

$$\begin{aligned} \text{div } Q &:= \frac{\partial v^i}{\partial z^i} - (-1)^{|v|} \frac{\partial v^a}{\partial \theta^a} \\ &= - \frac{\partial}{\partial c^a} \left( \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\theta^a \rho_a^i) - \frac{\partial}{\partial \bar{c}_a} \lambda_a \\ &= \frac{-1}{2} \left( f_{ab}^c c^b - f_{ac}^b c^a \right) + \theta^a \frac{\partial \rho_a^i}{\partial x^i} \\ &= - f_{cb}^c + \theta^a \frac{\partial \rho_a^i}{\partial x^i} \end{aligned}$$

$$\text{div } Q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f_{cb}^c = 0 \\ \frac{\partial \rho_a^i}{\partial x^i} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \mathfrak{g} \text{ unimodulaire} \quad (\text{i.e. l'action adjointe preserve les volumes})$$

Remarque: du coup, cette propriété ne s'applique pas dans le cas conforme.

Justification de la définition: (de la super-divergence)

$$\int \int dz \mathcal{D}\theta \left( (\text{div } Q) + Qf \right) = 0 \quad \text{si } f \text{ ou } v^i \in \mathcal{C}^\infty \left( \mathcal{M} \times \mathfrak{g}^* \times \pi(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}) \right)$$

Corollaire:  $\text{div } Q = 0 \implies \int \dots Qf = 0$

$$\begin{aligned} (\text{div } Q)f + Qf &= \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} - (-1)^{|v|} \frac{\partial v^a}{\partial \theta^a} \right) f + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + v^a \frac{\partial f}{\partial \bar{c}^a} \\ &= \frac{\partial (v^i f)}{\partial x^i} - (-1)^{|v|} \frac{\partial (v^a f)}{\partial \theta^a} \end{aligned}$$

en fait,  $-Q$  définit une différentielle de Chevalley-Eilenberg.

Définition:  $d_{\text{CE}} : \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$

1. linéaire

2. anti-dérivation:  $\forall \alpha \in \Lambda^p \mathfrak{g}^*, \forall \beta \in \Lambda^q \mathfrak{g}^* \quad d_{CE}(\alpha \wedge \beta) = (d_{CE}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\beta|} \alpha \wedge d_{CE}\beta$

3. action:  $\forall \alpha \in \mathfrak{g}^* = \Lambda^1 \mathfrak{g}^* \quad d_{CE}\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$  et  $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g} \quad (d_{CE}\alpha)(\xi, \eta) = -\alpha([ \xi, \eta ])$

Motivation:

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie.

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{X}(G) \\ \xi & \mapsto & [x \mapsto x \cdot \xi] \end{array} \quad \begin{array}{ll} \alpha \in \Omega^i(G) \otimes \mathfrak{g} & \text{Maurer - Cartan} \\ \alpha(x \cdot \xi) = \xi & \end{array}$$

$$d\alpha(x \cdot \xi, x \cdot \zeta) = -\alpha([x \cdot \xi, x \cdot \zeta]) + \underbrace{(x \cdot \xi) \lrcorner d(\alpha(x \cdot \zeta))}_{=0} - \underbrace{(x \cdot \zeta) \lrcorner d(\alpha(x \cdot \xi))}_{=0}$$

Autre Motivation:

$d_{CE}$  est le dual de  $[\cdot, \cdot]$  (un co-produit quoi). Le prof est même assez convaincu que ça forme une bigèbre (voire même une algèbre de Hopf) mais bon... Faut vérifier.

## 7.2 Lien avec la théorie des représentations

Lemme:

$\forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g} \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*$

$$d_{CE}(d_{CE}\alpha)(X_1, X_2, X_3) = \alpha([X_1, X_2], X_3) + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2])$$

Bref:

$$\boxed{\text{Jacobi} \iff d_{CE}^2 = 0}$$

Représentation de  $G$  (ou  $\mathfrak{g}$ ) vectorielle

Soit  $V$  un espace vectoriel (muni d'une base  $e_i$ ),  $R : G \rightarrow GL(V)$  morphisme de groupes.

$$\begin{array}{lll} \rho : \mathfrak{g} & \rightarrow & \text{End}(V) \\ e_a & \mapsto & \rho_a = (\rho_{ja}^i)_{ij} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{issue de } R & \text{t.q.} \end{array} \quad \rho[e_a, e_b] = [\rho_a, \rho_b]$$

Chevalley-Eilenberg: (cas de la théorie des rep')  $d_{CE} : \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^* \otimes V \longrightarrow \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^* \otimes V$

1. linéaire

2. Leibnitz

3.  $\forall \alpha \in \mathfrak{g}^* \otimes V \quad \forall \xi, \zeta \in \mathfrak{g}$

$$\boxed{(d_{CE}\alpha)(\xi, \zeta) = \rho(\xi)(\alpha, (\zeta)) - \rho(\zeta)(\alpha, (\xi)) - \alpha([\xi, \zeta])} \quad \in V$$

et si  $V = \mathbb{R}$ , on récupère le cas vu précédemment. On comprend que (dans le cas physique)

$\rho_a(x) = \rho_{ja}^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$  dans:

$$-d_{CE} = \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b \frac{\partial}{\partial c^c} - c^a \rho_{ja}^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i} = Q$$

où  $Q$  agit sur  $\mathcal{C}^\infty\left(\pi\left(\mathfrak{g} \oplus_x \mathfrak{g}_c\right)\right)$

Exo: Vérifier que  $Q = -d_{CE}$

Prop:

$$\begin{aligned} d_{CE}^2 \alpha(X, Y, Z) = & \left( [\rho X, \rho Y] - \rho[X, Y] \right) \alpha(Z) \\ & + \left( [\rho Y, \rho Z] - \rho[Y, Z] \right) \alpha(X) \\ & + \left( [\rho Z, \rho X] - \rho[Z, X] \right) \alpha(Y) \\ & + \alpha \left( [X, Y], Z + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \right) \\ & \quad \quad \quad = \text{“Jacobiateur”} \end{aligned}$$

$$d_{CE}^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{Jacobi } (\mathfrak{g} - \text{alg de Lie}) \\ \rho : \text{representation} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Donc } Q^2 = 0$$

Généralisation:

Remplacer  $GL(V)$  par  $\text{Diff}(\mathcal{M})$  où  $\mathcal{M}$  est un variété et  $\rho : \text{End}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  ou  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$

$$Q = \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b \frac{\partial}{\partial c^c} - c^a \rho_a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M} \times \pi \mathfrak{g})$  et  $K^c := \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b$ :

$$\begin{aligned} Q^2(\varphi) &= \left( K^c \frac{\partial}{\partial c^c} - c^a \rho_a \right) \left( K^d \frac{\partial}{\partial c^d} - c^b \rho_b \right) \varphi \\ &= K^c \frac{\partial c^c}{\partial K} + \underbrace{K^c K^d \frac{\partial}{\partial c^c} \frac{\partial}{\partial c^d}}_{\langle \text{Sym} | \text{AntSym} \rangle} \varphi - K^c \rho_c \varphi + K^c c^b \rho_b \frac{\partial \varphi}{\partial c^c} - c^a (\rho_a K^c) \frac{\partial \varphi}{\partial c^c} - c^a K^d \cancel{\frac{\partial}{\partial c^b} \rho_a \varphi} + c^a c^b \rho_a \rho_b \varphi \\ &\quad \quad \quad = \frac{1}{2} c^a c^b [\rho_a, \rho_b] \varphi + \frac{1}{2} c^a c^b \rho_a \rho_b \varphi = \frac{1}{2} c^a c^b [\rho_a, \rho_b] \varphi \\ &= \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b \frac{\partial}{\partial c^c} \left( \frac{1}{2} f_{ef}^d \frac{\partial \varphi}{\partial c^d} \right) - \frac{1}{2} c^a c^b \left( f_{ab}^c \rho_c - [\rho_a, \rho_b] \right) \varphi - \frac{1}{2} \rho_a f_{bd}^c c^a c^b \frac{\partial \varphi}{\partial c^c} \\ &= \frac{1}{2} \left( f_{ab}^e f_{ec}^d - \rho_c f_{ab}^d \right) c^a c^b c^c \frac{\partial \varphi}{\partial c^d} + \frac{1}{2} c^a c^b \left( [\rho_e, \rho_b] - \rho[e_a, e_b] \right) \varphi \end{aligned}$$

Or  $f_{ab}^e f_{ec}^d c^a c^b c^c = 0 \iff$  Jacobi et le second terme est équivalent au fait que  $\rho$  soit un morphisme d'alg de Lie. Ainsi, si  $\rho_c f_{ab}^d = 0$  (le prof dit que “normalement ce terme est null car  $f_{ab}^c$  est constant” mais j'avoue que j'ai pas compris pourquoi...)

$$Q^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Lie Alg \& Representation}$$

Extension: à  $Q \in \mathfrak{X}(\mathcal{M} \times \pi \mathfrak{g})$  soit au cas où  $f_{ab}^c \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  i.e. non-constant. Alors  $Q^2 = 0$  n'équivaut plus à Jacobi et rep, mais

$$\left( f_{ab}^e f_{ec}^d - \rho_c f_{ab}^d \right) c^a c^b c^c = 0 \quad \wedge \quad \text{rep}$$

c'est à dire: Algebroides de Lie et représentation.

### 7.3 Algébroides & Groupoïdes de Lie

Définition: Algébroïde de Lie

- Une variété (“base”)  $\mathcal{M}$
- Un fibré vectoriel  $E \rightarrow \mathcal{M}$

- Un crochet sur  $\Gamma(\mathcal{M}, E)$  noté  $[\cdot, \cdot]$
- Une encre  $\rho : \Gamma(\mathcal{M}, E) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  telle que
  - $(\Gamma(\mathcal{M}, E), [\cdot, \cdot])$  est une algèbre de Lie
  - $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{M}, E) \quad [X, \varphi Y] = \varphi[X, Y] + (\rho(X) \cdot \varphi)Y$

Remarque:

$$[X, \varphi Y] = \varphi [X, Y] + \left( \rho(X) \cdot \varphi \right) Y = \varphi [X, Y] + \rho(X) \lrcorner d\varphi Y = \varphi [X, Y] + d\varphi(\rho X)Y$$

Propriété:  $\rho$  induit un morphisme d'algèbres de Lie:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{M}, E) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M}) \\ \rho([X, Y]_E) &= [\rho(X), \rho(Y)]_{T\mathcal{M} = [\cdot, \cdot]_{\text{Lie}}} \end{aligned}$$

Preuve:

On considère  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  et  $X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{M}, E)$ ; on applique Jacobi sur  $(X, Y, \varphi Z)$  puis on conclut avec un calcul peu palpitant que j'ai eu la flemme de noter.

Exemples:

1.  $\mathcal{M} = \{*\}$ ;  $\mathfrak{g} = \Gamma(*, \mathfrak{g})$ ;  $\rho = 0$  bref... Les algèbres de Lie sont des algébroïdes de Lie...
2.  $\mathcal{M}$  variété,  $E = T\mathcal{M}$ ,  $[\cdot, \cdot]$  crochet des champs de vecteurs,  $\rho : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  identité.
3. Soit  $(\mathcal{M}, \pi)$  variété de Poisson. (voir le travail de Jean Pradines)  
 $\pi \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^2 T\mathcal{M})$  qu'on écrit en coordonnées:  $\pi = \frac{1}{2} \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$  i.e.  $\pi^{ij} + \pi^{ji} = 0$

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty \quad \{f, g\} := \pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

$$0 = [\pi, \pi] \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^3 T\mathcal{M}) \quad \text{crochet de Schouten – Nijenhuis}$$

On peut définir une algébroïde de Lie sur  $T^*\mathcal{M}$ , prenons  $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{M}, T^*\mathcal{M}) = \Omega^1(\mathcal{M})$

$$[\alpha, \beta] = L_{\pi\alpha}\beta - L_{\pi\beta}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)) \in \Omega^1(\mathcal{M})$$

où  $\pi\alpha := \pi^{ij} \alpha_i \partial_j$  car on peut en effet voir  $\pi : T^*\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ .

Soit  $k$  une section de  $E$  qui forme une base de  $E_x$  pour tout  $x \in \mathcal{M}$ . Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  un repère sur  $E$ , on obtient une algébroïde avec:

$$[e_a, e_b] = f_{ab}^c(x) e_c$$

$$\rho(e_a) = \rho_a^i(x) \partial_i \quad \rho : E \rightarrow T\mathcal{M}$$

Et on prend pour  $[\cdot, \cdot]_E$  le crochet de Lie, i.e.  $\left( f_{ab}^c f_{ce}^d + \rho_a^i \frac{\partial f_{bc}^d}{\partial x^i} \right) \theta^a \theta^b \theta^c = 0$

où  $\theta^a := e^a = (e_a)^*$  et  $\theta^a \theta^b := e^a \wedge e^b \dots$

$\rho$  induit un morphisme  $\Gamma(\mathcal{M}, F) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  ce qui est équivalent à dire que:

$$\rho_a^i \frac{\partial \rho_b^j}{\partial x^i} - \rho_b^i \frac{\partial \rho_a^j}{\partial x^i} - f_{ab}^c \rho_c^j = 0$$

Idée:

C'est un peu comme pour une paire  $(A, \rho)$  d'une alg de Lie et sa représentation, si ce n'est que contrairement au cas de  $\rho : A \rightarrow V$  on ne peut pas "décrocher"  $A$  de sa représentation car les coefficients sont non-constants et dépendent de la variété.

Si  $\varphi = \varphi^a e_a$  et  $\psi = \psi^b e_b \in \Gamma(\mathcal{M}, E)$

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi]_E &= [\varphi^a e_a, \psi^b e_b] \\ &= \varphi^a [e_a, \psi^b e_b] - d\varphi^a (\rho(\psi^b e_b)) e_a \\ &= \varphi^a (\psi^b [e_a, e_b] + d\psi^b(e_a) e_b) - \psi^b d\varphi^a(e_b) e_a \\ &= \varphi^a \psi^b [e_a, e_b] + \varphi^a d\psi(\rho_a) e_b - \psi^b d\varphi^a(\rho_b) e_a \\ &= \left( f_{ab}^c \varphi^a \psi^b + \varphi^a \rho_a^i \frac{\partial \psi^c}{\partial x^i} - \psi^b \rho_b^i \frac{\partial \varphi^c}{\partial x^i} \right) e_c \end{aligned}$$

Cas Poisson:

$$\begin{aligned} \rho(dx^i) &= \pi^{ij} \partial_j \\ [dx^i, dx^j] &= d\pi^{ij} = \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^k} dx^k \\ \implies [\alpha, \beta]_{T^*\mathcal{M}} &= [\alpha_i dx^i, \beta_j dx^j]_{T^*\mathcal{M}} \\ &= \left[ \partial_k \pi^{ij} \alpha_i \beta_j + \pi^{ij} (\alpha_i \partial_j \beta_k - \beta_i \partial_j \alpha_k) \right] dx^k \end{aligned}$$

Lien avec les groupoïdes de Lie:

Définition: Groupoïde de Lie

On demande à ce que  $G$  et  $G^{(0)} =: \mathcal{M}$  soient des variétés. On demande également un plongement  $\mathcal{C}^\infty$ , tel que  $G$  soit une sous-variété de  $G^{(0)}$ ,  $u : \mathcal{M} \hookrightarrow G$ , et évidemment on demande que les opérations de compositions soient lisses.

Lien avec alg de Lie:

$$\begin{aligned} T^b G &= \left\{ (\gamma, v) \in TG; db_\gamma(v) = 0 \in T_{b(v)}\mathcal{M} \right\} \subset TG \\ u * T^b G &= T^b G|_{\mathcal{M}} = \left\{ (x, v); x \in \mathcal{M}; v \in T_x^b G \right\} \end{aligned}$$

Bref, les "plans tangents" aux unités forment une algebroid de Lie.

Remarque sur le problème inverse:

Aller d'algebroid vers groupoïde n'est pas du tout aussi simple. En fait, c'est presque un problème ouvert. Il y a un théorème qui permet d'intégrer une algebroid de Lie en un groupoïde (3<sup>e</sup> théorème de Lie, par Cartan et Edo) mais la structure de Lie est assez bouleversée donc on sait pas trop ce que c'est. La question de la structure de ces groupes a été posée par Alan Weinstein, (c'est une sorte de variété ultra singulière) et la réponse est en partie venue de la Physique.

Exemple de Groupoïde de Lie:

$G$  un groupoïde,  $\mathfrak{g}$  son algèbre; le groupoïde associé est:

$$T^*G = \mathfrak{G} \quad \mathfrak{g}^* = \mathfrak{G}^{(0)}$$

Et on a une application “moment”:  $T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$  qui permet bien de voir le plongement.

## 7.4 Méthode BV

Quantification BRST:

$$\int_{\mathcal{M} \times \mathfrak{g} \times \pi(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g})} dx \, d\lambda \, \mathcal{D}c \, \mathcal{D}\bar{c} \, e^{\frac{i}{\hbar} \left( S(x) + \langle \lambda, F(x) \rangle + \langle \bar{c}, (dF \circ \rho)c \rangle \right)}$$

où  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}$  fixe la jauge, et  $\langle \lambda, F(x) \rangle + \langle \bar{c}, (dF \circ \rho)c \rangle = Q\langle \bar{c}, F(x) \rangle$

$$Q^2 = \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b \frac{\partial}{\partial c^c} - c^a \rho_a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \lambda_a \frac{\partial}{\partial \bar{c}_a}$$

$$Q^2 = 0 \quad \wedge \quad QS = 0 = -c^a \varphi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad Q\mathcal{O} = 0$$

Une autre méthode: BV (Batalin Vilkovisky)

$$\mathcal{N} := \mathcal{M} \times \mathfrak{g} \times \pi(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}) \quad z = (x, \lambda, c, \bar{c})$$

$$\rightsquigarrow \pi T^* \mathcal{N} = \left\{ (z, z^\dagger), z \in \mathcal{N}, z^\dagger \in \pi T_z^* \mathcal{N} \right\}$$

$$\mathcal{C}^\infty(\pi T_z^* \mathcal{N}) = \Lambda^0(T_z \mathcal{N}) \quad z^\dagger = (x_i^\dagger, \lambda_\dagger^a, c_\dagger^a, \bar{c}_\dagger^a)$$

Remarque Historique:

J. Zinn-Justin (des français) ont introduit le même objet, pas pour résoudre les problèmes de Jauge, mais pour la renormalisation, c.f. Weinberg, tome II chapitre 1 & 2.

$$\begin{aligned} \text{Sur } \pi T^* \mathcal{N}, \quad \omega &= dz_n^\dagger \wedge dz^n \\ &= dx_i^\dagger \wedge dx^i + d\lambda_\dagger^\alpha \wedge d\lambda_\alpha + dc_a^\dagger \wedge dc^a + d\bar{c}_\dagger^a \wedge d\bar{c}_a \end{aligned}$$

$\theta = z_n^\dagger dz^n$  et  $Q \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . En voyant  $Q$  comme un champ de vecteur  $Q \lrcorner \theta \in \mathcal{C}^\infty(\pi T^* \mathcal{M})$  ce qui n'est pas sans rappeler Noether symplectique.

$$\begin{aligned} Q \lrcorner \theta &= \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b c_c^\dagger & \theta &= p_i dq^i \\ &- c^a \rho_a^i(x) x_i^\dagger & \{\theta(X), H\} &= 0 \\ &+ \lambda^a \bar{c}_\dagger^a & \text{Variables “exotiques”} \end{aligned}$$

$$S_{\text{BV}}(z, z^\dagger) = S_0(x) + \underset{=: S_1}{Q \lrcorner \theta}$$

Notons que, en soit, BV n'a pas de gauge-fixing, mais on peut toujours le rajouter comme dans BRST.

$$S_0(x) \longrightarrow S_0 + \underset{\text{SymGauge Fix}}{Q \langle \bar{c}, F \rangle}$$



Comment retrouver la symétrie?

$$\frac{S_{\text{BV}}}{\partial z_n^\dagger} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} S_{\text{BV}} = 0$$

Qui est une sorte de crochet de Poisson (c'est un crochet de BV)  $= \frac{1}{2}\{S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}}\}$

$$\begin{aligned} \{\varphi, \psi\} &:= \frac{\varphi}{\partial z_n^\dagger} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \psi - (-1)^{(1+|\varphi|)(1+|\psi|)} \frac{\psi}{\partial z_n^\dagger} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \varphi \\ \frac{S_{\text{BV}}}{\partial z_n^\dagger} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} S_{\text{BV}} &= (-c^a \varphi_a^i) \left( \frac{\partial S_0}{\partial x^i} - c^a \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} x_j^\dagger \right) + \frac{0}{\frac{\partial}{\partial \lambda}} \times (c_a^\dagger) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b \left( f_{cb}^d c_d^\dagger - \rho_c^i x_i^\dagger \right) + \lambda^a \times 0 \\ &= \underbrace{-c^a \rho_a^i \frac{\partial S_0}{\partial x^i}}_{\text{Sym Jauge}} + \underbrace{\left( \frac{1}{2} f_{ab}^c c^a c^b \rho_c - c^a c^b \rho_a^i \frac{\partial \rho_b}{\partial x^i} \right) x^\dagger}_{\text{repr}} + \underbrace{\frac{1}{2} f_{ab}^c f_{cb}^d c^a c^b c^c c_d^\dagger}_{\text{Jacobi}} \\ S_{\text{BV}} &= S_0 + S_1 \\ S_1 &= z_n^\dagger Q z^n = c_a^\dagger Q c^a + x_i^\dagger Q x^i + \bar{c}_\dagger^a Q \bar{c}_a \\ &= \frac{1}{2} c_c^\dagger f_{ab}^c c^a c^b - x_i^\dagger c^a \rho_a^i + \bar{c}_\dagger^a \lambda_a \\ \{S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}}\} &= \{S_0, S_0\} + 2\{S_0, S_1\} + \{S_1, S_1\} \end{aligned}$$

- $\{S_0, S_0\}$  toujours nul car variété classique donc crochet de Poisson classique.
- $\{S_0, S_1\}$  symétrie de Jauge.
- $\{S_1, S_1\} \rightsquigarrow Q^2 = 0$

Quand à la gestion de la fixation de Jauge, on l'obtient par la restriction à une Lagrangienne (une surface Lagrangienne, i.e. une surface de dimension moitié sur laquelle s'annule la forme symplectique, et évidemment, il y a tout un travail pour montrer qu'une telle physique est indépendante de ce choix, pour ne pas casser l'invariance de Jauge).

$$\text{Jauge : } L \subset \pi T^* \mathcal{N}$$

Remarque: On appelle l'équation  $\{S, S\} = 0$  l'équation maitresse classique.

Le problème, c'est qu'il existe des cas où  $Q^2 \neq 0$  et donc  $\{S_1, S_1\} \neq 0$ . On suppose que  $\{S_1, S_1\}$  s'annule sur les points critiques c'est à dire  $dS_0 = 0$ . On parle de symétrie "On Shell".  
(E.L.)

D'où on a bien  $Q^2 = 0$  mais seulement là où  $dS = 0$ . (Notons que cette affirmation nécessite également quelques hypothèses de régularité et de d'autres choses, qu'on va mettre sous le tapis). Cela a également pour conséquence que pour tout  $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$  l'action de  $\rho$  sur les champs n'est plus compatible avec le crochet de Lie i.e.  $[\rho\xi, \rho\zeta] \neq \rho[\xi, \zeta]$  sauf bien sûr, sur les points où  $dS_0 = 0$ .

Lemme: (modulo les mêmes hypothèses)

$$\exists E = \frac{1}{2} E^{ij}(\xi, \zeta) \partial_i \wedge \partial_j \quad \text{t.q.} \quad [\rho\xi, \rho\zeta] = \rho[\xi, \zeta] + E^{ij}(\xi, \zeta) \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Cet écart à une symétrie complète n'est pas traitable avec BRST, mais ça se joue "à pas grand chose" ( $E$ ) et BV permet de gérer ça. Et l'idée est assez simple: on rajoute des termes:

$$\rightsquigarrow S = S_0 + S_1 + S_2 \quad S_2 = \pm \frac{1}{2} x_i^\dagger x_j^\dagger E_{ab}^{ij} c^a c^b$$

$\{S, S\}$  est alors sans termes de degrés 1 i.e. homogène de degrés 2 en les antichamps.

## 7.5 Retour sur la Fixation de Jauge dans le cas BV

Avec BRST:  $S_0 + Q\psi$  où  $\psi := \bar{c}_a F^a(x)$  fixe la jauge.

Avec BV:

$$\int_{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{BV}}} \rightsquigarrow \int_{L \subset \pi T^* \mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{BV}}} \quad L \text{ sous-variété Lagrangienne}$$

$$S_{\text{BV}} = S_0 + S_1 (+ S_2 + \dots)$$

$$= S_0 + Q \lrcorner Q$$

$$L = \left\{ \left( z^n, z_n^\dagger = \frac{\partial \psi}{\partial z^n} \right) \quad z \in \mathcal{N} \right\} \subset \pi T^* \mathcal{N}$$

$$Q = z_n^\dagger dz^n \in \Omega^1(\pi T^* \mathcal{N})$$

Sous-variété Lagrangienne: (Mécanique)

- Soit  $(Y, \omega)$  une variété symplectique;  $n := \dim Y$ .

Une *sous-variété Lagrangienne*  $L$  est une sous-variété de  $\dim n/2$  et telle que  $\omega|_L = 0$

- Localement:  $Y + T^*X$ , et  $\omega = dp_i \wedge dq^i$

$$L = \left\{ \left( x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i} \right) \quad x \in X \right\} \quad \text{pour un certain } S : X \rightarrow \mathbb{R}$$

(modulo les singularités, évidemment, cf la lagrangienne pour une courbe de la forme  $\bullet$  dans le cours d'analyse micro-locale I...)

$$S_1 = z_n^\dagger Q z^n \quad S_1|_L = \frac{\partial \psi}{\partial z^n} Q z^n = \bar{c}_a \frac{\partial E^a}{\partial x^i} Q x^i + F^a Q \bar{c}_a$$

Remarque:

Il existe un théorème (via un calcul diff extérieur, en dim infinie, et une sorte de thm de Stokes) qui donne une contrainte sur BV pour s'assurer de l'indépendance de  $\int_L e^{i/\hbar} S_{\text{BV}}$  par des déformations homologiques de  $L$ ; permettant ainsi de récupérer l'invariance de jauge (qu'on aurait pu pensé perdue dans la fixation de jauge).

Autre remarque:

On peut construire une mesure "Berezinienne" sur  $dz^n$  sur  $L \subset \pi T^* \mathcal{N}$ .

Bere  $\approx \frac{\partial}{\partial z^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z^p} \lrcorner$  forme

$$\begin{matrix} \text{pair} \\ z^n \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \text{impair} \\ z_n^\dagger \end{matrix} \quad dz_n^\dagger \approx \frac{\partial}{\partial z_n^\dagger} \approx dz^n \quad (\text{tres vaguement})$$

C'est le tour de magie qui assure que l'on a une bonne mesure sur  $L$  indépendante des coordonnées, via de la dualité bien trouvée. cf le livre de Pavel-Nev pour la construction.

## 7.6 Toute petite aparté sur la quantification

Exemple: Kontsevitch (1997) formule de quantification par déformation d'une variété de Poisson.

Le problème:  $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathcal{M}) \rightsquigarrow \hat{F}$  opérateur sur  $\mathcal{H} \approx L^2(X)$

Approche par déformation:

$$\left(\mathcal{C}^\infty(T^*X), \{\cdot, \cdot\}\right) \xrightarrow{\text{quantification}} (\mathcal{A}, [\cdot, \cdot])$$

$\mathcal{A}$  une algèbre d'opérateurs auto-adjoints. Notons que si ça marche pour les variétés, c'est vite assez limité. On généralise donc un chouille en cherchant à créer un  $*$ -produit  $(fg) \mapsto f * g$  (qui sera donc  $\#$ , le produit de Moyal dans le cas pseudo-diff) tel que:

$$f * g = f \cdot g + \hbar \{f, g\} + o(\hbar^2)$$

puis on se pose le même problème, mais sur une variété de Poisson:

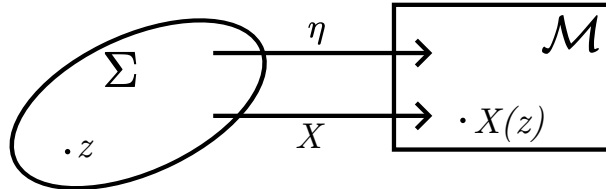
$$\left(\mathcal{M}, \underbrace{\{\cdot, \cdot\}}_{=\pi}\right) \quad fg \mapsto f * g = f \cdot g + \hbar \{f, g\} + \dots$$

1999 Fattaneo & Felder formulent une interprétation de la formule de Konsevitch.

## 8 Modèle Poisson- $\Sigma$

### 8.1 Contexte

On se donne  $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\}) = (\mathcal{M}, \pi)$  une variété de Poisson.



$$X \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma, \mathcal{M}) \quad \eta \in \Omega^1(\Sigma) \otimes_X X^* T^* \mathcal{M}$$

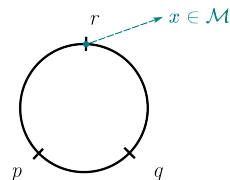
$$\text{en } z \in \Sigma, \quad \eta_z \in T_z^* \Sigma \otimes T_{X(z)}^* \mathcal{M}$$

Notons que si  $\Sigma$  est un tube, on obtient les théories des cordes.

On se munit de coordonnées  $x^i$  sur  $\mathcal{M}$ ;  $\eta = \eta_i dx^i := \eta_i \otimes dx^i$  où  $\eta_i \in \Omega^1(D)$ .

$$S(X, \eta) = \int_{\Sigma^2} \eta_i \wedge dX^i + \frac{1}{2} \pi^{ij}(x) \eta_i \wedge \eta_j$$

Remarque: cette action est topologique.



$$\int_{(X, \eta)} \mathcal{D}X \mathcal{D}\eta e^{\frac{i}{\hbar} S(X, \eta)} f(X(p)) g(X(q)) = (f * g)(x)$$

$X(r) = x$ , mais aussi  $p, q, r \in \partial\Sigma$  et  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ . Calculons E.L.

$$\begin{cases} dX^i + \pi^{ij}(x)\eta_j &= 0 \\ d\eta_i + \frac{1}{2}\partial_i\pi^{jk}(x)\eta_j \wedge \eta_k &= 0 \end{cases}$$

Remarque: Les variations sont toutes à support compact, d'où l'absence de termes de bord.

## 8.2 Symétrie de Jauge

Pour  $b \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma, X^*T^*\mathcal{M})$  où  $X^*T^*\mathcal{M}$  est le fibré de base  $\Sigma$  dont la fibre en  $z$  est  $T_{X(z)}^*\mathcal{M}$ , i.e.  $b = b_i dx^i$  avec  $b_i \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ . Notons que c'est une symétrie modulo un terme de bord.

Rappel:

$(\mathcal{M}, \pi)$  est une algébroïde de Lie. Or, le dual d'une alg de Lie est une varr de Poisson. D'où le dual d'une varr de Poisson est aussi une algebroïde de Lie. (enfin, là, "avec les mains"). Donc  $T^*\mathcal{M}$  algébroïde de Lie.  $(X, \eta)$  est alors une 1-forme à coefficients dans une algébroïde de Lie.

L'algebroïde de Lie:

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathcal{M} & & \text{Crochet sur } \Gamma(T^*\mathcal{M}) \\ \downarrow & & \\ \mathcal{M} & \text{Ancre } \rho : T^*\mathcal{M} \longrightarrow & T\mathcal{M} \\ [X, fY] = f[X, Y] + (\rho(X) \lrcorner dF)Y & X, Y \in \Gamma(T^*\mathcal{M}) & \\ [dx^i, dx^j] = d\pi^{ij} = \partial_k \pi^{ij} dx^k & \rho(dx^i) = \pi^{ij} \partial_j & dX = \rho(\eta) \\ d\eta_i + \frac{1}{2}[dx^j, dx^k]\eta_j \wedge \eta_k = 0 & // \text{Maurer - Cartan : } dA^a + \frac{1}{2}f_{bc}^a A^b A^c = 0 & \end{array}$$

Interprétation: la connexion a ne courbure nulle dans l'espace des phases.

$$\delta_b X = \rho_X(b) \quad \delta_b \eta = d^\nabla b$$

$d^\nabla$ , la "différentielle covariante" construite via les  $\partial_i \pi^{jk}$  qui jouent le rôles des constantes de structure en théorie de Lie.

Dans une illustration dimension-finie:

$$Q_{T^*\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}\partial_k \pi^{ij}(x) \alpha_i \alpha_j \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + \pi^{ij} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$(x^i, \alpha_j)$  coordonnées sur  $T^*\mathcal{M}$  de sorte que  $\alpha = \alpha_i dx^i$ . On voit alors  $T^*\mathcal{M}$  est vue comme algebroïde de Lie, et on a recréé un "Chevalley-Eilenberg" pour  $T^*\mathcal{M}$ :  $Q_{T^*\mathcal{M}}^2 = 0$ .

Cas dimension infinie: (toujours Poisson- $\Sigma$ )

On a une représentation de  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma, T^*\mathcal{M})$  sur  $\eta \in \Omega^1(\Sigma) \otimes_X X^*T^*\mathcal{M}$  avec  $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$  et  $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \otimes_X X^*T^*\mathcal{M} = \Gamma(\Sigma, X^*T^*\mathcal{M})$ .

$$Q_{X^*T^*\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}\partial_k \pi^{ij}(X) \beta_i \beta_j \frac{\partial}{\partial \beta_k} + \pi^{ij}(X) \beta_i \frac{\partial}{\partial x_j} + (d\beta_i + \partial_i \pi^{jk}(X) \eta_j \beta_k) \frac{\partial}{\partial \eta_i}$$

et:  $Q_{X^*T^*\mathcal{M}}^2 \neq 0$  (d'où l'échec d'une approche BRST)

$$= \left( -\frac{1}{2} \partial_i \partial_l \pi^{jk}(X) \beta_j \beta_k (dX^l + \pi^{lm} \eta_m) \right) \frac{\partial}{\partial \eta_i}$$

Mais on remarque dans l'expression de  $Q_{X^*T^*\mathcal{M}}^2$  le terme  $dX^l + \pi^{lm} \eta_m$  qui n'est autre qu'une des deux équations d'E.L. donc on a quand même  $Q_{X^*T^*\mathcal{M}}^2 = 0$  on shell.

On rappelle les conditions de bord sur  $(X, \eta)$  à savoir:  $\langle \eta, dX \rangle \Big|_{\partial \Sigma} = 0$ , puis on pose:

$$S_{\text{BV}} := S_0 + S_1 + S_2$$

Rappel super important :

$$[\pi, \pi]^{ijk} = 2 \left( \pi^{li} \partial_l \pi^{jk} + \pi^{lj} \partial_l \pi^{ki} + \pi^{lk} \partial_l \pi^{ij} \right)$$

$$S_1 := \int_{\Sigma} -\frac{1}{2} \beta_{\dagger}^i \left( \partial_i \pi^{jk}(X) \beta_j \beta_k \right) + X_j^{\dagger} \pi^{ij}(X) \beta_i + \eta_{\dagger}^i \left( d\beta_i + \partial_i \pi^{jk}(X) \eta_j \beta_k \right)$$

$$S_2 := \int_{\Sigma} \frac{1}{4} \eta_{\dagger}^i \eta_{\dagger}^j \partial_i \partial_j \pi^{kl} \beta_k \beta_l$$

$$\{S_1, S_0\} = \pm \int_{\Sigma} \frac{1}{4} [\pi, \pi]_{=0}^{ijk} \beta_k \eta_i \wedge \eta_j + d(X^i d\beta_i)$$

$$= \pm \int_{\Sigma} d(X^i d\beta_i)$$

$$= 0$$

$$\{S_1, S_1\} = ?$$

$$\delta_b \eta_i = d\beta_i + \partial_i \pi^{jk}(X) \eta_j \beta_k \quad b : \Sigma \rightarrow X^*T^*\mathcal{M}$$

Remarque: Il est également nécessaire que l'égalité suivante soit vérifiée, mais malheureusement, le prof ne sais plus d'où ça sort...

$$\int_{\partial \Sigma} X^i d\beta_i = 0$$

$$X^i \left( d\beta_i + \partial_i \pi^{jk}(X) \eta_j \beta_k \right) \Big|_{\partial \Sigma} = 0$$

$$\{S_1, S_2\} = \int_{\Sigma} -\frac{1}{2} \eta_{\dagger}^i \partial_i \partial_l \pi^{jk} (X) \beta_j \beta_k \left( dX^l + \pi^{lm} \underset{\text{E.L.}}{\eta_m} \right) \\ \left. \begin{aligned} & + \beta_{\dagger}^k \partial_k \left( \frac{1}{4} [\pi, \pi]^{jlm} \beta_j \beta_l \beta_m \right) \\ & + X_j^{\dagger} \left( -\frac{1}{4} [\pi, \pi]^{jkl} \beta_k \beta_l \right) \\ & + \frac{1}{4} \eta_{\dagger}^i \partial_i \left( [\pi, \pi]^{jkm} \right) \eta_j \beta_k \beta_m \end{aligned} \right\} = 0 \text{ par la structure Poisson } [\pi, \pi] = 0$$

$$\{S_2, S_0\} = \frac{S_2 \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z_n^{\dagger}} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial} S_0}{\partial z^n} + \frac{S_0 \overset{\leftarrow}{\partial}}{\partial z_n^{\dagger}} \frac{\overset{\rightarrow}{\partial} S_2}{\partial z^n} \\ = \int_{\Sigma} \left( \frac{1}{2} \eta_{\dagger}^i \partial_i \partial_j \pi^{kl} \beta_k \beta_l \right) \frac{\partial S_0}{\underset{=dX^j + \pi^{jk} \eta_k}{\partial X^j}}$$

Où l'on remarque que, comme on est en dimension infinie,  $\frac{\partial S_0}{\partial X^j}$  est un opérateur d'E.L.  
On conclut :

$$\{S_1, S_1\} + 2\{S_0, S_2\} = 0$$

On montre également que :

$$\{S_1, S_2\} = \frac{1}{4} \eta_{\dagger}^l \eta_{\dagger}^m \partial_l \partial_m \left( [\pi, \pi]^{ijk} \beta_i \beta_j \beta_k \right) = 0$$

Et que (mais flemme)  $\{S_2, S_2\} = 0$  ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\boxed{\{S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}}\} = 0}}$$

Dès lors:  $d_{\text{CE}} \rightsquigarrow Q \rightsquigarrow \{S_{\text{BV}}, \cdot\}$

“Jacobi” :  $\{\varphi, \{\psi, \chi\}\} = \{\{\varphi, \psi\}, \chi\} + (-1)^{(1+|\varphi|)(1+|\psi|)} \{\psi, \{\varphi, \chi\}\}$

Conséquence:  $\text{Ad}_{S_{\text{BV}}} := \{S_{\text{BV}}, \cdot\} \implies \text{Ad}_{S_{\text{BV}}}^2 = 0$

Bref, on est revenu à de la théorie connue. Notant  $\{\varphi, \psi\chi\} = \pm \{\varphi, \psi\} \chi \pm \psi \{\varphi, \chi\}$ . Petite remarque, tout comme en théorie des opérades, on a en fait, deux degrés qui cohabitent. Le degré de forme  $\Omega^{\bullet}(\Sigma)$  (0,1 et 2) et un degré plus algébrique (-2,-1, 0 et 1) que l'on récapitule dans le tableau ci-dessous, notamment en précisant les quels sont **commutatifs** et **anti-commutatifs**:

	0	1	2
-2			$\beta_{\dagger}^i$
-1		$\eta_i^{\dagger}$	$X_i^{\dagger}$
0	$X^i$	$\eta_i$	
1	$\beta_i$		

Bref, notre espace des phases est :

$$\Sigma \times \mathcal{C}^1(\Sigma, \mathcal{M}) \oplus \Gamma(\Sigma, X^* T \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^1(\Sigma, X^* T^* \mathcal{M})$$

évidemment, de dimension infinie.

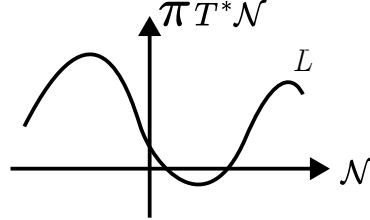
Fixation de Jauge:

Choix de

$$\Psi : \mathcal{N} \longrightarrow \text{“}\mathbb{R}^{0|1}\text{”}$$

$$z=(x,c,\bar{c},\lambda) \qquad \qquad \qquad := \pi \mathbb{R}$$

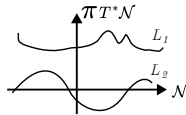
$$L := \left\{ \left( z, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), z \in \mathcal{N} \right\} \subset \pi T^* \mathcal{N} \quad \text{varr Lagrangienne}$$



Le problème est que  $\text{rg } \partial^2 S_{\text{BV}} \approx \dim \mathcal{N}$ , (approximativement bien sûr, car une Lagrangienne peut avoir des points singuliers, mais en gros, c'est ça). Bref,  $\partial^2 S_{\text{BV}}|_L$  est inversible, ce qui est cool, car alors  $\exists G$  et on peut faire du Feynman.

Invariance par choix de Jauge: (i.e. par choix de  $L$ )

Dans le cas dimension finie:



$$\int_{L_1} \alpha = \int_{L_2} \alpha \quad \text{si } L_1 \sim L_2 \text{ quand on restreint sur } d\alpha = 0$$

En dimension infinie, on remplace la différentielle  $d \rightsquigarrow \Delta_{\text{BV}} = (-1)^{|z_n^\dagger|} \frac{\vec{\partial}}{\partial z^n} \frac{\vec{\partial}}{\partial z_n^\dagger}$ , c.f. A. Schwarz pour les détails. Considérons le cas simple suivant:

$$\mathcal{N} = \mathbb{R}^n \qquad \qquad \qquad x^i$$

$$\& \pi T^* \mathbb{R}^n \qquad \qquad \qquad x_i^\dagger \approx p_i$$

$$\mathcal{C}^\infty(\pi T^* \mathbb{R}^n) \ni X = \frac{1}{k!} X^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i^\dagger} X = dx^i \lrcorner X \implies \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i^\dagger} X \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} (dx^i \lrcorner X)$$

$$dx^i \lrcorner X = X^i \implies \Delta X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} = \text{div } X = \frac{d(X^i \partial_i \lrcorner (dx)^n)}{(dx)^n}$$

$$\Delta : \Omega^k \longrightarrow \Omega^{n-k}$$

D'où  $\Delta : \text{truc de dim inf } (\mathcal{N}) \longrightarrow \text{truc de codim finie}$  (donc c'est à peu près appréhendable).

$$\Delta^2 = 0 \quad (\text{Schwarz} - \text{BV})$$

Remarque de Tomas: en vrai c'est pas trop une différentielle, mais cet objet existe en théorie de Hodge, c'est (en gros)  $d(*d(\cdot))$  donc rien de follichon.

Si  $\alpha$  est une fonction,  $dz$  est alors une forme de degrés moitié. Si  $\Delta\alpha = 0$  et  $L_1 \sim L_2$  on obtient bien:

$$\int_{L_1} \alpha dz = \int_{L_2} \alpha dz$$

maintenant, on veut regarder si:

$$\Delta(e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{BV}}} F) \stackrel{?}{=} 0$$

Pour finir la construction de notre calcul diff, il ne reste plus qu'à pouvoir gérer la mesure:

Théorème:

$$\Delta(e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{BV}}}) = \frac{i}{\hbar} \left( \Delta S + \frac{i}{\hbar} \{S, S\} \right) e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

Donc:

$$\Delta(e^{\frac{i}{\hbar} S}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\Delta S + \frac{i}{\hbar} \{S, S\} = 0} \quad \text{equation maitresse quantique}$$

Dans beaucoup de modèles,  $\Delta S = \{S, S\} = 0$ , du coup, c'est facile. Et c'est le cas, pour Poisson- $\Sigma$ .

$$\Delta(e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{BV}}} F) = \Delta(e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{BV}}}) F \pm \underset{=0}{\text{cte}} \{S, F\} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{BV}}}$$

où le crochet s'annule par invariance de jauge de  $F$  i.e. indep des anti-champs.

Rappel de règle de calcul:  $\Delta(\varphi\psi) = \Delta\varphi\psi + (-1)^{|\varphi|} \{\varphi, \psi\} + (-1)^{|\varphi|} \varphi\Delta\psi$

Lemme:

- $\{S, S^n\} = nS^{n-1}\{S, S\}$
- $\Delta S^n = nS^{n-1}\Delta S + \frac{n(n-1)}{2} S^{n-2}\{S, S\}$

Preuve: récurrence simultanée

Ceci permet de conclure qu'on peut faire Feynman sur Poisson- $\Sigma$ ; tout en conservant l'invariance de Jauge, et toutes les bonnes propriétés physiques.

Fixation de Jauge Alternative: (chez Cattaneo & Felder)

On fait un calcul perturbatif,  $X = x + \xi$  avec  $x \in \Sigma$ ;  $\xi \in \mathbb{R}^n$  et  $\eta$  "petit". On rajoute à l'action:

$$+S_{\text{gh}} = \int_{\Sigma} \eta_i (d\xi^i + *d\chi^i) + \beta_i d * d\gamma^i$$

$\beta_i$  fantôme,  $\gamma^i$  fantômes, et  $\lambda^i$  multiplicateurs de Lagrange.

Remarque du prof: un bon choix de Jauge, serait alors  $d(*\eta) = 0$

Avec cela, Cataneo et Felder re-dérivent la formule de Kontsevitch (fort lie avec les algebroides de Lie). C'est également comme cela qu'ils construisent un groupoïde (presque de Lie, mais singulier) qui integre tout algebroides de Lie (inspiré de la structure de Poisson de Poisson- $\Sigma$ ).

$$\begin{aligned} PT^*\mathcal{M} &= \mathcal{C}^1([0, 1], T^*\mathcal{M}) \\ \text{chemins} &= \\ &= \{(X, \eta), X : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}, \eta \in \Omega^1([0, 1]) \otimes_X X^*T^*\mathcal{M}\} \end{aligned}$$



$$\delta_{\beta}X^i = -\pi^{ij}(X)\beta_j \qquad \delta_{\beta}\eta_i = d\beta_i + \partial_i\pi^{jk}(X)\beta_k$$

$$\dim\{\text{orbites dans } PT^*\mathcal{M} \text{ sous l'action de } \mathcal{C}^{\infty}(T^*\mathcal{M})\} = 2n = 2\dim\mathcal{M} = \text{grp - oid de Lie}$$