

Notes de cours de Physique-Mathématique et Géométrie Différentielle

cours de Frédérique Hélein - notes de Sacha Amiel

March 25, 2025

Contents

1	Calcul des variations	2
1.1	Rappels de base de physique des particules classiques (en formalisme Lagrangien)	2
1.2	1 ^{er} théorème de Noether, symétries et conservation (cas des particules)	2
1.3	Formalisme Hamiltonien	4
1.4	retours sur Noether	6
1.5	Formulation Géométrique	7
2	Théorèmes de Noether généraux	7
2.1	Théorème 1	7
2.2	Théorème 2	10
3	Mécanique et Géométrie Symplectique	11
3.1	Vers une approche plus générale	11
3.2	Trajectoires dans l'espace-temps	12
3.3	Lien avec le premier théorème de Noether	14
4	Variétés de Poisson	16
4.1	Introduction aux variétés de Poisson	16
4.2	Aparté sur les Algèbres de Lie	17
4.3	Retour à Poisson	19
4.4	Poisson, distributions et feuilletages	20
5	Théories de Jauge	21
5.1	Présentation des théories de référence	21
5.2	Géométrie des théories de Jauge: connexion sur un fibré principal	22

Objectif: Atteindre les théories BRST¹ et BV², théories physiques développées pour quantifier les théories de jauge, tout particulièrement les Yang-Mills mais aussi d'autres.

1 Calcul des variations

1.1 Rappels de base de physique des particules classiques (en formalisme Lagrangien)

On considère une particule (classique) dans une variété \mathcal{M} de dimension m ; $I =]t_0, t_1[$ un intervalle réel ouvert (le temps, $t_0, t_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$); et on appelle:

$$\begin{aligned} \text{"Lagrangien"} : \quad L : \quad I \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) &\mapsto L(t, x, v) \\ \text{"Action"} : \quad \mathcal{A} : \quad \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \mathcal{A}[\gamma] := \int_I L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

où L est au moins \mathcal{C}^1 en x et \mathcal{C}^2 en v , et où

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] &= \int_I \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \frac{d\delta\gamma^i}{dt} \\ &= \int_I \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \delta\gamma^i \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \delta\gamma^i \end{aligned}$$

Principe de Maupertuis (généralisé): On obtient les trajectoires d'une physique classique régie par L en se restreignant à l'ensemble des chemins γ tels que $\forall \delta\gamma \quad \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] = 0$. i.e. ce sont les chemins qui extremisent localement l'action (hors cas physique, on parlera donc simplement de "points critiques").

D'où on dérive le principe d'Hamilton: $\forall \delta\gamma$ t.q. $\delta\gamma(t_0) = \delta\gamma(t_1) = 0$

$$(\text{Maup}) \quad \delta \mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})} \quad (\text{E.-L.})$$

où l'équation à droite est appelée "equations d'Euler-Lagrange" (E.-L.) (pour une physique de particules). (Existe aussi en version théorie de champs, cf plus tard).

1.2 1^{er} théorème de Noether, symétries et conservation (cas des particules)

Première difficulté: qu'est-ce qu'une symétrie? Il s'agit, grossièrement d'une action d'un groupe de Lie. (Enfin, d'une algèbre de Lie plutôt...)

Version simple:

METTRE LE DESSIN

$$X = X^0(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + X^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad T := X^0$$

¹BRST: Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora & Igor Tyutin

²Igor Batalin & Grigori Vilkovisky

On note $\Delta_X \subset \mathbb{R} \times (I \times \mathcal{M})$ maximal sur lequel le flot est défini.

$$\Phi_X : \begin{cases} \Delta_X & \rightarrow & I \times \mathcal{M} \\ (\epsilon, t, x) & \mapsto & \Phi_X(\epsilon, t, x) = e^{\epsilon X}(t, x) \end{cases}$$

i.e. $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(\epsilon, t, x) = X(\Phi_X(\epsilon, t, x))$ et $\Phi_X(0, t, x) = (t, x)$

en coord loc, ça donne: $e^{\epsilon X}(t, x) = (t + \epsilon T(t, x), x^i + \epsilon X^i(t, x)) + o(\epsilon)$

Action sur $\mathcal{C}^1(I', \mathcal{M})$ où I' est un intervalle compacte de I :

$$\begin{aligned} \gamma &\mapsto \gamma_\epsilon \\ [t_0, t_1] &\mapsto [t_0(\epsilon), t_1(\epsilon)] = [t_0 + \epsilon T(t_0, x_0), t_1 + \epsilon T(t_1, x_1)] \quad \text{modulo } \epsilon \end{aligned}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \gamma_\epsilon^i(\Phi_X^0(\epsilon, t, x)) = \Phi_X^i(\epsilon, t, \gamma(t))$$

$$\gamma_\epsilon = \gamma + \epsilon \delta \gamma + o(\epsilon)$$

$$\begin{aligned} (\gamma^i + \epsilon \delta \gamma^i)(t + \epsilon T(t, \gamma)) &= \gamma^i + \epsilon X^i(t, \gamma) + o(\epsilon) \iff \frac{d\gamma^i}{dt} T + \delta \gamma^i = X^i \\ &\iff \boxed{\delta \gamma^i = X^i(t, \gamma) - T(t, \gamma) \dot{\gamma}^i} \end{aligned}$$

$$X \text{ symetrie de } L \stackrel{(\text{def})}{\iff} \forall [t_0, t_1] \subset I \quad \int_{t_0(\epsilon)}^{t_1(\epsilon)} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt + (\epsilon)$$

Théorème 1: Si X est une symétrie et si γ est un point critique alors

$$Q_X(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) X^i(t, \gamma) - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}^i - L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) T(t, \gamma)$$

est conservé (i.e. $\frac{dQ}{dt} = 0$).

Remarque: $Q_X = \frac{\partial L}{\partial v^i} + LT$

Preuve du théorème: $\forall \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M})$

$$\begin{aligned} 1) \text{ hypothese de symetrie} &\iff \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt + \epsilon [LT]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i \right) dt + o(\epsilon) \\ &\iff \int_{t_0}^{t_1} \delta_X L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt := \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d(LT)}{dt} \right) dt = 0 \end{aligned}$$

où $\delta_X L : I \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Bref, “symétrie $\implies \delta_X L = 0$ ”.

Exo: construire $\delta_X L$ et montrer que ça marche...

2) Montrons que Q constant si (et seulement si) γ est un point critique.

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right)$$

D'où EL $\iff \frac{\delta L}{\delta \gamma^i} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{\delta L}{\delta \gamma^i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \\
\frac{dQ_X}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \gamma^i + LT \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \delta \gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d}{dt} (LT) \\
&= \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \dot{\gamma}^i + \frac{d(LT)}{dt} - \cancel{\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} \delta \gamma^i} \\
&\quad \quad \quad = 0 \text{ par (E.-L.)} \\
&= 0 \quad \text{par symetrie}
\end{aligned}$$

Variante: Si $\exists f : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\delta_X L(t, \gamma, \dot{\gamma}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)$ “symétrie modulo un terme exacte” (def) alors la quantité conservée est $(Q_X - f)$.

Même si on va aller plus loin dans les théorèmes de Noether plus tard, une bonne référence (historique) est *Les Théorèmes de Noether: Invariance et lois de conservation au XXe siècle* par Yvette Kosmann-Schwarzbach, éditions de l'école Polytechnique, ISBN: 978-2730211383.

1.3 Formalisme Hamiltonien

L'idée est de faire un changement de variable de $T\mathcal{M}$ vers $T^*\mathcal{M}$... Commençons par définir un variété symplectique.

Définition: (variété symplectique)

Un var symplectique \mathcal{M} est une variété munie d'une 2-forme ω , $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ telle que:

- ω non dégénérée i.e. $\forall \xi \in T\mathcal{M}, \quad \xi \lrcorner \omega = 0 \implies \xi = 0$
 $\xi \lrcorner \omega := \omega(\xi, \cdot)$ (également noté, $\iota_\xi \omega$ dans d'autres ressources)
- $d\omega = 0$ “forme fermée”

Dans des coordonnées locales, $\omega = \sum_{1 \leq a_1 < a_2 \leq n} \omega_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2}$, et les hypothèses reviennent à dire que le rang de la matrice $(\omega_{a_1 a_2})$ est maximal, d'où $\dim \mathcal{M}$ paire.

Théorème de Darboux:

Dans toute variété symplectique, tout point admet une carte (et un jeu de coordonnées $(p_i) \cup (q^i)$ sur cet ouvert) dans laquelle $\omega = dp_i \wedge dq^i$.

Constructions ultra classiques de var symplectiques:

- $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on peut donc définir ω comme dans le théorème de Darboux sur tout \mathbb{R}^{2n} .
- Soit \mathcal{M} une variété de dimension n ,

$$\exists! \pi : \begin{cases} (T^*\mathcal{M}) & \rightarrow \mathcal{M} \\ (q, p) & \mapsto q \end{cases}$$

Soit π et soit $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$ tel que,

$$\forall \xi \in T_{(p,q)}(T^*\mathcal{M}), \quad \theta_{(q,p)}(\xi) = \left\langle \begin{matrix} p, \\ \in T_q^*\mathcal{M} \end{matrix}, \begin{matrix} d\pi_{(q,p)}\xi \\ \in T_q\mathcal{M} \end{matrix} \right\rangle$$

En coordonnées locales, (q^i) sur \mathbb{M} et (p_i) sur $T_q^*\mathcal{M}$ avec $p := p_i dq^i$, on obtient $\theta = p_i d(q^i \circ \pi)$ où $(p_i) \cup (q^i)$ sont des coordonnées locales sur $T^*\mathcal{M}$. On notera tout simplement $\theta = p_i dq^i$ avec $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$ ce qui est un abus de notation conséquent (notamment puisque rentrant violemment en conflit avec la définition de p). Bref, il faut ouvrir l'œil au contexte.

Il suffit alors de prendre $\omega := d\theta$ forme symplectique, pour avoir $(T^*\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique.

Lien entre Lagrangien et géométrie symplectique (eq° de Hamilton)

L'objectif est d'effectuer une transformation de la forme:

$$L : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x, v) & \rightarrow & L(t, x, v) \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, q, p) & \rightarrow & H(t, q, p) \end{cases}$$

Si (dq^i) est une base de $T_q^*\mathcal{M}$, $p \in T_q^*\mathcal{M} \implies p = p_i dq^i$, d'où (p_i, q^i) est un système de coordonnées sur $T^*\mathcal{M}$; enfin, en fait c'est $q^i \circ \pi$ à la place de q^i mais bon, c'est l'abus de notation de tout à l'heure. On pose:

$$\theta = p_i dq^i$$

Transformation de Legendre:

$$\forall (t, q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M} \quad d(L|_{\{t\} \times T_q\mathcal{M}}) =: \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)$$

en coordonnés locales, $v = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in T_q\mathcal{M}$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v^i} dv^i$$

Hypothèse de Legendre:

$$\mathbb{L} : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ (t, q, v) & \mapsto & (t, q, \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)) \end{cases} \quad \text{est un diffeo}$$

Exemple: $L = \frac{m|v|^2}{2} - V(q)$

Définition: (Hamiltonien)

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (H \circ \mathbb{L})(t, q, v) &= \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v) v^i - L(t, q, v) \\ \iff (\text{implicit}) \quad \mathbb{L}^{-1} : (t, q, p) &\rightarrow (t, q, v(t, q, p)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v(t, q, p)) =: p_i$$

$$H(t, q, p) = p_i v^i(t, q, p) - L(t, q, v(t, q, p))$$

1.4 retours sur Noether

$T \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sur $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ est une symétrie de L .

$\implies Q = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) X^i(t, \gamma) - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{\gamma}^i - L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right)$ est conservé si γ est solution.

$$Q = \underset{\text{"moment"}}{(p_i \circ \mathbb{L})} X^i - \underset{\text{"énergie"}}{(H \circ \mathbb{L})} T$$

METTRE LES SOUSTITRES

$$\begin{aligned} dH &= v^i dp_i + \cancel{p_i dv^i} - \frac{\partial L}{\partial t}(t, q, v) dt - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v) dv^i} \\ &= v^i dp_i - \left(\frac{\partial L}{\partial t} \circ \mathbb{L}^{-1} \right) dt - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \mathbb{L}^{-1} \right) dq^i \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= - \frac{\partial L}{\partial t} \circ \mathbb{L} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} &= - \frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \mathbb{L} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= v^i \end{aligned}$$

d'où $\forall \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial v}(t, \gamma, \frac{d\gamma}{dt})$$

Lemme: (transition Lagrangien-Hamiltonien)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \quad (\text{EL}) \quad \iff \quad \begin{cases} \frac{d\gamma^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) & (\text{Hq}) \\ \frac{d\pi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^i}(t, \gamma, \pi) & (\text{Hp}) \end{cases}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} Hq &\iff (t\gamma, \pi) = \mathbb{L}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \\ \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) &= v^i(t, \gamma, \pi) = \frac{d\gamma^i}{dt} \end{aligned}$$

par def de v .

Alors, $\pi_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = (EL) \frac{\partial L}{\partial x^i} = - \frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Notation:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

1.5 Formulation Géométrique

$t \mapsto (\gamma(t), \pi(t)) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, T^*\mathcal{M})$ est solution de Hamilton

$$\iff \frac{d}{dt}(\gamma^i, \pi_i) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right)(\gamma, \pi)$$

champ de vecteurs **non-autonome** (i.e. **indépendant de t**) tangent à $T^*\mathcal{M}$.

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\omega = dp_i \wedge dq^i$$

$$\begin{aligned} X_H \lrcorner \omega &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \lrcorner dp_j dq^j \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} (-\delta^{ij} dp_j) - \frac{\partial H}{\partial q^i} (\delta_{ij} dq^j) \\ &= - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - dH \end{aligned}$$

bref:

$$X_H \lrcorner \omega + dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Artifice: $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M}) \supset (\mathbb{R} \times \{0\}) \times T^*\mathcal{M} \approx \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M}$

On pose alors $q^0 = t$ et sur $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$ on étends $\tilde{\omega} := dp_0 \wedge dt + dp_i \wedge dq^i$ d'où

$$X_{\tilde{H}} \lrcorner \tilde{\omega} + d\tilde{H} = 0$$

et donc on s'intéresse uniquement à l'hyper-surface $p^0 = H$.

2 Théorèmes de Noether généraux

2.1 Théorème 1

Lagrangien d'ordre quelconque r , i.e. $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(r)})$. On travaille sur des champs $u : U \rightarrow \mathcal{M}$ où $U = \mathbb{R}$ dans le cas particules, mais sinon peut-être n'importe quoi (ligne d'univers d'une particule dans l'espace-temps, champ classique, ou des produits de ça...).

Définition: (Jets)

Si \mathcal{M} est varr de dim k et U est un ouvert de \mathbb{R}^n ,

$$j^r u(x) := (x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x), \dots, \partial^r u(x))$$

où $\partial^i := \frac{\partial}{\partial \mu_1 \dots \partial \mu_r} =: \partial_{\mu_1 \dots \mu_r}$ Cas général pour des variétés quelconques:

$$\begin{aligned}
j^0(U, \mathcal{M}) &= U \times \mathcal{M} \\
j^1(U, \mathcal{M}) &= \{(x, y, E), \quad (x, y) \in U \times \mathcal{M}, E \text{ sev de } T_{(x,y)}(U \times \mathcal{M}) \\
&\quad | \quad \dim E = \dim U \\
&\quad d(\pi_{U \times \mathcal{M} \rightarrow U})_{(x,y)} : T_{(x,y)}(U \times \mathcal{M}) \rightarrow T_x \mathcal{M} \\
&\quad d(\pi_{U \times \mathcal{M} \rightarrow U})_{x,y}|_E : E \rightarrow T_x \mathcal{U} \quad \} \\
j^r(U, \mathcal{M}) &= j^1(U, j^{r-1}(U, \mathcal{M}))
\end{aligned}$$

Système de coordonnées locales sur les jets:

$$v_{\mu_1 \dots \mu_j}^i \quad \text{t.q.} \quad v_{\mu_1 \dots \mu_j}^i(j^r u(x)) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_j}}$$

Lagrangien général d'ordre r sur " $U \rightarrow \mathcal{M}$ ":

$$L : j^r(U, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[u] = \int_U L(j^r u(x)) dx$$

Symétrie infinitésimale $u \mapsto u + \epsilon \delta u + o(\epsilon)$ infinitésimales, générés par un champ de vecteurs Z sur $U \times \mathcal{M}$. Ou plutôt, pour être précis, un champ $Z : j^r(u) \rightarrow T(U \times \mathcal{M})$.

$$Z = X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$$

$$\delta u^i = Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} X^\mu$$

Théorème de Noether 1: (Forme la plus générale)

Si L est invariant par $X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$ et si u est un point critique de \mathcal{L} alors il lui correspond $J^\mu \partial_\mu$ définit sur U tel que $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Ex: } u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \mathcal{L}[u] &= \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} dx \quad (\text{action de Dirichlet}) \\
\mathcal{L}[u + \epsilon \varphi] &= \int_\omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \epsilon \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \epsilon^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} \quad (\varphi \text{ supposé à support compacte.})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_u[\varphi] &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx \\
&= \int_\Omega (\text{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u) dx \\
&= - \int_\Omega \varphi \Delta u
\end{aligned}$$

Symétrie par translation $u \mapsto u \circ \tau_\epsilon =: u_\epsilon; \tau_\epsilon(x) := x - \epsilon v$.

$$u_\epsilon(x) = u(x - \epsilon v) \approx u(x) - \epsilon v^i \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) + o(\epsilon)$$

$$\delta u = -v^i \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

Noether: Si $\delta u = 0$,

$$\frac{\partial L}{\partial v_\mu}(x, u, du) \frac{\partial u}{\partial x^\nu} - (L(x, u, dx) \delta_\mu^\nu) v^\mu = J^\nu$$

alors $\frac{\partial J^\nu}{\partial x^\nu} = 0$

(le prof est pas totalement sûr de la formule pour J , voir la démo qui suit)

Cas particulier: $r = 1$, i.e. $L(x, u, \partial u)$, $X^\mu(x, u)$, $Y^i(x, u)$

$$J^\mu = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, u, \partial u) Y^i - \left(\frac{\partial L}{\partial v_\mu^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^\nu} - L \delta_\nu^\mu \right) X^\nu$$

et EL $\implies \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

Démonstration: (cas général)

$X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$ agissant sur (U, u) .

$U \mapsto U_\epsilon = \varphi_\epsilon(U)$.

$\varphi_\epsilon := x + \epsilon X + o(\epsilon)$. $u \mapsto u_\epsilon = u + \epsilon \delta u + o(\epsilon)$.

$$\delta u^i := Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} X^\mu$$

Symétrie $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U \forall u \quad \mathcal{L}_{U_\epsilon}[e_\epsilon] = \mathcal{L} + o(\epsilon)$

Petit lemme de calcul (m multi-indice):

$$0 = \int_U \left[\sum_{|m| < r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u)) \frac{\partial^m \delta u^i}{\partial x^m} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (L(\mathbf{j}^r(u)) X^\mu) \right] d^n x$$

autre petit lemme:

$\rho(\epsilon, x) := L(\mathbf{j}^r u_\epsilon(x))$

$$\frac{d}{d\epsilon} \left(\int_{\varphi_\epsilon(U)} \rho(\epsilon, x) dx \right) \Big|_{\epsilon=0} = \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon}(0, x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (X^\mu \rho(0, x))$$

et un dernier lemme:

Soit $A^{\mu_1 \dots \mu_p}$ un tenseur symétrique, et g une fonction sur Ω . ($1 \leq p \leq r$)

$$A^{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_p}} = (-1)^p g \frac{\partial A^{\mu_1 \dots \mu_p}}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_p}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \left(A^{\mu_1 \dots \mu_p} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2 \dots \mu_p} g \right)$$

où

$$\begin{aligned} f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2 \dots \mu_p} g &:= f \partial_{\mu_2 \dots \mu_p} g \\ &\quad - \partial_{\mu_2} f \partial_{\mu_3 \dots \mu_p} g \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (-1)^p (\partial_{\mu_2 \dots \mu_p} f) g \end{aligned}$$

Tous ces lemmes se prouvent par du calcul un peu bourrin.

Ainsi, la condition de symétrie devient, via $A^m = \frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u))$ et $g = \delta u^i$:

$$\text{Symetrie} \iff \int_U \sum_{|m| < r} (-1)^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \left(\frac{\partial L}{\partial v_m^i}(\mathbf{j}^r(u)) \right) \delta u^i + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sum_{|m| \leq r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} \delta u^i + X^\mu L \right) = 0$$

Posant :

$$(\text{EL})(u) := \sum_{|m| \leq r} (-1)^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \left(\frac{\partial L}{\partial v_m^i} (j^r(u)) \right)$$

et

$$J^\mu := L X^\mu + \sum_{|m| \leq r} \frac{\partial L}{\partial v_m^i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} \delta u^i$$

On a bien

$$X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i \quad \text{Symetrie} \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

2.2 Théorème 2

Hypothèse: il existe $X^{a,m,\mu}$ et $Y^{a,m,i}$ sur les jets tel que pour toute famille $(f_a)_{1 \leq a \leq A}$ de fonctions \mathcal{C}^∞ (ou $\mathcal{C}^{\dim \mathcal{M}}$) sur $\Omega \supset U$ on ait une (famille de) symétrie(s) via:

$$X^\mu = \sum_a \sum_{|m| \leq r} X^{a,m,\mu} (j^r(u)) \frac{\partial f_a}{\partial x^m}$$

$$Y^i = \sum_a \sum_{|m| \leq r} Y^{a,m,i} (j^r(u)) \frac{\partial f_a}{\partial x^m}$$

Théorème de Noether 2: (Cas des symétries de dimension infinie)

Si l'hypothèse ci-dessus est vérifiée, il y a dégénérescence de l'équation d'Euler-Lagrange.

Démonstration:

$$\begin{aligned} \delta u^i &:= Y^i - \partial_\mu u^i X^\mu \\ &= \sum_{|m| \leq r} \delta r^{r,i} \partial_m f_a \end{aligned}$$

$$\text{Symetrie} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_U (\text{EL})(u)_i \delta u^i + \partial_\mu \left(\sum_{|m| \leq 2r-1} K^{a,\mu} \partial_m f_a \right)$$

a) on prend $j^{2r-1} f_a |_{\partial U} = 0$, d'où $\int_U (\text{EL})(u) \delta u^i = 0$

b) $(\text{EL})(u)_i = \sum_m (-1)^r \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial v_m^i} \right)$

$$(\text{EL})(u)_i \delta u^i = (\text{EL})(u)_i \sum_{|m| \leq r} \delta u^{m,i} \partial_m f_a + \partial_\mu \left(\sum_{|m| \leq r} (\text{EL}) \delta u^{m,a} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \setminus \mu} f_a \right)$$

Conclusion: $\forall f_a : j^{2r-1} f_a |_{\partial U} = 0$

$$\int \sum_{|m| \leq r} (-1)^{|m|} \partial_m \left[(\text{EL})(u)_i (Y^{m,a} - \frac{\partial u}{\partial x^\nu} X^{m,a,\nu}) \right] f_a = 0$$

Exemple: Électromagnétisme

Rappel: Étoile de Hodge $*$: $\Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{n-p}(\mathcal{M})$ pour passer de J^μ 3-forme à 1-forme...

$$\begin{aligned} \text{Electromagnetisme} & \iff \begin{cases} dF &= 0 \\ d(*F) &= J \end{cases} \\ & \iff \mathcal{A}[A] = \int \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu dx \\ & \text{avec } F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \text{et} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

$A \mapsto A + d\varphi$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ groupe de symétrie de Noether. D'où $J := d(*F) = d(*dA)$ est un problème sous-déterminé. Autre exemple: (RG) $\mathcal{A}[g] = \int \text{Ric}_g d\text{vol}_g$ (i.e. $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$) a ses symétries dans l'identité de Bianchi

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0$$

(et en fait, dans tous les difféomorphismes).

3 Mécanique et Géométrie Symplectique

3.1 Vers une approche plus générale

On rappelle que:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{L} : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ (t, x, v) & \mapsto (t, x, p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)) \end{aligned}$$

Et avec l'hypothèse que \mathbb{L} est un difféo, on construisait:

$$H(t, q, p) := p_i v^i(t, x, p) - L(t, x, v(t, x, p))$$

avec $p_i := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v(t, x, p))$.

On obtenait alors les equations:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, \gamma, \pi) \\ \frac{d\pi_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q^i}(t, \gamma, \pi) \end{aligned}$$

On obtenait alors un flot sur la variété symplectique $T^*\mathcal{M}$ par

$$X_H : \begin{cases} 0 &= X_H \lrcorner + dH \\ \omega &= dp_i \wedge dq^i \end{cases}$$

Mais on peut se ramener à des problèmes variationnels, en changeant un peu notre construction: Nous allons maintenant travailler dans $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$ au lieu de $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{M})$.

$$\mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) := \int_I \left[L(t, \gamma, \zeta) dt + \pi \left(\frac{d\gamma^i}{dt} - \zeta^i \right) \right] dt$$

i.e. on impose $\zeta = \frac{d\gamma}{dt}$ via les multiplicateurs de Lagrange.

$$\pi \mapsto \pi + \delta\pi \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) \mapsto \mathcal{L}(\gamma, \zeta, \pi) + \epsilon \int \delta\pi_i (\dot{\gamma}^i - \zeta^i) dt$$

$$\begin{aligned} \forall \delta \pi \quad \delta \mathcal{L}[\delta \pi] = 0 & \iff \zeta^i = \frac{d\gamma^i}{dt} \\ \delta \mathcal{L}[(0, \delta \zeta, 0)] &= \int_I \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \delta \zeta^i - \pi_i \delta \zeta^i \right) dt = 0 \end{aligned}$$

i.e. :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \gamma & \mapsto \gamma \\ \pi & \mapsto \pi \\ \zeta & \mapsto \zeta + \epsilon \delta \zeta \end{cases} & \iff \pi_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} \\ & \iff (t, \gamma, \pi) = \mathbb{L}(t, \gamma, \zeta) \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\gamma, \pi] &= \int_I [L(t, \gamma, v(t, \gamma, \pi))] dt \\ &= \int_I \pi_i \dot{\gamma}^i - (\pi_i v^i(\gamma, \pi) - L(t, \gamma, v(t, \gamma, \pi))) dt \\ &= \int_I \pi_i \dot{\gamma}^i - H(t, \gamma, \pi) dt \\ A[\pi, \gamma] &= \int_I \left(\pi_i \frac{d\gamma^i}{dt} - H(t, \gamma, \pi) \right) dt \end{aligned}$$

A pour point critique les solutions de l'équation de Hamilton. (proof left as exo)

On appelle cela l'action de Poincaré.

3.2 Trajectoires dans l'espace-temps

On travaille donc dans $T^*(I \times \mathcal{M})$. On a des coordonnées dans $T^*\mathcal{M}$ via (q^i, p_i) , et on complète par $q^0 := t$ et p_0 son dual, pour faire (q_μ, p^μ) coordonnées pour $T^*(I \times \mathcal{M})$.

$$\omega = dp_0 \wedge dq^0 + dp_i \wedge dp^i = dp_\mu \wedge dq^\mu$$

$$\mathcal{H}(p_\mu, q^\mu) := p_0 + H(q^0, q^1, p_i)$$

$$\mathcal{H} : T^*(I \times \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

On construit également:

$$(\gamma, \pi) \mapsto \Gamma := \left\{ \left(t, \quad \gamma^i(t) - H(t, \gamma(t), \pi(t)), \quad \pi(t) \right), \quad t \in I \right\} \subset \mathcal{H}^{-1}(\{0\}) =: \mathcal{N}$$

$$\mathcal{L}[\gamma, \pi] = \int_{\Gamma} \underset{=: \theta}{p_\mu dq^\mu}$$

$$\Gamma \subset \mathcal{N} \subset T^*(I \times \mathcal{M})$$

Notons qu'on se rapproche d'une description relativiste du mouvement (même si c'est pas encore tout à fait ça, car Γ est toujours défini à travers notre choix de coordonnées initial dans \mathcal{M}). On remplace $I \times \mathcal{M}$ pas une variété \mathcal{E} (idéalement avec une métrique pseudo-Riemannienne, pour

avoir un bon $*$). On a donc $\mathcal{H} : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ et la dynamique est donnée par $\omega|_{\mathcal{N}}$. Explicitons...
 H sur \mathcal{M} symplectique. Via le flot de X_H on a:

$$X_H \lrcorner \omega + dH = 0$$

\mathcal{N} est une hyper-surface, telle que

$$d(\omega|_{\mathcal{N}}) = 0 \quad \text{et} \quad \omega|_{\mathcal{N}} = i_{\mathcal{N}}^* \omega$$

Rappel: $d(\cdot)$ commute avec les pull-backs. $i_{\mathcal{N}} \rightarrow T^*\mathcal{E}$ Notons que si $\omega|_{\mathcal{N}}$ est bien fermée, elle est par contre dégénérée (ainsi, ce n'est pas une forme symplectique sur \mathcal{N}).

$\ker \omega|_{\mathcal{N}} = \text{droite} \subset T\mathcal{N}$, qui décrit la dynamique.

Lemme:

Soit V un espace vectoriel de dimension finie:

$$V \supset W := \ker(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad \alpha_j \in V^*$$

$$V^* \rightarrow W^*$$

$$\beta \mapsto \beta|_W$$

$$V^*/\mathbb{R}(\alpha_i)_{i \in [1, k]} \rightarrow W^*$$

$$\beta \bmod [\alpha_1, \dots, \alpha_k] \mapsto \beta|_W \quad \text{est uniso!}$$

Soit (\mathcal{M}, ω) une variété symplectique, $T^*\mathcal{E}$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{N}$, $X \in T_M \mathcal{M}$.

$$X \lrcorner \omega \in T_M^* \mathcal{M} \rightarrow X \lrcorner \omega|_{\mathcal{N}} \in T_M^* \mathcal{N}$$

Comme $\ker d\mathcal{H} = T_m \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \left(X \lrcorner (\omega|_{T_M \mathcal{N}}) = 0 \right) \quad X \lrcorner \omega|_{T_M \mathcal{N}} = 0 & \iff X \lrcorner \omega \in \mathbb{R} d\mathcal{H} \\ & \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad X = X_H \quad \text{avec} \quad X_H \lrcorner \omega + d\mathcal{H} = 0 \end{aligned}$$

$$\ker(\omega|_{T_M \mathcal{N}}) := \{X \in T_M \mathcal{N} \mid X \lrcorner \omega|_{T_M \mathcal{N}} = 0\} = \mathbb{R} X_H$$

On dit de $(\mathcal{N}, \omega|_{\mathcal{N}})$ que c'est une variété pré-symplectique i.e. munie d'une forme fermée et de dégénérescence pas forcément nulle mais de noyau tangent à la dynamique.

Les courbes dans $\mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(C)$ seront les points critiques de $\int_{\Gamma} \theta = \text{????}$, courbe tangente à la distribution $\ker \omega|_{\mathcal{N}}$.

Autre exemple: (Force de Lorentz)

$$\mathcal{H} = (p_0 - eA_0)^2 - c^2 |p_i - eA_i|_{\mathbb{R}^3}^2 - (mc^2)^2$$

3.3 Lien avec le premier théorème de Noether

Situation:

$$\gamma : \begin{cases} I & \rightarrow \mathcal{M} \\ t & \mapsto \gamma(t) \end{cases} \quad L[\gamma] = \int_I L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt$$

$$X^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} + T(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \in (T_t \times \mathcal{M}_x)$$

est une symétrie (modulo df) de L si

$$T \frac{\partial L}{\partial t} + \left(L - v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) + X^i L + \frac{\partial L}{\partial v^i} \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i df x^i \quad (*)$$

où $f : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad \text{Si } \mathcal{H} &= p_0 + H(t, q, p) \\ F &= p_0 T(q^0, q^i) + p_i X^i(q^\mu) - f(q^\mu) \\ &= \theta(T, X) - f, \quad \theta = p_\mu dq^\mu \end{aligned}$$

Or, si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(T^*(I \times \mathcal{M}))$

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Longleftrightarrow \{H, F\} = H\{H, T\} \\ &\xRightarrow{\text{si } \mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(0)} \{H, F\}|_{\mathcal{N}} = 0 \end{aligned}$$

Point de vue “Relativiste”:

\mathcal{E} espace-temps,

$\mathcal{H} : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction “cohérente”,

$\mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(\{0\})$,

une courbe Γ par point critique:

$$\int_{\Gamma \subset \mathcal{N}} \theta \rightarrow \Gamma \text{ t.q. } \forall X \in T_M \Gamma \quad X \lrcorner (\omega|_{\mathcal{N}}) = 0$$

Si $F = \theta(X) - f = p_\mu X^\mu(q) - f(q)$ où $f \in \mathcal{C}^\infty$, X^μ est une symétrie (modulo df) lorsque $\{H, F\}|_{\mathcal{N}} = 0$.

Point de vue non-relativiste:

$H : T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, H indépendant du temps. $X = X^i(x) \partial_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ est une symétrie de $\int_I L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$ ssi $\{H, p_i X^i(q)\} = 0$.

Généralisation plus générale: sur une variété symplectique quelconque \mathcal{M} .

Définition: (crochet de poisson sur une variété symplectique)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (F, G) &\mapsto \{F, G\} := \omega(X_F, X_G) \end{aligned}$$

Remarque, dans un jeu de coordonnées à la Darboux, ça donne:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

Soit: $(\gamma, \pi) : I \rightarrow \mathcal{M}$ t.q.:

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma, \pi)}{dt} &= X_H(\gamma, \pi) \\ \forall F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}) \frac{dF(\gamma, \pi)}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q^i}(\gamma, \pi) \frac{d\gamma^i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\pi_i}{dt} \\ &= \{F, H\}(\gamma, \pi) \end{aligned}$$

Notons, au passage, les propriétés triviales:

$$\forall A, B, C \quad \{A, B\} = -\{B, A\} \quad \{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$$

Théorème de Noether 1 dans le cas symplectique:

Si X_F est une symétrie de H alors F est conservé le long du flot de X_H .

- X_F symétrie de $H \iff dH(X_F) = 0 \iff X_F \lrcorner dH = 0$.
- F conservé le long du flot de X_H : $dF(X_H) = X_H \lrcorner dF = 0$

Preuve:

$$\begin{aligned} \{H, F\} &:= \omega(X_H, X_F) \\ &= (X_H \lrcorner \omega)(X_F) \\ &= -dH(X_F) = -X_F \lrcorner dH \\ &= X_H \lrcorner dF \end{aligned}$$

$$\boxed{X_H \lrcorner dF = -X_F \lrcorner dH = \{H, F\}}$$

$$\begin{aligned} u : I \rightarrow (\mathcal{M}, \omega) \quad \frac{dF(\omega)}{dt} &= dFu \left(\frac{du}{dt} \right) \\ &= dFu(X_H) \\ \frac{du}{dt} &= X_H(\omega) \quad = \{H, F\}(u) \end{aligned}$$

Proposition:

$F \mapsto X_F$ symétrie infinitésimale de ω implique

$$L_{X_F} \omega = X_F \lrcorner d\omega + \underset{=-dF}{d(X_F \lrcorner \omega)} = 0 - d(dF) = 0$$

Se pose la question de si cette proposition admet une réciproque...

Soit $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ t.q. $L_X(\omega) = 0$

$$0 = L_X(\omega) = 0 + d(X \lrcorner \omega)$$

d'où $X \lrcorner \omega$ est fermé.

En fait la réciproque dépend de la cohomologie de la variété:

$$H^1(\mathcal{M}) = \{0\} \implies \exists F : X \lrcorner \omega = -dF, \text{ i.e. } X = X_F$$

Sinon, on peut dire que c'est localement vrai, mais c'est pas aussi fort évidemment. Bref:

Si $H^1(\mathcal{M}) = \{0\}$, X est une symétrie physique si et seulement si $L_X \omega = 0 = L_X H = X \lrcorner dH$.

Premier lemme sympa: $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$ i.e.

$$(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\}) \xrightarrow[\text{morphisme d'algèbre de Lie}]{X_{(\cdot)}} (\mathfrak{X}(\mathcal{M}), [\cdot, \cdot])$$

Preuve:

Montrons que $d\{f, g\} + [X_f, X_g] \lrcorner \omega = 0$

$$\begin{aligned} d\{f, g\} &= d(X_f \lrcorner dg) \\ &= d(X_f \lrcorner dg) + X_f \lrcorner d(dg) \\ &= L_{X_f}(dg) \\ &\stackrel{\text{Leibnitz}}{=} L_{X_f}(-X_g \lrcorner \omega) \\ &= -L_{X_f}(X_g) \lrcorner \omega - X_g \lrcorner L_{X_f} \omega \\ &\stackrel{= [X_f, X_g]}{=} -[X_f, X_g] \lrcorner \omega \end{aligned}$$

Deuxième lemme: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Preuve:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Lemme 1}}{=} ([X_f, X_g] - X_{\{f,g\}}) \lrcorner dh \\ &= X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h) - \{\{f, g\}, h\} \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \end{aligned}$$

4 Variétés de Poisson

4.1 Introduction aux variétés de Poisson

Définition: (variété de Poisson)

variété \mathcal{M} munie d'un crochet de Poisson

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (F, G) &\mapsto \{F, G\} \end{aligned}$$

Vérifiant:

- Bilinéarité
- anti-symétrie
- identité de Jacobi (donc c'est un crochet de Lie)

- Leibnitz

Lemme final: (\sim Darboux pour les variétés de poisson)

Dans tout système de coordonnées locales (x_i) ,

$$\exists \pi = \sum_{i < j} \pi^{ij}(x) \partial_i \wedge \partial_j$$

$\partial_i \wedge \partial_j := (\partial_i \otimes \partial_j - \partial_j \otimes \partial_i)$, d'où $\pi = \pi^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$ une fois anti-symétrisé, de sorte que:

$$\{f, g\} = \sum_{ij} \pi^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g)$$

$$\pi^{ab} \partial_b \pi^{a'a''} + \pi^{a'b} \partial_b \pi^{a''a} + \pi^{a''b} \partial_b \pi^{aa'} = 0 \quad (\text{Jacobi})$$

$$\pi \in \Gamma(\mathcal{M}, \lambda^2 T\mathcal{M})$$

Note: si on étends la dérivée de Lie au crochet de Schouten (\sim dérivée de Lie sur les structures supérieures) alors $[\pi, \pi] = 0$.

Exemple: Dual d'une algèbre de Lie.

4.2 Aparté sur les Algèbres de Lie

Rappels de base: définitions équivalentes de l'algèbre de Lie canoniquement associée à un groupe de Lie G .

1. $\text{Lie}(G) = T_e G$
2. $\text{Lie}(G) = \{ \text{Champs vectoriels tangents à } G \text{ invariants à gauche (resp à droite) par l'action du groupe sur lui-même} \}.$

Autre rappel (de pure géo-diff):

$$(\varphi_* X)(x) = d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(X(\varphi^{-1}(x))) \quad \varphi \text{ diffeomorphisme}$$

$$\varphi_* X \lrcorner \varphi^* \alpha = (X \lrcorner \alpha) \cdot \varphi \quad \text{dualité push-forward \& pullback}$$

Encore un rappel: G groupe de Lie $\implies G \approx G' \subset \text{GL}_N(\mathbb{R})$

On vas donc écrire l'action à gauche simplement: $L_g x =: gx$.

Dernier Rappel: X, Y invariants $\implies [X, Y]_{\mathfrak{X}(G)}$ invariant, d'où

$$[X, Y]_{\mathfrak{X}(G)}(e) =: [X, Y]_{\mathfrak{g}}$$

Point de vue dual: (Forme de Mauer-Cartan)

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g} & \rightarrow \mathfrak{X}(G) \\ \xi & \mapsto \begin{array}{l} \text{le champ de vecteurs} \\ \text{invariant qui vaut } \xi \text{ en } e_G \end{array} \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme $\alpha_x : T_x G \rightarrow \mathfrak{g}$ (enfin, une application inverser en fait):

C'est la *forme de Maurer-Cartan*.

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$$
$$\begin{aligned} [\alpha \wedge \beta](v, w) &:= [\alpha(v), \beta(w)] - [\alpha(w), \beta(v)] \\ &= [\beta \wedge \alpha](v, w) \end{aligned}$$
$$\alpha = \alpha^i E_i, \quad \beta = \beta^i E_i, \quad \alpha^i = \alpha^i_\mu dx^\mu, \quad \beta^i = \beta^i_\mu dx^\mu$$

avec C_{ij}^k les coefficients de structure de l'algèbre de Lie dans \mathfrak{g} pour la base (E_i) . Bref:

Preuve: (formule de Cartan)

$$X = x \cdot \xi \qquad Y = x \cdot \zeta \qquad (\xi, \zeta) \in \mathfrak{g}$$

Bref,

Retour à Poisson: (Duale d'une algèbre de Lie comme exemple non-trivial de variété de Poisson)
 \mathfrak{g} algèbre de Lie, (E_i) base de \mathfrak{g} , $C_{ij}^k := [E_i, E_j]^k$ coefficients de structure, $\{\cdot, \cdot\}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)^2$.

$\forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*), \forall \alpha \in \mathfrak{g}^* \quad dF_\alpha \in T_\alpha^*(\mathfrak{g}^*) \approx (\mathfrak{g}^*)^* \approx \mathfrak{g}$, et de même, $dG_\alpha \in \mathfrak{g}$.

On pose donc:

$$\{F, G\}(\alpha) := \left\langle \begin{matrix} \alpha \\ \in \mathfrak{g}^* \end{matrix}, \begin{matrix} [dF_\alpha, dG_\alpha] \\ \in \mathfrak{g} \end{matrix} \right\rangle_{\text{crochet de dualité}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

Il est trivial que ce crochet est bilinéaire, antisymétrique, Jacobi se vérifie simplement (c'est $\langle \alpha, \cdot \rangle$ qui contient toute cette structure), quand à Leibniz, on l'obtient directement en passant en coordonnées via:

$$\{F, G\}(\alpha) = \alpha_i C_{jk}^i \frac{\partial F}{\partial \alpha^j}(\alpha) \frac{\partial G}{\partial \alpha^k}(\alpha)$$

Réciproquement: si V est un espace vectoriel, et $\{\cdot, \cdot\}$ est un crochet de Poisson sur V^* linéaire, alors V est une algèbre de Lie.

En gros, tout se trouve dans la dualité: $\pi_{ij}(\alpha) = C_{ij}^k \alpha_k$

4.3 Retour à Poisson

Lien avec Noether: (application moment - Souriau)

Dynamique dans (\mathcal{M}, π) variété de Poisson.

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \ni H \mapsto X_H \quad \text{t.q.} \quad \forall F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad X_H \lrcorner dF = \{H, F\}$$

i.e. X_H agit comme un opérateur différentiel d'ordre 1.

$$\{H, F\}(x) = \pi^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial x^j} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{X_H = \pi^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}}$$

Équations "de" Hamilton:

Pour $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= X_H(\gamma) \\ \frac{dF(\gamma)}{dt} &= \{H, F\}(\gamma) \end{aligned}$$

Maintenant, supposons qu'il existe G , groupe de Lie, qui agit sur (\mathcal{M}, π) en respectant π (i.e. une action à droite laissant la dynamique invariante).

On rappelle les propriétés élémentaires de l'exponentielle:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ \xi &\mapsto e^\xi \end{aligned} \quad \frac{d(e^{t\xi})}{dt} = e^{t\xi} \cdot \xi \quad e_{|t=0}^{t\xi} = e_G$$

elle induit une action de \mathfrak{g} sur \mathcal{M} .

Hypothèses:

$$\Psi : \begin{cases} \mathfrak{g} & \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} & \mapsto \{\cdot, \cdot\} \end{cases} \quad \text{morphisme}$$

et $\forall \xi \quad \Psi(\xi)$ satisfait:

- Symplectique: $\Psi(\xi) \lrcorner \omega + d((H, \xi)) = 0$
- Poisson: $dF(\Psi(\xi)) = \{(J, \xi), F\}$

où $J \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathfrak{g}^*) =$ “application moment”.

Noether symplectique:

si $\Psi(\xi) \lrcorner dH = 0$ et que $\frac{d\gamma}{dt} = X_H(\gamma)$ alors $J(\gamma)$ est constant.

Preuve:

$$\forall \xi \quad \frac{d(\langle J, \xi \rangle(\gamma))}{dt} = d\langle J, \xi \rangle_\gamma (\dot{\gamma}) \underset{=X_H(\gamma)}{=} \{H, \langle J, \xi \rangle\}(\gamma)$$

Exemple Physique: Problème à deux corps

Exemple “canonique”: T^*G variété symplectique

(sans preuves, mais voir les notes pour détails)

1. Action à droite de G sur T^*G :

$$\forall g \in G \quad R_g : \begin{cases} G & \rightarrow G \\ x & \mapsto xg \end{cases} \quad \tilde{R}_g : \begin{cases} T^*G & \rightarrow T^*G \\ (x, a) \begin{cases} x \in G \\ a \in T_x^*G \end{cases} & \mapsto \tilde{R}_g(x, a) \end{cases}$$

$$\tilde{R}_g(x, a) = (R_g x, R_{g^{-1}}^* a) = (x, g, a \circ dR_{g^{-1}}) \quad \tilde{R}_{g_1, g_2} := \tilde{R}_{g_1} \circ \tilde{R}_{g_2}$$

2. $g \mapsto e^{t\xi}$, $\xi \in \mathfrak{g}$ champ de vecteur invariant à droite.

$$X_\xi = \frac{d\tilde{R}_{e^{t\xi}}}{dt} \Big|_{t=0} \quad X_\xi(x, a) = \left(x \cdot \xi, -(\text{ad}_\xi p^*)a \right)$$

où p est donné par:

3. X_ξ est une action hamiltonienne; σ la forme symplectique usuelle sur T^*G . Or $\exists! p$ t.q.

$$p : \begin{cases} T^*G & \rightarrow \mathfrak{g}^* \\ (x, a) & \mapsto p(x, a) \end{cases} \quad a = p_i(x, a) \alpha^i(x)$$

où $\alpha \in \Omega^1$ est la forme de Maurer-Cartan. i.e. $\exists! p : \langle p(x, a), \alpha_x \rangle = a$. Notons, au passage, que $\alpha = x^{-1}dx$ en notation matricielle.

Ainsi,

$$\boxed{X_\xi \lrcorner \sigma + d\langle p, \xi \rangle = 0}$$

et aussi:

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*), \quad \boxed{\{f \circ p, g \circ p\}_{T^*G} = \{f, g\}_{\mathfrak{g}^*} \circ p}$$

on dit que p est un “morphisme de Poisson”.

4.4 Poisson, distributions et feuilletages

Soit (\mathcal{M}, π) une variété de Poisson.

Motivation via exemple: $\mathcal{M} = \mathfrak{so}(3)^* \approx \mathbb{R}^3$; $\mathfrak{so}(3) = \text{Vect} \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^{i+1}} - x^{i+1} \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{i \in \mathbb{Z}/2g\mathbb{Z}}$

On étudie la distribution:

$$D_x := \{X_F(x), F \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{so}(3)^*)\} =: x^\perp \subset T_x \mathfrak{so}(3)^* = \mathfrak{so}(3)^* \quad \text{car espace vectoriel}$$

D_x est une distribution singulière (singularité en 0)

$$(D_x)_{x \in \mathfrak{so}(3)^*} = \{(x, x^\perp), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \cup \{(0, 0)\}$$

est la distribution tangente aux sphères.

Cas général: (\mathcal{M}, π)

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad D_x = \{X_F(x), F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \subset T_x \mathcal{M}\}$$

Si \mathcal{M} est symplectique, $D_x = T_x \mathcal{M}$

Proposition 1:

Si le rang de D est constant, comme $X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]$. Soit F_1, \dots, F_k t.q. X_{F_1}, \dots, X_{F_k} base de D_x .

$$[X_{F_i}, X_{F_j}] \in \text{Vect}(X_{F_1}, \dots, X_{F_k})$$

Théorème: (Frobenius)

Si le rang de D est constant, D est intégrable.

D'où \mathcal{M} feuilleté par des sous-variétés intégrable de \mathcal{M} .

Soit \mathcal{F} une feuille intégrable

$$1. \text{ Si } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad \varphi|_{\mathcal{F}} = 0 \implies X_\varphi|_{\mathcal{F}} = 0$$

$$2. \forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad \varphi|_{\mathcal{F}} = \psi|_{\mathcal{F}} = 0 \implies \{F + \varphi, G + \psi\}|_{\mathcal{F}} = \{F, G\}|_{\mathcal{F}}$$

Conséquence: on peut définir un crochet de Poisson sur les feuilles, car si on connaît $F|_{\mathcal{F}}$ et $G|_{\mathcal{F}}$ on connaît $\{F, G\}|_{\mathcal{F}}$

$$\rightsquigarrow \{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{F}} : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}) \quad \text{non degeneré}$$

$$\text{i.e. } \exists \omega_{\mathcal{F}} \in \Omega^2(\mathcal{F}); \quad \{F, G\}_{\mathcal{F}} = \omega_{\mathcal{F}}(X_F, X_G) \text{ et } d\omega_{\mathcal{F}} = 0$$

Bref: les feuilles des distributions non-dégénérées dans les variétés de poisson sont des variétés symplectiques. Résultat assez sympa.

5 Théories de Jauge

5.1 Présentation des théories de référence

Exemple: Maxwell sur $\mathbb{M}_4 =: \mathbb{M}$

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \text{i.e. } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$= dA$$

$$A \in \Omega^1(\mathbb{M})$$

$$\mathcal{A}[A] = \int_{\mathbb{M}} \frac{-1}{2} |F|^2 d^4x$$

$$|F|^2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'}$$

Symétrie de Jauge: $A \mapsto A + df$ $\mathcal{A}[A + df] = \mathcal{A}[A]$

Espace des configurations: $\Omega^1(\mathbb{M})/d\Omega^0(\mathbb{M})$

Noether II \implies E.L. dégénéré.

Autre exemple: Maxwell-Dirac

$$\mathcal{A}_{\text{Maxwell}} + \int_{\mathbb{M}} \bar{\Psi} \not{D} \Psi + c \cdot \bar{\Psi} \not{A} \Psi$$

terme cubique

Donne une équation d'Euler non-linéaire.

Yang-Mills pure: $A \in \Omega^1(\mathbb{M}) \otimes \mathfrak{g}$, pour \mathfrak{g} une algèbre de Lie, le plus souvent parmi:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{u}(1) & \longleftrightarrow & \text{E.M.} \\ \mathfrak{su}(2) & \longleftrightarrow & \text{weak} \\ \mathfrak{su}(3) & \longleftrightarrow & \text{strong} \end{array}$$

Pour choisir un exemple à filer le long de cette section, on peut considérer $\mathfrak{su}(2)$ vu comme:

$$\mathfrak{su}(2) = \text{Vec} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vec}(E_i)$$

$$\begin{aligned} A &= A_\mu dx^\mu = A_\mu^i E_i dx^\mu \\ &\mapsto F = dA + A \wedge A \\ &= dA + \frac{1}{2} [A \wedge A] \end{aligned}$$

appelée “forme de courbure” (// avec Mauer-Cartan)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i E_i dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

$$|F|^2 = \frac{1}{2} F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^j K_{ij} \quad \mathcal{A}[A] = \int_{\mathbb{M}} \frac{-1}{2} |F|^2 d^4x$$

produit scalaire sur \mathfrak{g}

Pour $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}, G)$, (i.e. $g = e^\varphi$) on prend la transformation de jauge $A \mapsto g^{-1} A g + g^{-1} dg$, et on remarque, évidemment, qu'on retrouve $A \mapsto A + d\varphi$ dans le cas abélien. Si (K_{ij}) est invariant par l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} , alors $\mathcal{A}[g^{-1} A g + g^{-1} dg] = \mathcal{A}[A]$. C'est une symétrie de Jauge (en général, non-abélienne).

$$\text{E.L. : } \boxed{\partial_\mu F^{i\mu\nu} - C_{jk}^i A_\mu^j F^{k\mu\nu} = 0}$$

5.2 Géométrie des théories de Jauge: connexion sur un fibré principal