Objectif: Atteindre les théories BRST[1] et BV[2], théories physiques dévellopées pour quantifier les théories de jauge, tout particulièrement les Yang-Mills mais aussi d'autres.

1 Calcul des variations

1.1 Rappels de base de physique des particules classiques (en formalisme Lagrangien)

On considère une particule (classique) dans une variété $\mathcal{M}$ de dimension m; $I =]t_0, t_1[$ un intervalle réel ouvert (le temps, $t_0, t_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$); et on appel:

$$\begin{array}{llrcl} \text{“Lagrangien” :} & L : & I \times \mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ & & (t,x,v) & \mapsto & L(t,x,v) \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{llrcl} \text{“Action” :} & \mathcal{A} : & \mathcal{C}^1(I,\mathcal{M}) & \to & \mathbb{R} \\ & & \gamma & \mapsto & \mathcal{A}[\gamma] := \int_I L\big(t,\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) \end{array} \tag{2}$$

où L est au moins $\mathcal{C}^1$ en x et $\mathcal{C}^2$ en v, et où

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] &= \int_I \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\frac{\mathrm{d}\delta\gamma^i}{\mathrm{d}t} \\ &= \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\delta\gamma^i\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\delta\gamma^i \end{aligned}$$

Principe de Maupertuis (généralisé): On obtient les trajectoires d'une physique classique régie par L en se restreignant à l'ensemble des chemins γ tels que $\forall\delta\gamma \quad \delta\mathcal{A}_\gamma[\delta_\gamma] = 0$. i.e. ce sont les chemins qui extremisent localement l'action (hors cas physique, on parlera donc simplement de “points critiques”).

D'où on dérive le principe d'Hamiltion: $\forall\delta\gamma$ t.q. $\delta\gamma(t_0) = \delta\gamma(t_1) = 0$

$$_{\text{(Maup)}}\ \delta\mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(t,\gamma,\dot\gamma)\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma)} \quad _{\text{(E.-L.)}}$$

où l'équation à droite est appelée “equations d'Euler-Lagrange” (E.-L.) (pour une physique de particules). (Existe aussi en version théorie de champs, cf plus tard).

1.2 1^er^ théorème de Noether, symétries et conservation (cas des particules)

Première difficulté: qu'est-ce qu'une symétrie? Il s'agit, grossièrement d'une action d'un groupe de Lie. (Enfin, d'une algèbre de Lie plutôt...)
Version simple:

METTRE LE DESSIN

$$X = X^0(t,x)\frac{\partial}{\partial t} + X^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad T := X^0$$

[1]BRST: Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora & Igor Tyutin
[2]Igor Batalin & Grigori Vilkovisky

On note $\Delta_X \subset \mathbb{R} \times (I \times \mathcal{M})$ maximal sur lequel le flot est défini.

$$\Phi_X : \begin{cases} \Delta_X & \to & I \times \mathcal{M} \\ (\epsilon, t, x) & \mapsto & \Phi_X(\epsilon, t, x) & = \mathrm{e}^{\epsilon X}(t, x) \end{cases}$$

i.e. $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(\epsilon, t, x) = X(\Phi_X(\epsilon, t, x))$ et $\Phi_X(0, t, x) = (t, x)$
en coord loc, ça donne: $\mathrm{e}^{\epsilon X}(t, x) = \begin{pmatrix} t + \epsilon T(t, x), & x^i + \epsilon X^i(t, x) \end{pmatrix} + o(\epsilon)$
Action sur $\mathcal{C}^1(I', \mathcal{M})$ où I' est un intervalle compacte de I:

$$\begin{aligned} \gamma &\mapsto \gamma_\epsilon \\ [t_0, t_1] &\mapsto [t_0(\epsilon), t_1(\epsilon)] = [t_0 + \epsilon T(t_0, x_0), t_1 + \epsilon T(t_1, x_1)] \quad \text{modulo } \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \gamma_\epsilon^i(\Phi_X^0(\epsilon, t, x) &= \Phi_X^i(\epsilon, t, \gamma(t)) \\ \gamma_\epsilon &= \gamma + \epsilon \delta\gamma + o(\epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma^i + \epsilon \delta\gamma^i)(t + \epsilon T(t, \gamma)) = \gamma^i + \epsilon X^i(t, \gamma) + o(\epsilon) &\iff \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} T + \delta\gamma^i = X^i \\ &\iff \boxed{\delta\gamma^i = X^i(t, \gamma) - T(t, \gamma)\dot{\gamma}^i} \end{aligned}$$

$$X \text{ symetrie de } L \overset{\text{(def)}}{\iff} \forall [t_0, t_1] \subset I \quad \int_{t_0(\epsilon)}^{t_1(\epsilon)} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma})\mathrm{d}t + (\epsilon)$$

<u>Théorème 1</u>: Si X est une symétrie et si γ est un point critique alors

$$Q_X(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) X^i(t, \gamma) - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma}^i - L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) T(t, \gamma)$$

est conservé (i.e. $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$).

<u>Remarque</u>: $Q_X = \frac{\partial L}{\partial v^i} + LT$

Preuve du théorème: $\forall \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M})$

$$\begin{aligned} \text{1) hypothese de symetrie} &\iff \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) + \epsilon [LT]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\dot{\gamma}^i \right) + o(\epsilon) \\ &\iff \int_{t_0}^{t_1} \delta_X L(t, \gamma, \dot{\gamma})\mathrm{d}t := \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v_i}\delta\dot{\gamma}^i + \frac{\mathrm{d}(LT)}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

où $\delta_X L : I \times T\mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Bref, "symétrie $\implies \delta_X L = 0$".

<u>Exo</u>: construire $\delta_X L$ et montrer que ça marche...

2) Montrons que Q constant si (et seulement si) γ est un point critique.

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}))$$

D'où EL $\iff \frac{\delta L}{\delta\gamma^i} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{\delta L}{\delta \gamma^i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial v^i}) \\
\frac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\gamma^i + LT) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial v^i})\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\dot{\gamma}^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LT) \\
&= \frac{\partial L}{\partial x^i}\delta^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\dot{\gamma} + \frac{\mathrm{d}(LT)}{\mathrm{d}t} - \underbrace{\cancel{\frac{\delta L}{\delta \gamma^i}\delta\gamma^i}}_{=0 \text{ par (E.-L.)}} \\
&= 0 \quad \text{par symetrie}
\end{aligned}$$

Variante: Si $\exists f : I \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ t.q. $\delta_X L(t,\gamma,\dot{\gamma}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,x)$ "symétrie modulo un terme exacte" (def) alors la quantité conservée est $(Q_X - f)$.

Même si on va aller plus loin dans les théorèmes de Noether plus tard, une bonne référence (historique) est *Les Théorèmes de Noether: Invariance et lois de conservation au XXe siècle* par Yvette Kosmann-Schwarzbach, éditions de l'école Polytechnique, ISBN: 978-2730211383.

1.3 Formalisme Hamiltonien

L'idée est de faire un changement de variable de $T\mathcal{M}$ vers $T^*\mathcal{M}$... Commençons par définir un variété symplectique.
Définition: (variété symplectique)
Un var symplectique $\mathcal{M}$ est une variété munie d'une 2-forme ω, $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ telle que:

- ω non dégénérée i.e. $\forall \xi \in T\mathcal{M}, \quad \xi \lrcorner \omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi = 0$
  $\xi \lrcorner \omega := \omega(\xi, \cdot)$ (également noté, $\iota_\xi \omega$ dans d'autres ressources)
- $\mathrm{d}\omega = 0$ "forme fermée"

Dans des coordonnées locales, $\omega = \sum_{1 \leq a_1 < a_2 \leq n} \omega_{a_1 a_2} \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \mathrm{d}x^{a_2}$, et les hypothèses reviennent à dire que le rang de la matrice $(w_{a_1 a_2})$ est maximal, d'où dim$\mathcal{M}$ paire.

Théorème de Darboux:
Dans toute variété symplectique, tout point admet une carte (et un jeu de coordonnées $(p_i)\smile(q^i)$ sur cet ouvert) dans laquelle $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$.

Constructions ultra classiques de var symplectiques:
a) $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on peut donc définir ω comme dans le théorème de Darboux sur tout $\mathbb{R}^{2n}$.
b) Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension n,

$$\exists!\ \pi : \begin{cases} (T^*\mathcal{M}) & \to & \mathcal{M} \\ (q,p) & \mapsto & q \end{cases}$$

Soit ceπ et soit $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$ tel que,

$$\forall \xi \in T_{(p,q)}(T^*\mathcal{M}), \quad \theta_{(q,p)}(\xi) = \langle \underbrace{p}_{\in T_q^*\mathcal{M}}, \underbrace{\mathrm{d}\pi_{(q,p)}\xi}_{\in T_q\mathcal{M}} \rangle$$

En coordonnées locales, (q^i) sur $\mathbb{M}$ et (p_i) sur $T_q^*\mathcal{M}$ avec $p := p_i \mathrm{d}q^i$, on obtient $\theta = p_i \mathrm{d}\left(q^i \circ \pi\right)$ où $(p_i)\smile(q^i)$ sont des coordonnées locales sur $T^*\mathcal{M}$. On notera tout simplement $\theta = p_i \mathrm{d}q^i$ avec $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$ ce qui est un abus de notation conséquent (notamment puisque rentrant violemment en conflit avec la définition de p). Bref, il faut ouvrir l'œil au contexte.

Il suffit alors de prendre $\omega := \mathrm{d}\theta$ forme symplectique, pour avoir $(T^*\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique.

Lien entre Lagrangien et géométrie symplectique (eq° de Hamilton)

$$L : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x,v) & \rightarrow & L(t,x,v) \end{cases}$$

FAIRE LE DIAGRAMME

$(\mathrm{d}q^i)$ Base de $T_q^*\mathcal{M}$, $p \in T_q^*\mathcal{M} \implies p = p_i \mathrm{d}q^i$

d'où (p_i, q^i) coord sur $T^*\mathcal{M}$; enfin, en fait c'est $q^i \circ \pi$ mais bon, c'est l'abus de notation de tout à l'heure.

$$\theta = p_i \mathrm{d}q^i$$

Tranformation de Legendre

$$\forall (t,q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M} \mathrm{d}(L|_{\{t\} \times T_q\mathcal{M}}) =: \frac{\partial L}{\partial v}(t,q,v)$$

en coord loc, $v = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in T_q\mathcal{M}$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v^i} \mathrm{d}v^i$$

Hypothèse de Legendre:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ (t,q,v) &\mapsto (t,q,\frac{\partial L}{\partial v}(t,q,v)) \qquad \text{est un diffeo} \end{aligned}$$

Exemple: $L = \frac{m|v|^2}{2} - V(q)$

Def Hamiltionen

$$H : \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(H \circ \mathbb{L})(t,q,v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,q,v)v^i - L(t,q,v)$$
$$\iff \text{(implicit)} \quad \mathbb{L}^{-1} : (t,q,p) \rightarrow (t,q,v(t,q,p))$$
$$\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,q,v(t,q,p)) =: p_i$$
$$H(t,q,p) = p_i v^i(t,q,p) - L(t,q,v(t,q,p))$$

1.4 retours sur Noether

$T\frac{\partial}{\partial t} + X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ sur $\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ est une symétrie de L.

$\implies Q = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)X^i(t,\gamma) - (\frac{\partial L}{\partial v^i}\dot\gamma^i - L(t,\gamma,\dot\gamma))$ est conservé si γ est solution.

$$Q = (p_i\circ\mathbb{L})X^i - (H\circ\mathbb{L})T$$

METTRE LES SOUSTITRES

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= v^i\mathrm{d}p_i + \cancel{p_i\mathrm{d}v^i} - \frac{\partial L}{\partial t}(t,q,v)\mathrm{d}t - \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q^i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,q,v(t,q,p)\mathrm{d}(v^i)}\\ &= v^i\mathrm{d}p_i - (\frac{\partial L}{\partial t}\circ\mathbb{L}^{-1})\mathrm{d}t - (\frac{\partial L}{\partial q^i}\circ\mathbb{L}^{-1})\mathrm{d}q^i\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\circ\mathbb{L} \tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial x^i}\circ\mathbb{L} \tag{4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v^i \tag{5}$$

d'où $\forall\gamma:\mathbb{R}\to\mathcal{M}$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial v}(t,\gamma,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t})$$

Lemme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(t,\gamma,\dot\gamma)\quad\text{(EL)}\qquad\iff\qquad\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t,\gamma,\pi)\quad\text{(Hq)}\\ \frac{\mathrm{d}\pi_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}(t,\gamma,\pi)\quad\text{(Hp)}\end{aligned}$$

Preuve:

$$Hq \iff (t\gamma,\pi) = \mathbb{L}(t,\gamma,\dot\gamma)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(t,\gamma,\pi) = v^i(t,\gamma,\pi) = \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}$$

par def de v

Alors, $\pi_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}(t,\gamma,\dot\gamma)$

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v_i}) = (EL)\frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Notation:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}\end{aligned}$$

1.5 Formulation Géométrique

$t \mapsto (\gamma(t), \pi(t)) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, T^*\mathcal{M})$ est solution de Hamiltion

$$\iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma^i, \pi_i) = (\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i})(\gamma, \pi)$$

ADD COMMENTS

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$
$$\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$$

$$\begin{aligned}
X_H \lrcorner \omega &= (\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}) \lrcorner \mathrm{d}p_j \mathrm{d}q^j \\
&= \frac{\partial H}{\partial p_i}(-\delta^{ij}\mathrm{d}p_j) - \frac{\partial H}{\partial q^i}(\delta_{ij}\mathrm{d}q^j) \\
&= -(\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i) \\
&= \frac{\partial H}{\partial t} - \mathrm{d}H
\end{aligned}$$

bref:

$$\boxed{X_H \lrcorner \omega + \mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t}$$

Artifice: $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M}) \supset (\mathbb{R} \times \{0\}) \times T^*\mathcal{M} \approx \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M}$

On pose alors $q^0 = t$ et sur $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$ on étends $\tilde{\omega} := \mathrm{d}p_0 \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$ d'où

$$X_{\tilde{H}} \lrcorner \tilde{\omega} + \mathrm{d}\tilde{H} = 0$$

et donc on s'intéresse uniquement à l'hyper-surface $p^0 = H$.

1.6 Théorème de Noether généraux

Lagrangien d'ordre quelquonque r, i.e. $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x} \,...\, x^{(r)})$. On travaille sur des champs $u : U \to \mathcal{M}$ où $U = \mathbb{R}$ dans le cas particules.

Jets:

Si $\mathcal{M}$ est varr de dim k et U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{j}^r u(x) := (x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x), \,...\, \partial^r u(x)$$

où $\partial^i := \frac{\partial}{\partial^{\mu_1} ... \partial^{\mu_r}} =: \partial_{\mu_1 ... \mu_r}$ Cas général pour des variétés quelconques:

$\mathrm{j}^0(U, \mathcal{M}) = U \times \mathcal{M}$
$\mathrm{j}^1(U, \mathcal{M}) = \{(x, y, E), (x, y) \in U \times \mathcal{M}, E \text{ sev de } T_{(x,y)}(U \times \mathcal{M}) | \mathrm{dim}E = \mathrm{dim}U \ \mathrm{d}(\pi_{U \times \mathcal{M} \to U})_{(x,y)} : T_{(x,y)}(U \times \mathcal{M}$
$\mathrm{j}^r(U, \mathcal{M}) = \mathrm{j}^1(U, j^{r-1}(U, \mathcal{M}))$

Coord locale sur les jets

$$v^i_{\mu_1 ... \mu_j} \qquad \text{t.q.} \qquad v^i_{\mu_1 ... \mu_j}(j^r u(x)) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{\mu_1} ... \partial x^{\mu_j}}$$

Lagrangien général d'ordre r sur "$U \to \mathcal{M}$":

$$L : j^r(U, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[u] = \int_U L(j^r u(x)) \mathrm{d}^n x$$

Symétrie infinitésimale $u \mapsto u + \epsilon \delta u + o(\epsilon)$ infinitesimales, générés par un champ de veteurs Z sur $U \times \mathcal{M}$.

Ou plutôt, pour être précis, un champ $Z : j^r(u) \to T(U \times \mathcal{M})$.

$$Z = X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$$

$$\delta u^i = Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} X^\mu$$

Thm1: Si L est invariant par $X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$ et si u est un point critique de $\mathcal{L}$ alors il lui correspond $J^\mu \partial_\mu$ définit sur U tel que $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

Ex: $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}[u] = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} \mathrm{d}x$ (action de Dirichlet)

$\mathcal{L}[u + \epsilon \varphi] = \int_\omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \epsilon < \nabla u, \nabla \varphi > + \epsilon^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{2}$ (φ supposé à support compacte.)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_u[\varphi] &= \int_\Omega < \nabla u, \nabla \varphi > \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (\mathrm{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u) \mathrm{d}x \\ &= - \int \varphi \Delta u \end{aligned}$$

Symétrie par translation $u \mapsto u \circ \tau_\epsilon =: u_\epsilon$; $\tau_\epsilon(x) := x - \epsilon v$.

$u_\epsilon(x) = u(x - \epsilon v) \approx u(x) - \epsilon v^i \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) + o(\epsilon)$

$\delta u = -v^i \frac{\partial u}{\partial x^i}$

Noether: Si $\delta u = 0$,

$$\frac{\partial L}{\partial v_\mu}(x, u, \mathrm{d}u) \frac{\partial u}{\partial x^\nu} - (L(x, u, \mathrm{d}x) \delta^\nu_\mu) v^\mu = J^\nu$$

alors $\frac{\partial J^\nu}{\partial x^\nu} = 0$

(le prof est pas giga sur de la formule pour J, voir la démo qui suit)

Cas particulier: $r = 1$, i.e. $L(x, u, \partial u)$, $X^\mu(x, u), Y^i(x, u)$

$$J^\mu = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, u, \partial u) Y^i - (\frac{\partial L}{\partial v^i_\mu} \frac{\partial u^i}{\partial x^\nu} - L \delta^\mu_\nu) X^\nu$$

et EL $\implies \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$