Objectif: Atteindre les théories BRST[1] et BV[2], théories physiques dévellopées pour quantifier les théories de jauge, tout particulièrement les Yang-Mills mais aussi d'autres.

1 Calcul des variations

1.1 Rappels de base de physique des particules classiques (en formalisme Lagrangien)

On considère une particule (classique) dans une variété $\mathcal{M}$ de dimension m; $I =]t_0, t_1[$ un intervalle réel ouvert (le temps, $t_0, t_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$); et on appel:

$$\begin{array}{llrcl} \text{“Lagrangien” :} & L: & I \times \mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ & & (t, x, v) & \mapsto & L(t, x, v) \\ \text{“Action” :} & \mathcal{A}: & \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}) & \to & \mathbb{R} \\ & & \gamma & \mapsto & \mathcal{A}[\gamma] := \int_I L\big(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) \end{array}$$

où L est au moins $\mathcal{C}^1$ en x et $\mathcal{C}^2$ en v, et où

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] &= \int_I \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})\frac{\mathrm{d}\delta\gamma^i}{\mathrm{d}t} \\ &= \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})\delta\gamma^i\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\delta\gamma^i \end{aligned}$$

Principe de Maupertuis (généralisé): On obtient les trajectoires d'une physique classique régie par L en se restreignant à l'ensemble des chemins γ tels que $\forall\delta\gamma \quad \delta\mathcal{A}_\gamma[\delta_\gamma] = 0$. i.e. ce sont les chemins qui extremisent localement l'action (hors cas physique, on parlera donc simplement de “points critiques”).

D'où on dérive le principe d'Hamiltion: $\forall\delta\gamma$ t.q. $\delta\gamma(t_0) = \delta\gamma(t_1) = 0$

$$\text{(Maup)}\ \delta\mathcal{A}_\gamma[\delta\gamma] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(t, \gamma, \dot{\gamma})\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})} \quad \text{(E.-L.)}$$

où l'équation à droite est appelée “equations d'Euler-Lagrange” (E.-L.) (pour une physique de particules). (Existe aussi en version théorie de champs, cf plus tard).

1.2 1er théorème de Noether, symétries et conservation (cas des particules)

Première difficulté: qu'est-ce qu'une symétrie? Il s'agit, grossièrement d'une action d'un groupe de Lie. (Enfin, d'une algèbre de Lie plutôt...)
Version simple:

METTRE LE DESSIN

$$X = X^0(t, x)\frac{\partial}{\partial t} + X^i(t, x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad T := X^0$$

[1]BRST: Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora & Igor Tyutin
[2]Igor Batalin & Grigori Vilkovisky

On note $\Delta_X \subset \mathbb{R} \times (I \times \mathcal{M})$ maximal sur lequel le flot est défini.

$$\Phi_X : \begin{cases} \Delta_X & \to & I \times \mathcal{M} \\ (\epsilon, t, x) & \mapsto & \Phi_X(\epsilon, t, x) & = \mathrm{e}^{\epsilon X}(t, x) \end{cases}$$

i.e. $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(\epsilon, t, x) = X(\Phi_X(\epsilon, t, x))$ et $\Phi_X(0, t, x) = (t, x)$
en coord loc, ça donne: $\mathrm{e}^{\epsilon X}(t, x) = \begin{pmatrix} t + \epsilon T(t, x), & x^i + \epsilon X^i(t, x) \end{pmatrix} + o(\epsilon)$
Action sur $\mathcal{C}^1(I', \mathcal{M})$ où I' est un intervalle compacte de I:

$$\begin{aligned} \gamma &\mapsto \gamma_\epsilon \\ [t_0, t_1] &\mapsto [t_0(\epsilon), t_1(\epsilon)] = [t_0 + \epsilon T(t_0, x_0), t_1 + \epsilon T(t_1, x_1)] \quad \text{modulo } \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \gamma_\epsilon^i(\Phi_X^0(\epsilon, t, x) &= \Phi_X^i(\epsilon, t, \gamma(t)) \\ \gamma_\epsilon &= \gamma + \epsilon \delta\gamma + o(\epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma^i + \epsilon\delta\gamma^i)(t + \epsilon T(t, \gamma)) = \gamma^i + \epsilon X^i(t, \gamma) + o(\epsilon) &\iff \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} T + \delta\gamma^i = X^i \\ &\iff \boxed{\delta\gamma^i = X^i(t, \gamma) - T(t, \gamma)\dot{\gamma}^i} \end{aligned}$$

$$X \text{ symetrie de } L \overset{\text{(def)}}{\iff} \forall [t_0, t_1] \subset I \quad \int_{t_0(\epsilon)}^{t_1(\epsilon)} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \mathrm{d}t + (\epsilon)$$

<u>Théorème 1</u>: Si X est une symétrie et si γ est un point critique alors

$$Q_X(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) X^i(t, \gamma) - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma}^i - L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right) T(t, \gamma)$$

est conservé (i.e. $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$).

<u>Remarque</u>: $Q_X = \frac{\partial L}{\partial v^i} + LT$

Preuve du théorème: $\forall \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M})$

$$\begin{aligned} \text{1) hypothese de symetrie} &\iff \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma_\epsilon, \dot{\gamma}_\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma, \dot{\gamma}) + \epsilon [LT]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\dot{\gamma}^i \right) + o(\epsilon) \\ &\iff \int_{t_0}^{t_1} \delta_X L(t, \gamma, \dot{\gamma}) \mathrm{d}t := \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v_i}\delta\dot{\gamma}^i + \frac{\mathrm{d}(LT)}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

où $\delta_X L : I \times T\mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Bref, "symétrie $\implies \delta_X L = 0$".

<u>Exo</u>: construire $\delta_X L$ et montrer que ça marche...

2) Montrons que Q constant si (et seulement si) γ est un point critique.

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \dot{\gamma})\right)$$

D'où EL $\iff \frac{\delta L}{\delta\gamma^i} = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{\delta L}{\delta\gamma^i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) \\
\frac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\gamma^i + LT\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\dot{\gamma}^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LT) \\
&= \frac{\partial L}{\partial x^i}\delta^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\dot{\gamma} + \frac{\mathrm{d}(LT)}{\mathrm{d}t} - \underbrace{\cancel{\frac{\delta L}{\delta\gamma^i}\delta\gamma^i}}_{=0 \text{ par (E.-L.)}} \\
&= 0 \quad \text{par symetrie}
\end{aligned}
$$

Variante: Si $\exists f : I \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ t.q. $\delta_X L(t,\gamma,\dot{\gamma}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(t,x)$ "symétrie modulo un terme exacte" (def) alors la quantité conservée est $(Q_X - f)$.

Même si on va aller plus loin dans les théorèmes de Noether plus tard, une bonne référence (historique) est *Les Théorèmes de Noether: Invariance et lois de conservation au XXe siècle* par Yvette Kosmann-Schwarzbach, éditions de l'école Polytechnique, ISBN: 978-2730211383.

1.3 Formalisme Hamiltonien

L'idée est de faire un changement de variable de $T\mathcal{M}$ vers $T^*\mathcal{M}$... Commençons par définir un variété symplectique.
Définition: (variété symplectique)
Un var symplectique $\mathcal{M}$ est une variété munie d'une 2-forme ω, $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ telle que:

- ω non dégénérée i.e. $\forall \xi \in T\mathcal{M}, \quad \xi \lrcorner \omega = 0 \implies \xi = 0$
  $\xi \lrcorner \omega := \omega(\xi, \cdot)$ (également noté, $\iota_\xi\omega$ dans d'autres ressources)
- $\mathrm{d}\omega = 0$ "forme fermée"

Dans des coordonnées locales, $\omega = \sum_{1 \le a_1 < a_2 \le n} \omega_{a_1 a_2} \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \mathrm{d}x^{a_2}$, et les hypothèses reviennent à dire que le rang de la matrice $(w_{a_1 a_2})$ est maximal, d'où dim$\mathcal{M}$ paire.

Théorème de Darboux:
Dans toute variété symplectique, tout point admet une carte (et un jeu de coordonnées $(p_i)\smile(q^i)$ sur cet ouvert) dans laquelle $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$.

Constructions ultra classiques de var symplectiques:
a) $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on peut donc définir ω comme dans le théorème de Darboux sur tout $\mathbb{R}^{2n}$.
b) Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension n,

$$\exists!\ \pi : \begin{cases} (T^*\mathcal{M}) & \to & \mathcal{M} \\ (q,p) & \mapsto & q \end{cases}$$

Soit ceπ et soit $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$ tel que,

$$\forall \xi \in T_{(p,q)}(T^*\mathcal{M}), \quad \theta_{(q,p)}(\xi) = \langle \underset{\in T_q^*\mathcal{M}}{p}, \underset{\in T_q\mathcal{M}}{\mathrm{d}\pi_{(q,p)}\xi} \rangle$$

En coordonnées locales, (q^i) sur $\mathbb{M}$ et (p_i) sur $T_q^*\mathcal{M}$ avec $p := p_i \mathrm{d}q^i$, on obtient $\theta = p_i \mathrm{d}\left(q^i \circ \pi\right)$ où $(p_i) \smile (q^i)$ sont des coordonnées locales sur $T^*\mathcal{M}$. On notera tout simplement $\theta = p_i \mathrm{d}q^i$ avec $\theta \in \Omega^1(T^*\mathcal{M})$ ce qui est un abus de notation conséquent (notamment puisque rentrant violemment en conflit avec la définition de p). Bref, il faut ouvrir l'œil au contexte.

Il suffit alors de prendre $\omega := \mathrm{d}\theta$ forme symplectique, pour avoir $(T^*\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique.

Lien entre Lagrangien et géométrie symplectique (eq° de Hamilton)

L'objectif est d'effectuer une transformation de la forme:

$$L : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ (t, x, v) & \to & L(t, x, v) \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ (t, q, p) & \to & H(t, q, p) \end{cases}$$

Si $(\mathrm{d}q^i)$ est une base de $T_q^*\mathcal{M}$, $p \in T_q^*\mathcal{M} \implies p = p_i \mathrm{d}q^i$, d'où (p_i, q^i) est un système de coordonnées sur $T^*\mathcal{M}$; enfin, en fait c'est $q^i \circ \pi$ à la place de q^i mais bon, c'est l'abus de notation de tout à l'heure. On pose:

$$\theta = p_i \mathrm{d}q^i$$

Transformation de Legendre:

$$\forall (t, q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M} \qquad \mathrm{d}\left(L_{|\{t\} \times T_q\mathcal{M}}\right) =: \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)$$

en coordonnés locales, $v = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in T_q\mathcal{M}$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v^i} \mathrm{d}v^i$$

Hypothèse de Legendre:

$$\mathbb{L} : \begin{cases} \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ (t, q, v) & \mapsto & (t, q, \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)) \end{cases} \quad \text{est un diffeo}$$

Exemple: $L = \frac{m|v|^2}{2} - V(q)$

Définition: (Hamiltonien)

$$H : \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \to \mathbb{R}$$
$$(H \circ \mathbb{L})(t, q, v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v) v^i - L(t, q, v)$$
$$\iff \text{(implicit)} \quad \mathbb{L}^{-1} : (t, q, p) \to (t, q, v(t, q, p))$$
$$\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, q, v(t, q, p)) =: p_i$$
$$H(t, q, p) = p_i v^i(t, q, p) - L(t, q, v(t, q, p))$$

1.4 retours sur Noether

$T\frac{\partial}{\partial t} + X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ sur $\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ est une symétrie de L.

$\implies Q = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)X^i(t,\gamma) - (\frac{\partial L}{\partial v^i}\dot\gamma^i - L(t,\gamma,\dot\gamma))$ est conservé si γ est solution.

$$Q = \underset{\text{“moment”}}{(p_i\circ\mathbb{L})}\,X^i - \underset{\text{“energie”}}{(H\circ\mathbb{L})}T$$

METTRE LES SOUSTITRES

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= v^i\mathrm{d}p_i + \cancel{p_i\mathrm{d}v^i} - \frac{\partial L}{\partial t}(t,q,v)\mathrm{d}t - \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q^i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,q,v(t,q,p)\mathrm{d}(v^i)}\\ &= v^i\mathrm{d}p_i - (\frac{\partial L}{\partial t}\circ\mathbb{L}^{-1})\mathrm{d}t - (\frac{\partial L}{\partial q^i}\circ\mathbb{L}^{-1})\mathrm{d}q^i\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}\circ\mathbb{L}\\ \frac{\partial H}{\partial q^i} &= -\frac{\partial L}{\partial x^i}\circ\mathbb{L}\\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= v^i\end{aligned}$$

d'où $\forall\gamma:\mathbb{R}\to\mathcal{M}$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial v}(t,\gamma,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t})$$

<u>Lemme</u>: (transition Lagrangien-Hamiltonien)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(t,\gamma,\dot\gamma)\quad\text{(EL)}\qquad\iff\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(t,\gamma,\pi) & \text{(Hq)}\\ \dfrac{\mathrm{d}\pi_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}(t,\gamma,\pi) & \text{(Hp)}\end{cases}$$

Preuve:

$$Hq \iff (t\gamma,\pi) = \mathbb{L}(t,\gamma,\dot\gamma)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(t,\gamma,\pi) = v^i(t,\gamma,\pi) = \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}$$

par def de v.

Alors, $\pi_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}(t,\gamma,\dot\gamma)$

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v_i}) = (EL)\frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Notation:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} &= \ \frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}\end{aligned}$$

1.5 Formulation Géométrique

$t \mapsto (\gamma(t), \pi(t)) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, T^*\mathcal{M})$ est solution de Hamiltion

$$\iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma^i, \pi_i) = (\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i})(\gamma, \pi)$$

champ de vecteurs non-autonome (i.e. indépendant de t) tangent à $T^*\mathcal{M}$.

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$$

$$\begin{aligned} X_H \lrcorner \omega &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \lrcorner \mathrm{d}p_j \mathrm{d}q^j \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(-\delta^{ij}\mathrm{d}p_j) - \frac{\partial H}{\partial q^i}(\delta_{ij}\mathrm{d}q^j) \\ &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i\right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - \mathrm{d}H \end{aligned}$$

bref:

$$\boxed{X_H \lrcorner \omega + \mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t}$$

Artifice: $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M}) \supset (\mathbb{R} \times \{0\}) \times T^*\mathcal{M} \approx \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M}$
On pose alors $q^0 = t$ et sur $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$ on étends $\tilde{\omega} := \mathrm{d}p_0 \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$ d'où

$$X_{\tilde{H}} \lrcorner \tilde{\omega} + \mathrm{d}\tilde{H} = 0$$

et donc on s'intéresse uniquement à l'hyper-surface $p^0 = H$.

2 Théorèmes de Noether généraux

2.1 Théorème 1

Lagrangien d'ordre quelconque r, i.e. $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x} \dots x^{(r)})$. On travaille sur des champs $u : U \to \mathcal{M}$ où $U = \mathbb{R}$ dans le cas particules, mais sinon peut-être n'importe quoi (ligne d'univers d'une particule dans l'espace-temps, champ classique, ou des produits de ça...).
Définition: (Jets)
Si $\mathcal{M}$ est varr de dim k et U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{j}^r u(x) := (x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x), \dots \partial^r u(x)$$

où $\partial^i := \frac{\partial}{\partial^{\mu_1} \dots \partial^{\mu_r}} =: \partial_{\mu_1 \dots \mu_r}$ Cas général pour des variétés quelconques:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{j}^0(U,\mathcal{M}) = U\times\mathcal{M}\\
&\mathrm{j}^1(U,\mathcal{M}) = \{(x,y,E),\quad (x,y)\in U\times\mathcal{M}, E \text{ sev de } T_{(x,y)}(U\times\mathcal{M})\\
&\qquad\qquad\qquad \mid \quad \mathrm{dim}E = \mathrm{dim}U\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{d}(\pi_{U\times\mathcal{M}\to U})_{(x,y)} : T_{(x,y)}(U\times\mathcal{M}) \to T_x\mathcal{M}\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{d}(\pi_{U\times\mathcal{M}\to U})_{x,y)}|_E : E\to T_x\mathcal{U} \qquad\qquad\qquad\qquad \}\\
&\mathrm{j}^r(U,\mathcal{M}) = \mathrm{j}^1(U, j^{r-1}(U,\mathcal{M}))
\end{aligned}
$$

Système de coordonnées locales sur les jets:

$$v^i_{\mu_1\dots\mu_j} \qquad \text{t.q.} \qquad v^i_{\mu_1\dots\mu_j}(j^r u(x)) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{\mu_1}\dots\partial x^{\mu_j}}$$

Lagrangien général d'ordre r sur "$U\to\mathcal{M}$":

$$L : j^r(U,\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[u] = \int_U L(j^r u(x))\mathrm{d}^n x$$

Symétrie infinitésimale $u\mapsto u+\epsilon\delta u + o(\epsilon)$ infinitésimales, générés par un champ de vecteurs Z sur $U\times\mathcal{M}$. Ou plutôt, pour être précis, un champ $Z : j^r(u)\to T(U\times\mathcal{M})$.

$$Z = X^\mu\partial_\mu + Y^i\partial_i$$

$$\delta u^i = Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu}X^\mu$$

<u>Théorème de Noether 1</u>: (Forme la plus générale)

Si L est invariant par $X^\mu\partial_\mu + Y^i\partial_i$ et si u est un point critique de $\mathcal{L}$ alors il lui correspond $J^\mu\partial_\mu$ définit sur U tel que $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

Ex: $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\qquad \Omega\subset\mathbb{R}^n$ $\qquad \mathcal{L}[u] = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2}\mathrm{d}x$ (action de Dirichlet)
$\mathcal{L}[u+\epsilon\varphi] = \int_\omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \epsilon\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle + \epsilon^2\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}$ (φ supposé à support compacte.)

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_u[\varphi] &= \int_\Omega \langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega \big(\mathrm{div}(\varphi\nabla u) - \varphi\Delta u\big)\mathrm{d}x\\
&= -\int \varphi\Delta u
\end{aligned}
$$

Symétrie par translation $u\mapsto u\circ\tau_\epsilon =: u_\epsilon$; $\tau_\epsilon(x) := x-\epsilon v$.
$u_\epsilon(x) = u(x-\epsilon v) \approx u(x) - \epsilon v^i\frac{\partial u}{\partial x^i}(x) + o(\epsilon)$
$\delta u = -v^i\frac{\partial u}{\partial x^i}$
Noether: Si $\delta u = 0$,

$$\frac{\partial L}{\partial v_\mu}(x,u,\mathrm{d}u)\frac{\partial u}{\partial x^\nu} - (L(x,u,\mathrm{d}x)\delta^\nu_\mu)v^\mu = J^\nu$$

alors $\frac{\partial J^\nu}{\partial x^\nu} = 0$
(le prof est pas totalement sûr de la formule pour J, voir la démo qui suit)
Cas particulier: $r = 1$, i.e. $L(x, u, \partial u)$, $X^\mu(x, u), Y^i(x, u)$

$$J^\mu = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, u, \partial u) Y^i - \left(\frac{\partial L}{\partial v^i_\mu} \frac{\partial u^i}{\partial x^\nu} - L \delta^\mu_\nu \right) X^\nu$$

et EL $\implies \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$
Démonstration: (cas général)
$X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i$ agissant sur (U, u).
$U \mapsto U_\epsilon = \varphi_\epsilon(U)$.
$\varphi_\epsilon := x + \epsilon X + o(\epsilon)$. $u \mapsto u_\epsilon = u + \epsilon \delta u + o(\epsilon)$.

$$\delta u^i := Y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} X^\mu$$

Symétrie $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\quad \forall U \forall u \quad \mathcal{L}_{U_\epsilon}[e_\epsilon] = \mathcal{L} + o(\epsilon)$
Petit lemme de calcul (m multi-indice):

$$0 = \int_U \left[\sum_{|m|<r} \frac{\partial L}{\partial v^i_m} \big(\mathrm{j}^r(u)\big) \frac{\partial^m \delta u^i}{\partial x^m} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \big(L(\mathrm{j}^r(u) X^\mu) \big) \right] \mathrm{d}^n x$$

autre petit lemme:
$\rho(\epsilon, x) := L\big(\mathrm{j}^r u_\epsilon(x)\big)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left(\int_{\varphi_\epsilon(U)} \rho(\epsilon, x) \mathrm{d}x \right)\Bigg|_{\epsilon=0} = \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon}(0, x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \big(X^\mu \rho(0, x) \big)$$

et un dernier lemme:
Soit $A^{\mu_1 \dots \mu_p}$ un tenseur symétrique, et g une fonction sur Ω. $(1 \leq p \leq r)$

$$A^{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_p}} = (-1)^p g \frac{\partial A^{\mu_1 \dots \mu_p}}{\partial x^{\mu_1} \dots \partial x^{\mu_p}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \left(A^{\mu_1 \dots \mu_p} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2 \dots \mu_p} g \right)$$

où

$$\begin{aligned} f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_2 \dots \mu_p} g := & f \partial_{\mu_2 \dots \mu_p} g \\ & - \partial_{\mu_2} f \partial_{\mu_3 \dots \mu_p} g \\ & + \dots \\ & + (-1)^p (\partial_{\mu_2 \dots \mu_p} f) g \end{aligned}$$

Tous ces lemmes se prouvent par du calcul un peu bourrin.
Ainsi, la condition de symétrie devient, via $A^m = \frac{\partial L}{\partial v^i_m}(\mathrm{j}^r(u)$ et $g = \delta u^i$:

$$\text{Symetrie} \iff \int_U \sum_{|m|<r} (-1)^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i_m} (\mathrm{j}^r(u)) \right) \delta u^i + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sum_{|m| \leq r} \frac{\partial L}{\partial v^i_m} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m \backslash \mu} \delta u^i + X^\mu L \right) = 0$$

Posant : $$(\mathrm{EL})(u) := \sum_{|m|\leq r} (-1)^{|m|} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i_m} (\mathrm{j}^r(u)) \right)$$

et $$J^\mu := L X^\mu + \sum_{|m|\leq r} \frac{\partial L}{\partial v^i_m} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m\backslash\mu} \delta u^i$$

On a bien

$$X^\mu \partial_\mu + Y^i \partial_i \quad \text{Symetrie} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_\mu J^\mu = 0$$

2.2 Théorème 2

Hypothèse: il existe $X^{a,m,\mu}$ et $Y^{a,m,i}$ sur les jets tel que pour toute famille $(f_a)_{1\leq a\leq A}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (ou $\mathcal{C}^{\dim \mathcal{M}}$) sur $\Omega \supset U$ on ait une (famille de) symétrie(s) via:

$$\begin{aligned} X^\mu &= \sum_a \sum_{|m|\leq r} X^{a,m,\mu}(\mathrm{j}^r(u)) \frac{\partial f_a}{\partial x^m} \\ Y^i &= \sum_a \sum_{|m|\leq r} Y^{a,m,i}(\mathrm{j}^r(u)) \frac{\partial f_a}{\partial x^m} \end{aligned}$$

Théorème de Noether 2: (Cas des symétries de dimension infinie)
Si l'hypothèse ci-dessus est vérifiée, il y a dégénérescence de l'équation d'Euler-Lagrange.

Démonstration:

$$\begin{aligned} \delta u^i &:= Y^i - \partial_\mu u^i X^\mu \\ &= \sum_{|m|\leq r} \delta r^{r,i} \partial_m f_a \end{aligned}$$

$$\text{Symetrie} \qquad \Longleftrightarrow \quad \int_U (\mathrm{EL})(u)_i \delta u^i + \partial_\mu \left(\sum_{|m|\leq 2r-1} K^{a,\mu} \partial_m f_a \right)$$

a) on prend $\mathrm{j}^{2r-1} f_a | \partial u = 0$, d'où $\int_U (\mathrm{EL})(u) \delta u^i = 0$
b) $(\mathrm{EL})(u)_i = \sum_m (-1)^r \partial_\mu (\frac{\partial L}{\partial v^i_m})$

$$(\mathrm{EL})(u)_i \delta u^i \quad = \quad (\mathrm{EL})(u)_i \sum_{|m|\leq r} \delta u^{m,i} \partial_m f_a \quad + \quad \partial_\mu \left(\sum_{|m|\leq r} (\mathrm{EL}) \delta u^{m,a} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{m\backslash\mu} f_a \right)$$

Conclusion: $\forall f_a : \mathrm{j}^{2r-1} f_{a|\partial u} = 0$

$$\int \sum_{|m|\leq r} (-1)^{|m|} \partial_m \left[(\mathrm{EL})(u)_i (Y^{m,a} - \frac{\partial u}{\partial x^\nu} X^{m,a,\nu} \right] f_a = 0$$

Exemple: Électromagnétisme

Rappel: Étoile de Hodge $* : \Omega^p(\mathcal{M}) \to \Omega^{n-p}(\mathcal{M})$ pour passer de J^μ 3-forme à 1-forme...

$$\text{Electromagnetisme} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}F &= 0 \\ \mathrm{d}(*F) &= J \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{A}[A] = \int \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \mathrm{d}^n x$$

$$\text{avec} \quad F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \quad \text{et} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$A \mapsto A + \mathrm{d}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$ groupe de symétrie de Noether. D'où $J := \mathrm{d}(*F) = \mathrm{d}(*\mathrm{d}A)$ est un problème sous-déterminé. Autre exemple: (RG) $\mathcal{A}[g] = \int \mathrm{Ric}_g \mathrm{dvol}_g$
(i.e. $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$) a ses symétries dans l'identité de Bianchi

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0$$

(et en fait, dans tous les difféomorphismes).

3 Mécanique et Géométrie Symplectique

3.1 Vers une approche plus générale

On rappel que:

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbb{L}: & \mathbb{R} \times T\mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \\ & (t,x,v) & \mapsto & \left(t, x, p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)\right) \end{array}$$

Et avec l'hypothèse que $\mathbb{L}$ est un difféo, on construisait:

$$H(t,q,p) := p_i v^i(t,x,p) - L\big(t, x, v(t,x,p)\big)$$

avec $p_i := \frac{\partial L}{\partial v_i}(t,x,v(t,x,p))$.
On obtenait alors les equations:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t,\gamma,\pi) \\ \frac{\mathrm{d}\pi_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}(t,\gamma,\pi) \end{aligned}$$

On obtenait alors un flot sur la variété symplectique $T^*\mathcal{M}$ par

$$X_H : \begin{cases} 0 &= X_H \lrcorner + \mathrm{d}H \\ \omega &= \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i \end{cases}$$

Mais on peut se ramener à des problèmes variationnels, en changeant un peu notre construction: Nous allons maintenant travailler dans $T^*(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$ au lieux de $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{M})$.

$$\mathcal{L}(\gamma,\zeta,\pi) := \int_I \left[L(t,\gamma,\zeta)\cancel{\mathrm{d}t} + \pi \left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} - \zeta^i \right) \right] \mathrm{d}t$$

i.e. on impose $\zeta = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ via les multiplicateurs de Lagrange.

$$\pi \mapsto \pi + \delta\pi \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathcal{L}(\gamma,\zeta,\pi) \mapsto \mathcal{L}(\gamma,\zeta,\pi) + \epsilon \int \delta\pi_i(\dot{\gamma}^i - \zeta^i)\mathrm{d}t$$

$$\forall \delta\pi \qquad \delta\mathcal{L}[\delta\pi] = 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \zeta^i = \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}$$

$$\delta\mathcal{L}[(0,\delta\zeta,0)] = \int_I \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\delta\zeta^i - \pi_i\delta\zeta^i\right)\mathrm{d}t = 0$$

i.e. :

$$\begin{cases} \gamma & \mapsto & \gamma \\ \pi & \mapsto & \pi \\ \zeta & \mapsto & \zeta + \epsilon\delta\zeta \end{cases} \Longleftrightarrow \pi_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

$$\Longleftrightarrow (t,\gamma,\pi) = \mathbb{L}(t,\gamma,\zeta)$$

Alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\gamma,\pi] &= \int_I \big[L\big(t,\gamma,v(t,\gamma,\pi)\big)\big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_I \pi_i\dot\gamma^i - \big(\pi_i v^i(\gamma,\pi) - L\big(t,\gamma,v(t,\gamma,\pi)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_I \pi_i\dot\gamma^i - H(t,\gamma,\pi) \\ A[\pi,\gamma] &= \int_I \left(\pi_i\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} - H(t,\gamma,\pi)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

A pour point critique les solutions de l'équation de Hamilton. (proof left as exo)
On appel cela l'action de Poincaré.

3.2 Trajectoires dans l'espace-temps

On travaille donc dans $T^*(I\times\mathcal{M})$. On a des coordonnées dans $T^*\mathcal{M}$ via (q^i,p_i), et on complète par $q^0 := t$ et p_0 son dual, pour faire (q_μ, p^μ) coordonnées pour $T^*(I\times\mathcal{M})$.

$$\omega = \mathrm{d}p_0\wedge\mathrm{d}q^0 + \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}p^i = \mathrm{d}p_\mu\wedge\mathrm{d}q^\mu$$

$$\mathcal{H}(p_\mu,q^\mu) := p_0 + H(q^0,q^1,p_i)$$

$$\mathcal{H} : T^*(I\times\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$$

On construit également:

$$(\gamma,\pi)\mapsto\Gamma := \left\{\left(t, \quad \gamma^i(t) - H\Big(t,\gamma(t),\pi(t)\Big), \quad \pi(t)\right),\ t\in I\right\} \qquad \subset \mathcal{H}^{-1}(\{0\}) =: \mathcal{N}$$

$$\mathcal{L}[\gamma,\pi] = \int_\Gamma \underbrace{p_\mu\mathrm{d}q^\mu}_{=:\theta}$$

$$\Gamma \quad\subset\quad \mathcal{N} \quad\subset\quad T^*(I\times\mathcal{M})$$

Notons qu'on se rapproche d'une description relativiste du mouvement (même si c'est pas encore tout à fait ça, car Γ est toujours défini à travers notre choix de coordonnés initial dans $\mathcal{M}$). On remplace $I\times\mathcal{M}$ pas une variété $\mathcal{E}$ (idéalement avec une métrique pseudo-Riemannienne, pour

avoir un bon $*$). On a donc $\mathcal{H} : T^*\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ et la dynamique est donnée par $\omega|_{\mathcal{N}}$. Explicitons...
H sur $\mathcal{M}$ symplectique. Via le flot de X_H on a:

$$X_H \lrcorner \omega + \mathrm{d}H = 0$$

$\mathcal{N}$ est une hyper-surface, telle que

$$\mathrm{d}\left(\omega_{|\mathcal{N}}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_{|\mathcal{N}} = \mathrm{i}_{\mathcal{N}}^* \omega$$

Rappel: $\mathrm{d}(\cdot)$ commute avec les pull-backs. $\qquad \mathrm{i}_{\mathcal{N}} \to T^*\mathcal{E}$ Notons que si $\omega_{|\mathcal{N}}$ est bien fermée, elle est par contre dégénéré (ainsi, ce n'est pas une forme symplectique sur $\mathcal{N}$).
ker $\omega_{|\mathcal{N}}$ = droite $\subset T\mathcal{N}$, qui décrit la dynamique.
<u>Lemme</u>:
Soit V un espace vectoriel de dimension finie:

$$V \qquad \supset \qquad W := \ker\left(\alpha_1, \ ...\alpha_k\right) \qquad \alpha_j \in V^*$$

$$\begin{aligned} V^* &\to W^* \\ \beta &\mapsto \beta_{|W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^*/\mathbb{R}(\alpha_i)_{i \in [\![1,k]\!]} &\to W^* \\ \beta \mathrm{mod}[\alpha_1, \ ...\alpha_k] &\mapsto \beta_{|W} \end{aligned} \qquad\qquad \text{est uniso!}$$

Soit $(\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique, $T^*\mathcal{E}$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{N}$, $X \in T_M\mathcal{M}$.

$$X \lrcorner \omega \in T_M^*\mathcal{M} \to X \lrcorner \omega_{|\mathcal{N}} \in T_M^*\mathcal{N}$$

Comme ker $\mathrm{d}\mathcal{H} = T_m\mathcal{N}$

$$\left(X \lrcorner (\omega_{|T_M\mathcal{N}}) = \right) \qquad X \lrcorner \omega_{|T_M\mathcal{N}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \lrcorner \omega \in \mathbb{R}\mathrm{d}\mathcal{H}$$
$$\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad X = X_H \quad \text{avec} \quad X_H \lrcorner \omega + \mathrm{d}\mathcal{H} = 0$$

$$\ker\left(\omega_{|T_M\mathcal{N}}\right) := \left\{X \in T_M\mathcal{N} \quad | \quad X \lrcorner \omega_{|T_M\mathcal{N}} = 0\right\} = \mathbb{R}X_{\mathcal{H}}$$

On dit de $\left(\mathcal{N}, \omega_{|\mathcal{N}}\right)$ que c'est une variété <u>pré-symplectique</u> i.e. munie d'une forme fermée et de dégénérescence pas forcement nulle mais de noyau tangent à la dynamique.

Les courbes dans $\mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(C)$ seront les points critiques de $\int_\Gamma \theta =$?????, courbe tangente à la distribution ker $\omega_{|\mathcal{N}}$.
Autre exemple: (Force de Lorentz)

$$\mathcal{H} = (p_0 - eA_0)^2 - c^2|p_i - eA_i|^2_{\mathbb{R}^3} - (mc^2)^2$$

3.3 Lien avec le premier théorème de Noether

Situation:

$$\gamma : \begin{cases} I & \to & \mathcal{M} \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{cases} \qquad\qquad L[\gamma] = \int_I L(t,\gamma,\dot\gamma)\mathrm{d}t$$

$$X^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i} + T(t,x)\frac{\partial}{\partial t} \quad \in \quad (\underset{t}{T} \times \underset{x}{\mathcal{M}})$$

est une symétrie (modulo $\mathrm{d}f$) de L si

$$T\frac{\partial L}{\partial t}+\left(L - v^i\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i\frac{\partial T}{\partial x^i}\right)+X^iL+\frac{\partial L}{\partial v^i}\left(\frac{\partial x^i}{\partial t} + v^j\frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial t}+v^i\mathrm{d}fx^i \qquad (*)$$

où $f : I\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \iff \quad & \text{Si } \mathcal{H} = p_0 + H(t,q,p) \\ & F = p_0T(q^0,q^i) + p_iX^i(q^\mu) - f(q^\mu) \\ & \quad = \theta(T,X) - f, \qquad\qquad \theta = p_\mu \mathrm{d}q^\mu \end{aligned}$$

Or, si $f,g\in\mathcal{C}^\infty\big(T^*(I\times\mathcal{M})\big)$

$$\{f,g\} := \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial g}{\partial x^\mu} - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu}$$

$$\begin{aligned} (*) \iff & \qquad \{H,F\} =H\{H,T\} \\ \underset{\text{si } \mathcal{N}=\mathcal{H}^{-1}(0)}{\Longrightarrow} & \{H,F\}_{|\mathcal{N}} =0 \end{aligned}$$

<u>Point de vue "Relativiste"</u>:
$\mathcal{E}$ espace-temps,
$\mathcal{H} : T^*\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ fonction "cohérente",
$\mathcal{N} = \mathcal{H}^{-1}(\{0\})$,
une courbe Γ par point critique:

$$\int_{\Gamma\subset\mathcal{N}}\theta \qquad \to \qquad \Gamma \text{ t.q. } \forall X\in T_M\Gamma \quad X\lrcorner(\omega_{|\mathcal{N}}) = 0$$

Si $F = \theta(X) - f = p_\mu X^\mu(q) - f(q)$ où $f\in\mathcal{C}^\infty$, X^μ est une symétrie (modulo $\mathrm{d}f$) lorsque $\{H,F\}_{|\mathcal{N}} = 0$.
<u>Point de vue non-relativiste</u>:
$H : T^*\mathcal{M}\to\mathbb{R}$, H indépendant du temps. $X = X^i(x)\partial_i\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ est une symétrie de $\int_I L(\gamma,\dot\gamma)\mathrm{d}t$ ssi $\{H,p_iX^i(q)\} = 0$.
<u>Généralisation plus générale</u>:sur une variété symplectique quelconque $\mathcal{M}$.

<u>Définition</u>: (crochet de poisson sur une variété symplectique)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\times\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) &\to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (F,G) &\mapsto \{F,G\} := \omega(X_F,X_G) \end{aligned}$$

Remarque, dans un jeu de coordonnées à la Darboux, ça donne:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i}$$

Soit: $(\gamma, \pi) : I \to \mathcal{M}$ t.q.:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(\gamma, \pi)}{\mathrm{d}t} =& X_H(\gamma, \pi) \\
\forall F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}) \frac{\mathrm{d}F(\gamma, \pi)}{\mathrm{d}t} =& \frac{\partial F}{\partial q^i}(\gamma, \pi)\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}\pi_i}{\mathrm{d}t} \\
=& \{F, H\}(\gamma, \pi)
\end{aligned}$$

Notons, au passage, les propriétés triviales:

$$\forall A, B, C \qquad \{A, B\} = -\{B, A,\} \qquad \{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$$

Théorème de Noether 1 dans le cas symplectique:
Si X_F est une symétrie de H alors F est conservé le long du flot de X_H.

- X_F symétrie de $H \iff \mathrm{d}H(X_F) = 0 \iff X_F \lrcorner \mathrm{d}H = 0$.
- F conservé le long du flot de X_H: $\mathrm{d}F(X_H) = X_H \lrcorner \mathrm{d}F = 0$

Preuve:

$$\begin{aligned}
\{H, F\} :=& \omega(X_H, X_F) \\
=& (X_H \lrcorner \omega)(X_F) \\
=& -\mathrm{d}H(X_F) = -X_F \lrcorner \mathrm{d}H \\
=& X_H \lrcorner \mathrm{d}F
\end{aligned}$$

$$\boxed{X_H \lrcorner \mathrm{d}F = -X_F \lrcorner \mathrm{d}H = \{H, F\}}$$

$$\begin{aligned}
u : I \to& (\mathcal{M}, \omega) & \frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}t} =& \mathrm{d}Fu\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) \\
& & =& \mathrm{d}Fu(X_H) \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} =& X_H(\omega) & =& \{H, F\}(u)
\end{aligned}$$

Proposition:
$F \mapsto X_F$ symétrie infinitésimale de ω implique

$$L_{X_F}\omega = X_F \lrcorner \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(\underbrace{X_F \lrcorner \omega}_{=-\mathrm{d}F}) = 0 - \mathrm{d}(\mathrm{d}F) = 0$$

Se pose la question de si cette proposition admet une réciproque...
Soit $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ t.q. $L_X(\omega) = 0$

$$0 = L_X(\omega) = 0 + \mathrm{d}(X \lrcorner \omega)$$

d'où $X \lrcorner \omega$ est fermé.
En fait la réciproque dépend de la cohomologie de la variété:

$$H^1(\mathcal{M}) = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \exists F : X \lrcorner \omega = -\mathrm{d}F, \text{ i.e. } X = X_F$$

Sinon, on peut dire que c'est localement vrai, mais c'est pas aussi fort évidement. Bref:
Si $H^1(\mathcal{M}) = \{0\}$, X est une symétrie physique si et seulement si $L_X\omega = 0 = L_X H = X \lrcorner \mathrm{d}H$.

Premier lemme sympa: $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$ i.e.

$$(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot,\cdot\}) \xrightarrow[\text{morphisme d'algebre de Lie}]{X_{(\cdot)}} (\mathfrak{X}(\mathcal{M}), [\cdot,\cdot])$$

Preuve:
Montrons que $\mathrm{d}\{f,g\} + [X_f, X_g] \lrcorner \omega = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\{f,g\} &= \mathrm{d}\left(X_f \lrcorner \mathrm{d}g\right) \\
&= \mathrm{d}\left(X_f \lrcorner \mathrm{d}g\right) + X_f \lrcorner \underbrace{\mathrm{d}(\mathrm{d}g)}_{=0} \\
&\underset{\text{DD}}{=} L_{X_f}(\mathrm{d}g) \\
&\underset{\text{Leibneitz}}{=} L_{X_f}(-X_g \lrcorner \omega) \\
&= -\underbrace{L_{X_f}(X_g)}_{=[X_f,X_g]} \lrcorner \omega - X_g \lrcorner \underbrace{L_{X_f}\omega}_{=0}
\end{aligned}$$

Deuxième lemme: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$
Preuve:

$$\begin{aligned}
0 &\underset{\text{Lemme 1}}{=} \Big([X_f, X_g] - X_{\{f,g\}}\Big) \lrcorner \mathrm{d}h \\
&= X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h) - \{\{f,g\},h\} \\
&= \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,g\}\} + \{h,\{f,g\}\}
\end{aligned}$$

4 Variétés de Poisson

4.1 Introduction aux variétés de Poisson

<u>Définition</u>: (variété de Poisson)
variété $\mathcal{M}$ munie d'un crochet de Poisson

$$\{\cdot,\cdot\} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ (F,G) & \mapsto & \{F,G\} \end{array}$$

Vérifiant:

- Bilinéarité
- anti-symétrie
- identité de Jacobi (donc c'est un crochet de Lie)

- Leibnitz

Lemme final: ($\sim$Darboux pour les variétés de poisson)
Dans tout système de coordonnées locales (x_i),

$$\exists \pi = \sum_{i<j} \pi^{ij}(x)\partial_i \wedge \partial_j$$

$\partial_i \wedge \partial_j := (\partial_i \otimes \partial_j - \partial_j \otimes \partial_i)$, d'où $\pi = \pi^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$ une fois anti-symétrisé, de sorte que:

$$\{f, g\} = \sum_{ij} \pi^{ij}\partial_i(f)\partial_j(g)$$

$$\pi^{ab}\partial_b\pi^{a'a''} + \pi^{a'b}\partial_b\partial^{a''a} + \pi^{a''b}\partial_b\pi^{aa'} = 0 \qquad \text{(Jacobi)}$$

$$\pi \in \Gamma(\mathcal{M}, \lambda^2 T\mathcal{M})$$

Note: si on étends la dérivée de Lie au crochet de Schouten ($\sim$ dérivée de Lie sur les structures supérieures) alors $[\pi, \pi] = 0$.

Exemple: Dual d'une algèbre de Lie.

4.2 Aparté sur les Algèbres de Lie

Rappels de base: définitions équivalentes de l'algèbre de Lie canoniquement associée à un groupe de Lie G.

1. $\mathrm{Lie}(G) = T_eG$
2. $\mathrm{Lie}(G) = \{$ Champs vectoriels tangeants à G invariants à gauche (resp à droite) par l'action du groupe sur lui-même$\}$.

Autre rappel (de pure géo-diff):

$$(\varphi_* X)(x) = \mathrm{d}\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(X(\varphi^{-1}(x))) \qquad \varphi \text{ diffeomorphisme}$$

$$\varphi_* X \lrcorner \varphi^* \alpha = (X \lrcorner \alpha) \cdot \varphi \qquad \text{dualite push}-\text{forward \& pullback}$$

Encore un rappel: G groupe de Lie $\implies G \approx G' \subset \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$
On vas donc écrire l'action à gauche simplement: $L_g x =: gx$.

Dernier Rappel: X, Y invariants $\implies [X, Y]_{\mathfrak{X}(G)}$ invariant, d'où

$$[X, Y]_{\mathfrak{X}(G)}(e) =: [X, Y]_{\mathfrak{g}}$$

Point de vue dual: (Forme de Mauer-Cartan)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{X}(G) \\ \xi & \mapsto & \begin{array}{c}\text{le champ de vecteurs}\\ \text{invariant qui vaut } \xi \text{ en } e_G\end{array} \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie, et $\tilde{\xi}(x) = x \cdot \xi$.
On en déduit un isomorphisme $\alpha_x : T_xG \to \mathfrak{g}$ (enfin, une application inverser en fait):

$$\alpha_x(x.\xi) = \xi \qquad \rightsquigarrow \qquad \alpha \in \Omega^1(G \cdot \mathfrak{g}) = \Omega^1(G) \otimes \mathfrak{g}$$

C'est la *forme de Mauer-Cartan.*
Lemme: (Mauer-Cartan ou Formule de Cartan)

$$\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$$

où $\forall \alpha, \beta \in \Omega^1 \otimes \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}[\alpha \wedge \beta](v,w) :=& [\alpha(v), \beta(w)] - [\alpha(w), \beta(v)] \\ =& [\beta \wedge \alpha](v,w)\end{aligned}$$

Considérant une base (E_i) de $\mathfrak{g}$:

$$\alpha = \alpha^i E_i, \qquad \beta = \beta^i E_i, \qquad \alpha^i = \alpha^i_\mu \mathrm{d}x^\mu, \qquad \beta^i = \beta^i_\mu \mathrm{d}x^\mu$$

$$\begin{aligned}[\alpha \wedge \beta] =& \big[(\alpha^i E_i) \wedge (\beta^j E_j)\big] \\ =& \alpha^i \wedge \beta^j [E_i, E_j] \\ =& C^k_{ij} \alpha^i \wedge \beta^j E_k\end{aligned}$$

avec C^k_{ij} les coefficients de structure de l'algèbre de Lie dans $\mathfrak{g}$ pour la base (E_i). Bref:

$$[\alpha \wedge \beta]^k = C^k_{ij} \alpha^i \wedge \beta^j$$

Preuve: (formule de Cartan)

$$\mathrm{d}\alpha(X,Y) + \alpha\big([X,Y]\big) = X\dot{\alpha}(Y) - Y \cdot \alpha(Y)$$

$$X = x \cdot \xi \qquad\qquad Y = x \cdot \zeta \qquad\qquad (\xi, \zeta) \in \mathfrak{g}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha_x(x \cdot \xi, x \cdot \zeta) + \alpha_x\big([x \cdot \xi, x \cdot \zeta]\big) &= x \cot[\xi, \zeta] \\ &= \underbrace{(x \cdot \xi) \lrcorner \mathrm{d}\underbrace{\alpha_x(x \cdot \zeta)}_{=\zeta}}_{=0} - x \cdot \zeta \lrcorner \underbrace{\mathrm{d}(\xi)}_{=0} \\ \alpha_x\big(x \cdot [\xi, \zeta]\big) &= [\xi, \zeta] \\ &= \big[\alpha_x(x \cdot \xi), \alpha_x(x \cdot \zeta)\big] \\ &= \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha](x \cdot \xi, x \cdot \zeta)\end{aligned}$$

Bref,

$$\boxed{\left(\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]\right)(x \cdot \xi, x \cdot \zeta) = 0}$$

Retour à Poisson: (Duale d'une algèbre de Lie comme exemple non-trivial de variété de Poisson)
$\mathfrak{g}$ algèbre de Lie, (E_i) base de $\mathfrak{g}$, $C^k_{ij} := [E_i, E_j]^k$ coefficients de structure, $\{\cdot,\cdot\}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)^2$.

$\forall F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*), \forall \alpha \in \mathfrak{g}^* \qquad \mathrm{d}F_\alpha \in T^*_\alpha(\mathfrak{g}^*) \approx (\mathfrak{g}^*)^* \approx \mathfrak{g}$, et de même, $\mathrm{d}G_\alpha \in \mathfrak{g}$.
On pose donc:

$$\{F, G\}(\alpha) := \underbrace{\langle \underset{\in\mathfrak{g}^*}{\alpha}, \underset{\in\mathfrak{g}}{[\mathrm{d}F_\alpha, \mathrm{d}G_\alpha]} \rangle}_{\text{crochet de dualite}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

Il est trivial que ce crochet est bilinéaire, antisymétrique, Jacobi se vérifier simplement (c'est $\langle \alpha, \cdot \rangle$ qui contient toute cette structure), quand à Leibniz, on l'obtient directement en passant en coordonnées via:

$$\{F, G\}(\alpha) = \alpha_i C^i_{jk} \frac{\partial F}{\partial \alpha^j}(\alpha) \frac{\partial G}{\partial \alpha^k}(\alpha)$$

Réciproquement: si V est un espace vectoriel, et $\{\cdot, \cdot\}$ est un crochet de Poisson sur V^* linéaire, alors V est une algèbre de Lie.
En gros, tout se trouve dans la dualité: $\pi_{ij}(\alpha) = C^k_{ij}\alpha_k$

4.3 Retour à Poisson

Lien avec Noether: (application moment - Souriau)
Dynamique dans $(\mathcal{M}, \pi)$ variété de Poisson.

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \ni H \mapsto X_H \qquad \text{t.q.} \qquad \forall F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad X_H \lrcorner \mathrm{d}F = \{H, F\}$$

i.e. X_H agit comme un opérateur différentiel d'ordre 1.

$$\{H, F\}(x) = \pi^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial x^j} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{X_H = \pi^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}}$$

Équations "de" Hamilton:
Pour $\gamma : I \to \mathcal{M}$,

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = X_H(\gamma)$$
$$\frac{\mathrm{d}F(\gamma)}{\mathrm{d}t} = \{H, F\}(\gamma)$$

Maintenant, supposons qu'il existe G, groupe de Lie, qui agit sur $(\mathcal{M}, \pi)$ en respectant π (i.e. une action à droite laissant la dynamique invariante).
On rappel les propriétés élémentaires de l'exponentielle:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ \xi & \mapsto & \mathrm{e}^\xi \end{array} \qquad \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{t\xi}\right)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{t\xi} \cdot \xi \qquad \mathrm{e}^{t\xi}_{|t=0} = e_G$$

elle induit une action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{M}$.
Hypothèses:

$$\Psi : \begin{cases} \mathfrak{g} & \to \quad \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ [\cdot, \cdot]_\mathfrak{g} & \mapsto \quad \{\cdot, \cdot\} \end{cases} \quad \text{morphisme}$$

et $\forall \xi \ \Psi(\xi)$ satisfait:

- Symplectique: $\Psi(\xi) \lrcorner \omega + \mathrm{d}\big((H, \xi)\big) = 0$
- Poisson: $\mathrm{d}F\big(\Psi(\xi)\big) = \{(J, \xi), F\}$

où $J \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathfrak{g}^*)$= "application moment".
Noether symplectique:
si $\Psi(\xi) \lrcorner \mathrm{d}H = 0$ et que $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = X_H(\gamma)$ alors $J(\gamma)$ est constant.
Preuve:

$$\forall \xi \quad \frac{\mathrm{d}\left(\langle J, \xi\rangle(\gamma)\right)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\langle J, \xi\rangle_\gamma \underbrace{(\dot\gamma)}_{=X_H(\gamma)} = \big\{H, \langle J, \xi\rangle\big\}(\gamma)$$

Exemple Physique: Problème à deux corps

Exemple "canonique": T^*G variété symplectique
(sans preuves, mais voir les notes pour détails)

1. Action à droite de G sur T^*G:

$$\forall g \in G \quad R_g : \begin{cases} G & \to & G \\ x & \mapsto & xg \end{cases} \qquad \tilde R_g : \begin{cases} T^*G & \to & T^*G \\ (x,a)\begin{cases} x \in G \\ a \in T^*_x G \end{cases} & \mapsto & \tilde R_g(x,a) \end{cases}$$

$$\tilde R_g(x,a) = \Big(R_g x, R^*_{g^{-1}} a\Big) = \big(x, g, a \circ \mathrm{d}R_{g^{-1}}\big) \qquad \tilde R_{g_1, g_2} := \tilde R_{g_1} \circ \tilde R_{g_2}$$

2. $g \mapsto \mathrm{e}^{t\xi}$, $\xi \in \mathfrak{g}$ champ de vecteur invariant à droite.

$$X_\xi = \frac{\mathrm{d}\tilde R_{\mathrm{e}^{t\xi}}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} \qquad X_\xi(x,a) = \Big(x \cdot \xi, -(\mathrm{ad}_\xi p^*)a\Big)$$

où p est donné par:

3. X_ξ est une action hamiltonienne; σ la forme symplectique usuelle sur T^*G. Or $\exists! p$ t.q.

$$p : \begin{array}{ccc} T^*G & \to & \mathfrak{g}^* \\ (x,a) & \mapsto & p(x,a) \end{array} \qquad a = p_i(x,a)\alpha^i(x)$$

où $\alpha \in \Omega^1$ est la forme de Mauer-Cartan. i.e. $\exists! p \ : \ \langle p(x,a), \alpha_x\rangle = a$. Notons, au passage, que $\alpha = x^{-1}\mathrm{d}x$ en notation matricielle.

Ainsi,

$$\boxed{X_\xi \lrcorner \sigma + \mathrm{d}\langle p, \xi\rangle = 0}$$

et aussi:

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*), \qquad \boxed{\{f \circ p, g \circ p\}_{T^*G} = \{f, g\}_{\mathfrak{g}^*} \circ p}$$

on dit que p est un "morphisme de Poisson".

4.4 Poisson, distributions et feuilletages

Soit $(\mathcal{M}, \pi)$ une variété de Poisson.
Motivation via exemple: $\mathcal{M} = \mathfrak{so}(3)^* \approx \mathbb{R}^3$; $\mathfrak{so}(3) = \mathrm{Vect}\left(x^i \frac{\partial}{\partial x^{i+1}} - x^{i+1}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$